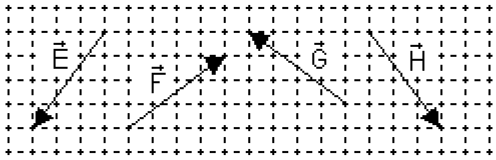
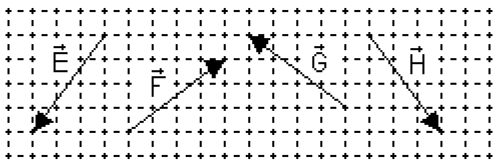


Descripción geométrica

Dados los vectores:
Dibújelos en su cuaderno y enseguida responda lo indicado:

1 Magnitud --- Dirección Determine:	
1a La magnitud de $\vec{E}$	**1b** La dirección de $\vec{H}$
2 Vector opuesto --- Vector inverso aditivo	
2a dibuje un opuesto a $\vec{F}$	**2b** dibuje el inverso aditivo de $\vec{G}$
3 Adición Determine:	
3a $\vec{E}+\vec{G}$ (polígono)	**3b** $\vec{G}+\vec{E}$ (paralelogramo)
3c $\vec{E}+(\vec{G}+\vec{H})$ (polígono)	**3d** $(\vec{E}+\vec{G})+\vec{H}$ (paralelogramo)
4 Sustracción --- Producto entre un escalar y un vector Determine:	
4a $\vec{F}-\vec{H}$	**4b** $1{,}5(\vec{E}+\vec{G})$
5 Cuociente entre un escalar y un vector --- Vector unitario Determine:	
5a $\vec{E}/(-2)$	**5b** $\hat{H}$



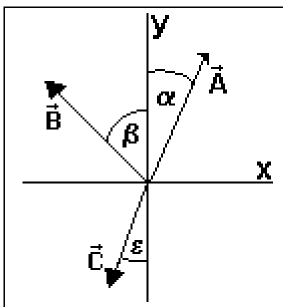
Descripción Analítica

Dados los vectores, escriba sus coordenadas cartesianas:

$\vec{E}=$	$\vec{F}=$
$\vec{G}=$	$\vec{H}=$

6 Magnitud --- Dirección Determine:	
6a La magnitud de $\vec{E}$	**6b** La dirección de $\vec{H}$
7 Vector opuesto --- Vector inverso aditivo Determine y dibuje:	
7a un opuesto a $\vec{F}$	**7b** el inverso aditivo de $\vec{G}$
8 Adición Determine y dibuje:	
8a $\vec{E}+\vec{G}$	**8b** $\vec{G}+\vec{E}$
8c $\vec{E}+(\vec{G}+\vec{H})$	**8d** $(\vec{E}+\vec{G})+\vec{H}$
9 Sustracción --- Producto entre un escalar y un vector Determine y dibuje:	
9a $\vec{F}-\vec{H}$	**9b** $1{,}5(\vec{E}+\vec{G})$
10 Cuociente entre un escalar y un vector --- Vector unitario Determine y dibuje:	
10a $\vec{E}/(-2)$	**10b** $\hat{H}$

Coordenadas Cartesianas de un Vector, conocidas su Magnitud y Dirección



$\|\vec{A}\|=18$; $\alpha=23^o$

$\|\vec{B}\|=20$; $\beta=45^o$

$\|\vec{C}\|=15$; $\varepsilon=20^o$

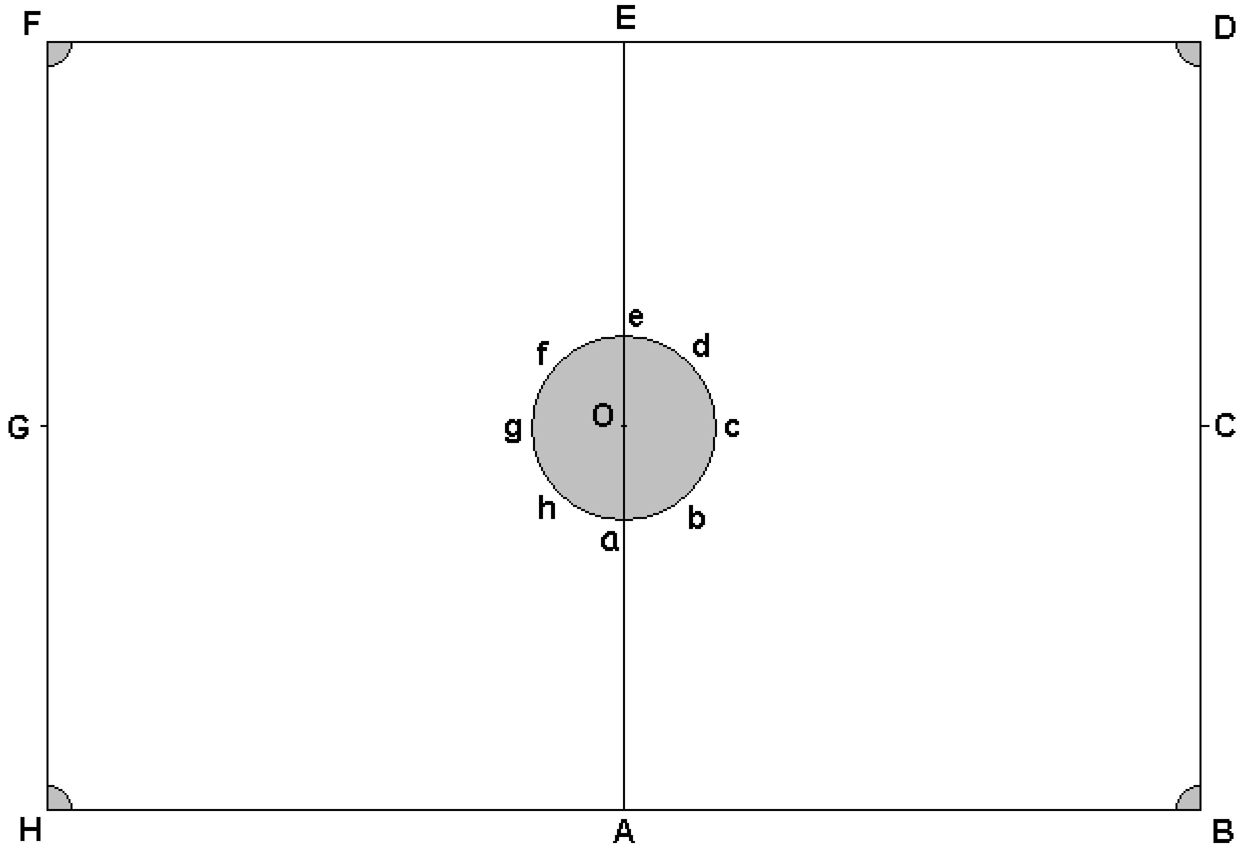
Para los vectores: $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ y $\vec{D}=6\hat{i}-8\hat{j}$ determine:

$\vec{A}=$	$\vec{B}=$
$\vec{C}=$	$\hat{D}=$

11 Magnitud y dirección de $\vec{D}$

12a $\|\vec{A}+\vec{B}\|$ **12b** $\|\vec{B}+\vec{C}+\vec{D}\|$

La figura muestra una cancha de fútbol que tiene 90[m] de largo y 50[m] de ancho. Además el círculo central tiene un perímetro de 54[m].
Por el borde de la cancha, corre un hombre con rapidez constante, partiendo del punto **A** en sentido antihorario, completando una vuelta en 56[s]. Simultáneamente un niño recorre el círculo central con rapidez constante, partiendo del punto **a** en sentido antihorario, completando una vuelta en 16[s].



Teniendo en cuenta las siguientes convenciones:
i) $\overrightarrow{OA} = \vec{A}$; $\overrightarrow{OB} = \vec{B}$; etc. $\overrightarrow{Oa} = \vec{a}$; $\overrightarrow{Ob} = \vec{b}$; etc.
ii) dirección de $\vec{A}$ = dirección de $\vec{a}$; dirección de $\vec{B}$ = dirección de $\vec{b}$; etc. Entonces determine:

I) las coordenadas cartesianas, la magnitud y la dirección de: $\vec{A}$; $\vec{B}$; $\vec{C}$; $\vec{D}$; $\vec{E}$; $\vec{F}$; $\vec{G}$ y $\vec{H}$.	**II)** las coordenadas cartesianas de: $\hat{A}$; $\hat{B}$; $\hat{C}$; $\hat{D}$; $\hat{E}$; $\hat{F}$; $\hat{G}$ y $\hat{H}$ (mediante dos formas distintas)
III) las coordenadas cartesianas de: $\vec{a}$; $\vec{b}$; $\vec{c}$; $\vec{d}$; $\vec{e}$; $\vec{f}$; $\vec{g}$ y $\vec{h}$.	**IV)** las coordenadas cartesianas de: $\hat{a}$; $\hat{b}$; $\hat{c}$; $\hat{d}$; $\hat{e}$; $\hat{f}$; $\hat{g}$ y $\hat{h}$.

