PROBABILITAS DAN DISTRIBUSI TEORITIS

6

OBJEKTIF :

1. Mahasiswa dapat mengetahui konsep dasar distribusi probabilitas
2. Mahasiswa dapat mengetahui perbedaan distrbusi probabilitas diskret dan kontinu
3. Mahasiswa dapat mengetahui penyelesaian dari distribusi normal
4. Mahasiswa dapat mengetahui penyelesaian dari distribusi binomial
5. Mahasiswa dapat mengetahui penyelesaian dari distribusi hipergeometrik
6. Mahasiswa dapat mengetahui penyelesaian dari distribusi poisson
7. Mahasiswa dapat mengetahui penyelesaian dari distribusi z dan t

---

Bab 6 Distribusi Teoritis

6.1 Konsep Dasar Distribusi Probabilitas

Variabel Random

Suatu **variabel random** (peubah acak) *X* adalah: cara memberi nilai angka bagi tiap unsur ruang sampel; atau: *X* (*a*) adalah ukuran karakteristik tertentu, yang diberikan bagi tiap unsur *a* suatu ruang sampel.

Contoh 6.1 :

Percobaan melontarkan mata uang logam tiga kali menghasilkan ruang sampel berikut:

$$S = \begin{Bmatrix} MMM\ MMB\ MBB\ BBB \\ MBM\ BMB \\ BMM\ BBM \end{Bmatrix}$$

Jika mata uang logam seimbang, delapan unsur ruang sampel memiliki probabilitas sama besar, masing-masing dengan probabilitas 1/8.

Misalkan variabel random *X* adalah ‘banyak *M* dalam tiap unsur’, maka:

X (*MMM*) = 3

X (*MMB*) = *X* (*MBM*) = *X* (*BMM*) = 2

X (*MBB*) = *X* (*BMB*) = *X* (*BBM*) = 1

X (*BBB*) = 0

Contoh 6.2 :

Seorang mahasiswa dipilih secara acak dari kelas yang beranggotakan 30 mahasiswa. Ruang sampelnya terdiri atas 30 mahasiswa, dinyatakan sebagai $S = \{ 1\,a , 2\,a , . . . , 30\,a \}$.

Misalkan variabel random $Y\ (a)$ menyatakan indeks prestasi mahasiswa a, dan IP mahasiswa 1 a = 3.16, IP mahasiswa 2 a = 2.43, dan seterusnya, maka:

$Y (1\,a)$ = 3.16 ; $Y (2\,a)$ = 2.43 ; dan seterusnya

Suatu variabel random yang hanya dapat menjalani nilai-nilai berbeda yang banyaknya berhingga (data diskret) disebut **variabel random diskret.** Suatu variabel random yang dapat menjalani setiap nilai (tak berhingga banyaknya) dalam suatu interval (data kontinu) disebut **variabel random kontinu.**

Pada contoh 6.1 di atas, X hanya dapat menjalani nilai-nilai dalam himpunan terhingga {0, 1, 2, 3}. Jadi X adalah variabel random diskret. Pada contoh 6.2 di atas, $Y(a)$ dapat menjalani setiap nilai yang tak berhingga banyaknya, antara 0 dan 4, termasuk. Jadi Y (a) adalah variabel random kontinu.

Nilai Harapan dan Variansi

Rata-rata suatu variabel random X atau distribusi probabilitasnya, dinamakan juga **nilai harapan** X dan dituliskan $E\ [X]$.

Jika X dapat menjalani nilai-nilai yang mungkin X1 , X2 , . . . , dengan probabilitas masing-masing $f (X_i) = P\ [X = X_i]$, maka nilai harapan X adalah:

$$\boxed{\text{E (X) = rata-rata X} = \mu = \sum_{i=1}^{n} X_i f(X_i)}$$

Contoh 6.3:

Misalkan variabel random X menyatakan jumlah anak dalam tiap keluarga di negara Rusia, dan distribusi probabilitasnya diketahui, perhitungan nilai harapan X = rata-rata X dapat dilakukan seperti terlihat pada tabel 6.1 berikut:

Tabel 6.1. Distribusi Probabilitas Jumlah Anak Dalam Keluarga Di Negara Rusia Dan Perhitungan Nilai Harapannya

X_i	$F(X_i)$	$X_i f(X_i)$
0	**0.1**	**0.0**
1	**0.2**	**0.2**
2	**0.4**	**0.8**
3	**0.3**	**0.9**
	$\sum_{i=1}^{n} f(X_i) = 1$	**E [X] = 1.9**

Contoh 6.4:

Dalam suatu permainan dadu yang dinyatakan 'seimbang', untuk bermain satu lemparan, pemain harus membayar *C* ribu rupiah dan akan menerima uang (dalam ribuan rupiah) sebanyak titik yang tampak di atas pada hasil pelemparan dadu tersebut. Misalkan variabel random *X* menyatakan jumlah uang (dalam ribuan rupiah) yang diterima pemain, distribusi probabilitasnya adalah:

Tabel 6.2. Distribusi Probabilitas Jumlah Uang Yang Diterima Pemain Pada Permainan Dadu Seimbang

Nilai X	1	2	3	4	5	6
Probabilitas X	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

$$E[X] = 1/6\,(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6)$$
$$= 3.5 = \text{Rp. } 3{,}500$$

Maka permainan dapat dinyatakan 'adil' jika *C* = Rp. 3,500, sehingga banyak uang yang diterima pemain dalam jangka panjang akan sama dengan banyak uang yang dibayar untuk bermain.

Sifat-sifat nilai harapan:

1) Jika *b* bilangan konstan, maka:

   $E[b] = b$

2) Jika *a* bilangan konstan, maka:

   $E[aX] = a\,E[X]$

3) Jika a dan b bilangan konstan, maka:
   $E\,[aX + b] = a\,E\,[X] + b$

Variansi variabel random X atau distribusi probabilitas, dituliskan *Var (X)* atau σ^2, adalah nilai harapan kuadrat deviasi terhadap rata-rata:

$$\boxed{\mathrm{Var}\,(X) = E\,[X - \mu]^2 = E[X^2] - \mu^2}$$

Atau

$$\boxed{\mathrm{Var}\,(X) = E[X^2] - (E[X])^2}$$

Standar deviasi variabel random X atau distribusi probabilitasnya, dituliskan SD (X) atau σ, adalah akar variansi variabel random X atau distribusi probabilitasnya.

Contoh 6.5:

Misalkan variabel random X menyatakan jumlah penjualan HP merek N per hari. Distribusi probabilitasnya dan perhitungan variansinya diperlihatkan pada tabel 5.4 berikut:

Tabel 6.3. Distribusi Probabilitas Jumlah Penjualan HP Merek N Dan Perhitungan Variansinya

X_i	$F(X_i)$	$X_i f\,(X_i)$	$X_i^2 f\,(X_i)$
0	0.1	0.0	0.0
1	0.1	0.1	0.1
2	0.2	0.4	0.8
3	0.3	0.9	2.7
4	0.2	0.8	3.2
5	0.1	0.5	2.5
	$\sum f(X_i) = 1$	**E [X] =2.7**	**E [X²]= 9.3**

$$\mathrm{Var}\,(X) = E\,[X^2] - (E[X])^2$$
$$= 9.3 - (2.7)^2 = 2.01$$
$$SD\,(X) = \sqrt{2.01} = 1.42$$

Sifat-sifat variansi dan standar deviasi:

Untuk a dan b konstan:

1. *Var* (X) non-negatif:

1. *SD* (X) non-negatif:

$Var(X) \geq 0$	$SD(X) \geq 0$
2. $Var(X+b) = Var(X)$	2. $SD(X+b) = SD(X)$
3. $Var(aX) = a^2\, Var(X)$	3. $SD(aX) = a\, SD(X)$
4. $Var(aX+b) = a^2\, Var(X)$	4. $SD(aX+b) = a\, SD(X)$

Dengan transformasi:

$$Z = \frac{\mathrm{X} - \mu\mathrm{x}}{\sigma\mathrm{x}}$$

Maka variabel random X dengan rata-rata μ_x dan standar deviasi σ_x menjadi variabel random Z yang mempunyai rata-rata 0 dan standar deviasi 1. Variabel random Z ini dinamakan **variabel random standar**.

$$E(Z) = 0$$

$$Var(Z) = 1$$

Contoh 6.6:

Misalkan variabel random X menyatakan banyak penjualan HP merek N per hari dan variabel random Y menyatakan keuntungan bersihnya sebagai fungsi X:

$$Y = 5{,}000\, X - 2{,}000$$

Maka:

$$E[Y] = E[5{,}000\, X - 2{,}000]$$
$$= 5{,}000\, E[X] - 2{,}000$$
$$= (5{,}000)(2.7) - 2{,}000 = 11{,}500$$

$$Var(Y) = Var[5{,}000\, X - 2{,}000]$$
$$= 5{,}0002\ Var(X)$$
$$= (5{,}0002)(2.01) = 50{,}250{,}000$$

$$SD(Y) = \sqrt{50{,}250{,}000} = 7{,}088.72$$

6.2 Distribusi Probabilitas Diskret

Lihat kembali hasil tiga kali pelontaran mata uang di atas. Ruang sampelnya adalah**:**

$$S = \begin{Bmatrix} MMM\ MMB\ BBB \\ MBM\ BMB \\ BMM\ BBM \end{Bmatrix}$$

Dengan asumsi mata uang seimbang, sehingga tiap unsur memiliki probabilitas sebesar 1/8 untuk terjadi, maka diperoleh **distribusi probabilitas diskret** berikut:

Tabel 6.4 Distribusi probabilitas *X*

Nilai X	0	1	2	3
Probabilitas X	1/8	3/8	1/8	3/8

Dari distribusi probabilitas di atas, dapat dihitung probabilitas peristiwa-peristiwa yang berhubungan dengan *X***,** misalnya:

$$P\,[X > 2] \quad = P\,[X = 2] + P\,[X = 3]$$
$$= 3/8 + 1/8 = 4/8 = ½$$
$$P\,[1 < X < 3] \quad = P\,[X = 1] + P\,[X = 2] + P\,[X = 3]$$
$$= 3/8 + 3/8 + 1/8 = 7/8$$

Yang tergolong dalam distribusi diskret diantara distribusi teoritis yaitu distribusi uniform, distribusi binomial, distribusi hipergeometrik dan distribusi poisson.

Distribusi Uniform

Misalkan variabel random ***X*** (a) menyatakan nilai-nilai yang diberikan bagi hasil yang mungkin diperoleh pada percobaan dengan ruang sampel $S = \{\ a1\ ,\ a2\ ,\ .\ .\ .\ ,\ an\ \}$, maka variabel random *X* dikatakan berdistribusi uniform jika:

$$\mathrm{P\ (Xi)} = \frac{1}{n}$$

Contoh distribusi uniform misalnya distribusi probabilitas variabel random *X* yang menyatakan titik yang tampak di atas pada pelontaran berulang sebuah dadu yang seimbang. Variabel random *X* dapat menjalani nilai-nilai dalam himpunan {1, 2, . . . , 6} masing-masing dengan probabilitas $P\ (\ \mathrm{X}i\ ) = 1/6$.

Grafik contoh distribusi probabilitas uniform di atas diperlihatkan dalam bentuk diagram garis pada diagram 6.1 berikut:

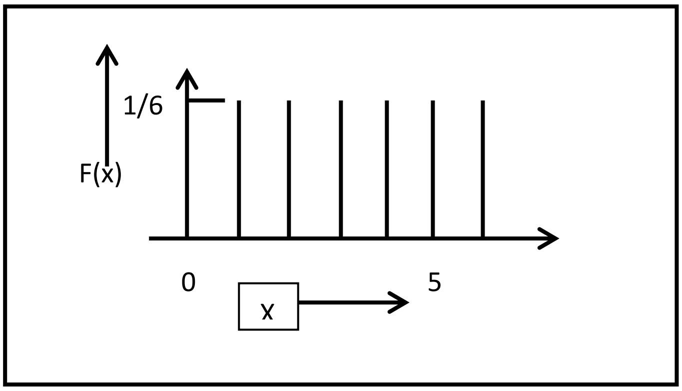


Diagram 6.1. Contoh Grafik Distribusi Uniform

6.3Distribusi Probabilitas Kontinu

Yang tergolong dalam distribusi kontinu diantara distribusi teoritis yaitu distribusi homogen, distribusi normal, distribusi Z (distribusi normal standar) dan distribusi t.

Distribusi Homogen

Variabel random kontinu *X* dikatakan berdistribusi homogen dalam interval [*a*, *b*], apabila variabel itu mempunyai fungsi probabilitas yang berbentuk:

$$F(x) = \frac{1}{b-a} \qquad a \leq x \leq b$$

Distribusi homogen dapat dianggap sebagai *'counterpart'* kontinu bagi distribusi uniform yang diskret (lihat diagram 6.2 di bawah); walaupun ada juga yang tetap menyebut bentuk kontinu ini sebagai 'distribusi uniform'.

