UNIVERSIDAD DEL BIO-BIO
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

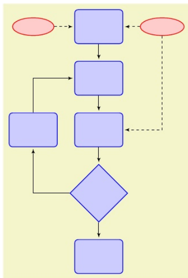
APUNTES DE ÁLGEBRA Y TRIGONOMETRÍA: MÓDULO I PARA INGENIERÍA CIVIL Y EJECUCIÓN INFORMÁTICA

Marcelo Huenchucona C.
Carlos Picarte F.

Concepción, 8 de marzo de 2018.

RPI: Inscripción N° 279.534
Re-Edición Texto Financiado por Proyecto Docencia: FDD2011-11
Compilado en LaTeXcon MiKTeX2.8

Índice general



1 Elementos de Lógica

La Lógica desde siempre

Un filósofo se asombró cuando Rusell le dijo que una proposición falsa implica cualquier proposición.
Le dijo: *¿Quieres decir que del enunciado de que dos más dos es igual a 5 sigue que tu eres el Papa?*.
Russell respondió: *Si*.
El filósofo preguntó: *¿Puedes demostrar esto?*
Russell respondió: *Ciertamente*, e inventó en el acto la demostración siguiente:

1. Supón que $2 + 2 = 5$
2. Sustrayendo dos de ambos lados de la ecuación obtenemos $2 = 3$
3. Transponiendo, obtenemos $3 = 2$
4. Sustrayendo uno de ambos lados, obtenemos $2 = 1$.

Ahora bien, *el Papa y yo somos dos. Puesto que dos es igual a uno, entonces el Papa y yo somos uno. Por consiguiente yo soy el Papa.*

1.1 Introducción

Parte de la lógica que estudia las relaciones con proposiciones.

Definición 1.1 (Proposición)**.**

Ordenación de ideas susceptibles de atribuirle en un cierto contexto uno sólo de los valores, verdadero(V) o falso(F).

Ejemplo 1.1.

- Hoy es un día caluroso (V).
- Los peces vuelan (F).
- $10 = 5 + 6$ (F).

NOTACIÓN : Las proposiciones las designaremos con letras minúsculas "p, q, r, s,etc.", y al conjunto de todas las proposiciones lo designaremos por $\mathcal{P}$.

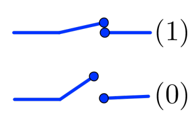
1.2 Tablas de Verdad

Razonar es ordenar y clasificar ideas, es por ello que es muy usual usar tablas para representar en forma ordenada y resumida. En lógica, éstas reciben el nombre de *Tablas de Verdad*, ejemplo:

proposiciones
valores de verdad

$\mathcal{P}$
1
0

$\mathcal{P}$
V
F



1.3 Conectores Lógicos

Son símbolos con los cuales se pueden operar las proposiciones.

Definición 1.2 (Negación Lógica: $-, ', \sim, \neg$).

Si p es una proposición, se llama negación lógica de p a la proposición $-p, p', \sim p, \neg p$.

p	$\neg p$
V	F
F	V

Ejemplo 1.2.

p: Santiago es capital de Chile.

$\neg p$: Santiago **no** es capital de Chile.

Definición 1.3 (Conjunción lógica: $\wedge$).

Sean p y q dos proposiciones. Se llama conjunción lógica de p y q a la proposición "$p \wedge q$", y se lee "p y q".

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Ejemplo 1.3.

Dadas las proposiciones

p: $2+3=5$.(V) q: 2 es un número primo.(V) r: 2 es un número impar.(F)

El valor de verdad de:

1. $p \wedge q$: (V)
2. $q \wedge r$: (F)

Definición 1.4 (Disyunción lógica: $\vee$).

Sean p y q dos proposiciones. Se llama disyunción lógica de p y q a la proposición "$p \vee q$", y se lee "p o q".

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Ejemplo 1.4.

Dadas las proposiciones

p: $2+3=5$.(V) q: 2 es un número primo.(V) r: 2 es un número impar.(F)

El valor de verdad de:

1. $p \vee q$: (V)
2. $q \vee r$: (V)

Definición 1.5 (Condicional lógico: $\longrightarrow$).

Sean p y q dos proposiciones. Se llama condicional lógico de p y q a la proposición "$p \rightarrow q$", y se lee " si p entonces q."

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Ejemplo 1.5.

Dadas las proposiciones

p: La luna es un astro.(F) q: El sol es un astro.(V)

El valor de verdad de:

1. $p \rightarrow q$: (V)
2. $q \rightarrow p$: (F)

Observación 1.1.

En la proposición "$p \rightarrow q$", p se llama **antecedente** y q **consecuente**.
El condicional es falso(F) solamente si el antecedente es verdadero(V) y el consecuente falso(F).

Definición 1.6 (Bicondicional lógica: $\leftrightarrow$)**.**

Sean p y q dos proposiciones. Se llama bicondicional lógica de p y q a la proposición "$p \leftrightarrow q$", y se lee "p si y sólo si q."

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Ejemplo 1.6.

Dadas las proposiciones

q: 6 es un número par.(V) r: 2 es un número impar.(F)

El valor de verdad de:

$q \leftrightarrow r$: (F)

Observación 1.2.

Si $p \leftrightarrow q$ es verdadera, entonces las proposiciones p y q son **equivalentes**.

1.4 Polinomios Booleanos

Definición 1.7.

Se llaman así a toda combinación finita de proposiciones con los conectivos lógicos. Un polinomio booleano, lo podemos denotar por $\mathcal{P}(p, q, r, ...)$, donde $p, q, r, ...$ son proposiciones lógicas,

Ejemplo 1.7.

1. $\mathcal{P}(p, q): \quad p \wedge q$
2. $\mathcal{P}(p, q): \quad p \wedge \neg q$
3. $\mathcal{P}(p, q, r): \quad [(p \to q) \wedge (q \to r)] \leftrightarrow (p \to r)$

Observación 1.3.

Si n es el número de proposiciones en el polinomio, el número de probabilidades (resultados posibles) está dado por 2^n veces.

1.5 Tautología, Contingencia y Contradicción

Definición 1.8.

Sea $\mathcal{P}(p, q, r, ...)$ un polinomio booleano. Se dice que dicho polinomio es una **tautología**, si al reemplazar las variables $p, q, r, ..$ por proposiciones cualesquieras de $\mathcal{P}$, se obtiene una proposición **verdadera**.
Si al sustituir las variables $p, q, r, ...$ por algunas proposiciones de $\mathcal{P}$, se obtiene una proposición verdadera y algunas falsas, entonces el polinomio es una **contingencia**.
El polinomio es una **contradicción**, si al sustituir los valores de $\mathcal{P}$, por cualquier proposición se obtiene una proposición **falsa**.

Ejemplo 1.8 $(p \wedge p)$**.**

p	p	$p \wedge p$
V	V	V
F	F	F

Contingencia

Ejemplo 1.9 $(p \vee \neg p)$**.**

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$
V	F	V
F	V	V

Tautología

EJERCICIO : Averiguar si los siguientes polinomios booleanos corresponden a **tautología**, **contingencia** o **contradicción**.

1. $p \wedge \neg p$ 2.- $(p \to q) \vee (\neg q \to \neg p)$ 3.- $[(p \to q) \wedge (q \to r)] \leftrightarrow (p \to r)$

1.5.1. Tautologías de uso frecuente

Resumen 1.

1. $(p \wedge p) \leftrightarrow p$
   $(p \vee p) \leftrightarrow p$
2. $\neg(\neg p) \leftrightarrow p$
   $p \vee \neg p$
3. $p \to p$
   $p \leftrightarrow p$
4. $(p \wedge q) \leftrightarrow (q \wedge p)$
   $(p \vee q) \leftrightarrow (q \vee p)$
   $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (q \leftrightarrow p)$
5. $[(p \wedge q) \wedge r] \leftrightarrow [p \wedge (q \wedge r)]$
   $[(p \vee q) \vee r] \leftrightarrow [p \vee (q \vee r)]$
6. $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$
   $\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$
7. $(p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$
8. $[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)$
9. $[p \wedge (q \vee r)] \leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$
   $[p \vee (q \wedge r)] \leftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$
   $[p \to (q \wedge r)] \leftrightarrow [(p \to q) \wedge (p \to r)]$
   $[p \to (q \vee r)] \leftrightarrow [(p \to q) \vee (p \to r)]$
10. $[(p \to q) \wedge (q \to p)] \leftrightarrow (p \leftrightarrow q)$
    $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow [(p \to q) \wedge (q \to p)]$
11. $(p \to q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$
12. $\neg(p \to q) \leftrightarrow (p \wedge \neg q)$
13. $\neg(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow [(\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)]$

Ejemplo 1.10.

Muestre que $\neg(p \to q) \leftrightarrow (p \wedge \neg q)$ es una tautología.
Sol:

p	q	$\neg q$	$(p \to q)$	$\neg(p \to q)$	$\neg(p \to q) \leftrightarrow (p \wedge \neg q)$	$(p \wedge \neg q)$
V	V	F	V	F	V	F
V	F	V	F	V	V	V
F	V	F	V	F	V	F
F	F	V	V	F	V	F

1.6 Equivalencia e Implicación

Definición 1.9.

Sean p y q proposiciones de $\mathcal{P}$. Se dice que las proposiciones p y q son equivalentes, si la proposición $p \leftrightarrow q$ es verdadera.

NOTACIÓN : Anotamos "$p \Leftrightarrow q$", y se lee: p es equivalente a q.

Definición 1.10.

Sean p y q proposiciones de $\mathcal{P}$. Diremos que la proposición p **implica lógicamente** a la proposición q, si $p \to q$ es una proposición verdadera.

NOTACIÓN : "$p \Rightarrow q$", y se lee: $\left\{\begin{array}{l} p \text{ implica } q \\ \text{Si } p, \text{ entonces } q \\ q \text{ se sigue de } p \\ p \text{ es condición suficiente para } q \\ q \text{ es condición necesaria para } p \end{array}\right.$

Observación 1.4.

Si la proposición $p \to q$ es verdadera, escribimos $p \Rightarrow q$.
Si la proposición $q \to p$ es verdadera, escribimos $q \Rightarrow p$.
La implicación $q \Rightarrow p$ se llama **implicación recíproca** de $p \Rightarrow q$, la cual pasa a llamarse **implicación directa**.

Observación 1.5.

Si la proposición $\neg p \to \neg q$ es verdadera, escribimos $\neg p \Rightarrow \neg q$.
La implicación $\neg p \Rightarrow \neg q$ se llama **implicación contraria** de $p \Rightarrow q$.

Observación 1.6.

La proposición $\neg q \to \neg p$ es verdadera si $p \to q$ es verdadera, luego podemos escribir $\neg q \Rightarrow \neg p$.
La implicación $\neg q \Rightarrow \neg p$ se llama **implicación contrarecíproca** de $p \Rightarrow q$.

Las implicaciones de la forma $H \Rightarrow T$ se llaman **Teoremas**, donde H es la **H**ipótesis y T es la **T**esis.

Demostrar un teorema es verificar la verdad de la tesis a partir de la verdad de la hipótesis y de razonamientos lógicos, único caso que interesa, pués si H es falsa, puede ocurrir que T pueda ser verdadera o falsa, es decir, H verdadera es el único caso que asegura la verdad de T.

Observación 1.7.

Dado que $(p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$ es una tautologia (ejercicio), un teorema $H \Rightarrow T$ y su contrarecíproco $\neg T \Rightarrow \neg H$ son siempre equivalentes (tienen el mismo valor de verdad), esto nos permite demostrar un teorema de una forma indirecta.

Observación 1.8.

La importancia de los teoremas $H \Rightarrow T$, radica en que se puede obtener nuevos conocimientos a partir de conocimientos previos y de las leyes de la lógica.

1.7 Cuantificadores universal y existencial

Existen proposiciones en matemática cuyo valor de verdad depende de un conjunto, por ejemplo: Sea $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ el conjunto de los números naturales, $P(x) : x \geq 1$ y $Q(x) : x < 5$ dos proposiciones.

La proposición $P(x)$ es verdadera para cualquier número natural x, en cambio la proposición $Q(x)$ es verdadera para algunos valores de x en $\mathbb{N}$.

Diremos que el **dominio de validez** de la proposición $P(x)$ es $\mathbb{N}$, y el dominio de validez de la proposición $Q(x)$ es $\{1,2,3,4\}$.

Decir que el dominio de validez de $P(x)$ es $\mathbb{N}$, se traduce por:

$$(\forall x)(x \in \mathbb{N})(P(x)) \qquad \vee \qquad (\forall x)(x \in \mathbb{N})(x \geq 1)$$

Decir que el dominio de validez de $Q(x)$ es $\{1,2,3,4\}$, se traduce por:

$$(\exists x)(x \in \mathbb{N})(Q(x)) \qquad \vee \qquad (\exists x)(x \in \mathbb{N})(x < 5)$$

Definición 1.11.

$\forall$: Se llama **Cuantificador Universal**

$\exists$: Se llama **Cuantificador Existencial**

Observación 1.9.

Es válido escribir: $(\forall x)(x \in \mathbb{N} \Rightarrow x \geq 1)$

1.7.1. Negación de Cuantificadores

Definición 1.12 (Negación cuantificador universal $\forall$)**.**

Sea $P(x) : (\forall x)(x \in A)(p(x))$
$\neg P(x) : (\exists x)(x \in A)(\neg p(x))$

Ejemplo 1.11.

