MATERIAL DE APOYO PARA CÁLCULO INTEGRAL: 220181, 220190, 220041

Profesores participantes: Oscar Villarroel Carvallo, Fernando Flores Bazán.

Concepción, Abril 2021.

Departamento de Matemática–Universidad del Bío-Bío

Índice general

Capítulo 1

Diferenciales

1.1. Derivación

Propiedades 1.1.1.

1. Sea $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ función constante definida en I entnces $f(x) = C$ es derivable y se cumple

$$\boxed{f'(x) = 0}$$

2. Sea $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ función derivable en I y $c \in \mathbb{R}$ entonces $cf(x)$ es derivable y se cumple

$$\boxed{(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x).}$$

3. Sean $f,\ g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones derivables en I entonces $(f(x) \pm g(x))$ es derivable y se cumple que

$$\boxed{(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x).}$$

4. Sean $f,\ g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones derivables en I entonces $f(x) \cdot g(x)$ es derivable y se cumple que

$$\boxed{(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)}$$

5. Sea $f,\ g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones derivables en I entonces $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ es derivable y se cumple que

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2},\ g(x) \neq 0}$$

1.2. Introducción a la diferencial

Sea $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ función diferenciable definida en el intervalo I y sean dados los puntos $x_0, x_0 + h \in I$ con $h \neq 0$, como f es diferenciable, existe la derivada de f, es decir

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \left[\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \right]}$$

y eligiendo $\epsilon > 0$ pequeño, la diferencia

$$\left| \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0) \right| < \epsilon$$

se hace pequeña como queramos para los $h \neq 0$, de modo que si definimos la función $\phi(h)$ como

$$\boxed{\phi(h) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0)} \tag{1.1}$$

se tiene que $\lim_{h \to 0} \phi(h) = 0$, luego de (1.1) se obtiene la expresión

$$\boxed{f(x_0+h) - f(x_0) = h f'(x_0) + h\phi(h)}$$

Si denotamos $\triangle y = f(x_0+h) - f(x_0)$; $\triangle x = x_0 + h - x_0 = h$ la expresión anterior quedará

$$\boxed{\triangle y = f'(x_0) \triangle x + \triangle x \phi(\triangle x)}$$

1.3. La Diferencial

Definición 1.3.1. Sea $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ función diferenciable definida en el intervalo I y sean dados los puntos $x_0, x_0 + h \in I$ con $h \neq 0$,

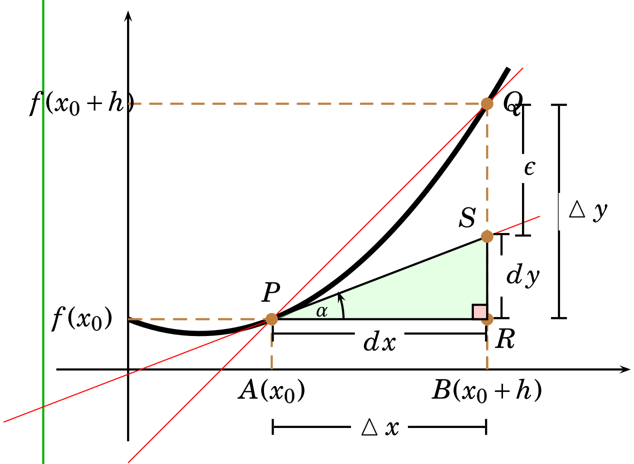
1. Se define al término $f'(x_0)\triangle x$ como ***diferencial*** de f con respecto a x_0 y se denota

$$dy = df(x_0) = f'(x_0)\triangle x = f'(x_0)\, dx$$

2. En general la diferencial de f respecto a x es

$$\boxed{dy = df(x) = f'(x) dx.}$$

En conclusión la diferencial de una función es igual al producto de su derivada por la diferencial de la variable independiente, gráficamente es así



- $\overline{AB} = \overline{PR} \Longrightarrow \triangle x = dx$
- En el triángulo rectángulo PRS
  $\tan(\alpha) = \dfrac{\overline{RS}}{\overline{PR}} = f'(x)$ de donde
  $\overline{RS} = f'(x) \cdot \overline{PR} \Longrightarrow \boxed{dy = f'(x)dx}$
- $\overline{SQ} = \overline{RQ} - \overline{RS} \Longrightarrow \epsilon = \triangle y - dy \Longrightarrow \triangle y = dy + \epsilon$
- Claramente $\triangle y \neq dy$ pero son aproximadamente iguales $\triangle y \cong dy$

Ejemplo 1.3.1. Sea $y = f(x) = x^2 + x - 1$

(a) Hallar dy para $x = 1$ y $dx = 0{,}1$

(b) Hallar $\triangle y$ para $x = 1$ y $\triangle x = 0{,}1$

(c) Comparar dy y $\triangle y$

Resolución: ►

(a) **Derivada de** f.

$$f(x) = x^2 + x - 1 \Longrightarrow \boxed{f'(x) = 2x + 1}$$

Diferencial

$$dy = f'(x) \cdot dx \Longrightarrow \boxed{dy = (2+1)\cdot(0{,}1) = 0{,}30}$$

(b) Cálculo $\triangle y$ (el verdadero cambio en la ordenada y)

$$\begin{aligned}
\triangle y &= f(x + \triangle x) - f(x) = (x + \triangle x)^2 + (x + \triangle x) - 1 - (x^2 + x - 1) \\
\triangle y &= \triangle x(2x + 1 + \triangle x) \Longrightarrow \boxed{\triangle y = (0{,}1)(3 + 0{,}1) = 0{,}31}
\end{aligned}$$

(c) La diferencia $\boxed{\epsilon = \triangle y - dy = 0{,}31 - 0{,}30 = 0{,}1}$

Confeccionaremos una tabla donde los valores de $\triangle x$ son $0{,}1$, $0{,}01$, $0{,}001$ y vemos que dy aproxima a $\triangle y$ cada vez más exactamente cuando $\triangle x$ tiende hacia cero

$dx = \triangle x$	dy	$\triangle y$	$\triangle y - dy$
0.100	0.300	0.310000	0.010000
0.010	0.030	0.030100	0.000100
0.001	0.003	0.003001	0.000001

◄

Ejemplo 1.3.2. Calcule la diferencial de las funciones siguientes

(a) $f(x) = \cos(x)$ (b) $f(x) = 3^x$ (c) $f(x) = (x+1)^x$

Resolución: ►

(a) *Cálculo de la derivada de* $f(x) = \cos(x)$

$$f'(x) = (\cos(x))' = -\operatorname{sen}(x)$$

Cálculo de la diferencial de f

$$\begin{aligned} df(x) &= (\cos(x))' dx \\ &\Longrightarrow \boxed{df = -\operatorname{sen}(x) dx} \end{aligned}$$

(b) *Cálculo de la derivada de* $f(x) = 3^x$

$$f'(x) = (3^x)' = 3^x \ln(3) \cdot (x)' = 3^x \ln(3)$$

Cálculo de la diferencial de $f(x) = 3^x$

$$\begin{aligned} df(x) &= (3^x)' dx \\ &\Longrightarrow \boxed{df(x) = 3^x \ln(3) dx} \end{aligned}$$

(c) *Cálculo de la derivada de* $f(x) = (x+1)^x$

$$\begin{aligned} f'(x) &= ((x+1)^x)' = (x+1)^{x-1} \left[(x+1) \cdot (x)' \ln(x+1) + x(x+1)'\right] \\ &\Longrightarrow \boxed{f'(x) = (x+1)^{x-1} [(x+1)\ln(x+1) + x]} \end{aligned}$$

Cálculo de la diferencial de $f(x) = (x+1)^x$

$$\begin{aligned} df(x) &= ((x+1)^x)' dx \\ &\Longrightarrow \boxed{df(x) = \left[(x+1)^{x-1}((x+1)\ln(x+1) + x)\right] dx} \end{aligned}$$

◄

1.3.1. Ejercicios propuestos

Problema 1.3.1. Para las funciones dadas y sus respectivas valores hallar $\triangle y - dy$

1. $f(x) = x^2 - 2x - 3,\ x = -1,\ \triangle x = 0{,}02$
2. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 6x - 3,\ x = 2,\ \triangle x = 0{,}01$
3. $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 4,\ x = -1,\ \triangle x = 0{,}02$
4. $f(x) = 80x - 16x^2,\ x = 4,\ \triangle x = -0{,}2$
5. $f(x) = x^3 + 1,\ x = 1,\ \triangle x = -0{,}5$
6. $f(x) = \dfrac{1}{x},\ \triangle x = 2,\ \triangle x = 0{,}05$
7. $f(x) = \sqrt{x},\ x = 1,\ \triangle x = 0{,}01$
8. $f(x) = 2x^2 - 5,\ x = 2,\ \triangle x = 0{,}01$
9. $f(x) = x^2 - 3x,\ x = -1,\ \triangle x = 0{,}02$
10. $f(x) = \dfrac{1}{x^2},\ x = 2,\ \triangle x = 0{,}01$

1.4. Propagación de errores

Definición 1.4.1.

1. Sea $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ función definido en el intervalo I se llama **error propagado** a la expresión

$$\boxed{\triangle f = f(x+\triangle x) - f(x)}$$

donde

$$\boxed{f(x+\triangle x) \text{ es el } \textbf{valor exacto}}$$

y

$$\boxed{\triangle x \text{ es el } \textbf{error de medida}}$$

2. Se llama **error relativo** a la expresión

$$\boxed{\frac{\triangle f}{f(x)}}$$

3. Cuando $\triangle f$ es aproximado por $df(x)$ entonces se define el **error relativo aproximado** por

$$\boxed{\frac{df(x)}{f(x)} = \frac{f'(x)dx}{f(x)}}$$

4. Se define **error porcentual** aproximado po

$$\boxed{\frac{df(x)}{f(x)} \cdot 100\,\% = \frac{f'(x)dx}{f(x)} \cdot 100\,\%}$$

Observación 1.4.1.

(a) Cuando se pide calcular el valor aproximado del incremento de f $(\triangle f)$ se interpretar por la diferencial de f.

(b) El máximo error posible cometido, se interpreta por la diferencial.

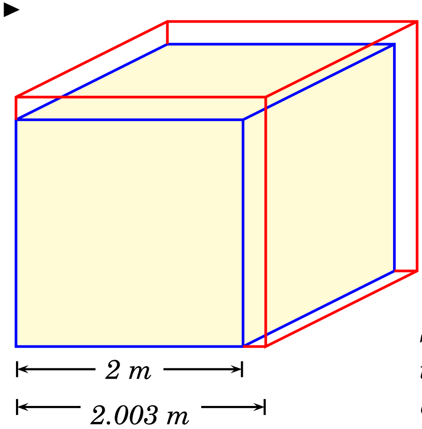
Ejemplo 1.4.2. Usando diferenciales

(a) Obtener el valor aproximado del incremento en el volumen de un cubo, cuyos lados tienen una longitud de 2m., considerando un aumento de 0.003 por lado.

(b) Hallar el valor aproximado del volumen de una cáscara esférica de 200mm. de diámetro exterior y 1mm. de espesor.

Resolución: ►

(a)

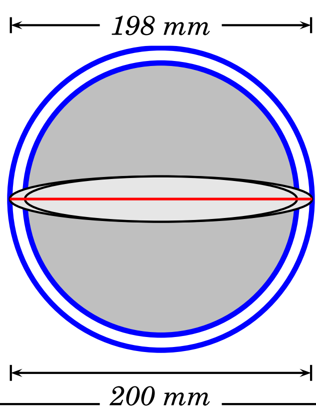


En general el volumen del cubo es $V = l^3$, *donde* l *es la medida del lado.*

El incremento del volumen del cubo es $dV = 3l^2 dl$

Si el lado del cubo se aumento en $0{,}003m$ *entonces el volumen también aumento en* $dV = 3(2)^2(0{,}003) = 0{,}036m^3$

(b)



En general el volumen de la esfera es $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, *donde* r *es el radio de la esfera.*

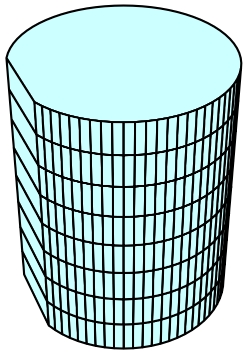
El incremento del volumen de la esfera es $dV = \frac{4}{3}\pi(3r^2)dr$

El volumen de la cáscara esférica es el incremento del volumen de la esfera cuyo radio es $r = 99mm$ *que se incremento en 1mm*
$dV = \frac{4}{3}\pi(3r^2)dr = 4\pi \cdot r^2 dr = 4 \cdot 3{,}14159\dot{(}99)^2 \cdot (1) = 123163mm^3$

◄

Ejemplo 1.4.3. Se mide el radio de un cilindro de 25 pulgadas de altura, encontrándose que es de 20 pulgadas con un error de 0.05 pulgadas. Encontrar el porcentaje de error aproximado del volumen, la superficie lateral y del área de la base.

Resolución: ►



Cálculo del error porcentual aproximado del volumen (note que el volumen debe estar en función del radio ya que el error se produce en la medición del radio)
La expresión deL volumen de un cilindro en general es $\boxed{V(r)=\pi r^2 h}$.
Para nuestro problema $h = 25pulg.,\ r = 20pulg.$ *entonces* $\boxed{V(20)=25\pi(20)^2 = 10000\pi}$
La diferencial del volumen es

$$dV(r) = \boxed{dV(r)=2\pi r25 = 50\pi r dr}$$

El error relativo aproximado es

$$\begin{aligned} e_{rV} &= \frac{dV}{V} = \frac{50\pi r dr}{10000\pi} \\ &= \frac{1000\pi(0{,}05)}{10000\pi} = 0{,}005 \\ &\Longrightarrow \boxed{e_{rV} = 0{,}005} \end{aligned}$$

El error porcentual aproximado es

$$\begin{aligned} e_{pV} &= e_{rV}\cdot 100\,\% = 0{,}005\cdot 100\,\% \\ &\Longrightarrow \boxed{e_{pV} = 0{,}5\,\%} \end{aligned}$$

El área lateral de un cilindro circular es $A(r) = 2\pi r h$
Rpta: error porcentual aproximado $e_{pA} = 0{,}25\,\%$

El área de la base es $\boxed{A_b(r)=\pi r^2}$
Rpts: error porcentual aproximado es $\boxed{e_{pA_b} = 0{,}5\,\%}$

◄

1.4.1. Problemas propuestos contextualizados

Problema 1.4.1. Un tanque cilíndrico de hierro tiene 6 pies de altura y un diámetro exterior de 2 pies; si la tapa y la parte inferior del tanque tienen 0.5 pulgadas de grosor y las paredes 0.25 pulgadas; usar diferenciales para calcular aproximadamente el peso del tanque, si el hierro pesa $450\ \frac{lb}{pie^3}$

Problema 1.4.2. Hallar aproximadamente la variación experimentada por el volumen de un cubo de arista x cuando esta se incrementa en 1%

Problema 1.4.3. Un disco metálico se dilata por acción del calor de manera que su radio aumenta desde 5 a 5.06 cm. Hallar el valor aproximado del incremento del área.

Problema 1.4.4. Una bola de hielo tiene 10 cm. dee altura, si el radio cambia de 2 a 2.06 cm. calcular el cambio aproximado correspondiente al volumen del cilindro y hallar el error porcentual de cambio en el volumen.

Problema 1.4.5. La altura de un cono recto circular es el doble del radio de la base. Al medir se encontró que la altura es de 12 pulg. Con un posible error de 0.005pul. Encontrar el error aproximado en el volumen calculado del cono.

1.5. Diferenciales de Funciones Básicas

DIFERENCIALES DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS		
FUNCIÓN	DERIVADA	DIFERENCIAL
$f(x) = \text{sen}(x)$	$f'(x) = \cos(x)$	$df(x) = (\cos(x))\,dx$
$f(x) = \cos(x)$	$f'(x) = -\text{sen}(x)$	$df(x) = (-\text{sen}(x))\,dx$
$f(x) = \tan(x)$	$f'(x) = \sec^2(x)$	$df(x) = \left(\sec^2(x)\right)dx$
$f(x) = \cot(x)$	$f'(x) = -\csc^2(x)$	$df(x) = \left(-\csc^2(x)\right)dx$
$f(x) = \sec(x)$	$f'(x) = \sec(x)\tan(x)$	$df(x) = (\sec(x)\tan(x))\,dx$
$f(x) = \csc(x)$	$f'(x) = -\csc(x)\cot(x)$	$df(x) = (-\csc(x)\cot(x))\,dx$

DIFERENCIALES DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS		
FUNCIÓN	DERIVADA	DIFERENCIAL
$f(x) = \arccos(x)$	$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$df(x) = \left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) dx$
$f(x) = \operatorname{arc\,sen}(x)$	$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$df(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) dx$
$f(x) = \arctan(x)$	$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$	$df(x) = \left(\frac{1}{1+x^2}\right) dx$
$f(x) = \operatorname{arccot}(x)$	$f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$	$df(x) = \left(-\frac{1}{1+x^2}\right) dx$
$f(x) = \operatorname{arcsec}(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$	$df(x) = \left(\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\right) dx$
$f(x) = \operatorname{arccosec}(x)$	$f'(x) = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$	$df(x) = \left(-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\right) dx$

DIFERENCIALES DE FUNCIONES TRIGONOMETRICAS HIPERBÓLICAS		
FUNCIÓN	DERIVADA	DIFERENCIAL
$f(x) = \operatorname{senh}(x)$	$f'(x) = \cosh(x)$	$df(x) = (\cosh(x))\, dx$
$f(x) = \cosh(x)$	$f'(x) = \operatorname{senh}(x)$	$df(x) = (\operatorname{senh}(x))$
$f(x) = \tanh(x)$	$f'(x) = \operatorname{sech}^2(x)$	$df(x) = \left(\operatorname{sech}^2(x)\right) dx$
$f(x) = \coth(x)$	$f'(x) = -\operatorname{cosech}^2(x)$	$df(x) = \left(-\operatorname{cosech}^2(x)\right) dx$
$f(x) = \operatorname{sech}(x)$	$f'(x) = -\operatorname{sech}(x)\tanh(x)$	$df(x) = (-\operatorname{sech}(x)\tanh(x))\, dx$
$f(x) = \operatorname{cosech}(x)$	$f'(x) = -\operatorname{cosech}(x)\coth(x)$	$df(x) = (-\operatorname{cosech}(x)\coth(x))\, dx$

Derivadas de funciones exponenciales y logarítmicas

FUNCIÓN	DERIVADA
$f(x)=\log_a(g(x))$	$f'(x)=\dfrac{g'(x)}{g(x)\ln(a)}$
$f(x)=a^{g(x)}$	$f'(x)=a^{g(x)}(\ln(a))g'(x)$
$f(x)=[g(x)]^{h(x)}$	$f'(x)=g(x)^{h(x)}\left[\dfrac{g(x)h'(x)\ln(g(x))+h(x)g'(x)}{g(x)}\right]$
$f(x)=(g(x))^n$	$f'(x)=ng(x)^{n-1}g'(x)$

Diferenciales de funciones exponenciales y logarítmicas

FUNCIÓN	DIFERENCIAL
$f(x)=\log_a(g(x))$	$df(x)=\left(\dfrac{g'(x)}{g(x)\ln(a)}\right)dx$
$f(x)=a^{g(x)}$	$df(x)=\left(a^{g(x)}(\ln(a))g'(x)\right)dx$
$f(x)=[g(x)]^{h(x)}$	$df(x)=g(x)^{h(x)}\left[\dfrac{g(x)h'(x)\ln(g(x))+h(x)g'(x)}{g(x)}\right]dx$
$f(x)=(g(x))^n$	$df(x)=\left(ng(x)^{n-1}g'(x)\right)dx$

1.6. Propiedades de diferenciales

Propiedades 1.6.1. Suponga que $f,\ g: I\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ son funciones diferenciales, y definamos $u = f(x)$, $v = g(x)$ y k constante real, entonces por definición de diferencial $du = u'dx$, $dv = v'dx$ entonces

1. La diferencial de una constante

$$\boxed{d(k) = 0}$$

2. La diferencial de un número por una función

$$\boxed{d(ku) = kdu}$$

3. La diferencial de la suma de dos funciones

$$\boxed{d(u+v) = du + dv}$$

4. La diferencial de la diferencia de dos funciones

$$\boxed{d(u-v) = du - dv}$$

5. La diferencial del producto de dos funciones

$$\boxed{d(uv) = udv + vdu}$$

6. La diferencial de la división de dos funciones

$$\boxed{d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2},\ v \neq 0}$$

7. La diferencial de la composición de dos funciones

$$\boxed{d\,(u\circ v)) = (u'\circ v)dv}$$

8. Diferencial de una potencia

$$\boxed{d(x^n) = nx^{n-1}dx}$$

Ejemplo 1.6.2. Hallar la diferencial para cada una de las funciones dadas, donde $a \in \mathbb{R}$

1. $f(x) = x\sqrt{a^2 - x^2}$
2. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{a}} - \sqrt{\dfrac{a}{x}}$

Resolución: ►

1. La función $f(x) = x\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2x^2 - x^4}$ *entonces*

$$
\begin{aligned}
df(x) &= \left(\sqrt{a^2x^2 - x^4}\right)' dx = \frac{1}{2}\left(a^2x^2 - x^4\right)^{-\frac{1}{2}}(a^2x^2 - x^4)' dx \\
&= \left(\frac{2a^2x - 4x^3}{2\sqrt{a^2x^2 - x^4}}\right) dx = \frac{\cancel{2x}(a^2 - 2x^2)}{\cancel{2x}\sqrt{a^2 - x^2}} dx \Longrightarrow \boxed{df(x) = \frac{(a^2 - 2x^2)}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx}
\end{aligned}
$$

2. Al elevar al cuadrado la función $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{a}} - \sqrt{\dfrac{a}{x}}$ *quedaría* $f^2(x) = \dfrac{x}{a} - 2 + \dfrac{a}{x}$ *y al diferenciar esta última expresión se obtiene*

$$
2f(x)df(x) = \frac{dx}{a} - \frac{a\,dx}{x^2} = \left(\frac{1}{a} - \frac{a}{x^2}\right) dx \Longrightarrow \boxed{df(x) = \frac{\left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{a}{x^2}\right)}{2\left[\sqrt{\dfrac{x}{a}} - \sqrt{\dfrac{a}{x}}\right]} dx}
$$

◄

Ejemplo 1.6.3. Sea $d\left(\dfrac{x^2 + 2}{x^2 - 2}\right) = f(x)dx$. Calcular $f(-2)$

Resolución: ►

Defino $u(x) = \dfrac{x^2 + 2}{x^2 - 2}$ *y diferenciando se logra la ecuación* $du = u'dx$*, considerando la ecuación del problema y la última construimos un sistema de ecuaciones*

$$
\left\{
\begin{aligned}
d\left(\frac{x^2 + 2}{x^2 - 2}\right) &= f(x)dx \\
du &= u'dx
\end{aligned}
\right.
\quad \text{de donde concluimos } f(x) = u'
$$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= u' = \frac{(x^2 + 2)'(x^2 - 2) - (x^2 + 2)(x^2 - 2)'}{(x^2 + 2)^2} dx \\
&= \frac{2x(x^2 - 2) - (x^2 + 2)2x}{(x^2 - 2)^2} = \frac{-8x}{(x^2 - 2)^2} dx \\
&\Longrightarrow f(-2) = \frac{16}{4} = 4 \\
&\Longrightarrow \boxed{f(-2) = 4}
\end{aligned}
$$

◄

1.6.1. Ejercicios propuestos

Ejercicio 1.6.4. Calcule la diferencial de la función f con respecto a x, para las siguientes funciones:

1. $f(x) = e^{x^2+3x+2}$
2. $f(x) = \ln(x^3 + x + 1)$
3. $f(x) = (x+7)^{\frac{5}{4}}$
4. $f(x) = 2\cos(2x)\operatorname{sen}(x)$
5. $f(x) = \ln(x^4 + x^2 + 1)$
6. $f(x) = (2x+3)^{\frac{3}{2}}$
7. $f(x) = 7x\cos(2x)$
8. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x+5}}$
9. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+2}}{x}$
10. $f(x) = (2x^2 + 3x + 4)^{\frac{3}{4}}$
11. $f(x) = \log_3(x^2 + 3x + 1)$
12. $f(x) = 5^{\frac{2x^2-1}{x+2}}$
13. $f(x) = \log_5\left(\dfrac{\operatorname{sen}(x)}{\cos^2(x)}\right)$
14. $f(x) = 34^{\tan(x)}$

Ejercicio 1.6.5. Si $f(x) = 4x^2 - 3x + 1$ encontrar $\triangle f$, df, $\triangle f - df$ para cualquier x y $\triangle x$

Ejercicio 1.6.6. Usando diferenciales calcular el valor de $f(3{,}002)$, si $f(x) = x^3 + 2x^2 - x + 1$

Ejercicio 1.6.7. Usando diferenciales calcular el valor aproximado de

(a) $\sqrt[3]{(28)^2}$ (b) $\sqrt{0{,}042}$ (c) $\sqrt[5]{31}$ (d) $\sqrt{\dfrac{4{,}02}{3{,}98}}$

Ejercicio 1.6.8.

