Guía Transformación Lineal

Transformación Lineal

1. Determine si la aplicación dada es una transformación lineal.

   a) $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (x^2, y)$

   b) $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (x + y, x - y, z)$

   c) $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $T(x, y, z) = 2x - y + z$

   d) $T : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & 0 \\ 0 & c+d \end{pmatrix}$

   e) $T : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $T\begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w+x & 1 \\ 0 & y-z \end{pmatrix}$

   f) $T : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$, $T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a + b - c + d$

   g) $T : \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $T(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} A$

   g) $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, $T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = (a_0 + a_1 + a_2) + (a_1 + a_2)x + a_2x^2$

   i) $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, $T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_1 + 2a_2x^2$

2. Sea T una transformación lineal de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$ tal que $T(1, 0) = (1, 1)$ y $T(0, 1) = (-1, 1)$. Encuentre:

   a) $T(1, 4)$

   b) $T(-2, 1)$

   c) $T(x, y)$

3. Sea $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $T(1, 0) = (1, 2, 3)$ y $T(0, 1) = (-1, 1, 0)$. Encuentre:

   a) $T(5, 2)$

   b) $T(x, y)$

4. Sea $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ tal que $T(1, 1) = 1 - 2t$ y $T(3, -1) = t + 2t^2$. Encuentre:

   a) $T(1, 2)$

   b) $T(x, y)$

5.Sea $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una transformación lineal tal que $T(1, 0, 0) = (2, -1, 4)$; $T(0, 1, 0) = (1, 5, -2)$; $T(0, 0, 1) = (0, 3, 1)$. Determine

   a) $T(2, 3, -2)$

   b) $T(x, y, z)$

6. Dada la transformación lineal $T : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definida por $T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$.

   a) Determine el kernel y su dimensión.

   b) Determine la imagen y su dimensión.

   c) ¿T es monomorfismo?

   d) ¿T es invertible?

7. Dada la aplicación $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $f(x, y, z) = (y, -x, z)$.

   a) ¿f es una transformación lineal?

   b) ¿f es monomorfismo?

   c) ¿f es epimorfismo?

   d) ¿f es automorfismo?

4. Sea $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ tal que $T(1,1) = 1 - 2t$ y $T(3,-1) = t + 2t^2$. Encuentre:

a) $T(1,2)$

b) $T(x,y)$

Solución:

a) $T(1,2) = ?$, $\exists\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que

$$(1,2) = \alpha(1,1) + \beta(3,-1) \quad (*)$$

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & 1 = \alpha + 3\beta \\ (2) & 2 = \alpha - \beta \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} -1 = -\cancel{\alpha} - 3\beta \\ 2 = \cancel{\alpha} - \beta \\ \hline 1 = -4\beta \end{array} \Rightarrow \beta = -\frac{1}{4}$$

Sust "β" en (2)

$$2 = \alpha - \left(-\frac{1}{4}\right) \Rightarrow$$

$$\alpha = 2 - \frac{1}{4} \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{7}{4}}$$

$$(1,2) = \frac{7}{4}(1,1) - \frac{1}{4}(3,-1) \quad (*')$$

$$T(1,2) = T\left(\frac{7}{4}(1,1) - \frac{1}{4}(3,-1)\right)$$

$$= T\left(\frac{7}{4}(1,1)\right) - T\left(\frac{1}{4}(3,-1)\right)$$

$$= \frac{7}{4}T(1,1) - \frac{1}{4}T(3,-1)$$

$$= \frac{7}{4}(1-2t) - \frac{1}{4}(t+2t^2)$$

$$= \frac{7}{4} - \underbrace{\frac{7t}{2} - \frac{t}{4}} - \frac{t^2}{2} = -\frac{t^2}{2} - \frac{15t}{4} + \frac{7}{4}$$

$$\therefore \boxed{T(1,2) = -\frac{t^2}{2} - \frac{15t}{4} + \frac{7}{4}}$$

d) $T : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & 0 \\ 0 & c+d \end{pmatrix}$

Solución: Debemos probar que T es una aplicación lineal.

Recordar: $T: V \longrightarrow W$, si

① $T(v+w) = T(v) + T(w)$

② $T(\alpha v) = \alpha T(v)$

Sea $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ tales que

① $T(A+B) = T\left(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}\right)$

$= T\begin{pmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ c_1+c_2 & d_1+d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+a_2+b_1+b_2 & 0 \\ 0 & c_1+c_2+d_1+d_2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} (a_1+b_1)+(a_2+b_2) & 0 \\ 0 & (c_1+d_1)+(c_2+d_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+b_1 & 0 \\ 0 & c_1+d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2+b_2 & 0 \\ 0 & c_2+d_2 \end{pmatrix}$

$T(A) + T(B)$ ✓

② Sea $\alpha \in \mathbb{R}$, $A \in M_2(\mathbb{R})$

$T(\alpha A) = T\left(\alpha\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}\right) = T\begin{pmatrix} \alpha a_1 & \alpha b_1 \\ \alpha c_1 & \alpha d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_1 + \alpha b_1 & 0 \\ 0 & \alpha c_1 + \alpha d_1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} \alpha(a_1+b_1) & 0 \\ 0 & \alpha(c_1+d_1) \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} a_1+b_1 & 0 \\ 0 & c_1+d_1 \end{pmatrix}$

$\alpha T(A)$ ✓

$\therefore$ T es aplicación lineal ■

.

8. Dada la aplicación lineal $H : \mathcal{P}_3 \longrightarrow \mathcal{P}_2$ definida por $H(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2$ determinar

   a) Kernel de H y su dimensión.

   b) Imagen de H y su dimensión.

9. Dada la transformación lineal $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $F(x, y, z) = (x + 2y, y + z, z)$. Hallar F^{-1}, si existe.

10. Dada una aplicación lineal definida por

$$T(x, y) = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

   a) Hallar una base para el kernel y la imagen.

   b) ¿T es isomorfismo?

   c) Hallar T^{-1}, si existe.

11. Comprobar si la transformación lineal $T(x) = Ax$ con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

es monomorfismo y epimorfismo.

12. Considere la transformación lineal $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ representada por $T(x) = Ax$ donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   a) Encuentre la dimensión del kernel

   b) Encuentre la dimensión de la imagen

   c) ¿Es T monomorfismo?

   d) ¿Es T epimorfismo?

   e) Determine T^{-1}, si existe.