Cálculo lntegral- 220146

Ingeniería Civil Informática

Yrina Vera

28 de julio, 2021

SERIES

SUMAS PARCIALES

Para la sucesión $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ las **SUMAS PARCIALES** son

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1 \\ S_2 &= a_1 + a_2 \\ S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ \vdots & \qquad\quad \vdots \\ S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n \end{aligned}$$

S_n es llamada la *n-ésima suma parcial* y la sucesión $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n, \ldots$ es llamada *sucesión de sumas parciales*.

SERIE CONVERGENTE

- Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es CONVERGENTE si la sucesión de sumas parciales $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente. En este caso,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)$$

- Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es ABSOLUTAMENTE CONVERGENTE si $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ es convergente.

SERIE GEOMÉTRICA

Una **SERIE GEOMÉTRICA** es una serie de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a\, r^n = a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \dots$$

- ☞ Si $|r| < 1$, entonces la serie geométrica CONVERGE y su suma es igual a $S = \dfrac{a}{1-r}$, esto es,

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}}$$

- ☞ Si $|r| \geq 1$, la serie DIVERGE.

SERIE TELESCÓPICA

Una **SERIE TELESCÓPICA** es una serie de la forma

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} (b_k - b_{k+1}) = (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + \dots (b_{n-1} - b_n) + \cdots$$

La serie telescópica CONVERGE si y sólo si la sucesión $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge y su suma es igual a

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} a_k = b_1 - \lim_{n \to \infty} b_n}$$

PROPIEDADES DE SUMAS

Sean $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ y $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots$ dos sucesiones. Entonces para cada número natural n y cualquier número real c las siguientes propiedades se cumplen.

1. $$\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$$
2. $$\sum_{k=1}^{n}(a_k - b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n} b_k$$
3. $$\sum_{k=1}^{n}(c a_k) = c\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)$$
4. $$\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_1$$

Teorema 1 (Condición necesaria para la convergencia)

Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

☞ Si $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, entonces $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ es divergente.

SUMA DE POTENCIAS

1. $$\sum_{k=1}^{n} 1 = n$$

2. $$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

3. $$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

4. $$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

CRITERIOS DE CONVERGENCIA

CRITERIO	SERIE	CONVERGE	DIVERGE	COMENTARIO
Término k-ésimo	$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$		$\lim_{k\to\infty} a_k \neq 0$	Este criterio no sirve para demostrar la convergencia.
Series geométricas	$\sum_{k=t}^{\infty} a\, r^{k+h}$	$\|r\| < 1$	$\|r\| > 1$	Suma: $S = \dfrac{ar^{t+h}}{1-r}$
Series telescópicas	$\sum_{k=t}^{\infty} (a_k - a_{k+1})$	$\lim_{k\to\infty} a_k = L$		Suma: $S = a_t - L$
p-series	$\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^p}$	$p > 1$	$p \leq 1$	
Series alternadas	$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k$	$0 < a_{k+1} \leq a_k$ y $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$		
Integral (f continua, positiva y decreciente)	$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $a_k = f(k) \geq 0$	$\int_1^{\infty} f(x)dx$ converge	$\int_1^{\infty} f(x)dx$ diverge	
Raíz	$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$	$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\|a_k\|} < 1$	$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\|a_k\|} > 1$	El criterio no concluye nada si $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\|a_k\|} = 1$
Cociente	$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$	$\lim_{k\to\infty} \left\|\dfrac{a_{k+1}}{a_k}\right\| < 1$	$\lim_{k\to\infty} \left\|\dfrac{a_{k+1}}{a_k}\right\| > 1$	El criterio no concluye nada si $\lim_{k\to\infty} \left\|\dfrac{a_{k+1}}{a_k}\right\| = 1$
Comparación directa ($a_k, b_k > 0$)	$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$	$0 < a_k \leq b_k$ y $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ converge	$0 < b_k \leq a_k$ y $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ diverge	
Comparación en el límite ($a_k, b_k > 0$)	$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$	$\lim_{k\to\infty} \dfrac{a_k}{b_k} = L > 0$ y $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ converge	$\lim_{k\to\infty} \dfrac{a_k}{b_k} = L > 0$ y $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ diverge	