

INVERS MATRIKS DAN SIFAT-SIFAT INVERS MATRIKS

OBJEKTIF :

1. Mahasiswa Mampu Mendefinisikan Matriks Invers
2. Mahasiswa Mampu Menghitung Matriks Ordo 2 x 2
3. Mahasiswa Mampu Menghitung Matriks Ordo 3 x 3
4. Mahasiswa Mampu Mengetahui Sifat-Sifat Matriks Invers

1. Menentukan Invers Matriks

Invers matriks A berukuran $n \times n$ adalah matriks B berukuran $n \times n$ sedemikian hingga,

$$AB = BA = I$$

Pada persamaan diatas, B adalah invers dari A dan dituliskan A^{-1} . Jika matriks persegi A mempunyai invers, maka A dikatakan matriks invertible atau nonsingular. Jika A tidak mempunyai invers, maka A dikatakan matriks singular. Untuk matriks identitas I, matriks I dikatakan invertible karena,

$$II = I$$

Contoh :

Periksa apakah kedua matriks $B = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$ dan $C = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ merupakan invers untuk matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

Jawab:

B invers dari A jika hanya jika $AB = BA = I$; C invers dari A jika hanya jika $AC = CA = I$. Sehingga,

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} & 1 \\ \frac{13}{3} & \frac{5}{2} \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sedangkan,

$$AC = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = CA.$$

Jadi, B bukan merupakan invers dari A, sedangkan C merupakan invers dari A. Sedemikian hingga $A^{-1} = C$.

A. Invers Matriks Pada Ordo 2 x 2

suatu matriks diketahui $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ Maka rumus invers

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Contoh :

Tentukan invers dari matriks A tersebut, $A = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$!

Jawab :

$$A^{-1} = \frac{1}{6 \cdot 3 - 2 \cdot 1} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{18-2} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$$

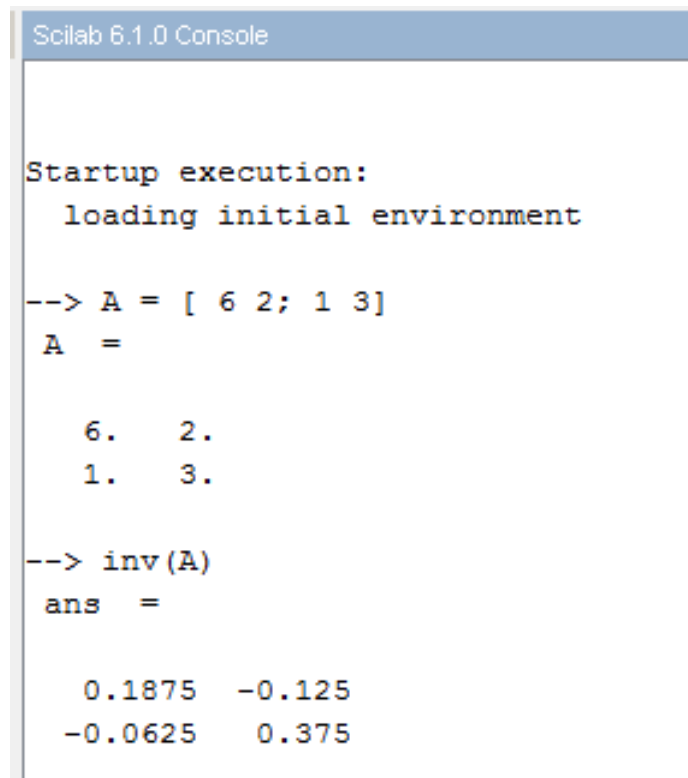
$$A^{-1} = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{16} & -\frac{2}{16} \\ -\frac{1}{16} & \frac{6}{16} \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{16} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{16} & \frac{3}{8} \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0,1875 & -0,125 \\ -0,0625 & 0,375 \end{bmatrix}$$

Contoh Penulisan Pada Scilab



```
Scilab 6.1.0 Console

Startup execution:
  loading initial environment

--> A = [ 6 2; 1 3]
A =

    6.    2.
    1.    3.

--> inv(A)
ans =

    0.1875  -0.125
   -0.0625   0.375
```