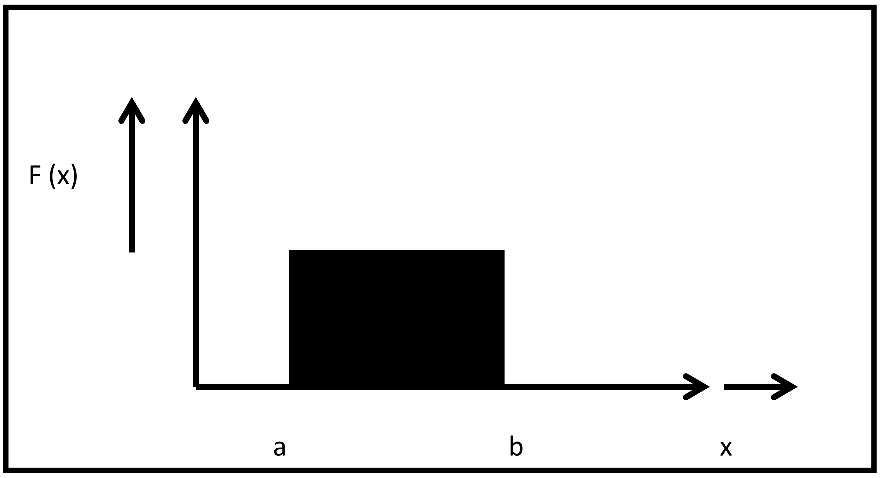


Diagram 6.2

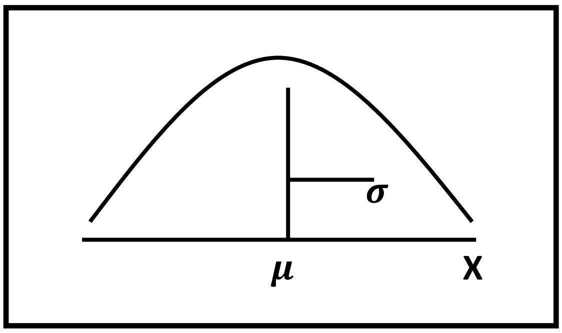
Grafik Fungsi Probabilitas Distribusi Homogen

6.4 Distribusi Normal

Distribusi normal adalah suatu distribusi yang digunakan untuk mengetahui probabilitas yang telah diketahui rata-rata (μ) dan standar deviasinya (σ). Banyaknya kejadian yang terdistribusi normal, tanda =, ≥ , dan ≤ diabaikan, jadi hanya ada tanda > dan <. Perhitungan probabilitas suatu sampel yang diambil, didapat dengan cara melakukan transformasi nilai-nilai pengukuran ke dalam bentuk bakunya (nilai Z). Distribusi normal ini memiliki ciri yaitu n ≥ 30 dan n,p ≥ 5.

Distribusi normal sering digunakan dalam berbagai penelitian. Banyak kejadian yang dapat dinyatakan dalam data hasil observasi per eksperimen yang mengikuti distribusi normal, antara lain tinggi badan, berat badan, isi sebuah botol, nilai hasil ujian dan lain-lain.

KURVA NORMAL



Kurva normal berbentuk seperti lonceng dan simetris terhadap rata–rata (μ)

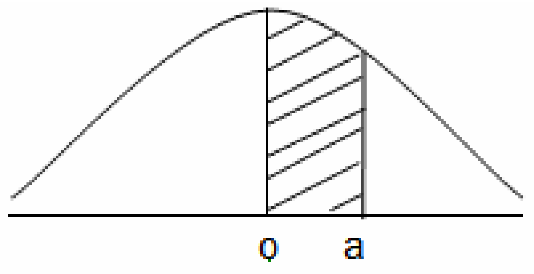
Sifat-sifat kurva normal:

1. Nilai modus, yaitu nilai sumbu X dengan kurvanya maksimum terletak pada $x = \mu$.
2. Kurva normal simetris terhadap sumbu vertikal melalui μ.
3. Kurva normal mempunyai titik belok pada $x = \mu \pm \sigma$
4. Kurva normal memotong sumbu horizontal secara asimtotis.
5. Luas area di antara kurva normal dan sumbu horizontal sama dengan 1

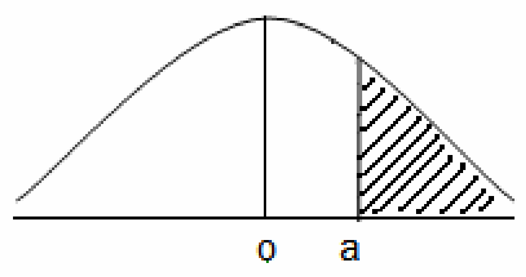
(secara singkat dikatakan, luas kurva normal sama dengan 1)

Mencari luas daerah pada suatu kurva normal dengan menggunakan tabel:

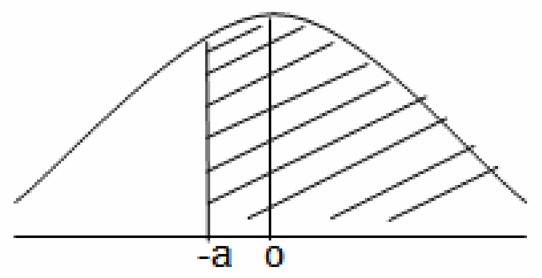
P($0 \leq z \leq a$)= nilai tabel a



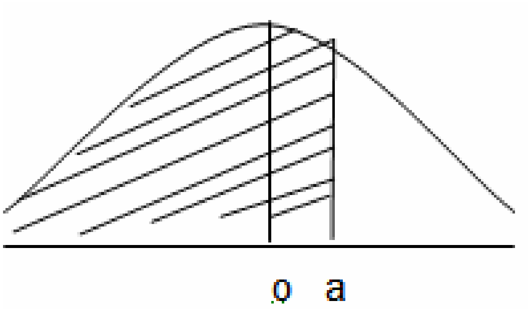
P($z \geq a$)= 0.5 - nilai tabel a



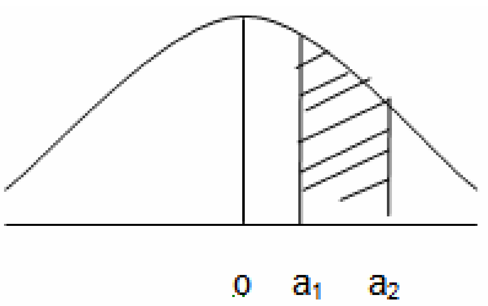
P($z \geq -a$) = 0.5 + nilai tabel –a



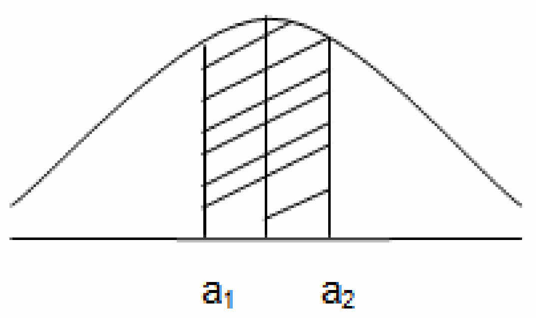
P($z \leq a$)= nilai tabel a + 0.5



P($a1 \leq z \leq a2$)= nilai table a2 - nilai tabel a1



P(a1 ≤ z ≤ a2)= nilai tabel a2 + nilai tabel a1

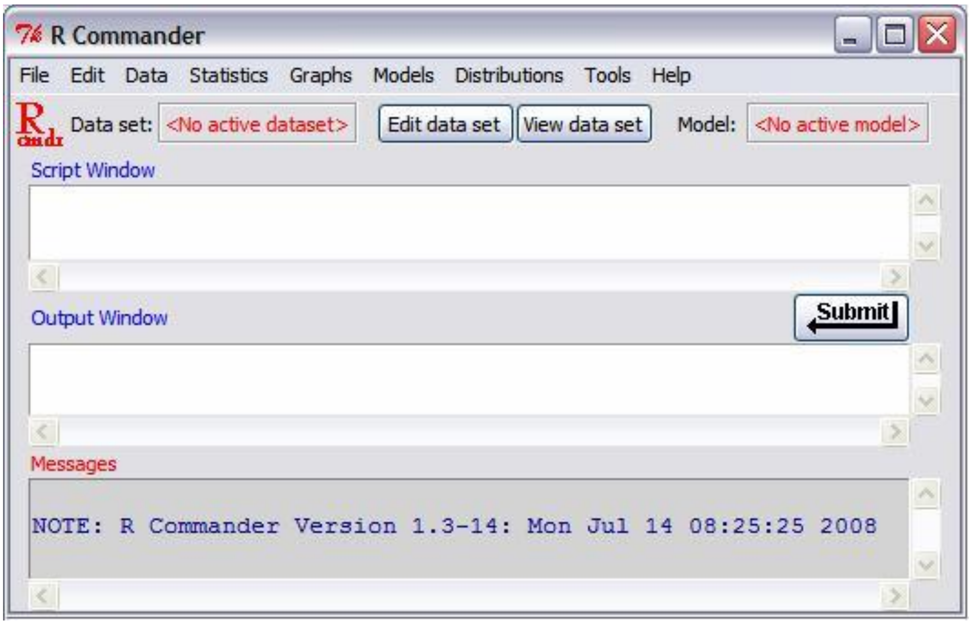


CONTOH KASUS

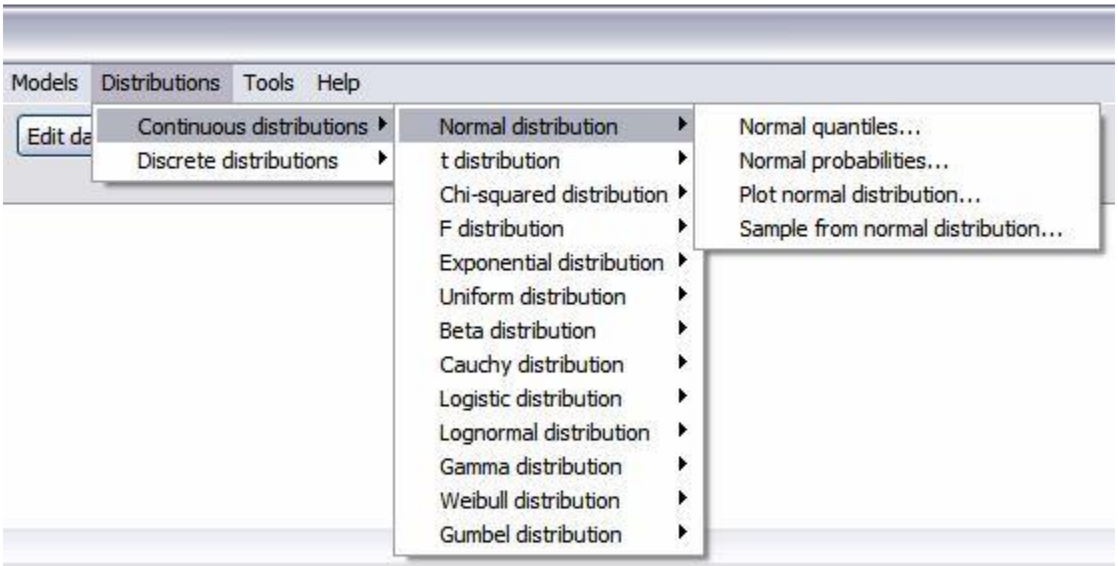
Diketahui bahwa rata-rata kedatangan bus dalam suatu terminal adalah 250 bus per jam dengan standar deviasi 15 per jam. Jika jumlah kedatangan bus tersebut berdistribusi normal, berapa probabilitas dari tiap kedatangan bus kurang dari 300 bus per jam ?