Sea $P(x)$:*Todos los animales caminan en cuatro patas.*
$\neg P(x)$:*Existe un animal que* **no** *camina en cuatro patas.*

Definición 1.13 (Negación cuantificador existencial $\exists$)**.**

Sea $Q(x) : (\exists x)(x \in A)(q(x))$
$\neg Q(x) : (\forall x)(x \in A)(\neg q(x))$

Ejemplo 1.12.

Sea $Q(x)$:*Existe un animal que vuela.*
$\neg Q(x)$:*Todos los animales* **no** *vuelan.*

Ejemplo 1.13.

1. $p : (\forall x)(x \in \mathbb{R})(x^2 \geq 0)$
   $\neg p : (\exists x)(x \in \mathbb{R})(x^2 \ngeq 0) \qquad \vee \qquad (\exists x)(x \in \mathbb{R})(x^2 < 0)$
   Usando otra notación
   $p : (\forall x)(x \in \mathbb{R} \Rightarrow x^2 \geq 0)$
   $\neg p : (\exists x)(x \in \mathbb{R} \wedge x^2 < 0)$

2. p : Cualquieran sean x e y reales, se tiene que $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
   $p : (\forall x)(\forall y)(x \in \mathbb{R})(y \in \mathbb{R})((x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2)$
   $\neg p : (\exists x)(\exists y)(x, y \in \mathbb{R})((x+y)^2 \neq x^2 + 2xy + y^2)$

Observación 1.10.

La negación de una implicancia se transforma en una disyunción, es decir,
$\neg(p \Rightarrow q) = \neg(\neg p \vee \neg q) = (p \wedge \neg q)$

Observación 1.11.

La última proposición puede quedar escrita de la siguiente manera:
$q : (\exists ! x)(x \in \mathbb{N})(x \leq 1)$,
pero una proposición escrita de esta forma **no puede negarse** en forma directa (no posee un símbolo de negación).

1.8 Métodos de Demostración

1.8.1. Método Directo $(H \Rightarrow T)$

Consiste en probar que la tesis es verdadera, usando de propiedades y definiciones conocidas y en algún momento haciendo necesariamente uso de la hipótesis.

Ejemplo 1.14.

Sea $p(x)$: Si $x > 0$, entonces $x + 1 > 0$.
$H : x > 0$
$T : x + 1 > 0$.

Solución: Al demostrar por el método directo, se tiene:

$$\begin{array}{llll} H : x > 0 \quad /(+1) & \Rightarrow & x + 1 > 0 + 1 & \\ & \Rightarrow & x + 1 > 0 + 1 > 0 & \text{, pues } 1 > 0 \\ & \Rightarrow & x + 1 > 0 & \end{array}$$

1.8.2. Contrarecíproco ($\neg T \Rightarrow \neg H$)

Consiste en suponer que la tesis es falsa (e. d. $\neg T$ es verdadera), y se debe concluir que la hipótesis es falsa (e. d. $\neg H$ es verdadera).

Ejemplo 1.15.

Sea $p(x)$: Si $x \geq 0$, entoces $x + 1 \geq 0$.
$H : x \geq 0$, así $\neg H : x < 0$
$T : x + 1 \geq 0$, así $\neg T : x + 1 < 0$

Solución: Al demostrar por el método contrarecíproco, se tiene:

$$\begin{array}{lllllll} \neg T : & x + 1 < 0 & \Rightarrow & x < -1 & \Rightarrow & x < -1 < 0 \\ & & \Rightarrow & x < 0 & \Rightarrow & \neg H \end{array}$$

Luege, $\neg T \Rightarrow \neg H$ e. d. $\quad H \Rightarrow T$ es verdadero.

1.8.3. Método Indirecto ($H \Rightarrow T$)

Se asume la hipótesis verdadera y se supone que la tesis es falsa ($\neg T$verdadera), luego se debe llegar a una contradicción con la hipótesis.

Ejemplo 1.16.

Sea $p(x)$: Si $a, b \in \mathbb{R}^+$, entonces $a \cdot b \in \mathbb{R}^+$
$H : a, b \in \mathbb{R}^+$
$T : a \cdot b \in \mathbb{R}^+$

Solución: Al demostrar por el método indirecto
Suponemos que H es verdadera, es decir, $a, b \in \mathbb{R}^+$ y que T es falsa, e. d. $a \cdot b \notin \mathbb{R}^+$, luego

$(\neg T)$: $a \cdot b \notin \mathbb{R}^+ \Rightarrow a \cdot b = 0 \quad \vee \quad -(a \cdot b) \in \mathbb{R}^+$

i) Si $a \cdot b = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 0 \vee b = 0$

$\Rightarrow \quad a \notin \mathbb{R}^+ \vee b \notin \mathbb{R}^+$

Contradicción, pues $a, b \in \mathbb{R}^+$

ii) Si $a \cdot b \in \mathbb{R}^- \quad \Rightarrow \quad a \cdot b < 0$, como $a \in \mathbb{R}^+, a^{-1} \in \mathbb{R}^+$

$\Rightarrow \quad a^{-1} \cdot a \cdot b < 1 \cdot b < 0$

Contradicción, pues $a, b \in \mathbb{R}^+$

Lo que contradice la hipótesis luego $(H \Rightarrow T)$ es verdadera

1.8.4. Contraejemplo

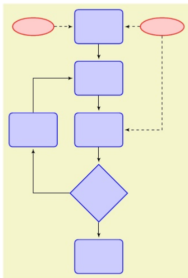
Este método es usado sólo para demostrar la falsedad de una proposición y no su certeza.

Consiste en buscar un ejemplo en el cual se verifica la hipótesis, pero no la tesis (e. d. la tesis es falsa).

Ejemplo 1.17.

Sea $p(x) : \forall x \in \mathbb{R}, x^2 > x$.
$H : x \in \mathbb{R}$
$T : x^2 > x$

Solución: Es falso, pues si $x = \frac{1}{2}$, se tiene que
$x = \frac{1}{2} \Rightarrow H$ es verdadera pues $\frac{1}{2} \in \mathbb{R}$ y
$x^2 = \frac{1}{4} < \frac{1}{2} = x \Rightarrow T$ es falsa.



2 Conjuntos

¿Porqué estudiar Conjuntos?

El físico Freeman Dyson cuenta siempre la famosa conversación que mantuvieron el astrónomo James Jeans y el topólogo Oswald Veblen el la primera década del siglo XX acerca del plan de estudios de Princeton.
Podríamos suprimir la teoría de conjuntos - dijo Jeans; *es una materia que jamás será útil para la física.*
Resulta que la teoría de conjuntos ha sido esencial para el estudio de la mecánica cuántica.

2.1 Introducción

La noción de número y contar ha acompañado a la humanidad desde la prehistoria. Como todo conocimiento desarrollado por el hombre primitivo, la causa para que el ser humano emprendiera sus pasos en el contar y plasmar cantidades surgió fundamentalmente de la necesidad de adaptarse al medio ambiente, proteger sus bienes y distinguir los ciclos de la naturaleza pues ya percibían y observaban con cuidado los ritmos que ésta posee y su fina relación con las oportunidades de alimentación y, en general, con la conservación de la vida, entre otros.

Cabe resaltar que el ser humano es incapaz de percibir, en forma directa e inmediata, los grupos mayores a 4 objetos sin un aprendizaje previo; motivo que hace indiscutible que para el hombre este conocimiento era completamente necesario e imprescindible a favor de su supervivencia.

La razón para que actualmente se utilice un sistema decimal, se deriva principalmente de que ser humano necesitó hacer una representación simbólica del conteo con su propio cuerpo, y para ello se valió básicamente de los 10 dedos de las manos y aunque éste no fue el único sistema utilizado por la humanidad, sí fue el más difundido.

2.2 Definición de Conjunto

Sea $P(x)$ una función proposicional

Definición 2.1.

Se dice que un **Conjunto** es la reunión de todos los elementos que verifican una cierta propiedad $P(x)$.

NOTACIÓN : $A = \{x : P(x)\}$ y se dice A un conjunto, donde los x que verifican $P(x)$ se les llama "*elementos* del conjunto A", se dirá "*x pertenece a A*" ($x \in A$).

Observación 2.1.

Los conjuntos se denotarán con letras mayúsculas (ejem.: $A, B, ...$) y sus elementos por letras minúsculas (ejem.: $a, b, x, y, ...$).

Ejemplo 2.1.

$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ $\quad B = \{x : \text{es dígito }\}$

Observación 2.2.

Notemos que el conjunto A contiene los mismos elementos que el conjunto B.

Definición 2.2.

Para escribir un conjunto, tenemos dos formas

1. **Extensión:** Consiste en enumerar los elementos del conjunto.
   Ejemplo: Conjunto A dado antes.

2. **Comprensión:** Consiste en establecer una propiedad común a los elementos del conjunto.
   Ejemplo: Conjunto B dado antes.

Definición 2.3.

Sean A y B conjuntos. Diremos que un conjunto A **es igual a** B ssi poseen los mismos elementos.

Ejemplo 2.2.

1. $A = \{x/x \in \mathbb{N}$ y x es par $\}$, $B = \{x/x = 2 \cdot a, a \in \mathbb{N}\}$
2. $A = \{*, \Theta, \triangle, \sum\}$, $B = \{\Theta, \sum, \triangle, *\}$

Definición 2.4.

1. Diremos que un conjunto A es **finito**, si posee un número finito de elementos.
2. Si el número de elementos de A es infinito, se dice que A es un conjunto **infinito**.

Definición 2.5.

Sean A y B dos conjuntos.
Si cada elemento x de B es también un elemento de A, se dice que B es un subconjunto de A

NOTACIÓN : $B \subseteq A$

Ejemplo 2.3.

$B = \{1, 2\}, \quad A = \{1, 2, 3\}$, entonces $B \subseteq A$.

Observación 2.3.

1. Si $B \subseteq A$ y $B \neq A$, se dice que B es subconjunto propio de A, y lo denotamos por $B \subset A$.
2. Dos conjuntos A y B son iguales ssi $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$, es decir, $(A = B) \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$

2.3 Propiedades de las relaciones de inclusión e igualdad de conjuntos

Teorema 2.1 (Propiedades de inclusión)**.**

Sean A, B y C conjuntos cualesquieras, entonces se tiene:

1. $A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x \in A \Rightarrow x \in B)$
2. $A \subseteq A$ (reflexividad)
3. Si $A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Rightarrow A = B$ (antisimétrica)
4. Si $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$(transitiva)

Teorema 2.2 (Propiedades de la igualdad)**.**

Sean A, B y C conjuntos, entonces

1. $(A = B) \Leftrightarrow (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$
2. $A = A$ (reflexiva)
3. Si $A = B$, entonces $B = A$ (simétrica)
4. Si $A = B$ y $B = C$, entonces $A = C$ (transitiva)

Ahora, definiremos dos importantes conjuntos

Definición 2.6.

1. El conjunto **Universo**, que corresponde al conjunto que contiene a la totalidad de los objetos básicos de interés para el estudio y lo denotamos por $\mathcal{U}$.
2. El conjunto **Vacío**, que corresponde al conjunto que no posee elementos y lo denotamos por $\varnothing$.
   $\varnothing = \{x \in \mathcal{U} / x \neq x\}$

Observación 2.4.

Sea A un conjunto cualquiera, entonces $\varnothing \subseteq A \subseteq \mathcal{U}$

EJERCICIO : Probar lo anterior

2.4 Definiciones de las Operaciones Básicas con Conjuntos

Definición 2.7 (Complemento)**.**

Si A es un conjunto cualquiera, se llama "**Complemento** del conjunto A", denotado por A^c, al conjunto definido por:

$$A^c = \{x / x \in \mathcal{U} \land x \notin A\}$$

es decir, el conjunto de los elementos de $\mathcal{U}$ que no están en A.

Ejemplo 2.4.

$\mathcal{U} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ y $A = \{1, 2, 3, 4\}$, entonces: $A^c = \{0, 5\}$

Observación 2.5.

$\mathcal{U}^c = \varnothing$; $\varnothing^c = \mathcal{U}$

Definición 2.8 (Diferencia)**.**

Si A y B son conjuntos, se llama "**Diferencia** entre A y B"y se denota por $A \backslash B$ o $A - B$, al conjunto definidos por:

$$A - B\{x / x \in A \land x \notin B\}$$

Ejemplo 2.5.

$A = \{1,2,3\}, B = \{1,2,5\}$, entonces: $A - B = \{3\}$

Observación 2.6.

$A - \varnothing = A, \qquad A - \mathcal{U} = \varnothing.$

Definición 2.9 (Unión)**.**

Si A, B son conjuntos, se llama "**unión** de A y B ", denotado por $A \cup B$, al conjunto definido por:

$$A \cup B = \{x/(x \in A) \vee (x \in B)\}$$

Ejemplo 2.6.

Sea $A = \{1,2,3\}$, $\quad B = \{1,2,5\}$
$A \cup B = \{1,2,3,5\}$

Observación 2.7.

$A \cup \varnothing = A$
$A \cup A = A$
$A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$

Definición 2.10 (Intersección)**.**

Si A y B son conjuntos, se llama "**Intersección** de A y B", denotado por $A \cap B$, al conjunto definido por:

$$A \cap B = \{x/(x \in A) \wedge (x \in B)\}$$

Ejemplo 2.7.

Sean $A = \{1,2,3\}$, $\quad B = \{1,2,5\}$
$A \cap B = \{1,2\}$

Observación 2.8.

1. $A \cap \mathcal{U} = A$
   $A \cap A = A$
   $A \cap \varnothing = \varnothing$

Definición 2.11.

