DEFINISI RELASI, PRODUK CARTESIUS DAN RELASI, PENYAJIAN RELASI, RELASI INVERS , KOMPOSISI RELASI, SIFAT-SIFAT RELASI

2

OBJEKTIF :

1. Mahasiswa Mampu Memahami tentang Definisi Relasi, produk kartesius, penyajian relasi, relasi invers, komposisi relasi dan sifat – sifat relasi.
2. Mahasiswa Mampu Menggunakan *Software* Netbeans dalam membuat program tentang relasi.

2.1 RELASI

Apa itu Relasi ?

"Relasi (hubungan) himpunan A ke B adalah pemasangan anggota-anggota A dengan anggota-anggota B".

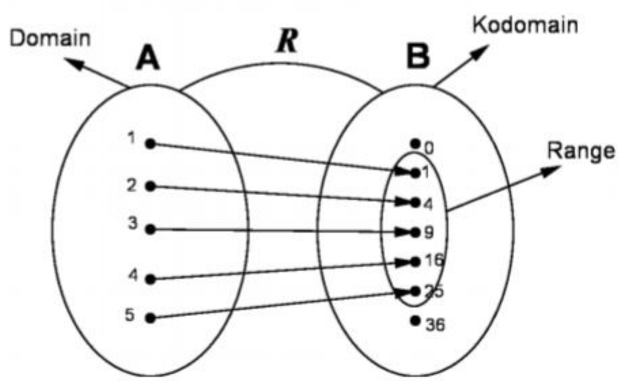
Anggota sebuah himpunan dapat dihubungkan dengan anggota himpunan lain atau dengan anggota himpunan yang sama. Hubungan tersebut dinamakan relasi.

Contoh 1

Misalkan M = {Ami, Budi, Candra, Dita} dan N = {1, 2, 3}.

Misalkan pula, Ami berusia 1 tahun, Budi berusia 3 tahun, Candra berusia 2 tahun dan Dita berusia 1 tahun, maka kita dapat menuliskan sebuah himpunan P = {(Ami, 1), (Budi, 3), (Candra, 2), (Dita, 1)} dimana P merupakan himpunan pasangan terurut yang menggambarkan hubungan antara himpunan M dengan himpunan N.

Himpunan P merupakan relasi antara himpunan M dengan himpunan N dan dapat ditulis sebagai P = {(x,y) | x berusia y, dimana $x \in M$ dan $y \in N$}.



- R : A $\rightarrow$ B, artinya R relasi dari himpunan A ke himpunan B
- Relasi biner R antara himpunan A dan B adalah himpunan bagian dari $A \times B$.

Notasi: $R \subseteq (A \times B)$.

- a R b adalah notasi untuk $(a, b) \in R$, yang artinya a dihubungkan dengan b oleh R
- a R b adalah notasi untuk $(a, b) \notin R$, yang artinya a tidak dihubungkan oleh b oleh relasi R
- **Relasi pada himpunan A** adalah relasi dari himpunan A ke himpunan A , dimana $R \subseteq (A \times A)$

<u>CONTOH 1 :</u>

Misalkan A adalah himpunan mahasiswa dan B adalah himpunan usia.

A = {Ali, Budi, Candra}, B = {1,2,3}

$A \times B$ ={(Ali,1),(Ali,2),(Ali,3),(Budi,1),(Budi,2),(Budi,3), (Candra,1),(Candra,2),(Candra,3)}

Misalkan R adalah **<u>relasi yang menyatakan hubungan himpunan A</u>** <u>dengan</u> **<u>usianya</u>**.

Diketahui Ali berusia 1 tahun, Budi berusia 3 tahun, dan Candra berusia 1 tahun. Maka,

R = {(Ali, 1), (Budi, 3), (Candra,1) }

- R $\subseteq$ (A $\times$ B),
- A adalah daerah asal R, dan B adalah daerah hasil R.
- (Ali,1) $\in$ R atau Ali R 1
- (Ali,2) $\notin$ R atau Ali R 2.

