МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет ИТМО»
(Университет ИТМО)

Факультет систем управления и робототехники

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА
по дисциплине
«Математический анализ»

по теме:
ИНТЕГРАЛ РИМАНА

Студент:
Группа R3135 *Д.А. Возжаева*

Предподаватель:
Доцент, научно-образовательный центр математики *А.А. Бойцев*

Санкт-Петербург 2023

СОДЕРЖАНИЕ

1 АНАЛИТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Задание: *Составьте интегральную сумму для интеграла Римана функции $f(x) = 2^x$ по промежутку [0, 2]. Вычислите интеграл через предел интегральных сумм. Докажите, что соответствующий интеграл существует. Проверьте с помощью формулы Ньютона–Лейбница.*

1.1 Интегральная сумма

В качестве разбиения выберем равномерное, где $x_i = \frac{2i}{n}$. Тогда $\forall i \in \{1, \ldots, n\} \Delta_i = \frac{2}{n}$. Оснаещние положим правым, а значит $f(\xi^i) = 2^{\frac{2i}{n}}$. В этом случае интегральная сумма выглядит так:

$$\sigma_\tau(f, \xi) = \sum_{i=1}^{n} (\frac{2}{n} \cdot 2^{\frac{2i}{n}})$$

Посчитаем сумму с помощью формулы суммы первых n челонов геометрической прогрессии:

$$\sigma_\tau(f, \xi) = \frac{2}{n} \cdot \frac{2^{\frac{2}{n}} \cdot (1-4)}{1 - 2^{\frac{2}{n}}}$$

1.2 Предел интегральной суммы

Поскольку при $n \to +\infty$ $\Delta_i = \frac{2}{n} \to 0$, значит $\lambda(\tau) \to 0$.

$$I = \lim_{\lambda(\tau) \to 0} \sigma_{\tau(f,\xi)} = \lim_{n \to +\infty} \cdot (-6) \frac{2}{n} \cdot \frac{2^{\frac{2}{n}} \cdot (1-4)}{1 - 2^{\frac{2}{n}}}$$

Воспользуемся эквивалентностью $a^\alpha - 1 \sim \alpha \cdot lna$ и непрерывностью показательной функции:

$$I = \lim_{n \to +\infty} \frac{6 \cdot 2^{\frac{2}{n}}}{n \cdot \frac{2}{n} \cdot ln2} = \frac{3}{ln2}$$

1.3 Вычисления с использованием формулы Ньютона-Лейбница

Поскольку $f(x) = 2^x$ непрерывная на $\mathbb{R}$ функция, можем применить формулу Ньютона-Лейбница для непрерывных функций:

$$\int_0^2 2^x dx = \frac{2^x}{ln2}\Big|_0^2 = \frac{4}{ln2} - \frac{1}{ln2} = \frac{3}{ln2}$$

2 ПРОГРАММА, ВЫЧИСЛЯЮЩАЕ И РИСУЮЩАЯ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ СУММЫ

Задание: *Напишите программу (язык любой), вычисляющую и рисующую интегральные суммы для данной функции на данном отрезке. Входные данные для программы: число точек разбиения, способ выбора оснащения (левые, правые, средние).*

2.1 Код на языке Python с использованием библиотеки matplotlib

```python
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib.patches import Rectangle
import numpy as np
def get_data():
    while True:
        try:
            n = int(input("Введите количество точек разбиения: "))
            if n > 0: break
            print("Необходимо ввести положительное число")
        except ValueError:
            print("Что-то пошло не так. Пожалуйста, введите целое число")
    while True:
        match input("Введите оснащение (левое, среднее или правое): "):
            case "левое":
                pos = 0
                pos_str = "Левое"
                break
            case "среднее":
                pos = 0.5
                pos_str = "Среднее"
                break
            case "правое":
                pos = 1
                pos_str = "Правое"
                break
            case _:
                print("Оснащение не найдено, пожалуйста, попробуйте еще раз")
    return n, pos, pos_str

def my_exp(x):
    return 2**x

def get_equipment(n, pos, func):
    return [func((2/n)*(i+pos)) for i in range(n)]

def integral_s(equipment):
    return sum([(2/len(equipment))*k for k in equipment])

