POSET DAN LATTICE

5

OBJEKTIF :

1. Mahasiswa Mampu Memahami Himpunan Urut Parsial, Diagram Poset, Lattice Terbatas, Lattice Distributif, dan Lattice Berkomplemen

---

5.1 HIMPUNAN URUT PARSIAL

Suatu relasi R pada himpunan S dikatakan urut parsial pada S, jika R bersifat :

1. Refleksif, yaitu a R a, untuk setiap a Є s.
2. Anti simetris, yaitu a R b dan b R a maka a = b.
3. Transitif, yaitu jika a R b dan b R c maka a R c.

Himpunan S berikut dengan urut parsial pada S dikatakan himpunan urut parsial atau POSET (Partially Ordered Set).

Secara intuitif, didalam suatu relasi pengurutan parsial, dua benda saling berhubungan. Jika salah satunya lebih kecil (lebih besar) daripada atau lebih pendek (lebih tinggi) daripada lainnya menurut sifat atau kriteria tertentu.

Memang istilah pengurutan (ordering) berarti bahwa benda-benda di dalam himpunan itu diurutkan menurut sifat atau kriteria tersebut. Akan tetapi, juga ada kemungkinan bahwa dua benda di dalam himpunan itu tidak berhubungan dalam relasi pengurutan parsial. Dalam hal demikian, kita tak dapat membandingkan keduanya dan tidak mengidentifikasi mana yang lebih kecil atau lebih rendah. Itulah alasannya digunakan istilah “ pengurutan parsial (partial ordering) ”.

Contoh :

1. Misal δ adalah sebarang kelas dari himpunan. Relasi antara himpunan "mengandung " atau "C" merupakan suatu urutan parsial pada S karena :

   a. ACA, untuk setiap A Є S

   b. Jika ACB dan BCA maka A = B

   c. Jika ACB dan BCC maka ACC
2. Misal N himpunan bilangan-bilangan positif. Sebut "a membagi b" ditulis a|b, jika terdapat sebuah bilangan bulat c sedemikian sehingga ac = b.

   Contoh : 2|4, 3|12, 7|21, dsb.

   Relasi dapat dibagi tersebut adalah suatu urut parsial pada N

5.2 DIAGRAM POSET

Misal S adalah suatu himpunan urut parsial. Sebut a dalam S adalah suatu yang mendahului dari b atau b sesudah a ditulis a ≤ b jika a < b tetapi tidak ada elemen dari S yang terletak diantara a dan b, jadi tidk ada X dalam S sedemikian sehingga a< X < b.

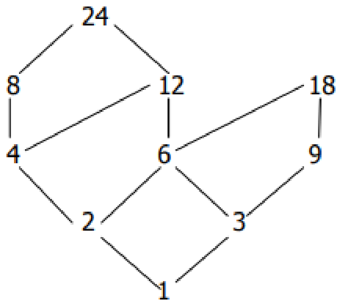
Misal S adalah suatu POSET yang hingga. Maka urut pada S adalah diketahui secara lengkap jika kita mengetahui semua pasangan a, b, S sedemikiansehingga a ≤ b jadi relasi ≤ pada S. Sehingga x < y jika dan hanya jika terdapat elemen x = a_0, a_1, …a_m = y sedemikian sehingga a_i -1 ≤ a_i untuk I = 1, …, m.

Menurut diagram dari suatu POSET S yang hingga kita artikan suatu graph berarah dimana vertex adalah merupakan elemen dari S dan kan terdapat busur yang menghubungkan a dan b jika a ≤ b dalam S (dalam menggambarkan suatu arah panah dari a ke b, kita kadang-kadang menempatkan b lebih tinggi daripada a dalam diagram dan garis dari a ke b mengarah ke atas). Pada diagram S, terdapat suatu path berarah dari suatu vertex x ke vertex y dan hanya jika x < y. Juga terdapat sebarang cycle dalam diagram S karena urut relasinya adalah anti simetris.

