Pertemuan 3

Matriks Invers

Objektif:

1. Praktikan memahami teori dasar Invers
2. Praktikan memahami cara mencari invers suatu matriks
3. Praktikan dapat membuat program tentang invers dari suatu matriks

P3.1 Teori

Seperti yang telah dijelaskan pada Bab 2, Matriks adalah susunan bilangan – bilangan berbentuk persegi atau persegi panjang yang diatur menurut baris dan kolom tertentu. Jika terdapat suatu matriks bujursangkar (X) yang berorde sama ,sehingga :

(A) (X) = (1)

Maka dikatakan bahwa (X) kebalikan atau Invers Matriks dari (A) dan dituliskan (X) = $(A)^{-1}$

Matriks Invers

Sebuah matriks bujur sangkar A berordo n disebut mempunyai invers bila ada suatu matriks B, sehingga AB = BA = In. Matriks B disebut matriks invers A, ditulis A^{-1}, merupakan matriks bujur sangkar berordo n. Dapat diselidiki pada contoh di bawah ini, bahwa $AA^{-1} = A^{-1}A = I_2$. Cara seperti ini hanya baik untuk matriks yang berordo kecil, yaitu untuk n = 2.

Untuk A matriks persegi, A^{-1} adalah invers dari A jika berlaku :

$A\,A^{-1} = A^{-1}\,A = I$

Untuk mendapatkan A^{-1}, dapat dilakukan dengan cara :

- Metode matriks adjoint

  Sifat Matriks Adjoint yaitu :

  $A\ adj(A) = adj(A)\ A = |A|\ I$

  Jika $|A| \neq 0$, maka :

  $$A\ \frac{adj(A)}{|A|} = \frac{adj(A)}{|A|}\ A = I$$

  Menurut definisi matriks invers :

  $$\boxed{A\ A^{-1} = A^{-1}\ A = I}$$

  Ini berarti bahwa :

  $A^{-1} = \dfrac{adj(A)}{|A|}$ dengan $|A| \neq 0$

Sifat – sifat Matriks Invers

(1) Matriks invers (jika ada) adalah tunggal (uniqe). Andaikan B dan C adalah invers dari matriks A, maka berlaku :

$AB = BA = I$, dan juga

$AC = CA = I$

Tetapi untuk : $BAC = B(AC) = BI = B$ ....(*)

$BAC = (BA)C = IC = C$ ....(**)

Dari (*) dan (**) haruslah $B = C$.

(2) Invers dari matriks invers adalah matriks itu sendiri.

Andaikan matriks $C = A^{-1}$, berarti berlaku :

$AC = CA = I$ (*)

Tetapi juga berlaku $C C^{-1} = C^{-1} C = I$ (**)

Dari (*) dan (**) berarti :

$C^{-1} = A$

$(A^{-1})^{-1} = A$.

(3) Matriks invers bersifat nonsingular (determinannya tidak nol)

$\det (A\ A^{-1}) = \det (A)\ \det (A^{-1})$

$\det (I) = \det (A)\ \det (A^{-1})$

$1 = \det (A)\ \det (A^{-1})$; karena $\det (A) \neq 0$, maka :

$\det (A^{-1}) =$

ini berarti bahwa $\det (A^{-1})$ adalah tidak nol dan kebalikan dari det (A).

(4) Jika A dan B masing-masing adalah matriks persegi berdimensi n, dan berturut-turut A^{-1} dan B^{-1} adalah invers dari A dan B, maka berlaku hubungan : $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$

$(AB)\ (AB)^{-1} = (AB)^{-1}\ (AB) = I$ (*)

di sisi lain :

$(AB)\ (B^{-1} A^{-1}) = A(BB^{-1})\ A^{-1} = A\ I\ A^{-1} = A\ A^{-1} = I$

$(B^{-1} A^{-1})\ (AB) = B^{-1}(A^{-1}A)\ B = B^{-1}\ I\ B = B^{-1}\ B = I$ (**)

Menurut sifat (1) di atas matriks invers bersifat uniqe (tunggal),

karena itu dari (*) dan (**) dapatlah disimpulkan bahwa $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$.

(5) Jika matriks persegi A berdimensi n adalah non singular,

maka berlaku $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Menurut sifat determinan : $|A^T| = |A| \neq 0$, oleh sebab itu $(A^T)^{-1}$ ada,

dan haruslah :

$(A^T)^{-1} A^T = A^T (A^T)^{-1} = I$ (*)

Di sisi lain menurut sifat transpose matriks :

$(A A^{-1})^T = (A^{-1})^T A^T$

$I^T = (A^{-1})^T A^T$

$(A^{-1})^T A^T = I$, hubungan ini berarti bahwa $(A^{-1})^T$ adalah juga invers dari A^T.

Padahal invers matriks bersifat tunggal, oleh karena itu memperhatikan (*),

haruslah :

$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$.

P3.2 Contoh Kasus

Carilah invers dari A = $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$

Penyelesaian :

$$AA^{-1} = I$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$Det(A) = 1$$

$$Adj.A = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\text{Invers} = \frac{\text{Adj.A}}{\text{Det(A)}}$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$

Ternyata bahwa matriks-matriks yang mempunyai invers adalah matriks-matriks yang non singular (determinannya # 0 atau ranknya r = n). Invers bila ada, tunggal (hanya satu).

Berlaku sifat :

(*) $(A^{-1})^{-1} = A$

(**) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Dengan menggunakan matriks adjoin kita dapat mencari invers suatu matriks menggunakan rumus :

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj.A}}{\text{Det(A)}}$$, dengan syarat det(A) # 0.

P3.3 Latihan

1. Carilah invers dari $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$
2. Berikan definisi Matriks Invers menurut pendapat anda
3. Jelaskan tentang sifat – sifat Matriks Invers menurut pendapatmu sendiri
4. Apa yang dimaksud dengan adjoin dan berikan contohnya?
5. Mengapa hanya matriks bujursangkar yang dapat dicari inversnya, berikan alasannya?

P3.4 Daftar Pustaka

1. http://id.wikipedia.org/Aljabar_linear
2. http://dumatika.com/invers-matriks

3. www.scribd.com/doc/35464249/invers-matriks