Pertemuan 7

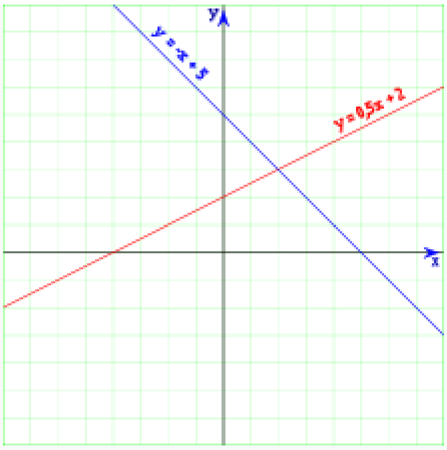
Persamaan Linier

Objektif:

1. Praktikan memahami teori dasar Persamaan Linier
2. Praktikan dapat menyelesaikan Persamaan Linier
3. Praktikan dapat membuat program berkisar tentang Persamaan Linier

P7.1 Teori

Persamaan linear adalah sebuah persamaan aljabar, yang tiap sukunya mengandung konstanta, atau perkalian konstanta dengan variabel tunggal. Persamaan ini dikatakan linear sebab hubungan matematis ini dapat digambarkan sebagai garis lurus dalam Sistem Koordinat Kartesius.



Contoh grafik dari suatu persamaan linear dengan nilai m=0,5 dan b=2 (garis merah)

Bentuk umum untuk persamaan linear adalah

$$y = mx + b.$$

Dalam hal ini, konstanta m akan menggambarkan gradien garis, dan konstanta b merupakan titik potong garis dengan sumbu-y. Persamaan lain, seperti x^3,$y^{1/2}$, dan xy bukanlah persamaan linear.

1.1 Sistem Persamaan Linier Dua Variabel

Persamaan linear yang rumit, seperti di sebut di atas, bisa ditulis dengan menggunakan hukum aljabar agar menjadi bentuk yang lebih sederhana. Seperti contoh, huruf besar di persamaan merupakan konstanta, dan x dan y adalah variabelnya.

Bentuk Umum

$$Ax + By + C = 0,$$

dimana konstanta A dan B bila dijumlahkan, hasilnya bukan angka nol. Konstanta dituliskan sebagai $A \geq 0$, seperti yang telah disepakati ahli matematika bahwa konstanta tidak boleh sama dengan nol. Grafik persamaan ini bila digambarkan, akan menghasilkan sebuah garis lurus dan setiap garis dituliskan dalam sebuah persamaan seperti yang tertera diatas. Bila $A \geq 0$, dan x sebagai titik potong, maka titik koordinat-*x* adalah ketika garis bersilangan dengan sumbu-x ($y = 0$) yang digambarkan dengan rumus -*c/a*. Bila $B \geq 0$, dan y sebagai titik potong, maka titik koordinat-*y* adalah ketika garis bersilangan dengan sumbu-y ($x = 0$), yang digambarkan dengan rumus -*c/b*.

Bentuk standar

$$ax + by = c,$$

dimana, *a* dan *b* jika dijumlahkan, tidak menghasilkan angka nol dan a bukanlah angka negatif. Bentuk standar ini dapat diubah ke bentuk umum, tapi tidak bisa diubah ke semua bentuk, apabila*a* dan *b* adalah nol.

Bentuk titik potong gradien

Sumbu-y

$$y = mx + b,$$

dimana m merupakan gradien dari garis persamaan, dan titik koordinat *y* adalah persilangan dari sumbu-*y*. Ini dapat digambarkan dengan $x = 0$, yang memberikan nilai $y = b$. Persamaan ini digunakan untuk mencari sumbu-*y*, dimana telah diketahui nilai dari x. *Y* dalam rumus tersebut merupakan koordinat *y* yang anda taruh di grafik. Sedangkan *X* merupakan koordinat *x* yang anda taruh di grafik.

Sumbu-x

$$x = \frac{y}{m} + c,$$

dimana m merupakan gradien dari garis persamaan, dan *c* adalah titik potong-*x*, dan titik koordinat *x* adalah persilangan dari sumbu-*x*. Ini dapat digambarkan dengan $y = 0$, yang memberikan nilai $x = c$. Bentuk *y/m* dalam persamaan sendiri berarti bahwa membalikkan gradien dan mengalikannya dengan y. Persamaan ini tidak mencari titik koordinat x, dimana nilai y sudah diberikan.

1.2 Sistem persamaan linear lebih dari dua variabel

Sebuah persamaan linear bisa mempunyai lebih dari dua variabel, seperti berikut ini:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b.$$

di mana dalam bentuk ini, digambarkan bahwa a_1 adalah koefisien untuk variabel pertama, x_1, dan n merupakan jumlah variabel total, serta b adalah konstanta.