Contoh :

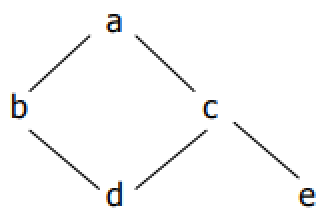
1. Misal A = {1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24} dalam urut dengan relasi "x membagi y".

   Penyelesaian :



2. Misal B = {a, b, c, d, e}. Gambar diagramnya yang didefinisikan suatu urut parsial pada B dengan cara alfabetis. Jadi d ≤ b, d ≤ a, e ≤ a, dst.

   Penyelesaian :



3. Diagram suatu himpunan urut linier yang hingga yaitu suatu chain hingga yang terdiri dari sebuah path yang sederhana. Seperti contoh pada gambar berikut yang menunjukkan diagram dari suatu chain dengan 5 elemen.

   Penyelesaian:

5.3 SUPREMUM DAN INFIMUM

Misal A adalah sub himpunan dari Poset S, sebuah elemen M pada S dikatakan batas atas dari A jika M didahului setiap elemen dari A jadi jika setiap $x \in A$, diperoleh

$$\mathbf{x \leq M}$$

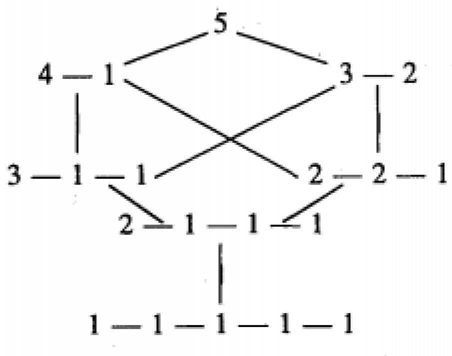
Jika suatu batas atas dari A mendahului setiap batas atas yang lain dari A maka dikatakan SUPREMUM dari A dinotasikan dengan

Sup (A) atau sup (a_1, …, a_n)

Dengan cara yang sama, sebuah elemen m dalam Poset S dikatakan batas bawah dari suatu sub himpunan A dari S jika m mendahului setiap elemen dari A jadi jika y dalam A, maka $m \leq y$ jika batas bawah dari A didahului setiap batas bawah dari A maka dikatakan INFIMUM dari A dan dinotasikan dengan

Inf (A) atau inf (a_1, …, a_n)

Jika A terdiri dari elemen-elemen a_1, …, $a_{n.}$ Terdapat paling banyak satu inf (A) atau mungkin tidak terdapat infimum dari A.

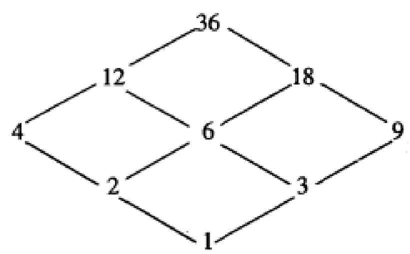


Sebagai contoh gambar berikut, partisi 4-1 dan 3-2 mempunyai 4 batas bawah tetapi inf (4-1, 3-2) tidak ada karena tidak ada batas bawah yang didahului 3 batas bawah lainnya.

Beberapa buku menggunakan istilah batas atas terkecil sebagai pengganti supremum dan batas bawah terbesar sebagai pengganti infimum dan dituliskan dengan Least upper bound atau Lub (A) untuk sup (A) Greates lower bound atau glb (A) untuk inf (A)

Contoh Soal:

Untuk sebarang bilangan bulat positip m, kita dapat memisalkan Om menyatakan himpunan pembagi dari m urutan relsi dapat dibagi. Diagram dari D_{36} = [1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36] diberikan pada gambar dibawah ini. Sehingga inf (a,b) = gcd (a, b) = Lcm (a, b) ada.



Gambar 5.3.

