OPERASI MATRIKS DAN TRANSPOSE MATRIKS

2

OBJEKTIF :

1. Mahasiswa Mampu Menghitung Penjumlahan dan Pengurangan Matriks
2. Mahasiswa Mampu Mengetahui Sifat – Sifat Penjumlahan dan Pengurangan Matriks
3. Mahasiswa Mampu Mengetahui Pengertian Perkalian dan Transpose Matriks
4. Mahasiswa Mampu Menghitung Perkalian dan Transpose Matriks

---

1. Operasi – Operasi Matriks

Operasi-operasi matrik merupakan operasi aljabar dasar yang sama halnya dengan operasi aljabar pada bilangan. Namun, ada beberapa sifat aljabar yang perlu diketahui kaitannya dengan operasi matrik, berikut ini penjelasannya.

A. Penjumlahan dan Pengurangan Matriks

Penjumlahan serta pengurangan dalam matriks hanya dapat dilakukan apabila kedua matriks mempunyai ukuran dan tipe yang sama.

Misal, A = [a_{ij}] dan B = [b_{ij}] dua buah matrik dengan ukuran yang sama misalkan matrik m x n. maka, penjumlahan dan pengurangan matrik A dan B dituliskan sebagai berikut:

$$C = A \pm B,$$

$$[c_{ij}] = [a_{ij}] \pm [b_{ij}].$$

Dimana:
C = matrik hasil penjumlahan A dan B
i = 1, 2, 3, …………, m.
j = 1, 2, 3, …………, n.

Sebagai catatan bahwa jika dua buah matrik mempunyai ukuran yang berbeda, maka elemen yang bersesuaian tidak dapat ditemukan, dalam permasalahan ini penjumlahan matrik tidak dapat didefinisikan. Penjumlahan matrik terdefinisi jika A dan B mempunyai jumlah baris dan kolom yang sama. Dalam permasalahan ini, matrik A dan B dapat dikatakan "comformable in addition" atau saling bersesuaian.

Beberapa hukum dasar dasar dari penjumlahan dan pengurangan adalah sebagai berikut:

1. Komutatif

   A + B = B + A
   E – F = E – F

2. Asosiatif

   A + (B + C) = (A + B) + C

Bentuk umum dari penjumlahan atau pengurangan matriks adalah sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \text{ dan } \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}$$

Hasil

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{bmatrix}$$

Dengan:

C = A + B $\begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + a_{23} \end{bmatrix}$

Contoh :

Diketahui matrik A = $\begin{bmatrix} 2 & -7 & 4 \\ 1 & 5 & -3 \end{bmatrix}$ dan B = $\begin{bmatrix} -6 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & 6 \end{bmatrix}$. Maka penjumlahan dan pengurangan matriks tersebut adalah

A + B = $\begin{bmatrix} 2 & -7 & 4 \\ 1 & 5 & -3 \end{bmatrix}$ + $\begin{bmatrix} -6 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & 6 \end{bmatrix}$

= $\begin{bmatrix} 2 + (-6) & (-7) + 2 & 4 + 1 \\ 1 + 3 & 5 + (-4) & (-3) + 6 \end{bmatrix}$

= $\begin{bmatrix} -4 & -5 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

A - B = $\begin{bmatrix} 2 & -7 & 4 \\ 1 & 5 & -3 \end{bmatrix}$ - $\begin{bmatrix} -6 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & 6 \end{bmatrix}$

= $\begin{bmatrix} 2 - (-6) & -7 - 2 & 4 - 1 \\ 1 - 3 & 5 - (-4) & -3 - 6 \end{bmatrix}$

= $\begin{bmatrix} 2 + 6 & -7 - 2 & 4 - 1 \\ 1 - 3 & 5 + 4 & -3 - 6 \end{bmatrix}$

= $\begin{bmatrix} 8 & -9 & 3 \\ -2 & 9 & -9 \end{bmatrix}$

RANGKUMAN

1. Menentukan penjumlahan matriks menggunakan rumus:

$$A_{mxn} + B_{mxn} = C_{mxn} \text{dimana } c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

