Pertemuan 6

Transformasi Linier

Objektif:

1. Praktikan memahami definisi transformasi linier umum.
2. Praktikan memahami definisi dari transformasi linier dari R^n ke R^m.
3. Praktikan memahami invers transformasi linier.

P6.1 Teori

Definisi Transformasi Linier Umum

Transformasi linier umum adalah sebuah fungsi yang memetakan suatu ruang vector B ke suatu ruang vector C, sehingga variable A dinyatakan sebagai transformasi linier dari B ke C. Pernyataan tersebut ditunjukkan pada skema dibawah ini :

Jika A : B $\longrightarrow$ C

Variabel akan disebut sebagai transformasi linier jika semua vector u dan v yang ada pada B dan semua scalar c, seperti :

- T(u + v) = T(u) + T(v)
- T(cu) = cT(u)

Transformasi linier akan tampak terlihat jelas jika B = C dan akan dinyatakan dalam bentuk A : B $\longrightarrow$ B yang disebut dengan operator linier pada B.

Transformasi linier memiliki beberapa fungsi yang perlu dipelajari. Fungsi-fungsi tersebut antara lain :

- $f : R \rightarrow R$

  Fungsi diatas bernilai real. Contoh : f(x) = 2x + sin x
- $f : R^2 \rightarrow R$

  Fungsi diatas merupakan fungsi 2 variabel. Contoh: f(x,y) = 2(x+y)
- $f : R^n \rightarrow R$

  Fungsi diatas merupakan fungsi n variable. Contoh:

  $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n$
- $f : R \rightarrow R^2$

  Fungsi diatas bernilai vektor. Contoh: f(t) = (2t + 1,t)
- $f : R^2 \rightarrow R^2$

  Fungsi diatas merupakan fungsi 2 variabel bernilai vektor. Contoh:

  F(x,y) = (cos x, sin y)

Fungsi Dari R^n ke R^m

Fungsi $f : R^n \rightarrow R^m$ adalah aturan yang mengkaitkan setiap x elemen di daerah definisi di R^n ke f(x) elemen di daerah hasil di R^m. Fungsi diatas disebut juga transformasi dai R^n ke R^m. Sistem persamaan linear (SPL) dapat dinyatakan dalam perkalian matriks vektor, seperti: $\overline{w} = A\overline{x}$, dimana $\overline{w}$ vektor di R^m sedangkan $\overline{x}$ vektor di R^n kemudian A matriks mxn. Matriks $A = \left[a_{ij}\right]$ disebut matriks standard untuk transformasi linier T. Sedangkan transformasi nol dinyatakan dengan $T(\overline{x}) = \overline{0}$ dan transformasi identitias dinyatakan dengan $T(\overline{x}) = \overline{x}$.

Transformasi linier dari $T : R^n \rightarrow R^m$ jika $(T^{-1} \circ T)(\overline{x}) = \overline{x}$ **atau** $\left[T^{-1}\right]\left[T\right] = I$ memiliki invers berupa $T^{-1} : R^n \rightarrow R^m$.

Transformasi Elementer Pada Baris dan Kolom Matriks

Transformasi Elamenter pada matriks adalah:

- Penukaran tempat baris ke i dan ke j (baris ke i dijadikan baris ke j dan baris ke j dijadikan baris ke i), ditulis $H_{ij}(A)$
- Penukaran tempat kolom ke i dan kolom ke j (kolom ke i dijadikan kolom ke j atau sebaliknya), ditulis $K_{ij}(A)$
- Memperkalikan baris ke i dengan skalar $\lambda \neq 0$, ditulis $H_i^{(\lambda)}(A)$
- Memperkalikan kolom ke i dengan $\lambda \neq 0$, ditulis $K_i^{(\lambda)}(A)$
- Menambah baris ke i dengan λ kali baris ke j, ditulis $H_{ij}^{(\lambda)}(A)$
- Menambah kolom ke i dengan λ kali kolom ke j,ditulis $K_{ij}^{(\lambda)}(A)$

Invers Suatu Transformasi Linier

Jika suatu transformasi elementer adalah:

- $A = H_{ij}^{-1}(B) = H_{ij}(B)$
- $A = K_{ij}^{-1}(B) = K_{ij}(B)$

- $A = H_i^{(\lambda)^{-1}}(B) = H_i^{1/\lambda}(B)$
- $A = K_i^{(\lambda)^{-1}}(B) = K_i^{1/\lambda}(B)$
- $A = H_{ij}^{(\lambda)^{-1}}(B) = H_{ij}^{(-\lambda)}(B) \quad A = K_{ij}^{(\lambda)^{-1}}(B) = K_{ij}^{(-\lambda)}(B)$

Bentuk Kampanyon

Koefisien-koefisien dari matriks tersebut adalah koefisien deret λ dari persamaan karakteristik:

$$det\ [\lambda I - A] = 0$$

Dua bentuk kampanyon, tergantung pada koefisien-koefisin yang muncul pada kolom pertama atau baris terakhir. Contoh :

- Kampanyon kolom

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} -a_{n-1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_{n-2} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ . & . & . & & . \\ -a_1 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

- Kampanyon baris

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ . & . & . & & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

Persamaan karakteristik :

$$\boxed{\varphi(\lambda) = det[\lambda I - A] = det[\lambda I - A] = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ .\ .\ .\ .\ . + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0}$$

P6.2 Contoh Kasus

Pada pertemuan enam ini akan dibahas contoh kasus menggunakan transformasi linier. Dibawah ini diberikan sebuah matriks A dengan anggota matriksnya adalah:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Berdasarkan matriks tersebut, carilah matriks B yang dihasilkan sederetan transformasi elementer $H_{31}^{(-1)}$, $H_2^{(2)}$, H_{12}, $K_{41}^{(1)}$, $K_3^{(2)}$ …..

Maka matriks B yang digunakan adalah:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{H_2(2)}{\overset{H_{31}(-1)}{\Rightarrow}} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 8 & 2 & 0 & 4 \\ -2 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \overset{H_{12}}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 8 & 2 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{K_3(2)}{\overset{K_{41}(1)}{\Rightarrow}} \begin{pmatrix} 8 & 2 & 0 & 12 \\ 3 & 1 & 4 & 4 \\ -2 & 2 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

P6.3 Latihan

Di bawah akan diberikan sepenggal program Java:

```
public class ………… extends Transformasi {
        @Override
        public void cetakTitikAsal() {
        }
        public void hasil (int k){
              System.out.println("Nilai k menghasilkan titik
("+(k*x)+","+(k*y)+")");
        }
}
```

Class di atas digunakan untuk menghasilkan program linier berupa ….

a. Translasi
b. Rotasi
c. Refleksi
d. Dilatasi*

P6.4 Daftar Pustaka

1. http://downloads.ziddu.com/downloadfiles/7831855/Transformasi_Linier_A.pdf
2. http://downloads.ziddu.com/downloadfiles/7831853/Transformasi_Linier_B.pdf
3. http://personal.fmipa.itb.ac.id/novriana/files/2010/09/6-transformasi-linier-dan-matriks.pdf
4. http://lovesthi.wordpress.com/2009/09/11/contoh-program-oop-jdbc-dan-servletjsp/#respond