DETERMINAN MATRIKS

5

OBJEKTIF :

1. Mengenal metode determinan matriks
2. Mengenal dan mencari nilai Minor dan Kofaktor Matriks
3. Mengenal dan memahami sifat determinan matriks
4. Menghitung determinan matriks
5. Mengenal dan menyelesaikan persamaan linear dengan Aturan Cramer

---

PENDAHULUAN

Istilah determinan pertama kali di perkenalkan oleh ahli matematika Jerman Carl Friedrich Gauss pada tahun 1801 yang digunakan untuk "*determine*" atau mendeskripsikan sifat jenis fungsi tertentu. Determinan suatu matriks adalah suatu fungsi tertentu yang menghubungkan matriks bujur sangkar dengan suatu bilangan real. Dengan kata lain, nilai determinan dari suatu matriks adalah skalar. Sekumpulan persamaan linear nonhomogen tidak dapat diselesaikan apabila determinan dari matriks koefisiennya sama dengan nol. Matriks itu disebut maktriks singular. Determinan ditulis diantara dua garis, bukan kurung. Untuk penyelesaian determinan orde 2 dapat dilakukan dengan perkalian langsung yaitu:

$$det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Sehingga det(A)= $a_{11}\, a_{22} - \; a_{12}\, a_{21} = ad - bc$. Determinan dari A dapat dituliskan dengan det(A) atau |A|. Pada Topik ini akan dibahas metode determinan, minor dan kofaktor pada matriks, sifat-sifat dari determinan, dan aturan cramer.

5.1 METODE MENENTUKAN DETERMINAN MATRIKS

Pada sub bab ini akan dibahas cara menentukan determinan menggunakan 2 metode yaitu:

1. Metode hasil kali elementer

Hasil kali elementer dari sebuah matriks persegi A_n, adalah hasil kali *n* enteri matriks A dengan syarat **tidak ada dua entri** yang berasal dari baris maupun kolom yang sama. Sebagai contoh, terdapat 6 hasil kali elementer pada A_3= $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$yaitu:$a_{11}a_{22}a_{33}$, $a_{11}a_{23}a_{32}$, $a_{12}a_{21}a_{33}$, $a_{12}a_{23}a_{31}$, $a_{13}a_{21}a_{32}$, $a_{13}a_{22}a_{31}$.

Hasil kali elementer pada A_3 di atas berbentuk $a_{1p}a_{2q}a_{3r}$, di mana $(p,q,r) \in \{(1,2,3),(1,3,2),(2,1,3),(2,3,1),(3,1,2),(3,2,1)\}$. Karena (p,q,r) mencakup semua permutasi dari (1,2,3), maka banyak hasil kali elementer dari A_3 adalah 3!=6. Secara umum, matriks A_{nxn} memiliki hasil kali elementer sebanyak *n*!.

Pada permutasi, jika sebuah bilangan yang lebih besar mendahului sebuah bilangan yang lebih kecil, maka dikatakan terjadi sebuah *invers*. Banyaknya invers pada sebuah permutasi adalah banyaknya bilangan yang lebih besar mendahului bilangan yang lebih kecil. Sebagai contoh, permutasi (2,1,3) memiliki sebuah invers 2 mendahului 1. Permutasi (3,2,1) memiliki 3 invers karena 3 mendahului 2,3 mrndahului 1, dan 2 mendahului 1.

Definisi. Sebuah permutasi dikatakan genap [ganjil] jika banyak inversnya genap [ganjil].

Ganjil/genap disebut juga *paritas.* Tabel 1 berikut adalah paritas permutasi dari (1,2,3).

Tabel 1

Permutasi	Banyaknya invers	Paritas
(1,2,3)	0	Genap
(1,3,2)	1	Ganjil
(2,1,3)	1	Ganjil
(2,3,1)	2	Genap
(3,1,2)	2	Genap
(3,2,1)	3	Ganjil

Definisi. Diberikan matriks A_{nxn} dan $(j_1, j_2, \dots, j_n)$ permutasi dari (1,2,...*n*). Hasil kali elementer bertanda untuk $(a_{j_1}, a_{j_2}, \dots, a_{j_n})$ di definisikan sebagai:

- $a_{j_1}, a_{j_2}, \dots, a_{j_n}$ jika $(j_1, j_2, \dots, j_n)$ permutasi genap, atau
- $-a_{j_1}, a_{j_2}, \dots, a_{j_n}$ jika $(j_1, j_2, \dots, j_n)$ permutasi ganjil

Hasil kali elementer bertanda untuk matriks A_3 ditampilkan pada Tabel 2 berikut

Tabel 2

Hasil kali elementer	Permutasi	Paritas	Hasil kali elementer bertanda
$a_{11}a_{22}a_{33}$	(1,2,3)	Genap	$a_{11}a_{22}a_{33}$
$a_{11}a_{23}a_{32}$	(1,3,2)	Ganjil	$-a_{11}a_{23}a_{32}$
$a_{12}a_{21}a_{33}$	(2,1,3)	Ganjil	$-a_{12}a_{21}a_{33}$
$a_{12}a_{23}a_{31}$	(2,3,1)	Genap	$a_{12}a_{23}a_{31}$
$a_{13}a_{21}a_{32}$	(3,1,2)	Genap	$a_{13}a_{21}a_{32}$
$a_{13}a_{22}a_{31}$	(3,2,1)	Ganjil	$-a_{13}a_{22}a_{31}$

Definisi. Determinan dari matriks A, dinotasikan sebagai det(A), adalah jumlah dari semua hasil kali elementer bertanda pada matriks A.

Mengacu pada tabel 2, jika seluruh hasil kali elementer bertanda pada kolom paling kanan dijumlahkan, maka diperoleh determinan matriks A_3. Lebih jelasnya:

$$det(A_3) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Determinan matriks persegi dengan ukuran lebih besar dapat ditentukan dengan cara serupa. Kelemahan metodeini adalah semakin besar ukuran matriks, maka banyaknya hasil kali elementer meningkat secara faktorial. Sebagai contoh, matriks berukuran 6 × 6 memiliki 6! = 720 hasil kali elementer. Selain dengan cara tersebut, untuk menentukan determinan matriks 3 × 3 dapat dilakukan dengan cara *sarrus*.

Langkah pertama, menuliskan kembali dua kolom pertama, setelah kolom terakhir. Sedemikian sehingga,

Det(B) = $A_3 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$

$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$

Sebagai contoh:

- Carilah determinan dari matriks $B_{3\,x\,3} = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 2 & 8 & 6 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

  Jawab:

  1. Dengan menggunakan metode hasil kali elementer

Hasil Kali elementer	Permutasi	Paritas	Hasil kali elementer bertanda
1×8×2 = 16	(1,2,3)	Genap	$a_{11}a_{22}a_{33}$
1×6×0 = 0	(1,3,2)	Ganjil	$-a_{11}a_{23}a_{32}$
6×2×2 = 24	(2,1,3)	Ganjil	$-a_{12}a_{21}a_{33}$
6×6×4 = 144	(2,3,1)	Genap	$a_{12}a_{23}a_{31}$
3×2×0 = 0	(3,1,2)	Genap	$a_{13}a_{21}a_{32}$
3×8×4 = 96	(3,2,1)	Ganjil	$-\ a_{13}a_{22}a_{31}$

Sehingga hasil *det(B)* = 16 – 0 – 24 +144 +0 -96 = 40

- Menggunakan metode alternatif lain yaitu cara *sarrus*

$$\det(B) = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 2 & 8 & 6 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 & 6 \\ 2 & 8 \\ 4 & 0 \end{matrix}$$

$\det(B) = (1 \times 8 \times 2) + (6 \times 6 \times 4) + (3 \times 2 \times 0) - (3 \times 8 \times 4) - (6 \times 2 \times 2) - (1 \times 6 \times 0)$ = 40

2. Metode ekspansi kofaktor

Perlu di ketahui bahwa metode *sarrus* tidak dapat digunakan untuk n ≥ 4 dan metode hasil kali elementer pun sulit untuk di terapkan, sehingga diperlukan metode lain untuk menentukan determinan matriks dengan orde n ≥ 4, salah satunya dengan metode ekspansi kofaktor.

Terdapat 2 istilah pada metode ekspansi kofaktor, yaitu:

b. **Minor**,

Jika A matriks persegi, maka minor dari a_{ij} dituliskan dengan M_{ij}. M_{ij} di peroleh dari matriks A dengan menghapus baris i dan kolom j.

c. **Kofaktor**,

Kofaktor dinotasikan dengan C_{ij} dimana rumus $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ banyaknya kofaktor suatu matriks sama dengan banyaknya minor.

Contoh:

- Diberikan matriks A_3 = $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & -5 & 0 \\ 1 & 7 & 3 \end{bmatrix}$. Tentukan minor dan kofaktor dari a_{32}.