V) la magnitud y la dirección de:

a) $\vec{A} + \vec{B}$
b) $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$
c) $\vec{C} - \vec{D}$
d) $\vec{D} + 2\vec{E} - 3\vec{F}$

En el Rally Dakar por el desierto de Chile, un piloto hace el siguiente recorrido: desde el punto de partida **A** se mueve en dirección N30ºO con una rapidez de 75[km/h] durante 20[min] hasta llegar a un punto **B** enseguida toma la dirección E20ºN hacia un punto **C** distante 30[km] con una rapidez de 60[km/h], inmediatamente toma la dirección N40ºE hacia el punto de llegada **D** distante a 40[km] empleando 30[min]. Entonces:	**A** · **a)** haga un dibujo de la situación descrita

b) determine la rapidez media y la velocidad media del piloto para los tramos:
1) AB; 2) BC; 3) CD

b1) tramo AB

b2) tramo BC

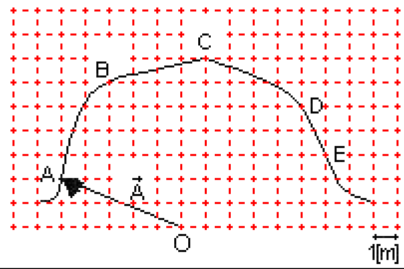
b3) tramo CD

c) determine la rapidez media y la velocidad media del piloto para toda la carrera.

1 La figura muestra la trayectoria de una partícula y sus ubicaciones en los tiempos indicados.
Entonces determine y dibuje:
A. las posiciones para los instantes: t=4[s]; t=11[s]

B. los desplazamientos para los intervalos:
a) $0 \le t \le 4[s]$
b) $4 \le t \le 11[s]$
c) $0 \le t \le 11[s]$

A: t=0; B: t=2; C: t=4; D: t=7; E: t=11[s]

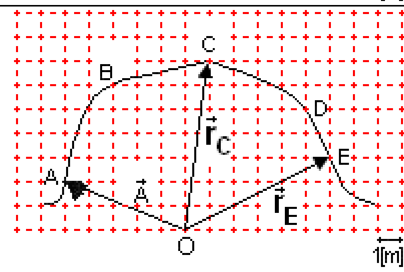


A

$$\vec{r}(4) = \vec{r}_C = \hat{i} + 7\hat{j}\,[m]$$

$$\vec{r}(11) = \vec{r}_E = 6\hat{i} + 3\hat{j}\,[m]$$

$$\vec{r}(0) = \vec{A} = -5\hat{i} + 2\hat{j}\,[m]$$

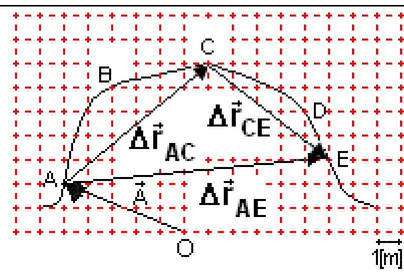


B

a) $\Delta\vec{r}_{AC} = \vec{r}_C - \vec{A} = \hat{i} + 7\hat{j} - (-5\hat{i} + 2\hat{j}) = \hat{i} + 7\hat{j} + 5\hat{i} - 2\hat{j} = 6\hat{i} + 5\hat{j}\,[m]$

b) $\Delta\vec{r}_{CE} = \vec{r}_E - \vec{r}_C = 6\hat{i} + 3\hat{j} - (\hat{i} + 7\hat{j}) = 6\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{i} - 7\hat{j} = 5\hat{i} - 4\hat{j}\ [m]$

c) $\Delta\vec{r}_{AE} = \vec{r}_E - \vec{A} = 6\hat{i} + 3\hat{j} - (-5\hat{i} + 2\hat{j}) = 11\hat{i} + \hat{j}\ [m]$



2 Para la partícula determine su velocidad media para los intervalos de tiempo:
a) $0 \le t \le 4[s]$ b) $4 \le t \le 11[s]$ c) $0 \le t \le 11[s]$

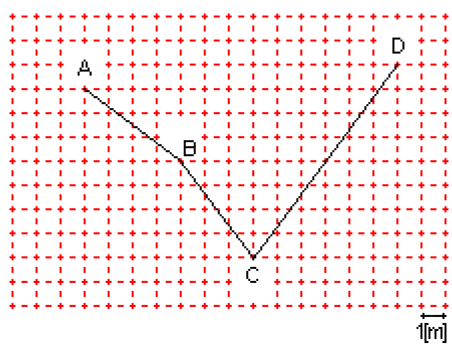
$$\bar{\vec{v}}_{AC} = \frac{\Delta\vec{r}_{AC}}{\Delta t_{AC}} = \frac{6\hat{i} + 5\hat{j}[m]}{4[s]} = 1{,}5\hat{i} + 1{,}25\hat{j}\,[m/s]; \qquad \bar{\vec{v}}_{CE} = \frac{\Delta\vec{r}_{CE}}{\Delta t_{CE}} = \frac{5\hat{i} - 4\hat{j}[m]}{7[s]} = \frac{5}{7}\hat{i} - \frac{4}{7}\hat{j}\,[m/s];$$

$$\bar{\vec{v}}_{AE} = \frac{\Delta\vec{r}_{AE}}{\Delta t_{AE}} = \frac{11\hat{i} + \hat{j}[m]}{11[s]} = \hat{i} + \frac{1}{11}\hat{j}\,[m/s];$$

3 La figura muestra la trayectoria de una partícula y sus ubicaciones en los tiempos indicados. Entonces determine:
A. la distancia recorrida en los intervalos:
a) $3 \le t \le 5[s]$
b) $5 \le t \le 14[s]$
c) $3 \le t \le 14[s]$

B. la rapidez media para los intervalos:
a) $3 \le t \le 5[s]$
b) $5 \le t \le 14[s]$
c) $3 \le t \le 14[s]$

A: t=3; B: t=5; C: t=9; D: t=14[s]

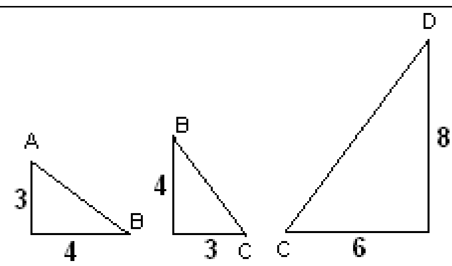


A a) $\Delta S_{AB} = 5[m]$;

b) $\Delta S_{BCD} = \Delta S_{BC} + \Delta S_{CD} = 5[m] + 10[m] = 15[m]$

c) $\Delta S_{ABCD} = \Delta S_{AB} + \Delta S_{BCD} = 5[m] + 15[m] = 20[m]$

B a) $V_{M_{AB}} = \frac{\Delta S_{AB}}{\Delta t_{AB}} = \frac{5[m]}{2[s]} = 2{,}5[m/s]$



b) $V_{M_{BCD}} = \frac{\Delta S_{BCD}}{\Delta t_{BCD}} = \frac{15[m]}{9[s]} = 1{,}67[m/s]$; c) $V_{M_{ABCD}} = \frac{\Delta S_{ABCD}}{\Delta t_{ABCD}} = \frac{20[m]}{11[s]} = 1{,}82[m/s]$

4 Una partícula se mueve de una manera tal que su posición para todo instante de tiempo queda definida por la ecuación: $\vec{r}(t) = (10 + 2t + t^2)\hat{i}$ [m]. Entonces determine:

a) La velocidad media para $2 \le t \le 6$[s]. b) La aceleración media para $2 \le t \le 6$[s].
c) El vector aceleración.

a) $\bar{\vec{v}} = \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \dfrac{\vec{r}(6) - \vec{r}(2)}{6-2}$. $\vec{r}(2) = (10 + 2\cdot 2 + 2^2)\hat{i} = 18\hat{i}$ [m]; $\vec{r}(6) = (10 + 2\cdot 6 + 6^2)\hat{i} = 58\hat{i}$ [m] .

$$\bar{\vec{v}} = \frac{(58\hat{i} - 18\hat{i})[m]}{(6-2)[s]} = \frac{40\hat{i}[m]}{4[s]} = 10\hat{i} \text{ [m/s]}$$

b) $\bar{\vec{a}} = \dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \dfrac{\vec{v}(6) - \vec{v}(2)}{6-2}$. $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$. $\vec{v}(t) = \dfrac{d(10 + 2t + t^2)\hat{i}}{dt} = (2 + 2t)\hat{i}$ [m/s].

