MATRIKS PARTISI

4

OBJEKTIF :

1. Mahasiswa Mampu Mendefinisikan Sebuah Matriks Partisi
2. Mahasiswa Mampu Mengetahui Cara Penjumlahan Matriks Partisi
3. Mahasiswa Mampu Mengetahui Cara Perkalian Matriks Partisi
4. Mahasiswa Mampu Mengetahui Cara Transpose Matriks Partisi
5. Mahasiswa Mampu Mengetahui Cara Invers Matriks Partisi
6. Mahasiswa Mampu Mengetahui Cara Determinan Matriks Partisi

---

1. Pengertian Matriks Partisi

Matriks partisi adalah matriks yang diperoleh dengan memecah suatu matriks menjadi submatriks dengan memberi sekatan garis horizontal di antara dua baris dan garis vertikal di antara dua kolom. Matriks partisi dapat juga disebut matriks blok.
Berikut ini dijelaskan beberapa sifat dari partisi matriks

Misal, diketahui matriks A = $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 7 & 6 & 5 \\ 9 & 8 & 1 \end{bmatrix}$. Matriks A dapat dipartisi menjadi

submatriks dengan membuat garis horizontal diantara baris yang dipilih dan garis vertical diantara kolom yang dipilih. Sehingga matriks A dapat dipartisi menjadi beberapa matriks partisi sebagai berikut,

1. $\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ = $\left[\begin{array}{c|cc} 3 & 2 & 4 \\ \hline 7 & 6 & 5 \\ 9 & 8 & 1 \end{array}\right]$

atau

$A_{11} = [3]$; $A_{12} = [2 \quad 4]$; $A_{21} = \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \end{bmatrix}$; $A_{22} = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 8 & 1 \end{bmatrix}$

2. $[a_1 \quad a_2 \quad a_3] = \left[\begin{array}{c|c|c} 3 & 2 & 4 \\ 7 & 6 & 5 \\ 9 & 8 & 1 \end{array}\right]$

Atau

$a_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}$; $a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}$; $a_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$

3. $[A_{11} \quad A_{12}] = \left[\begin{array}{c|cc} 3 & 2 & 4 \\ 7 & 6 & 5 \\ 9 & 8 & 1 \end{array}\right]$

atau

$A_{11} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}$; $A_{12} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 5 \\ 8 & 1 \end{bmatrix}$

Matriks partisi A dituliskan dengan notasi A = $[A_{ij}]$ dengan submatriks A_{ij}.

2. Penjumlahan Matriks Partisi

Misal, A dan B adalah matriks berukuran m x n. Matriks A dan B dapat dipartisi menjadi A = $[A_{ij}]$ dan B = $[B_{ij}]$ sebagai berikut:

$$A = [A_{ij}] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{bmatrix}$$

$$B = [B_{ij}] = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ B_{m1} & B_{m2} & \cdots & B_{mn} \end{bmatrix}$$

Jika matriks partisi A dan B mempunyai jumlah baris dan kolom submatrik yang sama, dan submatrik yang bersesuaian pada A dan B mempunyai ukuran yang sama. Maka penjumlahan matriks partisi A dan B merupakan penjumlahan elemen (submatriks) pada A dan B, sehingga A + B dapat dituliskan,

$$A + B = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ B_{m1} & B_{m2} & \cdots & B_{mn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A_{11} + B_{11} & A_{12} + B_{12} & \cdots & A_{1n} + B_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{m1} + B_{m1} & A_{m2} + B_{m2} & \cdots & A_{mn} + B_{mn} \end{bmatrix}$$

3. Perkalian Matriks Partisi

Konsep perkalian matriks partisi sama seperti konsep perkalian matriks biasa. Misal, diketahui perkalian matriks C = A.B sebagai berikut:

$$C = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right] . \left[\begin{array}{cccc} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ \hline b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \end{array}\right]$$

Dimana matriks A dipartisi menjadi empat submatriks sedangkan matriks B dipartisi menjadi dua submatriks. Sedemikian hingga, perkalian matriks tersebut dapat dituliskan menjadi:

$$C = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} & + & A_{12}B_{21} \\ A_{21}B_{11} & + & A_{22}B_{21} \end{bmatrix}$$

Submatriks pada A dan B conformable (terpenuhi) karena garis vertikal A membagi kolom A sama dengan garis horizontal pada B yang membagi kolom.

Contoh:

Diketahui matriks partisi A dan B. $A = \left[\begin{array}{c|ccc} 3 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 3 & 3 \\ \hline 0 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right]$ dan

B = $\begin{bmatrix} 6 & -1 & 0 & 3 \\ \hline 2 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. Tentukan hasil perkalian matriks partisi A dan B!

