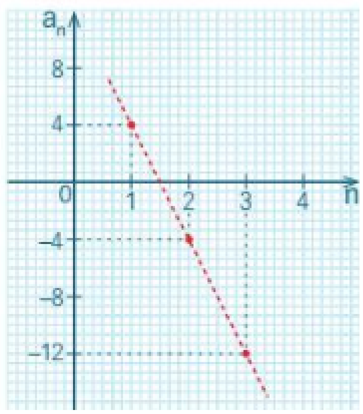
PAUTA CERTAMEN 1 MOD_2 ÁLGEBRA Y TRIGONOMETRÍA (I.C.INFORMÁTICA)

Profesores: Jhon Vidarte O./Gabriel Sanhueza D./víctor Puchi E./gsd

(13/Julio/2020)

1. (25 puntos) En el siguiente gráfico están representado parte de una PA



a) ¿Cuál es el noveno términos de la PA?

Solución:

a) $a_1 = 4,\ a_2 = -4,\ a_3 = -12,\ d = a_2 - a_1 = -4 - 4 = -8$ (6 puntos)

$$a_9 = a_1 + 8\,(-8) = 4 - 64 = -60 \text{ (4 puntos)}$$

b) Si el último término es -108, ¿cuántos términos tiene la PA?

$a_n = a_1 + (n-1)\,d \Rightarrow -108 = 4 + (n-1)\,(-8)$ (2 puntos)

$-108 = 4 + (n-1)\,(-8) \Rightarrow -112 = -8n + 8$

$\Rightarrow 8n = 120 \Rightarrow n = 15$ (4 puntos)

La PA tiene 15 términos (2 puntos)

c) La suma de tres términos consecutivos de una PG es 26 y el producto entre ellos es 216. ¿Cuáles son esos términos?

Solución: Vamos representar los tres términos consecutivos con razón r por :

$$\frac{x}{r}, x, x\cdot r. \text{ entonces } \begin{cases} \dfrac{x}{r} + x + x\cdot r = 26 \\ \left(\dfrac{x}{r}\right)(x)\,(x\cdot r) = 216 \end{cases} \qquad \text{(4 puntos)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^3 = 216 & (1) \\ \dfrac{x}{r} + x + x \cdot r = 26 & (2) \end{cases}$$

De (1) $x = \sqrt[3]{216} = 6$ (2 puntos)

De (2) $\dfrac{6}{r} + 6 + 6 \cdot r = 26 \Rightarrow 6 + 6r + 6r^2 = 26r \Rightarrow 6r^2 - 20r + 6 = 0 \; r = 3, \; r = \dfrac{1}{3}$ (2 puntos)

Los términos son: 2 , 6 ,18 o bien 18, 6 , 2 (4 puntos)

2. a) Hallar, justificando, el valor exacto de a) $cos\,(15°)$ b) $sen\,(75°)$

b) Verificar, justificando su respuesta que $tan\,(x + 45°) = \dfrac{sen\,x + cos\,x}{cos\,x - sen\,x}$ $\forall x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi$

c) Determine el valor de la expresión $y = cos^2 x + sen\,x$, con $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, si se sabe que $cos\,x = \dfrac{1}{3}$.

Solución:

$$cos\,(15°) = cos\,(45°\text{-}30°) = cos\,(45°)\,sen\,(30°) + sen\,(45°)\,sen\,(30°) \text{ (2 puntos)}$$

$$cos\,(15°) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \text{ (4 puntos)}$$

b) $sen\,(75°) = sen\,(45°+30°) = sen\,(45°)\,cos\,(30°) + cos\,(45°)\,sen\,(30°)$

$$sen\,(75°) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \text{ (4 puntos)}$$

b) Solución:

$$tan\,(x + 45°) = \frac{sen\,(x + 45°)}{cos\,(x + 45°)} = \frac{sen\,x \cdot cos\,45° + \text{cos x} \cdot \text{sen } 45°}{cos\,x \cdot cos\,45° \text{-sen x} \cdot \text{sen } 45°} \text{ (4 puntos)}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\,(sen\,x + cos\,x)}{\frac{\sqrt{2}}{2}\,(cos\,x - sen\,x)} = \frac{(sen\,x + cos\,x)}{(cos\,x - sen\,x)} \text{ (4 puntos)}$$

