PAUTA SUMATIVA 2 CÁLCULO DIFERENCIAL

RESULTADOS DE APRENDIZAJES	
1	Aplica los axiomas de cuerpo y orden de los números reales para resolver inecuaciones lineales, cuadráticas y con valor absoluto.
2	Analiza la existencia de límites en funciones reales para resolver problemas relativos a continuidad y derivadas de funciones.

29 de Octubre de 2020

Nombre:...Rut:.................Sección:.......

Problema	1 (20 puntos)	2 (25 puntos)	3 (25 puntos)	4 (30 puntos)	Total puntos	Nota (1-7)
Puntaje Obtenido						

1. **(20 puntos) Pregunta 1.**

(a) Completar en el espacio en blanco con el paso faltante y/o axioma en la siguiente prueba

$\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, con $b, c \neq 0$ entonces $(ac)(bc)^{-1} = ab^{-1}$

Prueba:

$$\begin{aligned}
(ac)(bc)^{-1} &= ac(b^{-1}c^{-1}) \\
&= \mathbf{ac(c^{-1}b^{-1})} && \text{Conmutatividad} \\
&= a(cc^{-1})b^{-1} && \text{Asociatividad} \\
&= a \cdot 1 \cdot b^{-1} && \text{Inverso Multiplicativo} \\
&= (a \cdot 1)b^{-1} && \text{Asociativa} \\
&= \mathbf{ab^{-1}} && \text{Neutro Multiplicativo}
\end{aligned}$$

(4 puntos c/u)

(b) Completar en el espacio en blanco con el paso faltante y/o axioma en la siguiente prueba

Sean $a, b \in \mathbb{R}$, entonces existe uno y sólo un $x \in \mathbb{R}$ tal que $a + x = b$. A tal x se denota por $b + (-a)$.

Prueba:

$$\begin{aligned}
a + x &= a + (b + (-a)) \\
&= \mathbf{(a + b) + (-a)} && \text{Asociatividad} \\
&= (b + a) + (-a) && \text{Conmutatividad} \\
&= b + (a + (-a)) && \text{Asociativdad} \\
&= \mathbf{b + 0} && \text{Invero Aditivo} \\
&= b && \text{Neutro Aditivo}
\end{aligned}$$

(4 puntos c/u)

2. **(25 puntos)** **Pregunta 2.**

a) Determinar el conjunto solución de las siguientes inecuaciones

i) $\dfrac{2x+1}{x-5} \leq 3$

Solución:

$$\frac{2x+1}{x-5} - 3 \leq 0 \Longrightarrow \frac{16-x}{x-5} \leq 0 \qquad \textbf{(5 puntos)}$$

Donde tenemos como puntos críticos $x_1 = 16$ y $x_2 = 5$ **(2 puntos)**

	$-\infty$ a 5	5 a 16	16 a $+\infty$
$16-x$	$+$	$+$	$-$
$x-5$	$-$	$+$	$+$
	$-$	$+$	$-$

(3 puntos)

Así, el conjunto solución es $]-\infty, 5[\cup [16, +\infty[$ **(2 puntos)**

ii) $|3x-1| < 2x+5$

Solución:

$$|3x-1| < 2x+5 \Longrightarrow -(2x+5) < 3x-1 < 2x+5 \qquad \textbf{(3 puntos)}$$

Caso 1:

$$-2x-5 < 3x-1 \Longrightarrow -4 < 5x \Longrightarrow -\frac{4}{5} < x \qquad \textbf{(4 puntos)}$$

Caso 2:

$$3x-1 < 2x+5 \Longrightarrow x < 6 \qquad \textbf{(4 puntos)}$$

Así, el conjunto solución es $\left]-\frac{4}{5}, 6\right[$ **(2 puntos)**

b) Determinar el conjunto solución de las siguientes inecuaciones

i) $\dfrac{4x}{2x+3} > 5$

Solución:

$$\frac{4x}{2x+3} - 5 > 0 \Longrightarrow \frac{-6x-15}{2x+3} > 0 \qquad \textbf{(5 puntos)}$$

Donde tenemos como puntos críticos $x_1 = -\frac{15}{6}$ y $x_2 = -\frac{3}{2}$ **(2 puntos)**

	$-\infty$ a 5	5 a 16	16 a $+\infty$
$16-x$	$+$	$+$	$-$
$x-5$	$-$	$+$	$+$
	$-$	$+$	$-$