Langkah-langkah penyelesaian kasus

1. Tekan icon R *Commander* pada *desktop*, kemudian akan muncul tampilan seperti gambar di bawah ini.



2. Pilih *Distributions, Continous Distributions, Normal Distributions, Normal Probabilities.*

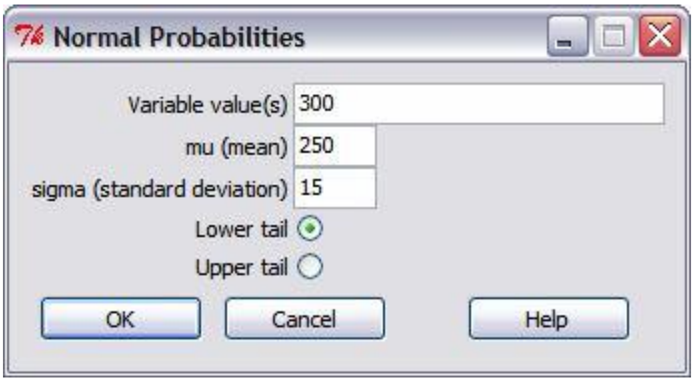


a. Muncul Kotak dialog *Normal Probabilities. Input Variabel Value(s)* = 300

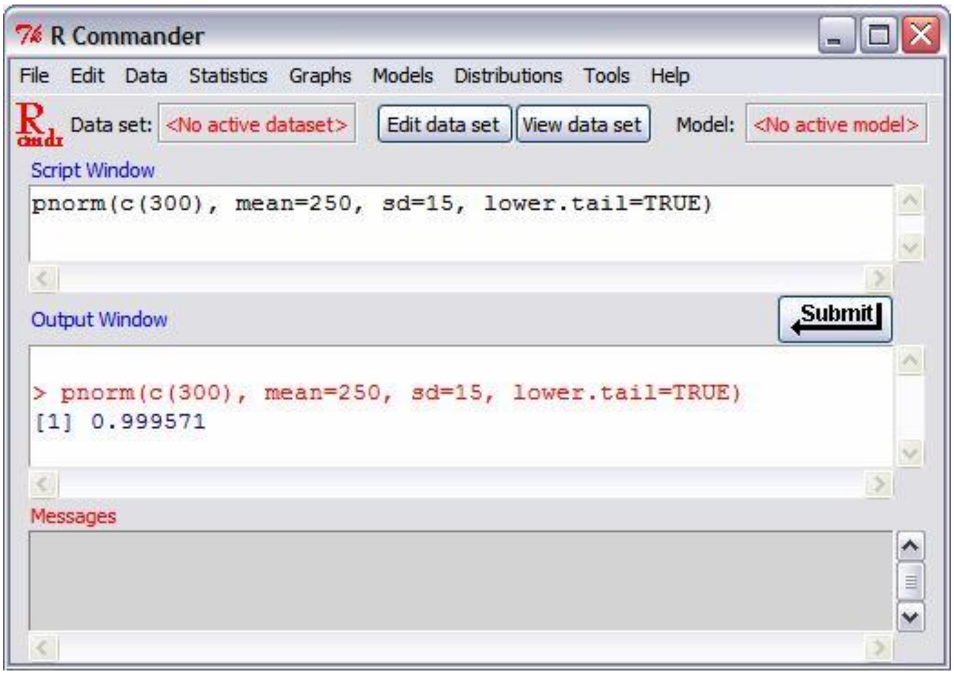
b. Input nilai *Myu (Mean)* = 250

c. Input nilai *Sigma (Standar Deviation)* = 15

d. Pilih ***Lower Tail*** p(x <300) tekan ok.



3. Maka pada *Output Window* akan diperoleh p (x<300) = **0.999571**



6. 5 Distribusi Binomial

Distribusi binomial dapat dianggap sebagai hasil percobaan yang diulang-ulang, yang memenuhi syarat sebagai ‘*Bernoulli Trials*’.

Sifat-sifat *Bernoulli Trials* :

1. Tiap percobaan (*Trial*) menghasilkan salah satu dari dua kemungkinan, yang dinamakan **sukses** (S) dan **tidak sukses** / **gagal** (T).
2. Pada tiap percobaan, probabilitas sukses selalu tetap dan dinyatakan sebagai:

   $$p = P\ (S)$$

   Probabilitas tidak sukses dinyatakan sebagai:

   $$q = P\ (T) = 1 - p$$

   sehingga:

   $$p + q = 1$$
3. Percobaan-percobaan independen satu dengan yang lain: Hasil suatu percobaan tidak dipengaruhi oleh hasil pada percobaan-percobaan sebelumnya.

Contoh 6.7:

Misalkan dilakukan *Bernoulli Trials* sebanyak n kali, dengan probabilitas sukses p

pada tiap percobaan. Variabel random X menyatakan banyak sukses dalam n kali percobaan tersebut, maka distribusi probabilitas X dikatakan berdistribusi binomial dengan n kali percobaan dan probabilitas sukses p.

Misalkan dilakukan n = 4 kali percobaan, maka semua hasil yang mungkin adalah sebagai berikut:

TTTT TTTS SSTT SSST SSSS
TTST STST SSTS
TSTT STTS STSS
STTT TSST TSSS
TSTS
TTSS

Distribusi probabilitasnya diperlihatkan pada tabel 6.5 berikut:

Tabel 6.5 Contoh Distribusi Binomial dengan *n* = 4

Nilai X	**Banyak hasil : C_x^n**	**Prob.tiap hasil : $p^x q^{n-x}$**
0	$C_0^4 = 1$	$P^0 q^4 = q^4$
1	$C_1^4 = 4$	$P^1 q^3 = p\, q^3$
2	$C_2^4 = 6$	$P^2 q^2$
3	$C_3^4 = 4$	$P^3 q^1 = p^3 q$
4	$C_4^4 = 1$	P^4

Maka diperoleh distribusi probabilitas distribusi binomial:

$$\boxed{P\,(X = \mathcal{X}) = C_{\mathcal{X}}^n\, p^x q^{n-x}} \quad ; \mathcal{X} = 0,1,\ldots\ldots, n$$

Beberapa contoh grafik distribusi binomial dapat dilihat pada Diagram 6.3.

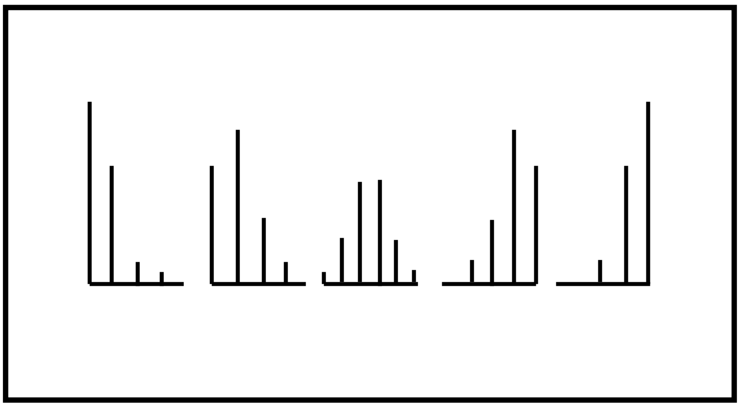


Diagram 6.3 Contoh Beberapa Grafik Distribusi Binomial Dengan *N* = 5 Dan Berbagai Nilai *P*

Contoh :

Sepasang suami isteri yang baru menikah merencanakan untuk memperoleh empat orang anak. Jika rencananya mungkin terlaksana dan diketahui probabilitas untuk memperoleh anak laki-laki dalam tiap kelahiran adalah 0.51, maka:

a. Probabilitas untuk memperoleh empat orang anak laki-laki:

$$P\ (X = 4) = C_4^4 p^4$$
$$= (1)(0.51^4) = 0.0677$$

b. Probabilitas untuk memperoleh tiga orang anak laki-laki:

$$P\ (X = 3) = C_3^4 p^3\, q$$
$$= (4)(0.51^3)(0.49) = 0.2600$$

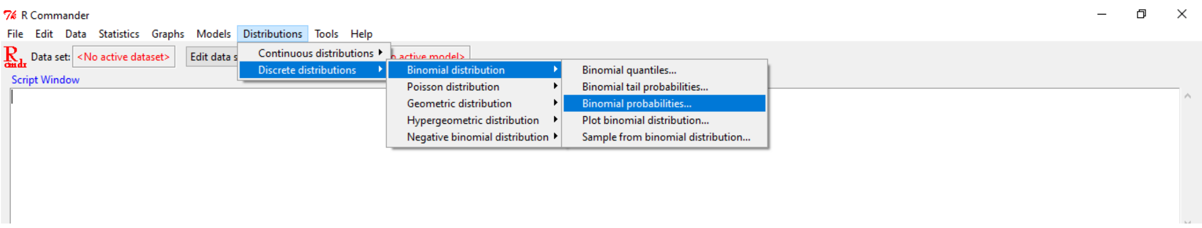
c. Probabilitas untuk memperoleh dua orang anak laki-laki:

$$P\ (X = 2) = C_2^4 p^2 q^2$$
$$= (6)(0.51^2)(0.49^2) = 0.3747$$

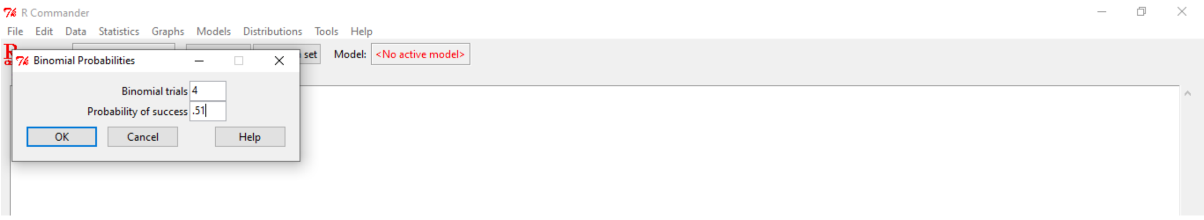
d. Probabilitas untuk memperoleh paling sedikit dua orang anak laki-laki:

$$P\ (X > 2) = P\ (X = 2) + P\ (X = 3) + P\ (X = 4)$$
$$= 0.3747 + 0.2600 + 0.0677 = 0.7024$$

1. Tekan icon ***R Commander*** pada *desktop*, Pilih menu ***Distribution, Discrete Distributions, Binomial Distribution***, lalu ***Binomial Probabilities***



2. Isi nilai n pada kotak ***Binomial Trials*** = 4 , kemudian input Probabilities Of Success dengan nilai probabilitas berhasil (Probabilities Of Success = 0.51) kemudian tekan tombol OK



3. Maka *Output Window* muncul probabilitas untuk memperoleh anak laki-laki

Nilai-nilai probabilitas distribusi binomial dapat dilihat **tabel probabilitas binomial** (**Addendum B1**). Untuk menjelaskan penggunaannya, diperlihatkan tabel binomial pada tabel 6.6 berikut.

Misalnya:

Untuk n = 2 dan p = 0.01 : $P\ (X = 1) = 0.0198$

Untuk n = 3 dan p = 0.40 : $P\ (X = 2) = 0.2880$

Untuk n = 25 dan p = 0.99 $P\ (X = 25) = 0.778$

Kebanyakan tabel binomial tidak menyajikan nilai-nilai probabilitas untuk $p > 0.50$.

Perhatikan bahwa:

$$P\ (X = x \mid p) = P\ (X' = n - x \mid p' = 1 - p);$$

yaitu probabilitas untuk mendapatkan x kali sukses $P\ (X = x)$ adalah sama dengan probabilitas untuk mendapatkan $(n - x)$ kali sukses $P\ (X' = n - x)$ dari percobaan dengan n yang sama dan probabilitas sukses baru $p' = 1 - p$.

Tabel 6.6. Distribusi Binomial [*P* (*X* = *x*)]

n	X	p: 01	0.05	. . .	0.40	. . .	0.95	.99
2	0	.9801	. . .		.3600	. . .		.0001
	1	.0198	. . .		.4800	. . .		.0198
	2	.0001	. . .		.1600	. . .		.9801
3	0	.9703	. . .		.2160	. . .		.0000
	1	.0294	. . .		.4320	. . .		.0003
	2	.0003	. . .		.2880	. . .		.0294
	3	.0000	. . .		.0640	. . .		.9703
.	.	.			.			.
.	.	.			.			.
.	.	.			.			.
25	0	.778	. . .		.000	. . .		. 000
	1	.196	. . .		.000	. . .		.000
	.	.			.			.
	.	.			.			.
	.	.			.			.
	25	.000	. . .		.000	. . .		.778

Misalnya:

- Jika $n = 2$, P ($X = 0$) = 0.0001 untuk $p = 0.99$, bernilai sama dengan:

  P ($X = 2$) = 0.0001 untuk $p = 0.01$
- Jika $n = 2$, P ($X = 2$) = 0.9801 untuk $p = 0.9$, bernilai sama dengan:

  P ($X = 0$) = 0.9801 untuk $p = 0.01$
- Jika $n = 3$, P ($X = 2$) = 0.0294 untuk $p = 0.99$, bernilai sama dengan:

  P ($X = 1$) = 0.0294 untuk $p = 0.01$

Nilai-nilai probabilitas distribusi binomial dapat pula disajikan secara kumulatif, yaitu P ($X < x$) dalam bentuk **tabel binomial kumulatif** (**Addendum B2**).

