



LISTADO N°2 - MÓDULO 2
ÁLGEBRA Y TRIGONOMETRÍA - 220143

📖 ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

1. Resuelva la ecuación dada.

a) $(\tan^2 \theta - 4)(2 \cos \theta + 1) = 0$

b) $3 \sin^2 \theta - 7 \sin \theta + 2 = 0$

c) $\tan^4 \theta - 13 \tan^2 \theta + 36 = 0$

d) $\cos \theta \sin \theta - 2 \cos \theta = 0$

e) $2 \cos^2 \theta + \sin \theta = 1$

f) $\sin^2 \theta = 4 - 2 \cos^2 \theta$

g) $\tan^2 \theta - 2 \sec \theta = 2$

h) $\csc^2 \theta = \cot \theta + 3$

i) $2 \tan \theta + \sec^2 \theta = 4$

2. Nos dan una ecuación.

i) Encuentre todas las soluciones de la ecuación.

ii) Encuentre las soluciones en el intervalo $[0, 2\pi[$.

a) $2 \cos 3\theta = 1$

c) $\cos \frac{\theta}{2} - 1 = 0$

e) $\tan \frac{\theta}{4} + \sqrt{3} = 0$

g) $\sin 2\theta = 3 \cos 2\theta$

b) $\sqrt{3} \tan 3\theta + 1 = 0$

d) $2 \sin \frac{\theta}{3} + \sqrt{3} = 0$

f) $\sec \frac{\theta}{2} = \cos \frac{\theta}{2}$

h) $\sec \theta - \tan \theta = \cos \theta$

i) $3 \tan^3 \theta - 3 \tan^2 \theta - \tan \theta + 1 = 0$

j) $4 \sin \theta \cos \theta + 2 \sin \theta - 2 \cos \theta - 1 = 0$

3. Use una Fórmula de Adición o Sustracción para simplificar la ecuación. A continuación encuentre todas las soluciones en el intervalo $[0, 2\pi[$.

a) $\cos \theta \cos 3\theta - \sin \theta \sin 3\theta = 0$

b) $\cos \theta \cos 2\theta + \sin \theta \sin 2\theta = \frac{1}{2}$

c) $\sin 2\theta \cos \theta - \cos 2\theta \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

4. Use una Fórmula de Ángulo Doble o Semiángulo para resolver la ecuación en el intervalo $[0, 2\pi[$.

a) $\sin 2\theta + \cos \theta = 0$

d) $\tan \theta + \cot \theta = 4 \sin 2\theta$

g) $\cos \theta - \sin \theta = \sqrt{2} \sin \frac{\theta}{2}$

b) $\tan \frac{\theta}{2} - \sin \theta = 0$

e) $2 \sin^2 \theta = 2 + \cos 2\theta$

h) $\sin \theta - \cos \theta = \frac{1}{2}$

c) $\cos 2\theta + \cos \theta = 2$

f) $\sin 3\theta - \sin 6\theta = 0$

📖 APLICACIONES DE ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

1. FASES DE LA LUNA. Cuando la Luna gira alrededor de la Tierra, el lado que da la cara a la Tierra por lo general está sólo parcialmente iluminado por el Sol. Las fases de la Luna describen cuánto de la superficie parece estar a la luz del Sol. Una medida astronómica está dada por la fracción F del disco lunar que está iluminado. Cuando el ángulo entre el Sol, la Tierra y la Luna es θ ($0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$), entonces

$$F = \frac{1}{2}(1 - \cos \theta)$$

Determine los ángulos θ que corresponden a las siguientes fases:

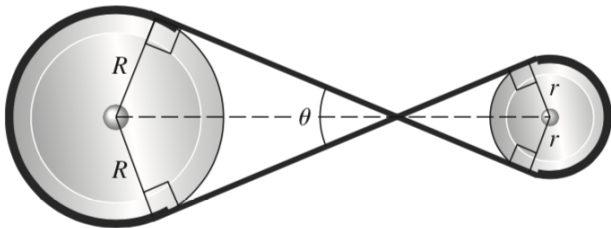
a) $F = 0$ (luna nueva)

b) $F = 0.25$ (cuarto creciente)

c) $F = 0.5$ (primero o último cuarto)

d) $F = 1$ (luna llena)

2. BANDAS Y POLEAS. Una banda delgada de longitud L rodea a dos poleas de radios R y r , como se ve en la figura.



a) Demuestre que el ángulo θ (en radianes) donde la banda se cruza satisface la ecuación

$$\theta + 2 \cot \frac{\theta}{2} = \frac{L}{R + r} - \pi$$

📖 Sugerencia: Expresé L en términos de R , r y θ sumando las longitudes de las partes curvas y rectas de la banda.

b) Suponga que $R = 2.42$ pies, $r = 1.21$ pies y $L = 27.78$ pies. Encuentre θ al resolver la ecuación del inciso a) gráficamente. Expresé su respuesta tanto en radianes como en grados.