2. Menentukan pengurangan matriks menggunakan rumus:

$$Am\times n - B_{mxn} = D_{mxn} \text{dimana } d_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$$

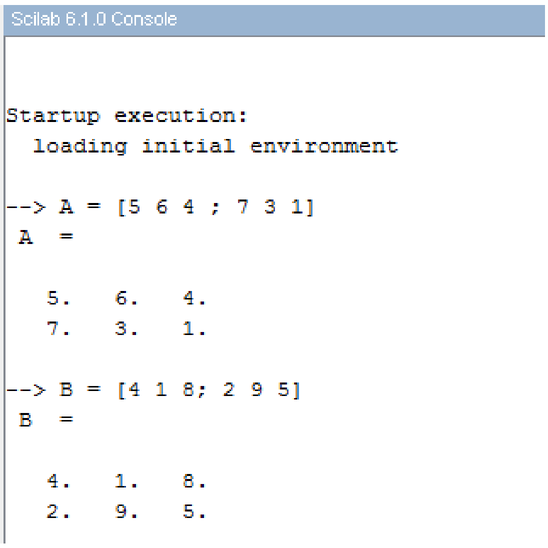
TUNTUNAN LATIHAN

Berikut ini diberikan perhitungan operasi dasar matriks pada software Scilab dalam penyelesaian ,dimana diketahui :

Matriks A = $\begin{bmatrix} 5 & 6 & 4 \\ 7 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ dan Matriks B = $\begin{bmatrix} 4 & 1 & 8 \\ 2 & 9 & 5 \end{bmatrix}$

a) Mendefinisikan matriks A dan B ke dalam Scilab. Caranya mengetikkan langsung pada lembar kerja (console), yaitu:

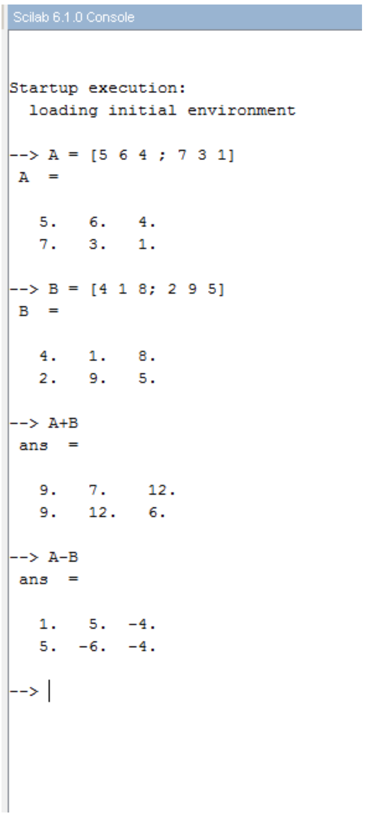
   A=[5 6 4 ; 7 3 1] lalu tekan enter
   B=[4 1 8 ; 2 9 5] lalu tekan enter



Gambar 2.1 Penulisan pada scilab

b) Operasi penjumlahan dan pengurangan matriks diselesaikan dengan langsung menggunakan operator yang ada pada Scilab dimana :

“ + ” untuk operasi penjumlahan
“ - “ untuk operasi pengurangan



Gambar 2.2 Contoh Penulisan penambahan dan pengurangan pada scilab

LATIHAN

1. Diketahui matriks $A_{3x2} \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 7 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$ dan $B_{3x2} \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 6 & 8 \\ 9 & 2 \end{bmatrix}$

   Tentukan:
   (a) $B{-}A$
   (b) $B{+}A$

2. Tentukan Pengurangan matriks A = $\begin{bmatrix} 9 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \\ 6 & 5 & 2 \end{bmatrix}$ dengan matriks B = $\begin{bmatrix} 3 & 9 & 3 \\ 4 & 4 & 2 \\ 8 & 3 & 5 \end{bmatrix}$!

B. **Perkalian Dengan Skalar**

Ada dua jenis perkalian matriks yaitu perkalian antara matriks A dengan skalar g, dan perkalian antara matriks A dengan B.

