

DUALITAS DAN ANALISIS SENSITIVITAS

5

OBJEKTIF :

1. Mahasiswa Mampu Melakukan Perhitungan Metode Dualitas dan Analisis Sensitivitas.
 2. Mahasiswa Mampu Membedakan Antara Metode Simplek dan Metode Dualitas.
-

5.1 Metode Dual Simplek

Istilah dualitas menunjuk pada kenyataan bahwa setiap *Program Linier* terdiri atas dua bentuk yaitu *primal* dan *dual*. Asumsi dasar yang digunakan adalah masalah primal program linier dinyatakan dalam bentuk standard yaitu :

Fungsi Tujuan :

N

$$\text{Maksimum } Z = \sum_{j=1}^N C_j X_j$$

Batasan-batasan :

N

$$\sum_{j=1}^N a_{ij} X_j \leq b_i \text{ untuk } i = 1, 2, \dots, m$$

$$X_j \geq 0 \text{ untuk } j = 1, 2, \dots, n$$

Pemecahan persoalan primal terlihat pada koefisien baris Z pada iterasi tabel optimal

Koefisien Z pada Nilai Optimal

Variabel	Z	X1	X2	...	Xn	S1	S2	...	Sm	q
Z	1	C1- Z1	C2- Z2	...	Cn- Zn	Y1	Y2	...	Ym	Yo

Kondisi optimal adalah apabila semua koefisien pada baris terakhir ($C_j - Z_j$) tidak ada yang berharga positif, yakni :

$$C_j - Z_j \leq 0 ; \text{ untuk } j = 1, 2, \dots, n$$

$$Y_i \geq 0 ; \text{ untuk } i = 1, 2, \dots, m$$

Dengan menggantikan Z_j nilai-nilai Y_i dapat dicari :

Fungsi Tujuan :

$$Y_o = \sum_{j=1}^M b_j Y_j$$

Batasan-batasan

M

$$\sum_{j=1}^M a_{ij} Y_j \geq C_j \text{ untuk } j = 1, 2, \dots, m$$

j=1

$$Y_i \geq 0 \text{ untuk } i = 1, 2, \dots, n$$

Bentuk tersebut yang dikenal sebagai dual dari masalah primal. Sebagai konsekuensi nilai Z optimal (maksimum) pada masalah primal adalah nilai Y_o minimum pada masalah dual.

Hubungan Simetris Primal dan Dual

			PRIMAL					
			Koefisien				Sisi	
			X ₁	X ₂	...	X _n	Kanan	
Dual	Koefisien	Y ₁	a ₁₁	a ₁₂	...	a _{1n}	≤ b ₁	Koefisien Fungsi Tujuan (Minimisasi)
		Y ₂	a ₁₂	a ₂₂	...	a _{2n}	≤ b ₂	
		:	:	:	:	:	:	
		:	:	:	:	:	:	
		:	:	:	:	:	:	
		Y _m	a _{m1}	a _{m2}	...	a _{mn}	≤ b _m	
		Sisi Kanan	≥ C ₁	≥ C ₂	...	≥ C _n		
			Koefisien Fungsi Tujuan					

Bentuk tersebut diatas menunjukkan hubungan simetris antara primal dan dual, dimana bagian vertikal/tegak merupakan bentuk primal, sedangkan bagian mendatar merupakan bentuk dualnya. Bila disimpulkan hubungan tersebut adalah sebagai berikut :

1. Parameter untuk batasan persoalan primal (dual) merupakan koefisien bagi persoalan dual (primal).
2. Koefisien fungsi tujuan/obyektif persoalan primal (dual) adalah sisi kanan dari persoalan dual (primal) diatas.

Bila masalah primal dibandingkan dengan masalah dual terlihat beberapa hubungan sebagai berikut :

1. Koefisien fungsi tujuan masalah primal menjadi konstan sisi kanan masalah dual. Sebaliknya, konstan sisi kanan primal menjadi koefisien fungsi tujuan dual.
2. Tanda pertidaksamaan kendala dibalik.