  Jawab:

  Dengan menghilangkan baris 3 dan kolom 2 diperoleh sub matriks $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$, sehingga:

  $M_{32} = (3 \times 0) - \left(1 \times (-2)\right) = 2$ dan $C_{32} = (-1)^{3+2}.2 = -2$

Untuk memudahkan mengingat, $(-1)^{1+j}$ bernilai -1 jika *i+j* ganjil, dan bernilai +1 jika *i+j* genap. Berikut adalah nilai $(-1)^{1+j}$ berdasarkan posisinya pada matriks.

$$\begin{bmatrix} +1 & -1 & +1 & -1 & \cdots \\ -1 & +1 & -1 & +1 & \cdots \\ +1 & -1 & +1 & -1 & \cdots \\ -1 & +1 & -1 & +1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh: $M_{11} = C_{11},\ M_{12} = -C_{12}$, dan seterusnya.

Jika A matrik berukuran $n \times n$, maka menentukan determinan A menggunakan ekspansi kofaktor ditentukan dengan menggunakan persamaan berikut.

$\det(A) = a_{1J}C_{1J} + a_{2J}C_{2J} + \cdots + a_{nJ}C_{nJ}$ (ekspansi kofaktor sepanjang kolom ke-j)

atau

$\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in}$ (ekspansi kofaktor sepanjang baris ke-1)

Contoh:

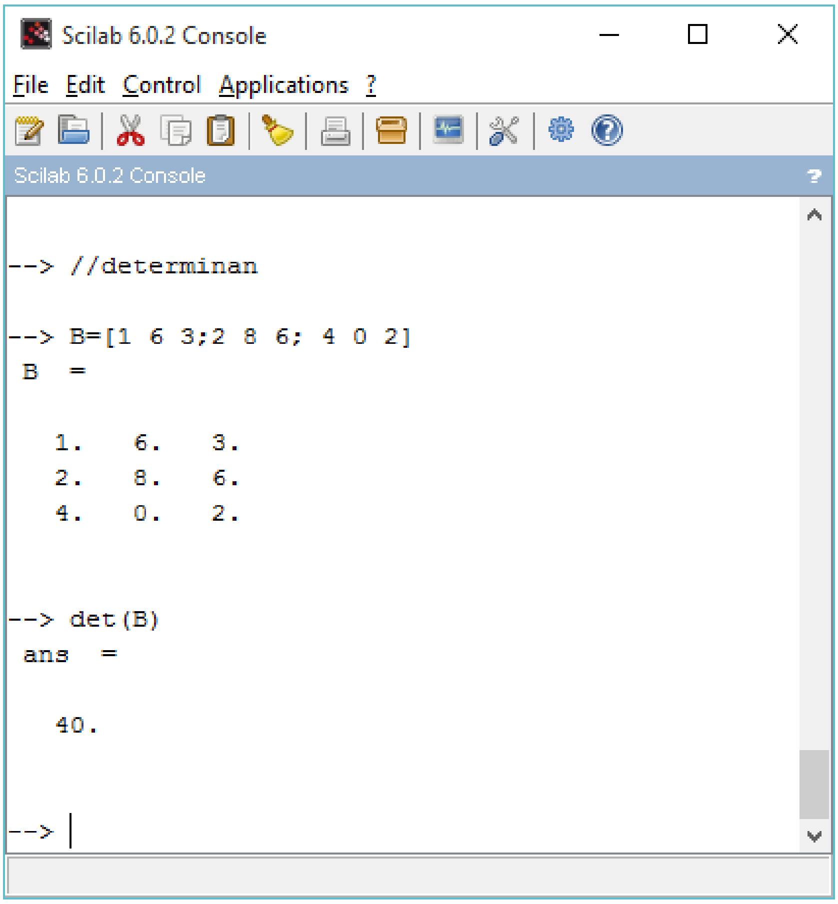
- Tentukan determinan dari matriks $A_3 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & -5 & 0 \\ 1 & 7 & 3 \end{bmatrix}$ menggunakan ekspansi kofaktor!

  Jawab: Misal, akan di tentukan determinan dengan ekspansi kofaktor sepanjang baris ke-1 ($M_{11}, M_{12,}M_{13}$). Sedemikian sehingga,

$$\det(A) = 3\begin{vmatrix} -5 & 0 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -2 & -5 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 3(-15) - 2(-6) + 1(-9)$$
$$= -42$$

Menentukan determinan dengan Scilab

Scila menyediakan operator *det(A)* dimana A adalah matriks yang akan ditentukan nilai determinannya. Berikut ini adalah contoh penggunaan operator det( ) pada Scilab.



5.2 MINOR DAN KOFAKTOR

<u>MINOR</u>

Minor diperoleh dari matriks dengan menghapus baris *i* dan kolom *j*. Jika diketahui B adalah sebuah matriks persegi, maka minor dari elemen b_{ij} dituliskan dengan M_{ij}. M_{ij} adalah determinan dari sub matriks B yang tersisa setelah elemen-elemen pada baris ke-*i* dan kolom ke-*j* matriks B dihilangkan. Submatriks yang terbentuk ini mempunyai ukuran selisih satu dari matriks B, misalnya untuk matriks B yang berordo 3 x 3 akan didapatkan submatriks yang berordo 2 x 2. Banyaknya minor pada suatu matriks sama dengan banyaknya elemen matriks tersebut.

<u>KOFAKTOR</u>

Kofaktor dinotasikan dengan C_{ij} dimana $C_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$. Banyaknya kofaktor suatu matriks sama dengan banyaknya minor.

Berikut adalah contoh mencari minor dan kofaktor suatu matriks.

Contoh:

- Diketahui matriks persegi berukuran 3 × 3 dengan bentuk:

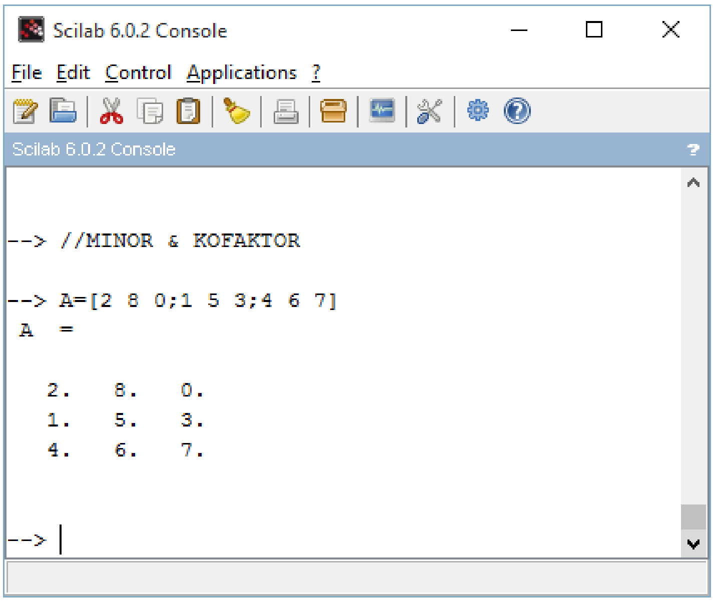
  A_{3x3} = $\begin{bmatrix} 2 & 8 & 0 \\ 1 & 5 & 3 \\ 4 & 6 & 7 \end{bmatrix}$ tentukan matriks kofaktor dari matriks A!

  Menggunakan cara manual:

Elemen Matriks & Minor		Kofaktor
baris ke-1, kolom ke-1	$a_{11} = 2$	
$A = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 0 \\ 1 & 5 & 3 \\ 4 & 6 & 7 \end{bmatrix}$	$M_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = 17$	$C_{11} = (-1)^{1+1}.17$ $C_{11} = 17$
baris ke-1, kolom ke-2	$a_{12} = 8$	
$A = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 0 \\ 1 & 5 & 3 \\ 4 & 6 & 7 \end{bmatrix}$	$M_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = -5$	$C_{12} = (-1)^{1+2}.(-5)$ $C_{12} = 5$
baris ke-1, kolom ke-3	$a_{13} = 0$	
$A = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 0 \\ 1 & 5 & 3 \\ 4 & 6 & 7 \end{bmatrix}$	$M_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = -14$	$C_{13} = (-1)^{1+3}.(-14)$ $C_{13} = -14$
baris ke-2, kolom ke-1	$a_{21} = 2$	
$A = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 0 \\ 1 & 5 & 3 \\ 4 & 6 & 7 \end{bmatrix}$	$M_{21} = \begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = 56$	$C_{21} = (-1)^{2+1}.56$ $C_{21} = -56$
baris ke-2, kolom ke-2	$a_{22} = 2$	
$A = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 0 \\ 1 & 5 & 3 \\ 4 & 6 & 7 \end{bmatrix}$	$M_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 14$	$C_{22} = (-1)^{2+2}.14$ $C_{22} = 14$
baris ke-2, kolom ke-3	$a_{23} = 2$	
$A = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 0 \\ 1 & 5 & 3 \\ 4 & 6 & 7 \end{bmatrix}$	$M_{23} = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = -20$	$C_{23} = (-1)^{2+3}.(-20)$ $C_{23} = 20$
baris ke-3, kolom ke-1	$a_{31} = 2$	
$A = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 0 \\ 1 & 5 & 3 \\ 4 & 6 & 7 \end{bmatrix}$	$M_{31} = \begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 24$	$C_{31} = (-1)^{3+1}.24$ $C_{31} = 24$
baris ke-3, kolom ke-2	$a_{32} = 2$	