$\vec{v}(2) = (2 + 2\cdot 2)\hat{i} = 6\hat{i}$ [m/s] ; $\vec{v}(6) = (2 + 2\cdot 6)\hat{i} = 14\hat{i}$ [m/s] .

$$\bar{\vec{a}} = \frac{(14\hat{i} - 6\hat{i})[m/s]}{(6-2)[s]} = \frac{8\hat{i}[m/s]}{4[s]} = 2\hat{i} \text{ [m/s}^2\text{]}$$

c) $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$. $\vec{a} = \dfrac{d(2 + 2t)\hat{i}}{dt} = 2\hat{i}$ [m/s²]

5 La velocidad de una partícula para todo instante de tiempo es: $\vec{v}(t) = (2 + 2t)\,\hat{i} + 3t^2\,\hat{j}$ [m/s] además se sabe que $\vec{r}(1) = 3\,\hat{i} + 3\hat{j}$ [m]. Entonces determine:

a) La velocidad media para $4 \le t \le 8$[s]. b) El vector aceleración.

a) $\bar{\vec{v}} = \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \dfrac{\vec{r}(8) - \vec{r}(4)}{8-4}$. $\vec{r}(t) = \int \vec{v}dt$. $\vec{r}(t) = \int [(2 + 2t)\,\hat{i} + 3t^2\hat{j}]dt = (2t + t^2)\,\hat{i} + t^3\hat{j} + \vec{C}$.

$\vec{r}(1) = (2\cdot 1 + 1^2)\,\hat{i} + 1^3\,\hat{j} + \vec{C} = 3\,\hat{i} + \hat{j} + \vec{C} = 3\,\hat{i} + 3\hat{j} \rightarrow \vec{C} = 2\hat{j} \rightarrow \vec{r}(t) = (2t + t^2)\,\hat{i} + (2 + t^3)\hat{j}$ [m].

$\vec{r}(4) = (2\cdot 4 + 4^2)\,\hat{i} + (2 + 4^3)\hat{j} = 24\,\hat{i} + 66\hat{j}$ [m]. $\vec{r}(8) = (2\cdot 8 + 8^2)\,\hat{i} + (2 + 8^3)\hat{j} = 80\,\hat{i} + 514\hat{j}$ [m].

$$\bar{\vec{v}} = \frac{80\,\hat{i} + 514\hat{j} - (24\,\hat{i} + 66\hat{j})\,[m]}{8-4\,[s]} = \frac{56\,\hat{i} + 448\hat{j}\,[m]}{4\,[s]} = 14\,\hat{i} + 112\hat{j} \text{ [m/s]}.$$

b)

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}. \quad \vec{a} = \frac{d[(2 + 2t)\,\hat{i} + 3t^2\hat{j}]}{dt} = 2\,\hat{i} + 6t\hat{j} \text{ [m/s}^2\text{]}$$

6 Un móvil tiene una aceleración $\vec{a}(t) = 6t\,\hat{j}$ [m/s²]; su velocidad en el instante t=1[s] es $5\,\hat{j}$ [m/s] y su posición en el instante t=2[s] es $14\,\hat{j}$ [m]. Entonces determine:

a) El vector aceleración media cuando: $3 \le t \le 5$[s].
b) La velocidad media para $3 \le t \le 5$[s].

a) $\bar{\vec{a}} = \dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$. $\vec{v}(t) = \int \vec{a}dt$. $\vec{v}(t) = \int 6t\hat{j}dt = 3t^2\hat{j} + \vec{C}$. $\vec{v}(1) = 3\hat{j} + \vec{C} = 5\,\hat{j} \rightarrow \vec{C} = 2\,\hat{j}$

$$\rightarrow \vec{v}(t) = (3t^2 + 2)\hat{j} \text{ [m/s]}$$

$\bar{\vec{a}} = \dfrac{\vec{v}(5) - \vec{v}(3)}{5-3}$. $\vec{v}(3) = (3\cdot 3^2 + 2)\hat{j} = 29\hat{j}$ [m/s]. $\vec{v}(5) = (3\cdot 5^2 + 2)\hat{j} = 77\hat{j}$ [m/s]

$$\bar{\vec{a}} = \frac{(77\hat{j} - 29\hat{j})[m/s]}{(5-3)[s]} = \frac{48\hat{j}[m/s]}{2[s]} = 24\hat{j} \text{ [m/s}^2\text{]}$$

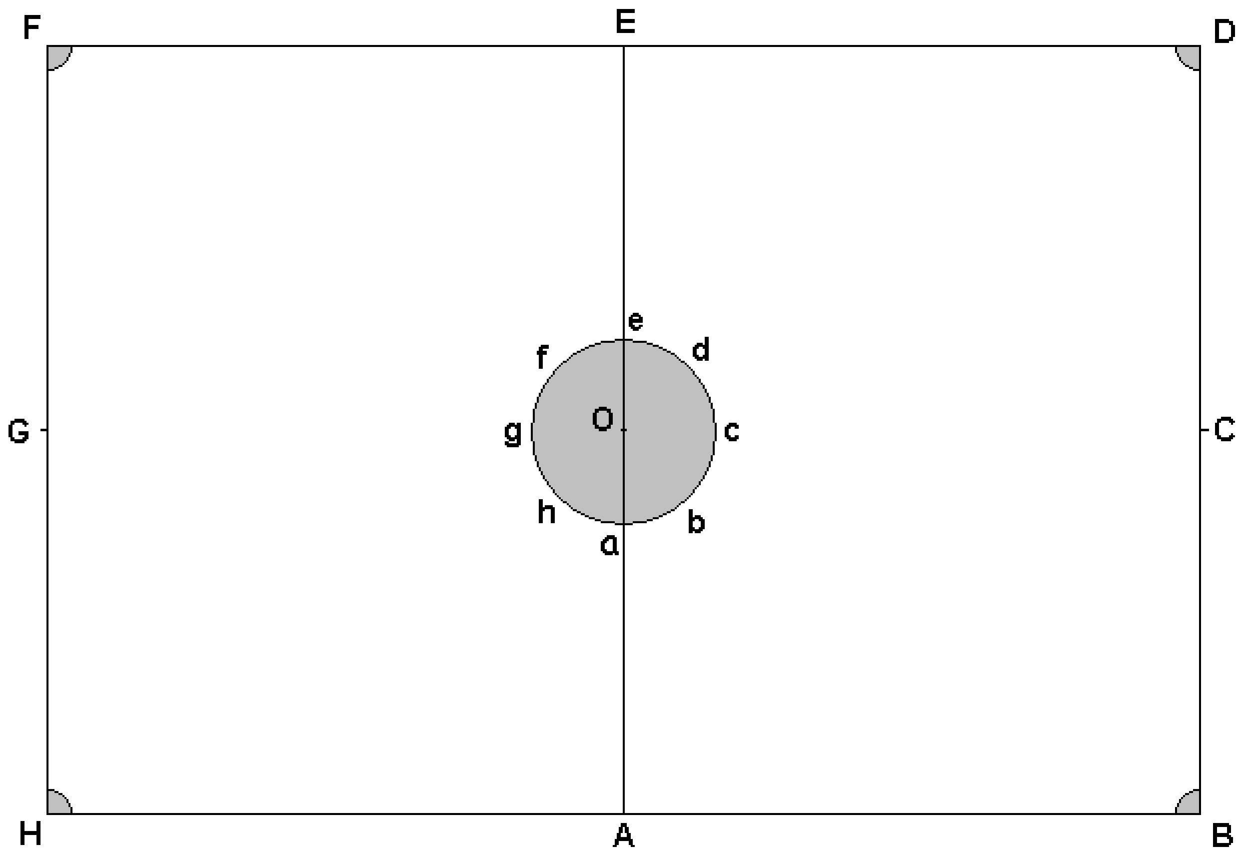
b) $\bar{\vec{v}} = \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \dfrac{\vec{r}(5) - \vec{r}(3)}{5-3}$. $\vec{r}(t) = \int \vec{v}dt$. $\vec{r}(t) = \int (3t^2 + 2)\hat{j}\,dt = (t^3 + 2t)\hat{j} + \vec{D}$.