(a) Sea $y = f\left(\dfrac{x}{x-3}\right)$ y $f'(x) = \dfrac{x^2}{x^2-1}$ hallar dy

(b) Si $f(u) = u^2 + 5u + 5$ y $g(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$, hallar $d(f \circ g)$

(c) Si $d(\sqrt[3]{|x-4| - x^2}) = g(x)dx$ hallar $g(3)$

(d) Si $d\left(\dfrac{1+\cos(2x)}{1-\cos(2x)}\right) = h(x)dx$, hallar $h\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$

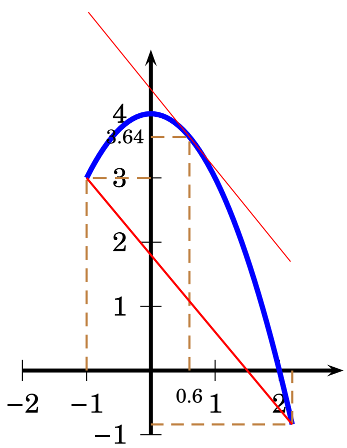
Capítulo 2

Integral Indefinida

2.1. La Antiderivada

Teorema 2.1.1. [Del valor Medio]
Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función continua en $[a,b]$ y diferenciable en $]a,b[$, entonces existe un número $c \in]a,b[$ tal que $f(b)-f(a) = f'(c)(b-a)$

Ejemplo 2.1.2.
Dada $f(x) = 4-x^2$, $[-1;2{,}2]$ encontrar c del T.V.M. e interpretar gráficamente.



$f(-1) = 3,\ f(2{,}2) = -0{,}84,\ f'(c) = -2c$

Entonces

$$\begin{aligned} -2c &= \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \\ &\Longrightarrow -2c = \frac{-0{,}84-3}{2{,}2-(-1)} = -1{,}2 \\ &\Longrightarrow \boxed{c = 0{,}6} \end{aligned}$$

Para el gráfico, la pendiente $-2c$ de la recta tangente en $(c,0)$ es la misma pendiente de la recta que une los expremos del gráfico de la función.

Teorema 2.1.3. [de la función constante]
Si $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función continua en $[a,b]$ y diferenciable en $]a,b[$, entonces existe un número $K \in \mathbb{R}$ tal que

$$\boxed{F'(x) = 0,\ x \in]a,b[\text{ si y sólo si } F(x) = K,\ x \in [a,b]}$$

Ejemplo 2.1.4.
Dado $f : [1,2] \to \mathbb{R}$, función definida por $f(x) = x^2 - x(x + \dfrac{2}{x})$, determine c del teorema

Resolución: ►
Cálculo de la derivada de $f(x)$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 2x-\left[(x)'\cdot\left(x+\frac{2}{x}\right)+x\cdot\left(x+\frac{2}{x}\right)'\right] \\
&= 2x-\left(x+\frac{2}{x}+x\left(1-\frac{2}{x^2}\right)\right) \\
&= 2x-\left(x+\frac{\cancel{2}}{\cancel{x}}+x-\frac{\cancel{2}}{\cancel{x}}\right) \\
\Longrightarrow & \boxed{f'(x)=0,\ \forall\ x\in 1,2]}
\end{aligned}$$

Por el teorema anterior existe $c\in\mathbb{R}$ tal que $f(x)=c,\ \forall\ x\in[1,2]$, podemos elegir cualquier $x\in[1,2]$ para calcular c, por ejemplo $x=1$, entonces $f(1)=c=1-1(1+2)=-2\Longrightarrow c=-2$ luego $f(x)=-2$ ◄

Definición 2.1.1.

1. Una función $F:I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ se llama ***antiderivada o primitiva*** de otra función $f:I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ que es continua si cumple

$$\boxed{F'(x)=f(x).}$$

2. Si $F(x)$ es la antiderivada de $f(x)$ en I, se define ***antiderivada general*** de $f(x)$ por

$$\boxed{G(x)=F(x)+C.}$$

Teorema 2.1.5.
Sean $F,\ G:[a,b]\to\mathbb{R}$ funciones continuas en $[a,b]$ y diferenciables en $]a,b[$, si $G'(x)=F'(x),\ \forall\ x\in[a,b]$ entonces existe $C\in\mathbb{R}$ tal que

$$\boxed{G(x)=F(x)+C,\ \forall\ x\in[a,b]}$$

Ejemplo 2.1.6.
Sin utilizar cálculo de derivadas prueba que las funciones $F(x)=\dfrac{1}{1+x^4}$ y $G(x)=\dfrac{-x^4}{1+x^4}$ son dos primitivas (antiderivadas) de una misma función.

Resolución: ►

Suponga que

- $F(x)$ *es primitiva de* $f(x)$, $F'(x) = f(x)$
- $G(x)$ *es primitiva de* $g(x)$, $G'(x) = g(x)$

Si fueran las mismas primitivas, se tendría $G'(x) = F'(x)$ *y por el teorema anterior se concluye que* $G(x) = F(x) + C \Longrightarrow G(x) - F(x) = C$ *es decir la diferencia de ambas primitivas debe ser una constante.*

En efecto

$$\begin{aligned} G(x) - F(x) &= \frac{-x^4}{1+x^4} - \frac{1}{1+x^4} = \frac{-x^4-1}{1+x^4} = -1 \\ &\Longrightarrow \boxed{G(x) - F(x) = -1} \end{aligned}$$

◄

Ejemplo 2.1.7.
Sean f y g dos funciones continuas y derivables que se diferencian en una constante. ¿Podemos asegurar que f y g tienen una misma primitiva?

Resolución: ►

La respuesta es negativa.

En efecto

Suponga $f(x) = 5x + 2$ *y* $g(x) = 5x + 3$ *continuas y derivables y se diferencian en la unidad, sin embargo sus primitivas son*

$F(x) = \dfrac{5x^2}{2} + 2x + C_1$ *y* $G(x) = \dfrac{5x^2}{2} + 3x + C_2$ *respectivamente, las cuales son distintas para cualesquiera valor de* C_1 *y* C_2

◄

Ejemplo 2.1.8.
Encuentra la función $f(x)$ cuya primitiva es $F(x) = \operatorname{sen}^4\left(\ln(x^4+4)\right) + C$

Resolución: ►

$$\begin{aligned} f(x) = \left[\operatorname{sen}^4\left(\ln(x^4+4)\right) + C\right]' &= 4\operatorname{sen}^3\left(\ln(x^4+4)\right) \cdot \cos\left(\ln(x^4+4)\right) \cdot \frac{1}{x^4+4} \cdot (x^4+4)' \\ &= 4\operatorname{sen}^3\left(\ln(x^4+4)\right) \cos\left(\ln(x^4+4)\right) \cdot \frac{4x^3}{x^4+4} \\ &\Longrightarrow \boxed{f(x) = \frac{16x^3 \operatorname{sen}^3\left(\ln(x^4+4)\right) \cdot \cos\left(\ln(x^4+4)\right)}{x^4+4}} \end{aligned}$$

◄

Ejemplo 2.1.9.
Sea $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función tal que $G'(x) = 3x^2,\ \forall\ x \in \mathbb{R}$. Hallar $G(x)$ si $G(1) = 6$

Resolución: ►
La antiderivada general de $3x^2$ *es* $G(x) = x^3 + C$*. Además* $G(1) = 6 = 1^3 + C \Longrightarrow C = 5$*. Así* $G(x) = x^3 + 5$ ◄

Observación 2.1.10.

1. Del ejemplo anterior una antiderivada de $f(x) = 3x^2$ es $F(x) = x^3$, por la misma razón $F(x) = x^3 + 4$ es también una antiderivada de $f(x)$.
2. Más generalmente $F(x) = x^3 + C$ con C constante es una antiderivada de $f(x) = 3x^2$.
3. $F(x) = x^3 + C$ constituye una **familia de curvas** que satisface la condición $F'(x) = 3x^2$.
4. El valor de la constante C depende de una condición inicial $(x_0, y_0) = (x_0, F(x_0))$.

2.2. La Integral Indefinida

Definición 2.2.1.

1. Si $G : I \to \mathbb{R}$ es la antiderivada general de $f(x)$ la expresión

$$\boxed{G(x) = \int f(x)dx = \int F'(x)dx = F(x) + C}$$

se llama ***integral indefinida*** de $f(x)$ y se cumple

$$\boxed{\frac{d}{dx}(G(x)) = \frac{d}{dx}\left(\int f(x)dx\right) = \frac{d}{dx}(F(x) + C) = f(x)}$$

2. Sea $\displaystyle\int f(x)dx$, a $f(x)$ se llama ***función integrando*** y a x se llama ***variable de integración***.
3. Sabemos que $dF(x) = F'(x)dx$ entonces

$$\boxed{\int f(x)dx = \int F'(x)dx = \int dF(x) = F(x) + C}$$

Observación 2.2.1.

1. Si $y = F(x)$ es una antiderivada de f, entonces decimos que $F(x)$ **es una solución de la ecuación** $\dfrac{dy}{dx} = f(x)$, que se escribe en notación diferencial como $dy = f(x)dx$.
2. El proceso de encontrar todas las soluciones de esta ecuación se llama integración y se denota por el símbolo $\int$.
3. La solución general de la ecuación $dy = f(x)dx$ se escribe

$$\boxed{y = \int f(x)dx + C,}$$

donde x es la **variable de integración**, $f(x)$ **integrando** y C **constante de integración.**

4. El símbolo $\int f(x)dx$ se llama **antiderivada general de** f respecto de x.
5. La diferencial dx sirve para identificar a x como variable de integración.
6. La notación

$$\boxed{\int f(x)dx = F(x) + C,}$$

donde C es una constante arbitraria, significa que F es una **primitiva** de f. $F'(x) = f(x)$, para todo x en el dominio de f.

Propiedades 2.2.2.
Sean $f,\ g:\ I \to \mathbb{R}$ funciones integrables, y $c \in \mathbb{R}$ entonces

1. $cf(x)$ es integrable y se cumple

$$\boxed{\int cf(x)dx = c\int f(x)dx, \quad c \in \mathbb{R}}$$

2. $f(x) + g(x)$ es integrable y se cumple

$$\boxed{\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.}$$

3. $f(x) - g(x)$ es integrable y se cumple

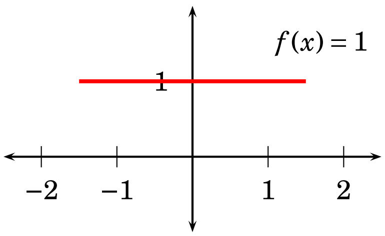
$$\boxed{\int [f(x) - g(x)]dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx.}$$

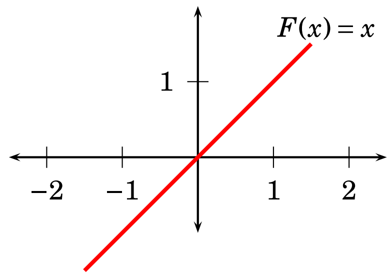
Ejemplo 2.2.3.
Calcule una antiderivada y su gráfica, para $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ función, definida por

1. $f(x)=1$ 2. $f(x)=x$ 3. $f(x)=x^2$ 4. $f(x)=x^3$ 5. $f(x)=x^4$

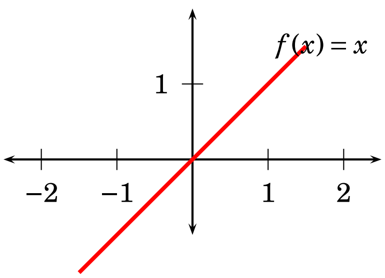
Resolución: ►

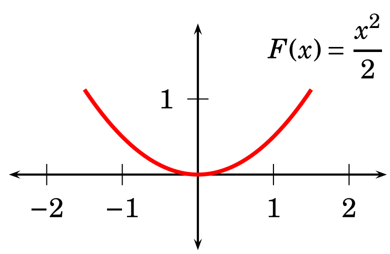
1. *Una antiderivada de $f(x)=1$ es $F(x)=x$ cuya grafica de f y F son*



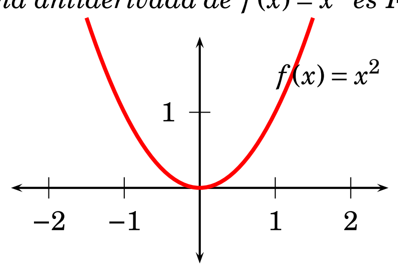


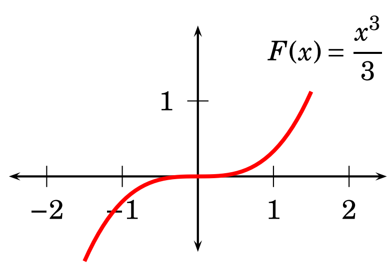
2. *Una antiderivada de $f(x)=x$ es $F(x)=\dfrac{x^2}{2}$*



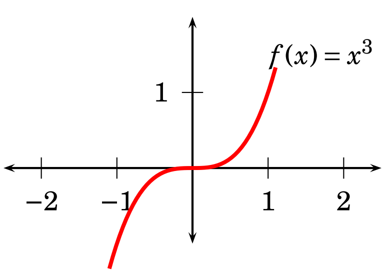


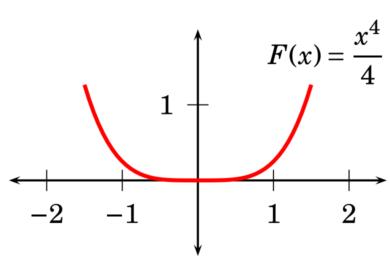
3. *Una antiderivada de $f(x)=x^2$ es $F(x)=\dfrac{x^3}{3}$*





4. *Una antiderivada de $f(x)=x^3$ es $F(x)=\dfrac{x^4}{4}$*

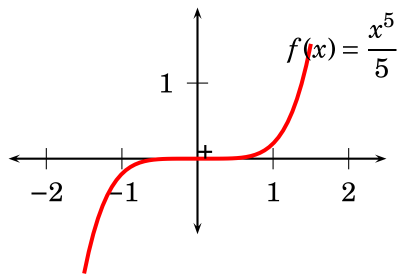


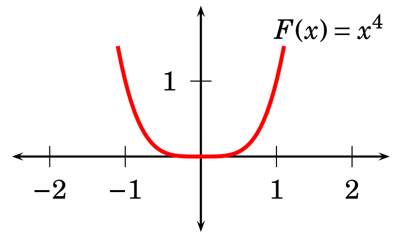


◄

Resolución: ►

5.- Una antiderivada de $f(x) = x^4$ *es* $F(x) = \dfrac{x^5}{5}$





◄

Observación 2.2.4.

1. La expresión $\displaystyle\int F'(x)dx = F(x) + C$, muestra la naturaleza inversa de la integración y la derivación.
2. Además, si $\displaystyle\int f(x)dx = F(x) + C$, entonces

$$\boxed{\frac{d\left[\displaystyle\int f(x)dx\right]}{dx} = \frac{d}{dx}[F(x)+C] = F'(x) = f(x).}$$

Estas características nos permiten obtener fórmulas de integración a partir de las fórmulas de derivación, como se establece en los resultados siguientes:

2.3. Integrales de funciones Básicas

1. $$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$$

2. $$\int \frac{du}{u} + C = \ln|u| + C$$

3. $$\int e^u du = e^u + C$$

4. $$\int \operatorname{sen}(u)du = -\cos(u) + C$$

5. $$\int \cos(u)du = \operatorname{sen}(u) + C$$

6. $$\int \operatorname{tg}(u)du = \ln|\sec(u)| + C$$

7. $$\int \operatorname{cotg}(u)du = \ln|\operatorname{sen}(u)| + C$$

8. $$\int \sec(u)du = \ln|\sec(u) + \operatorname{tg}(u)| + C$$

9. $$\int \operatorname{cosec}(u)du = -\ln|\operatorname{cosec}(u) + \operatorname{cotg}(u)| + C$$

10. $$\int \sec^2(u)du = \operatorname{tg}(u) + C$$

11. $$\int \operatorname{cosec}^2(u)du = -\operatorname{cotg}(u) + C$$

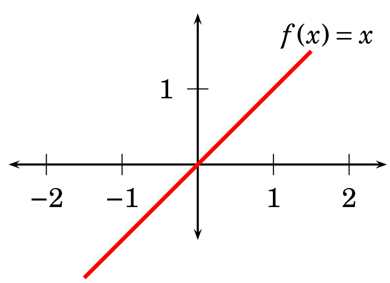
12. $$\int \sec(u)\operatorname{tg}(u)du = \sec(u) + C$$

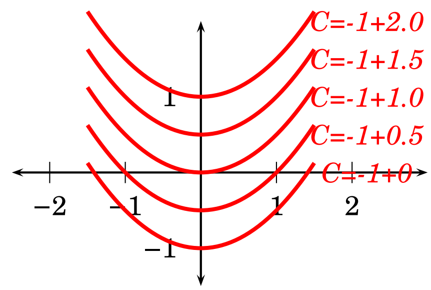
Ejemplo 2.3.1.
Calcule la antiderivada general de

(a) $f(x) = x,\ x \in \mathbb{R}$ (b) $f(x) = \cos(x),\ x \in \mathbb{R}$

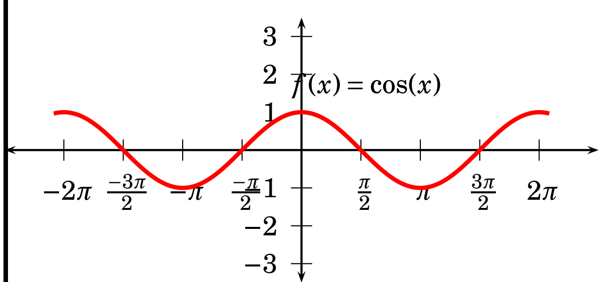
Resolución: ►

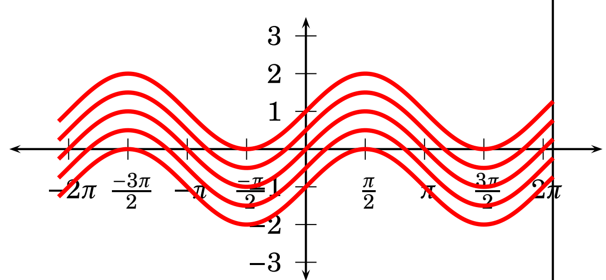
(a) *La antiderivada general de* $f(x) = x$ *es* $G(x) = F(x) + C = \dfrac{x^2}{2} + C,\ C \in \mathbb{R}$ *cuya grafica de* f *y* G *son*





(b) *La antiderivada general de* $f(x) = \cos(x)$ *es* $G(x) = F(x) + C = \operatorname{sen}(x) + C,\ C \in \mathbb{R}$ *cuya grafica de* f *y* G *son*