  Jawab menggunakan Scilab:

  - Mendefinisikan matriks A pada Scilab

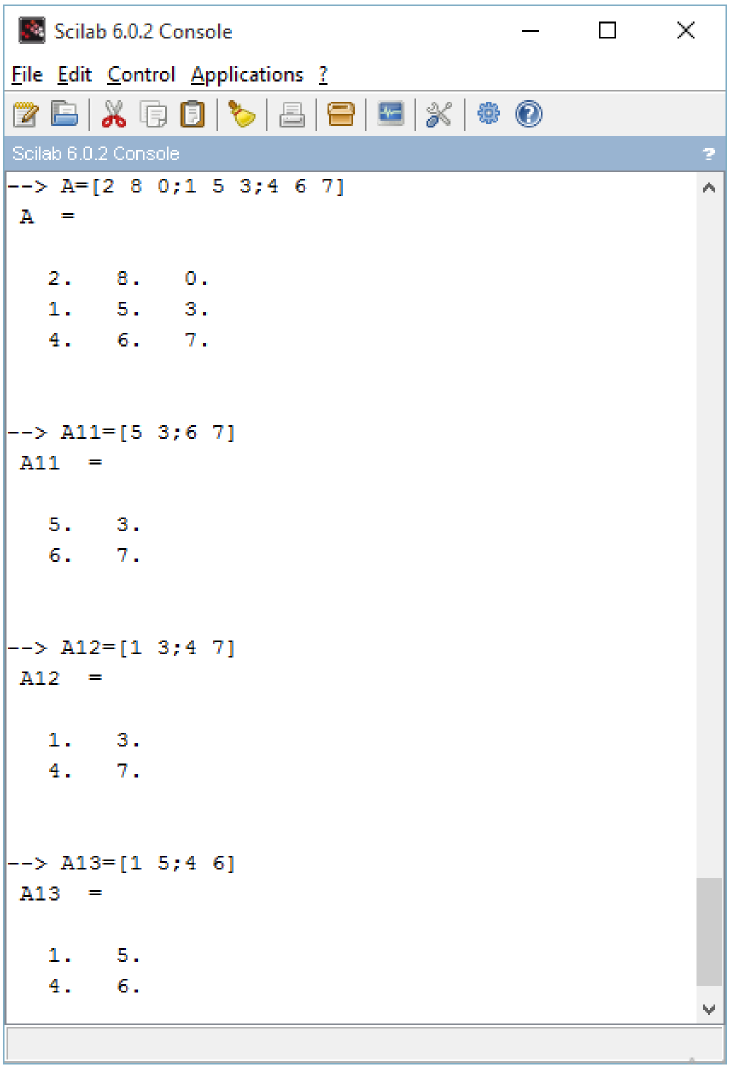


- Mendefinisikan submatriks berordo 2 × 2 pada baris 1 dengan menghilangkan baris ke-1

  A11: berarti menghilangkan baris 1 dan kolom 1

  A12: berarti menghilangkan baris 1 dan kolom 2

  A13: berarti menghilangkan baris 1 dan kolom 3

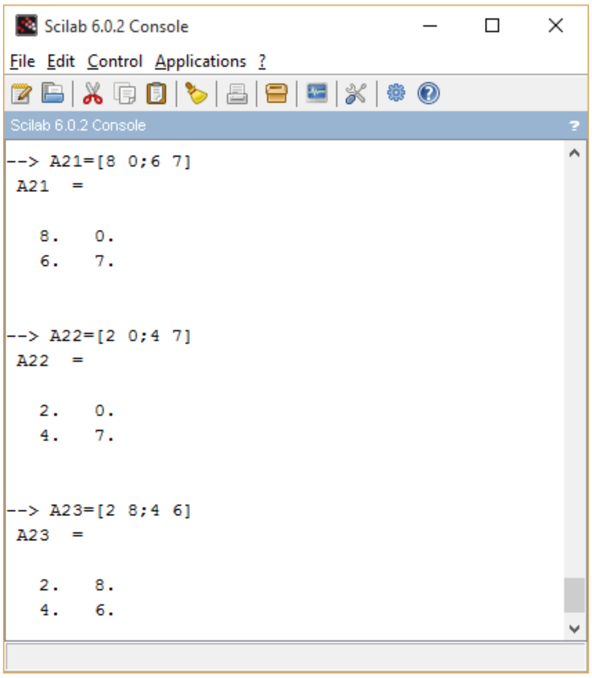


- Mendefinisikan submatriks berordo 2 × 2 pada baris 2 dengan menghilangkan baris ke-2

  A21: berarti menghilangkan baris 1 dan kolom 1

  A22: berarti menghilangkan baris 1 dan kolom 2

  A23: berarti menghilangkan baris 1 dan kolom 3

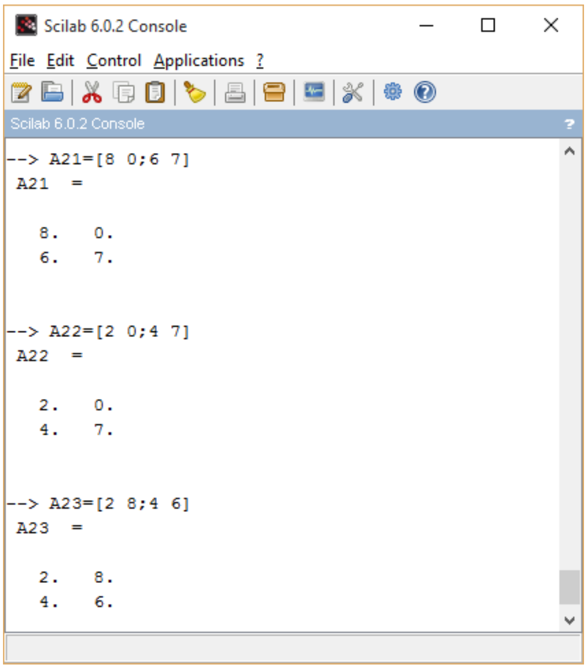


- Mendefinisikan submatriks berordo 2 × 2 pada baris 2 dengan menghilangkan baris ke-2

  A21: berarti menghilangkan baris 1 dan kolom 1

  A22: berarti menghilangkan baris 1 dan kolom 2

  A23: berarti menghilangkan baris 1 dan kolom 3

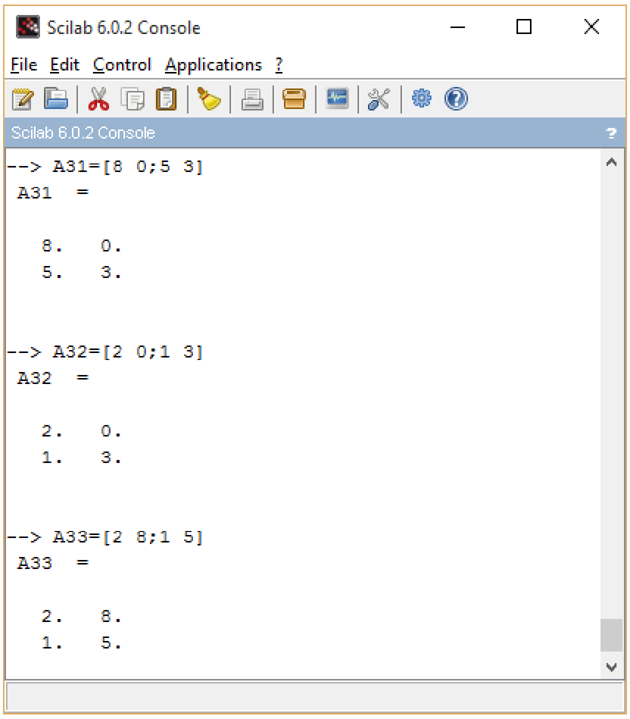


- Mendefinisikan submatriks berordo 2 × 2 pada baris 3 dengan menghilangkan baris ke-3

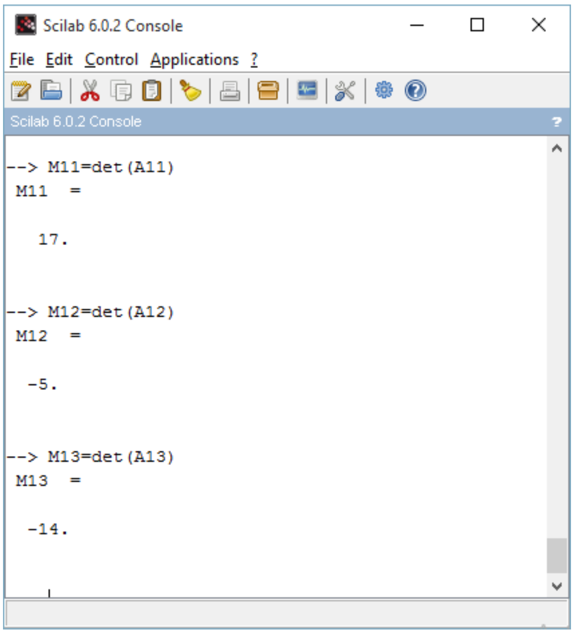
  A31: berarti menghilangkan baris 1 dan kolom 1