5.4 LATTICE

Misal L adalah suatu himpunan yang tidak kosong tertutup terhadap 2 buah operasi binary disebut meet dan join yang biasa dinyatakan dengan $\wedge$ dan $\vee$. Maka L dikatakan suatu LATTICE jika axioma-axioma berikut dipenuhi, dimana a, b, c adalah sebarang elemen dalam L:

[L1] Hukum Komutatif:

(1a) $a \wedge b = b \wedge a$ (1b) $a \vee b = b \vee a$

[L2] Hukum Asosiatif:

(2a) $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$ (2b) $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$

[L3] Hukum Absorpsi:

(3a) $a \wedge (a \vee b) = a$ (3b) $a \vee (a \wedge b) = a$

Kadang-kadang kita menyatakan Lattice dengan notasi (L, $\wedge$, $\vee$), dimana kita akan menunjukan operasi-operasi mana yang memenuhi. Suatu poset disebut lattice jika dan hanya jika a ∧ b = infimum (a , b) dan a ∨ b = supremum (a , b) ada untuk setiap pasangan elemen dan dalam himpunan .

ELEMEN LATTICE

Misalkan suatu lattice dimana 0 adalah elemen terkecil dari L dan I adalah elemen terbesar dari L . Jika a ∈ L, maka:

a) a disebut meet irreducible jika: a = x ∧ y mengakibatkan a = x atau a = y .

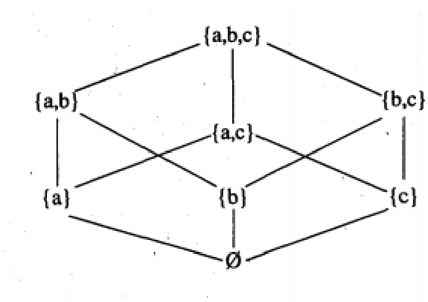
b) a disebut join irreducible jika: = x ∨ y mengakibatkan a = x atau a= y.

c) a disebut atom jika:a adalah join irreducible & a succcessor immediate dari 0.

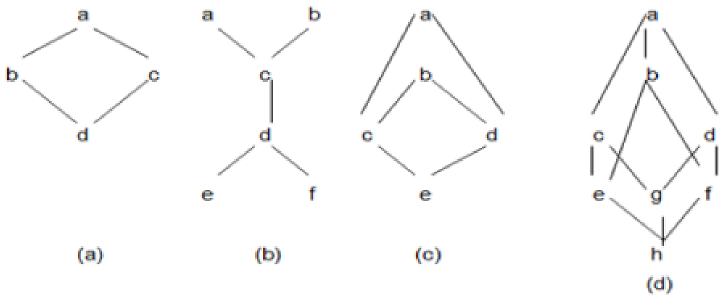
d) ā adalah komplemen dari a jika: a ∨ ā = I dan a ∧ ā = 0 .

Contoh:

1. Misal C koleksi dari himpunan-himpunan yang tertutup terhadap operasi/irisan dan gabungan. Maka (C, N,U) adalah suautu Lattice. Dalam Lattice, relasi urutan parsial adalah sama dengan relasi himpunan "mengandung". Gambar dibawah ini menunjukan diagram dari Lattice L dri semua sub-sub himpunan dari [a, b, c].



2. Tentukan apakah Poset yang dinyatakan dengan diagram Hasse di bawah ini merupakan Lattice



Jawab:

(a). Lattice, sebab setiap dua Titik mempunyai b.a.t dan b.b.t.

(b). Bukan Lattice, sebab b.a.t dari a & b tidak ada.

(c). Bukan Lattice, sebab b.a.t dari c & d tidak ada, (b $\leq$ a).

(d). Lattice, sebab setiap pasang titik mempunya b.a.t & b.b.t.