◄

Ejemplo 2.3.2.
Calcule las integrales siguientes

(a) $\displaystyle\int \left[\frac{5x^3 + x}{x} - \frac{1}{x}\right] dx$ (b) $\displaystyle\int \frac{4x^3 - 5x^2 + 7}{\sqrt{x^3}} dx$

Resolución: ►

(a)

$$\int\left[\frac{5x^3+x}{x}-\frac{1}{x}\right]dx = \int(5x^2+1-\frac{1}{x})dx=\int(5x^2+1)dx-\int\frac{1}{x}dx$$

$$\Longrightarrow \boxed{\int\left[\frac{5x^3+x}{x}-\frac{1}{x}\right]dx=\frac{5x^3}{3}+x-\ln|x|+C}$$

(b)

$$\begin{aligned}\int\frac{4x^3-5x^2+7}{\sqrt{x^3}}dx &= \int\left(4x^3-5x^2+7\right)x^{-\frac{3}{2}}dx=\int\left(4x^{3-\frac{3}{2}}-5x^{2-\frac{3}{2}}+7x^{\frac{-3}{2}}\right)dx\\ &= \int 4x^{\frac{3}{2}}dx-\int 5x^{\frac{1}{2}}dx+\int 7x^{-\frac{3}{2}}dx=4\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}-\frac{5x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+\frac{7x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}+C\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\int\frac{4x^3-5x^2+7}{\sqrt{x^3}}dx=\frac{8}{5}x^{\frac{5}{2}}-\frac{10}{3}x^{\frac{3}{2}}-14x^{-\frac{1}{2}}+C}$$

◄

2.4. Identidades Trigonométricas

Identidades de funciones trigonométricas hiperbólicas	
$\operatorname{senh}(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$	$\cosh(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$
$\cosh^2(x)-\operatorname{senh}^2(x)=1$	$\operatorname{sech}^2(x)=1-\tanh^2(x)$
$\operatorname{senh}(x+y)=\operatorname{senh}(x)\cosh(y)+\cosh(x)\operatorname{senh}(y)$	$\cosh(x+y)=\cosh(x)\cosh(y)+\operatorname{senh}(x)\operatorname{senh}(y)$
$\operatorname{senh}(2x)=2\operatorname{senh}(x)\cosh(x)$	$\cosh(2x)=\cosh^2(x)+\operatorname{senh}^2(x)$
$\cosh(2x)=1+2\operatorname{senh}^2(x)$	$\cosh(2x)=2\cosh^2(x)-1$
$\operatorname{cosech}^2(x)=\coth^2(x)-1$	

Identidades de funciones trigonométricas

$\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$	$1 + \cot^2(x) = \csc^2(x)$
$1 + \tan^2(x) = \sec^2(x)$	$\tan(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}$
$\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen}(x)\cos(y) + \operatorname{sen}(y)\cos(x)$	$\operatorname{sen}(x-y) = \operatorname{sen}(x)\cos(y) - \operatorname{sen}(y)\cos(x)$
$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y)$	$\cos(x-y) = \cos(x)\cos(y) + \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y)$
$\tan(x+y) = \dfrac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}$	$\tan(x-y) = \dfrac{\tan(x)-\tan(y)}{1+\tan(x)\tan(y)}$
$\cos^2(x) = \dfrac{\cos(2x)+1}{2}$	$\operatorname{sen}^2(x) = \dfrac{1-\cos(2x)}{2}$
$\operatorname{sen}(2x) = 2\operatorname{sen}(x)\cos(x)$	$\cos(2x) = \cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x)$
$\tan(2x) = \dfrac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)}$	$\sec(2x) = \dfrac{1+\tan^2(x)}{1-\tan^2(x)}$
$\operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos(x)}{2}}$	$\cos\left(\dfrac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos(x)}{2}}$
$\tan\left(\dfrac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)}}$	$\cot\left(\dfrac{x}{2}\right) = \operatorname{cosec}(x) + \cot(x)$
$\cos(x) - \cos(y) = -2\operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right)$	$\cos(x) + \cos(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$
$\operatorname{sen}(x) + \operatorname{sen}(y) = 2\operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$	$\operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right)$
$\operatorname{sen}(x+y) + \operatorname{sen}(x-y) = 2\operatorname{sen}(x)\cos(y)$	$\cos(x+y) + \cos(x-y) = 2\cos(x)\cos(y)$
$\cos(x-y) - \cos(x+y) = 2\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y)$	$\tan(3x) = \dfrac{3\tan(x) - \tan^3(x)}{1-3\tan^2(x)}$
$\operatorname{sen}(3x) = 3\operatorname{sen}(x) - 4\operatorname{sen}^3(x)$	$\cos(3x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x)$

2.5. Métodos de Integración

Las fórmulas de las integrales básicas anteriores son de frecuente uso y su utilidad se evidencia con el apoyo de técnicas de integración, que se desarrollan a partir de dos métodos:

1. Método de integración cambio de variable o por sustitución.
2. Método de integración por partes.

2.5.1. Método Cambio de variable

Sean F, $f: I \to \mathbb{R}$ funciones y F una antiderivada de f es decir $F'(x) = f(x)$ y g una función derivable tal que $F \circ g$ esté definida.
Usando la regla de la cadena a $F \circ g$ se tiene

$$\boxed{F(g(x))' = F'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)}$$

Luego $F(g(x))$ es una antiderivada de $f(g(x)) \cdot g'(x)$ entonces se logra el resultado siguiente

Teorema 2.5.1.
Sean f y g funciones tales que $y = f(g(x))$ es derivable. Si F es una **Primitiva** de f entonces

$$\boxed{\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = F(g(x)) + C} \tag{2.1}$$

de manera que si $u = g(x)$ entonces $du = g'(x)dx$, así la expresión (2.1) quedaría

$$\boxed{\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int f(u) du = F(u) + C}$$

a esta expresión se llama ***método de cambio de variable*** con $u = g(x)$ y $du = g'(x)dx$

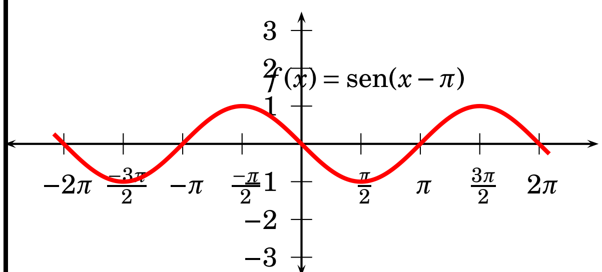
Ejemplo 2.5.2.
Calcule las integrales siguientes

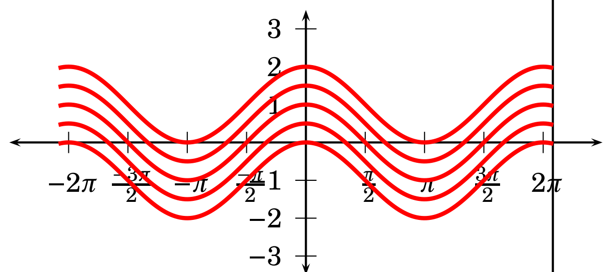
1. $\displaystyle\int \operatorname{sen}(x - \pi) dx$
2. $\displaystyle\int \frac{1}{x-3} dx$
3. $\displaystyle\int \cos(x + \frac{\pi}{2}) dx$
4. $\displaystyle\int 2 \operatorname{sen}(x) \cos(x) dx$

Resolución: ►

1. *Haciendo* $u = x - \pi \Longrightarrow du = dx$, *entonces*

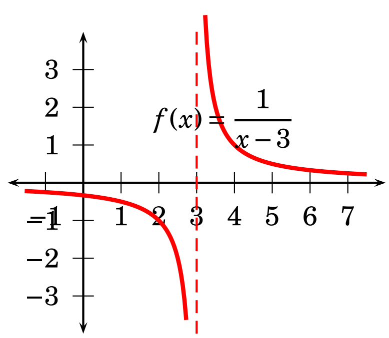
$$\int \operatorname{sen}(x-\pi)dx = \int \operatorname{sen}(u)du = -\cos(u) + C$$
$$\Longrightarrow \boxed{\int \operatorname{sen}(x-\pi)dx = -\cos(x-\pi) + C}$$

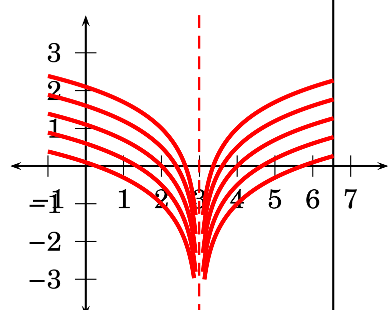




2. *Haciendo* $u = x - 3 \Longrightarrow du = dx$ *entonces*

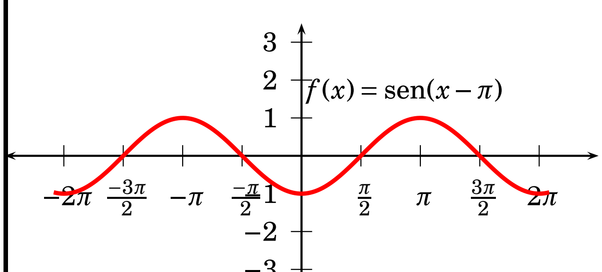
$$\int \frac{1}{x-3}dx = \int \frac{1}{u}du = \ln|u| + C$$
$$\Longrightarrow \boxed{\int \frac{1}{x-3}dx = \ln|x-3| + C}$$

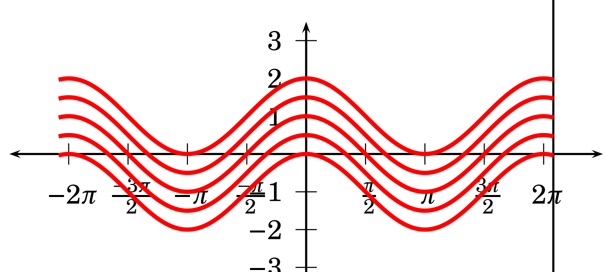




3. *Haciendo* $u = x + \dfrac{\pi}{2} \Longrightarrow du = dx$ *entonces*

$$\int \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)dx = \int \operatorname{sen}(u)du = \operatorname{sen}(u) + C$$
$$\Longrightarrow \boxed{\int \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)dx = \operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{2}\right) + C}$$

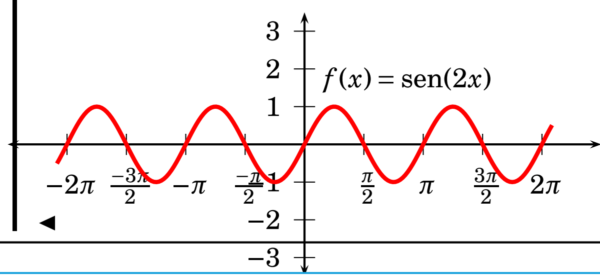


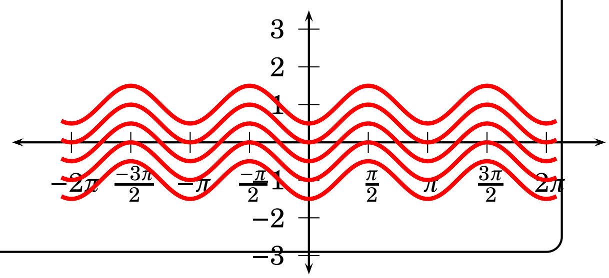


◄

Resolución: ►

(4.) $\displaystyle\int 2\,\mathrm{sen}(x)\cos(x)dx = \int \mathrm{sen}(2x)dx = -\frac{\cos(2x)}{2} + C$





◄

Ejemplo 2.5.3.
Calcule las integrales siguientes

(a) $\displaystyle\int \frac{4x+6}{(x^2+3x+7)}dx$ (b) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x}dx$ (c) $\displaystyle\int \frac{x}{x+1}dx$ (d) $\displaystyle\int x^2 e^{x^3} dx$

Resolución: ►

(a) *Haciendo el cambio* $u = x^2 + 3x + 7$*, se generan las ecuaciones*

$$\begin{aligned} u &= x^2 + 3x + 7 \\ du &= (2x+3)dx \end{aligned}$$

Luego reemplazamos estas ecuaciones en la integral

$$\begin{aligned} \int \frac{4x+6}{(x^2+3x+7)}dx &= 2\int \frac{2x+3}{(x^2+3x+7)}dx = 2\int \frac{du}{u} \\ &= 2\ln|u| + C = 2\ln(x^2+3x+7) + C \\ &\Longrightarrow \boxed{\int \frac{4x+6}{(x^2+3x+7)}dx = 2\ln|(x^2+3x+7)| + C} \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \int \frac{x+1}{x}dx &= \int \frac{x}{x}dx + \int \frac{dx}{x} \\ &\Longrightarrow \boxed{\int \frac{x+1}{x}dx = x + \ln|x| + C} \end{aligned}$$

(c) *Haciendo el cambio* $u = x + 1$ *generamos las ecuaciones*

$$\begin{aligned} u &= x + 1 \\ x &= u - 1 \\ du &= dx \end{aligned}$$

Luego reemplazamos estas ecuaciones en la integral

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{x+1}dx &= \int \frac{u-1}{u}du = u - \ln|u| + C \\ &\Longrightarrow \boxed{\int \frac{x}{x+1}dx = x + 1 - \ln|x+1| + C} \end{aligned}$$

(d) *Haciendo el cambio* $u = x^3$ *se obtiene las ecuaciones*

$$\begin{aligned} u &= x^3 \\ du &= 3x^2dx \\ x^2dx &= \frac{du}{3} \end{aligned}$$

Luego reemplazamos la primera y tercera ecuación en la integral

$$\begin{aligned} \int x^2e^{x^3}dx &= \frac{1}{3}\int e^u du = \frac{1}{3}e^u + C \\ &\Longrightarrow \boxed{\int x^2e^{x^3}dx = \frac{1}{3}e^{x^3} + C} \end{aligned}$$

◄

2.5.2. Integración por Partes

Teorema 2.5.4.
Sean $u(x)$ y $v(x)$ funciones diferenciables, entonces al diferencial producto está dado por $d(uv) = udv + vdu$ de donde

$$\boxed{udv = d(uv) - vdu}$$

Como u y v son continuas integramos

$$\boxed{\int udv = uv - \int vdu}$$

se conoce con el nombre ***de integración por partes***.

Observación 2.5.5.

1. Dependiendo de la elección de u y dv, $\int vdu$ debe resultar más simple de resolver que la original.
2. La elección de dv debe asegurar la obtención de v de manera más sencilla que la integral original.
3. La elección de u, sujeta a las consideraciones anteriores, no deja otra opción que escribir como dv al factor restante.

Ejemplo 2.5.6.
Resolver las integrales siguientes

(a) $\displaystyle\int xe^x dx.$ (b) $\displaystyle\int \ln x dx$ (c) $\displaystyle\int x \ln x dx$

Resolución: ►

(a) Utilizaremos integración por partes

$$\int xe^x dx = \int x \cdot e^x dx = \int u \cdot dv = uv - \int vdu \tag{2.2}$$

Donde

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u & = & x \\ dv & = & e^x dx \end{array} \right\} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} du & = & dx \\ v & = & \displaystyle\int e^x dx = e^x \end{array} \right\} \tag{2.3}$$

Reemplazando (2.3) en (2.2) obtenemos

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int xe^x dx & = & xe^x - \displaystyle\int e^x dx \\ & \Longrightarrow & \boxed{\displaystyle\int xe^x dx = xe^x - e^x + C} \end{array}$$

◄

Resolución: ►

(b) Utilizaremos integración por partes

$$\int \ln(x)dx = \int \ln(x) \cdot dx = \int u \cdot dv = uv - \int v du \tag{2.4}$$

Donde

$$\left\{ \begin{array}{lcl} u & = & \ln(x) \\ dv & = & dx \end{array} \right\} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} du & = & \dfrac{dx}{x} \\ v & = & \displaystyle\int dx = x \end{array} \right\} \tag{2.5}$$

Reemplazando (2.5) en (2.4) obtenemos

$$\begin{aligned} \int \ln(x)dx &= x\ln(x) - \int \frac{xdx}{x} \\ &\Longrightarrow \boxed{\int \ln(x)dx = x\ln|x| - x + C} \end{aligned}$$

(c) Utilizamos integración por partes:

$$\int x\ln(x)dx = \int \ln(x) \cdot xdx = \int u \cdot dv = uv - \int v du \tag{2.6}$$

Donde

$$\left\{ \begin{array}{lcl} u & = & \ln(x) \\ dv & = & xdx \end{array} \right\} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} du & = & \dfrac{1}{x}dx \\ v & = & \displaystyle\int xdx = \frac{x^2}{2} \end{array} \right\} \tag{2.7}$$

Reemplazando (2.7) en (2.6) obtenemos

$$\begin{aligned} \int x\ln(x)dx &= \frac{x^2}{2}\ln(x) - \int \frac{x}{2}dx \\ &= \boxed{\frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{x^2}{4} + C} \end{aligned}$$

◄

Ejemplo 2.5.7.
Resolver las integrales

(a) $\int x\cos(x)dx$ (b) $\int e^x \operatorname{sen}(x)dx.$ (c) $\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}$

Resolución: ►

(a) Utilizando integración por partes

$$\int x\cos(x)dx = \int x \cdot \cos(x)dx = \int u \cdot dv = uv - \int v du \tag{2.8}$$

Donde

$$\left\{\begin{array}{ccc} u & = & x \\ dv & = & \cos(x)dx \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} du & = & dx \\ v & = & \displaystyle\int \cos(x)dx = \operatorname{sen}(x) \end{array}\right\} \tag{2.9}$$

Reemplazando (2.9) en (2.8) obtenemos

$$\begin{aligned} \int x\cos(x)dx &= x\operatorname{sen}(x) - \int \operatorname{sen}(x)dx + C \\ &\Longrightarrow \boxed{\int x\cos(x)dx = x\operatorname{sen}(x) + cos(x) + C} \end{aligned}$$

◄

Resolución: ►

(b) Utilizando integración por partes

$$\int e^x \operatorname{sen}(x)dx = \int e^x \cdot \operatorname{sen}(x)dx = \int u \cdot dv = uv - \int v du \tag{2.10}$$

Donde

$$\left\{ \begin{array}{ccc} u & = & e^x \\ dv & = & \operatorname{sen}(x)dx \end{array} \right\} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} du & = & e^x dx \\ v & = & \int \operatorname{sen}(x)dx = -\cos(x) \end{array} \right\} \tag{2.11}$$

Reemplazando (2.11) en (2.10) obtenemos

$$\int e^x \operatorname{sen}(x)dx = -e^x\cos(x) + \underbrace{\int e^x \cos(x)dx}_{I} \tag{2.12}$$

Cálculo de I

$$I = \int e^x \cos(x)dx = \int e^x \cdot \cos(x)dx = \int u \cdot dv = uv - \int v du \tag{2.13}$$

Donde

$$\left\{ \begin{array}{ccc} u & = & e^x \\ dv & = & \cos(x)dx \end{array} \right\} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} du & = & e^x dx \\ v & = & \int \cos(x)dx = \operatorname{sen}(x) \end{array} \right\} \tag{2.14}$$

Reemplazando (2.14) en (2.13) obtenemos

$$\int e^x \cos(x)dx = -e^x \operatorname{sen}(x) - \int e^x \operatorname{sen}(x)dx \tag{2.15}$$

reemplazando (2.15) en (2.12) obtenemos

$$\begin{aligned} \int e^x \operatorname{sen}(x)dx &= -e^x\cos(x) - e^x\operatorname{sen}(x) - \int e^x \operatorname{sen}(x) + C \\ \Longrightarrow \int e^x \operatorname{sen}(x)dx + \int e^x \operatorname{sen}(x) &= -e^x[\cos(x) + \operatorname{sen}(x)] + C \\ &\Longrightarrow \boxed{\int e^x \operatorname{sen}(x)dx = \frac{-e^x}{2}[\cos(x) + \operatorname{sen}(x)] + C} \end{aligned}$$

◄

Resolución: ►

(c) *Utilizando integración por partes*

$$\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}dx = \int x \cdot \frac{x}{(1+x^2)^2}dx = \int u \cdot dv = uv - \int v du \tag{2.16}$$

Donde

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u & = & x \\ dv & = & \dfrac{x}{(1+x^2)^2}dx \end{array} \right\} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} du & = & dx \\ v & = & \underbrace{\int \dfrac{x}{(1+x^2)^2}dx}_{I} \end{array} \right\} \tag{2.17}$$

Cálculo de $I = \int \frac{x}{(1+x^2)^2}dx$
Haciendo el cambio $u = 1+x^2$ *genera las ecuaciones*

$$\begin{array}{rcl} u & = & 1+x^2 \\ du & = & 2xdx \\ xdx & = & \dfrac{du}{2} \end{array}$$

Luego reemplazamos la primera y tercera ecuación en la integral

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int \frac{x}{(1+x^2)^2}dx & = & \displaystyle\int \frac{du}{2u^2} = \frac{1}{2}\int u^{-2}du = -\frac{1}{2}u^{-1} \\ & \Longrightarrow & \boxed{\displaystyle\int \frac{x}{(1+x^2)^2}dx = -\frac{1}{2(1+x^2)}} \end{array}$$

Luego reemplazando en (2.17) obtenemos

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u & = & x \\ dv & = & \dfrac{x}{(1+x^2)^2}dx \end{array} \right\} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} du & = & dx \\ v & = & \displaystyle\int \frac{x}{(1+x^2)^2}dx = -\frac{1}{2(1+x^2)} \end{array} \right\} \tag{2.18}$$

Reemplazamos (2.18) en (2.16) tenemos

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int \frac{x^2dx}{(1+x^2)^2}dx & = & \displaystyle -\frac{x}{2(1+x^2)} + \int \frac{dx}{2(1+x^2)} + C \\ & \Longrightarrow & \boxed{\displaystyle\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2} = -\frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}arctan(x) + C} \end{array}$$

◄

2.5.3. Funciones trigonométricas

Propiedades 2.5.8. Estudiaremos integrales que tienen la siguiente forma, $n,\ m \in \mathbb{R}$:

1. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^n(x)dx$
2. $\displaystyle\int \cos^n(x)dx$
3. $\displaystyle\int \tan^n(x)dx$
4. $\displaystyle\int \cot^n(x)dx$
5. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^m(x)\cos^n(x)dx$
6. $\displaystyle\int \tan^m(x)\sec^n(x)dx$
7. $\displaystyle\int \cot^m(x)\operatorname{cosec}^n(x)dx$

Integral de la forma $\boxed{\displaystyle\int \operatorname{sen}^n(x)dx}$

Si n **es par** se usa $\operatorname{sen}^2(x) = \dfrac{1-\cos(2x)}{2}$ o $\cos^2(x) = \dfrac{1+\cos(2x)}{2}$ o ambos.