  A32: berarti menghilangkan baris 1 dan kolom 2

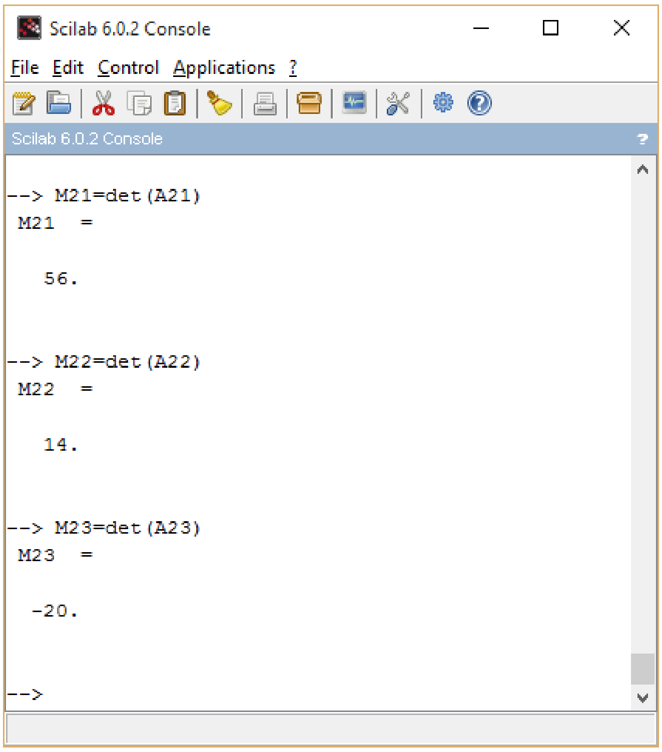
  A33: berarti menghilangkan baris 1 dan kolom 3



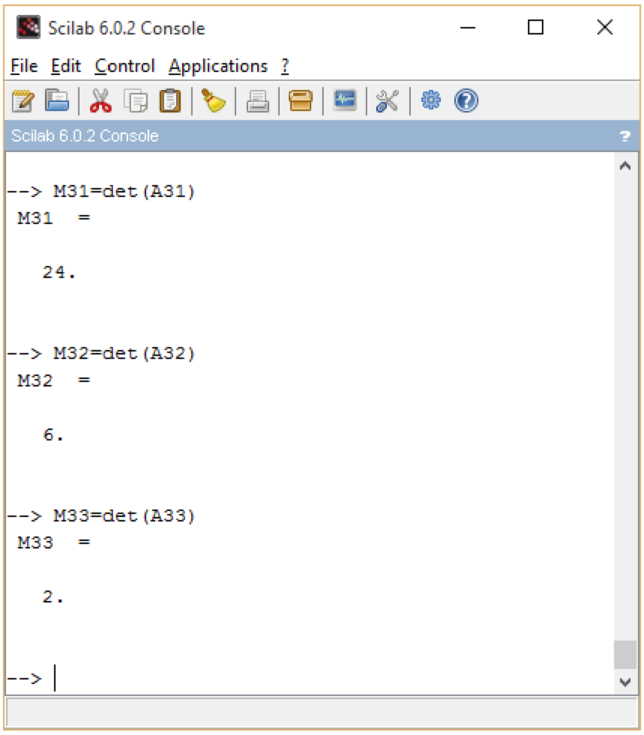
- Mendefinisikan Minor pada baris 1 dengan menggunakan fungsi “**det**” pada Scilab



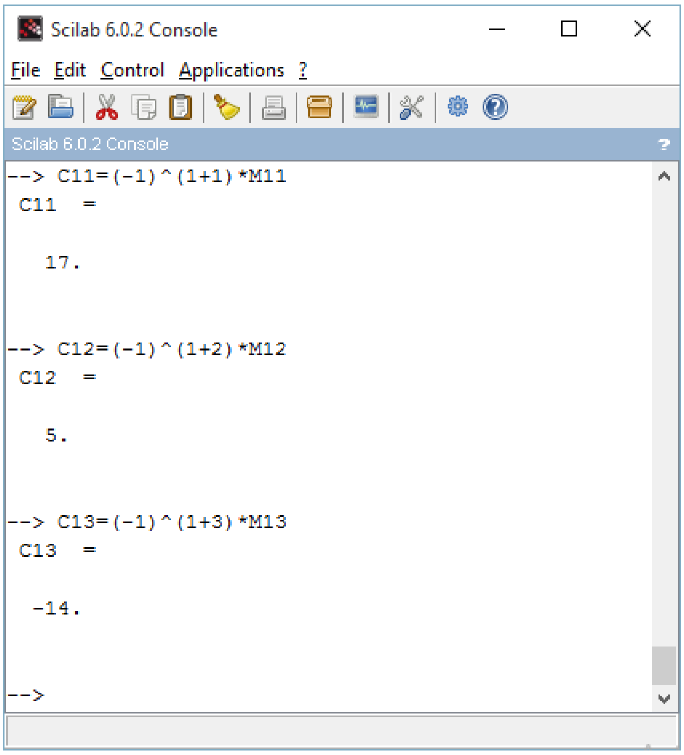
- Mendefinisikan Minor pada baris 2 dengan menggunakan fungsi “**det**” pada Scilab



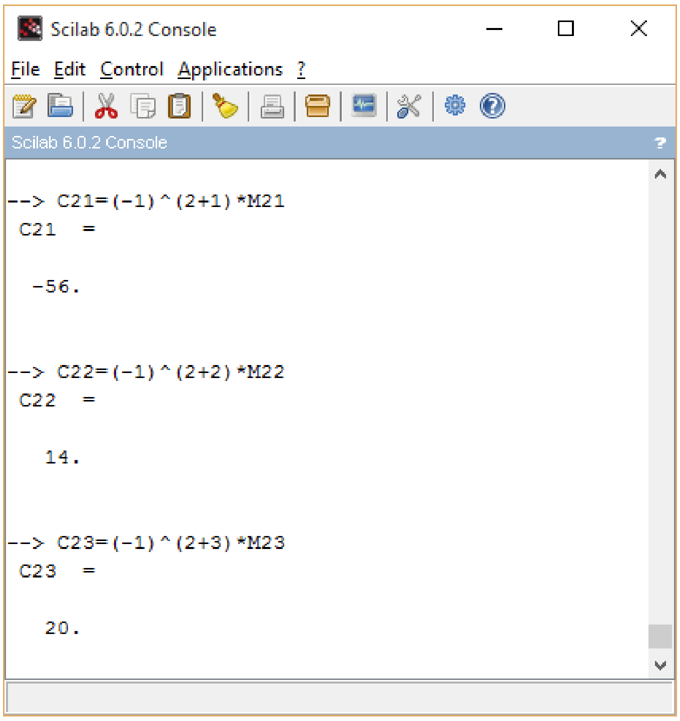
- Mendefinisikan Minor pada baris 3 dengan menggunakan fungsi “**det**” pada Scilab



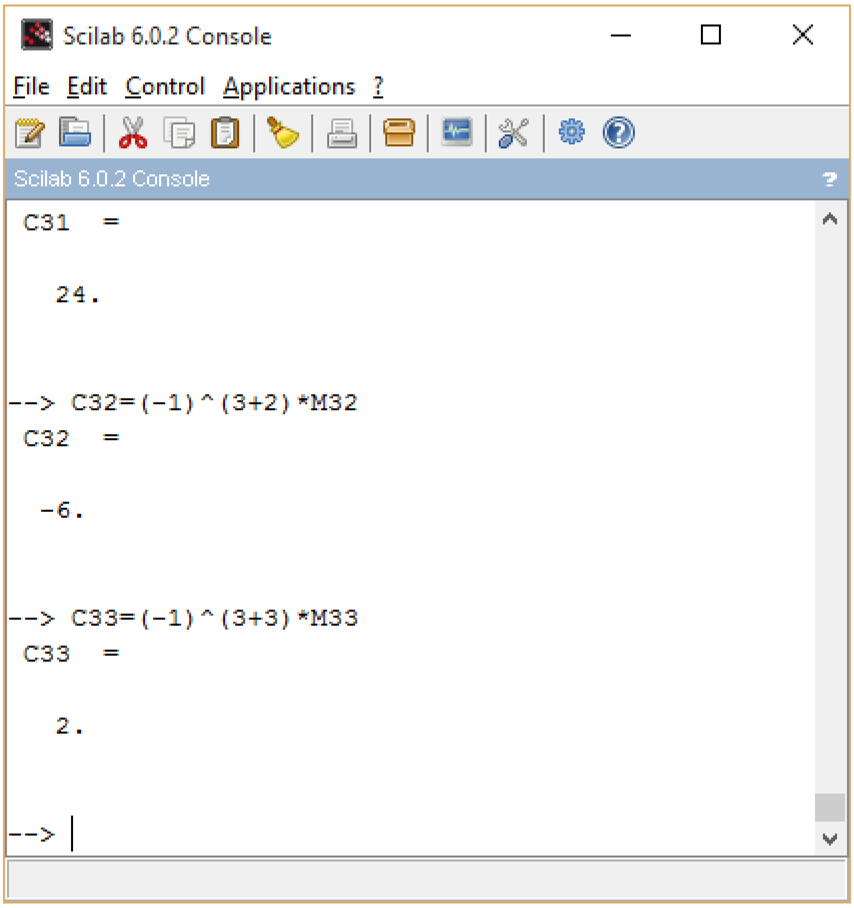
- Mendefinisikan Kofaktor pada baris 1 dengan menuliskan rumus kofaktor dengan menggunakan operator **"^"** untuk pangkat dan operator **"*"** untuk perkalian pada Scilab.