$\vec{r}(2) = (2^3 + 2\cdot 2)\hat{j} + \vec{D} = 12\hat{j} + \vec{D} = 14\,\hat{j} \rightarrow \vec{D} = 2\,\hat{j} \rightarrow \vec{r}(t) = (t^3 + 2t + 2)\hat{j}$ [m].

$\vec{r}(3) = (3^3 + 2\cdot 3 + 2)\hat{j} = 35\hat{j}$ [m]; $\vec{r}(5) = (5^3 + 2\cdot 5 + 2)\hat{j} = 137\hat{j}$ [m] .

$$\bar{\vec{v}} = \frac{137\hat{j} - 35\hat{j}\,[m]}{5-3\,[s]} = \frac{102\hat{j}\,[m]}{2\,[s]} = 51\hat{j} \text{ [m/s]}.$$

La figura muestra una cancha de fútbol que tiene 90[m] de largo y 50[m] de ancho. Además el círculo central tiene un perímetro de 54[m].
Por el borde de la cancha, corre un hombre con rapidez constante, partiendo del punto **A** en sentido antihorario, completando una vuelta en 56[s]. Simultáneamente un niño recorre el círculo central con rapidez constante, partiendo del punto **a** en sentido antihorario, completando una vuelta en 16[s].



Entonces determine en los intervalos de tiempo:

Para el hombre	Para el niño
$0 \le t \le 14$[s] a1) la velocidad media b1) la rapidez media	$0 \le t \le 4$[s] a2) la velocidad media b2) la rapidez media
$14 \le t \le 28$[s] a3) la velocidad media b3) la rapidez media	$4 \le t \le 8$[s] a4) la velocidad media b4) la rapidez media
$33 \le t \le 47$[s] a5) la velocidad media b5) la rapidez media	$10 \le t \le 16$[s] a6) la velocidad media b6) la rapidez media

La figura muestra una moto que viaja con una aceleración constante de 0,5[m/s²] y en el instante t=2[s] lleva una rapidez de 15[m/s] y se encuentra a 44[m] del semáforo y a 476[m] de la bicicleta que se mueve con una rapidez constante de 18[km/h]. Entonces determine:

i) Ecuaciones de la moto

ii) Ecuaciones de la bicicleta

a) ¿En dónde la moto alcanza a la bicicleta?

b) ¿Qué velocidad lleva la moto cuando alcanza a la bicicleta?

desde el instante t=0 hasta que la moto alcanza a la bicicleta

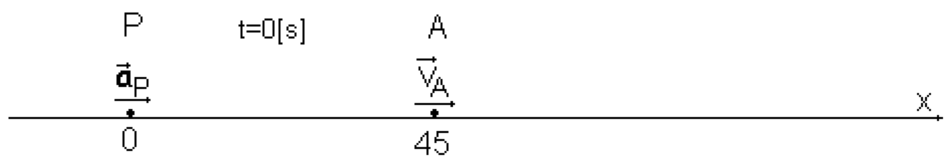
c) ¿Qué distancia recorrió cada móvil?

d) ¿Cuánto fue el cambio de velocidad de la moto?

e) Construya los gráficos: **A)** **X** v/s **t** (moto y bicicleta, en un mismo gráfico)
B) **V** v/s **t** (moto y bicicleta, en un mismo gráfico)

Serway ... 2.8	**Ejemplo 2.8 ¡Cuidado con el límite de rapidez!** Un auto que viaja a una rapidez constante de 45.0 m/s pasa donde está una policía motociclista tras un anuncio. Un segundo después que el auto pasa por el anuncio, la motociclista arranca desde el anuncio para alcanzarlo, acelerando a un ritmo constante de 3.00 m/s². ¿Cuánto tarda la motociclista en alcanzar al auto?

a) efectúe las correcciones necesarias al enunciado según lo enseñado en el curso



Policía	Auto
Condiciones iniciales: $\vec{a}_p = 3\hat{i}$ [m/s²]; $\vec{v}_p(0) = \vec{0}$; $\vec{x}_p(0) = \vec{0}$	Condiciones iniciales: $\vec{v}_A = 45\hat{i}$ [m/s]; $\vec{x}_A(0) = 45\hat{i}$ [m]
Velocidad: $\vec{v}_p(t) = \int \vec{a}_p dt = \int 3\hat{i}dt = 3t\hat{i} + \vec{c}$ $\vec{v}_p(0) = \vec{c} = \vec{0} \rightarrow \vec{v}_p(t) = 3t\hat{i}$ [m/s]	Posición: $\vec{x}_A(t) = \int \vec{v}_A dt = \int 45\hat{i}dt = 45t\hat{i} + \vec{E}$ $\vec{x}_A(0) = \vec{E} = 45\hat{i} \rightarrow \vec{x}_A(t) = (45t + 45)\hat{i}$ [m]
Posición: $\vec{x}_p(t) = \int \vec{v}_p dt = \int 3t\hat{i}dt = \frac{3}{2}t^2\hat{i} + \vec{D}$ $\vec{x}_p(0) = \vec{D} = \vec{0} \rightarrow \vec{x}_p(t) = 1{,}5t^2\hat{i}$ [m]	

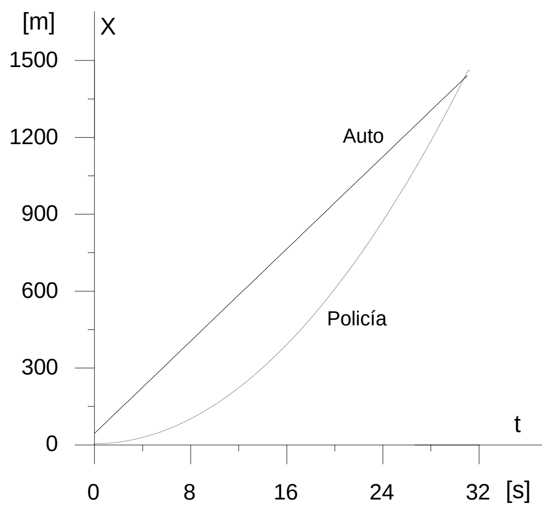
Policía alcanza al auto $\rightarrow \vec{x}_p(t) = \vec{x}_A(t) \rightarrow 1{,}5t^2\hat{i} = (45t + 45)\hat{i}$

$1{,}5t^2 = 45t + 45 \rightarrow 1{,}5t^2 - 45t - 45 = 0$

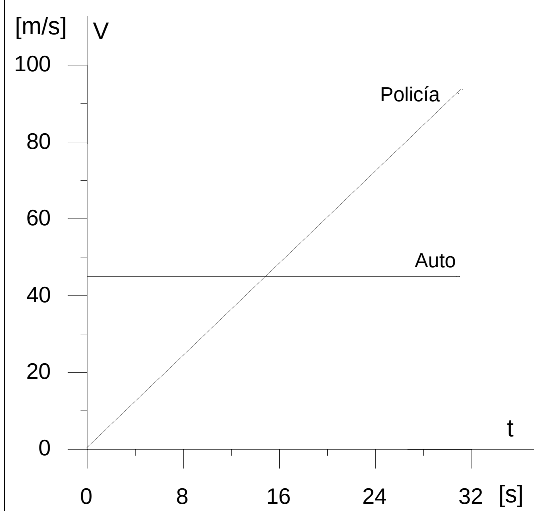
$$t = \frac{45 \pm \sqrt{45^2 + 4 \cdot 1{,}5 \cdot 45}}{2 \cdot 1{,}5} = \frac{45 \pm \sqrt{2295}}{3} = \frac{45 \pm 47{,}9}{3} \rightarrow t = \frac{45 + 47{,}9}{3} = 92{,}9/3 \approx 31[s]$$

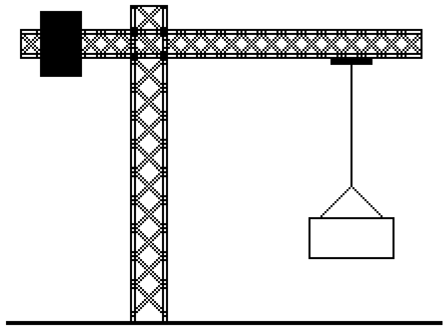
b) Construya los gráficos: **A) X** v/s **t** (policía y auto, en un mismo dibujo)
B) V v/s **t** (policía y auto, en un mismo dibujo)

$X_P(t) = 1{,}5t^2$[m]; $X_A(t) = 45t + 45$[m]



$V_P(t) = 3t$[m/s]; $V_A(t) = 45$[m/s]





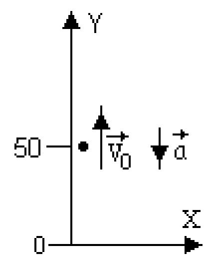
La figura muestra una grúa que levanta una caja a partir del reposo desde una altura de dos metros con una aceleración constante de 2[m/s^2].
Lamentablemente a los cuatro segundos de subir la caja, se rompe el cable, entonces determine:
a) a qué altura del suelo la caja se desprende del cable
b) que velocidad lleva la caja en aquel instante.
c) la altura máxima que alcanza la caja.
d) la velocidad con que la caja llega al suelo.

a) a qué altura del suelo la caja se desprende del cable

b) que velocidad lleva la caja en aquel instante.

c) la altura máxima que alcanza la caja.

d) la velocidad con que la caja llega al suelo.