Tabel 6.7. Distribusi Binomial Kumulatif *P* (*X* <*x*):

n	X	p: .01	.05	. . .	.40	. . .	.95	.99
2	0	.9801		. . .	.3600		. . .	.0001
	1	.9999		. . .	.8400		. . .	.0199
	2	.1000		. . .	.1000		. . .	.1000
3	0	.9703		. . .	.2160		. . .	.0000
	1	.9997		. . .	.6480		. . .	.0003
	2	.1000		. . .	.9360		. . .	.0297
	3	.1000		. . .	.1000		. . .	.1000
.	.							
.	.							
.	.							
25	0	.778		. . .	.000		. . .	. 000
	1.	.974		. . .	.000		. . .	.000
	.	.			.			.
	.	.			.			.
	.				.			.222
	25	1.00		. . .	1.00		. . .	1.00

Misalnya:

- Untuk n = 2 dan p =0.01 :

  $P (X = 1) \quad = P (X < 1) – P (X = 0)$

  $= 0.0000 – 0.9801 = 0.0198$

- Untuk n = 3 dan p = 0.40 :

  $P (X = 2) \quad = P (X < 2) – P (X < 1)$

  $= 0.9360 – 0.6480 = 0.2880$

- Untuk n = 25 dan p = 0.99 :

  $P (X = 25) \quad = P (X < 25) – P (X < 24)$

  $= 1.00 – 0.222 = 0.778$

6.6 Distribusi Hipergeometrik

PENDAHULUAN

Jika sampling dilakukan tanpa pengembalian dari kejadian sampling yang diambil dari populasi dengan kejadian-kejadian terbatas, proses Bernouli tidak dapat digunakan, karena ada perubahan secara sistematis dalam probabilitas sukses seperti kejadian-kejadian yang diambil dari populasi. Jika pengambilan sampling tanpa pengembalian digunakan dalam situasi sebaliknya dan memenuhi syarat proses Bernouli, distribusi hipergeomentrik adalah distribusi probabilitas diskrit yang tepat.

RUMUS DISTRIBUSI HIPERGEOMETRIK

P (X | N, XT, n) = **(** N-XT Cn-X.XTCX **)** / NCn

Ket : X = Jumlah sukses dalam sampel, untuk X = 0,1,2,3, ...n
(nilai yang ditanyakan dalam probabilitas)

N = Jumlah kejadian dalam populasi

XT = Jumlah sukses dalam populasi

n = Jumlah kejadian dalam sampel

Apabila populasi besar dan sampel relatif kecil, pengambilan secara sampling dilakukan tanpa pengembalian menimbulkan efek terhadap probabilitas sukses dalam setiap percobaan kecil, untuk mendekati nilai probabilitas hipergeometrik dapat digunakan konsep distribusi binomial, dengan syarat n ≤ 0,05 N. Banyaknya keberhasilan X dalam suatu percobaan hipergeometrik disebut **peubah acak hipergeometrik**.

Percobaan hipergeometrik bercirikan dua sifat berikut:

1. Suatu contoh acak berukuran n diambil dari populasi yang berukuran N.
2. n dari N benda diklasifiksikan sebagai berhasil dan N – n benda diklasifikasikan sebagai gagal.

CONTOH SOAL

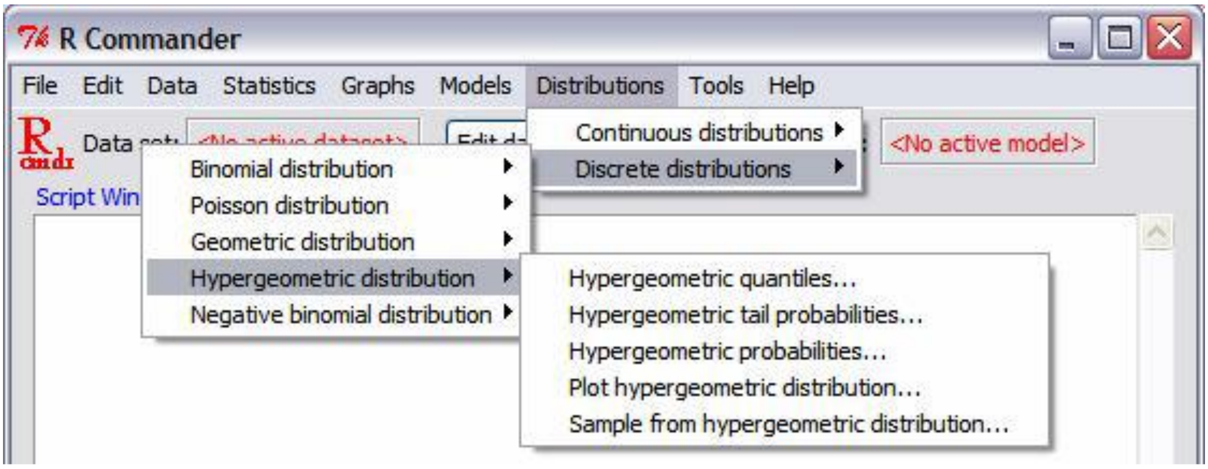
Dari enam kontraktor jalan, tiga diantaranya telah berpengalaman selama lima tahun atau lebih. Jika empat kontraktor dipanggil secara random dari enam kontraktor tersebut, berapakah probabilitas bahwa dua kontraktor telah berpengalaman selama lima tahun atau lebih?

Penyelesaian

Diketahui : X = 2, N = 6, XT= 3, n = 4

Untuk menyelesaikan persoalan distribusi Hipergeometrik, dapat digunakan program R. Langkah-langkahnya sebagai berikut :

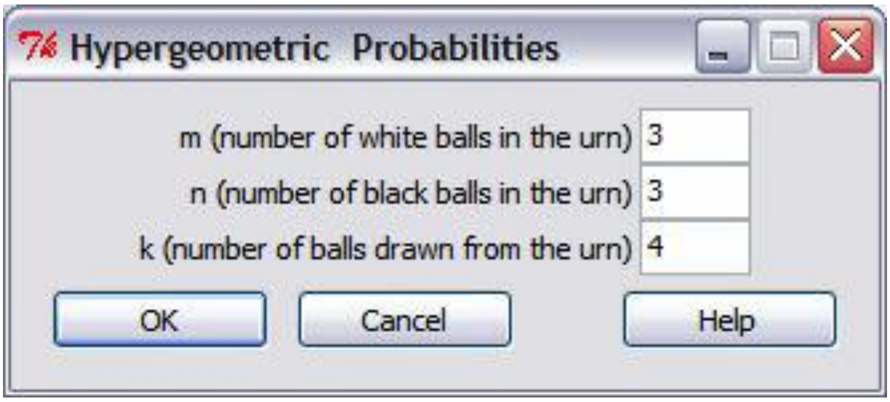
1. Tekan icon R *Commander* pada *desktop*, kemudian pilih menu *Distributions*, *Discrete Distributions*, *Hypergeometrik Distribution*, *Hypergeometrik Probabilities*



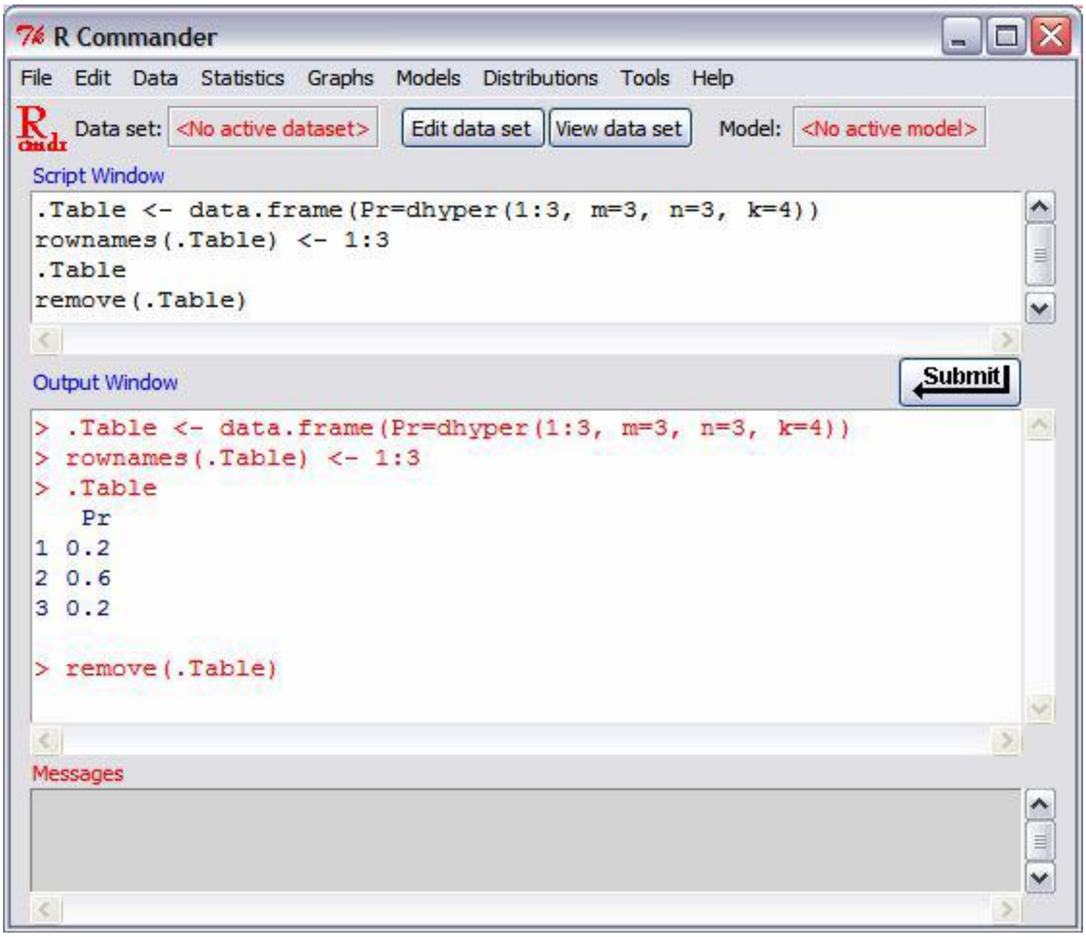
2. Masukkan nilai m (*The Number Of White Balls in The Urn* – jumlah sukses dalam populasi = nilai XT dalam soal) = 3

   Masukkan nilai n (*The Number Of Black Balls in The Urn* - jumlah gagal dalam populasi atau = lawan dari nilai m) = 3

Masukkan nilai k (*The Number Of Balls Drawn From The Urn* - Jumlah kejadian dalam sampel) = 4, karena banyaknya nilai yang diambil dari percobaan adalah 4, kemudian tekan tombol OK



3. Maka akan tampil seperti berikut :



4. Karena yang ditanya adalah **nilai X = 2,** maka lihat output Pr yang 2, yaitu 0,6.

6.7 Distribusi Poisson

Pendahuluan

Distribusi poisson diberi nama sesuai dengan penemunya yaitu *Siemon D. Poisson*. Distribusi ini merupakan distribusi probabilitas untuk variabel diskret acak yang mempunyai nilai 0, 1, 2, 3 dan seterusnya. Suatu bentuk dari distribusi ini adalah rumus pendekatan peluang poisson untuk peluang binomial yang dapat digunakan untuk pendekatan probabilitas binomial dalam situasi tertentu. Rumus poisson dapat digunakan untuk menghitung probabilitas dari jumlah kedatangan, misalnya : probabilitas jumlah kedatangan nasabah pada suatu bank pada jam kantor. Distribusi poisson ini digunakan untuk menghitung probabilitas menurut satuan waktu.

