UNIVERSIDAD DEL BÍO-BÍO
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

APUNTES DE APOYO ÁLGEBRA I (220143

Profesor Gabriel Sanhueza Daroch (2020-1)

UNIDAD : TEOREMA BINOMIO

Introducción

Un subconjunto S de $\mathbb{R}$ se dice **inductivo** si satisface las siguientes propiedades,

C1)$1 \in S$

C2) $\forall x,\ (x \in S \to x+1 \in S)$

Ejemplos

Los números naturales son aquellos que se obtienen sumando una cantidad finita de unos:

$1,\ 1+1=2,\ (1+1)+1=3,\ ((1+1)+1)+1=4, \cdots$

Así tenemos que $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \cdots\}$

$\mathbb{N}$ es un conjunto inductivo , además

si $n \in \mathbb{N}$ y $n \neq 1$ entonces $n-1 \in \mathbb{N}$

Inducción y definiciones recursivas

Para comenzar a trabajar con los números naturales debemos aceptar como axioma a uno de los siguientes dos principios.

Principio de buena ordenación. La relacion «menor o igual», denotada $\leq$, es un buen orden en el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$:

todo subconjunto no vacío de $\mathbb{N}$ tiene primer elemento.

Principio de inducción El conjunto $\mathbb{N}$ es el menor subconjunto inductivo de $\mathbb{R}$:

si $S \subset \mathbb{N}$ y S es inductivo, entonces $S = \mathbb{N}$.

Ambos principios son equivalentes

Si aceptamos el primero, podemos probar como teorema al segundo; y si aceptamos el segundo, podemos probar como teorema al primero.

En base al principio de inducción enunciado precedentemente, se obtiene el siguiente método de demostración.

Proposición (**Método inductivo** o **Principio de inducción**). Sea n una variable que toma valores en $\mathbb{N}$ y sea $p(n)$ una **funcion proposicional** en la variable n.

Si probamos que $p(1)$ es verdadera y probamos que para todo natural k, $p(k)$ implica $p(k+1)$, entonces hemos probado que $p(n)$ es **verdadera** para todo natural n.

Ejemplo. Probar que la suma es una operacion cerrada en $\mathbb{N}$, es decir, la suma de dos números naturales es un número natural.

Sea $m \in \mathbb{N}$: Probaremos por inducción (sobre la variable n) que:

$m+n \in \mathbb{N}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}$

i) Si $n=1$, $m+n = m+1 \in \mathbb{N}$ puesto que $m \in \mathbb{N}$ y $\mathbb{N}$ es inductivo

ii) Sea $k \in \mathbb{N}$ cualquiera y suponemos que $m+k \in \mathbb{N}$, probaremos que

$m+(k+1) \in \mathbb{N}$

En efecto:

$m+(k+1) = (m+k)+1 \in \mathbb{N}$

Por la hpótesis $m+k \in \mathbb{N}$ y $\mathbb{N}$ es inductivo

Hemos probado que, para todo natural n, se verifica que $m+n \in \mathbb{N}$

Ejercicio: Probar que el producto es una operación cerrada en $\mathbb{N}$, es decir, probar que el producto de dos números naturales es un número natural.

Sea m un número natural cualquiera. Probaremos por inducción sobre n que $m \cdot n \in \mathbb{N}$ para todo natural n.

Ejemplo. Demostrar que $n \cdot (n+1)$ es par (múltiplo de 2) para todo número natural n. Observar que en este caso $p(n)$ es «$n \cdot (n+1)$ es par» $p(n) = 2k, \quad k \in \mathbb{N}$.

Sol.: i) $n = 1$ la proposición es verdadera $p(1) = 1(1+1) = 1 \cdot 2 = 2$ es par

ii) Sea $k \in \mathbb{N}$ supongamos que $p(k) = k(k+1)$ es par , es decir que $k(k+1) = 2m$, $m \in \mathbb{N}$

Probaremos que $(k+1)[(k+1)+1]$ es par

$(k+1)[(k+1)+1] = (k+1)[k+(1+1)] = (k+1)(k+2) = (k+1)k + (k+1) \cdot 2 \overset{hipótesis}{=} 2m + 2(k+1) = 2(m+k+1)$

Lo que hemos demostrado que $n \cdot (n+1)$ es par para todo n.