1. Perkalian antara matriks A dengan skalar g akan menghasilkan matriks C yang elemennya merupakan perkalian dari setiap elemen pada matriks A dengan g.

$$C = g\ .\ A = \begin{bmatrix} g.a_{11} & g.a_{12} & g.a_{13} \\ g.a_{21} & g.a_{22} & g.a_{23} \\ g.a_{31} & g.a_{32} & g.a_{33} \end{bmatrix}$$

2. Perkalian antara matriks A yang mempunyai ukuran m x n dan matriks B yang mempunyai ukuran n x l akan menghasilkan matriks C dengan ukuran m x l. perkalian antara dua matriks dapat diopersikan jika ukuran interior matriksnya sama.

$$C_{m\,x\,l} = A_{m\,x\,n}\ X\ B_{n\,x\,l}$$

Ukuran matriks dalam sama

Catatan :

Beberapa hukum pada penjumlahan dan perkalian skalar. Jika A,, matriks-matriks berukuran sama, dan λ skalar, maka berlaku :

a. $A+B=B+A$ (Sifat Komutatif)
b. $(A+B)+C=A+(B+C)$ (Sifat Asosiatif)
c. $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$ (Sifat Distributif)
d. $A+(-1)A=0$
e. Selalu ada matriks D, sedemikian sehingga $A+D=B$

C. Perkalian Dua Buah Matriks

Perkalian matriks dengan matriks hanya dapat terjadi apabila jumlah kolom pada matriks pertama sama dengan jumlah baris matriks kedua. Misalkan matriks A berukuran $m×n$ dan B berukuran $n×p$, maka hasil perkalian keduanya E=AB dari matriks A=[aij] dan B=[bij] adalah matriks E berukuran $m×p$, dimana elemen pada matriks E dihitung menggunakan persamaan (2.2).

$$e_{ij} = a_{i1}\ b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{in} \qquad (2.2)$$

i = 1,2,...,m ; j=1,2 ,... , p

Catatan :

Beberapa hukum pada perkalian matriks. Jika A,, matriks-matriks yang memenuhi syarat-syarat perkalian matriks, maka berlaku :

a. (B+C)=AB+AC; (B+C)A=BA+CA (Sifat Distributif)
b. (BC)=(AB)C (Sifat Asosiatif)
c. AB≠BA (Tidak Komutatif)
d. Jika AB=AC belum tentu B=C

D. Transpose Matriks

Transpose dari matriks A yang dinotasikan dengan A' atau AT merupakan matriks yang diperoleh dengan mengubah letak elemen pada setiap baris menjadi elemen kolom matriks. Baris pertama matriks A menjadi kolom pertama dari matriks A' dan baris kedua matriks A menjadi kolom kedua dari matriks A'. Misalkan A = $\left(a_{ij}\right)$ berukuran ($m×n$) maka transpose dari A adalah matriks A' berukuran ($n×m$) dengan A' = $\left(a_{ji}\right)$

Catatan :
Beberapa sifat pada matriks transpose yaitu :

a. (A+ B)T= AT+ BT
b. (AT)T= A
c. λ(AT) = (λA)T
d. (AB)T= BTAT

Contoh:

Diketahui matriks A = $\begin{bmatrix} 2 & -7 & 4 \\ 1 & 5 & -3 \end{bmatrix}$ dan B = $\begin{bmatrix} -6 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & 6 \end{bmatrix}$

Tentukan:

a. 3A – 2B
b. AB’

Penyelesaian

a. 3A – 2B

3A – 2B = $\begin{bmatrix} 3.2 & 3.(-7) & 3.4 \\ 3.1 & 3.5 & 3.(-3) \end{bmatrix}$ - $\begin{bmatrix} 2.(-6) & 2.2 & 2.1 \\ 2.3 & 2.(-4) & 2.6 \end{bmatrix}$

= $\begin{bmatrix} 6 & -21 & 12 \\ 3 & 15 & -9 \end{bmatrix}$ - $\begin{bmatrix} -12 & 4 & 2 \\ 6 & -8 & 12 \end{bmatrix}$

= $\begin{bmatrix} 6-(-12) & (-21)-4 & 12-2 \\ 3-6 & 15-(-8) & -9-12 \end{bmatrix}$

