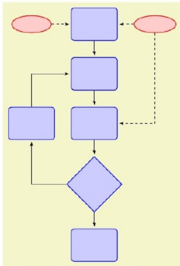

2 Transformaciones Lineales

$w = F(v)$

2.1 Transformaciones Lineales

Definición 2.1.

Sean V y W dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$.
Diremos que $T : V \to W$ es una **Aplicación Lineal** (Transformación lineal) si:

1. $T(v + w) = T(v) + T(w), \quad \forall v, w \in V.$
2. $T(\alpha v) = \alpha T(v), \quad \alpha \in \mathbb{K}, \forall v \in V.$

Ejemplo 2.1.

Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $T(x, y) = 2x + y$, mostrar que es una aplicación lineal.

Demostración: En efecto:

1. $\forall (x, y), (u, v) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow \begin{cases} T(x, y) = 2x + y \\ T(u, v) = 2u + v \end{cases} (*)$

$$\begin{aligned} T((x, y) + (u, v)) &= T(x + u, y + v) \\ &= 2(x + u) + (y + v) \\ &= 2x + 2u + y + v \\ &= (2x + y) + (2u + v) \\ &\overset{*}{=} T(x, y) + T(u, v) \end{aligned}$$

2. $\forall \alpha \in \mathbb{R}, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow T(x, y) = 2x + y \ \ (*)$

$$
\begin{aligned}
T(\alpha(x,y)) &= T(\alpha x, \alpha y) \\
&= 2(\alpha x) + (\alpha y) \\
&= \alpha(2x+y) \\
&\overset{*}{=} \alpha \cdot T(x,y)
\end{aligned}
$$

Luego, por (1) y (2), T es una aplicación lineal.

Ejemplo 2.2.

Muestre que la función, $I : V \to V$, $I(v) = v$ es una aplicación lineal, llamada Aplicación Identidad.

Demostración: En efecto:

1. $\forall v_1, v_2 \in V \Rightarrow \begin{cases} I(v_1) = v_1 \\ I(v_2) = v_2 \end{cases} (*)$

$$I(v_1 + v_2) = v_1 + v_2 \overset{*}{=} I(v_1) + I(v_2)$$

2. $\forall \alpha \in \mathbb{R}, v \in V \Rightarrow I(v) = v \;\; (*)$

$$I(\alpha v) = \alpha \cdot v \overset{*}{=} \alpha \cdot I(v)$$

Luego, por (1) y (2), es una Transformación Lineal.

Ejemplo 2.3.

Muestre que la función, $\theta : V \to V$, $\theta(v) = 0_V$ es una aplicación lineal, llamada Aplicación Nula.

Demostración: En efecto:

1. $\forall v_1, v_2 \in V \Rightarrow \begin{cases} \theta(v_1) = 0_V \\ \theta(v_2) = 0_V \end{cases} (*)$

$$\theta(v_1 + v_2) = 0_V = 0_V + 0_V \overset{*}{=} \theta(v_1) + \theta(v_2)$$

2. $\forall \alpha \in \mathbb{R}, v \in V \Rightarrow \theta(v) = 0_V$ $(*)$

$$\theta(\alpha v) = 0_V = \alpha \cdot 0_V \overset{*}{=} \alpha\theta(v)$$

Luego, por (1) y (2), es una Transformación Lineal.

EJERCICIO : Muestre que cada una de las siguientes funciones son Aplicaciones Lineales.

1. $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad T(x) = 2x.$
2. $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad F(x,y) = (x+y, x-y).$
3. $H : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad H(x,y,z) = (x, x+y, y+z).$

2.1.1. Kernel e Imagen de una Aplicación Lineal

Sean V y W dos espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$ y $T : V \to W$ una aplicación lineal.

Definición 2.2.

Se llama **Kernel** o **Nucleo** de la aplicación T al conjunto de todos los vectores $v \in V$ tales que: $T(v) = \theta_W$, es decir:

$$Ker(T) = \{v \in V : T(v) = \theta_W\} \tag{2.1}$$

Definición 2.3.

Se llama **Imagen** de la aplicación lineal T al conjunto de los vectores $w \in W$ tales que existe $v \in V$ de modo que: $T(v) = w$,es decir:

$$Im(T) = \{w \in W / \exists\, v \in V : T(v) = w\} \tag{2.2}$$

Ejemplo 2.4.

Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad T(x,y,z) = (x+y, z)$. Hallar $Ker(T)$, $Im(T)$.

Solución:

$$\begin{aligned}
Ker(T) &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : T(x,y,z) = (0,0)\} \\
&= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x+y, z) = (0,0)\} \\
&= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y = 0, z = 0\} \\
&= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = -y, z = 0\} \\
&= \{(-y, y, o) \in \mathbb{R}^3\} \\
&= \langle\{(-1,1,0)\}\rangle
\end{aligned}$$

EJERCICIO : Muestre que cada una de las siguientes funciones son Aplicaciones Lineales.