Proposición:

1) Si a y b son números naturales y $a < b$, entonces $b - a \in \mathbb{N}$.

2) Si $S \subset \mathbb{N}$ es no vacío y existe $n_0 \in \mathbb{N}$ cota superior de S, entonces S tiene último elemento.

Sucesión de números

La idea de **sucesión** involucra dos conceptos: **una cantidad de elementos** y **un orden entre ellos**. Observar que en las tres sucesiones siguientes, claramente distintas entre sí, los elementos utilizados son los mismos, lo que difere es el orden en que se presentan.

$2, 4, 6, 8, 10, 12, \ldots \; 4, 2, 6, 8, 12, 10, \ldots \; 2, 4, 2, 6, 2, 8, 2, 10, 2, 12, \ldots$

La manera formal de dar una sucesión de números reales es mediante una función de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{R}$, así, el elemento que es imagen de 1 aparece en el primer lugar de la sucesión; el elemento que es imagen de 2 aparece en el segundo lugar de la sucesión;...; el elemento que es imagen de n aparece en el lugar n-ésimo en la sucesión.

La primera de las sucesión presentadas anterioremente es la función:

$a\,\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad a(n) = 2 \cdot n$

La segunda es la función:

$$b\,\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad b(n) = \begin{cases} 2(n+1) & \text{si } n \text{ es impar} \\ 2(n-1) & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

Y la tercera es la función:

$c\,\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad c(n) = \begin{cases} 2 & \text{si } n \text{ es impar} \\ n+2 & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$

En general, dada una sucesión $a\,\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, es usual escribir s_n en lugar de $s(n)$.

El término n-ésimo, expresado en función de n, se llama **término general de la sucesión**. Hay distintas maneras de referirse a una sucesión, puede decirse:

Sea la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada por $a_n = 2n+1$; o

Sea la sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$ dada por $a_n = 2n+1$; o

Sea la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cuyo término $n-$ ésimo es $a_n = 2n+1$

En cualquier caso nos estamos refiriendo a la sucesión $3, 5, 7, 11, 13, \ldots$

Ejemplos

a) La sucesión $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada por $s_n = n(n+1)$ es la sucesión $2, 6, 12, 20, 30, \cdots$

b) La sucesión con término general $c_n = n^2 - 1$ es la sucesión: $0, 3, 8, 15, 24, \cdots$

Una sucesión se dice **definida por recurrencia** o **definida inductivamente** cuando está dada mediante el valor explícito de los primeros términos, y cada uno de los restantes términos se define suponiendo definidos los anteriores.

Ejemplo.

a) La sucesión $3, 5, 7, 9, 11, 13, \cdots$ puede definirse por recurrencia en la forma:

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_n = a_{n-1} + 2 \quad \text{para todo } n \geq 2 \end{cases}$$

b) La sucesión definida por recurrencia en la forma:

$$\begin{cases} b_1 = -1 \\ b_n = -2b_{n-1} \quad \text{para todo } n \geq 2 \end{cases}$$

es la sucesión $-1, 2, -4, 8, -16, \cdots$

c) La sucesión definida por recurrencia en la forma:

$$\begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = 4 \\ c_n = c_{n-1} \cdot c_{n-2} \quad \text{para todo } n \geq 3 \end{cases}$$

es la sucesión $1, 4, 4, 16, 64, \cdots$

Ejemplo. Dada la sucesión definida por recurrencia en la forma:

$$\begin{cases} s_1 = 1 \\ s_n = n + s_{n-1} \quad \text{para todo } n \geq 2 \end{cases}$$

Demostrar que $s_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ para $n \geq 2$.

Podemos demostrar lo pedido **por inducción** sobre n.