```

```python
def make_plot(equipment, summ, pos_str):
    a, fig = plt.subplots()
    n = len(equipment)
    for i in range(n):
        fig.add_patch(Rectangle(((2/n)*i, 0), 2/n, equipment[i], color = [(1-i/n), 1, 0, 0.5]))
    ar = [i/10 for i in range(21)]
    fig.plot(ar, [2**i for i in ar], color = [0, 0.5, 0, 1])
    fig.text(0.5, 3.5, 'S = ' + str(summ),  color = [0, 0.5, 0, 1])
    fig.text(0.5, 3, pos_str[0].upper() + pos_str[1:] + ' разбиение',  color = [0, 0.5, 0, 1])
    fig.text(0.5, 2.5, "Кол-во точек: " + str(len(equipment)),  color = [0, 0.5, 0, 1])
    plt.show()
    return

def make_laboratornaya():
    n, pos, pos_str = get_data()
    equipment = get_equipment(n, pos, my_exp)
    my_summ = integral_s(equipment)
    make_plot(equipment, my_summ, pos_str)
    return "success!"
for i in range(4):
    make_laboratornaya()
```

Ссылка на репозиторий на github:

https://github.com/VozzhayevaDaria/IntegralSums

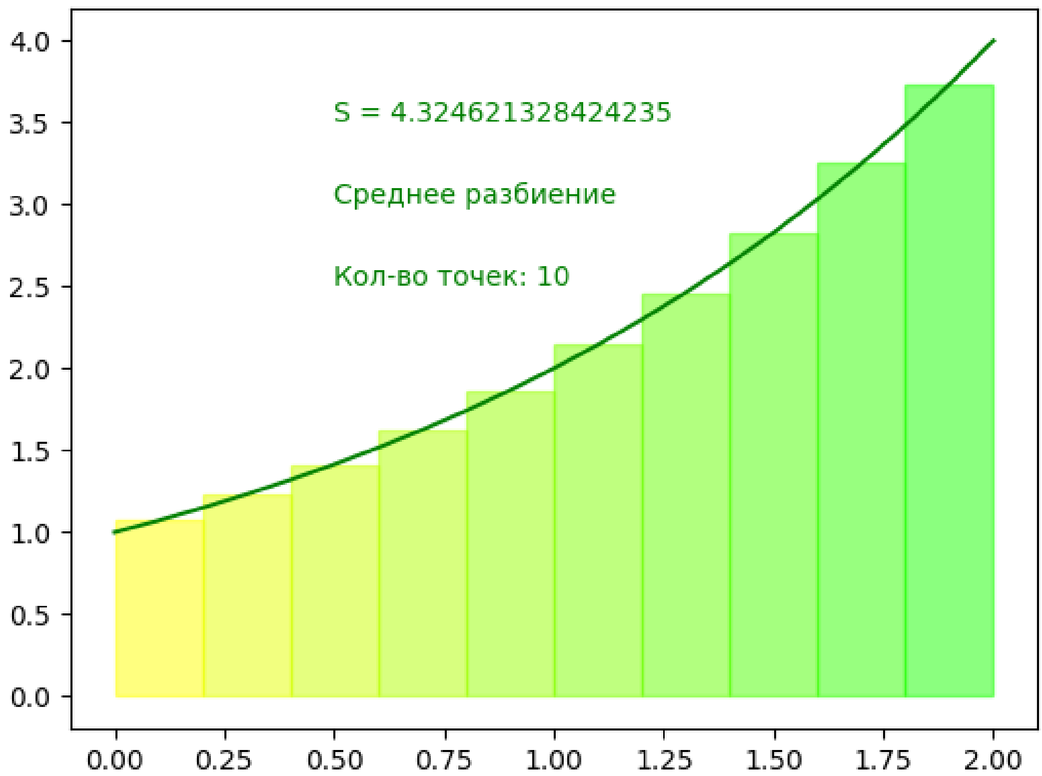
2.2 Ввод и вывод программы

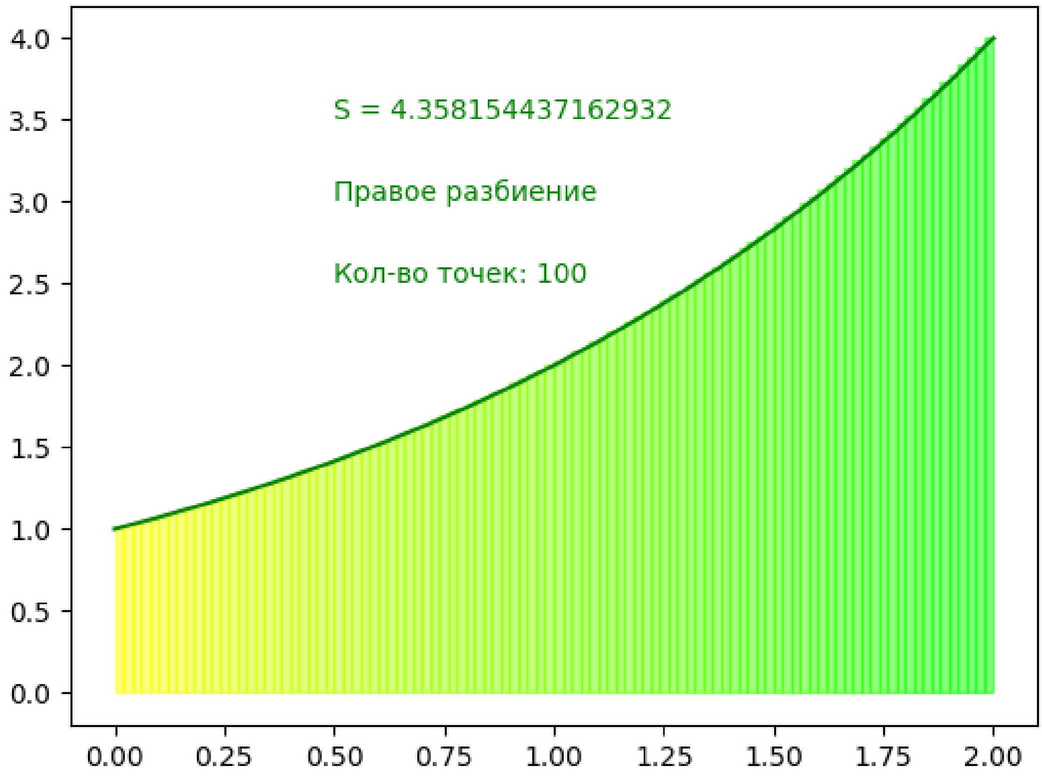
Введенные данные:

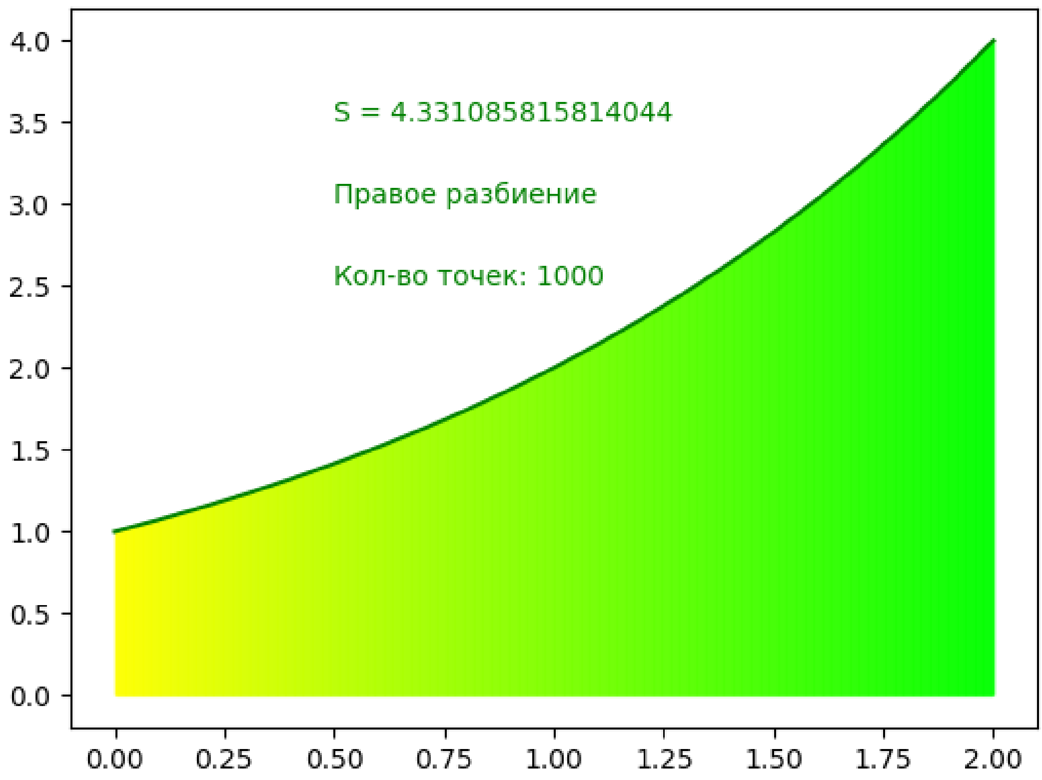
```
Введите количество точек разбиения: 10
Введите оснащение (левое, среднее или правое): левое
Введите количество точек разбиения: 10
Введите оснащение (левое, среднее или правое): среднее
Введите количество точек разбиения: 100
Введите оснащение (левое, среднее или правое): право
Оснащение не найдено, пожалуйста, попробуйте еще раз
Введите оснащение (левое, среднее или правое): правое
Введите количество точек разбиения: 100.0
Что-то пошло не так. Пожалуйста, введите целое число
Введите количество точек разбиения: 1000
Введите оснащение (левое, среднее или правое): правое

Process finished with exit code 0
```