- Mendefinisikan Kofaktor pada baris 2 dengan menuliskan rumus kofaktor dengan menggunakan operator **“^”** untuk pangkat dan operator **“*”** untuk perkalian pada Scilab.



- Mendefinisikan Kofaktor pada baris 3 dengan menuliskan rumus kofaktor dengan menggunakan operator **“^”** untuk pangkat dan operator **“*”** untuk perkalian pada Scilab.



5.3 SIFAT-SIFAT DETERMINAN MATRIKS

Pada bagian ini akan membahas sifat-sifat dari determinan matriks. Berikut adalah sifat dari determinan matriks.

1. Nilai determinan tidak berubah apabila baris dan kolomnya dipetukarkan jika matriks tersebut adalah matriks persegi n × n, maka

$$\det(\mathrm{A}) = \det(\mathrm{A}^{\mathrm{T}})$$

Contoh:

Diketahui matriks $\mathrm{A}_{2x2} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$ berapakah nilai dari det(A) dan det(A^{T})

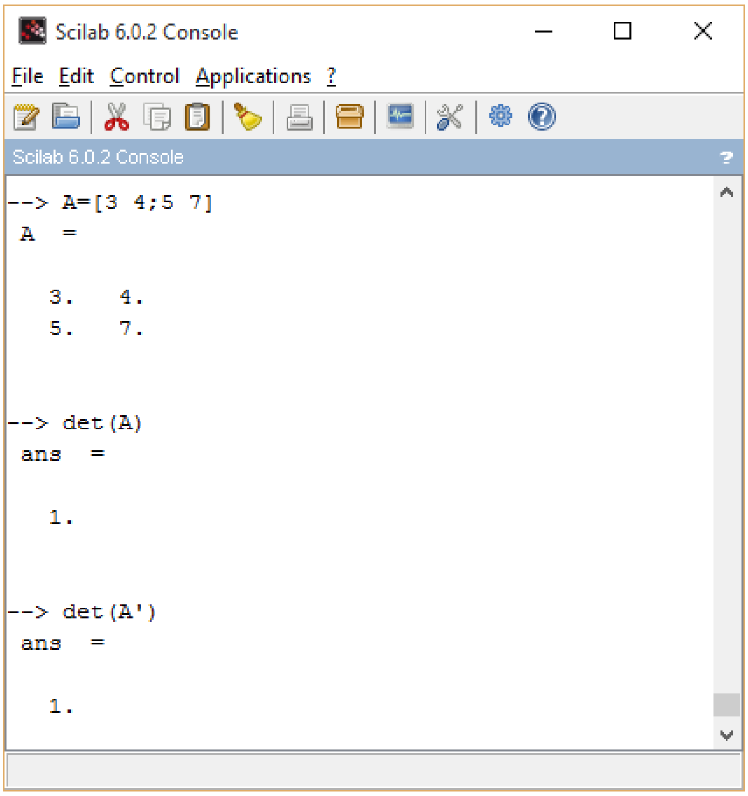
Jawab:

- Menggunakan cara manual

$$\det(\mathrm{A}) = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 3.7 - 4.5 = 1$$

$$\det(\mathrm{A}^{\mathrm{T}}) = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 3.7 - 4.5 = 1$$

- Menggunakan Scilab



2. Jika matriks B diperoleh dari matriks A dengan menukar dua baris atau kolom berbeda pada A, maka

$$\det(\mathrm{B}) = -\det(\mathrm{A})$$

Contoh:

Diketahui matriks $\mathrm{A}_{2x2} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$ dan matriks $\mathrm{B}_{2x2} = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$berapakah nilai dari masing-masing determinan matriks tersebut

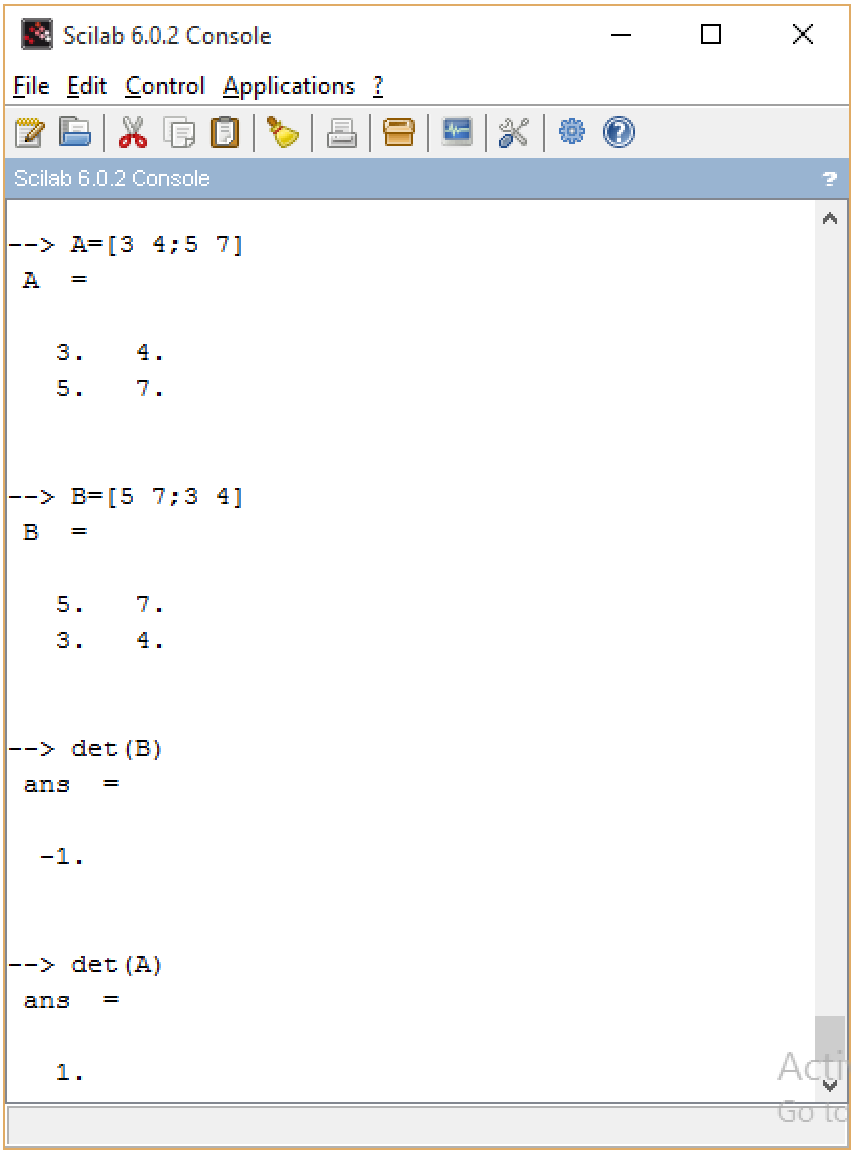
Jawab:

- Menggunakan cara manual

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 3.7 - 4.5 = 1$$

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 5.4 - 3.7 = -1$$

- Menggunakan Scilab



3. Jika dua baris atau dua kolom pada A sama, maka

$$\det(A) = 0$$

Contoh:

- Diketahui matriks A_3 = $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ tentukan $\det(A)$