Si $n = 1$ la proposición es verdadera: $\dfrac{1(1+1)}{2} = \dfrac{2}{2} = 1 = s_1$

Si $k \in \mathbb{N}$, suponemos que $s_k = \dfrac{k\,(k+1)}{2}$ se cumple, y probaremos que

$s_{k+1} = \dfrac{(k+1)\,((k+1)+1)}{2}$

En efecto,

$s_{k+1} = (k+1) + s_{(k+1)-1}$ definición de la sucesión

$= (k+1) + s_k = (k+1) + \dfrac{k\,(k+1)}{2} = (k+1)\left[1 + \dfrac{k}{2}\right] = \dfrac{(k+1)\,(2+k)}{2}$

$s_{k+1} = \dfrac{(k+1)\,((k+1)+1)}{2}$

Se ha demostrado que: $s_n = \dfrac{n\,(n+1)}{2}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Veremos otras definiciones dadas por recurrencia

a) **Potencia $n-$ésima:** $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n \textbf{ veces}}$ $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$

Esta definida por en forma recursiva por

$$\begin{cases} a^1 = a \\ a^n = a \cdot a^{n-1} \quad \text{para todo } n \geq 2 \end{cases}$$

Factorial . Sea $n \in \mathbb{N}$cualquiera. Se define por recurrencia el factorial de n , denotado por $n!$, en la forma:

$$\begin{cases} 1! = 1 \\ n! = (n-1)! \cdot n \quad \text{para } n \geq 2 \end{cases}$$

Esta definición se interpreta como:

$1! = 1$, $2! = 1! \cdot 2 = 1 \cdot 2 = 2$, $3! = 2! \cdot 3 = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$, $4! = 3! \cdot 4 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot n$

Por extensión $0! = 1$

Sumatoria: Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales y $m \in \mathbb{N}$. La sumatoria de los m primeros términos de la sucesión, que se denota por $\displaystyle\sum_{n=1}^{m} a_n$ o $\sum_{n=1}^{m} a_n$ se lee «sumatoria desde $n = 1$ hasta m de a_n» , se define en forma recursiva en la forma:

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{n=1}^{1} a_n = a_1 \\ \displaystyle\sum_{n=1}^{m} a_n = \left(\sum_{n=1}^{m-1} a_n\right) + a_m \quad \text{para } m \geq 2 \end{cases}$$

Es fácil de interpretar esá suma:

$$\sum_{n=1}^{m} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_m$$

Por ejemplo,

$\displaystyle\sum_{n=1}^{m} 3\cdot n = 3\cdot 1 + 3\cdot 2 + 3\cdot 3 + \cdots + 3\cdot m$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{m} n^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + m^2$

Para $k, m \in \mathbb{N}$ con $k \leq m$ se define

$\displaystyle\sum_{n=k}^{m} a_n = \sum_{n=1}^{m} a_n - \sum_{n=1}^{k-1} a_n$

Productoria: Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales y $m \in \mathbb{N}$. El producto de los m primeros términos de la sucesión, que se denota por $\displaystyle\prod_{n=1}^{m} a_n$ se lee «productoria desde $n = 1$ hasta m de a_n» , se define en forma recursiva en la forma:

$$\begin{cases} \displaystyle\prod_{n=1}^{1} a_n = a_1 \\ \displaystyle\prod_{n=1}^{m} a_n = \left(\prod_{n=1}^{m-1} a_n\right)\cdot a_m \quad \text{para } m \geq 2 \end{cases}$$

Ejemplo: Demostrar que $\displaystyle\sum_{n=1}^{m} n = \frac{m(m+1)}{2}$ para todo natural m.

Esta fórmula permite calcular la suma de los primeros m naturales.

Para $m = 4$: $\displaystyle\sum_{n=1}^{4} n = \frac{4(4+1)}{2} = \frac{4\cdot 5}{2} = 10$

Para $m = 100$: $\displaystyle\sum_{n=1}^{100} n = \frac{100(100+1)}{2} = \frac{100\cdot 101}{2} = 550$

Para demostrar que la fórmual se cumple para todo $m \in \mathbb{N}$, se procede por inducción en m .

