Vektoren im Raum

Nutze die QR-Codes auf der rechten Seite, um in die Welt des dreidimensionalen Raums einzutauchen. Dazu benötigst du eine **VR-Brille**. Empfehlenswert ist eine Brille, welche über eine zusätzliche Taste verfügt. Lade doch zunächst die App für dein **Android Smartphone** herunter. Besuche dafür die Website **vr-vektoren.ch**, um die App herunterzuladen oder nutze einen der QR-Codes, um auf die Webseite zu gelangen.

Definition von Vektoren und Koordinaten

Vektoren

Vektoren definieren die **relative Position** zwischen den Punkten A und B. Dieser hat eine bestimmte Richtung und besitzt einen Skalar (Zahl ohne Grösse). **Jeder Buchstabe definiert eine Länge des Wegs auf seiner Achse.** Diese werden übereinandergeschrieben. Der Pfeil über dem $\vec{v}$ zeigt, dass es sich um einen Vektor handelt. Vektoren sind nicht ortsgebunden und an allen Punkten im Koordinatensystem gleich gross. Für weitere Informationen siehe dir das Thema «Zerlegung von Vektoren» an.

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{pmatrix}$$

Koordinaten

Koordinaten definieren einen Punkt und sie werden mit **Grossbuchstaben** geschrieben. Diese sind immer mit der Distanz zum **Ursprung beschrieben** und besitzen **keine Richtung**, sondern **definieren einen Ort** im Koordinatensystem. Eine Koordinate besitzt eine Eindeutigkeit. Sie können somit immer nur einem Punkt im Koordinatensystem zugeordnet werden. Der **Ursprung** bildet den **Mittelpunkt des Raumes** und befindet sich bei $\langle 0|0|0 \rangle$. Von da aus bewegt sich der Raum in die X, Y und Z-Achsen. Die Achsen verfügen alle über einen positiven und negativen Wertebereich.

$$\boldsymbol{Koordinaten} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \; oder \; \langle X|Y|Z \rangle \qquad \boldsymbol{Ursprung} \Rightarrow O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \; oder \; \langle 0|0|0 \rangle$$

Zerlegung von Vektoren

Bei der Zerlegung eines Vektors in die einzelnen Achsen, werden diese in Skalar und Richtung unterteilt. Während x, y und z die Skalare angeben, zeigt $\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}$ und $\overrightarrow{e_z}$ jeweils die Richtung des Vektors an. Die Reihenfolge der Vektoren spielt keiner Rolle, da der Endpunkt sich nicht verändert.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (x * \overrightarrow{e_x}) + (y * \overrightarrow{e_y}) + (z * \overrightarrow{e_z}) = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$$

Kommutativgesetz

Addition & Subtraktion von Vektoren

Vektoraddition und Subtraktion

Gegenüber der herkömmlichen Addition und Subtraktion setzt sich die Vektoraddition/Vektorsubtraktion aus mehreren Additionen/Subtraktionen gleichzeitig zusammen. Dabei werden die einzelnen **Achsenvektoren** des Vektors mit desselben Achsenvektors des andern Vektors **addiert/subtrahiert**.

$$\boxed{\vec{a} \pm \vec{b} = \begin{pmatrix} \overrightarrow{x_a} \\ \overrightarrow{y_a} \\ \overrightarrow{z_a} \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} \overrightarrow{x_b} \\ \overrightarrow{y_b} \\ \overrightarrow{z_b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overrightarrow{x_a} \pm \overrightarrow{x_b} \\ \overrightarrow{y_a} \pm \overrightarrow{y_b} \\ \overrightarrow{z_a} \pm \overrightarrow{z_b} \end{pmatrix}}$$

Vektoraddition

Vektorsubtraktion

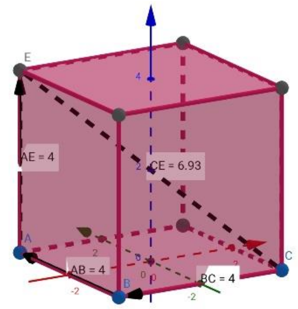
$$\oplus \; \boldsymbol{Skalar} \Rightarrow \boxed{(k, v) \Rightarrow \; k \circledast v}$$

$$k = Skalar$$
$$v = Vektor$$

$$Skalar \; \Rightarrow \; Betragsgrösse$$
$$Vektor \Rightarrow \; Richtung$$

Räumlicher Satz des Pythagoras

Wie schon in der zweidimensionalen Welt, kann der Pythagoras zur Berechnung von Skalaren bei **Quadern** eingesetzt werden. Dabei werden z.B. die **Länge**, **Breite** und **Höhe** eingesetzt, um die **Diagonale** des Würfels zu berechnen. Jedoch wird dabei nur die Betragsgrösse ausgerechnet.