Si n **es impar** se usa $\operatorname{sen}^n(x) = \operatorname{sen}^{n-1}(x)\operatorname{sen}(x)$ y luego la identidad $\operatorname{sen}^2(x)+\cos^2(x) = 1$

Ejemplo 2.5.9.
Calcule

(a) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^4(3x)dx$ (b) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^5(x)dx$

Resolución: ►

(a)

$$
\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^4(3x)dx &= \int [\operatorname{sen}^2(x)]^2 dx = \int \left(\frac{1-\cos(2x)}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int [1-2\cos(2x)+\cos^2(2x)]dx \\
&= \frac{1}{4}\int \left[1-2\cos(2x)+\frac{1+\cos(4x)}{2}\right]dx = \frac{1}{4}\int \left(\frac{3}{2}-2\cos(2x)+\frac{\cos(4x)}{2}\right)dx \\
&= \frac{3x}{8} - \cancel{2}\frac{\operatorname{sen}(2x)}{\cancel{2}\cdot 4} + \frac{\operatorname{sen}(4x)}{4\cdot 2\cdot 4} \\
&= \boxed{\frac{3x}{8} - \frac{\operatorname{sen}(2x)}{4} + \frac{\operatorname{sen}(4x)}{32}}
\end{aligned}
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^5(x)dx &= \int \operatorname{sen}^4(x)\operatorname{sen}(x)dx = \int (\operatorname{sen}^2(x))^2\operatorname{sen}(x)dx \\
&= \int \left(\frac{1-\cos(2x)}{2}\right)^2 \operatorname{sen}(x)dx = \frac{1}{4}\int (1-2\cos(2x)+\cos^2(2x))\operatorname{sen}(x)dx \\
&= \frac{1}{4}\int \left(1-2\cos(2x)+\left(\frac{1+\cos(4x)}{2}\right)\right)\operatorname{sen}(x)dx \\
&= \frac{1}{4}\left(\int \frac{3\operatorname{sen}(x)}{2} - 2\cos(2x)\operatorname{sen}(x) + \frac{\cos(4x)\operatorname{sen}(x)}{2}\right)dx \\
&= \frac{1}{4}\int \left(\frac{3\operatorname{sen}(x)}{2} - (\operatorname{sen}(2x+x)+\operatorname{sen}(2x-x)) + \left(\frac{\operatorname{sen}(4x+x)+\operatorname{sen}(4x-x)}{4}\right)\right)dx \\
&= \frac{1}{4}\int \left(\frac{5\operatorname{sen}(x)}{2} - \operatorname{sen}(3x) + \frac{\operatorname{sen}(5x)}{4} + \frac{\operatorname{sen}(3x)}{4}\right)dx \\
&= \boxed{-\frac{5\cos(x)}{8} + \frac{3\cos(3x)}{12} - \frac{\cos(5x)}{80} + C}
\end{aligned}
$$

◄

Integral de la forma $\int \cos^n(x)dx$

Si n **es par** se usa $\operatorname{sen}^2(x) = \dfrac{1-\cos(2x)}{2}$ o $\cos^2(x) = \dfrac{1+\cos(2x)}{2}$ o ambos

Si n **es impar** se usa $\cos^n(x) = \cos^{n-1}(x)\operatorname{sen}(x)$ y luego la identidad $\operatorname{sen}^2(x)+\cos^2(x) = 1$

Ejemplo 2.5.10.
Calcule

(a) $\int \cos^4(2x)dx$ (b) $\int \cos^5(3x)dx$

Resolución: ►

(a)

$$\begin{aligned}
\int \cos^4(2x)dx &= \int \left(\frac{1+\cos(4x)}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int (1+2\cos(4x)+\cos^2(4x))dx \\
&= \frac{1}{4}\int \left(1+2\cos(4x)+\frac{1+\cos(8x)}{2}\right)dx = \frac{1}{4}\int \left(\frac{3}{2}+2\cos(4x)+\frac{\cos(8x)}{2}\right)dx \\
&= \boxed{\frac{1}{4}\left(\frac{3x}{2}+\frac{\text{sen}(4x)}{2}+\frac{\text{sen}(8x)}{16}\right)+C}
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\int \cos^5(3x)dx &= \int \cos^4(3x)\cos(3x)dx = \int (1-\text{sen}^2(3x))^2\cos(3x)dx \\
&= \int (1-2\,\text{sen}^2(3x)+\text{sen}^4(3x))\cos(3x)dx \\
&= \int \left(\cos(3x)-\text{sen}^2(3x)\cos(3x)+\text{sen}^4(3x)\cos(3x)\right)dx \\
&= \int \cos(3x)dx - \int \underbrace{\text{sen}^2(3x)\cos(3x)dx}_{u=\text{sen}(3x),\ du=3\cos(3x)dx} + \int \underbrace{\text{sen}^4(3x)\cos(3x)dx}_{u=\text{sen}(3x),\ du=3\cos(3x)dx} \\
&= \boxed{\frac{\text{sen}(3x)}{3}-\frac{2\,\text{sen}^3(3x)}{9}+\frac{\text{sen}^5(3x)}{15}+C}
\end{aligned}$$

◄

Integral de la forma $\int \tan^n(x)dx$

Si n es par se usa $1+\tan^2(x)=\sec^2(x)$ y $\tan^n(x)=\tan^{n-2}(x)\tan^2(x)$

Si n es impar se usa $1+\tan^2(x)=\sec^2(x)$ y $\tan^n(x)=\tan^{n-1}(x)\tan(x)=(\tan^2(x))^{\frac{n-1}{2}}\tan(x)$

Ejemplo 2.5.11.
Calcule

(a) $\int \tan^3(5x)dx$ (b) $\int \tan^6(5x)dx$

Resolución: ►

(a)

$$\begin{aligned}
\int \tan^3(5x)dx &= \int \tan^2(5x)\tan(5x)dx = \int (sec^2(5x)-1)\tan(5x)dx \\
&= \int \underbrace{sec^2(5x)\tan(5x)dx}_{u=\tan(5x),\ du=5sec^2(5x)dx} - \int \tan(5x)dx \\
&= \boxed{\frac{\tan^2(5x)}{10} - \frac{\ln|sec(5x)|}{5} + C}
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\int \tan^6(5x)dx &= \int \tan^4(5x)\tan^2(5x)dx = \int \tan^4(5x)(sec^2(5x)-1)dx \\
&= \int (\tan^4(5x)sec^2(5\theta) - \tan^4(5x))dx = \int \underbrace{\tan^4(5x)sec^2(5\theta)dx}_{u=\tan(5x),\ du=5sec^2(5x)dx} - \int \tan^4(5x)dx \\
&= \frac{\tan^5(5x)}{25} - \int \tan^2(5x)(sec^2(5x)-1)dx \\
&= \frac{\tan^5(5x)}{25} - \int \underbrace{\tan^2(5x)sec^2(5x)dx}_{u=\tan(5x),\ du=5sec^2(5x)dx} + \int \tan^2(5x)dx \\
&= \frac{\tan^5(5x)}{25} - \frac{\tan^3(5x)}{15} + \int (sec^2(5x)-1)dx \\
&= \boxed{\frac{\tan^5(5x)}{25} - \frac{\tan^3(5x)}{15} + \frac{\tan(5x)}{5} - x + C}
\end{aligned}$$

◄

Integral de la forma $\int \cot^n(x)dx$

Si n es par se usa $1+\cot^2(x) = \text{cosec}^2(x)$ y $\cot^n(x) = \cot^{n-2}(x)\cot^2(x)$

Si n es impar se usa $1+\cot^2(x) = \text{cosec}^2(x)$ y $\cot^n(x) = \cot^{n-1}(x)\cot(x) = (\cot^2(x))^{\frac{n-1}{2}}\cot(x)$

Ejemplo 2.5.12.
Calcule

(a) $\int \cot^4(4x)dx$ (b) $\int \cot^5(3x)dx$

Resolución: ►

(a)

$$\begin{aligned}
\int \cot^4(4x)dx &= \int \cot^2(4x)\cot^2(4x)dx = \int (\operatorname{cosec}^2(4x)-1)\cot^2(4x)dx \\
&= \int \underbrace{\operatorname{cosec}^2(4x)\cot^2(4x)dx}_{u=\cot(4x),\ du=-4\operatorname{cosec}^2(4x)dx} - \int \cot^2(4x)dx \\
&= \frac{-\cot^3(4x)}{12} - \int (\operatorname{cosec}^2(4x)-1)dx \\
&= \boxed{\frac{-\cot^3(4x)}{12} + \frac{\cot(4x)}{4} + x + C}
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\int \cot^5(3x)dx &= \int \cot^4(3x)\cot^(3x)dx = \int (\operatorname{cosec}^2(3x)-1)^2\cot(3x)dx \\
&= \int (\operatorname{cosec}^4(3x) - 2\operatorname{cosec}^2(3x)+1)\cot(3x)dx \\
&= \int \operatorname{cosec}^4(3x)\cot(3x)dx - 2\int \underbrace{\operatorname{cosec}^2(3x)\cot(3x)dx}_{u=\cot(3x),\ du=-3\operatorname{cosec}^2(3x)dx} + \int \cot(3x)dx \\
&= \int \underbrace{\operatorname{cosec}^3(3x)\operatorname{cosec}(3x)\cot(3x)dx}_{u=\operatorname{cosec}(3x),\ du=-\operatorname{cosec}(3x)\cot(3x)dx} + \frac{\cot^2(3x)}{3} + \frac{\ln|\operatorname{sen}(3x)|}{3} + C \\
&= \boxed{-\frac{\operatorname{cosec}^4(3x)}{12} + \frac{\cot^2(3x)}{3} + \frac{\ln|\operatorname{sen}(3x)|}{3} + C}
\end{aligned}$$

◄

Integral de la forma $\int \operatorname{sen}^m(x)\cos^n(x)dx$

Si m y n son pares se usa $\operatorname{sen}^2(x) = \dfrac{1-\cos(2x)}{2}$, $\cos^2(x) = \dfrac{1+\cos^2(2x)}{2}$ luego con estas sustituciones reemplazamos en la integral $\int \operatorname{sen}^m(x)\cos^n(x)dx$ la cual se transforma en integrales de la forma $\int \operatorname{sen}^n(x)dx$, que ya fueron estudiadas.

Si m es impar y n cualquier número entonces se utilizan

- $\operatorname{sen}^m(x)\cos^n(x) = \operatorname{sen}^{m-1}(x)\cos^n(x)\operatorname{sen}(x)$
- $\operatorname{sen}^2(x)+\cos^2(x) = 1$

Si n es impar y m cualquier número entonces se utilizan

- $\operatorname{sen}^m(x)\cos^n(x) = \operatorname{sen}^m(x)\cos^{n-1}(x)\cos(x)$
- $\operatorname{sen}^2(x)+\cos^2(x) = 1$

Ejemplo 2.5.13.
Calcule

(a) $\int \operatorname{sen}^2(x)\cos^2(x)dx$ (b) $\int \operatorname{sen}^4(x)\cos^3(x)dx$ (c) $\int \operatorname{sen}^5(x)\cos^2(x)dx$

Resolución: ►

(a)

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^2(x)\cos^2(x)dx &= \int \left(\frac{1-\cos(2x)}{2}\right)\left(\frac{1+\cos(2x)}{2}\right)dx = \frac{1}{4}\int (1-\cos^2(2x))dx \\ &= \frac{1}{4}\int \left(1-\left(\frac{1+\cos(4x)}{2}\right)\right)dx = \frac{1}{4}\int \left(\frac{1}{2}-\frac{\cos(4x)}{2}\right)dx \\ &= \boxed{\frac{x}{8}-\frac{\operatorname{sen}(4x)}{4}+C}\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^4(x)\cos^3(x)dx &= \int \cos^2(x)\operatorname{sen}^4(x)\cos(x)dx = \int (1-\operatorname{sen}^2(x))\operatorname{sen}^4(x)\cos(x)dx \\ &= \int \underbrace{\operatorname{sen}^4(x)\cos(x)dx}_{u=\operatorname{sen}(x),\ du=\cos(x)dx} - \int \underbrace{\operatorname{sen}^6(x)\cos(x)dx}_{u=\operatorname{sen}(x),\ du=\cos(x)dx} \\ &= \boxed{\frac{\operatorname{sen}^5(x)}{5}-\frac{\operatorname{sen}^7(x)}{7}+C}\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^5(x)\cos^2(x)dx &= \int \operatorname{sen}^4(x)\cos^2(x)\operatorname{sen}(x)dx = \int (1-\cos^2(x))^2\cos^2(x)\operatorname{sen}(x)dx \\ &= \int (1-2\cos^2(x)+\cos^4(x))\cos^2(x)\operatorname{sen}(x)dx \\ &= \int \underbrace{\cos^2(x)\operatorname{sen}(x)dx}_{u=\cos(x),\ du=-\operatorname{sen}(x)dx} -2\int \underbrace{\cos^4(x)\operatorname{sen}(x)dx}_{u=\cos(x),\ du=-\operatorname{sen}(x)dx} + \int \underbrace{\cos^6(x)\operatorname{sen}(x)dx}_{u=\cos(x),\ du=-\operatorname{sen}(x)dx} \\ &= \boxed{-\frac{\cos^3(x)}{3}+\frac{2\cos^5(x)}{5}-\frac{\cos^7(x)}{7}+C}\end{aligned}$$

◄

Integral de la forma $\boxed{\int \tan^m(x)\mathbf{sec}^n(x)dx}$

Si m **es impar y** n **cualquier número o si** m **es par y** n **impar** , se usa $\tan^m(x)\sec^n(x)dx = \tan^{m-1}(x)\sec^{n-1}(x)\tan(x)\sec(x)$ y la identidad $1+\tan^2(x) = \sec^2(x)$

Si m **es cualquier número y** n **es par** se utilizan

- $\tan^m(x)\sec^n(x) = \tan^m(x)\sec^{n-2}(x)\sec^2(x)$
- $1+\tan^2(x) = \sec^2(x) = 1$

Si m **es impar y** n **es par** se aplica cualquiera de los dos casos

Ejemplo 2.5.14.
Calcular

(a) $\displaystyle\int \tan^3(3x)\sec^3(3x)dx$ (b) $\displaystyle\int \sqrt{\tan(x)}\sec^6(x)dx$ (c) $\displaystyle\int \tan^2(2x)\sec^4(2x)dx$

Resolución: ►

(a)

$$\begin{aligned}
\int \tan^3(x)sec^3(x)dx &= \int \tan^2(3x)sec^2(3x)\tan(3x)sec(3x)dx \\
&= \int (sec^2(3x)-1))sec^2(3x)\tan(3x)sec(3x)dx \\
&= \int \underbrace{sec^4(3x)\tan(3x)sec(3x)dx}_{u=sec(3x),\ du=sec(3x)\tan(3x)dx} - \int \underbrace{sec^2(3x)\tan(3x)sec(3x)dx}_{u=sec(3x),\ du=sec(3x)\tan(3x)dx} \\
&= \boxed{\frac{sec^5(3x)}{15} - \frac{sec^3(3x)}{9} + C}
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{\tan(x)}sec^6(x)dx &= \int \tan^{\frac{1}{2}}(x)sec^4(x)sec^2(x)dx = \int \tan^{\frac{1}{2}}(x)(1+\tan^2(x))^2sec^2(x)dx \\
&= \int \tan^{\frac{1}{2}}(x)(1+2\tan^2(x)+\tan^4(x))sec^2(x)dx \\
&= \int \underbrace{\tan^{\frac{1}{2}}(x)sec^2(x)dx}_{u=\tan(x),\ du=sec^2(x)dx} +2\int \underbrace{\tan^{\frac{5}{2}}(x)sec^2(x)}_{u=\tan(x),\ du=sec^2(x)dx} + \int \underbrace{\tan^{\frac{9}{2}}(x)sec^2(x)dx}_{u=\tan(x),\ du=sec^2(x)dx} \\
&= \boxed{\frac{2\tan^{\frac{3}{2}}(x)}{3} + \frac{4\tan^{\frac{7}{2}}(x)}{7} + \frac{2\tan\frac{11}{2}(x)}{11} + C}
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
\int \tan^2(2x)sec^4(2x)dx &= \int sec^2(2x)\tan^2(2x)sec^2(2x)dx = \int (1+\tan^2(2x))\tan^2(2x)sec^2(2x)dx \\
&= \int \underbrace{\tan^2(2x)sec^2(2x)dx}_{u=\tan(x),\ du=sec^2(x)dx} + \int \underbrace{\tan^4(2x)sec^2(2x)dx}_{u=\tan(x),\ du=sec^2(x)dx} \\
&= \boxed{\frac{\tan^3(2x)}{6} + \frac{\tan^5(2x)}{10} + C}
\end{aligned}$$

◄

Integral de la forma $\boxed{\int \cot^m(x)\operatorname{cosec}^n(x)dx}$

Si m es impar y n cualquier número o si m es par y n impar , se usa

- $\cot^m(x)\operatorname{cosec}^n(x)dx = \cot^{m-1}(x)\operatorname{cosec}^{n-1}(x)\cot(x)\operatorname{cosec}(x)$
- $1+\cot^2(x) = \operatorname{cosec}^2(x)$

Si m es cualquier número y n es par se utilizan

- $\cot^m(x)\operatorname{cosec}^n(x) = \cot^m(x)\operatorname{cosec}^{n-2}(x)\operatorname{cosec}^2(x)$
- $1+\cot^2(x) = \operatorname{cosec}^2(x) = 1$

Si m es impar y n es par se aplica cualquiera de los dos casos anteriores

Ejemplo 2.5.15.
Calcular $\int \cot^5(x)\operatorname{cosec}^4(x)dx$

Resolución: ►

$$\begin{aligned}
\int \cot^5(x)\operatorname{cosec}^4(x)dx &= \int \cot^5(x)\operatorname{cosec}^2(x)\operatorname{cosec}^2(x)dx = \int \cot^5(x)(1+\cot^2(x))\operatorname{cosec}^2(x)dx \\
&= \int \underbrace{\cot^5(x)\operatorname{cosec}^2(x)dx}_{u=\cot(x),\ du=-\operatorname{cosec}^2(x)dx} + \int \underbrace{\cot^7(x)\operatorname{cosec}^2(x)dx}_{u=\cot(x),\ du=-\operatorname{cosec}^2(x)dx} \\
&= \boxed{-\frac{\cot^6(x)}{6} - \frac{\cot^8(x)}{8} + C}
\end{aligned}$$

◄

Integrales de la forma $\boxed{\int \operatorname{sen}(mx)\cos(nx)dx,\ \int \operatorname{sen}(mx)\operatorname{sen}(nx)dx,\ \int \cos(mx)\cos(nx)dx}$

Se utilizaran las identidades siguientes

- $\operatorname{sen}(mx)\cos(nx) = \dfrac{\operatorname{sen}((m+n)x)+\operatorname{sen}((m-n)x)}{2}$
- $\operatorname{sen}(mx)\operatorname{sen}(nx) = \dfrac{\cos((m-n)x)-\cos((m+n)x)}{2}$
- $\cos(mx)\cos(nx) = \dfrac{\cos((m-n)x)+\cos((m+n)x)}{2}$

Ejemplo 2.5.16.
Calcule

(a) $\int \operatorname{sen}(2x)\operatorname{sen}(9x)dx$

(b) $\int \cos(2x)\cos(7x)dx$

Resolución: ►

(a)

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}(2x)\operatorname{sen}(9x)dx &= \frac{1}{2}\int(\cos(7x)-\cos(11x))dx = \frac{1}{2}\left(\int\cos(7x)dx - \int\cos(11x)dx\right)\\ &= \boxed{\frac{\operatorname{sen}(7x)}{14} - \frac{\operatorname{sen}(11x)}{22} + C}\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\int \cos(2x)\cos(7x)dx &= \frac{1}{2}\int(\cos(5x)+\cos(9x))dx = \frac{1}{2}\int\cos(5x)dx + \frac{1}{2}\int\cos(9x)dx\\ &= \boxed{\frac{\operatorname{sen}(5x)}{10} + \frac{\operatorname{sen}(9x)}{18} + C}\end{aligned}$$

◄

Ejemplo 2.5.17. Calcule $\int \operatorname{sen}(4x)\cos(5x)dx$

Resolución: ►

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}(4x)\cos(5x)dx &= \frac{1}{2}\int(\operatorname{sen}(9x)+\operatorname{sen}(-x))dx = \frac{1}{2}\int\operatorname{sen}(9x)dx - \frac{1}{2}\int\operatorname{sen}(x)dx\\ &= \boxed{\frac{\cos(x)}{2} - \frac{\cos(9x)}{18} + C}\end{aligned}$$

◄

2.5.4. Sustitución trigonométrica

Propiedades 2.5.18. Las integrales que se estudiarán a continuación calculando su valor, son de la forma

