UNIVERSIDAD DEL BÍO-BÍO
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Primer Semestre de 2023
Profesores: E. N./H. V./G. T.

LISTADO 3: Álgebra y Trigonometría Módulo I (220143)

1. Grafique las siguientes funciones. Indique el dominio y recorrido de cada función.

   a) $y = -3x + 4$
   b) $y = 17x - 23$
   c) $3x + 5y - 3 = 0$
   d) $T(t) = 18t - 23$
   e) $f(x) = 2^{-x}$
   f) $g(x) = -3^{x-1}$
   g) $h(x) = -\log_2(x + 3)$
   h) $s(x) = \ln(3 - x) + 1$
   i) $g(x) = -|x + 5|$
   j) $s(x) = |x| - 5$
   k) $l(x) = |4 - x| - 5$

2. Para las siguientes funciones cuadráticas, indique vértice, cortes con los ejes coordenados y grafique. A partir del gráfico indique dominio, recorrido e intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

   a) $f(x) = x^2 - 4x - 5$
   b) $f(x) = -x^2 + 4$
   c) $f(x) = 2x^2 - 3x - 5$
   d) $f(x) = -3x^2 + 2x + 3$
   e) $f(x) = x^2 + 2x + 2$
   f) $f(x) = -3x^2 + x - 1$

3. Sea

$$g(x) = \begin{cases} 4 - x^2, & x \leq 2 \\ 2, & 2 < x < 5 \\ |x - 5|, & x > 5 \end{cases}.$$

   a) Trace la gráfica de g.
   b) Determine dominio y recorrido de g.

4. Resuelva las siguientes ecuaciones exponenciales.

   a) $3^x = 27$
   b) $25^x = \frac{1}{5}$
   c) $3^{x^2-2} = 9$
   d) $2^{x^2-3} = \frac{1}{4}$
   e) $3^{x+1} = 81$
   f) $2^{x-1} + 2^x + 2^{x+1} = 7$
   g) $3^{x-1} + 3^x + 3^{x+1} = 117$
   h) $4^{x-2} - 2^{x+1} = -12$
   i) $2^{x-1} + 2^{x-2} + 2^{x-3} + 2^{x-4} = 960$
   j) $5^{2x} - 30 \cdot 5^x + 125 = 0$
   k) $8^{2x} - 3 \cdot 8^x + 2 = 0$
   l) $4^x - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$
   m) $3^{2(x+2)} - 4 \cdot 3^x - 77 = 0$
   n) $3^x = 4$
   ñ) $e^{4x-2} = 28$
   o) $3^x \cdot 4^{2x} = 5$
   p) $\frac{5^x - 5^{-x}}{2} = 3$

5. Resuelva las siguientes ecuaciones logarítmicas.

   a) $\log_3 x = 4$
   b) $\log_2 x = -1$
   c) $\log_5 x + \log_5 30 = 3$
   d) $\log x + \log 20 = 3$
   e) $2\log x = \log(4x + 12)$
   f) $\log x^3 = \log 6 + 2\log x$
   g) $2\log x - \log(x - 16) = 2$
   h) $\log(2x^2 + 3) = \log(x^2 + 5x - 3)$
   i) $2\log x^3 = \log 8 + 3\log x$
   j) $\frac{\log(16-x^2)}{\log(3x-4)} = 2$
   k) $\log(\frac{x}{2}) = 1 + \log(21 - x)$
   l) $\log_3(3x - 1) + \log_3(x + 1) = 2$
   m) $\log(x + 1) + \log(x - 2) = \log(2 - x)$

6. Dada la función $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -\log(8 - 2x) + 2$.

   a) Calcule el dominio y recorrido de f.
   b) Deterne si la función en biyectiva. En caso negativo, restrinja de modo que la inversa exista y luego defínala.

7. Encontrar el área y las dimensiones del mayor campo rectangular que puede cercar con 300 metros de malla.

8. Un nadador desciende al fondo del mar siguiendo la trayectoria que representa el gráfico de la función $y = 2x^2 + x - 6$. Tomando como unidad el metro, responde:

   a) ¿A qué distancia del lugar de entrada emerge?
   b) ¿Cuál es la profundidad máxima que alcanza?

9. Si lanzamos una piedra al aire la altura de la piedra recorre la siguiente función $f(t) = -5t^2 + 50t$ siendo t es el tiempo en segundos, y $f(t)$ la altura en metros. Calcula el segundo que alcanza la máxima altura y cuál es la máxima altura. ¿En qué segundo cae a tierra?. Representa la función.

10. El crecimiento demográfico de una población de bacterias, está modelado por una función exponencial de la forma: $P(t) = P_0 \cdot 2^t$, donde P_0 es la población inicial de bacterias cuando $t = 0$ y el tiempo es medido en horas. Responda:

    a) Calcule la población cuando han trascurrido 3 horas.
    b) Cuanto horas han trascurrido cuando la población es de 6.400.