3. Tujuan diubah dari minimasi (maksimasi) dalam primal menjadi maksimasi (minimasi) dalam dual.
4. Setiap kolom pada primal berhubungan dengan suatu baris atau kendala dalam dual. Sehingga banyaknya kendala dual sama dengan banyaknya variabel primal.
5. Setiap baris (kendala) pada primal berhubungan dengan suatu kolom dalam dual. Sehingga ada satu variabel dual untuk setiap kendala primal.
6. Bentuk dual dari dual adalah bentuk primal.

MASALAH PRIMAL DUAL SIMETRIK

Program Linier dikatakan berbentuk Simetrik jika semua variabel dibatasi bernilai non negatif dan semua kendala berupa pertidaksamaan (dalam masalah maksimisasi pertidaksamaannya harus dalam bentuk \leq , sementara dalam minimasi mereka harus \geq).

Bentuk umum masalah primal dual yang simetrik adalah

Primal : Maks = $Z = C_1X_1 + C_2X_2 + \dots + C_nX_n$

Syarat :

$$\begin{aligned}a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \dots + a_{1n}X_n &\leq b_1 \\a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \dots + a_{2n}X_n &\leq b_2 \\a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \dots + a_{mn}X_n &\leq b_m \\X_1, X_2, \dots, X_n &\geq 0\end{aligned}$$

Dual : Min : $W = b_1Y_1 + b_2Y_2 + \dots + b_mY_m$

Syarat :

$$\begin{aligned}a_{11}Y_1 + a_{21}Y_2 + \dots + a_{m1}Y_m &\geq C_1 \\a_{12}Y_1 + a_{22}Y_2 + \dots + a_{m2}Y_m &\geq C_2 \\a_{1n}Y_1 + a_{2n}Y_2 + \dots + a_{mn}Y_m &\geq C_n \\Y_1, Y_2, \dots, Y_m &\geq 0\end{aligned}$$

Aturan umum menuliskan bentuk dual dari suatu Program Linier yang Simetrik diringkas sebagai berikut :

- a. Misalkan sebuah variabel dual (non negatif) untuk setiap kendala primal.
- b. Vektor baris koefisien fungsi tujuan primal diubah menjadi vektor kolom konstan sisi kanan dual.

- c. Vektor kolom sisi kanan primal diubah menjadi vektor baris koefisien fungsi tujuan dual.
- d. Transpose koefisien matrik kendala primal menjadi koefisien matrik kendala dual.
- e. Balik arah pertidaksamaan kendala.
- f. Balik arah optimisasi, ubah minimum menjadi maksimum dan sebaliknya.

Weak Duality Theorem

“Nilai fungsi tujuan masalah minimisasi (dual) untuk setiap solusi yang layak selalu lebih besar atau sama dengan masalah maksimisasi (primal)nya”.

Dari Weak Duality Theorem diperoleh hasil-hasil sebagai berikut :

- 1. Nilai fungsi tujuan masalah maksimisasi (primal) untuk setiap solusi layak adalah batas bawah dan nilai minimum fungsi masalah dual.
- 2. Nilai fungsi tujuan masalah minimisasi (dual) untuk setiap solusi layak adalah batas atas dari nilai maksimum fungsi tujuan masalah primal.
- 3. Jika masalah primal adalah layak dan nilai tujuannya tidak terbatas maka masalah dualnya tidak memiliki suatu solusi layak.
- 4. Jika masalah primal adalah layak dan dual tidak layak maka primal tak terbatas.
- 5. Jika masalah dual adalah layak dan tak terbatas maka masalah primal adalah tidak layak.
- 6. Jika masalah dual adalah layak dan primal tak layak maka dual adalah tak terbatas

Complementary Slackness Theorem

Dengan kata-kata kondisi *complementary slackness* dapat dinyatakan sebagai berikut :

- a. Jika suatu variabel primal X_j bernilai positif, maka kendala dual yang berhubungan akan dipenuhi sebagai suatu persamaan pada keadaan optimum (variabel slack atau surplus pada kendala dual = 0).