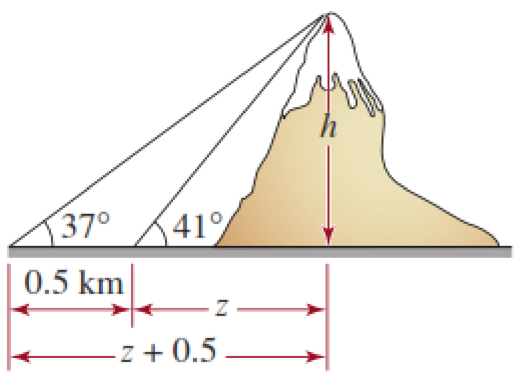
c) Solución:

$$sen^2 x = 1 - cos^2 x = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \Rightarrow sen\,x = \frac{2\sqrt{2}}{3} \text{ (4 puntos)}$$

$$y = cos^2 x + sen\, x = \frac{1}{9} + \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{1+6\sqrt{2}}{9} \text{(5 puntos)}$$

3. Un topógrafo usa un instrumento llamado **teodolito** para medir el ángulo de elevación entre el nivel del piso y la cumbre de una montaña. En un punto, se mide un ángulo de elevación de 41°. Medio kilómetro más lejos de la base de la montaña, el ángulo de elevación medido es de 37°. ¿Qué altura tiene la montaña? Hacer esquema gráfico de la situación.

   Solución:



(6 puntos)

Sea h = altura de la montaña. Del esquema:

$$tan\,(37°) = \frac{h}{z+0{,}5} \Rightarrow h = (z+0{,}5)\, tan\,(37°)\ (1)$$

$$tan\,(41°) = \frac{h}{z} \Rightarrow h = z \cdot tan\,(41°)\ (2)\ \text{(4 puntos)}$$

Igualando (1) y (2) :

$$(z+0{,}5)\, tan\,(37°) = z \cdot tan\,(41°)$$

Despejando z:

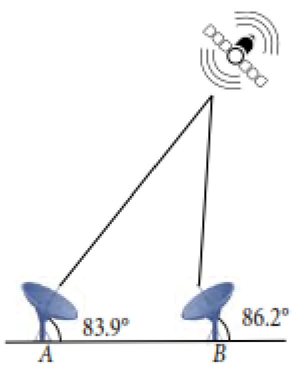
$$z = \frac{-\,0{,}5 tan\,(37°)}{tan\,(37°) - tan\,(41°)} \simeq 3,26\ \text{(8 puntos)}$$

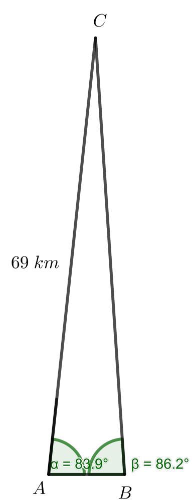
de (2)

$$h = z \cdot tan\,(41°) \simeq 2,83\, km\ \text{(3 puntos)}$$

La altura de la montaña es de aprox. 2,83 km. (4 puntos)

4. (20 puntos) La Figura muestra un satélite en órbita alrededor de la Tierra. El satélite pasa directamente sobre dos estaciones de radar A y B, que están a 69 km de distancia. Cuando el satélite está en un lado de las dos estaciones, los ángulos de la elevación en A y B se mide en 86.2 ° y 83.9 °, respectivamente. ¿A qué distancia está el satélite de estación A y qué tan alto es el satélite sobre el ¿suelo? Redondea las respuestas al km entero más cercano.
Solución:





Supongamo que el satélite está en el punto C. Los ángulos interiores del triámgulo ABC son:

$$\angle A = 83,9°,\ \angle B = 180°\text{-}86,2° = 93,8° \text{ y } \angle C = 2,3°,\ \overline{AB} = 69\ km \ \textbf{(4 puntos)}$$

Por Teorema del seno :

$$\frac{69}{sen\,(2,3°)} = \frac{\overline{AC}}{sen\,(93,8°)} \Rightarrow \overline{AC} = \frac{69 \cdot sen\,(93,8°)}{sen\,(2,3°)} \cong 1715,6 \simeq 1716\ km \ \textbf{(8 puntos)}$$

El satélite está aproximadamente a 1716 km de la estación A. **(2 puntos)**

Sea h la distancia del satélite del suelo.

$$h = \overline{AC} \cdot sen\,(83,9°) = 1706\ km \simeq 1706\ km \ \textbf{(4 puntos)}$$

El satélite está aproximadamente 1706 km del suelo **(2 puntos)**