Si $A \cap B = \varnothing$, entonces los conjuntos A y B se dicen **Disjuntos**.

Definición 2.12 (Diferencia Simétrica)**.**

Si A y B son conjuntos, se llama "**Diferencia simétrica** de A yB", denotado por $A \triangle B$, al conjunto definido por:

$$A \triangle B = \{x/(x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)\}$$

Observación 2.9.

Usando la notación de diferencia de conjuntos, quedaría:

$$A \triangle B = (A - B) \cup (B - A)$$

Ejemplo 2.8.

Sean $A = \{1,2,3\}$, $\quad B = \{1,2,5\}$, entonces : $A \triangle B = \{3\} \cup \{5\} = \{3,5\}$

Observación 2.10.

$A \triangle A = \varnothing \qquad A \triangle \varnothing = A \qquad A \triangle \mathcal{U} = A^c$

2.4.1. Leyes del Algebra de Conjuntos

Resumen 2.

1. $A \cup A = A$
   $A \cap A = A$ (Leyes de Idempotencia)

2. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
   $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (Leyes Asociativas)

3. $A \cup B = B \cup A$
   $A \cap B = B \cap A$ (Leyes Conmutativas)

4. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
   $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (Leyes Distributivas)

5. $A \cup \varnothing = A$
   $A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$
   $A \cap \varnothing = \varnothing$ (Leyes de Identidad)
   $A \cap \mathcal{U} = A$

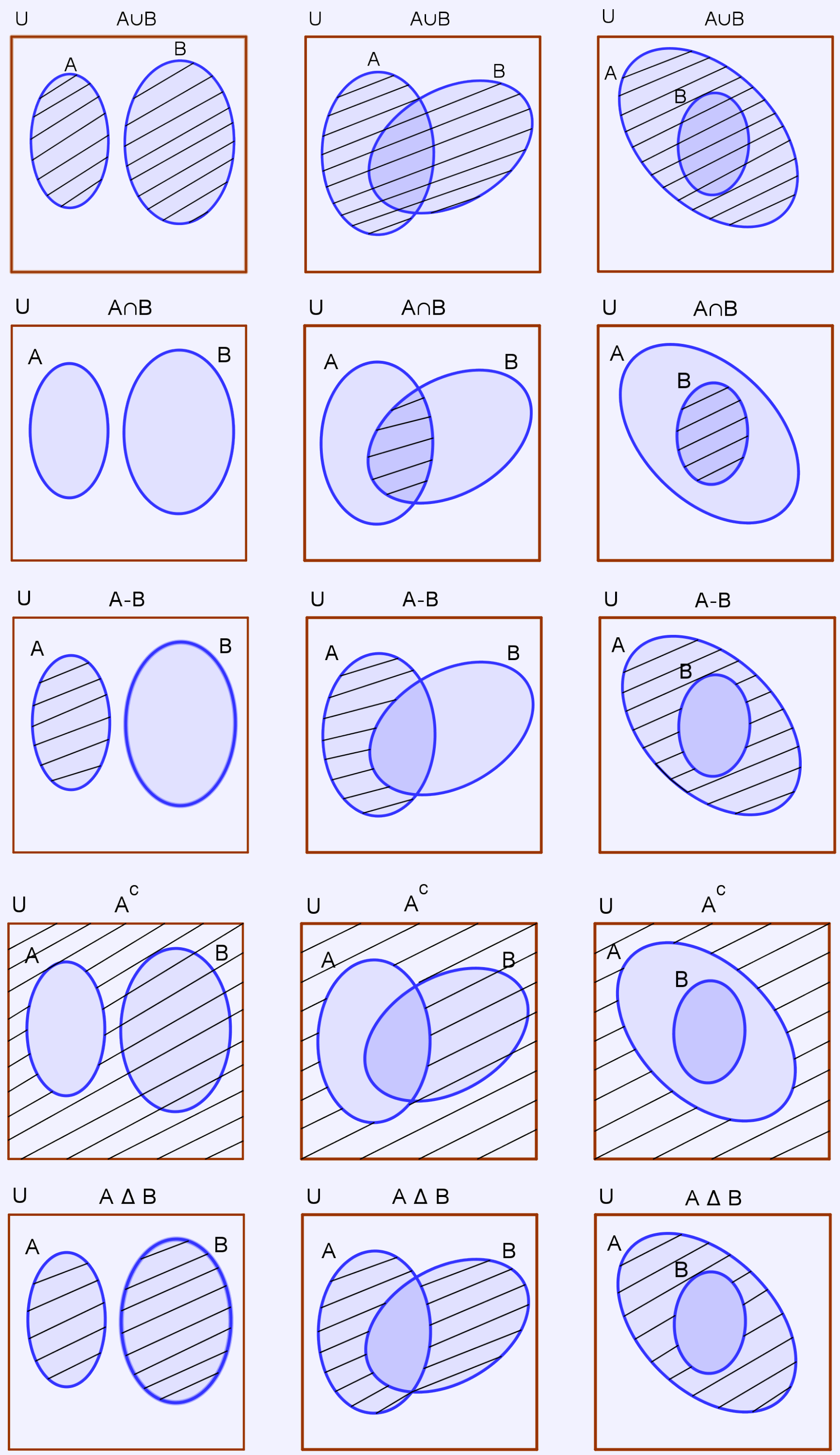
6. $A \cup A^c = \mathcal{U}$
   $A \cap A^c = \varnothing$
   $(A^c)^c = A$ (Leyes del Complemento)
   $\varnothing^c = \mathcal{U}$
   $\mathcal{U}^c = \varnothing$

7. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
   $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ (Leyes de De Morgan)

2.5 Diagramas de Venn

Una forma simple e instructiva de representar los conjuntos y sus operaciones es mediante los llamados **Diagramas de Venn**. Ejemplos: Hacer $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, A^c y $A \triangle B$.

Resumen 3.


U A∪B A B
U A∪B A B
U A∪B A B
U A∩B A B
U A∩B A B
U A∩B A B
U A-B A B
U A-B A B
U A-B A B
U A^c A B
U A^c A B
U A^c A B
U A Δ B A B
U A Δ B A B
U A Δ B A B

2.6 Conjuntos Potencia y Cardinalidad

2.6.1. Conjunto Potencia

Definición 2.13.

Sea A un conjunto, se denomina **Conjunto Potencia** de A, al conjunto que contiene a la familia de todos los subconjuntos del conjunto A y lo denotamos por $\mathcal{P}(A)$ o 2^A.

$$\mathcal{P}(A) = \{B/B \subseteq A\}$$

Ejemplo 2.9.

$A = \{1, 2, 3\}$, entonces: $\mathcal{P}(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, A\}$

Observación 2.11.

1. $\varnothing, A \in \mathcal{P}(A)$
2. $\mathcal{P}(A)$ posee $2^{\text{números de elementos de} A}$ elementos.

2.6.2. Cardinalidad

Definición 2.14.

Sea A un conjunto, se llama "**Cardinalidad** de A" al número de elementos del conjunto A y lo denotamos por $Card(A)$ o $|A|$ o $\#A$.

Ejemplo 2.10.

Sea $A = \{1, 2, 3\}$, entonces $Card(A) = 3$.

Observación 2.12.

1. $Card(\mathcal{P}(A)) = 2^{Card(A)}$.

2. $A \subseteq B \Rightarrow Card(A) \leq Card(B)$.

   $A \subseteq B \Rightarrow \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$

3. $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$
   $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$

4. $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$
   $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$

2.7 Producto Cartesiano

Observación 2.13 (Previo)**.**

Los conjuntos $\{a, b\}$ y $\{b, a\}$ son iguales, ya que no interesa el orden de sus elementos.

Definición 2.15 (Par Ordenado)**.**

Se denomina "**par ordenado**" de primer elemento a y segundo elemento b, denotado por (a, b)
Diremos que dos pares ordenados son iguales sí y sólo si sus respectivas componentes son iguales, es decir:

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow \quad a = c \quad \text{y} \quad b = d$$

Observación 2.14.

Es claro de la definición que: $(a, b) = (b, a) \Leftrightarrow a = b.$

Definición 2.16 (Producto Cartesiano)**.**

Dados A y B dos conjuntos no vacíos, llamaremos "**Producto Cartesiano** de A y B", al conjunto formado por todos los pares ordenados de la forma (x, y), con $x \in A$ e $y \in B$.
El producto cartesiano lo denotaremos por $A \times B$, y se lee A cruz B, e. d.

$$A \times B = \{(x, y) : (x \in A) \wedge (y \in B)\}$$

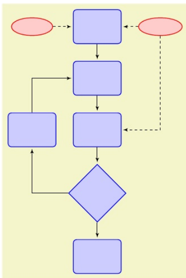
Ejemplo 2.11.

Sean $A = \{1, 2\}, B = \{a, 1\}$
$A \times B = \{(1, a); (1, 1); (2, a); (2, 1)\}$
$B \times B = \{(a, 1); (a, 2); (1, 1); (1, 2)\}$

Teorema 2.3 (Propiedades del Producto Cartesiano)**.**

Sean A, B, C conjuntos, entonces se tiene:

1. $A \times B = \varnothing \Leftrightarrow (A = \varnothing \vee B = \varnothing)$
2. $B \subseteq C \Leftrightarrow (A \times B \subseteq A \times C) \quad \wedge (A \neq \varnothing)$
3. $(A \subseteq C \wedge B \subseteq D) \Leftrightarrow (A \times B \subseteq C \times D)$
4. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
5. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
6. $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$
7. $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$



3 Relaciones

Bases de Datos

Cuando el hombre necesitó guardar sus conocimientos para las nuevas generaciones y que estas pudiesen seguir el rastro de ellas y así recuperar dicha información, escribió (dibujó) en las paredes, árboles, pero no pudo transportar estas información. Fue pues cuando registró en cuero, y luego en papel.
Cuando logra mucha información, la catalogó con nombres, tipos, áreas del conocimiento, fechas, etc. y para facilitar su busqueda, la *relacionó* a un catálogo usando índices de papel.
Este tipo de *relación*, actualmente se llama *Bases de Datos* y se usan para seguir el rastro del conocimiento científico e histórico.
Las bases de datos sirven para solucionar problemas como:

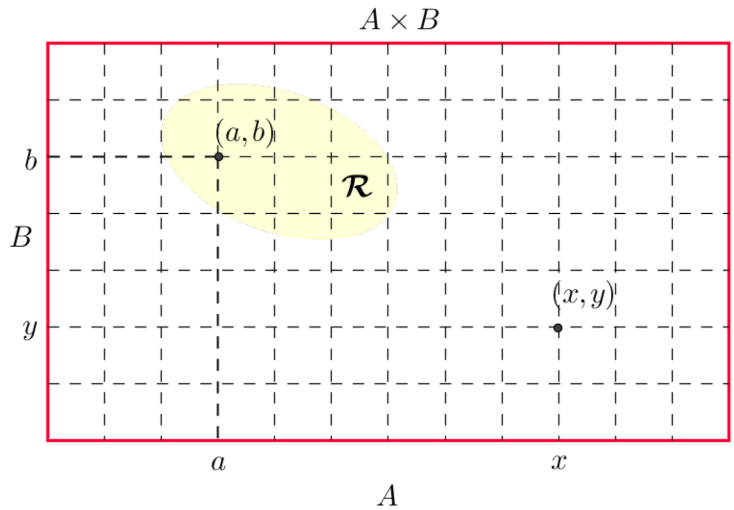
1. Compensar el olvido, si se olvida algo simplemente se busca.
2. Compensar el hecho de que los humanos solo podemos analizar pequeñas piezas de información, las Bases de Datos agrupan los datos por nosotros y nos permite un mejor manejo de ellos.
3. Permiten compartir conocimiento e información.

3.1 Relaciones

Definición 3.1.

Sean A y B dos conjuntos, entonces una **relación** R de un subconjunto A a un conjunto B es un subconjunto de $A \times B$, es decir, $R \subseteq A \times B$

Gráficamente podemos ilustrar, de la siguiente forma: A y B pueden representar los lados de un rectángulo y así $A \times B$ sería el interior de éste, y R un subconjunto de $A \times B$



NOTACIÓN : Diremos que los elementos a y b están en la relación R si $(a, b) \in R$ y escribimos
$(a, b) \in R \quad \vee \quad aRb \quad \vee \quad b = R(a)$

Observación 3.1.

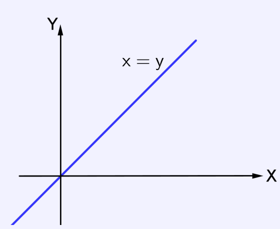
1. $(a, b) \notin R \Rightarrow a \not R\, b \quad \vee \quad b \neq R(a)$
2. Normalmente nuestras relaciones R serán subconjuntos de $A \times B$ que verifican una propiedad P.

Ejemplo 3.1.

La relación *igual* $(=)$ define una relación binaria sobre $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / x = y\}$$

Idea gráfica:

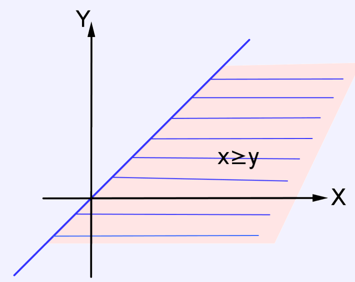


Ejemplo 3.2.