Serway 2.12	**Ejemplo 2.12 No es mal tiro para un novato** Una piedra lanzada desde lo alto de un edificio recibe una velocidad inicial de 20.0 m/s directamente hacia arriba. El edificio mide 50.0 m de altura , y en su descenso la piedra libra apenas el borde del techo, como se ve en la figura 2.14. Tomando t_A=0 como el tiempo en que la piedra sale de la mano del lanzador en la posición **A**, determine (A) el tiempo en que la piedra alcanza su máxima altura, (B) la altura máxima, (C) el tiempo en el que la piedra regresa a la altura de la cual fue lanzada, (D) la velocidad de la piedra en este instante, y (E) la velocidad y posición de la piedra en t=5.00 s.	

a) efectúe las correcciones necesarias al enunciado según lo enseñado en el curso

Condiciones iniciales: $\vec{a} = -9{,}8\hat{j}$ [m/s²]; $\vec{v}(0) = 20\hat{j}$ [m/s] ; $\vec{y}(0) = 50\hat{j}$ [m]

Velocidad de la piedra

$\vec{v}(t) = \int \vec{a}dt = \int -9{,}8\hat{j}dt = -9{,}8t\hat{j} + \vec{c}$. $\quad \vec{v}(0) = \vec{c} = 20\hat{j} \quad \rightarrow \quad \vec{v}(t) = (20 - 9{,}8t)\hat{j}$ [m/s]

Posición de la piedra

$\vec{y}(t) = \int \vec{v}dt = \int (20 - 9{,}8t)\hat{j}dt = (20t - 4{,}9t^2)\hat{j} + \vec{D}$. $\quad \vec{y}(0) = \vec{D} = 50\hat{j}$

$\vec{y}(t) = (50 + 20t - 4{,}9t^2)\hat{j}$ [m]

A) instante de altura máxima (cuando la velocidad es cero):

$h_{max} \rightarrow \vec{v}(t) = \vec{0} \rightarrow$ v = 0 $\rightarrow$ 20 - 9,8t = 0 $\rightarrow$ t=20/9,8 = 2,04[s]

B) h_{max} = y(2,04)=50+20·2,04 – 4,9 · 2,04² =50+40,8- 20,39 = 70,4[m]

desde el suelo: h_{max} = 70,4[m]
desde la azotea: h_{max} = 20,4[m]

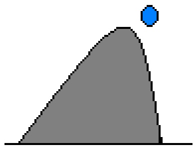
C) y(t)=50 $\rightarrow$ 50=50+20t-4,9t² $\rightarrow$ t(20-4,9t)= 0 $\rightarrow$ t = 20/4,9 = 4,08[s]

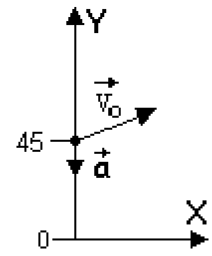
D) $\vec{v}(4{,}08) = (20 - 9{,}8 \cdot 4{,}08)\hat{j} = -19{,}98\hat{j} \approx -20\hat{j}$ [m/s]

E) $\vec{v}(5) = (20 - 9{,}8 \cdot 5)\hat{j} = -29\hat{j}$ [m/s]

$\vec{y}(5) = (50 + 20 \cdot 5 - 4{,}9 \cdot 5^2)\hat{j} = 27{,}5\hat{j}$ [m] $\rightarrow$ 27,5[m] desde el suelo.

$\vec{y}(5) - \vec{y}(0) = 27{,}5\hat{j} - 50\hat{j} = -22{,}5\hat{j} \rightarrow$ 22,5[m] bajo la azotea.

	Desde una altura de 46,8[m] del suelo, en la Luna, se dispara un proyectil con una rapidez de 50[m/s] en una dirección de 36,9º. Suponiendo que la aceleración de gravedad es de 1,6[m/s^2], determine para el proyectil:
a) Las condiciones iniciales de la posición, velocidad y aceleración	
b) La ecuación de la Velocidad para todo tiempo.	
c) La ecuación de la Posición para todo tiempo.	
d) La posición en la altura máxima.	
e) La velocidad cuando está a la mitad de la altura máxima.	
f) La velocidad con que impacta el suelo.	
g) ¿En qué intervalo de tiempo el movimiento es acelerado?	
h) ¿En qué intervalo de tiempo el movimiento es retardado?	

Serway 4.5	**Ejemplo 4.5 ¡Esto es un brazo de verdad!** Desde lo alto de un edificio se lanza una piedra hacia arriba y a un ángulo de 30º con respecto a la horizontal, con una rapidez inicial de 20.0 m/s, como se ve en la figura 4.14. Si la altura del edificio es de 45.0 m, (A) ¿Cuánto tiempo tarda la piedra en llegar al suelo? (B) ¿Cuál es la velocidad de la piedra inmediatamente antes que toque el suelo?	

a) efectúe las correcciones necesarias al enunciado según lo enseñado en el curso

Condiciones iniciales:

$\vec{r}(0)=45\hat{j}$ [m]; v(0)=20[m/s]; θ=30º; $\vec{a}=-9{,}8\hat{j}$ [m/s^2];

$$\vec{v}(0)=20\cdot\cos(30)\hat{i}+20\cdot\operatorname{sen}(30)\hat{j}=17{,}3\hat{i}+10\hat{j}\text{ [m/s]}$$

Velocidad:

$\vec{v}(t)=\int\vec{a}dt=\int-9{,}8\hat{j}dt=-9{,}8t\hat{j}+\vec{c}$. $\vec{v}(0)=\vec{c}=17{,}3\hat{i}+10\hat{j}\rightarrow\ \vec{v}(t)=17{,}3\hat{i}+(10-9{,}8t)\hat{j}$ [m/s]

Posición:

$\vec{r}(t)=\int\vec{v}dt=\int[17{,}3\hat{i}+(10-9{,}8t)\hat{j}]dt=17{,}3t\hat{i}+(10t-4{,}9t^2)\hat{j}+\vec{D}$. $\vec{r}(0)=\vec{D}=45\hat{j}$

$\rightarrow\ \vec{r}(t)=17{,}3t\hat{i}+(45+10t-4{,}9t^2)\hat{j}$ [m]