Rumus Pendekatan Peluang Poisson untuk Binomial

Pendekatan peluang poisson untuk peluang binomial dilakukan untuk mendekatkan probabilitas. Probabilitas dari kelas sukses (x) dari n percobaan binomial dalam situasi dimana n sangat besar dan probabilitas kelas sukses (p) sangat kecil. Aturan yang diikuti oleh kebanyakan ahli statistika adalah bahwa n cukup besar dan p cukup kecil, jika n adalah 20 atau lebih dari 20 dan p adalah 0.05 atau kurang dari 0.05. Pada pendekatan ini rumusnya lebih mudah untuk digunakan dibandingkan dengan rumus binomial. Untuk menghitung probabilitas suatu peristiwa yang berdistribusi poisson digunakan rumus sebagai berikut:

$$\mathbf{P (x ; \mu) = (e^{-\mu} . \mu^{x}) / X !}$$

Dimana : **e** = 2.71828

μ = Rata – rata keberhasilan = **n . p**

x = Banyaknya unsur berhasil dalam sampel

n = Jumlah / ukuran populasi

p = Probabilitas kelas sukses

Rumus Proses Poisson

Distribusi poisson dalam konteks yang lebih luas dari pada rumus pertama tadi. Sebagai ilustrasi, misalkan pada hari Senin ini adalah jam kerja yang sibuk pada suatu bank, dan kita tertarik oleh jumlah nasabah yang mungkin datang selama jam kerja tersebut, dengan ketertarikan kita sebenarnya terletak pada interval waktu dan jumlah kedatangan dalam interval waktu jika proses kedatangannya mempunyai karakteristik sebagai berikut :

1. Tingkat kedatangan rata-rata setiap unit waktu adalah konstant.

   Dalam ilustrasi tadi dapat berarti bahwa jika tingkat kedatangan rata–rata untuk periode jam adalah, misalkan 72 kedatangan setiap jam, maka tingkat ini melambangkan interval waktu pada jam kerja tadi : yaitu tingkat yang dapat dirubah kepada rata–rata yaitu 36 kedatangan setiap ½ jam atau 1.2 kedatangan setiap menit.
2. Jumlah kedatangan pada interval waktu tidak bergantung pada apa yang terjadi di interval waktu yang sudah lewat. Dalam ilustrasi tadi, dapat berarti bahwa kesempatan dari sebuah kedatangan di menit berikutnya adalah sama.
3. Tidak memiliki kesamaan bahwa akan lebih dari satu kedatangan dalam interval pendek, semakin pendek interval, semakin mendekati nol adalah probabilitas yang lebih dari satu kedatangan. Dalam ilustrasi tadi, bisa berarti bahwa adalah tidak mungkin untuk lebih dari satu nasabah yang dapat melewati jalan masuk dalam waktu satu detik.

Untuk menghitung terjadinya suatu kedatangan yang mengikuti proses poisson digunakan rumus sebagai berikut :

$$\mathbf{P\,(\,x\,) = (e^{-\lambda\,.\,t}\,.\,(\lambda.t)^{x}\,)\,/\,X!}$$

Dimana : **λ** = Tingkat rata–rata kedatangan tiap unit waktu

t = Jumlah unit waktu

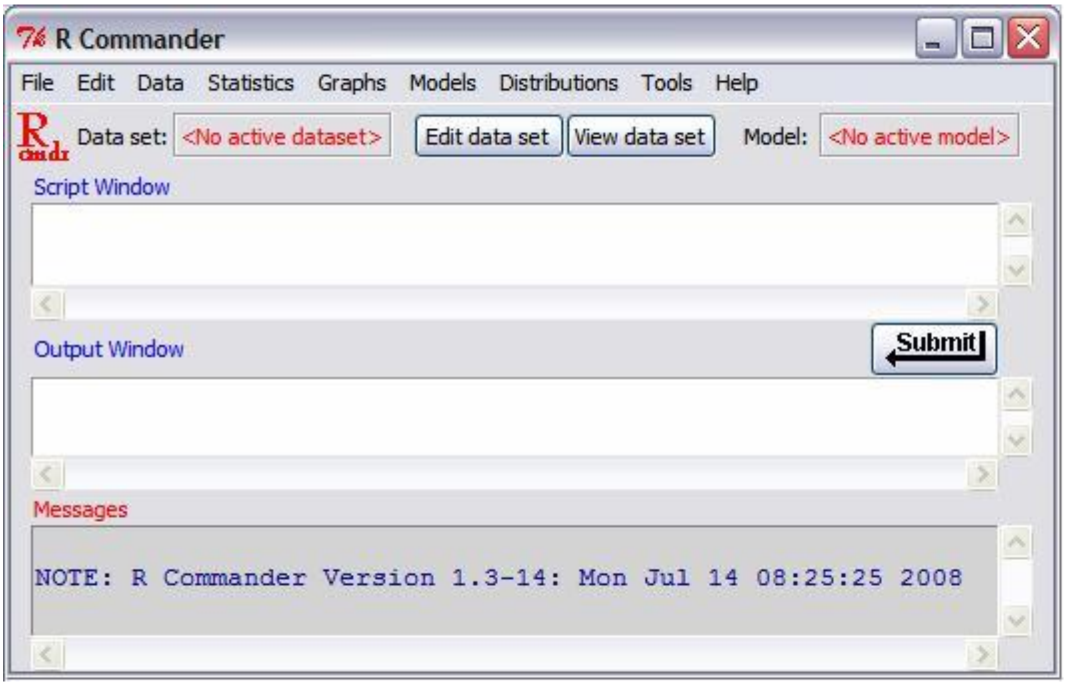
x = Jumlah kedatangan dalam t unit waktu

Contoh :

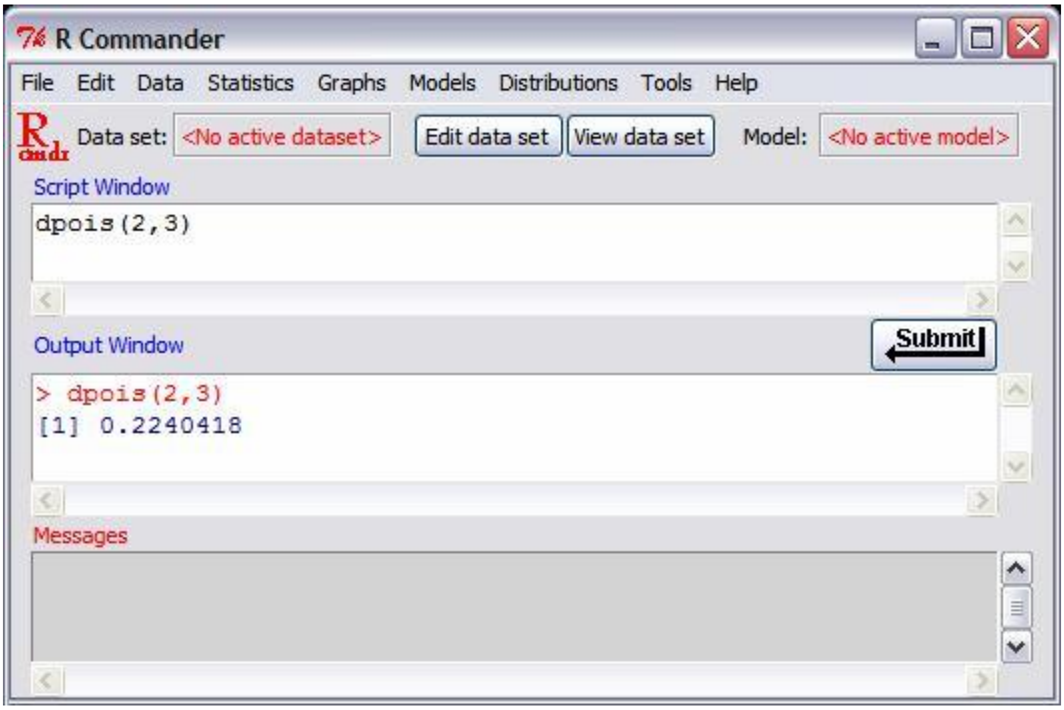
Perusahaan kerajinan tangan “**BAGUS ART**” mampu menghasilkan 100 produk setiap harinya. Perusahaan memperkirakan 3 % diantara produk yang dihasilkan tidak sesuai dengan standar. Maka berapakah probabilitas 2 produk yang tidak sesuai standar ?

Untuk menyelesaikan persoalan distribusi poisson, dapat digunakan program R. Langkah-langkahnya adalah sebagai berikut :

1. Tekan icon R *Commander* pada *desktop*, kemudian akan muncul tampilan seperti gambar di bawah ini.

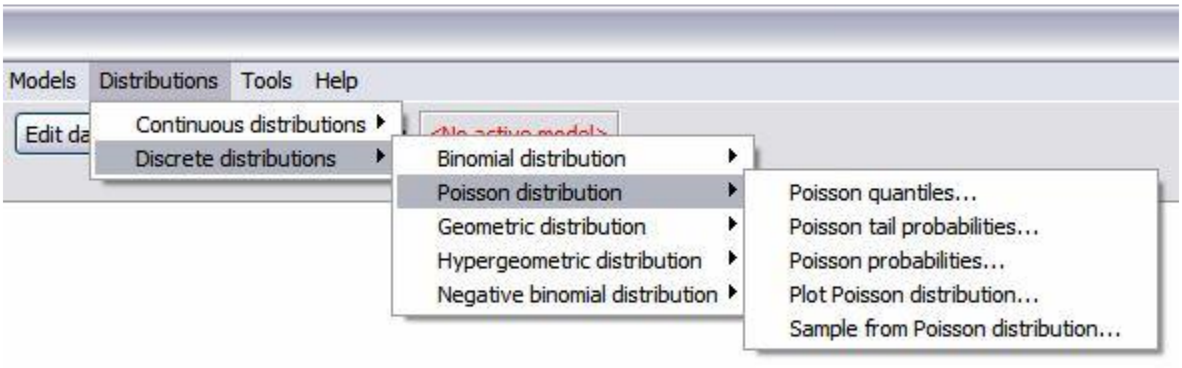


2. Tuliskan pada *Script Window* **dpois(2,3)**. Angka 2 menunjukkan nilai X dan angka 3 menunjukkan nilai µ yang didapat dari perkalian n * p (100 * 3%). Kemudian tekan tombol *Submit.*

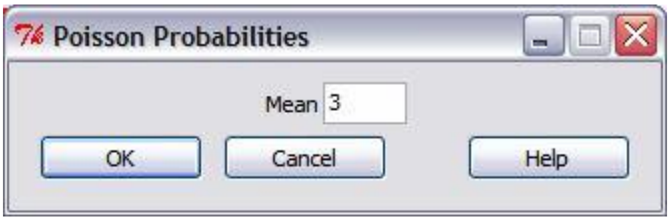


3. Maka probabilitas 2 produk yang tidak sesuai standar adalah = 0.2240418 jika ditanyakan dalam bentuk prosentase (%) maka jawabannya adalah 22.40418% (atau 0.2240418 * 100)

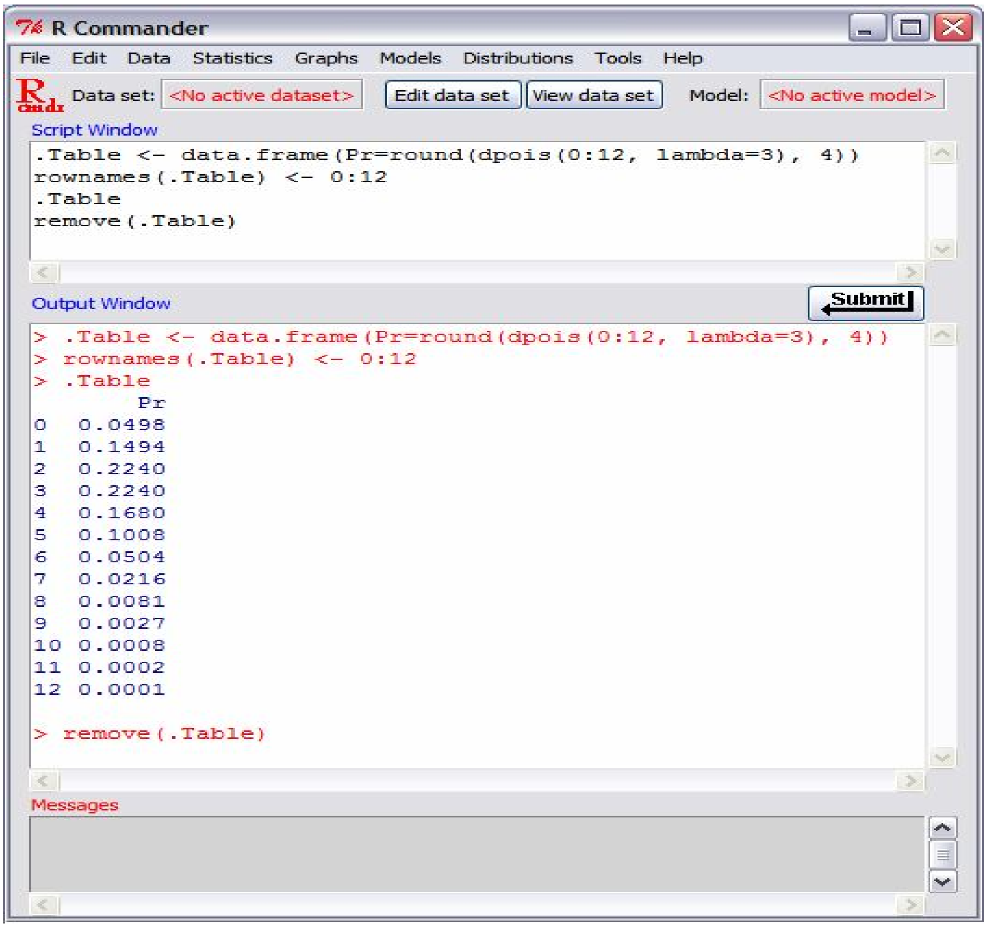
Atau cara lain tekan icon R commander, pilih menu *Distributions, Discreate Distribution, Poisson Distribution, Poisson Probabilities*



Kemudian masukan *Mean* = 3 (didapat dari n * p) = 100 * 3%



Lihat di kolom paling kiri x = 2 yaitu 0.2240 atau 22.40%



6.8 Distribusi *Z* (Distribusi Normal Standar)

Kurva normal dapat berbeda-beda, tergantung pada nilai parameternya μ dan σ. Untuk penyusunan tabel probabilitasnya serta menyederhanakan penggunaannya, diperlukan standardisasi bagi kurva normal, yang menghasilkan kurva normal standar.