1. $\int \sqrt{a^2-x^2}dx$ 2. $\int \sqrt{a^2+x^2}dx$ 3. $\int \sqrt{x^2-a^2}dx$

Resolución: ▸

Caso 1

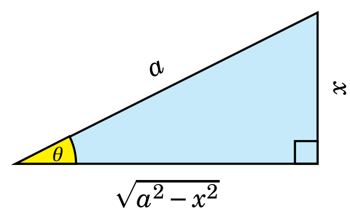
Para la integral $\int \sqrt{a^2-x^2}$, $a \neq 0$ *se hace la sustitución*

$$\boxed{x = a\,\text{sen}(\theta)}$$

A partir $\text{sen}(\theta) = \dfrac{x}{a}$ *construimos el* △ *rectángulo*

Generando las ecuaciones

$$\begin{aligned} x &= a\,\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) &= \frac{x}{a} \\ \theta &= \text{arc}\,\text{sen}\left(\frac{x}{a}\right) \end{aligned}$$



Entonces reemplazando las ecuaciones en la integral obtenemos

$$\begin{aligned} \int \sqrt{a^2-x^2}dx &= \int \sqrt{a^2-(a\,\text{sen}(\theta))^2}a\cos(\theta)d\theta = \int \sqrt{a^2(1-\text{sen}^2(\theta))}a\cos(\theta)d\theta \\ &= \int a\sqrt{\cos^2(\theta)}a\cos(\theta)d\theta = a^2\int \cos^2(\theta)d\theta = a^2\int\left(\frac{\cos(2\theta)+1}{2}\right)d\theta \\ &= \frac{a^2}{2}\left(\int \cos(2\theta)\,d\theta + \int d\theta\right) = \frac{a^2}{4}\text{sen}(2\theta) + \frac{a^2\theta}{2} + C \\ &= \frac{a^2}{2}\text{sen}(\theta)\cos(\theta) + \frac{a^2\theta}{2} + C = \frac{a^2}{2}\frac{x}{a}\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a} + \frac{a^2\theta}{2} + C \\ &\Longrightarrow \boxed{\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\text{arc}\,\text{sen}\left(\frac{x}{a}\right) + C} \end{aligned}$$

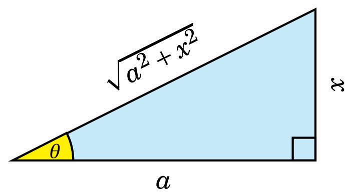
◂

Resolución: ▶

Caso 2 *Para la integral* $\int \sqrt{a^2+x^2}dx$. *se hace la susutitución*

$$\boxed{x = a\tan\theta}$$

De donde $\tan(\theta) = \dfrac{x}{a}$, *considerando de esta forma el triángulo rectángulo*



De las ecuaciones $\begin{cases} \tan(\theta) &= \dfrac{x}{a} \\ x &= a\tan(\theta) \end{cases}$

Se obtiene $\begin{cases} \theta &= arctan\left(\dfrac{x}{a}\right) \\ dx &= asec^2(\theta)d\theta \end{cases}$

$$\begin{aligned} \int \sqrt{a^2+x^2}dx &= \int \sqrt{a^2+(a\tan(\theta))^2}asec^2(\theta)d\theta = \int \sqrt{a^2(1+\tan^2(\theta))}asec^2(\theta)d\theta \\ &= \int a\sqrt{sec^2(\theta)}asec^2(\theta)d\theta = a^2\int sec^3(\theta)d\theta \end{aligned}$$

Cálculo de $\int sec^3(\theta)d\theta$ *por partes:*

$$\int sec^3(\theta)d\theta = \int sec(\theta)\cdot(sec^2(\theta)d\theta) = \int u\cdot dv = uv - \int vdu \qquad (2.19)$$

$$\begin{aligned} u &= sec(\theta) \Longrightarrow \boxed{du = sec(\theta)\tan(\theta)d\theta} \\ dv &= sec^2(\theta)d\theta \Longrightarrow \boxed{v = \tan(\theta)} \end{aligned}$$

Reemplazando estas dos últimas ecuacione en (2.19), tenemos

$$\begin{aligned} \int sec^3(\theta)d\theta &= \tan(\theta)sec(\theta) - \int sec(\theta)\tan^2(\theta)d\theta = \tan(\theta)sec(\theta) - \int sec(\theta)(sec^2(\theta)-1)d\theta \\ &= \tan(\theta)sec(\theta) - \int sec^3(\theta)d\theta + \int sec(\theta)d\theta \\ \Longrightarrow &\quad 2\int sec^3(\theta)d\theta = \tan(\theta)sec(\theta) + \int sec(\theta)d\theta \\ \Longrightarrow &\quad \int sec^3(\theta)d\theta = \frac{\tan(\theta)sec(\theta)}{2} + \frac{\ln|\tan(\theta)+sec(\theta)|}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \sqrt{a^2+x^2}dx &= a^2\left(\frac{\tan(\theta)sec(\theta)}{2} + \frac{\ln|\tan(\theta)+sec(\theta)|}{2}\right) \\ &= \boxed{\frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{a^2+x^2}) + C} \end{aligned}$$

◀

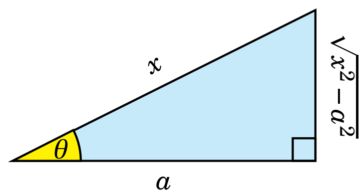
Resolución: ►

Caso 3

Para la integral $\int \sqrt{x^2-a^2}$, $a \neq 0$ *se hace la sustitución*

$$\boxed{x = asec(\theta)}$$

De donde $sec(\theta) = \dfrac{x}{a}$, *considerando de esta forma el triángulo rectángulo*



De las ecuaciones $\begin{cases} sec(\theta) & = & \dfrac{x}{a} \\ x & = & asec(\theta) \end{cases}$

Se obtiene

$$\begin{cases} \theta & = & arcsec\left(\dfrac{x}{a}\right) \\ dx & = & asec(\theta)\tan(\theta)d\theta \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{x^2-a^2}dx &= \int \sqrt{(asec(\theta))^2-a^2}asec(\theta)\tan(\theta)d\theta = \int \sqrt{a^2(sec^2(\theta)-1)}asec(\theta)\tan(\theta)d\theta \\
&= \int a\sqrt{\tan^2(\theta)}asec(\theta)\tan(\theta)d\theta = a^2\int \tan^2(\theta)sec(\theta)d\theta \\
&= a^2\int (sec^2(\theta)-1)sec(\theta)d\theta = a^2\left[\int sec^3(\theta)d\theta - \int sec(\theta)d\theta\right] \\
&= a^2\left[\frac{\tan(\theta)sec(\theta)}{2} - \frac{\ln|\tan(\theta)+sec(\theta)|}{2}\right] + C \\
&= \frac{a^2}{2}\left[\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\frac{x}{a} - \ln\left|\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}+\frac{x}{a}\right|\right] + C \\
&= \boxed{\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\ln|\sqrt{x^2-a^2}+x| + C}
\end{aligned}$$

◄

Observación 2.5.19.

1. Los casos anteriores se pueden extender a funciones racionales que contienen funciones integrando de los casos 1, 2 y 3 respectivamente.

2. **CASO 1 GENERAL** Para la integral

$$\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2}), \quad \text{Donde } R \text{ es función racional de variable } x \text{ que contiene } \sqrt{a^2 - x^2}$$

utilizaremos sustitución trigonométrica

$$\operatorname{sen}(\theta) = \frac{x}{a}$$

CASO 2 GENERAL Para la integral

$$\int R(x, \sqrt{a^2 + x^2}), \quad \text{Donde } R \text{ es función racional de variable } x \text{ que contiene } \sqrt{a^2 + x^2}$$

utilizaremos sustitución trigonométrica

$$\tan(\theta) = \frac{x}{a}$$

CASO 3 GENERAL Para la integral

$$\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2}), \quad \text{Donde } R \text{ es función racional de variable } x \text{ que contiene } \sqrt{x^2 - a^2}$$

utilizaremos sustitución trigonométrica

$$\sec(\theta) = \frac{x}{a}$$

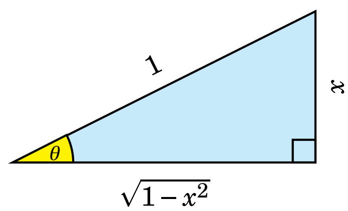
Ejemplo 2.5.20.
Calcular las integrales siguientes

(a) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$ (b) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{5+x^2}}dx$ (c) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-9}}dx$

Resolución: ▶

(a) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$ *función integrando*

Note que el integrando es una función racional y parte de ella contiene a $\sqrt{1-x^2}$ *por tanto corresponde al caso 1 general.*
Se sustituye $x = \operatorname{sen}(\theta)$ *considerando de esta forma el triángulo rectángulo*



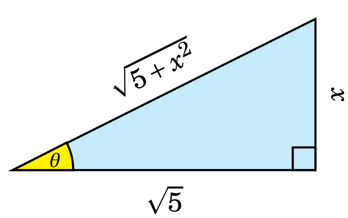
De $x = \operatorname{sen}(\theta)$*, se obtiene*

$$\begin{cases} \theta = \operatorname{arc\,sen}(x) \\ dx = \cos(\theta)d\theta \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx &= \int \frac{\operatorname{sen}^2(\theta)\cos(\theta)}{\cos(\theta)}d\theta = \int \operatorname{sen}^2(\theta)d\theta = \frac{1}{2}\int (1-\cos(\theta))d\theta \\
&= \frac{1}{2}\left(\theta - \frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{2}\right) + C = \frac{1}{2}(\theta - \operatorname{sen}(\theta)\cos(\theta)) + C \\
&= \frac{1}{2}\left(\operatorname{arc\,sen}(x) - x\sqrt{1-x^2}\right) + C
\end{aligned}$$

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{5+x^2}}dx$ *función integrando*

Note que el integrando es una función racional y parte de ella contiene a $\sqrt{5+x^2}$ *por tanto corresponde al caso 2 general.*
Se sustituye $x = \sqrt{5}\tan(\theta)$ *considerando de esta forma el triángulo rectángulo*



De $x = \sqrt{5}\tan(\theta)$*, se obtiene*

$$\begin{cases} \theta = arctan\left(\dfrac{x}{\sqrt{5}}\right) \\ dx = \sqrt{5}sec^2(\theta)d\theta \end{cases}$$

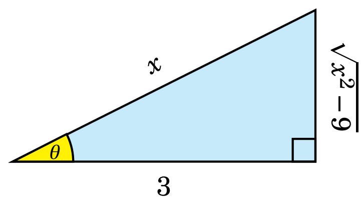
$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^2\sqrt{5+x^2}}dx &= \int \frac{\sqrt{5}sec^2(\theta)}{5\tan^2(\theta)\sqrt{5}sec(\theta)}d\theta = \frac{1}{5}\int \frac{\cos(\theta)}{\operatorname{sen}^2(\theta)}d\theta \\
&= \frac{1}{5}\int \cot(\theta)\operatorname{cosec}(\theta)d\theta = -\frac{\operatorname{cosec}(\theta)}{5} + C \\
&= \boxed{-\frac{\sqrt{5+x^2}}{5x} + C}
\end{aligned}$$

◀

Resolución: ►

(c) $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-9}}dx$ *función integrando*

Note que el integrando es una función racional y parte de ella contiene a $\sqrt{x^2-9}$ *por tanto corresponde al caso 3 general.*
Se sustituye $x = 3sec(\theta)$ *considerando de esta forma el triángulo rectángulo*



De $x = 3sec(\theta)$, *se obtiene*

$$\begin{cases} \theta &= arcsec\left(\frac{x}{3}\right) \\ dx &= 3sec(\theta)\tan(\theta)d\theta \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-9}}dx &= \int \frac{3sec(\theta)\tan(\theta)}{9sec^2(\theta)3\tan(\theta)}d\theta = \frac{1}{9}\int \cos(\theta)d\theta \\ &= \frac{1}{9}\operatorname{sen}(\theta) + C = \frac{1}{9}\frac{\sqrt{x^2-9}}{x} + C \end{aligned}$$

◄

2.5.5. Integración por Fracciones Parciales

Definición 2.5.1. Sean $P(x)$ y $Q(x)$ polinomios.Para calcular integrales de la forma $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$, consideremos dos casos:

Grado de $P(x)$ es mayor que el grado de $Q(x)$, para este caso se divide hasta obtener una expresión de la forma $\frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$ donde el grado de $R(x)$ es menor que el grado de $Q(x)$.

Grado de P menor que el grado Q para este caso expresar el denominador como producto de factores polinomiales de grado 1 o 2 a lo más donde los factores de segundo grado son irreducibles.

Observación 2.5.21. Para el caso 2, presentaremos algunos ejemplos de como descomponer una función racional en fracciones parciales:

- $\dfrac{3x+1}{x^2-25} = \dfrac{3x+1}{(x+5)(x-5)} = \dfrac{A}{x+5} + \dfrac{B}{x-5}.$
- $\dfrac{4x}{(x+6)(x-1)} = \dfrac{A}{x+6} + \dfrac{B}{x-1}.$
- $\dfrac{2x^2+3x+3}{(x+7)^3} = \dfrac{A}{x+7} + \dfrac{B}{(x+7)^2} + \dfrac{C}{(x+7)^3}.$
- $\dfrac{2x^3-6x^2+4}{(x-1)\underbrace{(x^2+x+1)^2}_{poli.irred.,gradodos}} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{Bx+C}{x^2+x+1} + \dfrac{\overbrace{Dx+E}^{poli.degrado1}}{(x^2+x+1)^2}.$
- $\dfrac{x^3-x^2+1}{(x+2)^2(x^2+4x+5)} = \dfrac{A}{x+2} + \dfrac{B}{(x+2)^2} + \dfrac{Cx+D}{x^2+4x+5}$
- $\dfrac{x^5+x^4-2x+7}{x^6+1} = \dfrac{Ax+B}{x^2+1} + \dfrac{Cx+D}{x^2-\sqrt{3}x+1} + \dfrac{Ex+F}{x^2+\sqrt{3}x-1}$
- $\dfrac{x^5-3x^3+2x^2-1}{x^6-1} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{x+1} + \dfrac{Cx+D}{x^2+x+1} + \dfrac{Ex+F}{x^2-x+1}$
- $\dfrac{x^2+1}{(x-1)^3(x+4)^2} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{(x-1)^2} + \dfrac{C}{(x-1)^3} + \dfrac{D}{x+4} + \dfrac{E}{(x+4)^2}$

Ejemplo 2.5.22.
Calcular

(a) $\displaystyle\int \frac{(x^3+2x^2+2)dx}{x-1}$ (b) $\displaystyle\int \frac{5x-7}{(x-3)(x^2-x-2)}dx$ (c) $\displaystyle\int \frac{4x^2+6}{x^3+3x}dx$

Resolución: ►

(a) *Primero hay que dividir* $\dfrac{(x^3+2x^2+2)}{x-1}$,

$$\begin{array}{r|l} & x^2+3x+3 \\ \hline x-1 & x^3+2x^2 \qquad +2 \\ & -x^3 \;\; +x^2 \\ \hline & 3x^2 \\ & -3x^2+3x \\ \hline & 3x+2 \\ & -3x+3 \\ \hline & 5 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \frac{(x^3+2x^2+2)}{x-1} &= x^2+3x+3+\frac{5}{x-1} \Longrightarrow \\ \int \frac{(x^3+2x^2+2)dx}{x-1} &= \int (x^2+3x+3+\frac{5}{x-1})dx \\ &= \boxed{\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}+3x+5\ln|x-1|+C} \end{aligned}$$

Utilizando el esquema Horner o Ruffini nos da

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & & 1 & 3 & 3 \\ \hline & 1 & 3 & 3 & 5 \end{array} \Longrightarrow \frac{(x^3+2x^2+2)}{x-1} = x^2+3x+3+\frac{5}{x-1}$$ *y luego se resuelve como antes.*

(b) *Al Factorizar* $x^2-x-2=(x+1)(x-2)$, *la descomposición en fracciones parciales sería:*

$$\begin{aligned} \frac{5x-7}{(x-3)(x^2-x-2)} &= \frac{5x-7}{(x-3)(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x-3}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+1} \\ &= \frac{A(x-2)(x+1)+B(x-3)(x+1)+C(x-3)(x-2)}{(x-3)(x-2)(x+1)} \end{aligned}$$

Igualando los numeradores se obtiene

$$5x-7 = A(x-2)(x+1)+B(x-3)(x+1)+C(x-3)(x-2), \quad \forall x \in \mathbb{R} \tag{2.20}$$

Es conveniente elegir $x=-1$, $x=2$, $x=3$ *(conocidos como puntos críticos por que indeterminan la fracción) para calcular* A, B, C

Si $x=-1$, *reemplazamos este valor en la ecuación (2.20)*

$$\begin{aligned} 5(-1)-7 &= A(-1-2)(-1+1)+B(-1-3)(-1+1)+C(-1-3)(-1-2) \\ -12 &= (-3)(0)A+(-4)(0)B+(-4)(-3)C \\ -12 &= 0+0+12C \\ &\Longrightarrow \boxed{C=-1} \end{aligned}$$

Si $x=2$ *reemplazamos este valor en la ecuación (2.20)*

$$\begin{aligned} 5(2)-7 &= A(2-2)(2+1)+B(2-3)(2+1)+C(2-3)(2-2) \\ 3 &= (0)(3)A+(-1)(3)B+(-1)(0)C \\ 3 &= 0-3B+0 \\ &\Longrightarrow \boxed{B=-1} \end{aligned}$$

◄

Resolución: ▶

(b) **Si** $x = 3$ *reemplazamos este valor en la ecuación (2.20)*

$$\begin{aligned}
5(3)-7 &= A(3-2)(3+1)+B(3-3)(3+1)+C(3-3)(3-2)\\
8 &= (1)(4)A+(0)(4)B+(0)(1)C\\
8 &= 4A+0+0\\
&\Longrightarrow \boxed{A=2}
\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\int \frac{5x-7}{(x-3)(x^2-x-2}dx &= \int \frac{5x-7}{(x+1)(x-2)(x-3)}dx = \int \left(\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+1}\right)dx\\
&= \int \left(\frac{2}{x-3}-\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+1}\right)dx = \int \frac{2}{x-3}dx - \int \frac{1}{x-2}dx - \int \frac{2}{x+1}dx\\
&= \boxed{2\ln|x-3|-\ln|x-2|-\ln|x+1|+C}
\end{aligned}$$

(c) *Al factorizar* $x^3+3x = \left(x^2+3\right)x$ *la descomposición en fracciones parciales sería:*

$$\begin{aligned}
\frac{4x^2+6}{x^3+3x} &= \frac{4x^2+6}{x(x^2+3)} = \frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+3}\\
&= \frac{A(x^2+3)+(Bx+C)x}{x(x^2+3)}
\end{aligned}$$

Igualando los numeradores se obtiene

$$4x^2+6 = A(x^2+3)+(Bx+C)x, \quad \forall x \in \mathbb{R} \tag{2.21}$$

El único punto crítico real es $x = 0$ *este valor permite calcular, por ejemplo* A*, pero no es suficiente, ya que necesitamos dos valores más para* x *que nos permita calcular los otros dos* B *y* C*, entonces elegimos cualquier par de valores para* x *reales,y nos conviene elegir numeros que produzcan la menor cantidad de operaciones algebraicas.*

Si $x = 0$ *, reemplazamos este valor en la ecuación (2.21)*

$$\begin{aligned}
4(0)^2+6 &= A((0)^2+3)+(B(0)+C)(0)\\
6 &= 3A+0\\
&\Longrightarrow \boxed{A=2}
\end{aligned}$$

Si $x = 1$ *,reemplazamos este valor en la ecuación (2.21)*

$$\begin{aligned}
4(1)^2+6 &= A((1)^2+3)+(B(1)+C)(1)\\
10 &= 4A+B+C \Longrightarrow 10 = 8+B+C\\
&\Longrightarrow \boxed{B+C=2}
\end{aligned}$$

◀

Resolución: ▶

(c) **Si** $x=-1$ *, reemplazamos este valor en la ecuación (2.21)*

$$\begin{aligned}4(-1)^2+6 &= A((-1)^2+3)+(B(-1)+C)(-1)\\ 10 &= 4A+B-C \Longrightarrow 10=8+B-C\\ &\Longrightarrow \boxed{B-C=2}\end{aligned}$$

Ahora resolvemos simultáneamente las ecuaciones

$$\left\{\begin{aligned}B+C &= 2\\ B-C &= 2\end{aligned}\right. \quad \text{de donde } \boxed{B=2,\ C=0}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{4x^2+6}{x^3+3x}dx &= \int \frac{4x^2+6}{x(x^2+3)}dx = \int\left(\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+3}\right)dx\\ &= \int\left(\frac{2}{x}+\frac{2x}{x^2+3}\right)dx = \int\frac{2}{x}dx+\int \underbrace{\frac{2x}{x^2+3}}_{u=x^2+3,\ du=2xdx}dx\\ &= \boxed{2\ln|x|+\ln|x^2+3|+C}\end{aligned}$$

◀

2.6. Aplicaciones

2.6.1. introducción a las Ecuaciones diferenciales

Definición 2.6.1.

(a) Sea F es una primitiva de $y = f(x)$ en $I \subset \mathbb{R}$, entonces

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = f(x) \Longrightarrow dy = f'(x)dx}$$

a esta expresión se llama **ecuación diferencial**.

1. Una función que satisface una ecuación diferencial, se llama **solución general** de la ecuación diferencial.
2. Una **solución particular** es aquella que se obtiene a partir de una condición inicial (x_0, y_0)
3. Al integrar la expresión $dy = f'(x)dx$

$$\boxed{\int dy = \int f(x)dx + C \Longrightarrow y = F(x) + C}$$

se obtiene la solución de la ecuación diferencial

Ejemplo 2.6.1.
Resolver las ecuaciones diferenciales siguientes

1. $\dfrac{dy}{dx} = x^2 + 4$
2. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2+3}{y^3+1}$
3. $\dfrac{dy}{dx} = 2x + 1, \quad y(0) = 3$

Resolución: ►

1.