Вывод программы:


S = 4.035014375323546
Левое разбиение
Кол-во точек: 10
4.0
3.5
3.0
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
0.00
0.25
0.50
0.75
1.00
1.25
1.50
1.75
2.00


S = 4.324621328424235
Среднее разбиение
Кол-во точек: 10
4.0
3.5
3.0
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
0.00
0.25
0.50
0.75
1.00
1.25
1.50
1.75
2.00


S = 4.358154437162932
Правое разбиение
Кол-во точек: 100
4.0
3.5
3.0
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
0.00
0.25
0.50
0.75
1.00
1.25
1.50
1.75
2.00


S = 4.331085815814044
Правое разбиение
Кол-во точек: 1000
4.0
3.5
3.0
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
0.00
0.25
0.50
0.75
1.00
1.25
1.50
1.75
2.00

3 ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ

Вычисляя значения интеграла мы полагали значение площади под графиком функции, заключенной между $x = x_i$ и $x = x_{i+1}$ равным $f(\xi^i) \cdot \Delta_i$:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \approx f(\xi^i) \cdot \Delta_i$$

Таким образом наш остаток представим в следующем виде:

$$R_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx - f(\xi^i) \cdot \Delta_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} (f(x) - f(\xi^i))dx$$

Воспользуемся формулой Тейлора:

$$f(x) = f(\xi^i) + \frac{f'(\xi^i) \cdot (x - \xi^i)}{1!} + \frac{f''(\xi_0^i) \cdot (x - \xi^i)^2}{2!}, \xi_0^i \in [x_i; x_{i+1}]$$

Рассмотри центральное и левое/правое оснащения отедльно

3.1 Центральное оснащение

Остаток для центральных точек оснащения имеет вид:

$$R_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{(x - \xi^i)^2 \cdot f''(\xi^i)}{2} dx$$

Замеитм, что в случае центрального оснащения $x - \xi^i = \frac{\Delta_i}{2}$. Очевидно, что $f''(\xi^i) \leq max(f''(x)), x \in [x_i; x_{i+1}] = M_i$. Тогда остаток можно оцентить так:

$$R_i \leq M_i \cdot \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{(\frac{\Delta_i}{2})^2}{2} dx = M_i \cdot \frac{\Delta_i^3}{24}$$

Проссумируем по i:

$$R_n = \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot \frac{\Delta_i^3}{24} \leq M_0 \cdot \frac{n \cdot \Delta_i^3}{24}, M_0 = max(\{M_i\}_{i=1}^n)$$

Поскольку $\Delta_i = \frac{(b-a)}{n}$, остаток при центральном оснащении имеет вид:

$$R_n \leq \frac{(b - a)^3}{24n^2} \cdot max(f''(x)), x \in [a,b]$$

3.2 Граничное оснащение

Остаток для левых/правых точек оснащения имеет вид:

$$R_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - \xi^i) \cdot f'(\xi^i) dx$$

Замеитм, что в случае центрального оснащения $x - \xi^i = \Delta_i$. Очевидно, что $f'(\xi^i) \leq max(f'(x)), x \in [x_i; x_{i+1}] = M_i$. Тогда остаток можно оцентить так:

$$R_i \leq M_i \cdot \int_{x_i}^{x_{i+1}} \Delta_i dx = M_i \cdot \frac{\Delta_i^2}{2}$$

Проссумируем по i:

$$R_n = \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot \frac{\Delta_i^2}{2} \leq M_0 \cdot \frac{n \cdot \Delta_i^2}{2}, M_0 = max(\{M_i\}_{i=1}^{n})$$

Поскольку $\Delta_i = \frac{(b-a)}{n}$, остаток при центральном оснащении имеет вид:

$$R_n \leq \frac{(b-a)^2}{2n} \cdot max(f'(x)), x \in [a,b]$$

3.3 Расчет погречностей

Количество точек разбиения	Оснащение	Теоретическая огрешность	Полученная погрешность
10	Левое	0.5545177444	0.2930707473
10	Центральное	0.0640604018	0.0034637942
100	Правое	0.0554517744	0.0300693144
1000	Правое	0.0055451774	0.0300693144

Из таблицы видно, что численно посчитанный интеграл не превышает теоретическую погрешность.