3. Misalkan V= {1,2,3,4,6,12} faktor-faktor dari 12 terurut oleh relasi pembagian adalah lattice dengan a ∨ b = KPK (a, b) dan a ∧ b = FPB (a, b) . Maka:

- Elemen terkecil= 1 dan elemen terbesar=12
- Komplemen dari 4 adalah 3, karena 4 ∧ 3 = (4,3) = 1 dan 4 ∨ 3 = (4,3) = 12.
- Lattice bukan merupakan lattice complemented karena 6 tidak mempunyai komplemen.

5.5 LATTICE TERBATAS

Suatu Lattice L dikatakan mempunyai batas bawah 0 jika untuk sembarang elemen x dalam L berlaku $0 \leq x$. Dengan cara yang sama, L dikatakan mempunyai batas atas I jika untuk sebarang x dalam L, berlaku $x \leq I$. Maka dikatakan terbatas jika L mempunyai batas bawah 0 & batas atas I sehingga suatu Lattice mempunyai identitas:

$$\mathbf{a \vee I = I,\ a \wedge I = a,\ a \vee 0 = a,\ a \wedge 0 = 0}$$

untuk sebarang elemen a dalam L.

Bilangan-bilangan bulat non negatif dengan urut

$$\mathbf{0 < 1 < 2 < 3 < 4 < \ldots}$$

mempunyai batas bawah 0 tetapi tidak mempunyai batas atas. Dengan kata lain Lattice P (∪) dari semua sub himpunan-himpunan daei sebarang himpunan semesta adalah suatu Lattice terbatas dengan ∪ sebagai batas atas dan himpunan kosong sebagai batas bawah. Misal L = (a_1, a_2, . . ., an) adalah Lattice yang hingga, Maka $a_1 \vee a_2 \vee \ldots\ldots \vee a_n$ dan $a_1 \wedge a_2 \wedge\ldots\ldots \wedge a_n$ adalah batas atas dan bawah dari L sehingga Setiap Lattice hingga L adalah terbatas.

5.6 LATTICE DISTRIBUTIF

Suatu Lattice L dikatakan distributif jika untuk sebarang elemen a, b, c dalam L memenuhi [L_4] Hukum distributif:

(4a) $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$

(4b) $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

Jika tidak L dikatakan tidak distributif.

Kita nyatakan prinsip duality pada (4a) dipenuhi jika & hanya jika (4b) dipenuhi.

Gambar 5.5 (a) adalah suatu Lattice yang tidak distributif karena

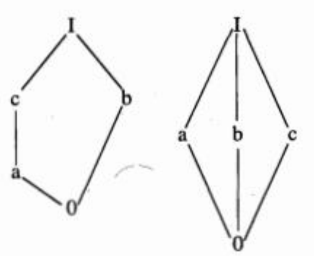
$a \vee (b \wedge c) = a \vee (0) = a$

tetapi

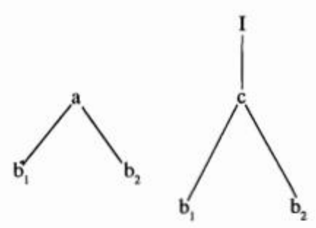
$((a \vee b) \wedge (a \vee c) = I \wedge c = c.$

Gambar 5.5 (b) juga Lattice yang tidak distributif. Ciri-ciri untuk lattice distributif sebagai berikut:

1. Suatu Lattice adalah tidak distributif jika & hanya jika Lattice tersebut mengandung suatu sub lattice yang isomorfis dengan gambar 5.5 (a) atau (b).



Gambar 5.5



Gambar 5.6

Misal L adalah Lattice dengan batas bawah 0 sebuah elemen a dalam L dikatakan join irreducible jika a = xvy berakibat a = x atau a = y. (Bilangan-bilangan prima di bawah operasi perkalian mempunyai sifat seperti itu, jadi jika p = ab maka p = a punya sedikitnya 2 elemen sebelumnya, sebut b_1 dan b_2 seperti gambar 5.6 (a) maka a = b_1 V b_2 dan a bukan join irreducible.