Si $m = 1$ se cumple: $\displaystyle\sum_{n=1}^{1} 1 = 1$ y $\displaystyle\frac{m(m+1)}{2} = \frac{1(1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$

Suponemos que se cumple para cualquier natural k , es decir, $\displaystyle\sum_{n=1}^{k} n = \frac{k(k+1)}{2}$

Veremos que $\displaystyle\sum_{n=1}^{k+1} n = \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}$

En efecto,

$\displaystyle\sum_{n=1}^{k+1} n = \left(\sum_{n=1}^{k} n\right) + (k+1)$ por definición de sumatoria

$\displaystyle= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = (k+1)\cdot\left(\frac{k}{2}+1\right) = (k+1)\left(\frac{k+2}{2}\right) = \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}$

Propiedades de la sumatoria

Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones cualesquiera de números reales, $c \in \mathbb{R}$ y $m \in \mathbb{N}$ se cumple que:

$\sum_{n=1}^{m} a_n + \sum_{n=1}^{m} b_n = \sum_{n=1}^{m} (a_n + b_n)$

$c \cdot \sum_{n=1}^{m} a_n = \sum_{n=1}^{m} (c \cdot a_n)$

Ejercicios. Demostrar que para todo natural n se cumple que:

a) $n < 2^n$

b) $\sum_{n=1}^{m} 2^n = 2 \cdot (2^m - 1)$

c) $3^n - 2^n > n^3$ para todo $n \geq 4$

Números Combinatorios y Binomio de Newton

Se llama $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Dados $n, m \in \mathbb{N}_0$ con $m \leq n$, se define el número combinatorio $n\,m$, denotado por $\begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix}$, en la forma:

$$\begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix} = \frac{n!}{(n-m)! \cdot m!}$$

Ejemplo: $\begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{8!}{(8-3)! \cdot 3!} = \frac{8!}{5! \cdot 3!} = \frac{5! \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{5! \cdot 3!} = 56$

$$\begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{n!}{(n-0)! \cdot 0!} = \frac{n!}{n!} = 1 \qquad \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{n!}{(n-1)! \cdot 1!} = n$$

$$\begin{pmatrix} n \\ n-1 \end{pmatrix} = \frac{n!}{(n-0)! \cdot 0!} = \frac{n!}{n!} = 1 \qquad \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} = \frac{n!}{(n-n)! \cdot n!} = \frac{n!}{n!} = 1$$

$$\begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ n-m \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n-1 \\ m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n-1 \\ m-1 \end{pmatrix}, n > m \geq 1$$

Triángulo de Pascal o Triángulo de Taraglia

La siguiente disposición de los números combinatorios es conocida como Triángulo de Pascal o Triángulo de Taraglia

$$\begin{matrix} & & & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} & & & \\ & & \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} & & \\ & \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} & \\ \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & 1 & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\ 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \end{array}$$

Veremos en la siguiente proposición que los números que aparecen en la fila $n-$ésima de este triángulo corresponden a los coeficientes que aparecen en el desarrollo de la potencia $n-$ésima de un binomio, es decir:

$$(a+b)^1 = a+b$$
$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$
$$(a+b)^4 = a^3+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$$

Proposición: (**Binomio de Newton**) Si $a,b \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$(a+n)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k$$

Término m-ésimo del Binomio.

Se determina el término m-ésimo haciendo: $k = m–1$ en el desarrollo del binomio.

$$T_m = \binom{n}{m-1} a^{n-(m-1)} \cdot b^{m-1} =$$

Ejemplo. Determina el quinto término en el desarrollo de $(x+2)^6$

Sol.: $m = 5 \Rightarrow k = m-1 = 4$

$$T_5 = \binom{6}{5-1} (x)^{6-(5-1)} \cdot (2)^{5-1} = \binom{6}{4} x^2 \cdot 2^4 = \frac{6!}{2! \cdot 4!} x^2 \cdot 16 = 240x^2$$

Término central

a) **Para n par**. Cuando n es **par**, se determina el término central haciendo $k = \dfrac{n}{2}$

b) b) **Para n impar**. Cuando n es **impar**, se determinan dos términos centrales haciendo $k = \dfrac{n-1}{2}$ y $k = \dfrac{n+1}{2}$

Ejemplo:

a) Determinar el término central en el desarrollo de $(p+q)^8$

$k = \dfrac{n}{2} = \dfrac{8}{2} = 4 \Rightarrow k = m-1 \Rightarrow m = 5$

$$T_5 = \left(\begin{array}{c} 8 \\ 4 \end{array} \right) p^{8-4} \cdot q^4 = 70p^4q^4$$

b) Hallar los términos centrales del desarrollo $(a-b)^7$

Progresiones aritméticas y geométricas.