11. En 1900 la población de una ciudad era de 50 000 habitantes. En 1950 había 100000 habitantes. Asumamos que el número de habitantes en función del tiempo se ajusta a la fórmula $P(t) = ce^{kt}$ donde c y k son constantes. ¿Cuál fue la población en 1984?. ¿En qué año la población es de 200000 habitantes?.

12. Si una cantidad de dinero inicial P se invierte a una tasa de interés anual r. La cantidad de dinero después de t años de inversión sujeto a un interés continuo está dada por la siguiente fórmula:
$$f(t) = Pe^{rt}.$$

    a) Encontrar la cantidad de dinero que se obtienen después de 3 años si se invierte \$3000 dólares a una tasa de interés del 7 % anual, sujeto a interés continuo.
    b) Cuánto tiempo tendrá que pasar para que una inversión de \$1000 doble su valor, si la tasa de interés continuo es de 8.5 % anual?

13. En 1966 la Comisión Internacional Contra la Captura de Ballenas protegió a la población mundial de ballena azul contra los barcos balleneros. En 1978 se pensaba que la población en el hemisferio sur era de 5000. Ahora sin depredadores y con abastecimiento abundante de alimentos, se espera que la población crezca exponencialmente de acuerdo con la fórmula

$$N(t) = 5000e^{0{,}047t},$$

donde t está dado en años.

a) Calcule la población en el año 2000

b) Siguiendo el modelo creado y asumiendo que 0 % de natalidad y 1978 como año cero, ¿cuándo se duplicará la cantidad de ballenas azules?

14. Una partícula radioactiva se desintegra de acuerdo a la fórmula

$$P(t) = Ce^{-7t},$$

donde C es la cantidad inicial de partícula en gramos, t es el tiempo en horas y $P(t)$ indica los gramos de residuos que van quedando de la partícula en el tiempo. Si en un hora quedan 10 gramos de partícula.

a) Encuentre la cantidad inicial C de gramos de la partícula.

b) ¿En cuanto tiempo quedaran 3 gramos de partícula?

15. **Ley de enfriamiento/calentamiento de Newton:** Suponga que un objeto o cuerpo se coloca dentro de un medio (aire, agua, etc.) y que se mantiene a una temperatura constante T_m llamada temperatura ambiente . Si la temperatura inicial T_0 del cuerpo u objeto, en el momento de colocarlo en el medio, es mayor que la temperatura ambiente T_m , el cuerpo se enfriará. Por otra parte, si T_0 es menor que T_m, se calentará. La ley de enfriamiento o calentamiento dice que la temperatura del objeto $T(t)$ está dada por:

$$T(t) - T_m = (T_0 - T_m)e^{-kt}$$

Ejercicio: Se saca un pastel del horno, cuya temperatura era de $350F$, y se lo coloca en una cocina donde la temperatura ambiente es de $75F$. Un minuto después, se mide la temperatura del pastel y resulta de $300F$. Basado en el modelo de enfriamiento y calentamiento de Newton,

a) ¿Cuál es la temperatura del pastel 6 minutos después?

b) ¿En cuánto tiempo la temperatura del pastel será de $80F$?

16. Un alumno enfermo de un virus de catarro regresa a un colegio aislado, de 2 000 estudiantes. La cantidad de estudiantes infectados con catarro, t días después del regreso del alumno enfermo, se calcula con la función logística:

$$P(t) = \frac{2000}{1 + 1999e^{-0.8905t}}$$

a) De acuerdo con este modelo, ¿cuántos estudiantes serán infectados por el catarro después de 5 días?

b) ¿Cuánto tiempo pasará para que la mitad de la población de estudiantes quede infectada?

c) ¿Cuántos alumnos indica el modelo que se infectarán después de un tiempo muy prolongado?

17. La siguiente fórmula, que es válida para los terremotos en el este de Estados Unidos, relaciona la magnitud R del sismo con el área que lo rodea A(en millas cuadradas), que es afectada por el temblor.

$$R = 2.3\log(A + 34000) - 7.5$$

a) Resuelva para evaluar A en términos de R.

b) Si el área afectada es de 30000 millas cuadradas. ¿De que magnitud es el temblor?

c) Si la magnitud es de 7.5. ¿Cuántas millas será afectada?

18. Una empresa estima que el costo (miles de dólares) de fábricar x unidades de un artículo por hora está dado por

$$C(x) = 5 + 10\log(2x+1).$$

   a) Calcula el costo de producir 5 unidades por hora.
   b) Determina la cantidad de artículos para un costo de \$15.

19. Ignacia Camila acaba de terminar un curso de Álgebra. El porcentaje del curso que ella recordará dentro de t meses puede calcularse como

$$R(t) = 85 - 41{,}9\log(t+1),$$

para $0 \leq t \leq 48$. Determine el porcentaje del curso que Camila recordará en 10 meses y luego en 25 meses. Determine en cuantos meses recordará el 10 %.