La relación *mayor o igual que* ($\geq$) definida en $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

$$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} / x \geq y\}$$

Idea gráfica:

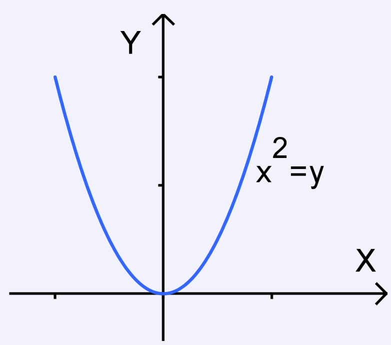


Ejemplo 3.3.

Definamos la relación binaria R sobre $\mathbb{R}$:

$$xRy \Leftrightarrow x^2 = y$$

luego $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \;/\; x^2 = y\}$
Idea gráfica:



Definición 3.2 (Relación Inversa)**.**

Sea R una relación en $A \times B$. Se llama **Relación Inversa** de R, y se denota por R^{-1} a:

$$R^{-1} = \{(y,x)/(x,y) \in R\}$$

Ejemplo 3.4.

Si $R = \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} / x = 2 + y\} = \{(2+y,y) : y \in \mathbb{N}\}$.
Encontrar la relación inversa.

Solución:

$$\begin{aligned} R^{-1} &= \{(y,x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} / (x,y) \in R\} \\ R^{-1} &= \{(y,x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} / x = 2 + y\} \\ R^{-1} &= \{(y, 2+y) / y \in \mathbb{N}\} \end{aligned}$$

Ejemplo 3.5.

Si $R = \{(x,y) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 / x + y = 4\} = \{(0,4); (1,3); (2,2); (3,1); (4,0)\}$. Encontrar la relación inversa.

Solución:

$$\begin{aligned} R^{-1} &= \{(y,x) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 / (x,y) \in R\} \\ R^{-1} &= \{(y,x) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 / x + y = 4\} \\ R^{-1} &= \{(x, 4-x) / x \in \mathbb{N}_0\} \end{aligned}$$

Definición 3.3.

Sean A , B conjuntos y R una relación en $A \times B$, entonces llamaremos:

1. **Dominio de** R: Al conjunto de todos los $x \in A$, tales que exista un $y \in B$, de modo que xRy, e. d.:

$$\mathcal{D}om(R) = \{x \in A / \exists y \in B \land xRy\}$$

2. **Recorrido de** R: Al conjunto de todos los $y \in B$, tales que existe un $x \in A$, de modo que xRy, e. d.:

$$\mathcal{R}ec(R) = \{y \in B / \exists x \in A \land xRy\}$$

3. **Codominio de** R: Corresponde al conjunto B, e. d.:

$$\mathcal{C}od(R) = B$$

Ejemplo 3.6.

Sean $A = \{2,3,5\}$, $B = \{6,7,10\}$ y sea R la relación siguiente:

$$R = \{(2,6);(2,10);(3,6);(5,10)\}$$

Encontrar dominio, recorrido y codominio de R.

Solución:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}om(R) &= \{2,3,5\} \\ \mathcal{R}ec(R) &= \{6,10\} \\ \mathcal{C}od(R) &= \{6,7,10\} \end{aligned}$$

3.1.1. Propiedades de las relaciones

Propiedades 1.

Sea R una relación sobre $A \times A$, entonces diremos que R es:

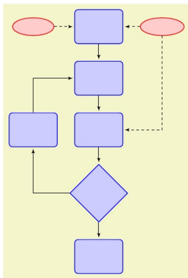
1. **Reflexiva** en A, si $\forall a \in A$, se tiene que aRa.
2. **Simétrica** en A, si se tiene que:
   $aRb \Rightarrow bRa, \qquad \forall (a,b) \in R$
3. **Antisimétrica** en A, si se tiene que:
   $aRb \wedge bRa \Rightarrow a = b$
4. **Transitiva** en A, si se tiene que:
   $aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc, \qquad \forall a,b,c \in A$

Ejemplo 3.7.

Para (1) y (2): Relación de *igualdad* (=).
Para (3) y (4): Relación *menor o igual* (≤).

Observación 3.2.

Para toda relación R , se tiene que $(R^{-1})^{-1} = R$



4 Funciones

funciones

A finales del siglo XVII aparece por primera vez el término función. En palabras de Johann Bernoulli, una función es *una cantidad formada de alguna manera a partir de cantidades indeterminadas y constantes.* Pero no fue hasta 1748 cuando el concepto de función saltó a la fama en matemáticas. Leonhard Euler, uno de los grandes genios de las matemáticas de todos los tiempos, publicó un libro, Introducción al análisis infinito, en el definió función como:

> *Una función de una cantidad variable es una expresión analítica compuesta de cualquier manera a partir de la cantidad variable y de números o cantidades constantes.*

Pero Euler no define expresión analítica. Así que poco después, en 1755, tuvo que precisar su definición:
Si algunas cantidades dependen de otras del tal modo que si estas últimas cambian también lo hacen las primeras, entonces las primeras cantidades se llaman funciones de las segundas.
Pero la cosa seguía sin estar clara del todo: ¿cómo es esa dependencia?, ¿cómo expresarla, calcularla o representarla?, ¿cómo deben cambiar los valores de las variables?, ¿cuántas variables pueden intervenir?, ...
Muchos matemáticos abordaron el problema de dar una definición precisa y adecuada de función. Y así se pasaron casi dos siglos, puliendo poco a poco el concepto, hasta que, ya en el siglo XX, Edouard Goursat dio en 1923 la definición que aparece en la mayoría de los libros de textos hoy en día:

> *Se dice que y es una función de x si a cada valor de x le corresponde un único valor de y. Esta correspondencia se indica mediante la ecuación $y = f(x)$.*

4.1 Funciones

Definición 4.1 (Función)**.**

Diremos que una relación R de un conjunto A en un conjunto B es una **Función** (o relación funcional), cuando para cada $x \in \mathcal{D}om(R)$, se le hace corresponder uno y sólo un elemento y en el $\mathcal{C}od(R)$, e.d.:

$$[\forall (x,y),(x,z) \in R \Rightarrow (y = z)] \Leftrightarrow R \text{ es función}$$

Ejemplo 4.1.

$(xRy) \Leftrightarrow (y = x^2)$, es una función, pero

$(xRy) \Leftrightarrow (y^2 = x)$ no lo es, pues:

para $y_1 = 1$, existe un $x = 1$ que está relacionado ya que se cumple la condición de relación $((1)^2 = (1))$, y para $y_2 = -1$ también se cumple la condición de relación $((-1)^2 = (1))$

Luego existen dos valores y_1, y_2 tales que $\{y_1 \neq y_2 \text{ y } (x,y_1),(x,y_2) \in R\}$.
Lo que contradice la definición de función.

4.2 Funciones Reales

Definición 4.2.

Sean A y B dos subconjuntos no vacíos en $\mathbb{R}$. Se llama **Función de** A **en** B a toda ley o regla que asigna a cada elemento de A, un único elemento de B.

Observación 4.1.

1. Para designar una función usaremos las letras f, g, h, F, H, etc.,y para indicar un elemento usaremos las letras x, y, z, ω, etc.

2. Para indicar que f es función de A en B se escribe:

$$f : A \longrightarrow B$$

3. Para indicar que a un elemento x de A, la función f le asocia un sólo elemento y de B se escribe:

$$x \longrightarrow f(x) = y$$

Es decir:

$$\begin{array}{rccc} f: & A & \longrightarrow & B \\ & x & \longrightarrow & f(x) = y \end{array}$$

define una función f que a cada x en A le asigna un único elemento $y = f(x)$ en B.

Observación 4.2.

1. El elemento y se llama **imagen** de x por f o que y es la **variable dependiente**, y el elemento x se llama **pre-imagen** de y por f o **variable independiente**

2. Notemos que la función f es una relación, a la que se le exige que a cada elemento de A se le asocie un único elemento de B, por lo tanto, al igual que en ellas al conjunto A se le llama **Dominio** de f, al conjunto B se le llama **Codominio** de f y al conjunto de valores que toma f en los elementos de A se le llama **conjunto imagen** o **Recorrido** de f, es decir:

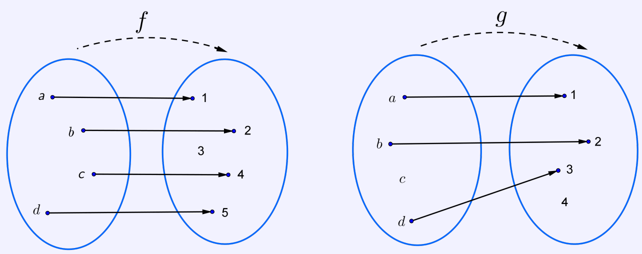
$$\mathcal{R}ec(f) = \{f(x) \in B / x \in A\}$$

o

$$\mathcal{R}ec(f) = \{y \in B / \exists x \in A \wedge f(x) = y\}$$

Ejemplo 4.2.

En el siguiente gráfico se muestran dos relaciones f y g. En la primera f representa una función y en la segunda g no es función. ¿porqué?



Observación 4.3.

Notemos que A y B son subconjuntos de $\mathbb{R}$, sin embargo, existen varias formas de definir una función, como son:

1. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, esto es, dice que su $\mathcal{D}om$ y $\mathcal{C}od$ están definidos, y solo falta encontrar su $\mathcal{R}ec$.

   Ejemplo: $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longrightarrow f(x) = 3x^2 - 5$

2. $f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, esto es, dice que su $\mathcal{D}om$ se desconoce y su $\mathcal{C}od$ es $\mathbb{R}$, es decir, se debe encontrar su $\mathcal{D}om$ y $\mathcal{R}ec$.

   Ejemplo: $f : A \longrightarrow \mathbb{R}, x \longrightarrow f(x) = \frac{x^2-5x+3}{x-1}$

3. $f : \mathbb{R} \longrightarrow B \subseteq \mathbb{R}$, esto es, dice que su Dom es $\mathbb{R}$ y que su $\mathcal{C}od$ se desconoce y debe ser igual al $\mathcal{R}ec$, es decir, se debe encontrar el $\mathcal{R}ec$, y hacer el $\mathcal{C}od$ igual a él.

   Ejemplo:$f : \mathbb{R} \longrightarrow B, x \longrightarrow f(x) = x^2 - 5$

4. $f : A \longrightarrow B$, donde A y B son conjuntos dados en forma explícita, entonces se conoce el $\mathcal{D}om$ y $\mathcal{C}od$ de la función, es decir, solo falta determinar el $\mathcal{R}ec$.

   Ejemplo: $f : [2, 10] \longrightarrow [5, 69], x \longrightarrow f(x) = x^2 - 4x + 9$

A continuación nos preocuparemos del problema de encontrar $\mathcal{D}om$ y $\mathcal{R}ec$ de una función.

Ejemplo 4.3.

Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 3$. Encuentre $\mathcal{D}om$ y $\mathcal{R}ec$ de f.

Solución: Aplicando la definición, tenemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}om(f) &= \{x \in \mathbb{R} / f(x) \in \mathbb{R}\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} / x^2 + 3 \in \mathbb{R}\} \\
&= \mathbb{R}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}ec(f) &= \{y \in \mathbb{R} / \exists x \in A \wedge y = f(x)\} \\
&= \{y \in \mathbb{R} / x \in \mathbb{R} \wedge y = x^2 + 3\} \\
&= \{y \in \mathbb{R} / x \in \mathbb{R} \wedge x = \sqrt{y-3}\} \\
&= \{y \in \mathbb{R} / \sqrt{y-3} \in \mathbb{R}\} \\
&= \{y \in \mathbb{R} / y - 3 \geq 0\} \\
&= \{y \in \mathbb{R} / y \geq 3\} \\
&= [3, \infty[
\end{aligned}$$

Ejemplo 4.4.

Sea $g : A \subseteq\longrightarrow \mathbb{R},\ g(x) = \frac{1}{x-1}$. Encuentre $\mathcal{D}om$ y $\mathcal{R}ec$ de f.

Solución:

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}om(g) &= \{x \in \mathbb{R} / g(x) \in \mathbb{R}\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} / \tfrac{1}{x-1} \in \mathbb{R}\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} / (x-1) \neq 0\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} / x \neq 1\} \\
&= \mathbb{R} - \{1\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}ec(g) &= \{y \in \mathbb{R} / \exists x \in A \wedge y = g(x)\} \\
&= \{y \in \mathbb{R} / x \neq 1 \wedge y = \tfrac{1}{x-1}\} \\
&= \{y \in \mathbb{R} / x \neq 1 \wedge (x-1) = \tfrac{1}{y} \wedge y \neq 0\} \\
&= \{y \in \mathbb{R} / x \neq 1 \wedge x = \tfrac{1}{y} + 1 \wedge y \neq 0\} \\
&= \{y \in \mathbb{R} / x = \tfrac{1}{y} + 1 \neq 1 \wedge y \neq 0\} \\
&= \mathbb{R} - \{0\}
\end{aligned}$$

Ejemplo 4.5.

Sea $h : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ h(x) = \sqrt{x^2 - 1}$. Encuentre $\mathcal{D}om$ y Rec de f.