(A) llega al suelo : Y = 0 → 45 + 10t – 4,9t^2 = 0 → 4,9t^2 - 10t – 45 = 0

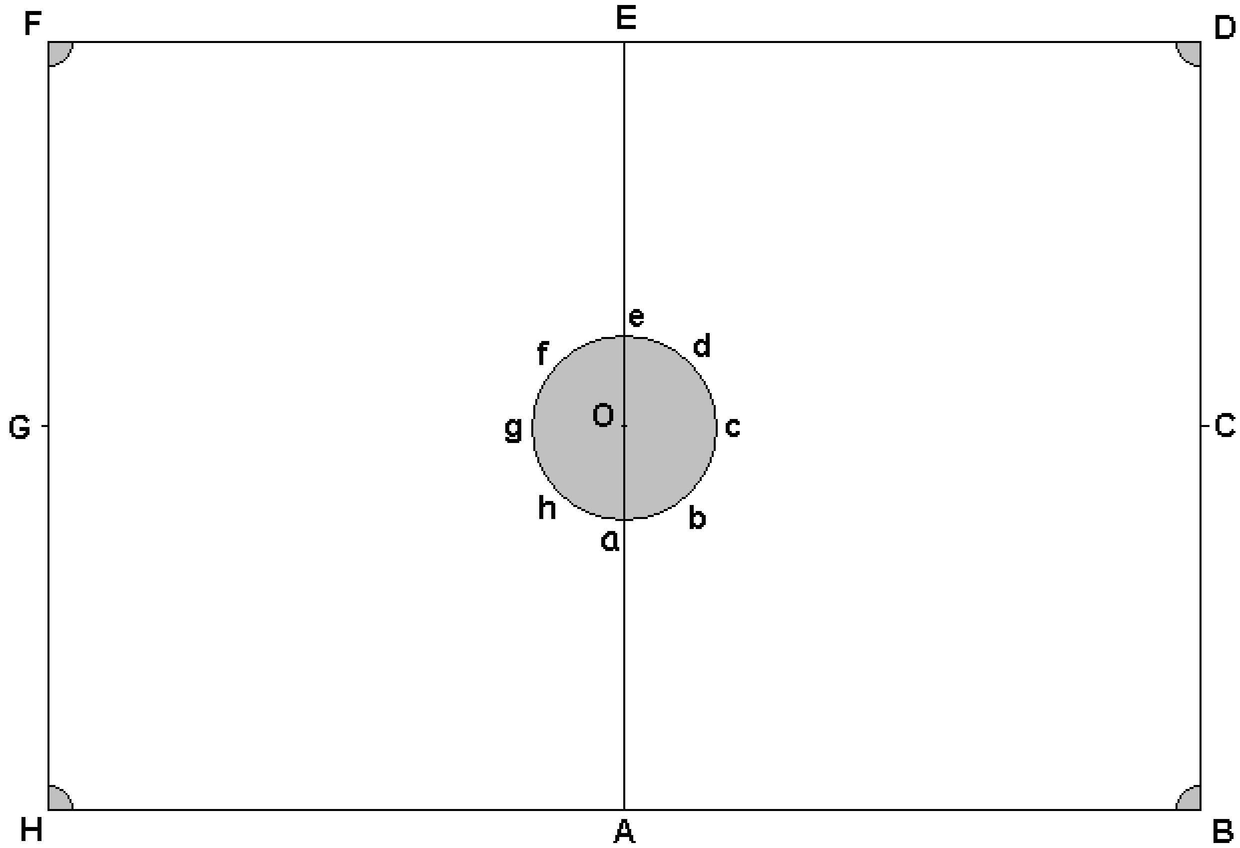
$$t=\frac{10\pm\sqrt{10^2+4\cdot4{,}9\cdot45}}{2\cdot4{,}9}=\frac{10\pm\sqrt{982}}{9{,}8}=\frac{10\pm31{,}34}{9{,}8}\rightarrow\ t=\frac{10+31{,}34}{9{,}8}=4{,}22\text{[s]}$$

tarda 4,22[s] en llegar al suelo

Velocidad antes que toque el suelo

(B) $\vec{v}(4{,}22)=17{,}3\hat{i}+(10-9{,}8\cdot4{,}22)\hat{j}=17{,}3\hat{i}-31{,}4\hat{j}$ [m/s]

La figura muestra una cancha de fútbol que tiene 90[m] de largo y 50[m] de ancho. Además el círculo central tiene un perímetro de 54[m].
Por el borde de la cancha, corre un hombre con rapidez constante, partiendo del punto **A** en sentido antihorario, completando una vuelta en 56[s]. Simultáneamente un niño recorre el círculo central con rapidez constante, partiendo del punto **a** en sentido antihorario, completando una vuelta en 16[s].



Teniendo en cuenta las siguientes convenciones:

i) $\overrightarrow{OA} = \vec{A}$; $\overrightarrow{OB} = \vec{B}$; etc. $\overrightarrow{Oa} = \vec{a}$; $\overrightarrow{Ob} = \vec{b}$; etc.

ii) dirección de $\vec{A}$ = dirección de $\vec{a}$; dirección de $\vec{B}$ = dirección de $\vec{b}$

Entonces determine para los instantes: t_1=3[s]; t_2=7[s]; t_3=9[s]; t_4=13[s]

1) La dirección (θ_1 ; θ_2 ; θ_3 ; θ_4) de los vectores posición

θ_1=	θ_2=	θ_3=	θ_4=

2) La posición ($\vec{r}_1 ; \vec{r}_2 ; \vec{r}_3 ; \vec{r}_4$) del niño (dibújelas cuidadosamente)

$\vec{r}_1$ =	$\vec{r}_2$ =	$\vec{r}_3$ =	$\vec{r}_4$ =

3) Los vectores posición unitarios ($\hat{r}_1 ; \hat{r}_2 ; \hat{r}_3 ; \hat{r}_4$) (dibújelos cuidadosamente)

$\hat{r}_1$ =	$\hat{r}_2$ =	$\hat{r}_3$ =	$\hat{r}_4$ =

4) Los vectores unitarios tangentes ($\hat{\theta}_1 ; \hat{\theta}_2 ; \hat{\theta}_3 ; \hat{\theta}_4$) (dibújelos cuidadosamente)

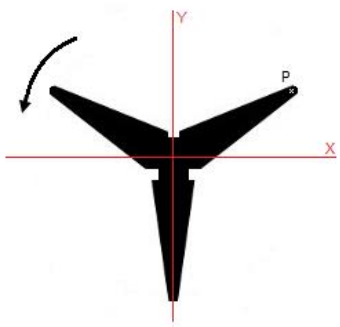
$\hat{\theta}_1$ =	$\hat{\theta}_2$ =	$\hat{\theta}_3$ =	$\hat{\theta}_4$ =

5) La velocidad ($\vec{v}_1 ; \vec{v}_2 ; \vec{v}_3 ; \vec{v}_4$) del niño (dibújelas cuidadosamente)

$\vec{v}_1$ =	$\vec{v}_2$ =	$\vec{v}_3$ =	$\vec{v}_4$ =

6) La aceleración ($\vec{a}_1$; $\vec{a}_2$; $\vec{a}_3$; $\vec{a}_4$) del niño (dibújelas cuidadosamente)

$\vec{a}_1$ =	$\vec{a}_2$ =	$\vec{a}_3$ =	$\vec{a}_4$ =



En un laboratorio se realizan pruebas para un generador eólico haciéndolo girar en sentido antihorario con una rapidez angular constante, completando diez vueltas en cuatro minutos. La figura de la derecha muestra un esquema del generador, visto de frente, donde en el instante t=1[s] el vector posición de un punto **P** (ubicado a diez metros del centro) tiene una dirección de 30º.

Entonces determine:

a) la rapidez angular (ω) del generador

Movimiento Circular Uniforme (MCU) $\omega=\overline{\omega}$ $\quad \dfrac{10\text{ vueltas}}{4\text{ minutos}}=\dfrac{10\cdot 2\pi[\text{rad}]}{4\cdot 60[\text{s}]}\rightarrow\omega=\dfrac{\pi}{12}\left[\dfrac{\text{rad}}{\text{s}}\right]$

<u>Para el punto **P**</u>

b) La dirección (θ(t)) para todo tiempo del vector posición.

$\theta(1)=\pi/6[\text{rad}]$. $\quad \theta(t)=\int\omega dt=\int\left(\dfrac{\pi}{12}\right)dt=\dfrac{\pi}{12}t+C$. $\quad \theta(1)=\pi/12 + C=\pi/6 \rightarrow C=\pi/12$

$$\theta(t)=\frac{\pi}{12}t+\frac{\pi}{12}[\text{rad}]$$

Para los instantes: t=4[s] y t=12[s]

c) El vector posición ($\vec{r}$) dibújelo,

dibuje los vectores unitarios: posición ($\hat{r}$) y tangente ($\hat{\theta}$)

$\theta_4=(\pi/12)\cdot 4+\pi/12=1{,}31[\text{rad}] \rightarrow \theta_4=1{,}31\cdot 57{,}3^\circ \approx 75^\circ$

$\theta_{12}=(\pi/12)\cdot 12+\pi/12=3{,}4[\text{rad}] \rightarrow \theta_{12}=3{,}4\cdot 57{,}3^\circ \approx 195^\circ$

(**Nota**: $180^\circ=\pi[\text{rad}] \rightarrow 1[\text{rad}]=180^\circ/\pi=57{,}3^\circ$)

$\vec{r}(4)=10\cos(75)\hat{i}+10\text{sen}(75)\hat{j}=2{,}6\hat{i}+9{,}7\hat{j}[\text{m}]$