Dengan kata lain jika mempunyai sebuah elemen yang sebelumnya unik c, maka a≠sup (a_1b_2) = b_1 V_2 b_2 untuk sebarang elemen b_1 dan b_2 seperti pada gambar 5.6 (b) dengan kata lain a≠0 adalah join irreducible jika & hanya jika mempunyai elemen unik sebelumnya. Elemen-elemen tersebut yang didahului 0, dikatakan Atom adalah join irrecudible yang lain. Sebagai contoh elemen c pada gambar 5.6 (b) bukan suatu atom tetapi join irrecudible karena a adalah hanya sebuah elemen sebelumnya.

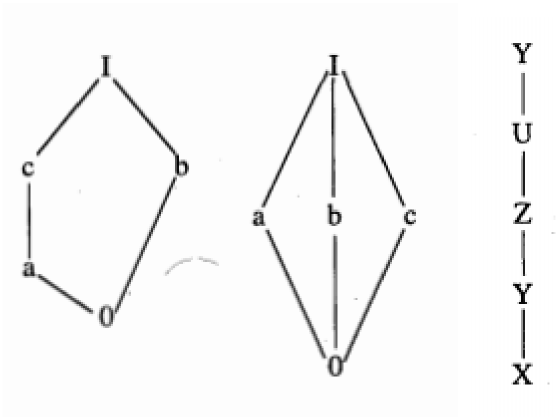
2. Misal L suatu Lattice distributif maka setiap a dalam L dapat dituliskan secara unik (kecuali untuk urutan) sebagai gabungan dari elemen irredudant join irreducible.

5.7 LATTICE BERKOMPLEMEN

Misal L adalah Lattice yang terbatas dengan batas bawah 0 & batas atas I. Misal a sebarang elemen dari L. Sebuah elemen x dalam L dikatakan Komplemen dari a jika:

a V x = I dan a ⋀ x = O

Komplemen tidak perlu ada & tidak perlu unik. Seabagai contoh elemen a & c keduanya adalah komplemen dari b pada gambar (a) juga elemen y, z & u dalam chain pada gambar (c) tidak mempunyai komplemen sehingga diperoleh akibat sebagai berikut:



(a) (b) (c)

1. Misal L adalah Lattice distributif maka komplemen ada & unik.

   Suatu Lattice L dikatakan tidak L terbatas & setiap elemen dalam L mempunyai komplemen. Gambar b menunjukan suatu Lattice berkomplemen dimana komplemen-komplemen adalah uni. Dengan perkatan lain, Lattice P (U) dari semua sub-sub himpunan dari himpunan semesta U adalah berkomplemen & setiap sub himpunan A dan U mempunyai komplemen yang unik $A^C = U \backslash A$.
2. Misal L adalah suatu Lattice berkomplemen dengan unik komplemen, maka elemen join irreducible dari L selain O adalah Atom-atomnya.
3. Misal L adalah Latice distributif berkomplemen & hingga, maka setiap elemen a dalam L adalah gabungan dari himpunan atom-atom yang unik.

Catatan: Beberapa buku mendefinisikan suatu Lattice L berkomplemen jika setiap a dalam L mempunyai sebuah komplemen yang unik.

RANGKUMAN

1. Suatu Relasi R pada Himpunan S dikatakan urut Pasial pada S, jika R bersifat Refleksif, Anti Simetris, dan transitif.
2. Diagram POSET digunakan untuk menggambarkan suatu poset.
3. Supremum adalah batas atas terkecil sedangkan Infimum adalah batas bawah terendah.

4. L dikatakan suatu Lattice jika Hukum Komutatif, Hukum Asosiasi, Hukum Absorpsi terpenuhi.
5. Lattice yang mempunyai batas atas I dan batas bawah 0 disebut sebagai Lattice Terbatas.
6. Latice Berkomplemen jika elemen x dalam L $a \vee x = I$ dan $a \wedge x = O$