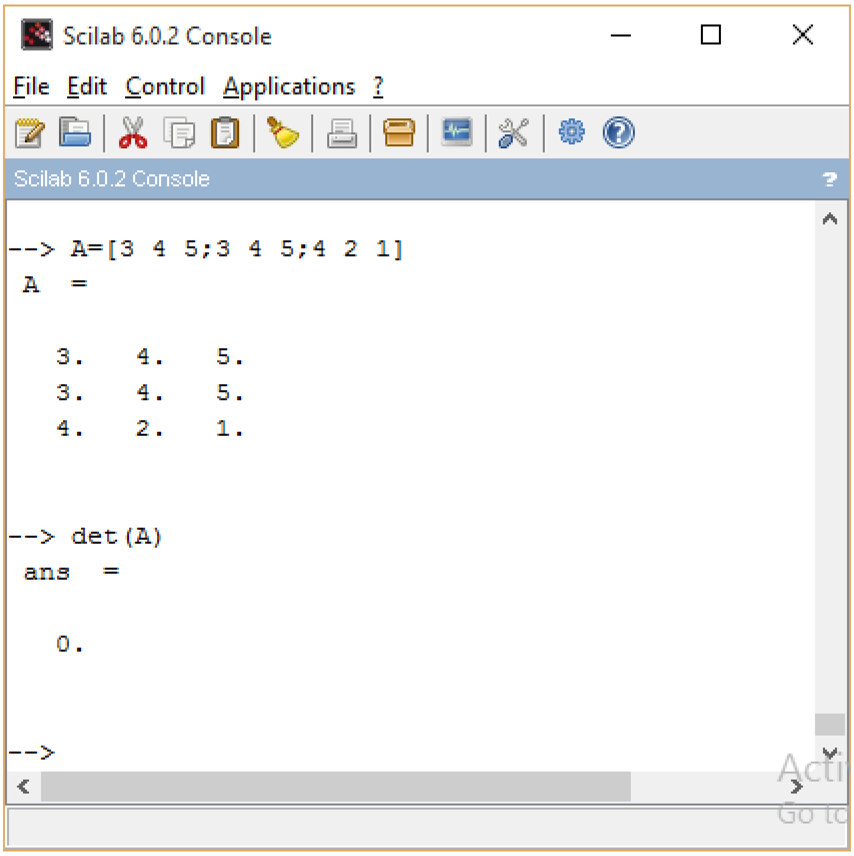
Jawab:

- Menggunakan cara manual

  $det(A)$= $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{matrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \\ 4 & 2 \end{matrix}$

  $\det(A)$= ((3×4×1)+(4×5×4)+(5×3×2))–((5×4×4)+(3×5×2)+(4×3×1)) = 0

- Menggunakan Scilab



4. Jika salah satu baris atau kolom pada A bernikai nol, maka

$$\det(A) = 0$$

Contoh:

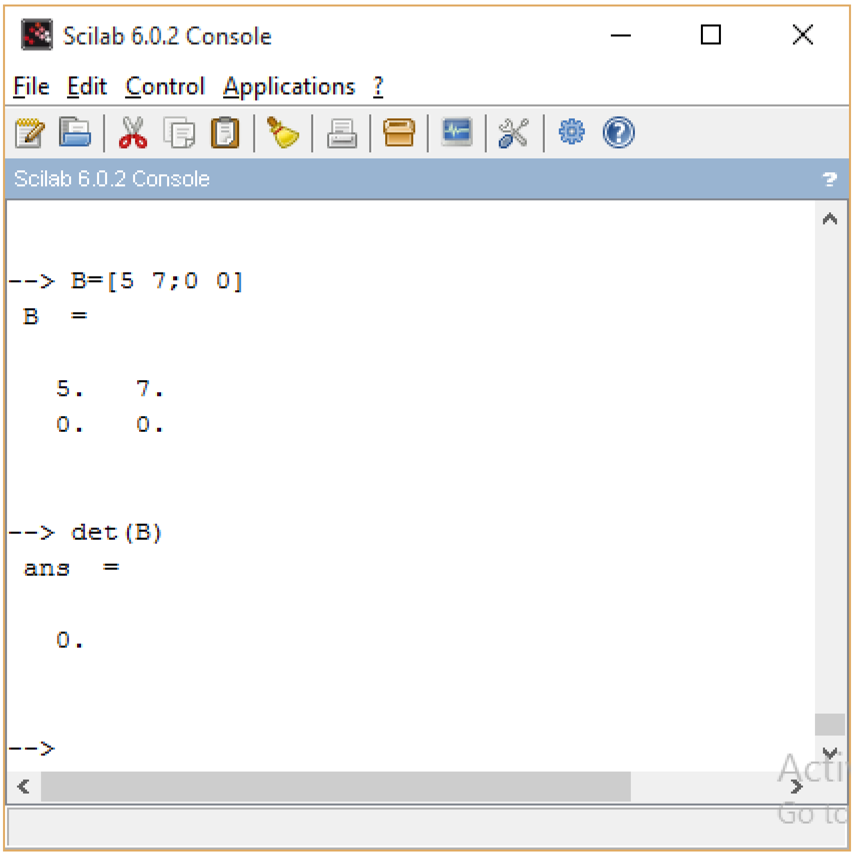
- Diketahui sebuah matriks $B_{2x2} = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ tentukan determinan dari maktriks B

Jawab:

- Menggunakan cara manual

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 5.0 - 7.0 = 0$$

- Menggunakan Scilab



5. Jika B diperoleh dari A dengan cara mengalikan suatu barus atau kolom dengan suatu skalar *k*, maka

$$det(B) = k.det(A)$$

Contoh:

- Diketahui $A_{2x2} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ dan matriks $B_{2x2} = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ tentukan determinan dari masing-masing matriks!

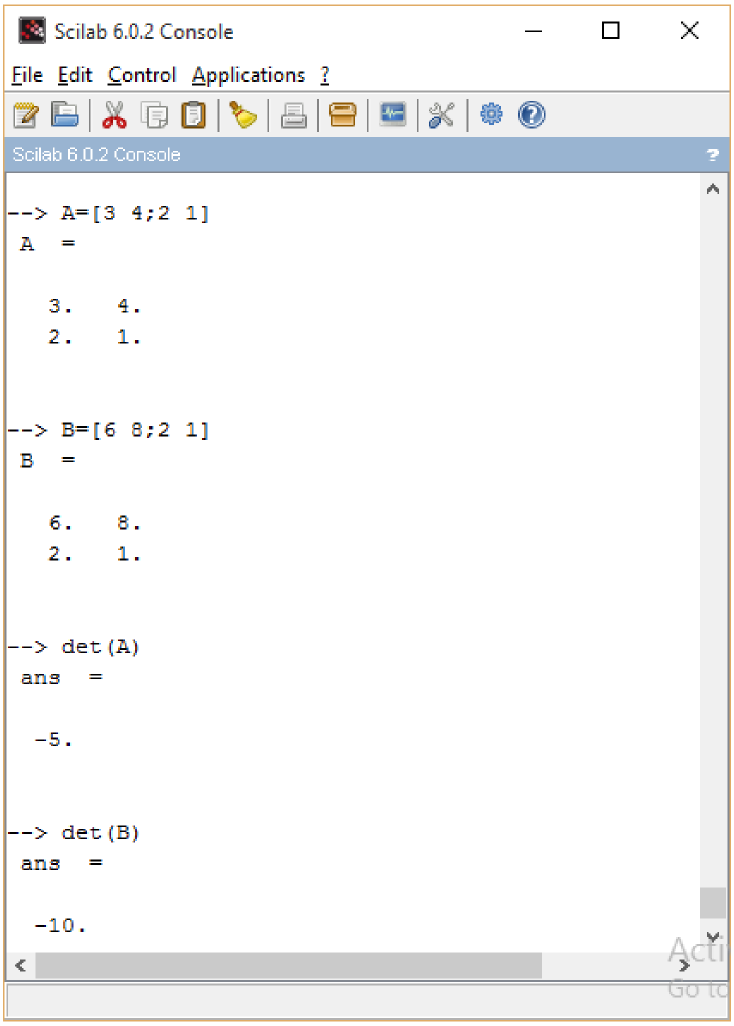
Jawab:

- Menggunakan cara manual

$$\det(\mathrm{A}) = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3.1 - 4.2 = -5$$

$$\det(\mathrm{B}) = \begin{vmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 6.1 - 8.2 = -10$$

- Menggunakan Scilab



6. Jika A matriks n × n dan k suatu skalar, maka

$$det(kA) = k^n.\det(A)$$

Contoh:

- Diketahui matriks $\mathrm{B}_{2x2} = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ dan *k* adalah sebuah skalar dengan nilai 3, tentukan determinan dari *det(3B)* !