Solución:

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}om(h) &= \{x \in \mathbb{R} / h(x) \in \mathbb{R}\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} / \sqrt{x^2 - 1} \in \mathbb{R}\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 1 \geq 0\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} / x^2 \geq 1\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} / \sqrt{x^2} \geq 1\} \qquad \text{pero} \quad \sqrt{x^2} = |x| \\
&= \{x \in \mathbb{R} / |x| \geq 1\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} / x \geq 1 \ \ \vee \ \ x \leq -1\} \\
&=]-\infty, -1] \cup [1, \infty[
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}ec(h) &= \{y \in \mathbb{R} / \exists x \in A \wedge y = h(x)\} \\
&= \{y \in \mathbb{R} / |x| \geq 1 \wedge y = \sqrt{x^2 - 1}\} \\
&= \{y \in \mathbb{R} / |x| \geq 1 \wedge (y^2 = x^2 - 1 \wedge y \geq 0)\} \\
&= \{y \in \mathbb{R} / |x| \geq 1 \wedge x^2 = y^2 + 1 \wedge y \geq 0\} \\
&= \{y \in \mathbb{R} / |x| \geq 1 \wedge |x| = \sqrt{y^2 + 1} \wedge y \geq 0\} \\
&= \{y \in \mathbb{R} / |x| = \sqrt{y^2 + 1} \geq 1 \wedge y \geq 0\} \\
&= \{y \in \mathbb{R} / y^2 + 1 \geq 1 \wedge y \geq 0\} \\
&= \{y \in \mathbb{R} / y \in \mathbb{R} \wedge y \geq 0\} \\
&= [0, \infty[= \mathbb{R}_0^+
\end{aligned}$$

EJERCICIO : Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{5x-2}}$. Encuentre $\mathcal{D}om$ y $\mathcal{R}ec$ de f.

Definición 4.3.

Una función de A en B, $f : A \longrightarrow B$, es :

1. **Sobreyectiva**, si $\mathcal{R}ec(f) = B$.
2. **Inyectiva**, si elementos diferentes de A tienen imágenes diferentes en B, es decir:
$$\forall x_1, x_2 \in A, \ \ (x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)),$$
o lo que es equivalente (y en general la forma más usada para probar inyectividad de una función)
$$\forall x_1, x_2 \in A, \ (f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2)$$
3. **Biyectiva**, si es sobreyectiva e inyectiva a la vez.

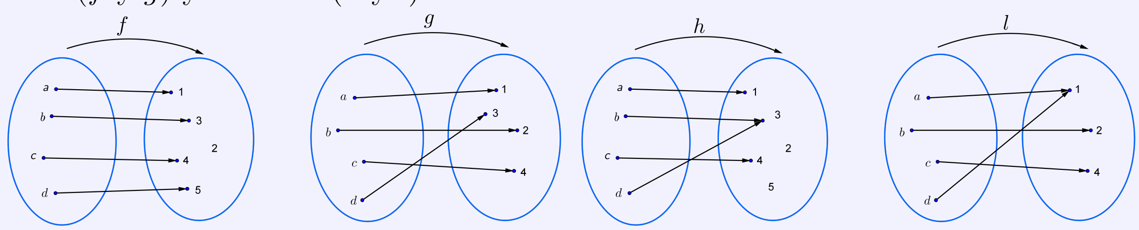
Observación 4.4 (Importante)**.**

Para probar la **no inyectividad** de la función f, basta mostrar que existen dos elementos x_1 y x_2 de A tales que:

$$f(x_1) = f(x_2) \quad \wedge \quad x_1 \neq x_2$$

Ejemplo 4.6.

Las siguientes ideas gráficas muestran distintas funciones, donde algunas son inyectivas (f y g) y otras no (h y l).



Ejemplo 4.7.

Estudiemos la Sobreyectividad e Inyectividad para las funciones dadas en los ejemplos (4.3), (4.4) y (4.5) respectivamente.

Solución:

1. $f(x) = x^2 + 3$

$$\begin{aligned}
\forall x_1, x_2 \in \mathcal{D}om(f),\quad & \\
f(x_1) = f(x_2) \quad & \Longleftrightarrow \quad x_1^2 + 3 = x_2^2 + 3 \\
& \Longleftrightarrow \quad x_1^2 = x_2^2 \\
& \Longleftrightarrow \quad x_1^2 - x_2^2 = 0 \\
& \Longleftrightarrow \quad (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 0 \\
& \Longleftrightarrow \quad x_1 - x_2 = 0 \quad \vee \quad x_1 + x_2 = 0 \\
& \Longleftrightarrow \quad x_1 = x_2 \quad \vee \quad x_1 = -x_2
\end{aligned}$$

Luego si $f(x_1) = f(x_2)$, no necesariamente $x_1 = x_2$, es decir, f no es inyectiva.

Observación 4.5.

Notemos que en los casos en que intuimos o reconocemos que la función **no es inyectiva**, podemos usar la observación-4.4, esto es, basta mostrar que existen dos elementos distintos del dominio de f que tienen la misma imagen. Así en el ejemplo anterior podríamos mostrar que f no es inyectiva diciendo:

"Dado que $x_1 = 1$ y $x_2 = -1$ pertenecen al dominio de f y $f(1) = 4 = f(-1)$, la función f no es inyectiva"

2. $g(x) = \dfrac{1}{x-1}$

$$\begin{array}{rcl} \forall x_1, x_2 \in \mathcal{D}om(g), & & \\ g(x_1) = g(x_2) & \iff & \frac{1}{x_1-1} = \frac{1}{x_2-1} \\ & \iff & x_2 - 1 = x_1 - 1 \\ & \iff & x_2 = x_1 \end{array}$$

Luego si $g(x_1) = g(x_2)$, entonces necesariamente $x_1 = x_2$, es decir g es Inyectiva.

3. $h(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

$$\begin{array}{rcl} \forall x_1, x_2 \in \mathcal{D}om(h), & & \\ h(x_1) = h(x_2) & \iff & \sqrt{x_1^2 - 1} = \sqrt{x_2^2 - 1} \\ & \iff & x_1^2 - 1 = x_2^2 - 1 \\ & \iff & x_1^2 = x_2^2 \\ & \iff & x_1^2 - x_2^2 = 0 \\ & \iff & (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 0 \\ & \iff & x_1 - x_2 = 0 \quad \vee \quad x_1 + x_2 = 0 \\ & \iff & x_1 = x_2 \quad \vee \quad x_1 = -x_2 \end{array}$$

Luego si $h(x_1) = h(x_2)$, no necesariamente $x_1 = x_2$, es decir h no es Inyectiva.

Definición 4.4 (Igualdad de Funciones)**.**

Dos funciones f y g son **iguales** si y sólo si:

$$\begin{array}{rl} \mathcal{D}om(f) = & \mathcal{D}om(g) \\ \mathcal{C}od(f) = & \mathcal{C}od(g) y \quad f(x) = \quad g(x), \qquad \forall x \in \mathcal{D}om(f) \end{array}$$

Definición 4.5.

Sea $f : A \longrightarrow B$ y $C \subseteq A$. La función $g : C \longrightarrow B$, $g(x) = f(x)$ se llama **restricción de f a C**.Se suele denotar $g = f|_C$.

Definición 4.6.

Sea f una función real. Se llama **gráfico** de f alconjunto

$$\mathcal{G}raf(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = f(x)\}$$

Definición 4.7.

Una función $f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, se dice:

1. **Estrictamente Creciente** en A si:

   $$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

   cualesquiera sean los puntos x_1, x_2 en A.

2. **Estrictamente Decreciente** en A si:

   $$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

   cualesquiera sean los puntos x_1, x_2 en A.

Observación 4.6.

Toda función estríctamente creciente (estríctamente decreciente) es inyectiva. (**Tarea:** probar lo anterior)

Definición 4.8.

Una función $f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice:

1. **Par** ssi: $x \in A \Rightarrow -x \in A \;\wedge\; f(x) = f(-x)$.
2. **Impar** ssi: $x \in A \Rightarrow -x \in A \;\wedge\; f(-x) = -f(x)$.

Observación 4.7.

¿Existe alguna función par, que sea inyectiva?, ¿porqué?

4.3 Algebra de funciones

Definición 4.9.

Sean $f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : B \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones reales, y $\lambda \in \mathbb{R}$ escalar. Se definen las siguientes operaciones:

1.- $$\begin{array}{lccl} f \pm g : & A \cap B & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longrightarrow & (f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x) \end{array}$$

2.- $$\begin{array}{lccl} f \cdot g : & A \cap B & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longrightarrow & (f \cdot g)(x) = f(x)\dot{g}(x) \end{array}$$

3.- $$\begin{array}{lccl} \dfrac{f}{g} : & (A \cap B) - \{x/g(x) = 0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longrightarrow & \left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} \; , \qquad g(x) \neq 0 \end{array}$$

4.- $$\begin{array}{lccl} \lambda f : & X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longrightarrow & (\lambda f)(x) = \lambda \cdot f(x) \end{array}$$

Ejemplo 4.8.

Dadas las funciones :
$f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{1-x}$
$g : B \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt{x+1}$
defina $f \pm g$, $f \cdot g$, f/g y $g \circ f$.

Solución: Encontremos primero $\mathcal{D}om$ y $\mathcal{R}ec$ necesarios.

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}om(f) &= \{x \in \mathbb{R} / f(x) \in \mathbb{R}\}\\
&= \{x \in \mathbb{R} / \frac{1}{1-x} \in \mathbb{R}\}\\
&= \{x \in \mathbb{R} / 1-x \neq 0\}\\
&= \mathbb{R} - \{1\}\\
\mathcal{D}om(g) &= \{x \in \mathbb{R} / g(x) \in \mathbb{R}\}\\
&= \{x \in \mathbb{R} / \sqrt{x+1} \in \mathbb{R}\}\\
&= \{x \in \mathbb{R} / x+1 \geq 0\}\\
&= [-1, +\infty[
\end{aligned}$$

$\mathcal{D}om(f) \cap \mathcal{D}om(g) = [-1, +\infty[-\{1\}$

a) Encontremos $f+g$

$$\begin{aligned}
(f+g)(x) &= f(x)+g(x)\\
&= \tfrac{1}{1-x} + \sqrt{x+1}
\end{aligned}$$ Luego:

$$\begin{array}{rccccl}
f+g: & [-1,+\infty[-\{1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} & & \\
 & x & \longrightarrow & (f+g)(x) & = \tfrac{1}{1-x} + \sqrt{x+1}
\end{array}$$

b) Encontremos $f-g$

$$\begin{aligned}
(f-g)(x) &= f(x)-g(x)\\
&= \tfrac{1}{1-x} - \sqrt{x+1}
\end{aligned}$$

Luego:

$$\begin{array}{rccccl}
f-g: & [-1,+\infty[-\{1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} & & \\
 & x & \longrightarrow & (f-g)(x) & = \tfrac{1}{1-x} - \sqrt{x+1}
\end{array}$$

c) Encontremos $f \cdot g$

$$\begin{aligned}
(f\cdot g)(x) &= f(x)\cdot g(x)\\
&= \tfrac{1}{1-x} \cdot \sqrt{x+1}\\
&= \tfrac{\sqrt{x+1}}{1-x}
\end{aligned}$$

Luego:

$$\begin{array}{rccccl}
f\cdot g: & [-1,+\infty[-\{1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} & & \\
 & x & \longrightarrow & (f\cdot g)(x) & = \tfrac{\sqrt{x+1}}{1-x}
\end{array}$$

d) Encontremos f/g

$$\begin{aligned}
(f/g)(x) &= \tfrac{f(x)}{g(x)}\\
&= \tfrac{\frac{1}{1-x}}{\sqrt{x+1}}\\
&= \tfrac{1}{(1-x)\sqrt{x+1}}
\end{aligned}$$

Por otra parte debemos considerar $g(x) \neq 0$, es decir, $x+1 \neq 0$, o bién $x \neq -1$.

Luego: $\mathcal{D}om(f/g) = [-1, +\infty[-\{-1, 1\}$

$$\begin{array}{rccccl}
f/g: &]-1,+\infty[-\{1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} & & \\
 & x & \longrightarrow & (f/g)(x) & = \tfrac{1}{(1-x)\sqrt{x+1}}
\end{array}$$

4.4 Composición de funciones

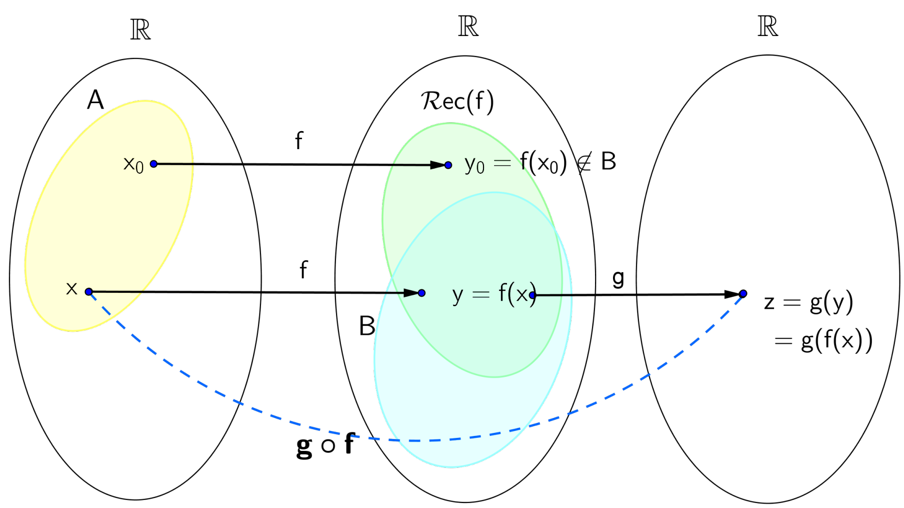
Definición 4.10.