Gambar 6.1 Contoh Invers Matriks Ordo 2 x 2

B. Invers Matriks Pada Ordo 3 x 3

Cara untuk menentukan nilai invers matriks A dengan ordo 3 x 3 tidak sama dengan cara menentukan invers matriks dengan ordo 2 x 2. Cara menentukan invers matriks ordo 3 x 3 lebih rumit dari cara

menentukan invers matriks 2 x 2. Sebelum menentukan invers matriks ordo 3 x 3, perlu dipahami terlebih dahulu mengenai matriks minor, kofaktor, dan adjoin.

a. Matriks Minor

Diketahui sebuah matriks A berordo 3 x 3

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Matriks minor M_{ij} adalah matriks yang diperoleh dengan cara menghilangkan baris ke-i dan kolom ke-j dari matriks A sehingga diperoleh matriks minor berordo 2 seperti persamaan di bawah

Matriks M_{ij} dari matriks A

$$\begin{array}{lll} M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & M_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & M_{31} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & M_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & M_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \\ M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & M_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{array}$$

b. Kofaktor

Kofaktor baris ke-i dan kolom ke-j disimbolkan dengan C_{ij} dapat ditentukan dengan rumus seperti terlihat di bawah.

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} |M_{ij}|$$

$$\begin{array}{ll} C_{11} = (-1)^{1+1} |M_{11}| = |M_{11}| & C_{23} = (-1)^{2+3} |M_{23}| = - |M_{23}| \\ C_{12} = (-1)^{1+2} |M_{12}| = - |M_{12}| & C_{31} = (-1)^{3+1} |M_{31}| = |M_{31}| \\ C_{13} = (-1)^{1+3} |M_{13}| = |M_{13}| & C_{32} = (-1)^{3+2} |M_{32}| = - |M_{32}| \\ C_{21} = (-1)^{2+1} |M_{21}| = - |M_{21}| & C_{33} = (-1)^{3+3} |M_{33}| = |M_{33}| \\ C_{22} = (-1)^{2+2} |M_{22}| = |M_{22}| & \end{array}$$

Kofaktor di atas akan digunakan untuk menentukan adjoin matriks yang akan dicari nilai inversnya.

c. Adjoin

Secara umum, sebuah matriks memiliki matriks adjoin seperti ditunjukkan seperti pada matriks di bawah.

$$\text{Adj} (A) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Keterangan: C_{ij} adalah **kofaktor** baris ke-i dan kolom ke-j. Sehingga, adjoin dari matriks A dinyatakan seperti terlihat pada persamaan di bawah.

$$\text{Adj} (A) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

d. Invers matriks ordo 3 x 3

Matriks minor, kofaktor, dan adjoin yang telah kita bahas di atas berguna untuk menentukan nilai invers dari suatu matriks dengan ordo matriks di atas 3 atau lebih.

Rumus invers Matriks

$$A^{-1} = \frac{1}{\det (A)} \cdot \text{Adj} (A)$$

Contoh :

Tentukan invers matriks A dibawah ini !

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 5 & 6 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Jawab :

1. Langkah pertama mencari determinan

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 & 1 & 3 & -2 \\ 5 & 6 & 2 & 5 & 6 & 2 \\ 1 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$|A| = (3 \times 6 \times (-3)) + (-2 \times 2 \times 1) + (1 \times 5 \times 0) - (-2 \times 5 \times (-3)) - (3 \times 2 \times 0) - (1 \times 6 \times 1)$$

$$|A| = (-54) + (-4) + (0) - (30) - (0) - (6)$$

$$|A| = -94$$

2. Langkah kedua menentukan kofaktor

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 5 & 6 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$A_{11} = |M_{11}| = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = (-18 - 0) = -18$$

$$A_{12} = -|M_{12}| = - \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -(-15 - 2) = -(-17) = 17$$

$$A_{13} = |M_{13}| = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = (0 - 6) = -6$$

$$A_{21} = -|M_{21}| = - \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -(6 - 0) = -(6) = -6$$

$$A_{22} = |M_{22}| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = (-9 - 1) = -10$$

$$A_{23} = -|M_{23}| = - \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -(0 - (-2)) = -(0 + 2) = -(2) = -2$$

$$A_{31} = |M_{31}| = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = (-4 - 6) = -10$$

$$A_{32} = -|M_{32}| = - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -(6 - 5) = -(1) = -1$$

$$A_{33} = |M_{33}| = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = (18 - (-10)) = (18 + 10) = 28$$

$$A = \begin{bmatrix} -18 & 17 & -6 \\ -6 & -10 & -2 \\ -10 & -1 & 28 \end{bmatrix}$$