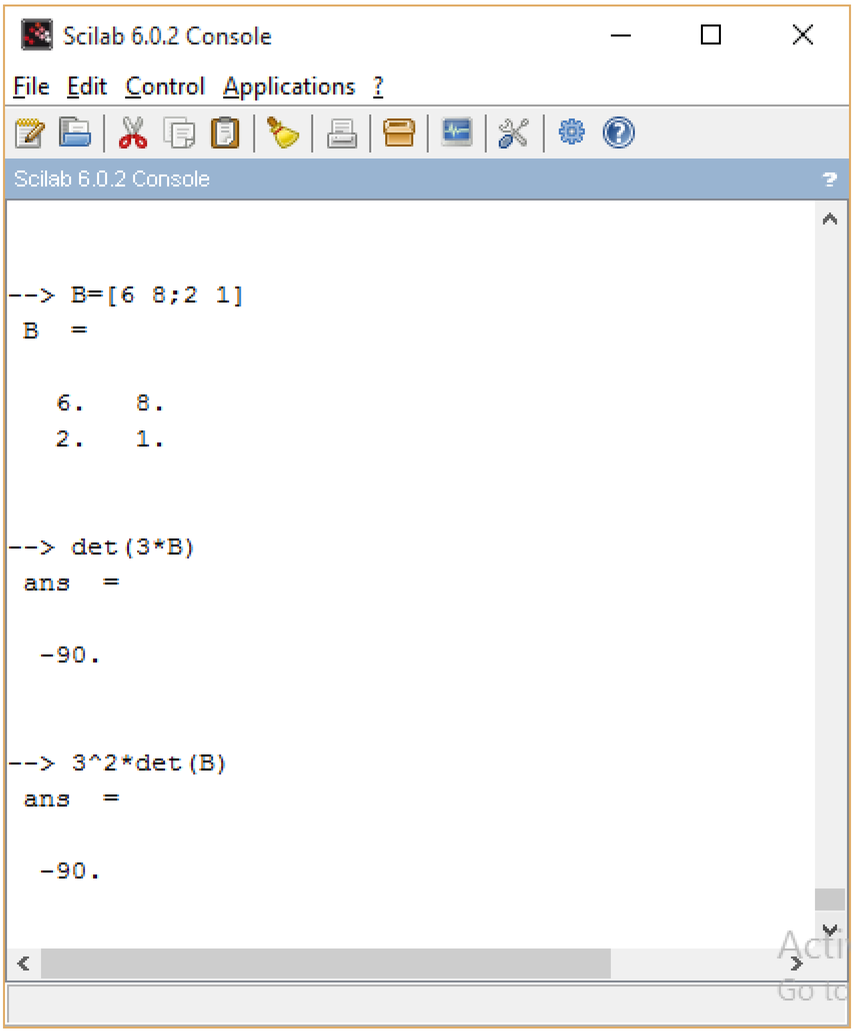
Jawab:

- Menggunakan cara manual

$$\det(3\mathrm{B}) = 3\begin{vmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 18 & 24 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 18.3 - 24.6 = -90$$

$$\det(3\mathrm{B}) = 3^2\begin{vmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 9(-10) = -90$$

- Menggunakan Scilab



7. Jika matriks $A = [a_{ij}]$ adalah segitiga atas atau bawah, maka

$$det(A) = a_{11}, a_{22} \ldots a_{nn}.$$

Sehingga, determinan matrik segitiga adalah hasil kali dari elemen pada diagonal utama. Sebagai contoh:

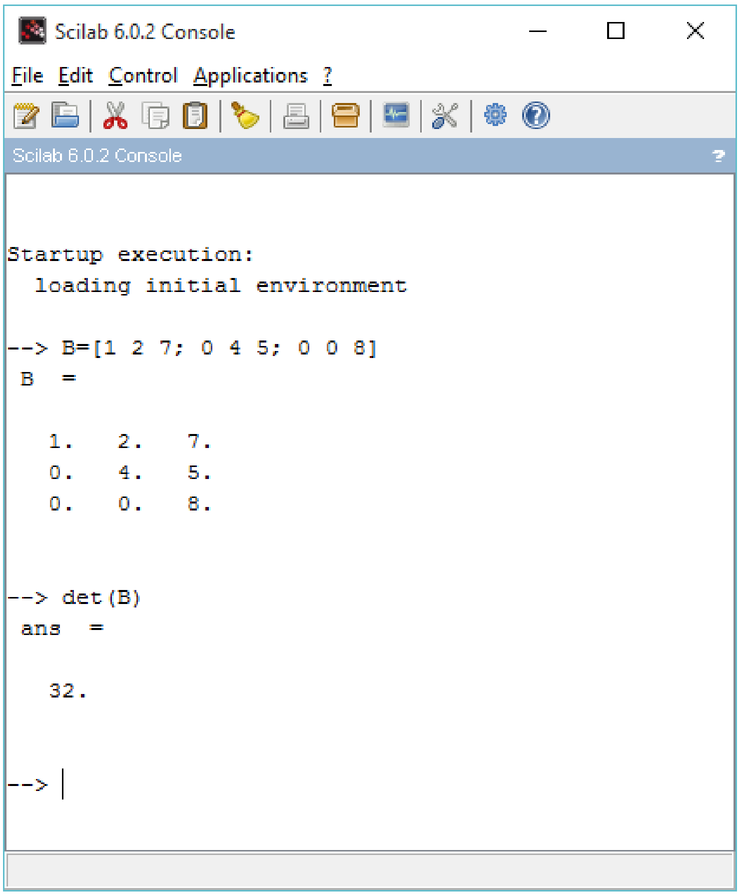
- Diketahui matriks $\mathrm{B}_{2x2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ tentukan nilai determinan dari matriks tersebut

Jawab:

- Menggunakan cara manual
  Karena matriks diatas adalah matriks segitiga atas maka untuk menentukan matriksnya adalah dengan mengalikan diagonal utama dari matriks tersebut. Sehingga

$$det(B) = 1 \times 4 \times 8 = 32$$

- Menggunakan Scilab



8. Jika A dan B matrik *n × n* maka

$$det(AB) = det(A)\, det(B)$$

Sebagai contoh:

- Diketahui $\mathrm{A}_{2x2} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ dan matriks $\mathrm{B}_{2x2} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ tentukan *det(AB)*

Jawab:

- Menggunakan cara manual

  Solusi dari contoh soal diatas ada 2 yaitu dengan melakukan perkalian terlebih dahulu lalu menghitung determinannya, cara lainnya adalah dengan melakukan determinan masing-masing matriks lalu di lakukan perkalian. Berikut adalah solusi dari soal diatas:

  i. Melakukan perkalian matriks lalu menghitung determinan

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (3 \times 2) + (4 \times 4) & (3 \times 5) + (4 \times 1) \\ (2 \times 2) + (1 \times 4) & (2 \times 5) + (1 \times 1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 22 & 19 \\ 8 & 11 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{det(AB)} = \begin{vmatrix} 22 & 19 \\ 8 & 11 \end{vmatrix} = 22.11 - 19.8 = 90$$

  ii. Melakukan determinan masing-masing matriks lalu melakukan perkalian dari hasil determinan.

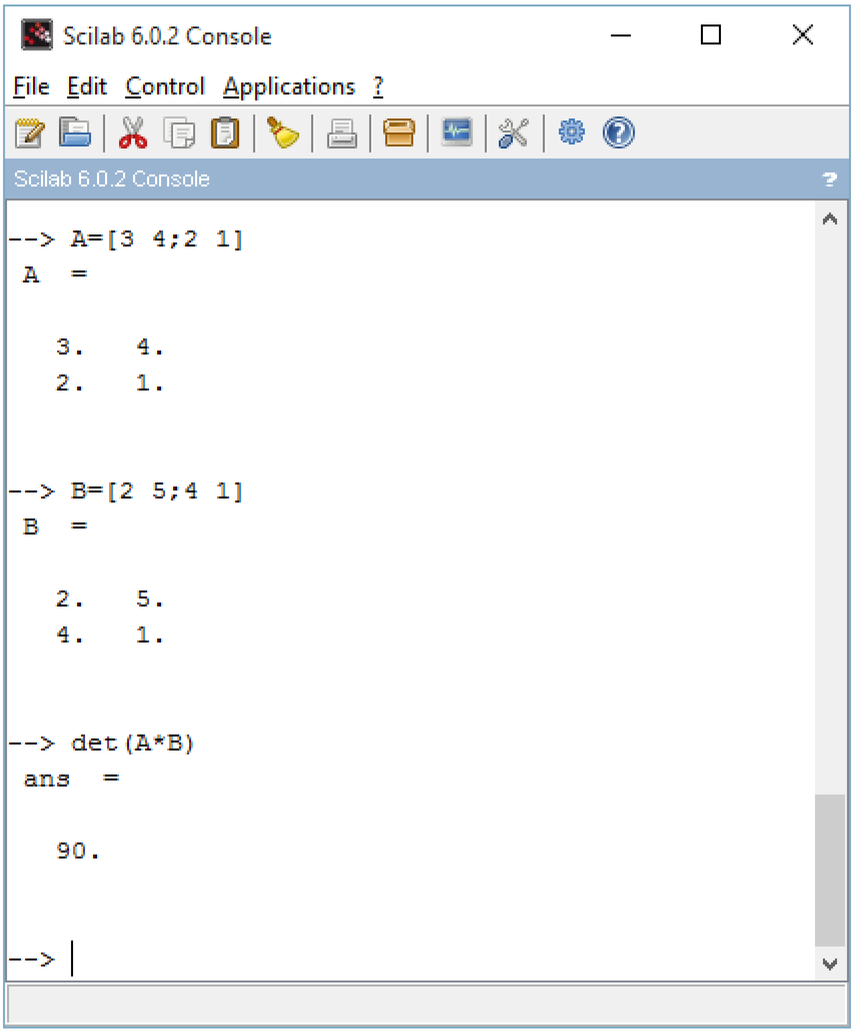
$$det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3.1 - 4.2 = -5$$

$$det(B) = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 2.1 - 5.4 = -18$$