20. Calcule

   a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{6}(3i-5)$
   b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{8}(i-3)(2i+5)$
   c) $\displaystyle\sum_{i=1}^{5}(i-2)^2$
   d) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(i^3-4i^2)$
   e) $\displaystyle\sum_{i=6}^{n}(2i^3+i)$
   f) $\displaystyle\sum_{i=1}^{15}(i^3-1)$
   g) $\displaystyle\sum_{i=5}^{100}(i^2-1)$
   h) $\displaystyle\sum_{i=40}^{80}(-2i^2+3i+2)$
   i) $\displaystyle\sum_{i=800}^{1000}(i+i^3)$

21. Reescriba las siguientes expresiones y reduce al máximo.

   a) $\dfrac{(2n+2)!}{(2n)!}$
   b) $\dfrac{(3n+1)!}{(3n-1)!}$
   c) $\dfrac{(2n!)}{(n+1)!}$
   d) $\dfrac{[(2n+1)!]^2}{(2n-1)!(2n+1)!}$

22. Demuestre que

   a) $\dbinom{n}{k} = \dfrac{n}{k}\dbinom{n-1}{k-1}$
   b) $\dbinom{n}{1} + 2\dbinom{n}{2} = n^2$
   c) $n\dbinom{m}{n} = m\dbinom{m-1}{n-1}$

23. Encuentre m sabiendo que

$$\binom{m}{3} : \binom{m-1}{4} = \frac{8}{5}.$$

24. Encuentre m sabiendo que

$$\binom{m}{6} = \binom{m}{3}.$$

25. Desarrolle $(a-2b)^5$

26. Determine el noveno término en el desarrollo de $\left(2+\dfrac{x}{4}\right)^{15}$.

27. En el desarrollo
$$\left(1-\frac{x^2}{2}\right)^{14}.$$

a) Determine el quinto término.

b) Determine el(los) término(s) central(es).

28. Determine el sexto término en el desarrollo de $\left(\frac{1}{2}a-3\right)^{6}$.

29. Determine el término independiente de x en $\left(x^5+\frac{1}{x^4}\right)^{18}$.

30. Determine termino(s) central(es) de $\left(\frac{\sqrt{x}}{2y}-\frac{2\sqrt{y}}{x}\right)^{21}$

31. Determine el coeficiente de x^{18} (si existe), en el desarrollo de $\left(x^2+\frac{3}{x}\right)^{15}$.

32. Calcule el coeficiente numérico del término central de $\left(3s+\frac{1}{9}t\right)^{8}$.

33. Determine el coeficiente de x en $\left(9x-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{13}$

34. En el desarrollo de
$$\left(9x-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{14},$$
determine

a) El septimo término.

b) El término que contiene a x^7.

c) La suma de los coeficiente de los términos centrales.

35. Determine el decimocuarto término del desarrollo $\left(4x^2y-\frac{1}{2xy^2}\right)^{20}$.

36. Determine el término independiente de x en el desarrollo de $\left(x^3-\frac{1}{x^2}\right)^{30}$.

37. Determine el término que contiene $\frac{x^2}{y^2}$ en el desarrollo binomial $\left(\frac{x}{y}-\frac{y^2}{2x^2}\right)^{8}$.

38. En el desarrollo del binomio
$$\left(\frac{x}{\sqrt{y}}-\frac{y^2}{2x^2}\right)^{50}.$$

a) Determine el o los términos centrales.

b) Determine si existe el término independiente de x.

c) Determine si existe el término independiente de y.

39. Probar por inducción matemática las siguientes afirmaciones.

a) $2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n(n+1)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

b) $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

c) $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

d) $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \cdots + n^3 = \left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

e) $1 + 4 + 7 + \cdots + (3n-2) = \dfrac{n(3n-1)}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

f) $1 + 7 + 13 + \cdots + (6n-5) = n(3n-2)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

g) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n \cdot (n+1) = \dfrac{1}{3}n(n+1)(n+2)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

h) $\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \dfrac{1}{n \cdot (n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. C

i) $\dfrac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dfrac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dfrac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \cdots + \dfrac{1}{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)} = \dfrac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

j) $a + a^2 + a^3 + \cdots + a^n = a\dfrac{(1-a^n)}{1-a}$, con $a \in \mathbb{R} - \{1\}$.

k) $n^2 + n$ es divisible por 2, $\forall n \in \mathbb{N}$.

l) $n^3 + 2n$ es divisible por 3, $\forall n \in \mathbb{N}$.

m) $10^n - 1$ es divisible por 9, $\forall n \in \mathbb{N}$.

n) $8^n - 5^n$ es divisible por 3, $\forall n \in \mathbb{N}$.

ñ) $n^7 - n$ es múltiplo de 7, $\forall n \in \mathbb{N}$.

o) $n^5 - n$ es múltiplo de 5, $\forall n \in \mathbb{N}$.

p) $5^n - 4n - 1$ es múltiplo de 16, $\forall n \in \mathbb{N}$.

q) $4^{2n-1} + 3^{n+1}$ es divisible por 13, $\forall n \in \mathbb{N}$.

r) $x^{2n} - y^{2n}$ es divisible por $x + y$, $\forall n \in \mathbb{N}$.