<u>CONTOH 2 :</u>

Misalkan P = {2, 3, 4} dan Q = {2, 4, 8, 9, 15}. Jika kita definisikan relasi R dari P ke Q dengan

(p, q) $\in$ R jika p dapat membagi q

maka kita peroleh:

R = {(2, 2), (2, 4), (4, 4), (2, 8), (3, 9), (3, 15), (4, 8) }]

<u>CONTOH 3 :</u>

Misalkan R adalah relasi pada A = {2, 3, 4, 8, 9} yang didefinisikan oleh (x, y) $\in$ R jika x adalah faktor prima dari y. Maka kita peroleh:

R = {(2, 2), (2, 4), (2, 8), (3, 3), (3, 9)}

2.2 PRODUK CARTESIUS DAN RELASI

- Produk Cartesius (produk cartesius) dari A ke B atau disebut pula himpunan perkalian kartesian dari A ke B, dan ditulis A x B dibaca “A kros B” atau “A kali B” atau “A silang B”.

- Perkalian kartesian dari himpunan A x B adalah himpunan semua pasangan terurut (x, y) dimana $x \in A$ dan $y \in B$.

- Notasi: A x B = { x, y) : x $\in$ A dan y $\in$ B } (x,y) disebut pasangan urut, dimana , ≠ (,).

Contoh Jika A = {2, 3, 4} dan B = {x, y},

maka A x B = { (2,x) , (2,y) , (3,x) , (3,y) , (4,x) , (4,y) }

B x A= { (x,2) , (y,2) , (x,3) , (y,3) , (x,4) , (y,4) }

Sebuah relasi R yang memasangkan anggota himpunan A kepada anggota himpunan B, ditulis R : A → B merupakan sebuah himpunan bagian dari perkalian cartesian A × B, ditulis $R \subseteq A \times B$. Jika sebuah relasi R didefinisikan pada himpunan A, ditulis R : A → A, maka $R \subseteq A \times A$.

CONTOH :

1. Misalkan C = {2, 3, 4} dan D = {x, y}.
   C × D = {(2,x), (2,y), (3,x), (3,y), (4,x), (4,y)}
   Sebuah relasi R1: C → D didefinisikan sebagai R1 = {(2,y) , (3,x) , (4,x), (4,y)}.
   Jelas bahwa $R1 \subseteq C \times D$
2. Relasi R2 : G → G didefinisikan pada himpunan

G = {5, 7, 11} sebagai R2 = {(x,y) |x < y, dimana x, y $\in$ G}. Relasi tersebut dapat dinyatakan sebagai R2 = {(5,7),(5,11), (7,11)} Jelas bahwa R2 $\subseteq$ G × G.

2.3 PENYAJIAN RELASI

Misalkan M = {Ami, Budi, Candra, Dita} dan N = {1, 2, 3}. Misalkan pula, Ami berusia 1 tahun, Budi berusia 3 tahun, Candra berusia 2 tahun dan Dita berusia 1 tahun,

maka :

P = {(Ami, 1), (Budi, 3), (Candra, 2), (Dita, 1)}

1. PENDAFTARAN (TABULASI),

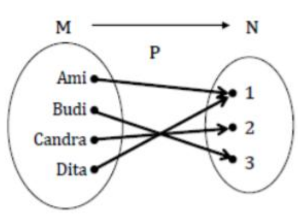
   himpunan pasangan terurut dalam

   P = {(Ami, 1), (Budi, 3), (Candra, 2), (Dita, 1)}

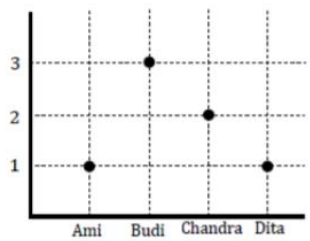
2. BENTUK PENCIRIAN,

   P = {(x,y)|x berusia y, dimana x $\in$ M dan y $\in$ N}

3. DIAGRAM PANAH



4. DIAGRAM KOORDINAT ATAU GRAFIK RELASI



5. TABEL

- Kolom pertama tabel menyatakan daerah asal, sedangkan kolom kedua menyatakan daerah hasil.

Tabel Relasi P dari

M	N
Ami	1
Budi	2
Candra	3
Dita	1

6. PENYAJIAN RELASI DENGAN MATRIKS

- Misalkan R adalah relasi dari A = {a1, a2, …, am} dan B = {b1, b2, …, bn}.
- Relasi R dapat disajikan dengan matriks M = [m_{ij}]

$$M = \begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{array} \\ \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{m1} & m_{m2} & \dots & m_{mn} \end{bmatrix} \end{array}$$

Yang dalam hal ini

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, (a_i, b_j) \in R \\ 0, (a_i, b_j) \notin R \end{cases}$$

<u>CONTOH :</u>

Misalkan A = {2,3,4} dan B = {2,4,8,9,15}. Jika kita definisikan relasi R dari A ke B dengan aturan : (x, y) ∈ R jika x adalah faktor prima dari y. Maka kita peroleh:

R = {(2, 2), (2, 4), (2, 8), (3, 9), (3, 15)}

Relasi R pada Contoh dapat dinyatakan dengan matriks

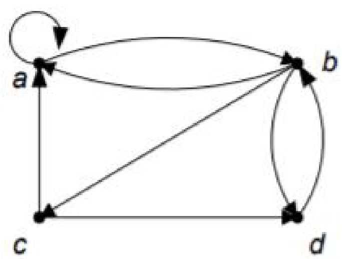
$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} 2 & 4 & 8 & 9 & 15 \end{array} \\ \begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, (a_i, b_j) \in R \\ 0, (a_i, b_j) \notin R \end{cases}$$

7. PENYAJIAN RELASI DENGAN GRAF BERARAH
   - Jika (a, b) ∈ R, maka sebuah busur dibuat dari simpul a ke simpul b. Simpul a disebut simpul asal (initial vertex) dan simpul b disebut simpul tujuan (terminal vertex).
   - Pasangan terurut (a, a) dinyatakan dengan busur dari simpul a ke simpul a sendiri. Busur semacam itu disebut gelang atau kalang (loop).

<u>CONTOH :</u>

Misalkan R = {(a, a), (a, b), (b, a), (b, c), (b, d), (c, a), (c, d), (d, b)} adalah relasi pada himpunan {a, b, c, d}. R direpresentasikan dengan graf berarah sbb:



2.4 RELASI INVERS

Setiap relasi R dari A ke B mempunyai sebuah relasi invers R-1 dari B ke A yang didefinisikan sebagai :

R -1 = {(b,a)| (a,b) ∈R}

- Misalkan A={1, 2, 3} dan B = {a, b}
- R = {(1,a), (1,b), (3,a)}
- R-1 = {(a,1), (b,1), (a,3)}

CONTOH :

Misalkan P = {2, 3, 4} dan Q = {2, 4, 8, 9, 15}. Jika kita definisikan relasi R dari P ke Q dan R^{-1} ?

- ✓ (p, q) ∈ R jika p dapat membagi q maka kita peroleh :
  R = {(2, 2), (2, 4), (4, 4), (2, 8), (4, 8), (3, 9), (3, 15) }
  R^{-1}= {(2, 2), (4, 2), (4, 4), (8, 2), (8, 4), (9, 3), (15, 3) }

Jika M adalah matriks yang merepresentasikan relasi R,

$$M = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 2 & 4 & 8 & 9 & 15 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}$$

maka matriks yang merepresentasikan relasi R^{-1}, misalkan N, diperoleh dengan melakukan transpose terhadap matriks M,

$$N = M^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

2.5 KOMPOSISI RELASI

Misalkan R adalah relasi dari himpunan A ke himpunan B, dan S adalah relasi dari himpunan B ke himpunan C. Komposisi R dan S, dinotasikan dengan S ο R, adalah relasi dari A ke C yang didefinisikan oleh

S ο R = {(a, c) | a ∈ A, c ∈ C, dan untuk beberapa b ∈ B,

(a, b) ∈ R dan (b, c) ∈ S }

CONTOH :

Misalkan relasi dari himpunan {1, 2, 3} ke himpunan {2, 4, 6, 8} adalah

R = {(1, 2), (1, 6), (2, 4), (3, 4), (3, 6), (3, 8)}

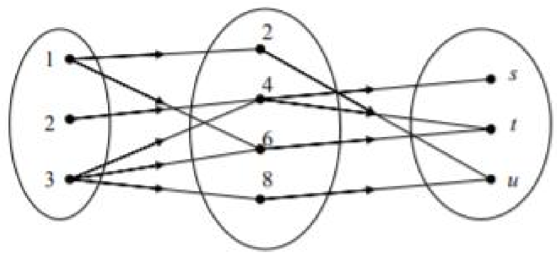
relasi dari himpunan {2, 4, 6, 8} ke himpunan {s, t, u} adalah

S = {(2, u), (4, s), (4, t), (6, t), (8, u)}

Maka komposisi relasi R dan S adalah

S ο R = {(1, u), (1, t), (2, s), (2, t), (3, s), (3, t), (3, u) }

Komposisi relasi R dan S lebih jelas jika diperagakan dengan diagram panah:



2.6 <u>SIFAT-SIFAT RELASI</u>

1. RELASI REFLEKSIF
   - Misalkan R = (A, A, P(x,y))
   - R adalah relasi refleksif bila :
   - Untuk setiap a $\in$A, (a,a) $\in$R
     - Misalkan V={1, 2, 3, 4}
     - R = {(1,1), (2,4), (3,3), (4,1), (4,4)}
     - (1,1) (3,3) (4,4) $\in$R → R relasi refleksif
     - (2,2) $\notin$ R → R bukan relasi refleksi

2. RELASI SIMETRIS (timbal balik)
   - Misalkan R = (A, A, P(x,y))
   - R adalah relasi simetris bila : (a,b) $\in$R → (b,a) $\in$R
     - Misalkan S={1, 2, 3, 4}
     - R = {(1,3), (4,2), (2,4), (2,3), (3,1)}
     - (2,3) $\in$R tetapi (3,2) $\notin$R → R bukan relasi simetris
     - Misalkan R = (N,N,P(x,y))
     - P(x,y) = “x dapat membagi y”

- $(2,4) \in R$ tetapi $(4,2) \notin R \rightarrow R$ bukan relasi simetris

$$\mathrm{R} = \mathrm{R}^{-1} \rightarrow R = Simetris$$

3. RELASI ANTI-SIMETRIS

- Relasi R pada himpunan A disebut anti simetri jika: $(a, b) \in R$ dan $(b, a) \in R$ hanya jika $a = b$ untuk $a, b \in A$.
- Dengan kata lain: Jika $(a, b) \in R$, maka $(b, a) \notin R$, kecuali ketika $a = b$
  - Misalkan W={1, 2, 3, 4}
  - R = {(1,3), (4,2), (4,4), (2,4)}
    $(4,2) \in R$ dan $(2,4) \in R \rightarrow R$ **<u>bukan relasi *anti-simetris*</u>**
  - R = {(1,3), (4,2), (3,3), (4,4)}
    <u>Anti simetri</u>, karena $(3, 3) \in R$ dan 3 = 3 dan, $(4, 4) \in R$ dan 4 = 4, (1, 3) & $(4,2) \in R$ tetapi (3,1) & (2,4) $\notin$ **R**

Hubungan Relasi Simetrik & Antisimetrik

❖ Simetris tetapi antisimetris

❖ Simetris dan tidak antisimetris

❖ Tidak Simetris tetapi antisimetris

❖ Tidak Simetris dan tidak antisimetris

Contoh Relasi Simetrik & Antisimetrik

Misalkan *A* = {1, 2, 3, 4}, dan relasi *R* di bawah ini didefinisikan pada himpunan *A*, maka :

➨ Relasi *R* = { (1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (2, 4), (4, 2), (4, 4) } bersifat **simetrik dan tidak antisimetrik**

❖ Karena (1, 2) dan $(2, 1) \in R$, begitu juga (2, 4) dan $(4, 2) \in R$.

➨ Relasi R = { (1, 1), (2, 3), (2, 4), (4, 2) } bersifat **tidak simetrik dan tidak antisimetrik**

❖ Karena (2, 3) $\in R$, tetapi (3, 2) $\notin R$.

➨ Relasi R = { (1, 1), (2, 2), (3, 3) } bersifat **simetrik tetapi antisimetrik**.

❖ Karena 1 = 1 dan (1, 1) $\in R$, 2 = 2 dan (2, 2) $\in R$, dan 3 = 3 dan (3, 3) $\in R$

➨ Relasi R = { (1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 3) } **tidak simetrik tetapi antisimetrik**

❖ Karena (1, 1) $\in R$ dan 1 = 1 dan, (2, 2) $\in R$ dan 2 = 2.

➨ Relasi R = { (1, 1), (2, 4), (3, 3), (4, 2) } **tidak simetrik dan tidak antisimetrik**

❖ Karena 2 $\neq$ 4 tetapi (2, 4) dan (4, 2) anggota R.

➨ Relasi R = { (1, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (4, 2), (4, 4) } **tidak simetrik dan tidak antisimetrik**.