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= x^2+4 \Longrightarrow dy=(x^2+4)dx \Big/ \int \\ &\Longrightarrow \int dy = \int (x^2+4)dx \\ &\Longrightarrow \boxed{y=\frac{x^3}{3}+4x+C}\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{x^2+3}{y^3+1} \Longrightarrow dy=\frac{x^2+3}{y^3+1}dx \Longrightarrow (y^3+1)dy=(x^2+3)dx \\ &\Longrightarrow \int (y^3+1)dy = \int (x^2+3)dx \\ &\Longrightarrow \boxed{\frac{y^4}{4}+y=\frac{x^3}{3}+3x+C}\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= 2x+1 \Longrightarrow dy=(2x+1)dx \\ &\Longrightarrow \int dy = \int (2x+1)dx \\ &\Longrightarrow \boxed{y=x^2+x+C}\end{aligned}$$

Pero $y(0)=3 \Longrightarrow C=3$, *luego*

$$y(x)=x^2+x+3$$

◄

2.6.2. Ejercicios Propuestos

1. En un cultivo de bacterias, el número inicial estimado es de 200 bacterias. Al cabo de 10 minutos es de 300. Estimar el número al cabo de 20 minutos.
   Resp: 450 bacterias.

2. Un cultivo de bacterias tiene una cantidad inicial N_0. Cuando $t=1$ hora la cantidad de bacterias es $\frac{3}{2}N_0$. Si la razón de reproducción es proporcional a la cantidad de bacterias presente, calcular el tiempo necesario para triplicar la cantidad inicial.
   Resp: $t \approx 2{,}71$ horas

3. La población de una comunidad crece a una tasa proporcional a la población presente. Si al inicio es de 500 y aumenta 15 % en 10 años. Determine la población después de 30 años.

Resp: 760.

4. Una población bacteriana crece a una tasa proporcional a la cantidad presente. Si al cabo de 3 horas hay 100 individuos y 2000 al cabo de 10 horas, obtener la cantidad inicial de bacterias.

2.6.3. Aplicaciones físicas

Observación 2.6.2.
Recordemos que si

- $s(t)$: representa la posición.
- $v(t)$: representan la velocidad.
- $a(t)$: representan la aceleración

de una partícula que se desplaza sobre una recta, entonces

$$v(t) = s'(t) = \tfrac{ds}{dt} \qquad a(t) = v'(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d\left(\frac{ds}{dt}\right)}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

Ejemplo 2.6.3.
Una partícula se desplaza a lo largo de una recta con una aceleración $a = 5 - 2t[m/seg^2]$. Si $v = 2[m/seg]$ y $s = 0$ cuando $t = 0$, obtenga el desplazamiento s.

Resolución: ►

$$\begin{aligned} a = \frac{dv}{dt} &= 5-2t \Longrightarrow dv = (5-2t)dt \Big/ \int \\ &\Longrightarrow \int dv = \int (5-2t)dt \\ &\Longrightarrow v(t) = 5t - t^2 + C_1 (2.22) \end{aligned}$$

Como $v(0)=2$*, entonces*

$$\begin{aligned} v(0) = 2 &= \cancel{5\cdot 0} - \cancel{0^2} + C_1 \\ &\Longrightarrow \boxed{C_1 = 2} \end{aligned}$$

Así $v(t) = 5t - t^2 + 2$*, luego*

$$\begin{aligned} v(t) = \frac{ds}{dt} &= (5t - t^2 + 2) \Longrightarrow ds = (5t - t^2 + 2)dt \Big/ \int \\ &\Longrightarrow \int ds = \int (5t - t^2 + 2)dt \\ &\Longrightarrow s(t) = \frac{5t^2}{2} - \frac{t^3}{3} + 2t + C_2 \end{aligned}$$

Como $s(0)=0$*, entonces*

$$\begin{aligned} s(0) = 0 &= \frac{5}{2}0^2 - \frac{0^3}{3} + 2\cdot 0 + C_2 \\ &\Longrightarrow \boxed{C_2 = 0} \end{aligned}$$

Entonces la posición es $\boxed{s(t) = \frac{5}{2}t^2 - \frac{t^3}{3} + 2t}$ ◄

Ejemplo 2.6.4.
Un objeto se lanza verticalmente hacia arriba desde el suelo, con una velocidad inicial de $20[pie/seg]$ cuya $a(t) = 32[pie/seg^2]$. Determinar

(a) Tiempo que demora en alcanzar su máxima altura.

(b) Altura máxima.

(c) Tiempo que demora en llegar al suelo.

(d) Velocidad con que llega al suelo.

Resolución: ►

(a)

$$a = \frac{dv}{dt} = -32 \Longrightarrow dv = (-32)dt \Big/ \int$$
$$\Longrightarrow \int dv = -\int 32dt \Longrightarrow \boxed{v = -32t + C_1}$$

Como $v(0) = 20[pie/seg]$, *entonces*

$$v(0) = 20 = -32(0) + C_1 \Longrightarrow \boxed{C_1 = 20}$$
$$\Longrightarrow \boxed{v(t) = -32t + 20}$$

También

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = -32t + 20 \Longrightarrow ds = (-32t + 20)dt \Big/ \int$$
$$\Longrightarrow \int ds = \int (-32t + 20)dt \Longrightarrow \boxed{s = -16t^2 + 20t + C_2}$$

Además $s(0) = 0$ *Entonces*

$$s(0) = 0 = -16 \cdot 0 + 20 \cdot 0 + C_2$$
$$\Longrightarrow \boxed{C_2 = 0}$$

entonces $\boxed{s(t) = -16t^2 + 20t}$
La máxima altura se alcanza cuando la velocidad es nula $v(t) = 0$, *de aqui se estima el tiempo es decir*
$v(t) = 0 = -32t + 20 \Longrightarrow \boxed{t = \frac{5}{8}[seg]}$

(b) *Por parte* (a), *la altura máxima será*

$$s\left(\frac{5}{8}\right) = -16\frac{25}{64} + 20\frac{5}{8} \Longrightarrow s = -\frac{25}{4} + \frac{50}{4}$$
$$\Longrightarrow \boxed{s = \frac{25}{4}[pie]}$$

(c) *Como la pelota llega al suelo quiere decir que el desplazamiento es cero* $s = 0 = -16t^2 + 20t$, *y a partir de alli calcular el tiempo entonces,*

$$t(-16t + 20) = 0 \Longrightarrow t_0 = 0,\ t_1 = \frac{5}{4}[seg]$$

(d) *Para encontrar la velocidad con que llega al suelo, consideremos* $t = \frac{5}{4}$, *pues para* $t = 0$ *ya sabemos la velocidad inicial,así*

$$v = -32 \cdot \frac{5}{4} + 20 \Longrightarrow \boxed{v = -20[pie/seg]}$$

◄

2.6.4. Aplicaciones de la integral en Mecánica Dinámica.

La 2^a ley de Newton $F = ma$ **expresa la relación básica para conocer y determinar el movimiento de un cuerpo** . Si se trata de una masa puntual o partícula en movimiento rectilíneo esta relación permite obtener una aceleración expresada como una función que depende del tipo de fenómeno en estudio.

CASO 1

La aceleración se conoce como función del tiempo . Es la relación más directa pero difícilmente de obtener en la realidad. Por ejemplo en movimiento bajo fuerzas centrales , vibraciones con fuerzas elásticas o con amortiguamiento.

La aceleración de una partícula está definida por la relación $a = kt^2$. Si se sabe que $v = -32 pie/s$ cuando $t = 0$ y que $v = 32 pie/s$ cuando $t = 4s$

1. determine la constante k.
2. Escriba las ecuaciones de movimiento, sabiendo también que $x = 0$ cuando $t = 4s$.

Resolución: ►

1. Como $a(t) = \dfrac{dv}{dt}$, *entonces*

$$\begin{aligned} v(t) = \int a(t)dt &= \int kt^2 dt \Longrightarrow v(t) = k\frac{t^3}{3} + C \\ &\Longrightarrow \boxed{v(0) = -32 = C} \\ &\Longrightarrow v(4) = 32 = -32 + k\frac{4^3}{3} \Longrightarrow \boxed{k = 3} \end{aligned}$$

2. Ecuación del movimiento (x(t))
Como $v(t) = \dfrac{dx}{dt}$, *entonces*

$$\begin{aligned} x(t) = \int v(t)dt &= \int (3\frac{t^3}{3} - 32)dt \Longrightarrow \boxed{x(t) = \frac{t^4}{4} - 32t + C_1} \\ &\Longrightarrow x(4) = 0 = 64 - 32 \cdot 4 + C_1 \Longrightarrow \boxed{C_1 = 64} \\ &\Longrightarrow \boxed{x(t) = \frac{t^4}{4} - 32t + 64} \end{aligned}$$

◄

Sea $s(t)$ la posición de un móvil en el instante t, cuando $t = 0$ la posición es $s = 6m$ y su velocidad es $v = 6\dfrac{m}{s}$. De $t = 0$ a $t = 6$ segundos su aceleración es $a = 2 + t^2$. De $t = 6$ segundos hasta que alcanza el reposo su aceleración es $a = -4\dfrac{m}{s^2}$.

1. ¿Cuál es el tiempo total del viaje?
2. ¿Qué distancia total cubre el desplazamiento?

Rta: (1) $45{,}5s$, (2) $3390{,}5m$. Cuente el tiempo partiendo de cero y el mismo tiempo artiendo de $6s$ para el segundo tramo.

La velocidad de un punto P sobre una recta está dada por la ecuación $V = tsen\left(\frac{t\pi}{2}\right)$. El punto comienza a moverse en $t = 0$. Encuentre la distancia total recorrida por P cuando esté partiendo del origen vuelve a pasar por él .

CASO 2

La aceleración se conoce como función de la posición s (o x , o y , etc). Para poder obtener el diferencial ds es necesario expresar $a = \frac{dv}{dt}$ como $a = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = v \cdot \frac{dv}{dx}$

Un punto P tiene una aceleración dada por la ecuación $\frac{d^2x}{dt^2} = -5x^2 \frac{m}{s^2}$. Determine la velocidad P en función de su posición x si P está en 0,3 m con $v = 0{,}6\frac{m}{s}$,cuando $t = 0$.

La aceleración de gravedad $g = 9{,}81 m/s^2$ varía a medida que aumenta la altura respecto del nivel del mar .Una expresión más exacta para la aceleración local en un punto dentro del campo de atracción gravitacional (la partícula vuelve y çae") viene dada por

$$g = \frac{9{,}81}{\left(1 + \frac{y}{68{,}67 \cdot 10^6}\right)^2} m/s^2$$

Donde y (en metros) es la altura respecto del nivel del mar. Calcule la altura alcanzada por una bala disparada verticalmente hacia arriba con las siguientes velocidades iniciales v_0.:

1. $304{,}8m/s$
2. $3048m/s$
3. $11186{,}2m/s$ (compare con la distancia tierra-luna)
4. $132140{,}1km/hr$ (compare con distancia tierra-sol)

Nota: en lanzamiento vertical $a = -g$; radio medio de la tierra $6371km$.

Resp: $h = y_{máx}$ cuando $v = 0$, $h = 68{,}67 \cdot 10^6 \left(\frac{1{,}3473 \cdot 10^9}{(1{,}3473 \cdot 10^9 - v_0^2)} - 1\right)$

1. $20km$
2. $477km$
3. $7049km$
4. $6{,}08 \cdot 10^{14} m = 6{,}08 \cdot 10^{11}$ km (608 mil millones de km)

La aceleración debida a la gravedad de una partícula cayendo hacia la tierra es $a = -\frac{gR^2}{r^2}$ en donde R es el radio de la tierra; g es la aceleración de gravedad promedio a nivel del mar y la distancia variable r se mide desde el centro de la tierra hasta la partícula y positivo medida hacia el exterior. Encuentre una expresión para la velocidad de escape, mínima velocidad inicial hacia arriba que debe darse a una partícula sobre la superficie de la tierra para que no retorne a la

tierra.(Ind.: $v = 0$ para r =infinito).
Resp:$\sqrt{2gR} = 11180{,}2m/s$

CASO 3:

La aceleración se conoce como función de la velociadad. En este se debe separar variables y resolver el tiempo como función de la velocidad.

Un cuerpo en caída libre tiene una aceleración dirirgida hacia el centro de la tierra igual a $9{,}81m/s^2$, pero si se toma en cuenta la resistencia aerodinámica del aire la aceleración de un cuerpo al caer desde una altura H se puede aproximar por $a = g - cv^2$ donde c es una constante de amortiguación .

1. Si un cuerpo se libera del reposo ¿cuál es su velocidad en función del tiempo?

2. Determine su velocidad en función de la distancia s medida desde el punto en que se libera.

Resolución: ►

1. *Recuerde que* $a(t) = \dfrac{dv}{dt}$, *entonces*

$$\int \frac{dv}{g - cv^2} = \int \frac{dv}{g\left(1 - \left(\sqrt{\frac{c}{g}}v\right)^2\right)} = \int dt$$

Haciendo $u = \sqrt{\dfrac{c}{g}}v \Longrightarrow \sqrt{\frac{g}{c}}du = dv$ *se tiene*

$$\int \frac{\sqrt{\frac{g}{c}}du}{1-u^2} = -\int \frac{\sqrt{\frac{g}{c}}du}{u^2-1} \Longrightarrow -\sqrt{\frac{g}{c}}\int \frac{du}{u^2-1} = -\sqrt{\frac{g}{c}}\left(\int \frac{A}{u-1}du + \frac{B}{u+1}du\right) = \int gdt$$

entonces

$$-\sqrt{\frac{g}{c}}\left(\int \frac{1}{2(u-1)}du - \frac{1}{2(u+1)}du\right) = -\sqrt{\frac{g}{4c}}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right| = \int gdt = gt$$

$$\Longrightarrow \frac{u+1}{u-1} = e^{2t\sqrt{\frac{c}{g^3}}}\cdot K \Longrightarrow \boxed{v(t) = \sqrt{\frac{g}{c}}\left(\frac{1+Ke^{2t\sqrt{\frac{c}{g^3}}}}{Ke^{2t\sqrt{\frac{c}{g^3}}}-1}\right)}$$

2.

◄

En especial los movimientos que oponen los fluidos al movimiento depende de la velocidad v . Así en una cierta lancha que se va moviendo a $6m/s$ falla su motor y se apaga. Debido a la resistencia aerodinámica su aceleración es $a = -0{,}03V^2 m/s^2$. ¿cuál es la velocidad de la lancha 2 segundos después?

Resp: 4,41m/s

La velocidad de un cuerpo está dado por $v^2 = ks$ en donde k es una constante. Si $v = 4m/s$ y $s = 4m$ en $t = 0$. Determine la constante k y la velocidad a los $2s$.

Resp: 20m/s

Ejercicios propuestos

1. La segunda derivada de una función f es $f''(x) = 6(x-1)$. Encuentre la función si su gráfica contiene el punto $(2,1)$ y en ese punto es tangente a la recta de ecuación $3x - y - 5 = 0$ R:$f(x) = (x-1)^3 - 7$.

2. Se lanza verticalmente desde el suelo una pelota, con una velocidad de $96[pie/seg]$. Determine

   a) Tiempo en alcanzar la máxima altura. R: 3 seg.

   b) Altura máxima. R: 144 pies

   c) Tiempo para el cual la velocidad de la pelota es igual a la mitad de la velocidad inicial. R: $\frac{3}{2}$ seg.

   d) Altura de la pelota cuando su velocidad es la mitad de la velocidad inicial. R: 108 pies

2.6.5. Crecimiento y decaimiento exponencial

Observación 2.6.5.
Supongamos que $N = f(t)$ es el tamaño de una población en el instante t. Para una población grande, $f(t)$ (que es un entero) no se ve afectada por el nacimiento o muerte de alguno de sus miembros y, aún cuando esta función $f(t)$ se incrementa o disminuye a saltos, ellos son relativamente pequeños respecto de la población total, por lo que podemos aceptar que f es una función derivable.
Parece natural entonces escribir la razón de cambio $N = f(t)$ respecto del tiempo como

$$\boxed{\frac{dN}{dt} = kN}$$

donde N es la población presente.
Esta ecuación diferencial la resolvemos separando variables

$$\begin{aligned}
\frac{dN}{dt} &= kN \Longrightarrow \frac{dN}{N} = kdt \Big/ \int \\
&\Longrightarrow \int \frac{dN}{N} = \int kdt \\
&\Longrightarrow \ln(N) = kt + C \Big/ e \\
&\Longrightarrow N(t) = Ce^{kt}
\end{aligned}$$

la condición inicial $N(0) = N_0$ nos da $\ln(N_0) = C$, de donde $\ln(N) = kt + \ln(N_0)$. Así

$$\begin{aligned}
\ln(N) - \ln(N_0) &= kt \Longrightarrow \ln\left(\frac{N}{N_0}\right) = kt \\
\frac{N}{N_0} = e^{kt} \Longrightarrow N = \boxed{N_0 e^{kt}}
\end{aligned}$$

- cuando $k > 0$, el crecimiento se llama crecimiento exponencial.
- cuando $k < 0$, se llama decrecimiento exponencial.

Ejemplo 2.6.6.
El número de bacterias en un cultivo que crece con rapidez, se estima que era de 10,000 al mediodia y 40,000 después de 2 horas.
Hacer una estimación de la cantidad de bacterias que habrá después de 5 horas de iniciado el estudio.

Resolución: ►

Supongamos que la ecuación $\dfrac{dN}{dt} = kN$ *es aplicable, de modo que*

$$N(t) = N_0 e^{kt}$$

Entonces, si suponemos $t = 0$ *a mediodía, se tiene* $N(0) = 10000 = N_0$ *y además* $N(2) = 40000$

$$\begin{aligned} N(2) = 40{,}0000 &= 10{,}000e^{k(2)} \Longrightarrow 4 = e^{2k} \Big/ \ln \\ &\Longrightarrow \ln(4) = 2k \Longrightarrow k = \frac{\ln(4)}{2} \\ &\Longrightarrow k = ln\sqrt{4} \Longrightarrow \boxed{k = \ln(2)} \end{aligned}$$

así, $\boxed{y = 10{,}000e^{(\ln 2)t}}$*, y en* $t = 5$*,*

$$y(5) = 10{,}000e^{(\ln 2)5} \Longrightarrow y \approx 320{,}000 \textit{ bacterias.}$$

◄

2.6.6. Ley de enfriamiento de Newton

Observación 2.6.7.
Esta ley establece que la razón en la que un objeto se enfría (o calienta) es proporcional a la diferencia de la temperatura entre el objeto y el medio que lo rodea. Esto es, si un objeto se encuentra a una temperatura inicial T_0 se ubica en un lugar donde la temperatura es T_1 y si $T(t)$ representa la temperatura del objeto en el instante t, entonces la ley de enfriamiento de Newton señala que

$$\boxed{\frac{dT}{dt} = k(T - T_1)}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} &= k(T - T_1) \Longrightarrow \frac{dT}{T - T_1} = kdt \Big/ \int \\ \int \frac{dT}{T - T_1} &= \int kdt \Longrightarrow \ln|T - T_1| = kt + C \Big/ e \\ &\Longrightarrow |T - T_1| = Ce^{kt} \end{aligned}$$

que es una ecuación diferencial de variable separables.

Ejemplo 2.6.8.
Un objeto se retira de un horno que se encuentra a una temperatura de 350°F y se deja enfriar en un lugar que está a 70°F. Si la temperatura del objeto desciende a 250°F en un tiempo de 1 hora, determinar su temperatura después de 3 horas que se retiró del horno.

Resolución: ►
Siguiendo el esquema anterior $T_1 = 70$ *entonces* $|T - 70| = Ce^{kt}$ *Dado que la temperatura inicial es mayor que* 70*, es natural asumir que la temperatura del objeto disminuirá hacia* 70*. Luego,* $T - 70 > 0$ *y el valor absluto es inncesario. Así*

$$T - 70 = e^{kt+C} \Longrightarrow T = 70 + C_1 e^{kt},$$

donde $C_1 = e^C$*, como* $T(0) = 350$*, entonces* $350 = T(0) = 70 + C_1 e^{k\cdot 0} \Longrightarrow \boxed{C_1 = 280}$*. Luego, la solución será*

$$T(t) = 70 + 280e^{kt}$$

el valor de k *se obtiene con la condición inicial en* $t = 1$*,* $T(1) = 250$*. Así*

$$\begin{aligned} 250 = T(1) &= 70 + 280e^{k\cdot 1} \Rightarrow 280e^k = 180 \Longrightarrow e^k = \frac{180}{280} \\ &\Longrightarrow \quad k = \ln\frac{180}{280} \Longrightarrow \boxed{k \approx -0{,}44183} \end{aligned}$$

luego, $T(t) = 70 + 280e^{-0{,}44183t}$*, y así, después de* 3 *horas, la temperatura será*

$$T(3) = 70 + 280e^{-0{,}44183\cdot 3} \approx \boxed{144{,}4°F}$$

◄

Capítulo 3

Integral Definida

3.1. Suma de Riemann

Definición 3.1.1.

1. Dado el intervalo $[a,b] \subset \mathbb{R}$ se define al conjunto $P = \{x_i \in [a,b] \ : \ i = 0,1,\cdots,n\}$ **partición** de $[a,b]$ si satisface que

$$\boxed{a = x_0 \le x_1 \le \cdots \le x_i \le x_{i+1} \le \cdots \le x_n = b}$$

   La partición P determina una división del intervalo $[a,b]$ en n subintervalos $[x_{i-1},x_i]$, $i = 1,\cdots,n$.

2. Se define la **norma** de P, a la expresión

$$\boxed{|P| = \text{máx}\{x_i - x_{i-1} \ : \ i = 1,2,\cdots,n\}}$$

3. Sea $P = \{x_i \ : \ i = 0,1,\cdots,n\}$ y $P' = \{x'_i \ : \ i = 0,1,\cdots,m\}$ dos particiones de $[a,b]$ tales que $P \subset P'$, entonces a la partición P' se le llama **refinamiento** de la partición P.