$\vec{r}(12)=10\cos(195)\hat{i}+10\text{sen}(195)\hat{j}=-9{,}7\hat{i}-2{,}6\hat{j}[\text{m}]$ (ver Figura c)

d) La velocidad ($\vec{v}$) dibújela

$\vec{V}_4=\omega R\hat{\theta}_4=(\pi/12)[\text{rad/s}]\cdot 10[\text{m}]\hat{\theta}_4=2{,}62\hat{\theta}_4[\text{m/s}]$

$\vec{V}_{12}=\omega R\hat{\theta}_{12}=(\pi/12)[\text{rad/s}]\cdot 10[\text{m}]\hat{\theta}_{12}=2{,}62\hat{\theta}_{12}[\text{m/s}]$ (ver Figura d)

e) La aceleración ($\vec{a}$) dibújela

$\vec{a}=-\omega^2R\hat{r}+\alpha R\hat{\theta}$. $\quad \alpha=\dfrac{d\omega}{dt}=0 \rightarrow \vec{a}=-\omega^2R\hat{r}$

$\vec{a}_4=-\omega^2R\hat{r}_4=-\{(\pi/12)[\text{rad/s}]\}^2\cdot 10[\text{m}]\hat{r}_4=-0{,}68\hat{r}_4[\text{m/s}^2]$

$\vec{a}_{12}=-\omega^2R\hat{r}_{12}=-\{(\pi/12)[\text{rad/s}]\}^2\cdot 10[\text{m}]\hat{r}_{12}=-0{,}68\hat{r}_{12}[\text{m/s}^2]$ (ver Figura e)

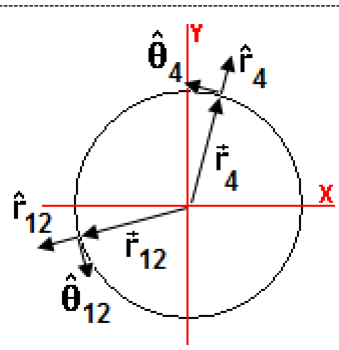


Figura c

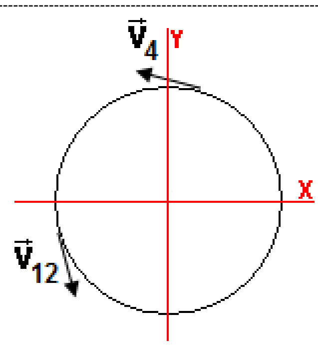


Figura d

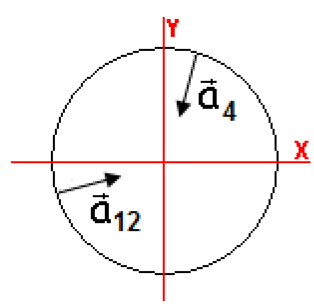
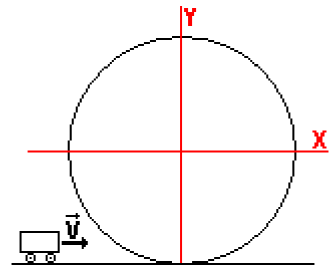


Figura e

Suponga que el carro se mueve de forma tal que la dirección del vector posición está dada por la ecuación:

$$\theta(t)=\begin{cases}-(\pi/16)\cdot t^2+0{,}5\pi\cdot t-0{,}5\pi\,[\text{rad}] & \text{si } 0\le t\le 4[\text{s}]\\ (\pi/16)\cdot t^2-0{,}5\pi\cdot t+1{,}5\pi\,[\text{rad}] & \text{si } t>4[\text{s}]\end{cases}$$



Diámetro: 20[m]

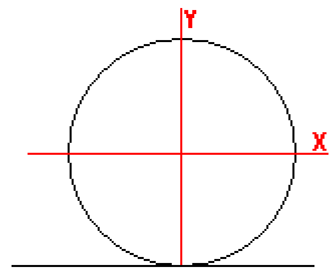
Entonces para el instante t=5[s] determine:

a) la dirección del vector posición del carro

$\theta_5=$

b) el vector posición del carro (dibújelo)

$\vec{r}_5=$



c) el vector posición unitario (dibújelo)

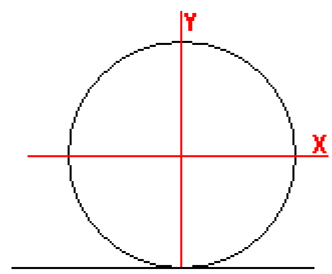
$\hat{r}_5=$

d) el vector unitario tangente (dibújelo)

$\hat{\theta}_5=$

e) la rapidez angular

$\omega_5=$

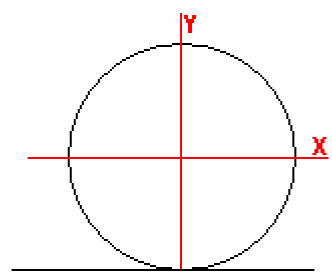


f) la velocidad del carro (dibújela)

$\vec{V}_5=$

g) la aceleración radial (dibújela)

$\vec{a}_{r_5}=$

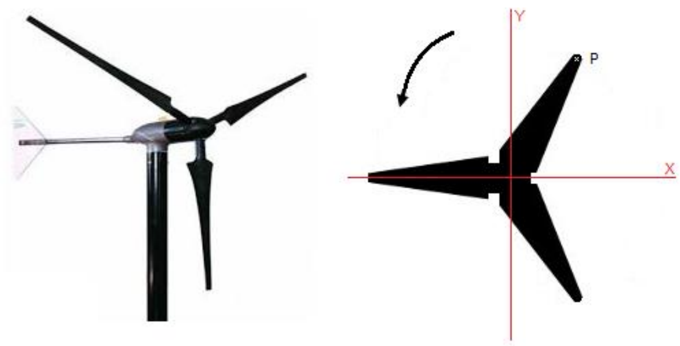


h) la aceleración tangencial (dibújela)

$\vec{a}_{\theta_5}=$

i) la aceleración del carro (dibújela)

$\vec{a}_5=$



En un laboratorio se realizan pruebas para un generador eólico haciéndolo girar en sentido antihorario con aceleración angular constante, su rapidez angular en el instante t=1[s] es 0,2[rad/s] y dos segundos después es 0,4[rad/s]. Además en el instante t=1[s] el vector posición de un punto **P** (ubicado a diez metros del centro) tiene una dirección de 69º.
Entonces determine:

a) la aceleración angular (α) del generador

Movimiento Circular Uniformemente acelerado (MCUA) $\alpha = \bar{\alpha}$

$\omega(1)$=0,2[rad/s]; $\omega(3)$=0,4[rad/s]. $\alpha = \dfrac{\omega(3)-\omega(1)}{3-1} = \dfrac{0{,}4-0{,}2[\text{rad/s}]}{2[\text{s}]} = 0{,}1\left[\dfrac{\text{rad}}{\text{s}^2}\right]$

b) La rapidez angular ($\omega(t)$) para todo tiempo.

$\omega(t) = \int \alpha dt = \int 0{,}1dt = 0{,}1t + C$. $\omega(1)=0{,}1+C=0{,}2 \rightarrow C=0{,}1 \rightarrow \omega(t)=0{,}1t+0{,}1$ [rad/s]

Para el punto **P**

c) La dirección ($\theta(t)$) para todo tiempo del vector posición.

$\theta(1)=69^{\circ} \rightarrow \theta(1)=69/57{,}3=1{,}2$ [rad]. $\theta(t) = \int \omega dt = \int (0{,}1t+0{,}1)dt = 0{,}05t^2 + 0{,}1t + D$.