Sean $f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : B \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones reales. Se definen la operacion **Compuesta** de g en f como:

$$\begin{array}{cccc} g \circ f : & X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longrightarrow & (g \circ f)(x) = g(f(x)) \end{array}$$

Donde $X = \{x \in \mathbb{R} / x \in \mathcal{D}om(f) \wedge f(x) \in \mathcal{D}om(g)\}$

Idea geométrica:



Ejemplo 4.9.

Usando las mismas funciones definidas en el ejemplo anterior, tenemos que:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}om(g \circ f) &= \{x \in \mathbb{R} / x \in \mathcal{D}om(f) \wedge f(x) \in \mathcal{D}om(g)\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} / x \neq 1 \wedge \frac{1}{1-x} \geq -1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} / x \neq 1 \wedge \frac{2-x}{x-1} \geq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} / x \neq 1 \wedge 1 < x \leq 2\} =]1, 2] \end{aligned}$$

4.5 Función Inversa

Definición 4.11.

Sea f una función tal que:

$$\begin{array}{rccl} f: & A & \longrightarrow & B \\ & x & \longrightarrow & y = f(x) \end{array}$$

Si, además f es una función sobreyectiva e inyectiva, entonces es Biyectiva y existe la función inversa $f^{-1} : B \longrightarrow A$, tal que:

$$f^{-1}(x) = y \Longleftrightarrow x = f(y)$$

Ejemplo 4.10.

Sea $g(x) : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longrightarrow g(x) = \frac{1}{x-1}$. Defina $g^{-1}(x)$, haciendo restricciones necesarias.

Solución: De ejercicios anteriores encontramos:

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{D}om(g) & = & \mathbb{R} - \{1\} \\ \mathcal{R}ec(g) & = & \mathbb{R} - \{0\} \\ \text{g} & & \text{inyectiva} \end{array}$$

Luego, definiendo $g : \mathbb{R} - \{1\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{0\}$, $g(x) = \frac{1}{x-1}$ se tiene una función **biyectiva**, es decir, existe la inversa y se tiene:

$$\begin{array}{rcl} g^{-1}(x) = y & \Longleftrightarrow & x = g(y) \\ & \Longleftrightarrow & x = \frac{1}{y-1} \\ & \Longleftrightarrow & x(y-1) = 1 \\ & \Longleftrightarrow & xy = 1 + x \\ & \Longleftrightarrow & y = \frac{1+x}{x} \quad \text{y como } y = g^{-1}(x) \\ & \Longleftrightarrow & g^{-1}(x) = \frac{1+x}{x} \end{array}$$

Luego

$$\begin{array}{rccl} g^{-1}: & \mathbb{R} - \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} - \{1\} \\ & x & \longrightarrow & g^{-1}(x) = \frac{1+x}{x} \end{array}$$

Observación 4.8.

Dada una función $f : A \subset \mathbb{R} \to B \subset \mathbb{R}$, de modo que f se biyectiva en su dominio de definición. Notemos que

$$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = Id, \qquad \text{donde } Id \text{ representa a la función identidad}$$

esto es:

$$\left(f \circ f^{-1}\right)(x) = x$$

Ejemplo 4.11.

Considerando la función g del ejemplo-4.10. tenemos que:

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{x-1} \\ g^{-1}(x) &= \frac{1+x}{x} \end{aligned}$$

Luego, si calculamos la compuesta $(g \circ g^{-1})(x)$ se obtiene.

$$\left(g \circ g^{-1}\right)(x) = g\left(g^{-1}(x)\right) = g\left(\frac{1+x}{x}\right) = \frac{1}{\frac{1+x}{x} - 1} = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x$$

4.6 Algunas Funciones Importantes

4.6.1. La Función Lineal

Definición 4.12.

$$\begin{aligned} L : \quad A \subseteq \mathbb{R} &\to B \subseteq \mathbb{R} \\ x &\to L(x) = ax + b, \quad a, b \text{ ctes. reales} \end{aligned}$$

Observación 4.9.

Notemos que:

1. **Dominio:**
$$\begin{aligned} Dom(L) &= \{x \in \mathbb{R} / L(x) \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} / ax + b \in \mathbb{R}\} \\ &= \mathbb{R} \end{aligned}$$

2. **Recorrido:**
$$\begin{aligned} Rec(L) &= \{y \in \mathbb{R} / \exists x \in Dom(L) \wedge y = L(x)\} \\ &= \{y \in \mathbb{R} / \exists x \in \mathbb{R} \wedge y = ax + b\} \\ &= \{y \in \mathbb{R} / \left[x = \tfrac{y-b}{a} \in \mathbb{R}, \text{cuando } a \neq 0\right] \vee [y = b, \text{cuando } a = 0]\} \end{aligned}$$
Luego $Rec(L) = \begin{cases} \mathbb{R} & ,\text{si } a \neq 0 \\ b \text{ (cte).} & ,\text{si } a = 0 \end{cases}$

3. **Sobreyectividad:**
Entonces $Cod(L) = Rec(L)$ y es **sobreyectiva sólo cuando** $a \neq 0$.

4. **Inyectividad:**
$$\begin{aligned} \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, L(x_1) = L(x_2) &\Rightarrow a \cdot x_1 + b = a \cdot x_2 + b, \quad a \neq 0 \qquad / - b \\ &\Rightarrow a \cdot x_1 = a \cdot x_2, \quad a \neq 0 \qquad / : a \\ &\Rightarrow x_1 = x_2 \end{aligned}$$
Luego, $L(x)$ es inyectiva cuando $a \neq 0$

Esto es, la función lineal está definida para todo $\mathbb{R}$ y es biyectiva en general en todo $\mathbb{R}$, cuando $a \neq 0$.

Observación 4.10.

Si restringimos el dominio a un intervalo cualquiera $[x_1, x_2]$, $x_1 < x_2$ (no pierde generalidad en los casos de intervalos abierto o semi-abiertos), se tiene (en el caso $a \neq 0$):
$Dom(L) = [x_1, x_2]$ por definición.

$Rec(L) = [L(x_1), L(x_2)], a > 0 \quad \vee \quad [L(x_2), L(x_1)], a < 0$

4.6.2. La Función Valor Absoluto

Definición 4.13.

$$\begin{array}{rccl} |\cdot|: & A\subseteq\mathbb{R} & \to & B\subseteq\mathbb{R} \\ & x & \to & |x| = \begin{cases} x & , x\geq 0 \\ -x & , x<0 \end{cases} \end{array}$$

Observación 4.11.

Notemos que:

1. **Dominio:**

   $Dom(|\cdot|) \ = \mathbb{R}$

2. **Recorrido:**

   $Rec(|\cdot|) \ = \mathbb{R}_0^+$

3. **Sobreyectividad:**

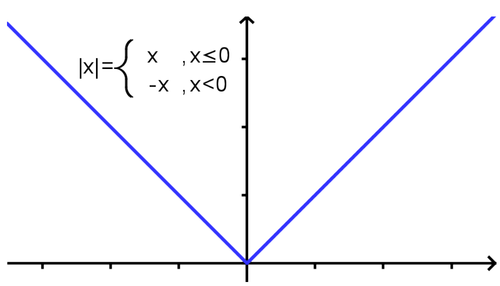
   $Cod(|\cdot|) = \mathbb{R} \neq \mathbb{R}_0^+ = Rec(|\cdot|)$, entonces **no** es sobreyectiva.

4. **Inyectividad:**

   $\forall x_1, x_2 \in \mathcal{D}om(|\cdot|), f(1) = f(-1) = |1| = |-1|$ /pero $1 \neq -1$

   Luego, $|\cdot|$ **no** es inyectiva

Idea Gráfica



Observación 4.12.

Recordemos que se tienen dos igualdades que no se deben confundir:

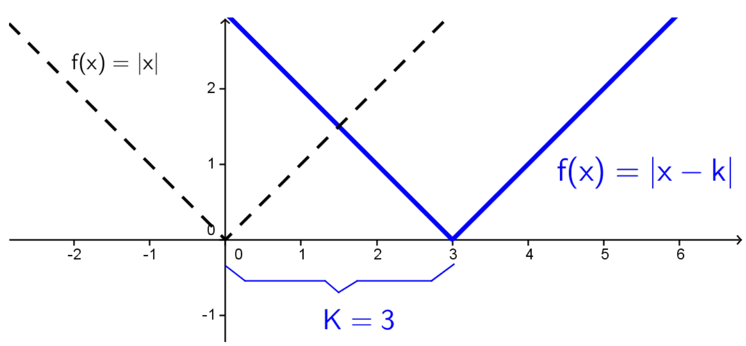
$$\sqrt{x^2} = |x|, \text{ definido para todo } x \in \mathbb{R}$$

$$\left(\sqrt{x}\right)^2 = x, \text{ definido sólo para } x \geq 0$$

Observación 4.13.

Estudiemos en particular el caso
$f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = |x - k|, k > 0$
$Dom(f) = \mathbb{R}$
$Rec(f) = \mathbb{R}_0^+$

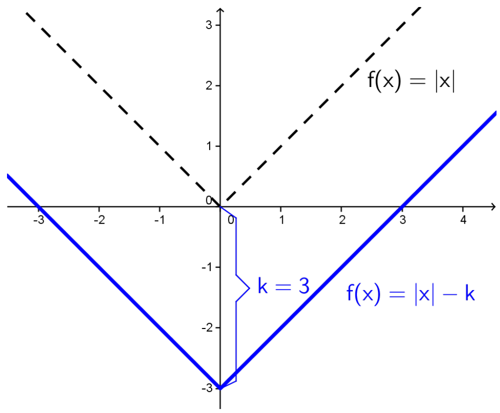
Idea Gráfica



Observación 4.14.

Ahora, estudiemos el caso
$f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = |x| - k, k > 0$
$Dom(f) = \mathbb{R}$
$Rec(f) = [-k, +\infty[$

Idea Gráfica



4.6.3. La Función Cuadrática

Definición 4.14.

$$\begin{array}{rcl} C: \; A \subseteq \mathbb{R} & \to & B \subseteq \mathbb{R} \\ x & \to & C(x) = ax^2 + bx + c, \quad a, b, c \text{ ctes. reales}, a \neq 0 \end{array}$$

Observación 4.15.

Notemos que:

1. **Dominio:**

   $\mathcal{D}om(C) \;\; = \mathbb{R}$

2. **Recorrido:**

   $\mathcal{R}ec(C) \;\; = \{y \in \mathbb{R} / y \geq c - \frac{b^2}{4a}, a > 0 \quad \vee \quad y \leq c - \frac{b^2}{4a}, a < 0\}$

Por otro lado, si recordamos que en $x = -\frac{b}{2a}$ la función cuadrática (parábola) tiene su vértice, esto es, su punto más alto (o más bajo, segun el signo del coeficiente a), el valor que toma la función en ese punto es:

$$
\begin{aligned}
f\left(-\tfrac{b}{2a}\right) &= a\left(-\tfrac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\tfrac{b}{2a}\right) + c \\
&= a \cdot \tfrac{b^2}{4a^2} - \tfrac{b^2}{2a} + c \\
&= \tfrac{b^2}{4a} - \tfrac{b}{2a} + c \\
&= -\tfrac{b^2}{4a} + c
\end{aligned}
$$

= esto es: la imagen o valor que toma la función en el vértice coincide con la restricción en el recorrido de la función.

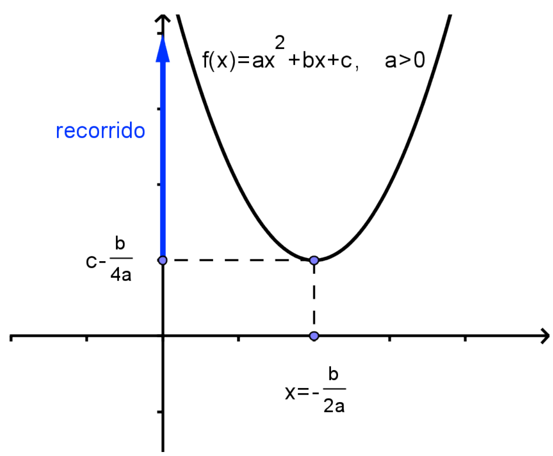
Así, se tiene finalmente que:

$$\mathcal{R}ec(C) = \begin{cases} \left[c - \frac{b}{4a}, +\infty\right[& , \text{ si } a > 0 \\ \left]-\infty, c - \frac{b}{4a}\right] & , \text{ si } a < 0 \end{cases}$$

O que es equivalente a:

$$\mathcal{R}ec(C) = \begin{cases} \left[f\left(-\frac{b}{2a}\right), +\infty\right[& , \text{ si } a > 0 \\ \left]-\infty, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right] & , \text{ si } a < 0 \end{cases}$$

Idea Gráfica



1. **Sobreyectividad:**

   $Cod(C) = Rec(C)$, por definición, entonces es sobreyectiva.

2. **Inyectividad:**

   $\forall x_1, x_2 \in \mathcal{D}om(C)$,

$$
\begin{aligned}
C(x_1) = C(x_2) \quad & \Rightarrow ax_1^2 + bx_1 + c = ax_2^2 + bx_2 + c \qquad / - c \\
& \Rightarrow ax_1^2 + bx_1 = ax_2^2 + bx_2 \\
& \Rightarrow ax_1^2 - ax_2^2 + bx_1 - bx_2 = 0 \\
& \Rightarrow a(x_1^2 - x_2^2) + b(x_1 - x_2) = 0 \\
& \Rightarrow a(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) + b(x_1 - x_2) = 0 \\
& \Rightarrow (x_1 - x_2)\left[a(x_1 + x_2) + b\right] = 0 \\
& \Rightarrow x_1 = x_2 \quad \vee \quad x_1 = -x_2 - \tfrac{b}{a}
\end{aligned}
$$

Luego, $C(x)$ **No es inyectiva**

4.6.4. La Función Por Tramos

Definición 4.15.

$$
\begin{aligned}
T:\ A \subseteq \mathbb{R} \quad & \to \quad B \subseteq \mathbb{R} \\
x \quad & \to \quad T(x) = \begin{cases} f_1(x) & , a \leq x \leq b \\ f_2(x) & , b < x \leq c \\ f_3(x) & , c < x \leq d \end{cases} \qquad ;\ a < b < c < d \text{ cte.}
\end{aligned}
$$

Observación 4.16.