📖 NÚMEROS COMPLEJOS

1. Evalúe la expresión y exprese el resultado en la forma $a + bi$.

a) $(4 + i)(3 + i)(1 + i)(3 - i)(4 - i)(1 - i) + 1$

b) $\left(\frac{1+i}{1-i} + \frac{1-i}{1+i} \right)^{15}$

c) $(1 + i)^8(1 - i)^8$

d) $\frac{2+3i}{2-3i} + \frac{3+2i}{3-2i} + \frac{2i}{13}$

2. Simplifique las siguientes expresiones.

a) $Q = \frac{i^{32} + i^{54} + i^{65}}{i^{46} + i^{520} - i^{673}}$

b) $R = \frac{i^{-25} + 2i^{-6} + i^{-63}}{i^{-6} + i^{-7} + i^{-33}}$

3. Sabiendo que x e y son números reales, resuelva las siguientes ecuaciones.

a) $(1 + i)x + (-2 + 5i)y = -4 + 17i$

b) $(1 + i) + (2 + 2i) + (3 + 3i) + \dots + (x + xi) = 820 + 820i$

4. Escriba z_1 y z_2 en forma polar (trigonométrica) y, a continuación, encuentre el producto $z_1 z_2$ y los cocientes z_1/z_2 y $1/z_1$.

a) $z_1 = -20, \quad z_2 = \sqrt{3} + i$

b) $z_1 = \sqrt{2} + \sqrt{2}i, \quad z_2 = 1 + \sqrt{3}i$

c) $z_1 = 3 + 4i, \quad z_2 = 2 - 2i$

5. Encuentre la potencia indicada usando el Teorema de De Moivre.

a) $(2 - 2i)^8$

c) $(-1 - i)^7$

e) $(2\sqrt{3} + 2i)^{-5}$

b) $\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{15}$

d) $(3 + \sqrt{3}i)^4$

f) $(1 - i)^{-8}$

6. Recuerde que dado un número complejo $z = a + bi$ su complejo conjugado, denotado por \bar{z} , es dado por $\bar{z} = a - bi$. Demuestre las siguientes afirmaciones.

a) $|\bar{z}| = |z|$ y $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$

b) $Re(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$ y $Im(z) = \frac{z - \bar{z}}{2}$

7. Para números reales t , la FÓRMULA DE EULER define $e^{it} = \cos t + i \sen t$. Demuestre que

a) $\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \quad ; \quad \sen t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2}, \quad \forall t \in \mathbb{R}$

b) $e^{i\pi} + 1 = 0$ (Esta famosa ecuación relaciona las 5 constantes más importantes en Matemáticas con tres de las operaciones fundamentales en Matemáticas.)

8. Encuentre las raíces indicadas y, a continuación, grafique las raíces en el plano complejo.

a) Las raíces cuartas de $-81i$

b) Las raíces quintas de 32

c) Las raíces cúbicas de $1 + i$

9. Resuelva la ecuación.

a) $z^4 + 1 = 0$

c) $z^3 - 4\sqrt{3} - 4i = 0$

e) $z^2 + (1 + i)z + i = 0$

b) $z^8 - i = 0$

d) $z^3 - 1 = 0$

f) $z^2 - iz + 1 = 0$

POLINOMIOS Y FRACCIONES PARCIALES

1. Realice la operación indicada.

a) $(10x - 3 + 7x^2) + (x^3 - 2x + 17)$

c) $(-x^3 - 2)(x^2 + 3x - 3)$

b) $(9x^3 - 4 + x^2 + 8x) - (7x^3 - 3x + 7)$

d) $(4x - 1)(2x - 1)(3x - 2)$

2. Use división sintética o larga para dividir $P(x)$ entre $D(x)$. Encuentre el cociente $Q(x)$ y el resto $R(x)$.

a) $P(x) = x^3 - 9x^2 + 27x - 27, \quad D(x) = x - 3$

c) $P(x) = 2x^4 + 3x^3 + 5x - 1, \quad D(x) = x^2 - 2x + 2$

b) $P(x) = 6x^3 + x^2 - 12x + 5, \quad D(x) = 3x - 4$

d) $P(x) = x^5 + x^4 - 2x^3 + x + 1, \quad D(x) = x^2 + x - 1$

3. Determine el resto de dividir $x^{567} - 3x^{400} + x^9 + 2$ entre $x - 1$.

4. Factorice el polinomio y determine todas sus raíces reales.

a) $P(x) = x^3 + 4x^2 - x - 4$

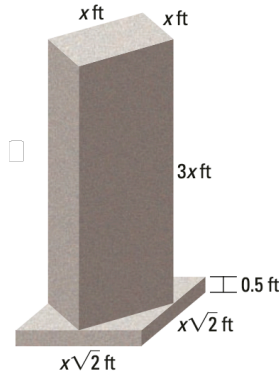
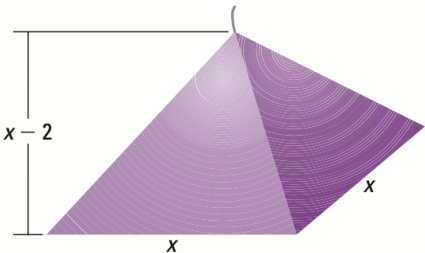
c) $P(x) = x^4 + 6x^3 + 12x^2 + 8x$

b) $P(x) = 2x^4 - 7x^3 - 27x^2 + 63x + 81$

d) $P(x) = x^5 - 2x^4 + 8x^2 - 13x + 6$

5. a) VELAS. Se está diseñando un kit para hacer velas. Cada kit debe contener 25 *pulgadas* cúbicas de cera de vela y un molde para hacer un modelo del edificio en forma de pirámide del Museo del Louvre en París. Se desea que la altura de la vela sea 2 *pulgadas* menos que la longitud de cada lado de la base cuadrada de la vela. ¿Cuáles deben ser las dimensiones del molde de la vela?

b) MONUMENTO. Se está diseñando un monumento y una base como se muestra en la figura y sólo se cuenta con 90 *pies* cúbicos de hormigón para ambas piezas. ¿Cuáles deben ser las dimensiones del monumento?



6. Descomponer en fracciones parciales la función racional dada.

a) $\frac{4x^2 - 7x - 12}{x(x + 2)(x - 3)}$

b) $\frac{x^2 + 11x + 6}{x^3 + 2x^2 - 4x - 8}$

c) $\frac{x^4 - 3x^3 + x - 1}{x(x - 1)^2(x^2 + 1)}$