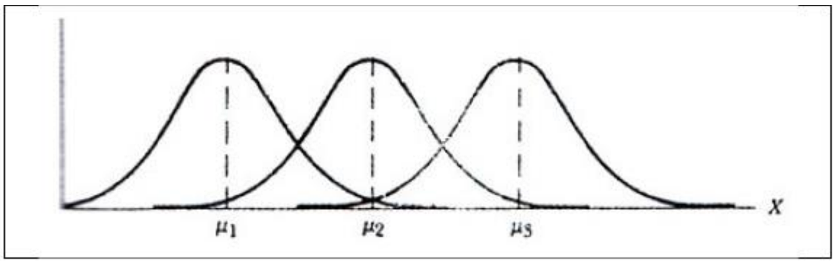


Diagram 6. 4 Kurva Normal Dengan Variansi Yang Sama, Namun Rata-Rata Berbeda: $\mu 1 < \mu 2 < \mu 3$

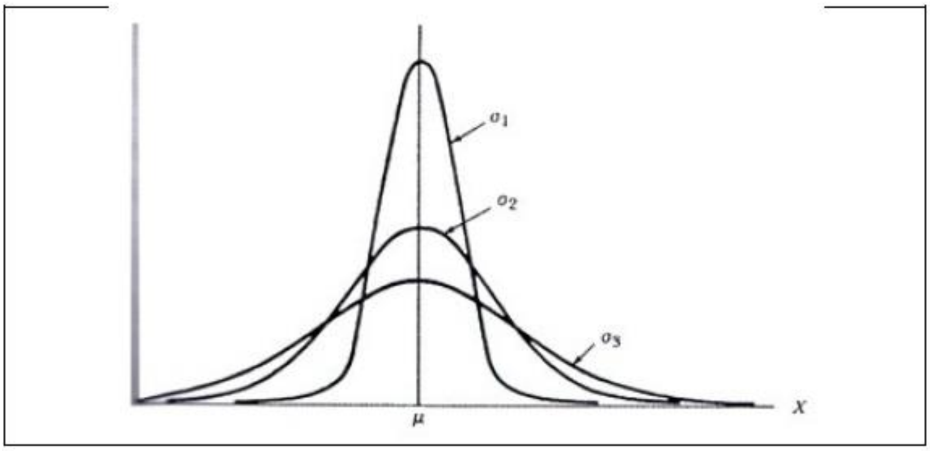


Diagram 6.5 Kurva Normal Dengan Rata-Rata Yang Sama, Namun Variansi Berbeda: $\sigma 1 < \sigma 2 < \sigma 3$

Misalkan variabel random kontinu X berdistribusi normal dengan rata-rata μ dan variansi σ^2. Maka transformasi $Z = (X - \mu) / \sigma$ dikatakan berdistribusi Z (berdistribusi normal standar) dengan rata-rata 0 dan variansi 1 (lihat contoh pada diagram 6.6).

$$\boxed{f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{1}{2}z^2}} \quad ; \quad -\infty < x < \infty$$

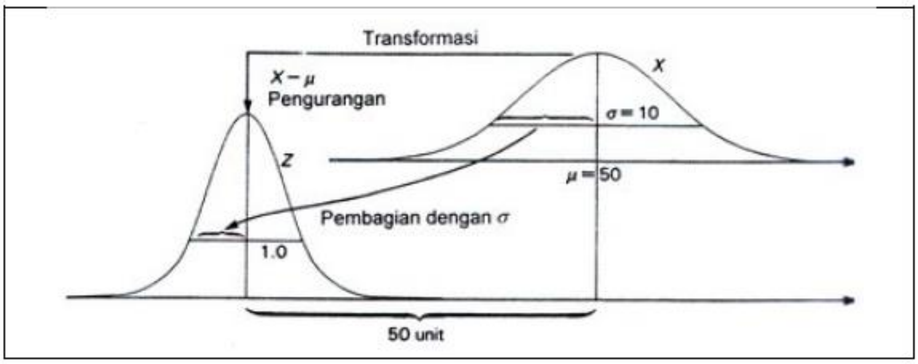


Diagram 6.6. Transformasi Variabel Random Normal X Dengan μ = 50 dan $\sigma = 10$ Menjadi Variabel Random Normal Standar Z

Beberapa luas area pada kurva normal standar Z (lihat diagram 6.7):

- $P\,[-1 \le Z \le +1] \approx 68\%$)
- $P\,[-2 \le Z \le +2] \approx 95\%$)
- $P\,[-3 \le Z \le +3] \approx 99\%$)

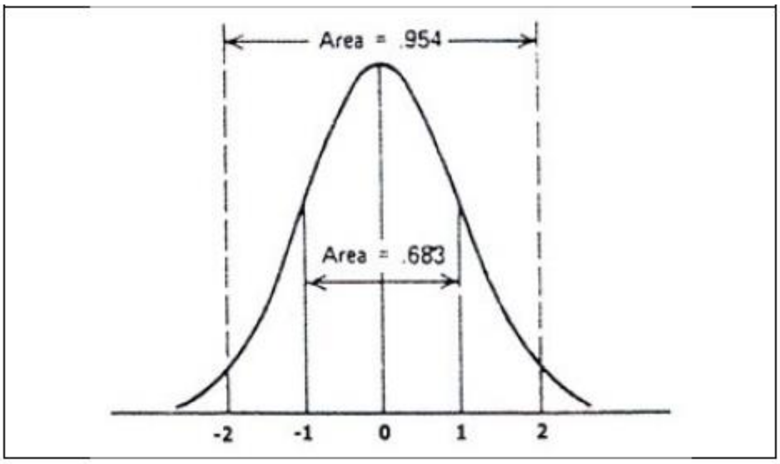
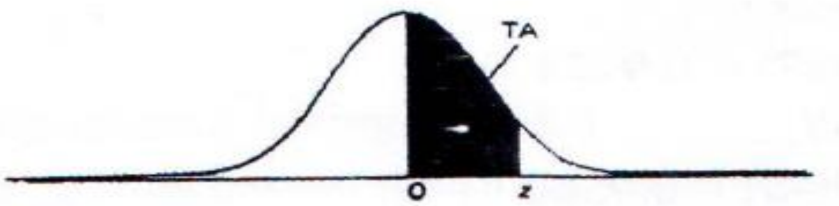


Diagram 6.7. Beberapa Luas Area Pada Kurva Normal Standar *Z*

Luas area pada kurva distribusi *Z* dapat dilihat pada tabel *Z*. Penyajian tabel *Z* dapat dilakukan dalam berbagai bentuk. Dalam salah satu bentuk penyajian, yang cuplikannya disajikan pada tabel 6.10 di bawah ini, luas area (*Table Area*, TA) yang dimaksud adalah luas area dari $Z = 0$ sampai dengan nilai z tertentu, yaitu $P\ (0 \leq Z \leq z)$.

Tabel 6.10. Salah Satu Bentuk Tabel *Z* [$P\ (0 \leq Z \leq z)$]



Z	00	...	04	...	06	...	09
0.0	.0000	...	.0160	...	.0239	...	.0359
0.1	.0398	...	.0557	...	.0636	...	.0753
.	.		.		.		.
.	.		.		.		.
1.0	.3413	...	.3508	...	.3554	...	.3621
.	.		.		.		.
.	.		.		.		.
1.6	.4452	...	.4495		...		.4545
.	.		.		.		.
.	.		.		.		.
1.9	.4713		...		.4750	...	.4767
2.0	.4772	...	.4793	...	.4803	...	.4817
.	.		.		.		.
.	.		.		.		.
3.0	.4987	...	.4988	...	.4989	...	.4990

Nilai-nilai yang tercantum dalam badan tabel menyatakan luas area $[0 \leq Z \leq a]$; a merupakan nilai pada tepi kiri dan sisi atas tabel. Karena distribusi *Z* memiliki standar deviasi sama dengan 1, maka satuan pengukuran pada sumbu horizontal adalah σ . Perhatikan contoh:

- $P\ [Z = b] = 0$

  (sifat yang berlaku untuk seluruh distribusi probabilitas kontinu)
- $P\ [0.00 \leq Z \leq 1.00]$ $= P\ [0.00 < Z < 1.00]$

  $= 0.3413$
- $P\ [-1.00 \leq Z \leq 0.00]$ $= P\ [-1.00 < Z < 0.00]$

  $= P\ [0.00 < Z < 1.00]$ (sifat simetris distribusi Z)

  $= 0.3413$
- $P\ [|Z| < 1.00] = P\ [-1.00 < Z < 1.00]$

  $= (2)(0.3413) = 0.6826$
- $P\ [0.00 < Z < 2.00] = 0.4722$
- $P\ [|Z| < 2.00] = (2)(0.4772) = 0.9544$
- $P\ [0.00 < Z < 3.00] = 0.4987$
- $P\ [|Z| < 3.00] = (2)(0.4987) = 0.9974$
- $P\ [0.00 < Z < 1.96] = 0.4750$
- $P\ [|Z| < 1.96] = (2)(0.4750) = 0.9500$

  Dapat dibalik: Jika A = 95%, maka $|Z| < 1.96$ (dengan syarat A simetris terhadap sumbu vertikal)
- $P\ [|Z| < 1.64] = (2)(0.4495) = 0.8990 \approx 0.9000$

  Dapat dibalik: Jika A = 99%, maka $|Z| < 1.64$ (dengan syarat A simetris terhadap sumbu vertikal)
- $P\ [1.00 < Z < 2.00]$ $= P\ [0.00 < Z < 2.00] – P\ [0.00 < Z < 1.00]$

  $= 0.4772 – 0.3413 = 0.1359$
- $P\ [-1.00 < Z < 2.00] = P\ [-1.00 < Z < 0.00] + P\ [0.00 < Z < 2.00]$

  $= P\ [0.00 < Z < 1.00] + P\ [0.00 < Z < 2.00]$

  $= 0.3413 + 0.4772 = 0.8185$

Untuk aplikasi tabel Z pada perhitungan bagi variabel random X yang berdistribusi normal, transformasikan terlebih dahulu nilai-nilai X menjadi nilai Z:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

sebaliknya pada akhir perhitungan, nilai-nilai Z dapat ditransformasikan kembali ke nilai X:

$X = \mu + Z\,\sigma$

Contoh 6.13:

Nilai-nilai ujian seleksi penerimaan mahasiswa baru secara nasional dianggap berdistribusi normal dengan rata-rata 45 dan standar deviasi 13. Jika hanya 32.5% calon mahasiswa yang akan diterima, berapakah nilai terendah calon mahasiswa yang diterima?

Misalkan variabel random normal X menyatakan nilai-nilai ujian seleksi penerimaan mahasiswa baru, maka $X \sim N\ (45\ ;\ 13)$. Jika x menyatakan nilai terendah calon mahasiswa yang diterima, maka:

$$P\ [X > x] = 0.325$$

Dengan menggunakan tabel Z serta interpolasi linear (lihat Lampiran 5D dan 5E), diperoleh bahwa untuk luas area sebesar 0.325 pada sisi kanan distribusi Z, nilai z-nya adalah 0.4538, sehingga:

$$P\ [Z > 0.4538] = 0.325$$

Dari transformasi standar $Z = (\ X - \mu\ )\ /\ \sigma$ diperoleh:

$$x = \mu + Z\,\sigma$$

dan: $x = 45 + (0.4538)(13) = 50.90$

Contoh 6.14:

Usia hidup rata-rata elemen kering merek PQR adalah 300 jam dengan standar deviasi 35 jam. Dengan asumsi bahwa distribusi usia hidup elemen kering itu mendekati distribusi normal, hitunglah:

a. Berapa persen elemen kering merek PQR yang usia hidupnya kurang daripada 225 jam?
b. Berapa persen elemen kering merek PQR yang usia hidupnya kurang daripada 350 jam?