1.3 Penulisan Persamaan Linier Dalam Bentuk Matriks

Sistem persamaan linier dapat dituliskan dalam bentuk matriks dengan memanfaatkan pengertian perkalian matriks. Bentuk itu adalah

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

atau secara singkat **Ax = B**

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}; \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix}; \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Dari cara penulisan tersebut di atas, ki ... ut **matriks gandengan**, yaitu dengan menggandengkan matriks **A** dengan **b** menjadi

$$\tilde{\mathbf{A}} = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

Matriks gandengan ini menyatakan sistem persamaan linier secara lengkap. **Operasi-operasi baris** pada sistem persamaan linier kita terjemahkan ke dalam matriks gandengan menjadi sebagai berikut

a). Setiap elemen dari baris yang sama dapat dikalikan dengan faktor bukan nol yang sama.
b). Satu baris boleh dijumlahkan ke baris yang lain.
c). Tempat baris (urutan baris) dapat dipertukarkan.

Setiap operasi baris akan menghasilkan matriks gandengan baru. Matriks gandengan baru ini disebut sebagai **setara baris** dengan matriks gandengan yang lama. Operasi baris dapat kita lakukan lagi pada matriks gandengan baru dan menghasilkan matriks gandengan yang lebih baru lagi dan yang terakhir inipun setara baris dengan matriks gandengan yang lama. Dengan singkat kita katakan bahwa operasi baris menghasilkan matriks gandengan yang setara baris dengan matriks gandengan asalnya. Hal ini berarti bahwa matriks gandengan baru menyatakan sistem persamaan linier yang sama dengan matriks gandengan asalnya.

1.4 Eliminasi Gauss

Eliminasi Gauss merupakan langkah-langkah sistematis untuk memecahkan sistem persamaan linier. Karena matriks gandengan merupakan pernyataan lengkap dari suatu sistem persamaan linier, maka eliminasi Gauss cukup dilakukan pada matriks gandengan ini.

Contoh :

Suatu sistem persamaan linier:

$$\begin{aligned} x_A - x_B &= 8 \\ -x_A + 4x_B - 2x_C &= 0 \\ x_A - 3x_B + 5x_C - 2x_D &= 8 \\ -x_A + 4x_B - 3x_C + 2x_D &= 0 \end{aligned}$$

Kita tuliskan persamaan ini dalam bentuk matriks:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & 5 & -2 \\ -1 & 4 & -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \\ x_C \\ x_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Matriks gandengnya adalah:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 8 \\ -1 & 4 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 5 & -2 & 8 \\ -1 & 4 & -3 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

***Langkah*-1:**

Langkah pertama pada eliminasi Gauss pada matriks gandengan adalah ***mempertahankan baris ke-1*** (disebut mengambil baris ke-1 sebagai ***pivot***) dan ***membuat suku pertama*** baris-baris berikutnya menjadi bernilai **nol**. Pada matriks yang diberikan ini, langkah pertama ini dilaksanakan dengan menambahkan baris ke-1 ke baris ke-2, mengurangkan baris ke-1 dari baris ke-3 dan menambahkan baris ke-1 ke baris ke-4. Hasil operasi ini adalah

$$\begin{array}{cl} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & 8 \\ 0 & -2 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 2 & 8 \end{array}\right] & \begin{array}{l} \text{piv} \\ (+\text{bai} \\ (-\text{ba1} \\ (+\text{ba1} \end{array} \end{array}$$

***Langkah*-2:**

Langkah kedua adalah mengambil baris ke-2 dari matriks gandeng yang baru saja kita peroleh sebagai pivot, dan membuat suku kedua baris-baris berikutnya menjadi nol. Ini kita lakukan dengan mengalikan baris ke-2 dengan 2/3 kemudian menambahkannya ke baris ke-3, dan mengurangkan baris ke-2 dari baris ke-4. Hasil operasi ini adalah

$$\begin{array}{cl} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 5-4/3 & -2 & 16/3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right] & \begin{array}{l} \\ (\text{piv} \\ (2/3\ \text{ba} \\ (-\text{ba2} \end{array} \end{array}$$

Kalikan baris ke 3 dengan 3 agar diperoleh bilangan bulat

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 11 & -6 & 16 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

***Langkah*-3:**

Langkah ketiga adalah mengambil baris ke-3 sebagai pivot dan membuat suku ke-3 dari baris ke-4 menjadi nol. Ini dapat kita lakukan dengan mengalikan baris ke-4 dengan 11 kemudian menambahkan kepadanya baris ke-3. Hasilnya adalah:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 11 & -6 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 16 & 16 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \text{piv} \\ \times 11 + \text{ba} \end{array}$$

Hasil terakhir langkah ketiga adalah: $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 11 & -6 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 16 & 16 \end{array}\right]$

Matriks gandeng terakhir ini menyatakan bentuk matriks: $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \\ x_C \\ x_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 8 \\ 16 \\ 16 \end{bmatrix}$

Matriks terakhir ini menyatakan sistem persamaan linier:

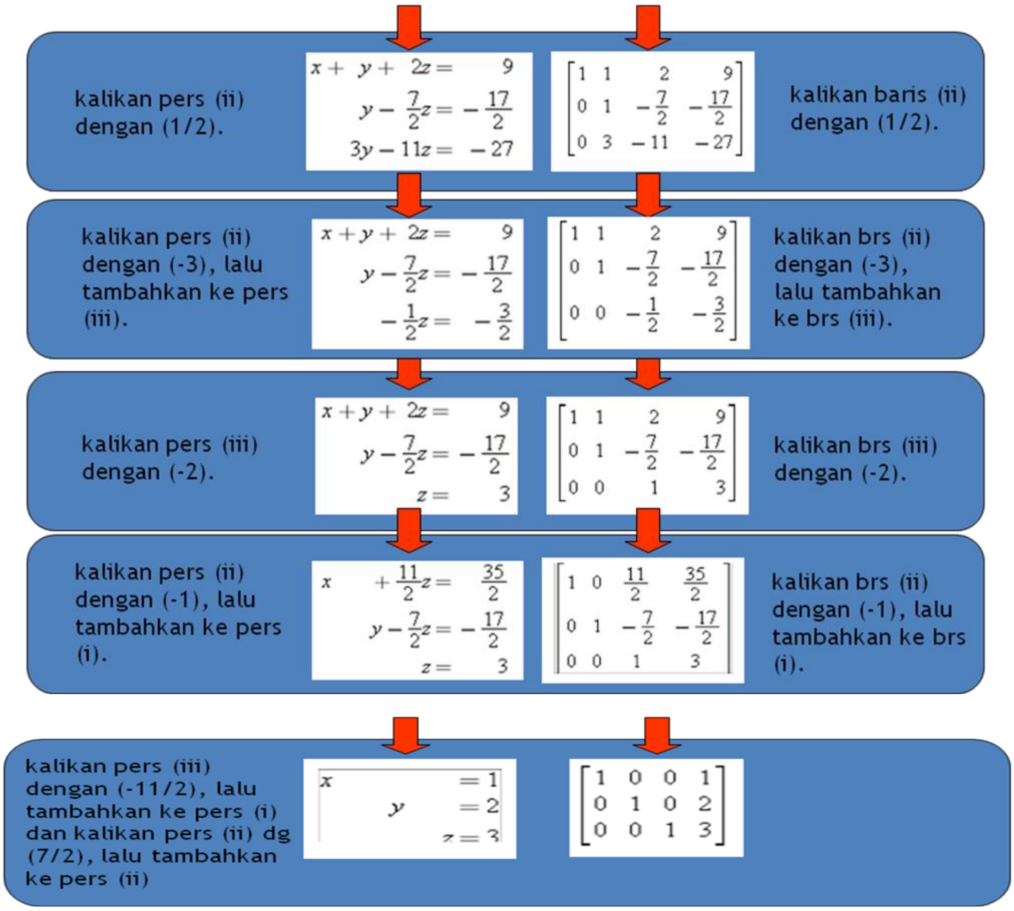
$$x_A - x_B = 8$$
$$3x_B - 2x_C = 8$$
$$11x_C - 6x_D = 16$$
$$16x_D = 16$$

yang dengan substitusi mundur akan memberikan:

$$x_D = 1;\ x_C = 2;\ x_B = 4;\ x_A = 1$$

P7.2 Contoh Kasus

DIKETAHUI	$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ 2x + 4y - 3z &= 1 \\ 3x + 6y - 5z &= 0 \end{aligned}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$	............(i) ....(ii) ....(iii)
kalikan pers (i) dengan (-2), kemudian tambahkan ke pers (ii).	$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ 2y - 7z &= -17 \\ 3x + 6y - 5z &= 0 \end{aligned}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$	kalikan baris (i) dengan (-2), lalu tambahkan ke baris (ii).
kalikan pers (i) dengan (-3), kemudian tambahkan ke pers (iii).	$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ 2y - 7z &= -17 \\ 3y - 11z &= -27 \end{aligned}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix}$	kalikan baris (i) dengan (-3), lalu tambahkan ke baris (iii).
kalikan pers (ii) dengan (1/2).	$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ y - \frac{7}{2}z &= -\frac{17}{2} \\ 3y - 11z &= -27 \end{aligned}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix}$	kalikan baris (ii) dengan (1/2).



Diperoleh penyelesaian x = 1, y = 2, z = 3. Terdapat kaitan menarik antara bentuk SPL dan representasi matriksnya.

P7.3 Latihan

1. Apa yang anda ketahui tentang sistem persamaan linier ?
2. Apa yang dimaksud dengan persamaan linear dua variable ? Berikan contohnya!
3. Ada berapa cara metode untuk mencari persamaan liniear? Sebutkan dan Jelaskan!
4. Jika (x_0,y_0,z_0) memenuhi sistem persamaan linear berikut

   $2x + y – 3x = -11$

   $x + 2y + z = 4$

   $3x – 3y + 2z = 25$

   Tentukan nilai (x_0,y_0,z_0) !
5. Ubah ke dalam bentuk persamaan linier matriks di bawah ini !

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & -2 & 5 \\ 1 & -5 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & -3 & 9 \end{bmatrix}$$

P7.4 Daftar Pustaka

1. http://id.wikipedia.org/wiki/Persamaan_linear
2. http://staffsite.gunadarma.ac.id/ratih/index.php?stateid=download&id=12656&part=files
3. http://eecafedotnet.files.wordpress.com/2011/08/sistem-persamaan-linier.pptx