1. $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $T(x) = 2x$.
2. $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F(x, y) = (x + y, x - y)$.
3. $H : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $H(x, y, z) = (x, x + y, y + z)$.

② $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$; $F(x,y) = (x+y, x-y)$

Debemos ver que F es una aplicación lineal

Sea $w_1 = (x_1, y_1)$ y $w_2 = (x_2, y_2)$

$\circledast$ $F(w_1 + w_2) = F(w_1) + F(w_2)$, Si $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^2$

Tal que

$$F(w_1) = F(x_1, y_1) = (x_1 + y_1, x_1 - y_1)$$
$$F(w_2) = F(x_2, y_2) = (x_2 + y_2, x_2 - y_2)$$

Ahora

$$F(w_1 + w_2) = F((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) = F(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$
$$= ((x_1 + x_2) + (y_1 + y_2), (x_1 + x_2) - (y_1 + y_2))$$
$$= ((x_1 + y_1) + (x_2 + y_2), (x_1 - y_1) + (x_2 - y_2))$$
$$= (x_1 + y_1, x_1 - y_1) + (x_2 + y_2, x_2 - y_2)$$
$$= F(w_1) + F(w_2) \checkmark$$

② $\alpha \in \mathbb{R}$, $(x,y) \in \mathbb{R}$, tal que $F(x,y) = (x+y, x-y)$

$$F(\alpha(x,y)) = F(\alpha x, \alpha y) = (\alpha x + \alpha y, \alpha x - \alpha y)$$
$$= (\alpha(x+y), \alpha(x-y)) = \alpha(x+y, x-y)$$
$$= \alpha F(x,y) \checkmark$$

En consecuencia F es una aplicación lineal ∎

De los siguientes problemas, determinar si la Transformación de V en W es una transformación Lineal.

1) $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$; $T(x,y,z) = (0,y)$

2) $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$; $T(x,y,z) = (1, z)$

3) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$; $T(x,y) = (x^2, y)$

Solución:

2) Sea $w_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $w_2 = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$, tales que

$T(w_1) = T(x_1, y_1, z_1) = (1, z_1)$ y $T(w_2) = T(x_2, y_2, z_2) = (1, z_2)$

1) $T(w_1 + w_2) = T(w_1) + T(w_2)$

$$T(w_1 + w_2) = T((x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)) = T(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$

$$= (1, z_1 + z_2) = (1, z_1) + (0, z_2) \neq T(w_1) + T(w_2)$$

$\therefore$ Por lo tanto no se cumple 1

Luego T no es una aplicación Lineal.

En particular, $(-1,1,0),(2,-2,0),(0,0,0) \in Ker(T)$.

$$
\begin{aligned}
Im(T) &= \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 / \exists\, (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : T(a,b,c) = (u,v)\} \\
&= \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 / \exists\, (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : (a+b,c) = (u,v)\} \\
&= \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 / \exists\, (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : a+b = u, c = v\} \\
&= \{(a+b,c) \in \mathbb{R}^2\} \\
&= \{(a,0)+(b,0)+(0,c) :\ a,b,c \in \mathbb{R}\} \\
&= \langle\{(1,0),(0,1)\}\rangle = \mathbb{R}^2 \qquad (\text{ base canónica de } \mathbb{R}^2)
\end{aligned}
$$

Teorema 2.1.

Sea $T : V \to W$ una aplicación lineal. Entonces $Ker(T)$ es un subespacio de V e $Im(T)$ es un subespacio de W

Demostración: Es claro que $Ker(T)$ es subconjunto de V.

i) $Ker(T) \neq \varnothing$, pues $\theta_V \in Ker(T)$; dado que $T(\theta_v) = \theta_W$

ii) $\forall v_1, v_2 \in Ker(T) \Rightarrow \begin{cases} T(v_1) = \theta_w \\ T(v_2) = \theta_w \end{cases}$

$$T(v_1+v_2) = T(v_1)+T(v_2) = \theta_w + \theta_w = \theta_w \Rightarrow (v_1+v_2) \in Ker(T)$$

iii) $\forall \alpha \in \mathbb{R}, v \in Ker(T) \Rightarrow T(v) = \theta_w$

$$T(\alpha v) = \alpha T(v) = \alpha\theta_w = \theta_w \Rightarrow (\alpha v) \in Ker(T)$$

Luego, por (i), (ii), (iii) $Ker(T)$ es subespacio.

Ejercicio : Hallar *Kernel* e *Imagen* de las siguientes aplicaciones:

1. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, (x,y) \to T(x,y) = (x,y,2x)$.
2. $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4, x \to T(x) = (x,2x,x,2x)$.
3. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (x,y,z) \to T(x,y,z) = (x-y,x,x+y)$.