(3 puntos)

Así, el conjunto solución es $\left]-\frac{15}{6}, -\frac{3}{2}\right[$ **(2 puntos)**

ii) $\left|1-x^2\right| \leq 2x+2$

Solución:

$$\left|1-x^2\right| \leq 2x+2 \Longrightarrow -2x-2 \leq 1-x^2 \leq 2x+2 \qquad \textbf{(3 puntos)}$$

Caso 1:

$$-2x-2 \leq 1-x^2 \Longrightarrow x^2-2x-3 \leq 0 \Longrightarrow [-1,3] \qquad \textbf{(4 puntos)}$$

Caso 2:

$$1-x^2 \leq 2x+2 \Longrightarrow 0 \leq x^2+2x+1 \Longrightarrow \mathbb{R} \qquad \textbf{(4 puntos)}$$

Así, el conjunto solución es $[-1,3]$ **(2 puntos)**

3. **(25 puntos)** **Pregunta 3.**

(a) **i)** Usando la definición de límite, probar que

$$\lim_{x\to 2}(x^2-4x+5)=1$$

Solución:

Usando la definición de límite, tenemos

$$\forall \epsilon>0, \exists \delta>0 : |x-2|<\delta \Longrightarrow |(x^2-4x+5)-1|<\epsilon \qquad \textbf{(3 puntos)}$$

Hallaremos $\delta>0$

$$|x^2-4x+4|<\epsilon \Longrightarrow |x-2||x-2|<\epsilon \qquad \textbf{(5 puntos)}$$

Ahora,

$$|x-2||x-2|<\delta^2 \qquad \textbf{(2 puntos)}$$

Así, tomando $\delta^2=\epsilon \Longrightarrow \delta<\sqrt{\epsilon}$ se cumple lo pedido **(2 puntos)**

ii) Hallar las asíntotas vérticales, horizontales u oblícuas , si existen, de la función

$$f(x)=\frac{x^2+1}{2x-3}$$

Solución:

Calcularemos asíntotas verticales

$$\lim_{x\to\frac{3}{2}^+}\frac{x^2+1}{2x-3}=+\infty \qquad \lim_{x\to\frac{3}{2}^-}\frac{x^2+1}{2x-3}=-\infty$$

Así, $x=\dfrac{3}{2}$ es una asíntota vertical **(4 puntos)**

Calculando las asíntotas oblicuas u horizontales

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x(2x-3)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{2x^2-3x}=\frac{1}{2}=m \qquad \textbf{(4 puntos)}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{2x-3}-\frac{1}{2}x=\lim_{x\to\infty}\frac{3x+1}{4x-6}=\frac{3}{4} \qquad \textbf{(4 puntos)}$$

Así, la ecuación $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{4}$ es una asíntota oblicua. No existe asíntotas horizontales pues $m\neq 0$. **(1 puntos)**

(b) **i)** Usando la definición de límite, probar que

$$\lim_{x\to 3}(x^2+x-4)=8$$

Solución:

Usando la definición de límite, tenemos

$$\forall\epsilon>0,\exists\delta>0:|x-3|\Longrightarrow|(x^2+x-4)-8|<\epsilon \qquad \textbf{(3 puntos)}$$

Hallaremos $\delta>0$

$$|(x^2+x-4)-8|<\epsilon\Longrightarrow|x^2+x-12|<\epsilon\Longrightarrow|x+4||x-3|<\epsilon \qquad \textbf{(2 puntos)}$$

Tomando $\delta=1$

$$|x-3|<1\Longrightarrow-1<x-3<1\Longrightarrow 6<x+4<8\Longrightarrow|x+4|<8 \qquad \textbf{(3 puntos)}$$

Multiplicando

$$|x-3||x+4|<8\delta$$

Tomando $8\delta=\epsilon\Longrightarrow\delta=\dfrac{\epsilon}{8}$ **(2 puntos)**

Así, con $\delta=\text{mín}\,1,\dfrac{\epsilon}{8}$ se cunple lo pedido **(2 puntos)**

ii) Hallar las asíntotas vérticales, horizontales u oblícuas , si existen, de la función

$$f(x)=\frac{3x^2-1}{2x+5}$$

Solución:

Calcularemos las asíntotas verticales

$$\lim_{x\to-\frac{5}{2}^+}\frac{3x^2-1}{2x+5}=+\infty \qquad \lim_{x\to-\frac{5}{2}^-}\frac{3x^2-1}{2x+5}=-\infty$$