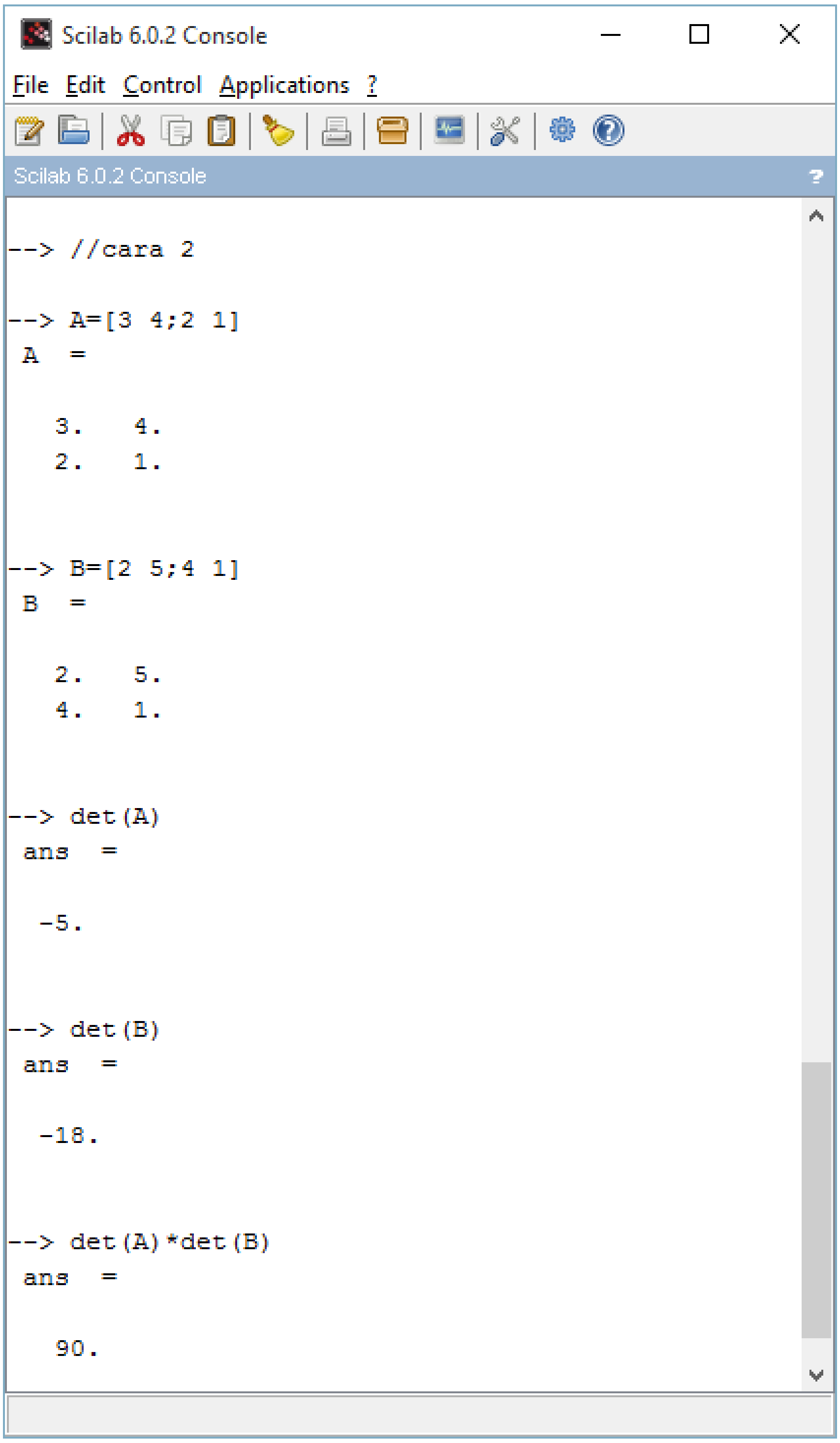
$$det(AB) = (-5) \times (-18) = 90$$

- Menggunakan Scilab

  I. Cara 1


Scilab 6.0.2 Console
File Edit Control Applications ?
Scilab 6.0.2 Console
--> A=[3 4;2 1]
A =
3. 4.
2. 1.
--> B=[2 5;4 1]
B =
2. 5.
4. 1.
--> det(A*B)
ans =
90.
-->

II. Cara 2



9. Jika A matrik *n* × *n*, maka A *nonsingular* atau *invertible* jika hanya jika

$$det(A) \neq 0$$

Arti invertible adalah bahwa matriks tersebut dapat dilakukan invers jika hasil dari determinan tidak sama dengan nol. Hal ini berhubungan dengan sifat determinan matriks selanjutnya.

10. Jika A adalah matriks persegi *n x n* dan *nonsingular* atau *invertible* maka

$$det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

Contoh:

- Diketahui $\mathrm{A}_{2x2} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ jika matriks tersebut *nonsingular* atau *invertible*, tentukan nilai $det(A^{-1})$

Jawab:

- Menggunakan cara manual

$$det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3.1 - 4.2 = -5 \text{ (hasilnya } \neq 0)$$

Hasilnya tidak sama dengan nol, maka matriks tersebut *nonsingular* atau *invertible*, sehingga dapat melakukan langkah selanjutnya.

$$det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} = \frac{1}{-5}$$

5.4 ATURAN CRAMER

Aturan Cramer didasarkan atas perhitungan determinan matriks. Aturan Cramer merupakan metode untuk menyelesaikan persamaan linear dengan koefisien matriks yang invertible atau hasil perhitungan det(A) ≠ 0. Penyelesaian yang di dapatkan dengam metode ini adalah penyelesaian tunggal. Metode ini diperkenalkan pada tahun 1750 oleh ahli matematika Swiss yang bernama Gabriel Cramer.

Teorema. Misal A matrik n x n dengan $det(A) \neq 0$ dan misal $\vec{b}$ vektor kolom *n × 1* maka sistem linear, $\overrightarrow{Ax} = \vec{b}$ mempunyai solusi,

$$x_i = \frac{det\left(A_i\ (\vec{b}\ )\right)}{\det(A)},$$

Dimana $A_i\ (\vec{b}\ )$ adalah matriks yang diperoleh dengan cara mengganti kolom ke-*i* pada A dengan $\vec{b}$.

Contoh:

- Gunakan Aturan Cramer untuk menyelesaikan sistem persamaan $A\vec{x} = \vec{b}$ dengan

  A_{3x3} = $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 5 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ dan $\vec{b}$=$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ serta $\vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$,

Jawab:

- Menggunakan cara manual
  - Definisikan bentuk soal

    $$A\vec{x} = \vec{b} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 5 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

  - Menghitung determinan dari matriks A untuk menentukan apakah Aturan Cramer dapat di terapkan dalam penyelesaian sistem persamaan tersebut.

    $$det(A) = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 5 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \\ 4 & 2 \end{matrix}$$

    det(A)= ((3×6×1) + (4×5×4) + (5×3×2)) − ((5×6×4) + (3×5×2) + (4×3×1))= -34

    Karena $det(A) \neq 0$ tidak sama dengan 0, maka dapat digunakan Aturan Cramer.

  - Hitung $det\left(A_1\ (\vec{b}\ )\right)$, $det\left(A_2\ (\vec{b}\ )\right)$, dan $det\left(A_3\ (\vec{b}\ )\right)$.

$$det\left(A_1\ (\vec{b}\ )\right) = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 1 & 6 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 12$$

$$det\left(A_2\ (\vec{b}\ )\right) = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 5 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$det\left(A_3\ (\vec{b}\ )\right) = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -14$$

Jadi nilai untuk x,y, dan z adalah:

$$x = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{12}{-34} = -\frac{6}{17},\ y = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{0}{-34} = 0,\ z = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{-14}{-34} = \frac{7}{17}$$

Sehingga,

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} -6/_{17} \\ 0 \\ 7/_{17} \end{bmatrix}$$

RANGKUMAN

- Terdapat 2 metode menghitung determinan yaitu metode hasil kali elementer dan metode ekspansi kofaktor
- Metode hasil kali elementer dapat dilakukan dengan cara sarrus
- Metode ekspansi kofaktor dilakukan dengan mencari nilai minor dan kofaktor dari matriks.
- Untuk menyelesaikan Persamaan Linear dapat menggunakan Aturan Cramer
- Pada scilab determinan suatu matriks dapat menggunakan fungsi det(A) dimana A adalah suatu matriks.