$\theta(1)=0{,}15+D=1{,}2 \rightarrow D=1{,}05 \rightarrow \theta(t)=0{,}05t^2+0{,}1t+1{,}05$[rad]

Para los instantes: t=5[s] y t=8[s]

d) El vector posición ($\vec{r}$) dibújelo, dibuje los vectores unitarios: posición ($\hat{r}$) y tangente ($\hat{\theta}$)

$\theta_5=\theta(5)=0{,}05\cdot 25+0{,}1\cdot 5+1{,}05=2{,}8$[rad] $\rightarrow \theta_5=2{,}8\cdot 57{,}3^{\circ} \approx 160^{\circ}$

$\theta_8=\theta(8)=0{,}05\cdot 64+0{,}1\cdot 8+1{,}05=5{,}05$[rad] $\rightarrow \theta_8=5{,}05\cdot 57{,}3^{\circ} \approx 289^{\circ}$

$\vec{r}(5) = 10\cos(160)\hat{i} + 10\text{sen}(160)\hat{j} = -9{,}4\hat{i} + 3{,}4\hat{j}$[m]

$\vec{r}(8) = 10\cos(289)\hat{i} + 10\text{sen}(289)\hat{j} = 3{,}3\hat{i} - 9{,}5\hat{j}$[m] (ver Figura d)

e) La velocidad ($\vec{v}$) dibújela

$\omega(5)=0{,}1\cdot 5+0{,}1=0{,}6$[rad/s]. $\vec{V}_5 = \omega R\hat{\theta}_5 = 0{,}6[\text{rad/s}]\cdot 10[\text{m}]\hat{\theta}_5 = 6\hat{\theta}_5[\text{m/s}]$

$\omega(8)=0{,}1\cdot 8+0{,}1=0{,}9$[rad/s]. $\vec{V}_8 = \omega R\hat{\theta}_8 = 0{,}9[\text{rad/s}]\cdot 10[\text{m}]\hat{\theta}_8 = 9\hat{\theta}_8[\text{m/s}]$ (ver Figura e)

f) La aceleración ($\vec{a}$) dibújela $\vec{a} = -\omega^2 R\hat{r} + \alpha R\hat{\theta}$.

$\vec{a}_5 = -\omega^2 R\hat{r}_5 + \alpha R\hat{\theta}_5 = -\{0{,}6[\text{rad/s}]\}^2\cdot 10[\text{m}]\hat{r}_5 + 0{,}1[\text{rad/s}^2]\cdot 10[\text{m}]\hat{\theta}_5 = -3{,}6\hat{r}_5 + \hat{\theta}_5[\text{m/s}^2]$

$\vec{a}_8 = -\omega^2 R\hat{r}_8 + \alpha R\hat{\theta}_8 = -(0{,}9)^2\cdot 10\hat{r}_8 + 0{,}1\cdot 10\hat{\theta}_8 = -8{,}1\hat{r}_8 + \hat{\theta}_8[\text{m/s}^2]$ (ver Figura f)

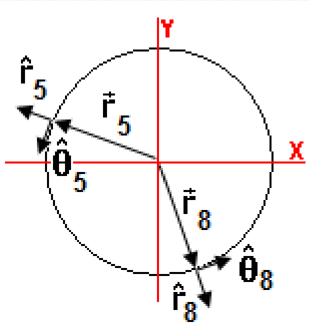


Figura d

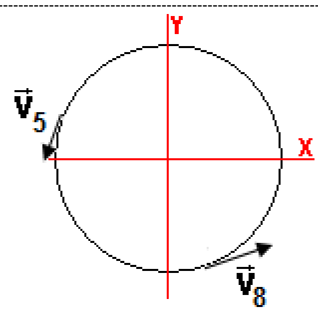


Figura e

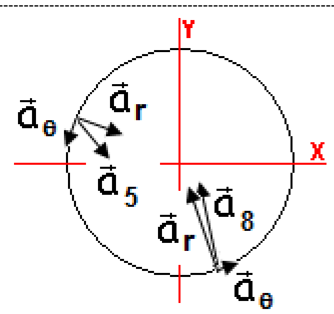
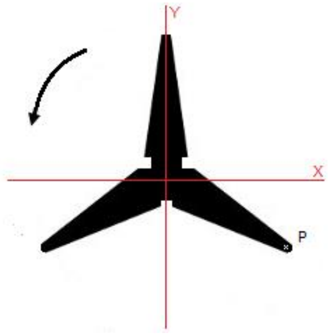


Figura f



En un laboratorio se realizan pruebas para un generador eólico haciéndolo girar en sentido antihorario deteniéndolo uniformemente, su rapidez angular en el instante t=1[s] es 1,2[rad/s] y tres segundos después es 0,75[rad/s]. Además en el instante t=1[s] el vector posición de un punto **P** (ubicado a diez metros del centro) tiene una dirección de -30º.
Entonces determine:

a) la aceleración angular (α) del generador
Movimiento Circular Uniformemente acelerado (MCUA) $\alpha = \bar{\alpha}$

ω(1)=1,2[rad/s]; ω(4)=0,75[rad/s]. $\alpha = \frac{\omega(4)-\omega(1)}{4-1} = \frac{0{,}75-1{,}2[rad/s]}{3[s]} = -0{,}15\left[\frac{rad}{s^2}\right]$

b) La rapidez angular (ω(t)) para todo tiempo.

$\omega(t) = \int \alpha dt = \int -0{,}15 dt = -0{,}15t + C$. ω(1)=-0,15+ C =1,2 → C=1,35

ω(t)=-0,15t + 1,35[rad/s]

Para el punto **P**

c) La dirección (θ(t)) para todo tiempo del vector posición.

θ(1)=-30º→θ(1)=-30/57,3=-0,52 [rad].

$\theta(t) = \int \omega dt = \int (-0{,}15t + 1{,}35) dt = -0{,}075t^2 + 1{,}35t + D$.

θ(1)=-0,075 +1,35+ D =-0,52 → D ≈ -1,8 → $\theta(t) = -0{,}075t^2 + 1{,}35t - 1{,}8[rad]$

Para los instantes: t=2[s] y t=6[s]

d) El vector posición ($\vec{r}$) dibújelo, dibuje los vectores unitarios: posición ($\hat{r}$) y tangente ($\hat{\theta}$)

θ_2=θ(2)=-0,075·4+1,35·2 - 1,8=0,6[rad] → θ_2=0,6·57,3º ≈ 34º
θ_6=θ(6)=-0,075·36+1,35·6 - 1,8=3,6[rad] → θ_6=3,6·57,3º ≈ 206º

$\vec{r}(2) = 10\cos(34)\hat{i} + 10\mathrm{sen}(34)\hat{j} = 8{,}3\hat{i} + 5{,}6\hat{j}[m]$

$\vec{r}(6) = 10\cos(206)\hat{i} + 10\mathrm{sen}(206)\hat{j} = -9\hat{i} - 4{,}4\hat{j}[m]$ (ver Figura d)

e) La velocidad ($\vec{v}$) dibújela

ω(2)=-0,15·2+1,35=1,05[rad/s]. $\vec{V}_2 = \omega R\hat{\theta}_2 = 1{,}05\cdot 10\hat{\theta}_2 = 10{,}5\hat{\theta}_2[m/s]$

ω(6) =-0,15·6+1,35=0,45[rad/s]. $\vec{V}_6 = \omega R\hat{\theta}_6 = 0{,}45\cdot 10\hat{\theta}_6 = 4{,}5\hat{\theta}_6[m/s]$ (ver Figura e)

f) La aceleración ($\vec{a}$) dibújela $\vec{a} = -\omega^2 R\hat{r} + \alpha R\hat{\theta}$.

$\vec{a}_2 = -\omega^2 R\hat{r}_2 + \alpha R\hat{\theta}_2 = -(1{,}05)^2\cdot 10\hat{r}_2 - 0{,}15\cdot 10\hat{\theta}_2 = -11{,}03\hat{r}_2 - 1{,}5\hat{\theta}_2[m/s^2]$

$\vec{a}_6 = -\omega^2 R\hat{r}_6 + \alpha R\hat{\theta}_6 = -(0{,}45)^2\cdot 10\hat{r}_6 - 0{,}15\cdot 10\hat{\theta}_6 = -2{,}03\hat{r}_6 - 1{,}5\hat{\theta}_6[m/s^2]$ (ver Figura f)

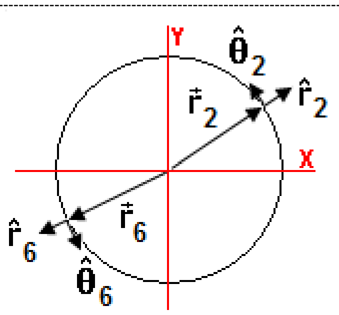


Figura d

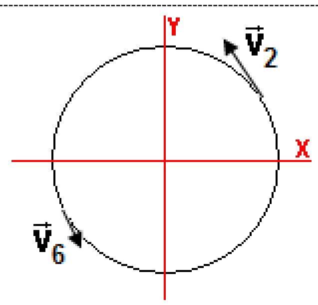


Figura e

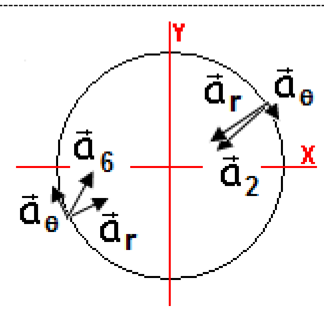


Figura f