Así, $x=-\dfrac{5}{2}$ es una asíntota vertical **(4 puntos)**

Calculando las asíntotas oblicuas u horizontales

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-1}{x(2x+5)}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-1}{2x^2+5x}=\frac{3}{2}=m \qquad \textbf{(4 puntos)}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-1}{2x+5}-\frac{3}{2}x=\lim_{x\to\infty}\frac{-15-2}{4x+10}=-\frac{15}{4} \qquad \textbf{(4 puntos)}$$

Así, la ecuación $y=\dfrac{3}{2}x-\dfrac{15}{4}$ es una asíntota oblicua. No existe asíntotas horizontales pues $m\neq 0$. **(1 puntos)**

4. **(30 puntos) Pregunta 4.**

a) Resuelve

i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{2-x}-\sqrt{2}}{x}$

Solución:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2-x}-\sqrt{2}}{x} \cdot \frac{\sqrt{2-x}+\sqrt{2}}{\sqrt{2-x}+\sqrt{2}} = \lim_{x\to 0} \frac{-1}{\sqrt{2-x}+\sqrt{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \qquad \textbf{(8 puntos)}$$

ii) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2-1}}$

Solución:

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{x-1}{(x+1)(x-1)}} = \sqrt{\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x+1}} = 0 \qquad \textbf{(8 puntos)}$$

iii) Considere la función

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & si \quad 1 < x \\ ax^2+b & si \quad -2 < x \leq 1 \\ 3x-2 & si \quad x \leq -2 \end{cases}$$

Determine los valores de a y b tal que $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ existen.

Solución:

Calcularemos los límites laterales

$$\lim_{x\to -2^+} ax^2+b = 4a+b \qquad \textbf{(2 puntos)}$$

$$\lim_{x\to -2^-} 3x-2 = -8 \qquad \textbf{(2 puntos)}$$

Así, para que el límite exista debe cumplir que $4a+b=-8$ **(2 puntos)**

$$\lim_{x\to 1^+} x+1 = 2 \qquad \textbf{(2 puntos)}$$

$$\lim_{x\to 1^-} ax^2+b = a+b \qquad \textbf{(2 puntos)}$$

Así, para que el límite exista debe cumplir que $a+b=2$ **(2 puntos)**

Resolviendo el sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} 4a+b & = & -8 \\ a+b & = & 2 \end{array}\right\} \Longrightarrow a = -\frac{10}{3}; b = \frac{16}{3} \qquad \textbf{(2 puntos)}$$

b) Resuelve

i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}{x}$

Solución:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}{x} \cdot \frac{\sqrt{x+3}+\sqrt{3}}{\sqrt{x+3}+\sqrt{3}} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+3}+\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \qquad \textbf{(8 puntos)}$$

ii) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{1+4x^2}}{\sqrt{4x}}$

Solución:

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{1+4x^2}{4x}} = \sqrt{\lim_{x\to\infty} \frac{1}{4x} + \lim_{x\to\infty} \frac{4x^2}{4x}} = \sqrt{\lim_{x\to\infty} x} = \infty \qquad \textbf{(8 puntos)}$$

iii) Considere la función

$$f(x) = \begin{cases} 3x+5 & si \quad x \leq -1 \\ ax^2+b & si \quad -1 < x < 2 \\ 6-\dfrac{x}{2} & si \quad x > 2 \end{cases}$$

Determine los valores de a y b tal que $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ existen.

Solución:

$$\lim_{x\to 2^+} 6-\frac{x}{2} = 5 \qquad \textbf{(2 puntos)}$$

$$\lim_{x\to 2^-} ax^2+b = 4a+b \qquad \textbf{(2 puntos)}$$

Así, para que el limite exista se debe cumplir que $4a+b=5$ **(2 puntos)**

$$\lim_{x\to -1^+} ax^2+b = a+b \qquad \textbf{(2 puntos)}$$

$$\lim_{x\to -1^-} 3x+5 = 2 \qquad \textbf{(2 puntos)}$$

Así, para que el límite exista se debe cumplir que $a+b=2$ **(2 puntos)**

Resolviendo el sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} 4a+b & = & 5 \\ a+b & = & 2 \end{array}\right\} \Longrightarrow a=1; b=1 \qquad \textbf{(2 puntos)}$$