- b. Jika suatu kendala primal berupa pertidaksamaan murni pada keadaan optimum (variabel slack atau surplus pada kendala primal > 0), maka variabel dual yang berhubungan Y_i harus sama dengan nol pada keadaan optimum.
- c. Jika suatu variabel dual Y_i bernilai positif, maka kendala primal yang berhubungan akan memenuhi sebagai suatu persamaan pada keadaan optimum (variabel slack atau surplus pada kendala primal $= 0$).
- d. Jika suatu kendala dual berupa pertidaksamaan murni (variabel slack atau surplus pada kendala primal > 0), maka variabel primal yang berhubungan X_j harus sama dengan nol pada keadaan optimum.

MASALAH PRIMAL DUAL SIMETRIK

Tidak semua program linier berbentuk simetrik. Untuk setiap Program Linier (simetris atau tidak simetris) bentuk dual selalu memenuhi ciri sebagai berikut :

- 1. Elemen Matriks kendala bentuk dual adalah transpose elemen kendala primal.
- 2. Koefisien fungsi tujuan dual adalah vektor sisi kanan primal.
- 3. Vektor sisi kanan dual adalah koefisien fungsi tujuan primal.
- 4. Jika primal adalah masalah maksimisasi, maka dual menjadi minimisasi dan sebaliknya.

5.2 Analisis Sensitivitas atau Postoptimal

Analisis Sensitivitas adalah penyelidikan perubahan nilai parameter (a, b, dan c) terhadap efek pada penyelesaian yang optimal. Karena perubahan nilai parameter dalam masalah primal juga akan mengakibatkan perubahan nilai pada masalah dual, maka bisa dipilih salah satu untuk penyelidikan.

Penambahan Variabel Baru

Misalnya, perusahaan Garuda Furniture menambahkan suatu jenis produksi baru, yaitu rak buku (X).

Model pemrograman liniernya menjadi :

$$\text{Maks. } Z = 200X_1 + 150X_2 + 100X_3$$

$$\text{dp } 4X_1 + 2X_2 + 2X_3 \leq 120$$

$$2X_1 + 2X_2 + 3X_3 \leq 90$$

$$X_1 + 3X_2 + X_3 \leq 100$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

Fungsi pembatas dual yang menyangkut X_3 dapat dirumuskan sebagai berikut :

$$2Y_1 + 3Y_2 + Y_3 \geq 100$$

Hasil analisis menghasilkan nilai dual pada solusi optimal sebagai berikut :

$$Y_1 = 45, Y_2 = 0, \text{ dan } Y_3 = 20$$

Apabila nilai dual ini dimasukkan pada fungsi pembatas yang baru, diperoleh :

$$2(45) + 3(0) + 1(20) > 100$$

Adalah benar bahwa 110 lebih besar dari 100, yang berarti persamaan itu layak (masih terpenuhi). Dengan demikian, keberadaan variabel X_3 tidak mempengaruhi penyelesaian optimal. Kesimpulannya, produk rak buku itu tidak perlu ditambahkan dalam lini produksi karena tidak akan menambah keuntungan.