4. A la longitud de cada intervalo se le denota por

$$\boxed{\Delta x_i = (x_i - x_{i-1}), \ i = 1,\cdots,n.}$$

5. Cuando estas longitudes tienen la misma medida, es decir

$$\boxed{\Delta x_i = (x_i - x_{i-1}) = \frac{b-a}{n}, \ \forall \ i = 1,\cdots,n,}$$

   se dice que la partición es **regular**, y en tal caso

$$\boxed{x_i = a + i\left(\frac{b-a}{n}\right), \ i = 1,\cdots,n.}$$

Definición 3.1.2.

1. Sean $P = \{x_i : \ i = 0, 1, ..., n\}$ y $P' = \{x'_i : \ i = 0, 1, ..., m\}$ dos particiones de $[a, b]$ tales que $P \subset P'$, entonces a la partición P' se le llama **refinamiento** de la partición P.

2. Sea $f : [a, b] \to R$ función, se dice que es **acotada**, si existen $m, M \in R$ tales que

$$m \leq f(x) \leq M, \ \forall \, x \in [a, b],$$

3. Sea $P = \{x_i : \ a = x_0 \leq x_1 \leq, \cdots \leq x_i \leq x_{i+1} \leq \cdots \leq x_n = b\}$ partición de $[a, b]$ se define los números siguientes.

   a) $m_i(f) = \text{ínf}\{f(x) : \ x \in [x_{i-1} - x_i]\}$, es la menor cota inferior del conjunto conformado por las imágenes $f(x)$ correspondiente al intervalo $[x_{i-1}, x_i]$

   b) $M_i(f) = \sup\{f(x) : \ x \in [x_{i-1}, x_i]\}$ es la menor cota superior del conjunto conformado por las imágenes $f(x)$ correspondiente al intervalo $[x_{i-1}, x_i]$

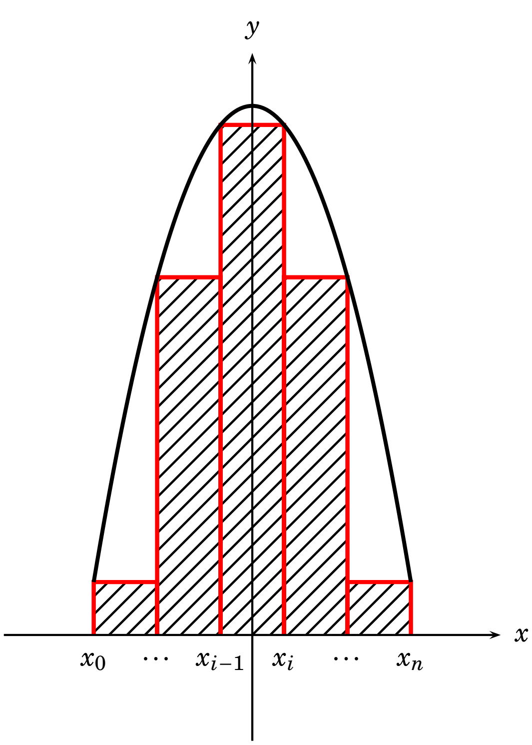
   c) Sea f acotada existen $m_i(f), M_i(f)$ para todo $i = 1, ..., n$ tales que

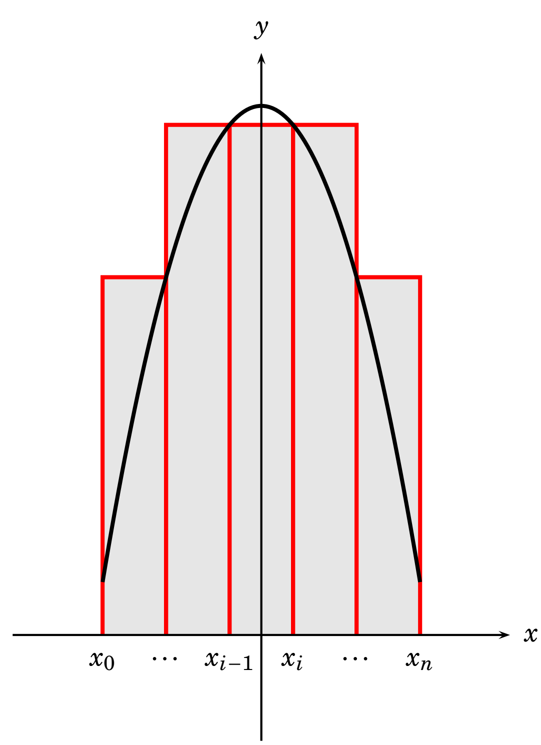
$$m \leq m_i(f) \leq M_i(f) \leq M$$

   . Se define la ***suma inferior*** como $L(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(f)(x_i - x_{i-1})$

   y la **suma superior** como $U(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(f)(x_i - x_{i-1})$.

   d) Ambas sumas se conoce como **sumas de Riemman**

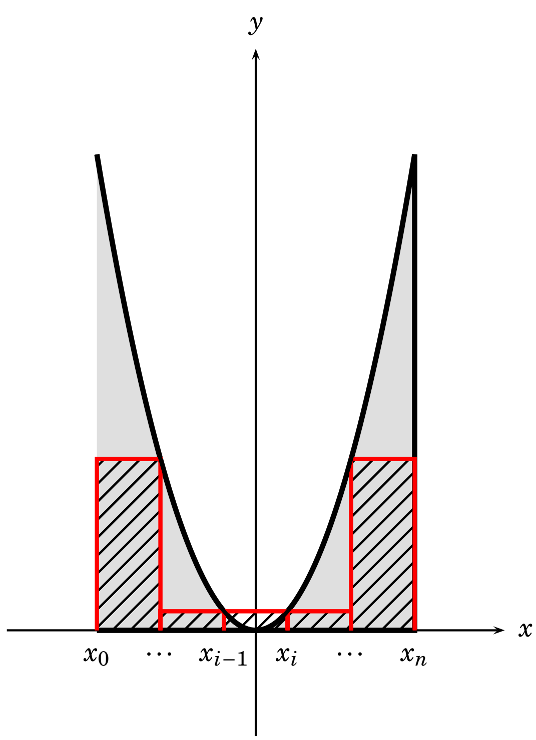


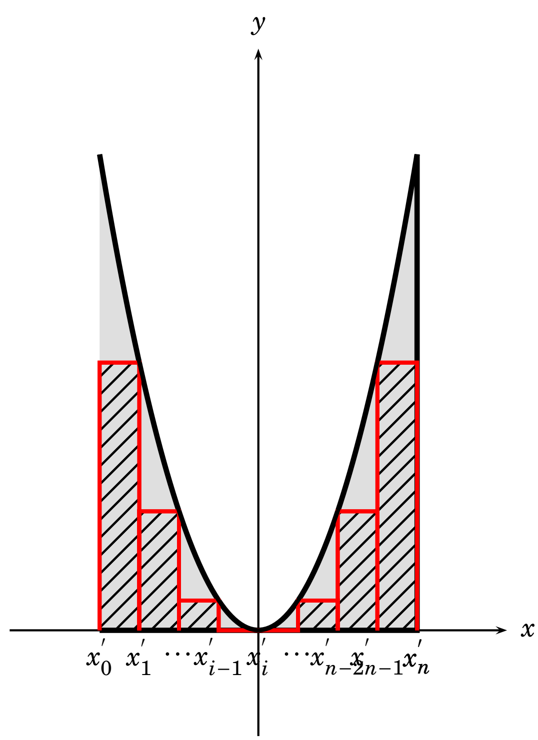


Propiedades 3.1.1. Sea $f:[a,b]\to R$ función acotada

1. entonces
$$m(b-a)\leq L(f.P)\leq U(f,P)\leq M(b-a)$$

2. Si P' es un refinamiento de P, es decir $P\subset P'$ entonces
$$L(f,P)\leq L(f,P')\leq U(f,P')\leq U(f,P)$$
debido a que P' tiene más puntos que P.

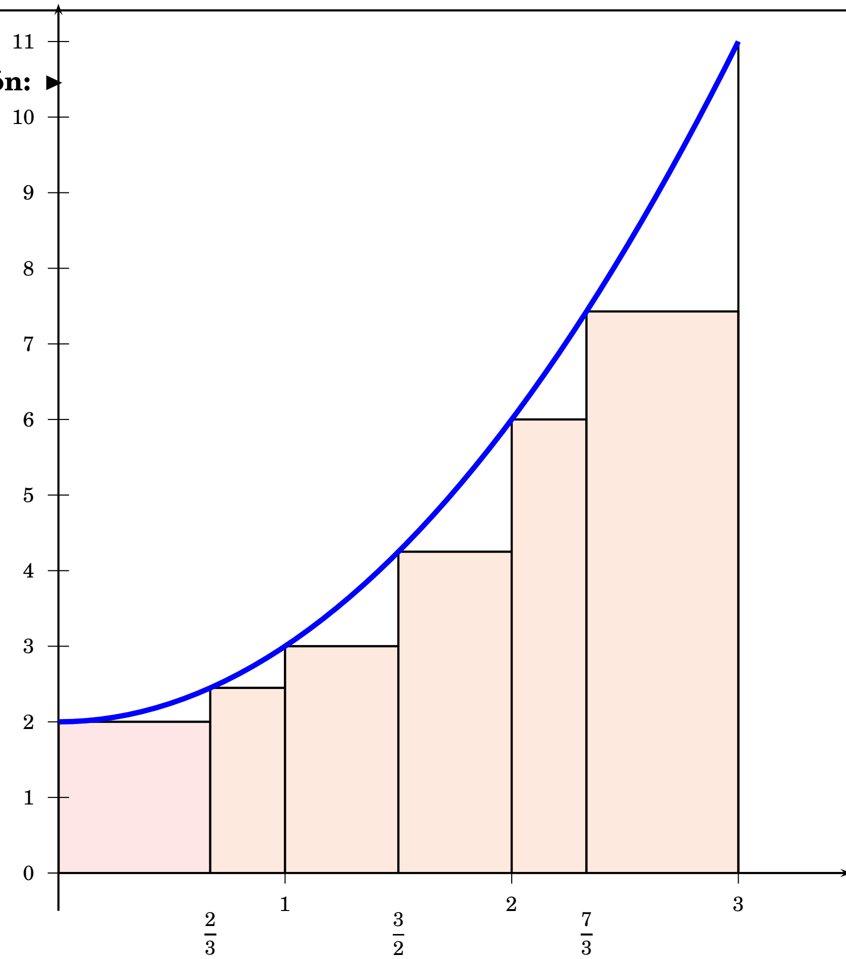




Ejemplo 3.1.2.
Dada la función $f(x)=x^2+2,\ x\in[0,3]$ y la partición $\{0,\ \frac{2}{3},\ 1,\ \frac{3}{2},\ 2,\ \frac{7}{3},\ 3\}$

1. Calcule la suma inferior Riemann.
2. Calcule la suma superior de Riemann.

Resolución: ▶



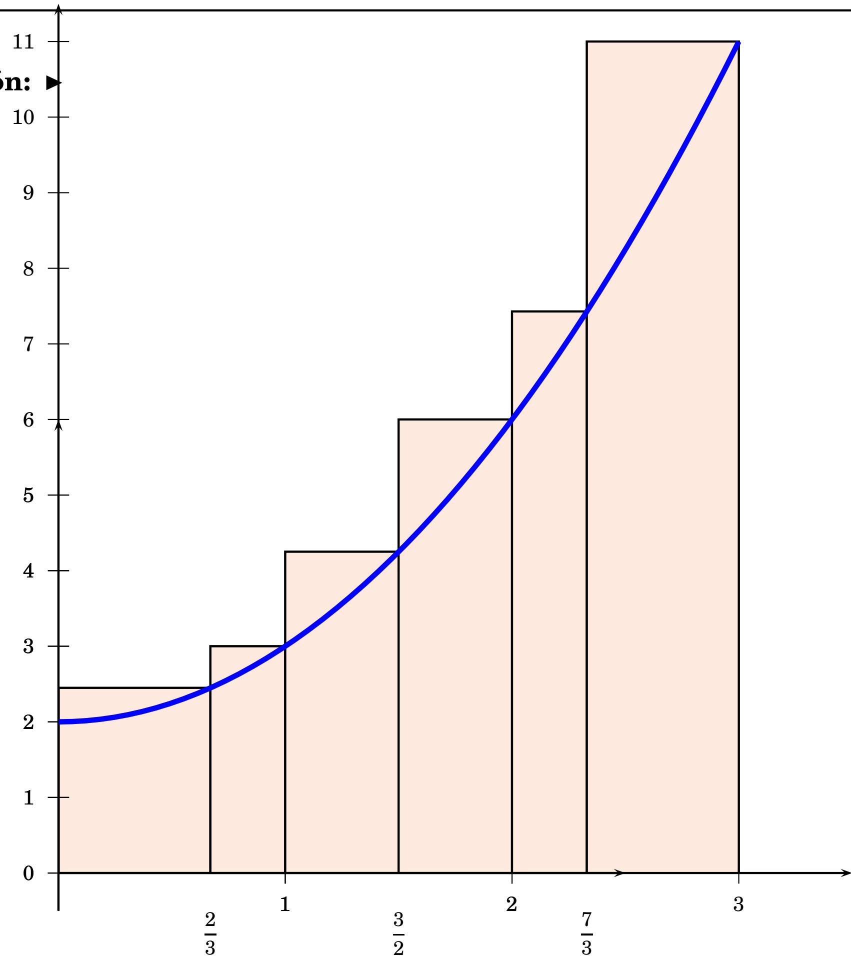
1.

Suma inferior de Riemann *(suma de área de los rectángulos)*

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{6} f(x_i^*)(x_i - x_{i-1}) &= \left(\frac{2}{3}-0\right)\cdot f(0) + \left(1-\frac{2}{3}\right)\cdot f\left(\frac{2}{3}\right) + \left(\frac{3}{2}-1\right)\cdot f(1) + \\
&\quad + \left(2-\frac{3}{2}\right)\cdot f\left(\frac{3}{2}\right) + \left(\frac{7}{3}-2\right)\cdot f(2) + \left(3-\frac{7}{3}\right)\cdot f\left(\frac{7}{3}\right) \\
&= \left(\frac{2}{3}-0\right)\cdot[0^2+2] + \left(1-\frac{2}{3}\right)\cdot\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2+2\right] + \left(\frac{3}{2}-1\right)\cdot[1^2+2] + \\
&\quad + \left(2-\frac{3}{2}\right)\cdot\left[\left(\frac{3}{2}\right)^2+2\right] + \left(\frac{7}{3}-2\right)\cdot[2^2+2] + \left(3-\frac{7}{3}\right)\cdot\left[\left(\frac{7}{3}\right)^2+2\right] \\
&= \frac{4}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{22}{9} + \frac{1}{2}\cdot 3 + \frac{1}{2}\cdot\frac{17}{4} + \frac{1}{3}\cdot 6 + \frac{2}{3}\cdot\frac{67}{9}
\end{aligned}$$

◀

Resolución: ▶



2.

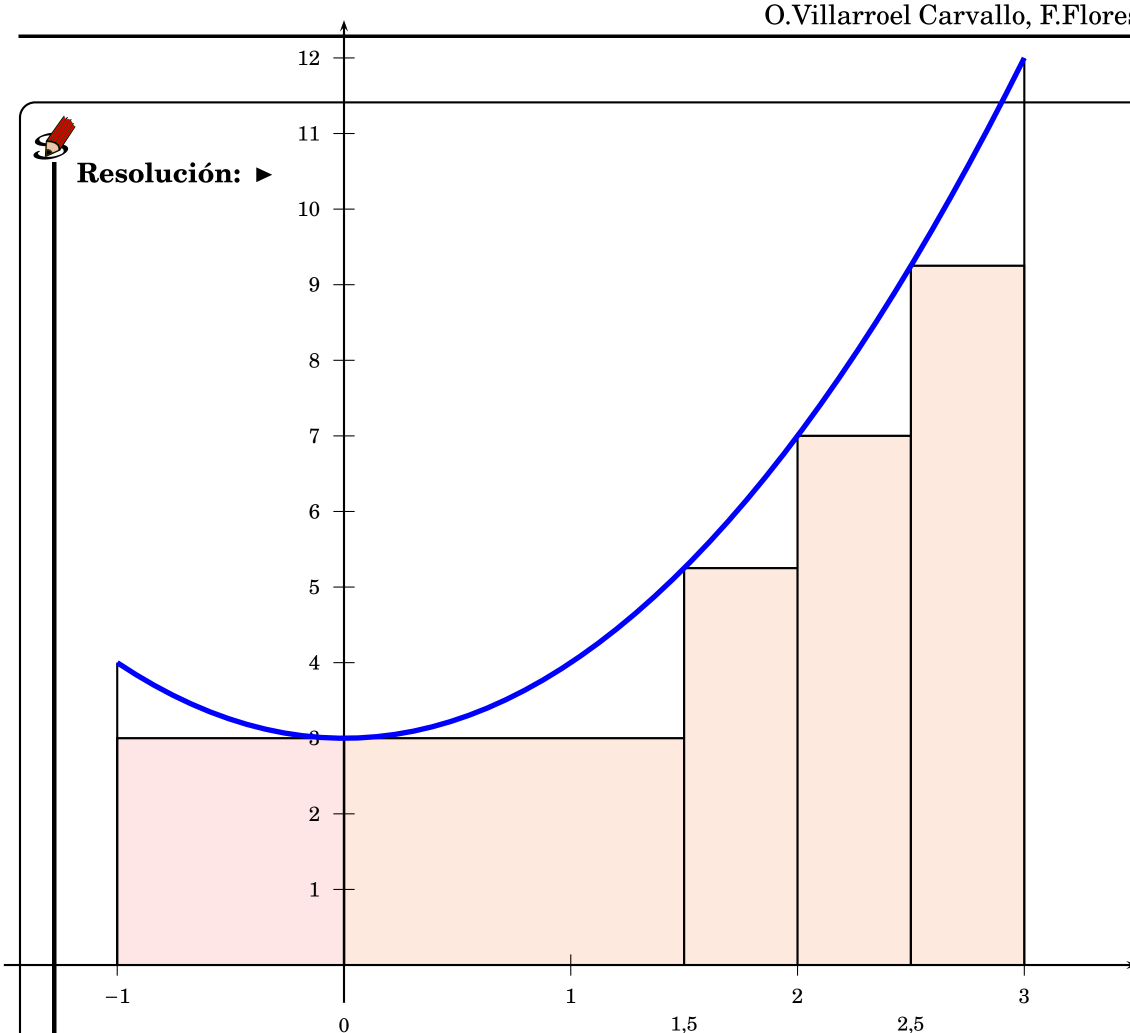
Suma superior de Riemann *(suma de áreas de los rectángulos)*

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{6} f(\overline{x_i})(x_i - x_{i-1}) &= \left(\frac{2}{3}-0\right)\cdot f\left(\frac{2}{3}\right)+\left(1-\frac{2}{3}\right)\cdot f(1)+\left(\frac{3}{2}-1\right)\cdot f\left(\frac{3}{2}\right)+\\
&+\left(2-\frac{3}{2}\right)\cdot f(2)+\left(\frac{7}{3}-2\right)\cdot f\left(\frac{7}{3}\right)+\left(3-\frac{7}{3}\right)\cdot f(3)\\
&= \left(\frac{2}{3}-0\right)\cdot\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2+2\right]+\left(1-\frac{2}{3}\right)\cdot[1^2+2]+\left(\frac{3}{2}-1\right)\cdot\left[\left(\frac{3}{2}\right)^2+2\right]+\\
&+\left(2-\frac{3}{2}\right)\cdot[(2)^2+2]+\left(\frac{7}{3}-2\right)\cdot\left[\left(\frac{7}{3}\right)^2+2\right]+\left(3-\frac{7}{3}\right)\cdot[3^2+2]\\
&= \frac{2}{3}\cdot\frac{22}{9}+\frac{1}{3}\cdot 3+\frac{1}{2}\cdot\frac{17}{4}+\frac{1}{2}\cdot 6+\frac{1}{3}\cdot\frac{67}{9}+\frac{2}{3}\cdot 11
\end{aligned}$$

◀

Ejemplo 3.1.3.
Calcule la suma superior e inferior de Riemann para $f(x) = x^2 + 3$ cuya partición es $\{-1, 0, 1{,}5, 2, 2{,}5, 3\}$

Resolución: ▶



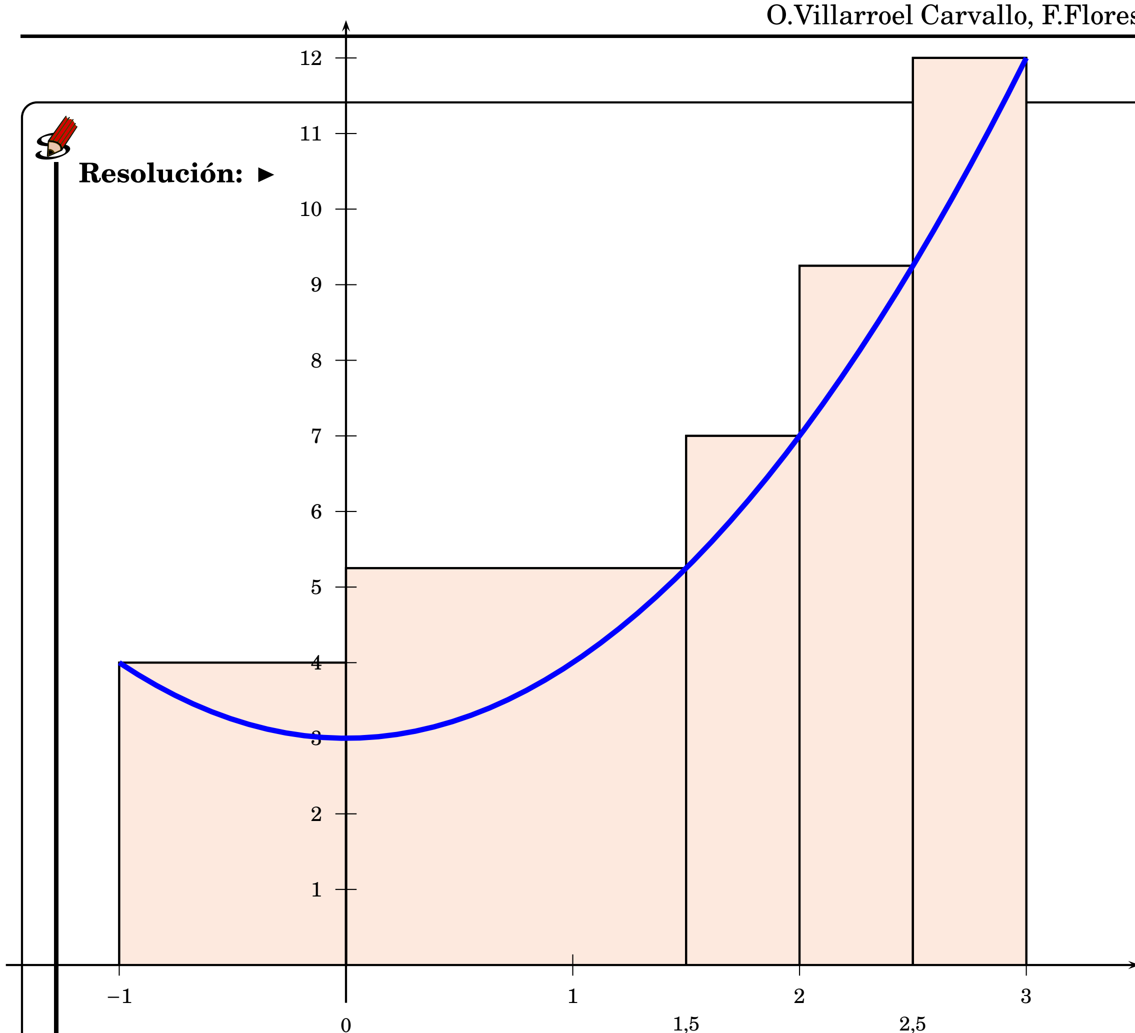
1.