❖ karena (4, 2) $\in R$ tetapi (2, 4) $\notin R$. R tidak antisimetrik karena (2, 3) $\in R$ dan (3, 2) $\in R$ tetap 2≠3

4. RELASI TRANSITIF
   - Misalkan R = (A, A, P(x,y))
   - R adalah relasi transitif bila : (a,b) $\in$R dan (b,c) $\in$R → (a,c) $\in$R

- R =(R# , R# ,P(x,y)
- P(x,y) = " x lebih kecil dari y"
- a < b dan b < c → a < c
- R → R adalah relasi transitif

CONTOH :

Misalkan A = {1, 2, 3, 4}, dan relasi R di bawah ini didefinisikan pada himpunan A, maka :

(a) R = { (2, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (4, 3) } bersifat menghantar. Lihat tabel berikut

PASANGAN BERBENTUK		
(a,b)	(b,c)	(a,c)
(3,2)	(2,1)	(3,1)
(4,2)	(2,1)	(4,1)
(4,3)	(3,1)	(4,1)
(4,3)	(3,2)	(4,2)

(b) R = { (1, 1), (2, 3), (2, 4), (4, 2) } tidak manghantar karena (2, 4) dan (4, 2) $\in R$, tetapi (2, 2) $\notin R$, begitu juga (4, 2) dan (2, 3) $\in R$, tetapi (4, 3) $\notin R$.

(c) Relasi R = { (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4) } jelas menghantar Relasi yang hanya berisi satu elemen seperti R = {(4, 5)} selalu menghantar.

CONTOH PROGRAM PADA JAVA

```
import java.io.*;
import java.util.Scanner;
public class relasi
{
public static void main ( String [] args ) throws Exception {
{
Scanner input = new Scanner(System.in);
int anggotaA;
int anggotaB;

//masukkan banyaknya Anggota dan Elemennya
System.out.print("\nmasukan Banyaknya AnggotaA : ");
```

```
anggotaA = input.nextInt();
int [] a = new int [anggotaA];
System.out.println("Masukkan AnggotaA : ");
for(int i=0;i<=anggotaA-1;i++){
int L = i + 1;
System.out.print("Elemen ke-["+L+"] :");
a[i] = input.nextInt();
}

//masukkan elemen AnggotaB
System.out.print("\nmasukkan banyaknya AnggotaB : ");
anggotaB = input.nextInt();
int [] b = new int [anggotaB];
System.out.println("Masukkan AnggotaB : ");
for(int i=0 ; i <= anggotaB-1 ; i++){
int L = i + 1;
System.out.print("Elemen ke-["+L+"] :");
b[i] = input.nextInt();
}
System.out.println("\n");
//tampil anggotaA
System.out.print("Anggota Himpunan A = { ");
for(int i=0;i<=anggotaA-1;i++){
System.out.print(a[i]+ "");
}
System.out.println("}");
//tampil anggotaB
System.out.print("Anggota Himpunan B = { ");
for(int i=0;i<=anggotaB-1 ;i++){
System.out.print(b[i]+ "");
}
System.out.println("}");
```

```
//jumlah kedua anggota
int jumlahAB = anggotaA + anggotaB;
//inputkan relasi Antara Anggota A dan B
/*String[] c = new String[jumlahAB];
String[] d = new String[jumlahAB];*/
String[] e = new String[jumlahAB];
System.out.print("masukkan banyaknya relasi [ <= "+jumlahAB+" ] : " );
int banyak = input.nextInt();
char[] f = new char[banyak];
char[] g = new char[banyak];
System.out.println("inputkan dengan cara A,B ");
DataInputStream bl = new DataInputStream(System.in);
for(int i=0;i<=banyak-1;i++)
{
e[i] = bl.readLine();
}

//mengambil karakter
try{
for(int i=0;i<=banyak-1;i++)
{
e[i].getChars(0,1,f,i);
e[i].getChars(2,3,g,i);
}

boolean cek = true;
for(int i=0;i<=banyak-1;i++)
{
for(int x=0;x<=i;x++)
{
if(f[i]!=a[x])
{
cek = false;
```

```
}
else
if(g[i]!=b[x])
{
cek= false;
}
}
}

if(cek==false)
{System.out.println("Out Of Range");}
else
{System.out.println("\n");}
}
catch(Exception ex){ System.out.println("\n");}

//Range
System.out.print("\nRange = { ");
for(int i=0;i<=banyak-1;i++)
{
System.out.print(g[i]+"");
}
System.out.println("}");

//domain
System.out.print("Domain = { ");
for(int i=0;i<=anggotaA-1;i++){
System.out.print(a[i]+"");
}
System.out.println("}");

//invers
System.out.print("Invers = { ");
```

```
for(int n=0;n<=banyak-1;n++)

{

System.out.print("{"+g[n] +","+ f[n]+"}");

}

System.out.print("}\n\n");

}

}

}
```