= $\begin{bmatrix} 6+12 & (-21)-4 & 12-2 \\ 3-6 & 15+8 & -9-12 \end{bmatrix}$

= $\begin{bmatrix} 18 & -25 & 10 \\ -3 & 23 & -21 \end{bmatrix}$

b. B’A

B’ = $\begin{bmatrix} -6 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & 6 \end{bmatrix}'$ = $\begin{bmatrix} -6 & 3 \\ 2 & -4 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$

B’A = $\begin{bmatrix} -6 & 3 \\ 2 & -4 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -7 & 4 \\ 1 & 5 & -3 \end{bmatrix}$

B’A = $\begin{bmatrix} (-6.2)+(3.1) & (-6.-7)+(3.5) & (-6.\ 4)+(3.\ -3) \\ (2.2)+(-4.1) & (2.-7)+(-4.5) & (2.\ 4)+(-4.\ -3) \\ (1.\ 2)+(6.1) & (1.-7)+(6.\ 5) & (1.\ 4)+(6.\ -3) \end{bmatrix}$

$$B'A = \begin{bmatrix} -12+3 & 42+15 & -24+(-9) \\ 4+(-4) & -14+(-20) & 8+(12) \\ 2+6 & -7+30 & 4+(-18) \end{bmatrix}$$

$$B'A = \begin{bmatrix} -9 & 57 & -33 \\ 0 & -34 & 20 \\ 8 & 23 & -14 \end{bmatrix}$$

RANGKUMAN

1. Menentukan perkalian skalar matriks menggunakan rumus :

   $\lambda\, A_{mxn}$=[λa_{ij}] dimana λ adalah skalar

2. Menentukan perkalian matriks menggunakan rumus :

   $A_{mxn}B_{nxp}$=E_{mxp}; e_{ij} = $a_{i1}b_{1j}$ + $a_{i2}b_{2j}$ + ⋯ + $a_{in}b_{nj}$

3. Transposematriks A = $\left(a_{ij}\right)$ didefinisikan dengan bentuk :

   A'=$AT\ \left(a_{ji}\right)$

   dengan mengubah letak elemen pada setiap baris A menjadi elemen pada kolom matriks A'.

TUNTUNAN LATIHAN

A. Berikut ini diberikan perhitungan operasi dasar matriks pada software Scilab dalam penyelesaian

   Dimana diketahui :
   matriks A = $\begin{bmatrix} 2 & -7 & 4 \\ 1 & 5 & -3 \end{bmatrix}$ dan matriks B = $\begin{bmatrix} -6 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & 6 \end{bmatrix}$

(a) Mendefinisikan matriks Adan B ke dalam lembar kerja Scilab.

```
Scilab 6.1.0 Console

Startup execution:
  loading initial environment

--> A = [2 -7 4; 1 5 -3]
 A  =

   2.  -7.   4.
   1.   5.  -3.

--> B = [-6 2 1; 3 -4 6]
 B  =

  -6.   2.   1.
   3.  -4.   6.

-->
```

Gambar 2.3 Penulisan Pada Lembar Kerja Scilab

(b) Operasi perkalian matriks dan transpose matriks diselesaikan dengan langsung menggunakan operator yang ada pada Scilab dimana :

“ * ”untuk operasi perkalian
“ ‘ “untuk transpose matriks

```
Scilab 6.1.0 Console

Startup execution:
  loading initial environment

--> A = [2 -7 4; 1 5 -3]
 A  =

   2.  -7.   4.
   1.   5.  -3.

--> B = [-6 2 1; 3 -4 6]
 B  =

  -6.   2.   1.
   3.  -4.   6.

--> 3*A - 2*B
 ans  =

   18.  -25.   10.
  -3.    23.  -21.

--> B' *A
 ans  =

  -9.   57.  -33.
   0.  -34.   20.
   8.   23.  -14.
```

Gambar 2.4 Contoh Soal Perkalian dan Transpose

LATIHAN

Diketahui matriks A_{3x2} = $\begin{bmatrix} 2 & -7 \\ -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ dan B_{3x2} = $\begin{bmatrix} -6 & 5 \\ 3 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

Tentukan :

a. B + (-2)A
b. 3A – 2B
c. B’A