Misalkan variabel random normal X menyatakan usia hidup rata-rata elemen kering merek PQR, maka $X \sim N\ (300\ ;\ 35)$, maka proporsi elemen kering merek PQR yang usia hidupnya kurang daripada 225 jam dapat dinyatakan sebagai:

$$P\ (X < 225)$$

yang dengan transformasi standar dapat diubah menjadi:

$$\mathrm{P}\left(Z < \frac{225-300}{35}\right) = \mathrm{P}\ (\mathrm{Z} < -2{,}14)$$

yang bernilai sama dengan:

$P\,(Z > 2.14) \quad = 0.5000 - P\,(0 < Z < 2.14)$

$= 0.5000 - 0.4838 = 0.0162 = 1.62\%$

Proporsi elemen kering merek PQR yang usia hidupnya kurang daripada 350 jam dapat dinyatakan sebagai:

$P\,(X < 350)$

yang dengan transformasi standar dapat diubah menjadi:

$$\mathrm{P}\left(Z < \frac{350-300}{35}\right) = \mathrm{P}\,(\mathrm{Z} < 1{,}43)$$

$$= 0.5000 + P\,(0 < Z < 1.43)$$

$$= 0.5000 + 0.4236 = 0.9236 = 92.36\%$$

6.8 Distribusi *T*

PENDAHULUAN

Pengujian hipotesis dengan distribusi t adalah pengujian hipotesis yang menggunakan distribusi t sebagai uji statistik. Tabel pengujiannya disebut tabel t-student. Distribusi t pertama kali diterbitkan pada tahun 1908 dalam suatu makalah oleh W. S. Gosset. Pada waktu itu, Gosset bekerja pada perusahaan bir Irlandia yang melarang penerbitan penelitian oleh karyawannya. Untuk mengelakkan larangan ini dia menerbitkan karyanya secara rahasia dibawah nama ‘Student’. Karena itulah Distribusi t biasanya disebut *Distribusi Student*. Hasil uji statistiknya kemudian dibandingkan dengan nilai yang ada pada tabel untuk kemudian menerima atau menolak hipotesis nol (Ho) yang dikemukakan.

Ciri–ciri Distribusi t

a. Sampel yang diuji berukuran kecil (**n < 30**).

b. Penentuan nilai tabel dilihat dari besarnya tingkat signifikan (α) dan besarnya derajat bebas (db).

Fungsi Pengujian Distribusi t

a. Untuk memperkirakan interval rata–rata.

b. Untuk menguji hipotesis tentang rata–rata suatu sampel.

c. Menunjukkan batas penerimaan suatu hipotesis.

d. Untuk menguji suatu pernyataan apakah sudah layak untuk dipercaya.

Beberapa Macam Penggunaan Hipotesa

Pengujian sampel dalam distribusi t dibedakan menjadi 2 jenis hipotesa, yaitu :

Satu Rata - Rata

Rumus :

to = $\frac{(X-\mu)}{S/\sqrt{n}}$

Ket :

to = T hitung

x = Rata–rata sampel

μ = Rata–rata populasi

s = Standar deviasi

n = Jumlah sampel

Db = n- 1

CONTOH SOAL :

Sebuah Perusahaan minuman meramalkan bahwa minuman hasil produksinya mempunyai kandungan alkohol sebesar 1,85 % per botol. Untuk menguji apakah hipotesa tersebut benar, maka perusahaan melakukan pengujian terhadap 10 kaleng minuman dan diketahui rata–rata sampel (rata-rata kandungan alkohol) 1,95 % dengan simpangan baku 0,25 %. Apakah hasil penelitian tersebut sesuai dengan hipotesa awal Perusahaan ? (selang kepercayaan 95 %)

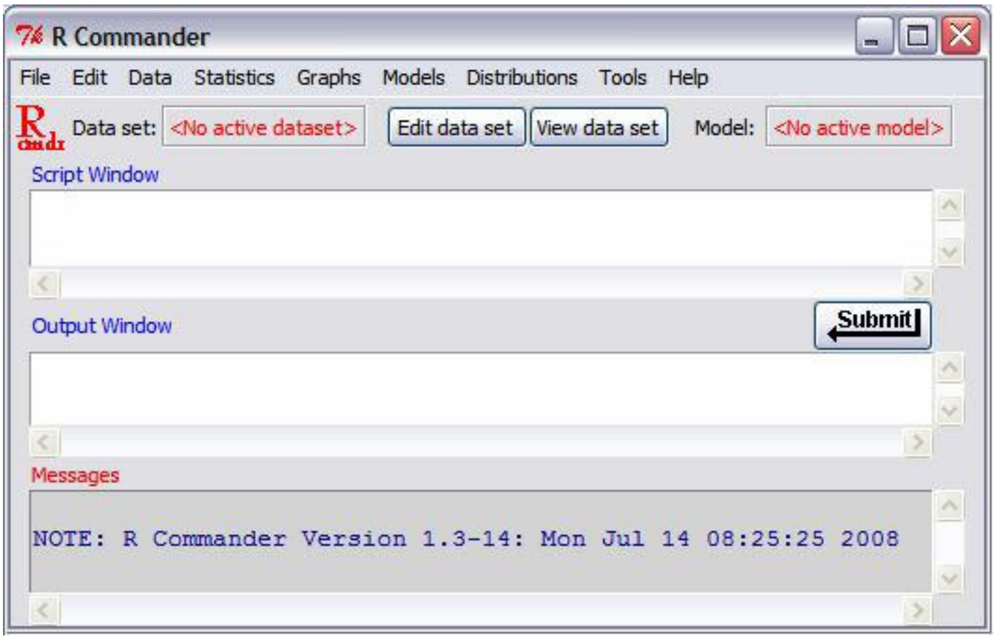
Jawab :

Dik : μ= 1,85 x = 1,95 α = 5% = 0,05

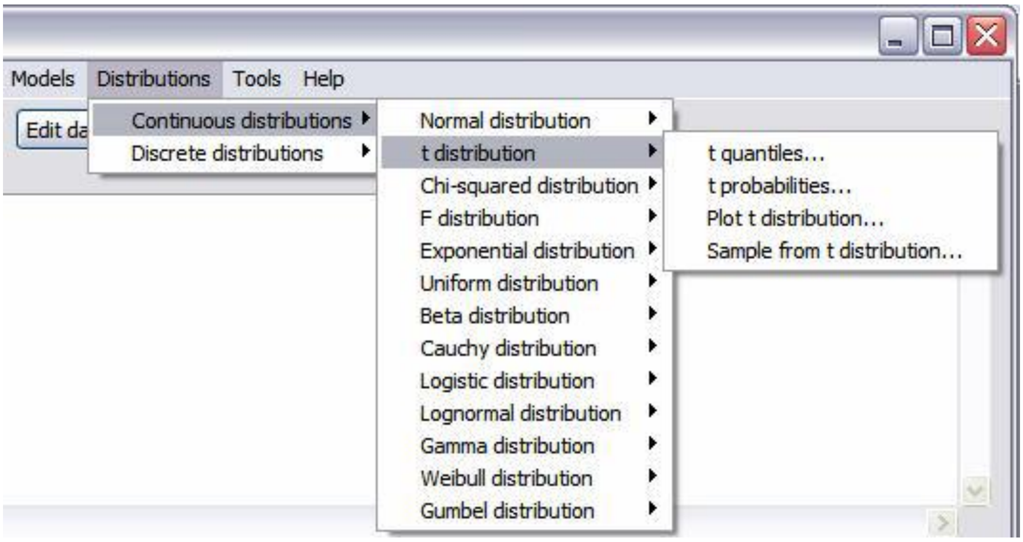
n = 10 s = 0,25

Untuk menyelesaikan soal tersebut dengan menggunakan program R, ikutilah langkah-langkah berikut :

1. Tekan icon R *Commander* pada *desktop*, kemudian akan muncul tampilan seperti gambar di bawah ini.

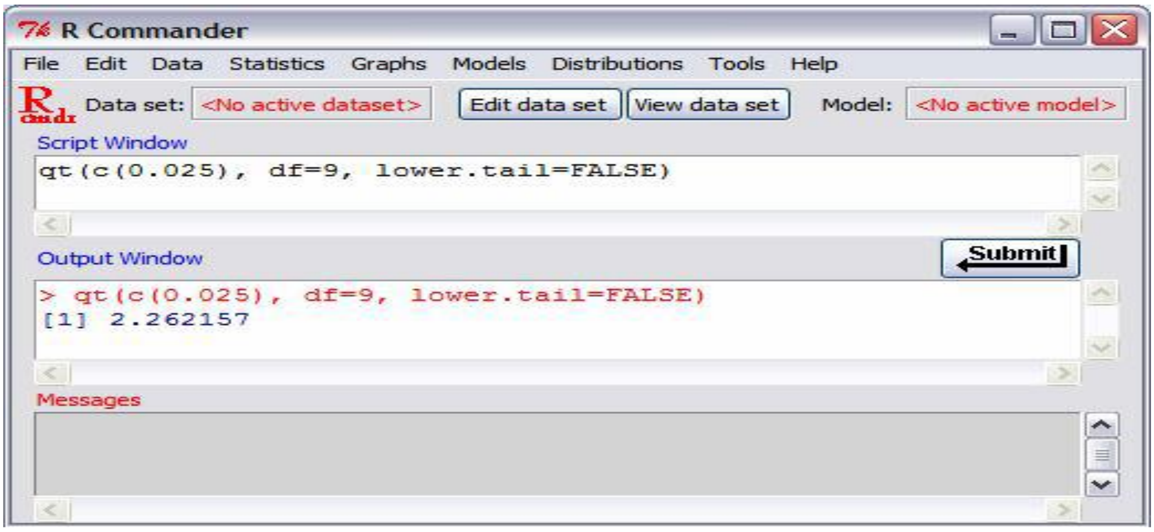


2. Pilih menu *Distribution, Continuous Distributions, T Distribution, T Quantiles*

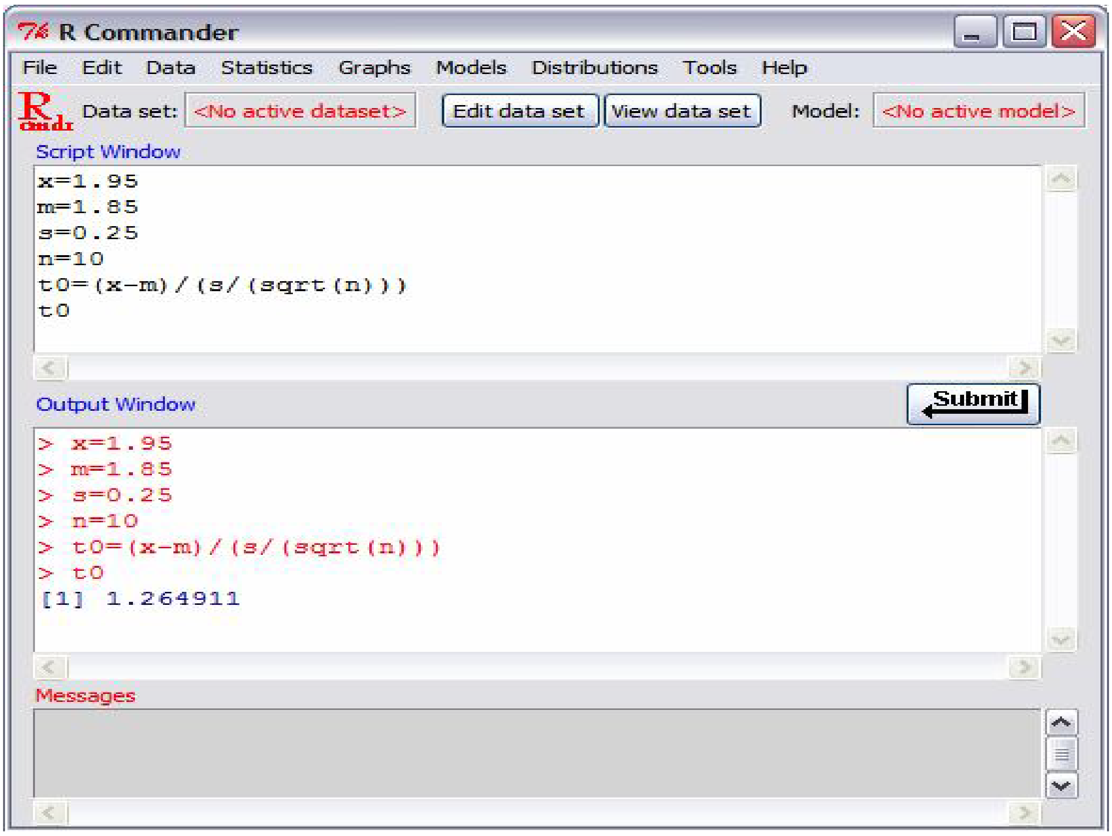


3. Maka pada tampilan *Window R-Commander* akan muncul tampilan *T Quantiles*. Kemudian masukkan nilai probabillitas(nilai alfa) dan masukkan nilai derajat bebasnya (hasil dari Db = n - 1). α = 0.025. Db = n – 1 = 10 – 1 = 9

4. Maka pada *Output Window* akan terlihat hasil nilainya.



5. Untuk mencari nilai t hitung, maka kita tuliskan *Script* rumus t hitung tersebut. Kemudian tekan tombol ***SUBMIT*** untuk mendapatkan hasilnya pada *Output Window* R.