Notemos que:

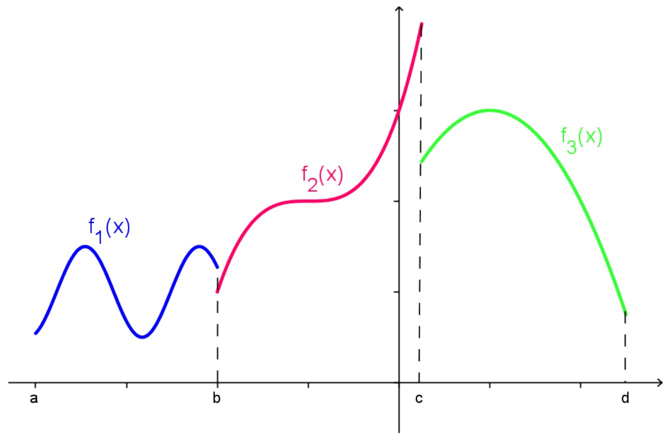
1. **Dominio:**

$$
\begin{aligned}
\mathcal{D}om(C) &= \{x \in \mathbb{R} / T(x) \in \mathbb{R}\} \\
&= [a, b] \cup]b, c] \cup]c, d] \\
&= [a, d]
\end{aligned}
$$

Esto es, en general es la unión de los intervalos donde la función está definida.

2. **Recorrido:**

$$
\begin{aligned}
\mathcal{R}ec(T) &= \mathcal{R}ec(f_1) \cup \mathcal{R}ec(f_2) \cup \mathcal{R}ec(f_3) \\
& \quad \text{cada uno en su respectivo dominio restringido}
\end{aligned}
$$



Ejemplo 4.12.

Encuentre dominio y recorrido de la función definida por tramos:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & , x < -1 \\ x^2 & , -1 \leq x < 2 \\ (x-3)^2 + 3 & , x > 2 \end{cases}$$

Sol

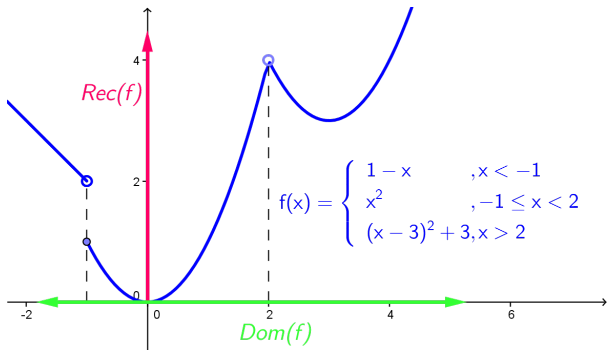
1. **Dominio:**

$$\begin{aligned} \mathcal{D}om(C) &= \{x \in \mathbb{R} / f(x) \in \mathbb{R}\} \\ &=]-\infty, -1[\cup [-1, 2[\cup]2, +\infty] \\ &= \mathbb{R} - \{2\} \end{aligned}$$

2. **Recorrido:**

$$\begin{aligned} \mathcal{R}ec(T) &= \{y \in \mathbb{R} / \exists x \in \mathcal{D}om(T) \wedge y = T(x)\} \\ &= \mathcal{R}ec(f_1) \cup \mathcal{R}ec(f_2) \cup \mathcal{R}ec(f_3) \\ &=]2, \infty, [\cup [0, 4[\cup [3, +\infty[\\ &= [0, +\infty[\\ &= \mathbb{R}_0^+ \end{aligned}$$

Idea gráfica



4.7 Función Exponencial

Definición 4.16.

Dado $b > 0, b \neq 1$, llamamos función exponencial de base b a la función

$$\begin{array}{rccc} \exp_b : & \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & x & \rightarrow & \exp_b(x) = b^x \end{array}$$

Observación 4.17.

El comportamiento de la función exponencial es muy distinto según sea $0 < b < 1$, $b > 1$, $b = 1$.

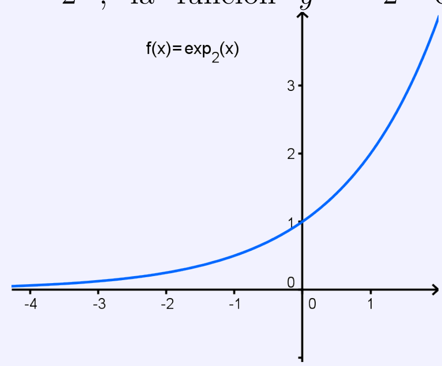
Analicemos la gráfica de la función exponencial de acuerdo al valor de b.

Ejemplo 4.13.

$y = 2^x$

- Si $b > 1$, por ejemplo $b = 2$, la función $y = 2^x$ es **creciente**.

x	2^x
3	8
2	4
1	2
0	1
-1	1/2
-2	1/4
-3	1/8

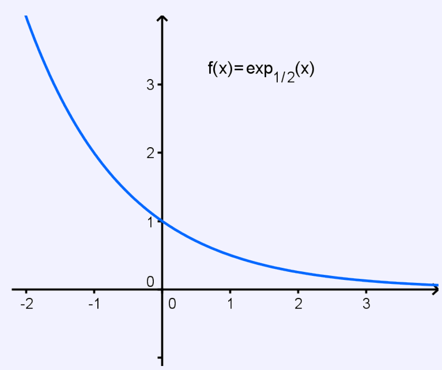


Ejemplo 4.14.

$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

- Si $b < 1$, por ejemplo $b = \frac{1}{2}$, la función $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ es **decreciente**.

x	2^x
3	1/8
2	1/4
1	1/2
0	1
-1	2
-2	4
-3	8



4.7.1. Ecuaciones Exponenciales

Definición 4.17.

A una ecuación en la que la incógnita aparece en un exponente se la llama ecuación exponencial.

Ejemplo 4.15.

1. $5^{3-x} = 125$
2. $3^{1-x^2} = \dfrac{1}{27}$
3. $\dfrac{4^{x+1}}{2^{x+2}} = 128$
4. $2^{3x} = 0{,}5^{3x+2}$

Solución:

1. $5^{3-x} = 5^3 \Rightarrow 3 - x = 3 \Rightarrow x = 0$
2. $3^{1-x^2} = 3^{-3} \Rightarrow 1 - x^2 = -3 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$
3. $\dfrac{2^{2(x+1)}}{2^{x+2}} = 2^7 \Rightarrow 2^{2x+2-x-2} = 2^7 \Rightarrow 2^x = 2^7 \Rightarrow x = 7$
4. $2^{3x} = \dfrac{1}{2}^{3x+2} \Rightarrow 2^{3x} = 2^{-3x-2} \Rightarrow 3x = -3x - 2 \Rightarrow 6x = -2 \Rightarrow x = \dfrac{1}{3}$

4.7.2. Propiedades

Resumen 4.

1. $\forall b \in \mathbb{R}^+ : \exp_b(0) = b^0 = 1$
2. $\forall b \in \mathbb{R}^+ : \exp_b(1) = b^1 = b$
3. $\forall b \in \mathbb{R}^+ : \exp_b(x+y) = b^{x+y} = b^x \cdot b^y = \exp_b(x) \cdot \exp_b(y)$
4. $\forall b \in \mathbb{R}^+ : \exp_b(x-y) = b^{x-y} = b^{x-y} = \dfrac{b^x}{b^y} = \dfrac{\exp_b(x)}{\exp_b(y)}$

4.8 Función Logarítmica (Logaritmos)

Problema: Resolver $10^{1-x} = 100$ **Resp:** Si $x = -1 \Rightarrow 10^{1-(-1)} = 10^2 = 100$
Pregunta 2: Resolver $10^{1-x} = 30$
La pregunta es: ¿Para qué valor o valores de la incognita x se cumple la igualdad?

Claramente la respuesta no es fácil, y podríamos estar muchos minutos u horas tratando (probando) distintos valores para encontrar la solución.

La respuesta es usar otra función (la función inversa) para resolver este problema.

Recordando la definición de la función exponencial:

$\exp_b : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$, $x \longrightarrow \exp_b(x) = b^x$, $\quad b \neq 1$

Podemos definir la función logaritmo(función **inversa** de de la función exponencial)

Definición 4.18.

Se define la función **logaritmo** como la función inversa de la exponencial como:

$$\log_b : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longrightarrow y = \log_b(x), \quad b > 0, b \neq 1$$

donde se cumple que:

$$\boxed{\log_b(x) = y \Leftrightarrow b^y = x}$$

Ejemplo 4.16.

Para cada una de las siguientes igualdades exponenciales escribir la correspondiente igualdad logarítmica.

a) $2^7 = 128$

$2^7 = 128 \Rightarrow \log_2 128 = 7$

b) $8^{1/3} = 2$

$8^{1/3} = 2 \Rightarrow \log_8 2 = \frac{1}{3}$

Ejemplo 4.17 (Calcular)**.**

a) $\log_2 16 =?$

$\log_2 16 = y \Rightarrow 2^y = 16 = 2^4 \Rightarrow y = 4$

b) $\log_2 32 =?$

$\log_2 32 = y \Rightarrow 2^y = 32 = 2^5 \Rightarrow y = 5$

Resolvamos problema anterior **Pregunta 2:** Resolver $10^{1-x} = 30$

$$10^{1-x} = 30 \Rightarrow 1 - x = \log_{10}(30) \Rightarrow x = 1 - \log_{10} 30$$

Sabiendo que $\log_{10} 30 \approx 1,47712$

se tiene que $x \approx -0,47712$

4.8.1. Propiedades de los Logaritmos

Resumen 5.

1. $\log_b(x \cdot y) = \log_b x + \log_b y$
2. $\log_b(x^y) = y \cdot \log_b x$

   A partir de estas dos propiedades se pueden deducir las siguientes:
3. $\log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \log_b x - \log_b y$
4. $\log_b \sqrt[y]{x} = \frac{1}{y} \cdot \log_b x$

Observación 4.18 (Observaciones Importantes)**.**

1.- El logaritmo de la base es siempre 1

$$\log_b b = 1 \qquad \text{¿por qué?}$$

2.- El logaritmo de 1 es 0 en cualquier base

$$\log_b 1 = 0 \qquad \text{¿por qué?}$$

3.- Cuando la base es 10 se llama **logaritmo decimal o vulgar** y se escribe:

$$\log_{10} x = \log x$$

4.- Cuando la base es e se llama **logaritmo neperiano o natural** y se escribe:

$$\log_e x = \ln x$$

5.- El logaritmo **vulgar** y el **natural** están tabulados (se pueden obtener usando la calculadora científica.

EJERCICIO (CALCULAR): 1. $log_2(8{,}4) =$

2. $\log_4 \frac{1}{64} =$
3. $\log_2 4^{81} =$
4. $\log_3 \sqrt[15]{27} =$
5. Mostrar con un ejemplo que en general,

   a) $\log_b(x+y) \neq \log_b x + \log_b y$

b) $\log_b(x-y) \neq \log_b x - \log_b y$

4.8.2. Cambio de Base

Como las calculadoras científicas permiten solamente obtener logaritmos decimales y neperianos.

Si queremos o necesitamos calcular logaritmos en otra base, es conveniente realizar un cambio de base.

Teorema 4.1.

$$\boxed{\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}}$$

Ejemplo 4.18.

Calcular $\log_2 3$

Solución: $\log_2 3 = \frac{\log 3}{\log 2} =$ o bien $\log_2 3 = \frac{\ln 3}{\ln 2} = 1{,}5849$

4.8.3. Ecuaciones Exponenciales y Logarítmicas

Ahora resolveremos ecuaciones más complejas utilizando las propiedades del logaritmo y cambio de base.

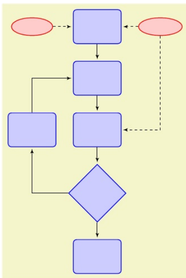
EJERCICIO : Hallar el valor de x en las siguientes ecuaciones exponenciales y logaritmicas:

a) $3^x \cdot 5^{2x} = 4$

b) $3^{x+1} + 3^{x-1} = 2431$

c) $\log_5 4x = 2$

d) $\log_9(x+1) + log_9(x+1) = 2$



5 Teorema del Binomio

Simplificando nuestros cálculos

El teorema del binomio nos permite resolver problemas con una simplicidad sorprendente: Recuerdo que un profesor nos recordaba constantemente que debíamos aprendernos el cuadrado de muchos números tales como 13^2, 15^2, 25^2, etc. pues nos ayudaría a reducir el tiempo en nuestros cálculos.
Sin embargo, cuando nos enseño el teorema del binomio, descubrimos que todos los números de dos dígitos términados en 5 se podían calcular de una forma mucho más rápida y eficiente, y a continuación les entrego el método.
Si queremos calcular 25^2, hacemos $(20+5)^2$ que equivale a $2 \cdot 3$ unido a 25, esto es (el primer número se multiplica por el siguiente número entero, por lo que 2 por 3 nos da 6, y éste lo juntamos con el 25 (5^2)), dando como resultado el 625.
Si queremos calcular 65^2, hacemos $(60+5)^2$ que equivale a $6 \cdot 7$ unido a 25, esto es (el primer número se multiplica por el siguiente número entero, por lo que 6 por 7 nos da 42, que juntamos con el 25), y nos da 4225.
Prueba con otros y demuestra usando el teorema del binomio que el método funciona.