Penambahan Batasan Baru

Seandainya penggunaan tenaga kerja dalam perusahaan Garuda Furniture dimasukkan dalam model, timbul batasan (kendala) baru sebagai berikut :

$$3X_1 + 4X_2 \leq 160$$

Dengan memasukkan nilai optimal, diperoleh :

$$3(18) + 4(24) < 160 \text{ atau } 150 < 160 \text{ (benar)}$$

Batasan baru ini tidak aktif atau redundant karena tidak mempengaruhi penyelesaian optimal. Sebaliknya, jika batasan itu sebagai berikut :

$$3X_1 + 4X_2 \leq 140 \text{ maka } 150 < 140 \text{ (tidak benar)}$$

Adalah tidak benar 150 lebih kecil dari 140, fungsi batasan menjadi tidak terpenuhi sehingga nilai optimalnya akan berbeda. Untuk mengetahui keadaan optimal, batasan baru itu dapat ditambahkan langsung pada tabel simpleks yang terakhir (tabel optimal), sebagai berikut :

Vd	X1	X2	S1	S2	S3	S4	b
----	----	----	----	----	----	----	---

Maks Z	0	0	45	0	20	0	7.200
X1	1	0	0,3	0	-0,2	0	18
S2	0	0	-0,4	1	-0,4	0	16
X2	0	1	-0,1	0	0,4	0	24
S4	3	4	0	0	0	1	140

Penambahan batasan baru mengakibatkan tabel diatas tidak memiliki matriks identitas. Untuk itu, baris S4 perlu disesuaikan dulu agar koefisien X1, X2, dan S4 (variabel dasar) sama dengan nol, sehingga membentuk suatu matriks identitas, sebelum penyelesaian simpleks dilanjutkan sampai diperoleh penyelesaian yang optimal.

Contoh Soal

Perusahaan sepatu 'IDEAL' membuat 2 macam sepatu. Yang pertama adalah sepatu dengan sol dari karet (X1), dan yang kedua adalah sepatu dengan sol dari kulit (X2). Untuk memproduksi kedua macam sepatu tersebut perusahaan menggunakan 3 jenis mesin. Mesin 1 khusus untuk membuat sepatu dari karet, dengan kapasitas maksimal 8 jam. Mesin 2 khusus untuk membuat sepatu dari kulit, dengan kapasitas maksimal 15 jam. Mesin 3 khusus untuk assembling kedua macam sepatu tersebut, dengan kapasitas maksimal 30 jam. Setiap lusin X1 mula-mula dikerjakan di mesin 1 selama 2 jam, dan selanjutnya menuju mesin 3 selama 6 jam. Sedangkan X2 dikerjakan oleh mesin 2 selama 3 jam dan langsung ke mesin 3 selama 5 jam. Sumbangan terhadap laba untuk setiap sepatu X1 = Rp 30.000, sedangkan sepatu X2 = Rp 50.000. Ubah bentuk ke dualitas!

Jawaban**Langkah 1: Penerapan soal dalam bentuk tabel**

	X1	X2	
Y1	2	0	≤ 8
Y2	0	3	≤ 15
Y3	6	5	≤ 30
	≥ 3	≥ 5	

Langkah 2: Penyajian dalam Persamaan Simpleks

Maksimumkan : $Z = 3X_1 + 5X_2$

Batasan-batasan :

$$2X_1 \leq 8$$

$$3X_2 \leq 15$$

$$6X_1 + 5X_2 \leq 30$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Langkah 3 : Penyajian dalam Persamaan Dualitas

Minimumkan : $Y_0 = 8Y_1 + 15Y_2 + 30Y_3$

Batasan-batasan :

$$2Y_1 + 6Y_2 \geq 3$$

$$3Y_2 + 5Y_3 \geq 5$$

$$Y_1, Y_2, Y_3 \geq 0$$

REFERENSI

1. Agustini. M. Y., Dwi Hayu dan Yus Endra Rahmadi. 2004. *Riset Operasional Konsep-Konsep Dasar*. PT Rineka Cipta. Jakarta.
2. Aminudin. 2005. *Prinsip-Prinsip Riset Operasi*. Erlangga. Jakarta.
3. Mulyono dan Sri. 2007. *Riset Operasi*. Fakultas Ekonomi UI. Jakarta.
4. Subagyo dan Pengestu, dkk. 2000. *Dasar-Dasar Operations Research*. BPFE-Yogyakarta.