

LU3ME008 Projet Numérique

Evolution de la pression acoustique :

Dans ce projet, on étudiera la solution analytique et numérique de l'équation de transport. Avec une modélisation unidimensionnelle, l'équation régissant les variations spatiales et temporelles de la pression acoustique $P(x,t)$ s'écrit:

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} - c \frac{\partial P(x,t)}{\partial x} = 0$$

où c désigne la célérité du son.

Les conditions initiales sont que la pression acoustique à l'instant $t=0$ suit une variation sinusoïdale : $P(x,t=0)=\sin(x)$

Partie I Solution analytique

Questions :

- 1) Donner la solution analytique du problème.
- 2) Les valeurs numériques de $P(x,t)$ pour cette solution analytique dans un domaine spatio-temporel $x \in (0,10\pi)$, $t \in (0,2\pi)$ sont donc connus. On calcule les valeurs de $P(x,t)$ pour n_x points dans l'espace avec un intervalle $\Delta x = 10\pi/n_x$ aux instants $t = 0, 0.5\pi, \pi, 1.5\pi, 2\pi$. On choisit $n_x = 100 + \text{ETU}$ (ETU étant le dernier chiffre de votre numéro d'étudiant). La célérité du son est choisie artificiellement égale à $c = (1 + \text{ETU})/10$ (ETU étant le dernier chiffre de votre numéro d'étudiant)
- 3) Tracer les 4 profils de pression avec un logiciel graphique de votre choix.

Partie II Schéma Explicite

Pour la résolution numérique du problème, la discrétisation spatiale suivant x du domaine $x \in (0,10\pi)$ avec n_x nœuds est la même qu'en Partie I, la distance entre deux nœuds consécutifs (ou pas d'espace) étant égale à $\Delta x = 10\pi/n_x$. La solution sera recherchée aux instants $t^n = n\Delta t$ avec un pas de temps Δt constant.

On note P_i^n la valeur de la pression $P(x_i, t^n)$ au nœud i et à l'instant t^n . On discrétise la dérivée spatiale $\frac{\partial P(x,t)}{\partial x}$ par un schéma aux différences progressives qui s'exprime en fonction de P_i^n, P_{i+1}^n et Δx .

La dérivée temporelle $\frac{\partial P(x,t)}{\partial t}$ est discrétisée par un schéma aux différences progressives en fonction de P_i^{n+1}, P_i^n et Δt .

On fixe arbitrairement deux conditions aux limites $P(0,t)=P(10\pi,t)=0$.

A chaque nœud interne, on obtient ainsi une équation de la forme suivante :

$$P_i^{n+1} = \frac{1}{M} (P_{i+1}^n) + \left(1 - \frac{1}{M}\right) P_i^n.$$

En utilisant les conditions aux limites, on obtient l'équation discrétisée sous la forme $\vec{P}^{n+1} = [B]\vec{P}^n + \vec{b}$, sachant que $\vec{P}^n = \begin{pmatrix} P_1^n \\ \vdots \\ P_{nx-1}^n \end{pmatrix}$ est le vecteur de la pression à l'instant $t^n = n\Delta t$.

Questions :

- 4) On choisit un pas de temps $\Delta t = \pi/300c$. Construire la matrice $[B]$ et le vecteur \vec{b} .
Calculer une solution numérique jusqu'à $t = 2\pi$.
- 5) Tracer les profils de la pression (en fonction de x) aux instants $t = 0, 5\pi, \pi, 1,5\pi, 2\pi$.
Comparer avec les résultats analytiques de la partie I. Commenter.
- 6) Pour étudier la convergence, diviser Δt par 5 et comparer avec les résultats obtenus avec $\Delta t = \pi/300c$. Proposer une mesure de l'écart entre les deux solutions (justifier votre choix). Commenter.

Partie III Schéma implicite

Maintenant, on discrétise $\frac{\partial P(x,t)}{\partial x}$ par un schéma aux différences centrées en fonction de P_i^{n+1}, P_{i+1}^{n+1} et Δx , en conservant pour $\frac{\partial P(x,t)}{\partial t}$ un schéma aux différences progressives en fonction de P_i^{n+1}, P_i^n et Δt . Le problème numérique s'écrit comme suit (voir cours) :

$$[C]\vec{P}^{n+1} = \vec{P}^n + \vec{c}$$

Questions :

- 7) En conservant la même discrétisation spatiale et le pas de temps $\Delta t = \pi/300c$, construire la matrice $[C]$ et le vecteur \vec{c} .
- 8) Calculer une solution (on utilise la méthode de factorisation LU). Comparer avec la solution explicite (en traçant un profil ou une évolution).
- 9) Calculer les solutions en divisant le pas de temps par 5. Donner l'évolution de l'écart entre les solutions explicite et implicite. Commenter.

Partie IV Extensions possibles

- 10) Trouver un exemple de l'équation de transport dans la littérature (notamment une célérité du son réaliste) et essayer d'appliquer votre modèle numérique.
- 11) Etudier la différence de temps de calcul entre les schémas explicite et implicite pour obtenir une précision donnée.
- 12) Programmer un schéma d'ordre 2 en utilisant une différence centrée pour la discrétisation spatiale (Leap frog).
- 13) Etudier l'effet des conditions aux limites arbitrairement imposées.

Consignes

Le travail doit être réalisé en binôme (limité dans votre groupe de TP) et seul un dossier doit être rendu par binôme. Outre les travaux réalisés et les résultats obtenus, la qualité de présentation du rapport, l'originalité des choix d'études, la cohérence/logique dans le raisonnement et l'analyse, les discussions et commentaires sont aussi des éléments clés de l'appréciation (surtout pour obtenir une note au-dessus de la moyenne). Le non-respect des consignes et le retard seront pénalisés. 3 points (/15) seront portés sur ces éléments d'appréciation et les 12 points restant sur le travail réalisé.

Le projet risque d'être très long et la partie IV s'adresse plus particulièrement aux étudiants les plus motivés car l'effort nécessaire augmente exponentiellement pour avoir ces derniers points (faible par rapport aux parties I,II,III). Cette partie d'extension comporte également beaucoup de choix personnels dont les choix identiques sont peu probables. Il convient de ne pas diffuser votre choix car votre note sera divisée par le nombre de copies identifiées comme « identiques ».

Le rendu doit être effectué sur Moodle uniquement, avant le 20 décembre 2021 à 11h55, délai de rigueur. Le dossier rendu doit contenir les pièces suivantes :

- 1° Un compte-rendu (en **pdf**) concis de 10 pages maximum identifié par les noms-prénoms, groupe de TP et numéros d'étudiant des deux membres du binôme.
- 2° Un listing des programmes avec des commentaires pour la compréhension.
- 3° Un fichier readme (en **txt**) d'instructions de compilation et d'exécution de votre programme
- 4° Un fichier **pdf** contenant un tableau d'une page maximum résumant les grandes étapes de la réalisation de votre projet (le temps passé à chaque question, les difficultés théoriques ou techniques rencontrées, etc).

Bon courage.