Definición. Una **progresión aritmética** (P.A.) es una sucesión de números reales de la forma siguiente:

$(a_k)_{k=1,2,\cdots,n}$ o $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$

donde la diferencia entre cualquier **par de números consecutivos es siempre constante**, es decir,

$$a_k - a_{k-1} = d \text{ para todo } 1 \leq k \leq n$$

el término d se llama **diferencia** constante

En la notación anterior se tendrá que:

a_1: Es el primer término de la progresión.

d: Diferencia común.

n: Número de términos.

Según lo anterior, otra forma de escribir la progresión aritmética es:

$$a_1,\ a_1 + d,\ a_1 + 2d,\ a_1 + 3d,\ \cdots,\ a_1 + (n-1)\, d$$

En forma recursiva

$$\begin{cases} b_1 = a_1 \\ b_n = b_1 + (n-1)\, d \quad n \geq 2 \end{cases}$$

Ejemplo. La sucesión $3, 6, 9, 12, 15, 15, 18, 21, \cdots$ es una progresión aritmética en la cual el primer término es 3 y la diferencia común es 3.

$$a_1 = 3, \quad a_n = 3 + 3\,(n-1)\,,\ n \geq 2$$

Ejemplo. Halle el término de lugar 12 de la progresión aritmética 10, 7, 4, ... Solución. Se tiene que $a_1 = 10$, $d = -3$.

Se sabe que $a_n = a_1 + (n-1)\, d$. Por tanto, para $n = 12$, se tiene:

$$a_{12} = 10 + (12-1)\,(-3) = -23$$

Ejercicios.

a) Si el cuarto término de una progresión aritmética es 14 y el noveno es 34, encuentre el primer término. Sol: $a_1 = 2, d = 4$

b) Encuentre una progresión aritmética de 7 términos cuyo primer término es $1/2$ y cuyo último término es $13/2$.

Suma de términos de una progresión aritmética.

Dada una P.An. con n términos, de la forma: , su suma se expresa como:

$$S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + (a_1 + 3d) + \cdots + (a_1 + (n-1)\,d)$$

Se puede fácilmente demostrar que S_n viene dada por la siguiente fórmula compacta:

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)\,d)$$

Ejemplo. Halle la suma de los 12 primeros términos de la progresión aritmética $10, 7, 4, ...$.

Sol.: $a_1 = 10$, $n = 12$ y $d = a_2 - a_1 = 7 - 10 = -3$

$$S_n = \frac{12}{2}(2\,(10) + (12-1)\,(-3)) = 6\,(20 - 33) = -78$$

Progresiones geométricas.

Una **progresión geométrica** (P.G.) es una expresión de la forma $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ y en donde la **razón**, r de dos términos consecutivos cualquiera es **constante**, es decir:

$$r = \frac{a_{k+1}}{a_k}, \quad \Longleftrightarrow a_{k+1} = r \cdot a_k, \quad k = 1, 2, 3, \cdots, n\text{-}1\ .$$

Hay que notar, que como consecuencia de la definición, en toda progresión geométrica se cumple que

$$a_k = a_1 \cdot r^{k-1}, \quad k = 1, 2, \cdots, n$$

donde a_k es el término situado en el lugar $k-$ésimo

Ejemplo. La sucesión $4, 12, 36, 108, 324, 972$ es una progresión geométrica que consta de seis términos. Hallar r.

Sol.: $r = \dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{a_4}{a_3} \Longrightarrow r = \dfrac{12}{4} = \dfrac{108}{36} = 3$

Suma de términos de una progresión geométrica.

Dada una progresión geométrica con n términos de la forma

$$a_k = a_1 \cdot r^{k-1}, \quad k = 1, 2, \cdots, n$$

La suma de los n términos está dada por

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{a_1 \cdot (1 - r^n)}{1 - r}, \quad r \neq 1$$