GeoGebra 3D Grafikrechner

$$\boxed{\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} \Rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{BC^2 + AB^2 + AE^2} = |CE|$$

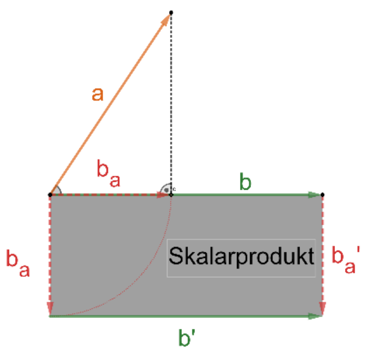
$$\overrightarrow{CE} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{4^2 + 4^2 + 4^2} = 6.928$$

Raumdiagonale

Winkel zwischen Vektoren

Skalarprodukt mit Betrag

Bei einem Skalarprodukt werden zwei Vektoren miteinander **multipliziert**. Dies dient zur Berechnung des zueinander stehenden Winkels von zwei Vektoren, auch **eingeschlossener Winkel** bezeichnet.Die Mulitplikation kann auch mit einem Skalar erfolgen. Dabei ändert sich jedoch lediglich die Betragsgrösse des Vektors. Zuerst wird der Vektor $\vec{a}$ in den **parallelen Anteil** zum Vektor $\vec{b}$ aufgeteilt. Dieser neue Teilvektor $\overrightarrow{b_a}$ wird nun mit dem ganzen Vektor $\vec{b}$ mulitpliziert. Mithilfe des **Cosinus** und dem **Verhältis** von a zu b_a kann nun der Winkel dazwischen berechnet werden.



GeoGebra Grafikrechner

$$\boxed{\vec{a} * \vec{b} = a * b * \cos\varphi = a * b_a}$$

$$\boxed{\cos(\alpha) = \frac{\vec{a} * \vec{b}}{|\vec{a}| * |\vec{b}|} \Rightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{a} * \vec{b}}{|\vec{a}| * |\vec{b}|}\right)}$$

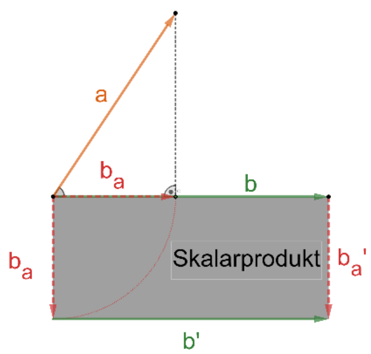
Skalarprodukt

$$\vec{a} * \vec{b} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{pmatrix} = (x_a * x_b) + (y_a * y_b) + \ (z_a * z_b)$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{{x_a}^2 + \ {y_a}^2 + {z_a}^2} \ \boldsymbol{und} \ |\vec{b}| = \sqrt{{x_b}^2 + \ {y_b}^2 + {z_b}^2}$$

Skalarprodukt ohne Betrag

Falls der Winkel bei der Berechnung des **Skalarprodukts 90° Grad** aufweist, existiert die rote Seite des Skalarproduktes nicht und die Fläche der Ebene ist dann gleich Null. Dieser Zustand der beiden Vektoren zueinander wird als **orthogonal** bezeichnet.



GeoGebra 3D Grafikrechner

$$\vec{a} * \vec{b} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (x_a * x_b) + (y_a * y_b) + (z_a * z_b) = \mathbf{0}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -9 \\ 4 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -18 \\ 8 \end{pmatrix} \Rightarrow (2 * 5) + (2 * -9) + \ (4 * 2) = \mathbf{0}$$

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{a} * \vec{b}}{|\vec{a}| * |\vec{b}|}\right) \Rightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{0}{|\vec{a}| * |\vec{b}|}\right) \Rightarrow \cos^{-1}(0) \Rightarrow \underline{\alpha = 90°}$$