Observación 2.5.

Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$, podemos considerar la transformación lineal $T_A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, definida por

$$T_a(x) = A \cdot x, \quad \text{donde } x \in \mathbb{R}^m \text{ considerado como vector columna}$$

Si C_m y C_n son bases canónicas de $\mathbb{R}^m$ y $\mathbb{R}^n$ respectivamente, entonces:

$$[T]_{C_m}^{C_n} = A$$

Esto es, la matriz asociada es la misma matriz A de definición.

Ejemplo 2.9.

Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ y sean $C_2 = \{(1,0),(0,1)\}$ $C_3 = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ bases de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, respectivamente. Entonces.

$$\begin{aligned}
T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Luego,

$$[T]_{C_2}^{C_3} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = A$$

Observación 2.6.

Sean $T : V \to W$ transformación lineal, con $dim(V) = n$ y $dim(W) = m$. Entonces si B_1 es base de V y B_2 es base de W, se tiene que:

$$[T]_{B_1}^{B_2} \in \mathcal{M}_{m\times n}$$

es decir, la matriz asociada es de dimensión $m \times n$.

Observación 2.7.

Matriz asiciada a las bases Canónicas Sea $T : V \to W$ aplicación lineal, y sean B_1 y B_2 bases canónicas de V y W respectivamente, entonces la matriz asociada $[T]_{B_1}^{B_2}$ se escribe simplemente como: $[T]$

Observación 2.8.

1.- La matriz $[T]_{B_1}^{B_2}$ queda completamente determinada conocidas la transformación lineal T y las bases B_1 y B_2 del dominio y codominio respectivamente.

2.- **Recíprocamente**, dada la matriz $M \in \mathcal{M}_{m\times n}$ y dos bases B_1 y B_2 de los espacios V y W respectivamente, queda completamente determinada una transformación lineal $T : V \to W$ tal que:

$$[T]_{B_1}^{B_2} = M$$

Ejemplo 2.10.

Hallar la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ sabiendo que
$[T]_{B_1}^{B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $B_1 = \{(1,0,1),(1,1,0),(0,1,0)\}$ y $B_2 = \{(1,2),(0,2)\}$

Solución: Queremos encontrar $T(x,y,z)$, para ello solo necesitamos $[T(x,y,z)]_{B_2}$.

$$(x,y,z) = \alpha(1,0,1) + \beta(1,1,0) + \gamma(0,1,0) \Rightarrow \begin{array}{rcl|} \alpha+\beta &=& x \\ \beta+\gamma &=& y \\ \alpha &=& z \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rcl} \beta &=& x-z \\ \gamma &=& y-x+z \\ \alpha &=& z \end{array}$$

$$[T(x,y,z)]_{B_2} = = [T]_{B_1}^{B_2}\,[(x,y,z)]_{B_1}$$

Luego,

$$[T(x,y,z)]_{B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z \\ x-z \\ y-x+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x-y-2z \\ -2x+2y+z \end{pmatrix}$$

Así, $T(x,y,z) = (3x-y-2z)(1,2) + (-2x+2y+z)(0,2) = (3x-y-2z, 2x+2y-2z)$

Tarea ← EJERCICIO : Sea $B_1 = \{p_0, p_1, p_2\}$ con $p_i(t) = (t+1)^i, \forall t \in \mathbb{R}, i = 0,1,2$ y $B_2 = \{(1,1,0),(1,2,3),(3,2,1)\}$ bases de $P_2[t]$ y $\mathbb{R}^3$ respectivamente.

Considere la aplición lineal $T : P_2[t] \to \mathbb{R}^3$ tal que :

$$[T]_{B_1}^{B_2} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Dado que $q_0 = q_0(t) = t^2 + t - 1, \forall t \in \mathbb{R}$, Hallar $T(q_0)$.

Teorema 2.5.

Sean dos transformaciones lineales $T : V \to W$ y $S : V \to W$. Sea B_1 base de V y B_2 base de W entonces:

$$[T + S]_{B_1}^{B_2} = [T]_{B_1}^{B_2} + [S]_{B_1}^{B_2}$$

Teorema 2.6.

