PAUTA SUMATIVO N°2
ÁLGEBRA Y TRIGONOMETRÍA - MÓDULO 2
220143

1. Cuando la Luna gira alrededor de la Tierra, el lado que da la cara a la Tierra por lo general está sólo parcialmente iluminado por el Sol. Las fases de la Luna describen cuánto de la superficie parece estar a la luz del Sol. Una medida astronómica está dada por la fracción F del disco lunar que está iluminado. Cuando el ángulo entre el Sol, la Tierra y la Luna es θ ($0° \leq \theta \leq 360°$), entonces

$$F = \frac{1}{2}(1 - \cos\theta)$$

Determine los ángulos θ que corresponden a las siguientes fases:

a) $F = 1/4$ (cuarto creciente) | *b*) $F = 1$ (luna llena)

Solución.

a) Note que **(10 puntos)**

$$F = \frac{1}{4} \quad \Longleftrightarrow \quad \cos\theta = \frac{1}{2}$$

Luego, los ángulos que satisfacen la ecuaicón son $\theta = 60°$ y $\theta = 300°$.

b) Desde que **(10 puntos)**

$$F = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \cos\theta = -1,$$

el único ángulo que satisface la ecuación es $\theta = 180°$.

2. **MARQUE LA ALTERNATIVA CORRECTA.** Justifique en cada caso.

i) El valor de la expresión $E = \left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{30}$ es:

a) 1 | *b*) -1 | *c*) i | *d*) $1+i$

Solución.

Realizando manipulaciones algebraicas se tiene **(12 puntos)**

$$\begin{aligned} E &= \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{30} = \left(\frac{1+i}{1-i}\cdot\frac{1+i}{1+i}\right)^{30} = \left[\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}\right]^{30} \\ &= \left(\frac{1+2i+i^2}{1-i^2}\right)^{30} = \left(\frac{1+2i-1}{1+1}\right)^{30} = \left(\frac{2i}{2}\right)^{30} \\ &= i^{30} = (i^4)^7 \cdot i^2 = 1\cdot(-1) = -1. \end{aligned}$$

Luego, la alternativa correcta es la b). **(3 puntos)**

ii) Dos raíces de la ecuación $z^3 = 1$ son:

a) $1 \;;\; \frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})$ | *c*) $1 \;;\; \frac{1}{2}(1-i\sqrt{3})$

b) $1 \;;\; -\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})$ | *d*) $\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3}) \;;\; \frac{1}{2}(1-i\sqrt{3})$

Solución.

Las raíces cúbicas de la unidad son dadas por **(4 puntos)**

$$z_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{2k\pi}{3}\right), \quad k = 0, 1, 2$$

de lo cual resultan **(8 puntos)**

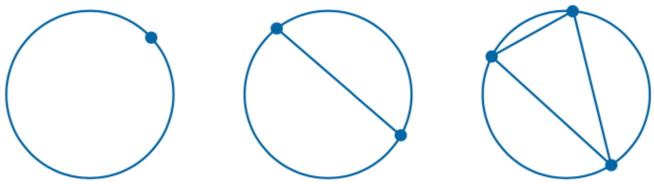
$$\begin{aligned} z_0 &= \cos 0^\circ + i\,\text{sen}\, 0^\circ = 1 \\ z_1 &= \cos 120^\circ + i\,\text{sen}\, 120^\circ = -\cos 60^\circ + i\,\text{sen}\, 60^\circ = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ z_2 &= \cos 240^\circ + i\,\text{sen}\, 240^\circ = -\cos 60^\circ - i\,\text{sen}\, 60^\circ = -\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3}) \end{aligned}$$

Por tanto, la alternativa correcta es la b). **(3 puntos)**

3. **MARQUE LA ALTERNATIVA CORRECTA.** Justifique en el caso que se pida.

El máximo número de regiones formadas al conectar n puntos de un círculo puede ser descrita por la función polinómica:

$$f(n) = \frac{1}{24}(n^4 - 6n^3 + 23n^2 - 18n + 24)$$



i) Determine el **grado**, el **coeficiente principal** y el **término independiente** de $f(n)$.

a) $4 \;;\; 1 \;;\; 24$	b) $4 \;;\; n^4 \;;\; 24$	c) $4 \;;\; \frac{1}{24} \;;\; 1$	d) $4 ; \frac{n^4}{24} \;;\; 1$

ii) ¿Cuál es el máximo número de regiones formadas al conectar 8 puntos de un círculo?,

a) 4	b) 98	c) 2376	d) N.A.

iii) ¿Cuál es el **resto** de dividir $f(n)$ por $n-8$?, ¿Es $n-8$ un **factor** de $f(n)$? Justifique su respuesta.

a) 0 ; Sí	b) 0 ; No	c) 99 ; Sí	d) 99 ; No

Solución.

i) Alternativa c) **(5 puntos)**

ii) Alternativa d), pues el máximo número de regiones formados al conectar 8 puntos es $f(8) = 99$. **(5 puntos)**

iii) Alternativa d), pues el resto de la división es $f(8) = 99 \neq 0$ y en consecuencia $n-8$ **no es un factor** de $f(n)$. **(5 puntos)**

4. Dado el polinomio

$$P(x) = 2x^4 + 5x^3 - 8x^2 - 17x - 6$$

a) **Use división larga** para dividir $P(x)$ entre $D(x) = x^2 - x + 2$. Encuentre el cociente y el resto.

b) **Use división sintética** para dividir $P(x)$ entre $2x+1$. Encuentre el cociente y el resto.

Solución.

a) Usando división larga para dividir el polinomio $P(x)$ entre $D(x)$: **(18 puntos)**

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrr|c}
+ & 2x^4 & + & 5x^3 & - & 8x^2 & - & 17x & - & 6 & x^2-x+2 \\
- & 2x^4 & + & 2x^3 & - & 4x^2 & & & & & \overline{2x^2 + 7x - 5} \\
\hline
 & & & 7x^3 & - & 12x^2 & - & 17x & & & \\
 & & - & 7x^3 & + & 7x^2 & - & 14x & & & \\
\cline{3-8}
 & & & & - & 5x^2 & - & 31x & - & 6 & \\
 & & & & & 5x^2 & - & 5x & + & 10 & \\
\cline{5-10}
 & & & & & & - & 36x & + & 4 & \\
\end{array}
$$

encontramos que el polinomio cociente es $Q(x) = 2x^2 + 7x - 5$ y el resto es $R(x) = -36x + 4$.

b) Dividimos $D(x)$ entre $2x + 1$ usando división sintética (Método de Ruffini) **(17 puntos)**

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
 & 2 & 5 & -8 & -17 & -6 \\
-1/2 & & -1 & -2 & 5 & 6 \\
\hline
 & 2 & 4 & -10 & -12 & 0 \\
\cline{2-5}
 & & & 2 & & \\
\end{array}
$$

obteniendo el cociente $Q(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$ y el resto $R(x) = 0$.