5.1 Introducción

En muchos casos nos encontramos con expresiones como:

$$S = 2 + 4 + 6 + \cdots + 20$$

y en matemática nos interesa simplificar la notación, y escribimos:

$$S = \sum_{n=1}^{10} 2n$$

donde $\sum$ indica que se está sumando y recibe el nombre de **Sumatoria**. En general:

$$S = \sum_{i=n_0}^{n_1} b_i = b_{n_0} + b_{n_0+1} + \cdots + b_{n_1-1} + b_{n_1}$$

De igual forma definimos el signo de **Productoria** $\prod$. Ejem.:

$$P = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot 50 = \prod_{i=1}^{50} i$$

Definición 5.1.

Definimos el **Factorial** de un número n, con $n \in \mathbb{N}$ como:

$$n! = \begin{cases} \prod_{i=1}^{n} i = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (n-1) \cdot n & , \quad n \geq 1 \\ 1 & , \quad n = 0 \end{cases}$$

Observación 5.1.

De la definición tenemos que $(n+1)! = n! \cdot (n+1)$

Definición 5.2.

Definamos el número:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!}, \qquad n \geq r, \ \ n, r \in \mathbb{N}_0$$

Observación 5.2.

De la definición se tiene que:

$$\begin{array}{rcll}
\binom{n}{0} & = & \dfrac{n!}{(n-0)!0!} & = \; 1 \\[2ex]
\binom{n}{n} & = & \dfrac{n!}{(n-n)!n!} & = \; 1 \\[2ex]
\Rightarrow & & \binom{n}{0} & = \; \binom{n}{n} \\[2ex]
\binom{n}{n-1} & = & \frac{n!}{(n-n+1)!(n-1)!} & = \; n \\[2ex]
\binom{n}{1} & = & \frac{n!}{(n-1)!1!} & = \; n \\[2ex]
\Rightarrow & & \binom{n}{1} & = \; \binom{n}{n-1}
\end{array}$$

Observación 5.3.

Sea $n, k \in \mathbb{N}_0$, tal que $n \geq k$, se tiene:

1. $\displaystyle\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$
2. $\displaystyle\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

EJERCICIO : Hacer las demostraciones de la observación anterior

EJERCICIO : Calcular: $\binom{5}{3}; \binom{5}{4} + \binom{5}{5}; \binom{100}{1} + \binom{20}{20}$

5.1.1. Teorema del Binomio

Previo: Recordemos que; si $a, b \in \mathbb{R}$, entonces:

$$
\begin{array}{rcccccccccc}
(a+b)^0 & = & & & & & 1 & & & & \\
(a+b)^1 & = & & & & a & + & b & & & \\
(a+b)^2 & = & & & a^2 & + & 2ab & + & b^2 & & \\
(a+b)^3 & = & & a^3 & + & 3a^2b & + & 3ab^2 & + & b^3 & \\
(a+b)^4 & = & a^4 & + & 4a^3b & + & 6a^2b^2 & + & 4ab^3 & + & b^4
\end{array}
$$

Notemos que si usamos la notación $\binom{n}{k}$ tenemos que:

$$
\begin{aligned}
(a+b)^1 &= \binom{1}{0}a^1b^0 + \binom{1}{1}a^0b^1 \\
(a+b)^2 &= \binom{2}{0}a^2b^0 + \binom{2}{1}a^1b^1 + \binom{2}{2}a^0b^2 \\
(a+b)^3 &= \binom{3}{0}a^3b^0 + \binom{3}{1}a^2b^1 + \binom{3}{2}a^1b^2 + \binom{3}{3}a^0b^3 \\
(a+b)^4 &= \binom{4}{0}a^4b^0 + \binom{4}{1}a^3b^1 + \binom{4}{2}a^2b^2 + \binom{4}{3}a^1b^3 + \binom{4}{4}a^0b^4
\end{aligned}
$$

Luego podemos encontrar una expresión general para $(a+b)^n$, con $n \in \mathbb{N}$,dada por:

Teorema 5.1 (Teorema del Binomio)**.**

Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, entonces:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Observación 5.4.

1. Notemos que $(a+b)^n$ tiene $(n+1)$ términos.

2. El primer término del binomio es a^n.
   El último término del binomio es b^n.

3. La potencia de b crece a medida que la de a decrece.

4. El coeficiente de 1^{er} y último término son iguales.
   El coeficiente de 2^{do} y penúltimo término son iguales.
   El coeficiente de 3^{er} y antepenúltimo término son iguales.
   etc.

5. El r-ésimo término del binomio es:
$$t_r = \binom{n}{r-1} a^{n-(r-1)} b^{r-1}$$

6. Si n es **par**, entonces el binomio tiene $(n+1)$ términos, es decir, tiene un número impar de términos, luego podemos hablar de **el término central** del binomio y corresponde al término $\dfrac{n}{2}+1$.
$$t_c = \binom{n}{\frac{n}{2}} a^{\frac{n}{2}} b^{\frac{n}{2}}$$

7. Si n es **impar**, podemos hablar de **los términos centrales** del binomio $(a+b)^n$, que corresponden a los términos $\dfrac{n+1}{2}$y $\dfrac{n+3}{2}$
$$t_{c_1} = \binom{n}{\frac{n-1}{2}} a^{\frac{n+1}{2}} b^{\frac{n-1}{2}}$$
$$t_{c_2} = \binom{n}{\frac{n+1}{2}} a^{\frac{n-1}{2}} b^{\frac{n+1}{2}}$$

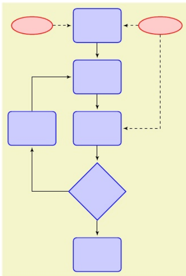
Ejemplo 5.1.

Para $(3x + 5y)^{10}$ encuentre:

1. Número de términos
2. El o los términos centrales
3. El término que contiene x^7 si existe

Solución:

1. Como $n = 10$, entonces tiene $n + 1 = 11$ términos.
2. n es par, luego tiene un término central y es el sexto, es decir
$$t_c = t_6 = \binom{10}{5}(3x)^5(5y)^5 = \binom{10}{5}(15)^5 x^5 y^5$$
3. Debemos encontrar un k tal que:
$$\binom{10}{k}(3x)^{10-k}(5y)^k = \binom{10}{k}Cx^7$$
esto es:
$$\begin{aligned} (3x)^{10-k}(5y)^k &= Cx^7 \\ 3^{10-k}x^{10-k}(5y)^k &= Cx^7 \\ x^{10-k} &= x^7 \\ 10-k &= 7 \quad \Rightarrow k = 3 \end{aligned}$$
Luego el término es el cuarto $(k + 1)$



6 Inducción Matemática

Anecdota

Es muy conocida la anécdota según la cual a *Carl Frederich Gauss* (1777-1855), cuando contaba con diez años de edad, le propusieron en la escuela primaria de su aldea natal que sumara los 100 primeros números naturales. Ante el asombro del profesor, apenas éste había acabado de dictar el problema, Gauss dio la solución: 5050.

Lo que este insigne matemático observó fue que la suma $1 + 100$ era igual a $2 + 99$, igual a $3 + 98, \cdots$ etc. es decir, sólo tuvo que darse cuenta de que contaba con 50 parejas de números, cada una de las cuales sumaba 101. Así, se limitó a multiplicar: $50 \cdot 101 = 5050$.

Se puede demostrar que

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

6.1 Números Naturales

Definición 6.1.

Designaremos por $\mathbb{N}$, al conjunto de los números naturales, e.d.

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \cdots\}$$

Observación 6.1.

1. 1 es el primer elemento de este conjunto, y precede a todos los otros, e. d.

$$1 < n, \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n \neq 1$$

2. No existe un natural "p" tal que

$$n < p < n + 1$$

(conjunto discreto)

3. Si $m, n \in \mathbb{N}$ y $m < n$, entonces existe $b \in \mathbb{N}$ tal que

$$n = m + b$$

Definición 6.2.

1. Un número natural p se dice **par**, si se puede expresar como:

$$p = 2 \cdot n, \quad \text{donde } n \in \mathbb{N}$$

2. Un número p se dice **impar**, si se puede expresar como:

$$p = 2 \cdot n - 1, \quad \text{donde } n \in \mathbb{N}$$

3. Un número natural p se dice **primo**, si sus únicos divisores son1 y p.
4. Dos enteros p y q se dicen **primos entre si**, sólo si poseen a el 1 como divisor común.

6.2 Inducción

Definición 6.3.

Diremos que un subconjunto S de $\mathbb{R}$ es un **Conjunto Inductivo**, si S verifica lo siguiente:

1. $1 \in S$
2. si $a \in S \quad \Rightarrow \quad (a+1) \in S$

+

Observación 6.2 (Importante)**.**

$\mathbb{N}$ es el menor conjunto inductivo que admite $\mathbb{R}$

6.2.1. Principio de Inducción Matemática

Teorema 6.1.

Si $S \subseteq \mathbb{N}$ y verifica:

1. $1 \in S$
2. $n \in S \;\Rightarrow\; (n+1) \in S$

   Entonces $S = \mathbb{N}$

6.2.2. Método de Demostración usando Inducción Matemática

Método de demostración por inducción.

Sea $P(n)$ una proposición asociada a todo número natural "n".

Se puede concluir que $P(n)$ es verdadera $\forall n \in \mathbb{N}$ si es posible probar que:

(i) $P(1)$ es cierto.

(ii) Supuesto $P(k)$ verdadero, siendo $k \in \mathbb{N}$ fijo, pero arbitrario, que $P(k+1)$ es verdadero.

Ejemplo 6.1.

Demuestre por inducción que $\forall n \in \mathbb{N}$, se tiene:

$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Solución: Sea $P(n): 1+2+3+4+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ y
Sea $S = \{n/n \in \mathbb{N} \wedge P(n)\}$, es decir,

$$S = \{n/n \in \mathbb{N} \wedge 1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}\}$$

Dem: (a) Por definición $S \subseteq \mathbb{N}$

(b): $\mathbb{N} \subseteq S$, en efecto:

(i) $1 \in S$ pues $1 = 1$

(ii) Hipótesis Ind.:

$$P(k): 1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \textbf{(HI)}$$

Tesis Inducción:

$$P(k+1): 1+2+3+\cdots+n+(n+1) = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2} \qquad \textbf{(TI)}$$

Queremos probar: $H \Rightarrow T$, es decir:

Supongamos $P(k)$, y

Probemos $P(k+1)$

$$\begin{aligned} P(k+1): \quad 1+2+3+\cdots+k+(k+1) &\overset{\text{H.I.}}{=} \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) \\ &= \frac{k(k+1)+2k+2}{2} \\ &= \frac{k^2+k+2k+2}{2} \\ &= \frac{k^2+3k+2}{2} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \end{aligned}$$

Luego $P(k+1): 1+2+3+\cdots+k+(k+1) = \dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$

De (i) y (ii) S es inductivo, e. d. $\mathbb{N} \subseteq S$, y

Por (a) y (b) $S = \mathbb{N}$

Así $P(n)$ se cumple $\forall n \in \mathbb{N}$

Ejemplo 6.2.

Probar usando inducción matemática que: $3^{2n} - 1$ es divisible por 8.

Solución: Sea $P(n) : 3^{2n} - 1$ divisible por 8, es decir,
$P(n) : 3^{2n} - 1 = p \cdot 8$, para algún $p \in \mathbb{N}$, y
Sea $S = \{n \in \mathbb{N} : P(n)\}$

Dem: (a): Por definición $S \subseteq \mathbb{N}$.

(b): $\mathbb{N} \subseteq S$, en efecto:

(i) $1 \in S$, pues $3^{2\cdot 1} - 1 = 9 - 1 = 8$ es divisible por 8.

(ii) $P(k) : 3^{2k} - 1 = p \cdot 8$ para algún $p \in \mathbb{N}$ (es divisible por 8) **(H.I.)**
$P(k+1) : 3^{2(k+1)} - 1 = q \cdot 8$ para algún $q \in \mathbb{N}$ (es divisible por 8) **(T.I.)**
Supongamos $P(k)$ verdadero y probemos que $P(k+1)$ es verdad. En efecto:

$$\begin{aligned}
3^{2(k+1)} - 1 &= 3^{2k+2} - 1 \\
&= 3^{2k} \cdot 3^2 - 1 \\
&= 3^{2k} \cdot 9 - 9 + 9 - 1 \\
&= 9(3^{2k} - 1) + 9 - 1 \\
&\overset{\text{H.I.}}{=} 9 \cdot (8 \cdot p) + 8 \quad \text{para algún } p \in \mathbb{N} \\
&= 8 \cdot (9p + 1) \\
&= 8 \cdot q \quad \text{para } q = (9p + 1) \in \mathbb{N} \\
& \text{e.d. es divisible por 8}
\end{aligned}$$

Luego de (i) y (ii) S es inductivo, es decir $\mathbb{N} \subseteq S$

Así, de (a) y (b) $S = \mathbb{N}$,

Esto es: $P(n)$ vale $\forall n \in \mathbb{N}$