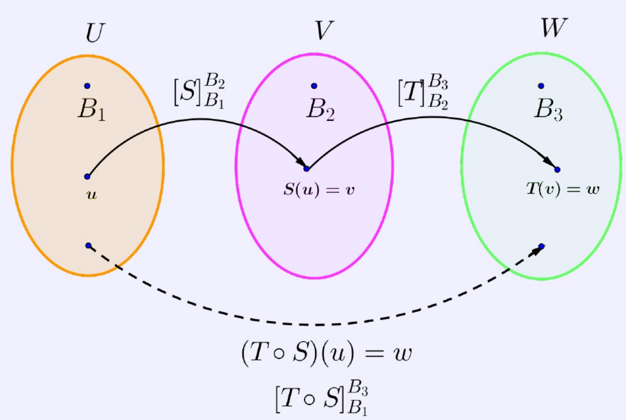
Sea $T : V \to W$ una transformación lineal y α un escalar de $\mathbb{K}$. Sea B_1 base de V y B_2 base de W. Entonces:

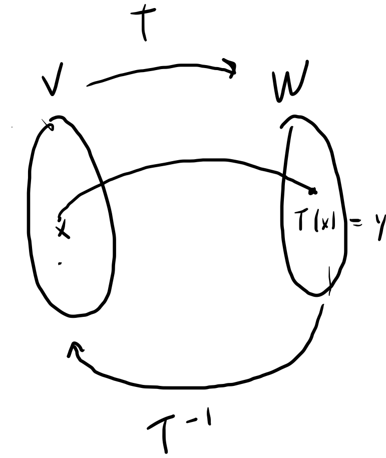
$$[\alpha T]_{B_1}^{B_2} = \alpha [T]_{B_1}^{B_2}$$

Teorema 2.7.

Consideremos los espacios vectoriales U, V y W con U, V y W de dimensión finita, y las transformadas lineales $S : U \to V$ y $T : V \to W$, sean B_1, B_2 y B_3 bases de U, V y W respectivamente. Entonces la matriz asociada a la composición $T \circ S$ es el producto de las matrices asociadas, es decir,

$$[T \circ S]_{B_1}^{B_3} = [T]_{B_2}^{B_3} \cdot [S]_{B_1}^{B_2}$$





Teorema 2.8.

Sea $T : V \to W$ un **isomorfismo**, $T^{-1} : W \to V$ su inversa, B_1, B_2 bases de V y W respectivamente. Como $T \circ T^{-1} = Id_W$ se cumple que

$$[T]_{B_1}^{B_2} \cdot [T^{-1}]_{B_2}^{B_1} = [Id]_{B_2}^{B_2} = I$$

También $T^{-1} \circ T = Id_V$ por lo que

$$[T^{-1}]_{B_2}^{B_1} \cdot [T]_{B_1}^{B_2} = [Id]_{B_1}^{B_1} = I$$

Deducimos que la matriz asociada a la transformación inversa es la inversa de la matriz asociada a la transformación, es decir,

$$[T^{-1}]_{B_2}^{B_1} = \left([T]_{B_1}^{B_2}\right)^{-1}$$

Tarea EJERCICIO : Se consideran las transformaciones

$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, donde $T(3,5) = (8,1)$ y $T(-2,1) = (-1,-5)$,

$S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, donde $S(1,0) = (1,1)$ y $S(0,1) = (0,1)$

y las bases $B_1 = \{(1,2),(1,1)\}$ y $B_2 = \{(1,-1),(1,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$

1. Halla $[T+S]_{B_1}^{B_2}$ y $[3T]_{B_1}^{B_2}$.

2. Hallar $[(S+T)^2]_{B_1}^{B_2}$

3. Hallar $[T^{-1}]_{B_1}^{B_2}$

2.3 Matriz Asociada de Algunas Transformaciones

Ejercicio:

Sea $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, la transformación lineal definida por

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \\ x_3 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

Encuentre la matriz asociada a T con respecto a las bases $B_1 = \{(2,0,0), (0,3,0), (0,0,1)\}$

$$B_2 = \{(1,0,0,0), (1,1,0,0), (1,1,1,0), (1,1,1,1)\}$$