Jawab :

$$A_{11}B_{11} + A_{12}A_{21} = \begin{bmatrix} 18 & -3 & 0 & 9 \\ -6 & 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 4 & -3 & 4 \\ 26 & 12 & -1 & 11 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 25 & 1 & -3 & 13 \\ 20 & 13 & -1 & 8 \end{bmatrix}$$

$$A_{21}B_{11} + A_{22}A_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & -2 & 0 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 & -4 & 6 & 5 \\ 4 & 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8 & -4 & 6 & 5 \\ 16 & -2 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Sehingga, hasil kali matriks partisi A dan B,

$$C = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} & + & A_{12}B_{21} \\ A_{21}B_{11} & + & A_{22}B_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 & 1 & -3 & 13 \\ 20 & 13 & -1 & 8 \\ 8 & -4 & 6 & 5 \\ 16 & -2 & 5` & 6 \end{bmatrix}$$

Penulisan pada scilab

```
Scilab 6.1.0 Console

Startup execution:
  loading initial environment

--> A1 = [3; -1]; A2 = [2 1 0; 4 3 3] ; A3 = [0 ; 2]; A4 = [1 -1 3;-1 0 2];

--> B1 = [6 -1 0 3]; B2 = [2 0 -1 2; 3 4 -1 0; 3 0 2 1];

--> C1 = (A1*B1)+(A2*B2)
 C1  =

   25.   1.   -3.   13.
   20.   13.  -1.   8.

--> C2 = (A3*B1)+(A4*B2)
 C2  =

   8.   -4.   6.   5.
   16.  -2.   5.   6.

--> C = [C1;C2]
 C  =

   25.   1.   -3.   13.
   20.   13.  -1.   8.
   8.   -4.    6.   5.
   16.  -2.    5.   6.
```

Gambar 3.1 Perkalian Matriks Partisi Dengan Scilab

4. Transpose Matriks Partisi

Transpose matriks partisi merupakan transpose terhadap matriks partisi dan submatriks. Sebagai contoh

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} A^T{}_{11} & A^T{}_{21} \\ A^T{}_{12} & A^T{}_{22} \\ A^T{}_{13} & A^T{}_{23} \end{bmatrix}$$

5. Invers Matriks Partisi

Matriks persegi A yang dipartisi menjadi A = $\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ dengan A adalah matriks non-singular dan D = A_{22} - $A_{21}A_{11}{}^{-1}A_{12}$ juga non-singular, maka invers dari A adalah

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} {A_{11}}^{-1} + {A_{11}}^{-1}A_{12}D^{-1}A_{21}{A_{11}}^{-1} & -{A_{11}}^{-1}A_{12}D^{-1} \\ -D^{-1}A_{21}{A_{11}}^{-1} & D^{-1} \end{bmatrix}$$

Alternatif lain, jika A non-singular dan E = A_{11}- $A_{12}{A_{22}}^{-1}A_{21}$ juga non-singular, maka invers dari A adalah

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} E^{-1} & -E^{-1}A_{12}{A_{22}}^{-1} \\ -{A_{22}}^{-1}A_{21}E^{-1} & {A_{22}}^{-1} + {A_{22}}^{-1}A_{21}E^{-1}A_{12}{A_{22}}^{-1} \end{bmatrix}$$

Namun, jika submatrik A_{12} dan A_{21} keduanya nol dan A_{11} dan A_{22} adalah persegi dan non-singular, maka A juga non-singular. Sehingga invers dari A adalah

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} {A_{11}}^{-1} & 0 \\ 0 & {A_{22}}^{-1} \end{bmatrix}$$

Catatan: matriks persegi A disebut non-singular jika A memiliki invers. Namun, jika A tidak memiliki invers, maka A disebut singular.

Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 2 \\ \hline 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{array}\right] \quad \begin{pmatrix} A_{1.1} & A_{1.2} \\ A_{2.1} & A_{2.2} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} B_{1.1} & B_{1.2} \\ B_{2.1} & B_{2.2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} (A_{1.1} - A_{1.2}{A_{2.2}}^{-1}A_{2.1})^{-1} & -(B_{1.1}A_{1.2}{A_{2.2}}^{-1}) \\ -({A_{2.2}}^{-1}A_{2.1}B_{1.2}) & {A_{2.2}}^{-1} - ({A_{2.2}}^{-1}A_{2.1}B_{1.2}) \end{bmatrix}$$

$$A_{2.2} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$${A_{2.2}}^{-1} = \frac{1}{|A_{2.2}|} \text{adjoint } A_{2.2}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_{1.1} = (A_{1.1} - A_{1.2}{A_{2.2}}^{-1}A_{2.1})^{-1}$$

$$= \left(2 - (3 \quad 2)\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & \frac{5}{2} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= -2$$

$$B_{1.2} = -(B_{1.1} A_{1.2} A_{2.2}{}^{-1})$$
$$= -\left[-2(3 \quad 2) \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right]$$
$$= [2 \quad 1]$$

$$B_{2.1} = -(A_{2.2}{}^{-1} A_{2.1} B_{1.2})$$
$$= -\left[\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} (2 \quad 1) \right]$$

$$= \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$B_{2.2} = \left[A_{2.2}{}^{-1} - \left(A_{2.2}{}^{-1} A_{2.1} B_{1.2} \right) \right]$$

$$= \left[\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} (2 \quad 1) \right]$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Maka } A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

6. Determinan Matriks Partisi

Matriks persegi A yang dipartisi menjadi A = $\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ dengan A_{11} adalah submatriks persegi dan non-singular, maka determinan dari A adalah

$$|A| = |A_{11}| |A_{22} - A_{21} A_{11}{}^{-1} A_{12}|$$