Catatan : Pada setiap akhir baris pengetikan di *Script Windows* diselingi dengan penekanan tombol ***SUBMIT***

Dua Rata - Rata

Rumus :

$$to = \frac{(X1 - X2) - do}{\sqrt{\frac{S1^2}{n1} + \frac{S2^2}{n2}}}$$

syarat : S1 $\neq$S2

do = Selisih $\mu 1$ dengan $\mu 2$ $(\mu 1 - \mu 2)$

Db = (n1 + n2) – 2

Berikut ini adalah data rata–rata berapa kali film yang dibintangi oleh Steven Chauw dan Jet Li ditonton / disaksikan:

	Mean	***Standar Deviasi***	***Sampel***
Steven Chauw	15	7	17
Jet Li	12	8	15

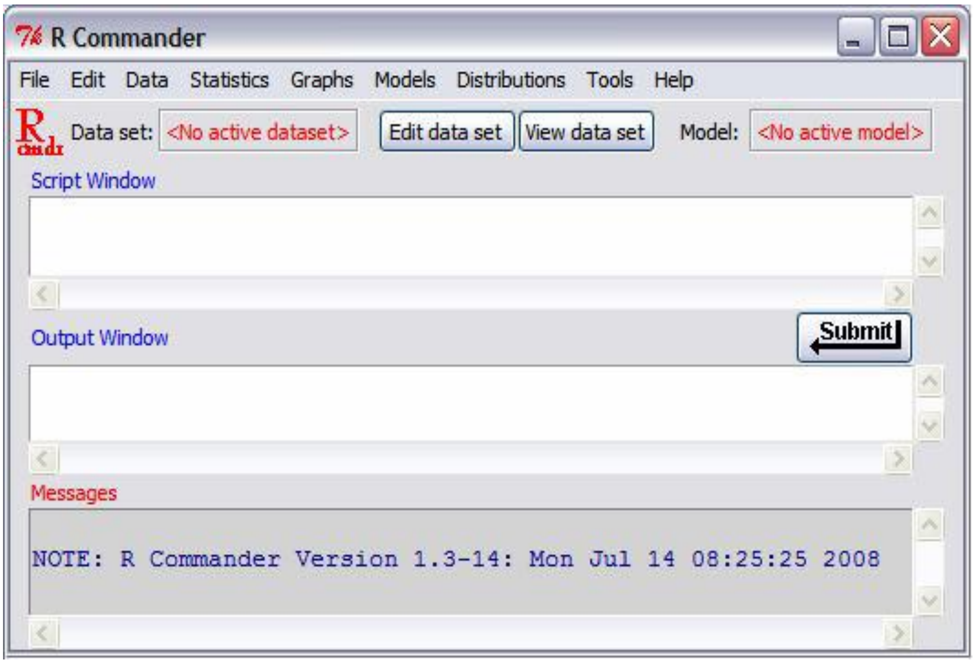
Dengan taraf nyata 1 % ujilah apakah perbedaan rata–rata berapa kali film yang dibintangi oleh Steven chauw dan Jet Li lebih dari sama dengan 6 !

Jawab :

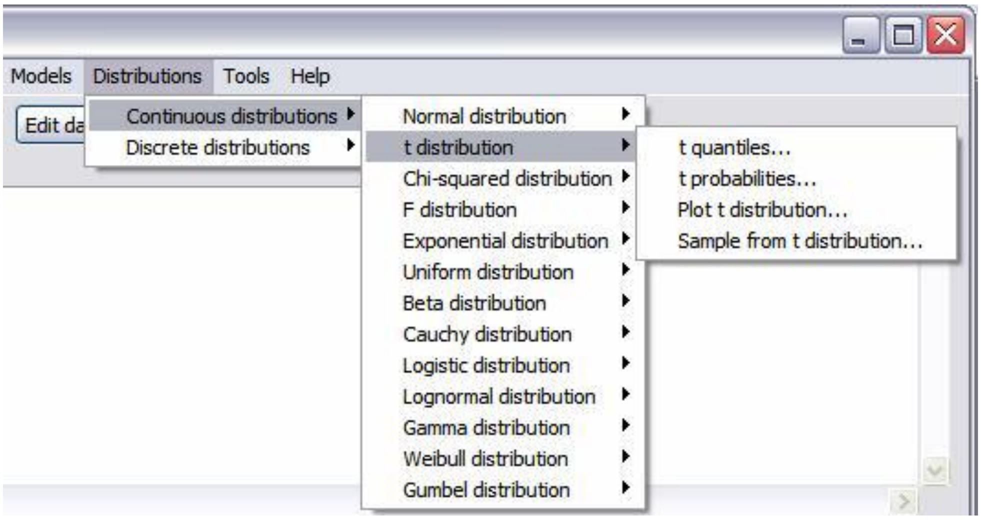
Dik :	X1 = 15	S1 = 7	n1 = 17	α= 1% = 0,01
	X2 = 12	S2 = 8	n2 = 15	do = 6

Untuk menyelesaikan soal tersebut dengan menggunakan program R, ikutilah langkah-langkah berikut :

1. Tekan icon *R Commander* pada *desktop*, kemudian akan muncul tampilan seperti gambar di bawah ini.



2. Pilih menu *Distribution, Continuous Distributions, T Distribution, T Quantiles*



3. Kemudian masukkan nilai probabillitas (nilai alfa) dan masukkan nilai derajat bebasnya (hasil dari Db= (n1 + n2 - 2).

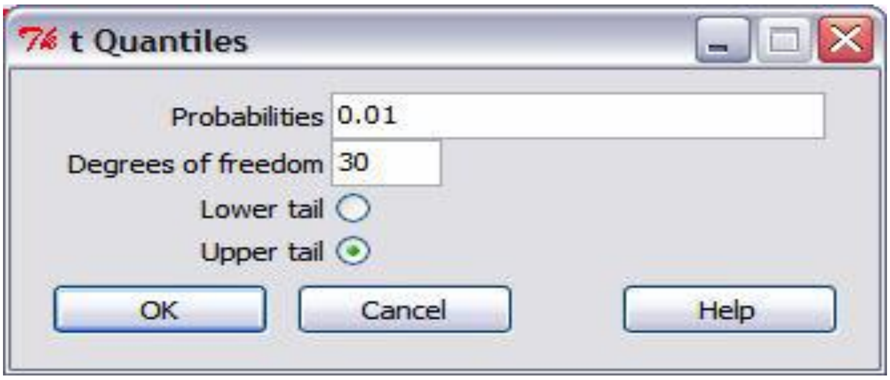
   α= 0.01

   Db = n1+n2 – 2

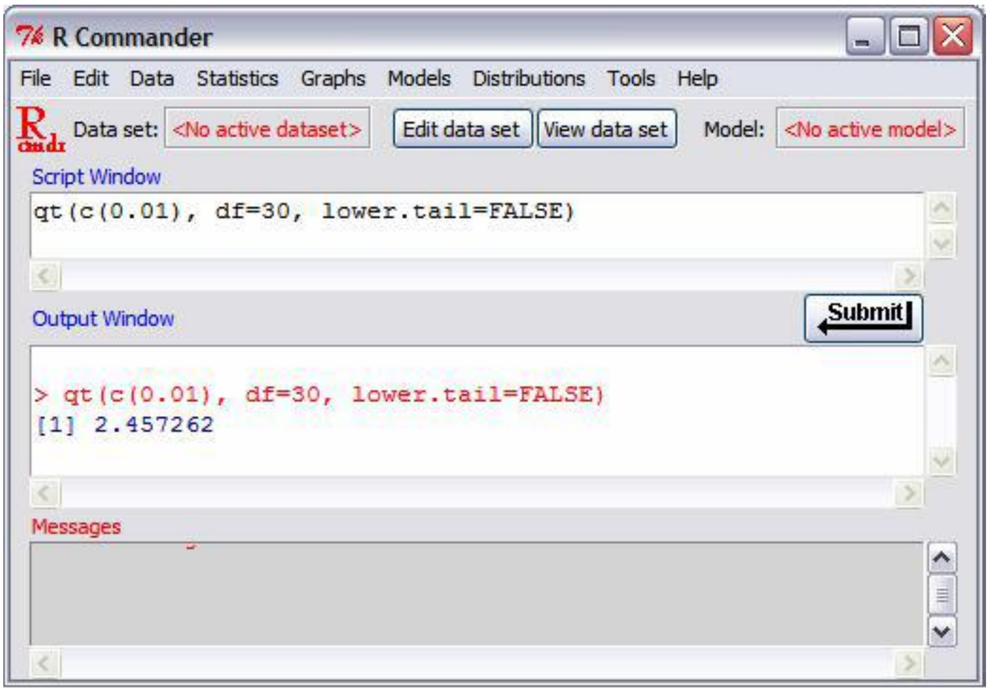
   = 17+15-2

   = 30

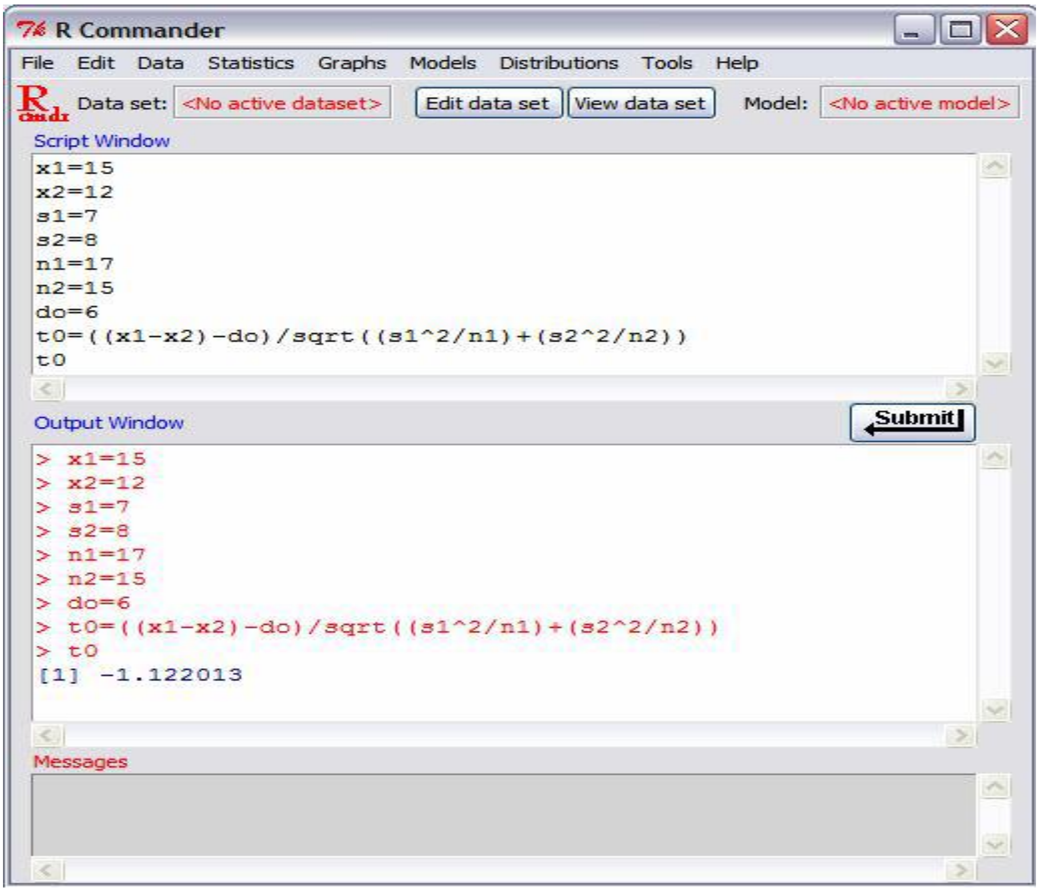
4. Maka akan tampil inputan seperti ini.



5. Maka pada *Output Window* akan terlihat hasil nilainya



6. Untuk mencari nilai t hitung, maka kita tuliskan *Script* rumus t hitung tersebut. Kemudian tekan tombol ***SUBMIT*** untuk mendapatkan hasilnya pada *Output Window* R.



Daftar Pustaka

Harlan, Johan. 2004. Metode Statistika 1. Jakarta: gunadarma.

Modul Ilab Statistika 1