3. Menentukan Adjoin A

$$A = \begin{bmatrix} -18 & 17 & -6 \\ -6 & -10 & -2 \\ -10 & -1 & 28 \end{bmatrix}$$

$$\text{Adj } A = \begin{bmatrix} -18 & -6 & -10 \\ 17 & -10 & -1 \\ -6 & -2 & 28 \end{bmatrix}$$

4. Menentukan Invers matriks A

$$A^{-1} = -\frac{1}{94} \begin{bmatrix} -18 & -6 & -10 \\ 17 & -10 & -1 \\ -6 & -2 & 28 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{18}{94} & \frac{6}{94} & \frac{10}{94} \\ -\frac{17}{94} & \frac{10}{94} & \frac{1}{94} \\ \frac{6}{94} & \frac{2}{94} & -\frac{28}{94} \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{9}{47} & \frac{3}{47} & \frac{5}{47} \\ -\frac{17}{94} & \frac{5}{47} & \frac{1}{94} \\ \frac{3}{47} & \frac{1}{47} & -\frac{14}{47} \end{bmatrix}$$

Contoh Penulisan Pada Scilab

```

Scilab 6.1.0 Console

Startup execution:
loading initial environment

--> A = [3 -2 1; 5 6 2; 1 0 -3]
A =

    3.  -2.   1.
    5.   6.   2.
    1.   0.  -3.

--> inv (A)
ans =

    0.1914894    0.0638298    0.106383
   -0.1808511    0.106383    0.0106383
    0.0638298    0.0212766   -0.2978723

```

Gambar 6.2 Contoh Invers Matriks Ordo 3 x 3

2. Sifat – Sifat Invers Matriks

Jika A, B dan C matriks persegi dengan orde yang sama dimana $A \times B = I$ dan $C \times A = I$, maka $B = C$.

Bukti

$$C = C.I = C.(A.B) = (C.A).B = I.B = B$$

Invers suatu matriks bersifat unik

Bukti

Misal A dan B invers dari A. maka,

$$A.B = I, B.A = I, A.C = I, \text{ dan } C.A = I.$$

Sehingga $B = C$. Jika kedua matriks B dan C merupakan Invers A , maka kedua matriks tersebut haruslah sama. Sedemikian hingga, Invers matriks bersifat unik.

Jika A matriks 2×2 dengan $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. A dikatakan nonsingular jika hanya jika $ad - bc \neq 0$. Sedemikian hingga, invers dari A adalah $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

Sifat – sifat invers matriks

Misal, A dan B matriks persegi dengan A dan B matriks nonsingular, maka

1. $(A^{-1})^{-1} = A$
2. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
3. $(A_1A_2 \dots A_n)^{-1} = A_n^{-1}A_{n-1}^{-1} \dots A_2^{-1}A_1^{-1}$
4. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
5. $(kA)^{-1} = \left[\frac{1}{k}\right] (A^{-1})$ Jika skalar $k \neq 0$
6. $A^{-n} = (A^{-1})^n$.
7. Invers dari matriks simetri nonsingular adalah simetri
8. Invers dari matriks segitiga atas atau bawah nonsingular juga merupakan matriks segitiga atas atau bawah

Contoh:

Tentukan A^{-2} jika $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

Jawab:

$$A^{-2} = (A^{-1})^2 = \left[\begin{array}{cc} \frac{1}{5} & \frac{1}{10} \\ -\frac{2}{5} & \frac{3}{10} \end{array} \right]^2 = \left[\begin{array}{cc} \frac{1}{5} & \frac{1}{10} \\ -\frac{2}{5} & \frac{3}{10} \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} \frac{1}{5} & \frac{1}{10} \\ -\frac{2}{5} & \frac{3}{10} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} 0 & \frac{1}{20} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{20} \end{array} \right]$$