Suma inferior de Riemann *(suma de área de los rectángulos)*

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{5} f(x_i^*)(x_i - x_{i-1}) &= (0-(-1))\cdot f(0) + (1{,}5-0)\cdot f(0) + (2-1{,}5)\cdot f(1{,}5) + (2{,}5-2)\cdot f(2)+\\ &\quad +(3-2{,}5)\cdot f(2{,}5)\\ &= 1\cdot 3 + (1{,}5)\cdot 3 + (0{,}5)\cdot(5{,}25) + (0{,}5)\cdot 7 + (0{,}5)\cdot(9{,}25)\\ &= 3 + 4{,}5 + 21{,}5\cdot(0{,}5) = 7{,}5 + 10{,}75 = \boxed{18{,}25u^2}\end{aligned}$$

◀

Resolución: ►



2.

Suma superior de Riemann *(suma de áreas de los rectángulos)*

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{5} f(\overline{x_i})(x_i - x_{i-1}) &= (0-(-1))\cdot f(-1) + (1{,}5-0)\cdot f(1{,}5) + (2-1{,}5)\cdot f(2) + (2{,}5-2)\cdot f(2{,}5) + \\
&\quad +(3-2{,}5)\cdot f(3) \\
&= 1\cdot 4 + (1{,}5)\cdot 5{,}25 + 0{,}5\cdot 7 + (0{,}5)\cdot 9{,}25 + (0{,}5)\cdot 12 \\
&= 4 + 7{,}875 + 0{,}5\cdot 28{,}25 = 11{,}875 + 14{,}125 = \boxed{26u^2}
\end{aligned}$$

◄

3.2. Integral definida como un límite de sumas

Definición 3.2.1.
La integral definida como un límite de sumas

1. Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ función y $L\in\mathbb{R}$ tal que

$$\boxed{\lim_{|P|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i)(x_i-x_{i-1})=L,}$$

donde $\overline{x}_i$ es un punto arbitrario en $[x_{i-1},x_i]$ para toda partición P de $[a,b]$ entonces a L se llama **límite de la suma de Riemann**

2. Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ función. La integral definida de f desde a hasta b denotada por $\int_a^b f(x)dx$ esta dada por

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx=\lim_{|P|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i)(x_i-x_{i-1})}$$

3. En caso que la partición sea regular se tiene como consecuencia

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i)(x_i-x_{i-1})}$$

Propiedades 3.2.1.

1. $$\boxed{\sum_{i=1}^{n} c\cdot a_i=c\sum_{i=1}^{n} a_i,\ c\text{ constante}}$$

2. $$\boxed{\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)=\sum_{i=1}^{n} a_i+\sum_{i=1}^{n} b_i}$$

3. $$\boxed{\sum_{i=1}^{n}(a_i-b_i)=\sum_{i=1}^{n} a_i-\sum_{i=1}^{n} b_i}$$

4. $$\boxed{\sum_{i=1}^{n}(a_{i+1}-a_i)=\sum_{i=1}^{n} a_{i+1}-a_1}$$

Observación 3.2.2.

1. $$\boxed{\sum_{i=1}^{n} i=\frac{n(n+1)}{2}}$$

2. $$\boxed{\sum_{i=1}^{n} i^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

3. $$\boxed{\sum_{i=1}^{n} i^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}}$$

4. $$\boxed{\sum_{i=1}^{n} i^4=\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1}{30}}$$

Ejemplo 3.2.3.
Hallar el límite dado y luego exprese ese límite como una integral definida.

(a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{i}{n^2}$ (b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{i^3}{n^4}$ (c) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{8i^2}{n^3}$

Resolución: ►

(a)

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i = \lim_{n\to+\infty}\frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\overline{x_i})(x_i - x_{i-1}) = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2} = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}\cdot\frac{1}{n}$$

Como la partición es regular se tiene

$$\left\{\begin{array}{rcl} (x_i - x_{i-1}) & = & \dfrac{1}{n} = \dfrac{b-a}{n} \\ x_i & = & a + i\dfrac{b-a}{n} \\ f(\overline{x_i}) & = & \dfrac{i}{n} \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} b-a & = & 1 \\ a & = & 0 \\ b & = & 1 \\ x_i & = & f(x_i) = \dfrac{i}{n} \end{array}\right\}$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_0^1 x dx = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2}$$

(b)

◄

Definición 3.2.2.

(a) Si $a > b$ entonces

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx}$$

si existen las integrales.

(b) Si $f(a)$ existe, entonces

$$\boxed{\int_a^a f(x)dx = 0}$$

Teorema 3.2.4.

(a) Si $f : [A,B] \to \mathbb{R}$ es integrable y si $[a,b] \subset [A,B]$ entonces f es integrable en $[a,b]$.

(b) Si f es continua en $[a,b]$, entonces f es integrable en $[a,b]$

(c) Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua y si $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [a,b]$ y si $f(x_0) \neq 0$ para algún $x_0 \in [a,b]$ entonces

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx > 0.}$$

(d) Sean f, g continuas en $[a,b]$ y $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in [a,b]$. Si $\exists\ x_0 \in [a,b]$ tal que $f(x_0) < g(x_0)$ entonces

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx < \int_a^b g(x)dx}$$

(e) Sea $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ y g es integrable y si $f(x) = g(x)$ $\forall x$,excepto un número finito de puntos de x en $[a,b]$, entonces f es integrable y

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx.}$$

(f) Si f es una función continua en el intervalo $[a,b]$, tal que alcanza en él un valor máximo absoluto M y un valor mínimo absoluto m. Entonces:

$$\boxed{m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)}$$

Propiedades 3.2.5.

(a) Se tiene

$$\boxed{\int_a^b c\,dx = c(b-a)}$$

(b) Si f es integrable sobre $[a,b]$ y $c \in \mathbb{R}$ constante, entonces cf es integrable sobre $[a,b]$ y

$$\boxed{\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx}$$

(c) Si f, g son integrables sobre $[a,b]$, entonces $(f(x)+g(x))$ es integrable y

$$\boxed{\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx}$$

(d) Si f, g son integrables sobre $[a,b]$, entonces $(f(x)-g(x))$ es integrable y

$$\boxed{\int_a^b [f(x)-g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx}$$

(e) Si $c \in [a,b]$ y f es integrable sobre $[a,b]$, entonces f es integrable sobre $[a,c]$ y sobre $[c,b]$; y se cumple que

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.}$$

(f) Si f y g son integrables sobre $[a,b]$ y si $f(x) \le g(x)$ para cada $x \in [a,b]$, entonces

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx.}$$

Propiedades 3.2.6.

(g) Si f es integrable sobre $[a,b]$, entonces $|f|$ es integrable sobre $[a,b]$ y

$$\boxed{\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx}$$

(h) Si f es integrable sobre $[a,b]$, $\forall\ c \in \mathbb{R}$ entonces

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x-c)dx, \quad \int_a^b f(x)dx = \int_{a-c}^{b-c} f(x+c)dx}$$

(i) Si f es integrable sobre $[a,b]$, $\forall\ c \neq 0$, entonces

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{c}\int_{ac}^{bc} f\left(\frac{x}{c}\right)dx, \quad \int_a^b f(x)dx = c\int_{a/c}^{b/c} f(cx)dx}$$

Teorema 3.2.7.

(a) Sea $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua en I y si $a \in I$, entonces $G(x) = \int_a^x f(t)dt$, es diferenciable en I y se cumple que $G'(x) = f(x)$, $\forall\ x \in I$, es decir

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)dt\right) = f(x), \ \forall\ x \in I}$$

conocida como el **PRIMER TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO**.

(b) Sea $f:\ I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y F la antiderivada de f en I y si $a \in I$ entonces la diferenciación y la integración están relacionadas por

$$\boxed{\int_a^x f(t)dt = \int_a^x F'(t)dt = F(x) - F(a).}$$

conocida como el **SEGUNDO TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO.**

Ejemplo 3.2.8.
Calcular las siguientes integrales

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(x+1)^2}dx$ 2. $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2}dx$ 3. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}(x)dx$ 4. $\displaystyle\int_0^1 x^3 dx$

Resolución: ▶

1. *Haciendo el cambio de variable* $u = x+1$, *se genera las ecuaciones*

$$\left\{\begin{array}{ccc} u & = & x+1 \\ du & = & dx \end{array}\right\} \quad \textit{reemplazando estas ecuaciones en la integral obtenemos}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{(x+1)^2}dx &= \int_a^b \frac{1}{u^2}du = \int_a^b u^{-2}du && \textit{al hacer el cambio de variable los} \\ &= \frac{u^{-1}}{-1}\Big|_a^b = -\frac{1}{u}\Big|_a^b && \textit{los límites de integración cambian por a y b} \\ &= \left(-\frac{1}{x+1}\right)\Big|_0^1 = -\left(\frac{1}{1+1}\right) - \left(-\frac{1}{0+1}\right) \Longrightarrow \boxed{\int_0^1 \frac{1}{(x+1)^2}dx = \frac{1}{2}} \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2}dx &= arctan(x)\Big|_1^{\sqrt{3}} = arctan(\sqrt{3}) - arctan(1) = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \\ &\Longrightarrow \boxed{\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{12}} \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}(x)dx &= -\cos(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\cos(\frac{\pi}{2}) - (-\cos(0)) = 0+1 \\ &\Longrightarrow \boxed{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}(x)dx = 1} \end{aligned}$$

4. *Recordar que* $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ *entonces*

$$\int_0^1 x^3 dx = \frac{x^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{0}{4} \Longrightarrow \boxed{\int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}}$$

◀

Observación 3.2.9.
Cuando utilizamos técnicas de integración en el cálculo de las integrales definidas, los límites de integración cambian y lo denoto por las letras a y b, que no las cálculo, si no más bien las mantengo hasta encontrar la antiderivada de la función y alli las vuelvo a cambiar por los valores de los límites iniciales.

Ejemplo 3.2.10.
Calcular las siguientes integrales

1. $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}dx$
2. $\displaystyle\int_{-3}^1 x\sqrt{1-x}dx$
3. $\displaystyle\int_0^{\sqrt[5]{2}} \frac{x^9}{(1+x^5)^3}dx$

Resolución: ►

1. *Haciendo el cambio* $u=\sqrt{x}$ *genero las ecuaciones*

$$\left\{\begin{array}{rcl} u & = & \sqrt{x} \\ x & = & u^2 \\ dx & = & 2udu \end{array}\right\} \quad \textit{las que utilizo en la integral, obteniendo}$$

$$\begin{aligned}
\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}dx &= \int_a^b \frac{2\cancel{u}}{\cancel{u}(1+u^2)}du = \int_a^b \frac{2}{1+u^2}du = 2arctan(u)\Big|_a^b = 2arctan(\sqrt{x})\Big|_1^3 \\
&= 2\left(arctan(\sqrt{3})-arctan(1)\right) = 2\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) = 2\frac{\pi}{12} \\
&\Longrightarrow \boxed{\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}dx = \frac{\pi}{6}}
\end{aligned}$$

2. *Haciendo el cambio* $u=\sqrt{1-x}$ *genero las ecuaciones*

$$\left\{\begin{array}{rcl} u & = & \sqrt{1-x} \\ x & = & 1-u^2 \\ dx & = & -2udu \end{array}\right\} \quad \textit{las que utilizo en la integral, obteniendo}$$

$$\begin{aligned}
\int_{-3}^1 x\sqrt{1-x}dx &= \int_a^b (1-u^2)u(-2udu) = \int_a^b 2u^2(-1+u^2)du = \int_a^b (2u^4-2u^2)du \\
&= \int_a^b 2u^4du - \int_a^b 2u^2du = \left(\frac{2u^5}{5}-\frac{2u^3}{3}\right)\Bigg|_a^b = \left(\frac{2(\sqrt{1-x})^5}{5}-\frac{2(\sqrt{1-x})^3}{3}\right)\Bigg|_{-3}^1 \\
&= \left(\frac{2(\cancel{\sqrt{1-1}})^5}{5}-\frac{2(\cancel{\sqrt{1-1}})^3}{3}\right)-\left(\frac{2(\sqrt{1-(-3)})^5}{5}-\frac{2(\sqrt{1-(-3)})^3}{3}\right) \\
&= 0-\left(\frac{2^5\cdot 2}{5}-\frac{2\cdot 2^3}{3}\right) = \frac{16}{3}-\frac{64}{5} \Longrightarrow \boxed{\int_{-3}^1 x\sqrt{1-x}dx = -\frac{112}{15}}
\end{aligned}$$

3. *Haciendo el cambio* $u=x^5+1$ *genero las ecuaciones*

$$\left\{\begin{array}{rcl} u & = & x^5+1 \\ x^5 & = & u-1 \\ \dfrac{du}{5} & = & x^4dx \end{array}\right\} \quad \textit{las que utilizo en la integral, obteniendo}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{\sqrt[5]{2}} \frac{x^9}{(1+x^5)^3}dx &= \int_0^{\sqrt[5]{2}} \frac{x^5x^4}{(1+x^5)^3}dx = \int_a^b \frac{x^5}{5u^3}du = \int_a^b \frac{u-1}{5u^3}du = \int_a^b \frac{u^{-2}}{5}du \\
&= \int \frac{u^{-3}}{5}du = \left(\frac{-u^{-1}}{5}+\frac{u^{-2}}{10}\right)\Bigg|_a^b = \left(-\frac{1}{5(x^5+1)}+\frac{1}{10(x^5+1)^2}\right)\Bigg|_0^{\sqrt[5]{2}} \\
&= -\frac{1}{15}+\frac{1}{90}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10} = -\frac{5}{90}+\frac{1}{10} = \frac{4}{90} \Longrightarrow \boxed{\int_0^{\sqrt[5]{2}} \frac{x^9}{(1+x^5)^3}dx = \frac{2}{45}}
\end{aligned}$$

◄

3.2.1. Ejercicios Propuestos

Ejercicio 3.2.11. Calcular las siguientes integrales

1. $\displaystyle\int_{-1}^{1}(5x^4-4x^3)dx$
2. $\displaystyle\int_{2}^{3}(3x^2-4x+2)dx$
3. $\displaystyle\int_{-2}^{-4}(x+4)^9dx$
4. $\displaystyle\int_{0}^{2}|(x-1)(3x-1)|dx$
5. $\displaystyle\int_{-1}^{1}\sqrt{|x|-x}\,dx$
6. $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(\mathrm{sen}(x)-\cos(x))dx$
7. $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}|\,\mathrm{sen}(x)-\cos(x)|dx$

Ejercicio 3.2.12. Hallar un polinomio cuadrático $P(x)$ para el cual

$$p(0)=p(1)=0,\ \text{ y } \int_0^1 p(x)dx=1$$

Ejercicio 3.2.13. Hallar un polinomio cúbico $P(x)$ para el cual

$$p(0)=p(-2)=0,\ p(1)=15\ \text{ y }\ 3\int_{-2}^{0}p(x)dx=4$$

Propiedades 3.2.14.

1. Si f es continua en $\mathbb{R}$ y g es diferenciable en $\mathbb{R}$, entonces

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(\int_a^{g(x)} f(t)\,dt\right) = f(g(x))g'(x)}$$

2. Si f es continua en $\mathbb{R}$ y $g,\ h$ son diferenciables en $\mathbb{R}$, se tiene

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(t)\,dt\right) = f(h(x))h'(x) - f(g(x))g'(x)}$$

3. Si f y g' son funciones continuas en $\mathbb{R}$ y g diferenciable en $\mathbb{R}$ entonces

$$\boxed{\int_a^x f[g(t)]g'(t)\,dt = \int_{g(a)}^{g(x)} f(u)\,du\ , x \in \mathbb{R}}$$

4. Si f es continua sobre un intervalo I, entonces para cada $t \in I$ se cumple
   - $\boxed{\int_{-t}^{0} f(x)\,dx = \int_0^t f(-x)\,dx}$
   - $\boxed{\int_{-t}^{t} f(x)\,dx = \int_0^t [f(x) + f(-x)]\,dx}$

5. Si f es continua sobre un intervalo I, entonces para cada $t \in I$ y además si f es una función impar se tiene

$$\boxed{\int_{-t}^{t} f(x) = 0.}$$

6. Si f es continua sobre un intervalo I, entonces para cada $t \in I$ y además si f es par, se tiene

$$\boxed{\int_{-t}^{t} f(x) = 2\int_0^t f(x)\,dx}$$

Definición 3.2.3. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrable , entonces se define ***media o valor promedio*** de f sobre $[a,b]$ al número

$$\boxed{\bar{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.}$$

Teorema 3.2.15. Sea f continua en $[a,b]$ entonces existe $c \in]a,b[$ tal que

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = f(c)\cdot(b-a)}$$

Ejemplo 3.2.16.
Sea f continua en $\mathbb{R}$ que satisface

$$\int_0^x f(t)dt = x\,\mathrm{sen}(2x) - 3\cos(2x), \quad \forall\ x \in \mathbb{R}$$

Calcule $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$

Resolución: ►
Aplicando el primer teorema fundamental del cálculo

$$\begin{array}{rcl}
\dfrac{d}{dx}\left(\displaystyle\int_0^x f(t)dt\right) & = & \dfrac{d}{dx}(x\,\mathrm{sen}(2x) - 3\cos(2x)) \\
f(x) & = & \mathrm{sen}(2x) + 2x\cos(2x) + 6\,\mathrm{sen}(2x) = 7\,\mathrm{sen}(2x) + 2x\cos(2x) \\
& \Longrightarrow & f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 7\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{\pi}{2}\right) + 2\dfrac{\pi}{4}\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) \\
& \Longrightarrow & f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 7(1) + \dfrac{\pi}{2}(0) \\
& \Longrightarrow & \boxed{f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 7}
\end{array}$$

◄

Ejemplo 3.2.17.
Sea f diferenciable en $\mathbb{R}$ tal que $f(1) = f(-1) = f'(1) = 1$. Se define las funciones

- $H(x) = \sqrt[3]{x^3+7} + \displaystyle\int_{-f(x)}^{f(x)} f(t)dt$
- $G(x) = \displaystyle\int_7^x H(u)du$

Hallar $G''(x)$ para $x = 1$

Resolución: ►

Cálculo de $G'(x)$

$$G'(x) = H(x) = \sqrt[3]{x^3+7} + \int_{-f(x)}^{f(x)} f(t)dt$$

Cálculo de $G''(x)$

$$\begin{aligned}
G''(x) &= H'(x) = \frac{1}{3}(7+x^3)^{-\frac{2}{3}}(3x^2) + \left(\int_{-f(x)}^{f(x)} f(t)dt\right)' \\
&= \frac{x^2}{\sqrt[3]{(7+x^3)^2}} + f(f(x)\cdot f'(x) - f(-f(x))\cdot(-f'(x)) \\
&\Longrightarrow G''(1) = \frac{1}{4} + f(f(1))\cdot f'(1) + f(-f(1))\cdot f'(1) \\
&\Longrightarrow G''(1) = \frac{1}{4} + f(1)\cdot 1 + f(1)\cdot 1 = \frac{1}{4} + 2 \\
&\Longrightarrow \boxed{G''(1) = \frac{9}{4}}
\end{aligned}$$

◄

Ejemplo 3.2.18.
Sea $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = 3 + \int_0^x \left(\frac{1+\text{sen}(t)}{2+t^2}\right) dt$$

Sin calcular la integral, hallar un polinomio cuadrático $p(x) = a + bx + cx^2$ tal que
$p(0) = f(0),\ p'(0) = f'(0),\ p''(0) = f''(0)$

Resolución: ►

Cálculo $f(0)$

$$\begin{aligned} f(0) &= 3+\int_0^0 \frac{1+\operatorname{sen}(t)}{2+t^2}dt = 3+0 \\ &\Longrightarrow \boxed{f(0)=3} \end{aligned}$$

Cálculo de $f'(0)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(3+\int_0^x \frac{1+\operatorname{sen}(t)}{2+t^2}dt\right)' = 0+\left(\int_0^x \frac{1+\operatorname{sen}(t)}{2+t^2}dt\right)' \\ &= \frac{1+\operatorname{sen}(x)}{2+x^2} \Longrightarrow \boxed{f'(0)=\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Cálculo de $f''(0)$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\frac{1+\operatorname{sen}(x)}{2+x^2}\right)' = \frac{(x^2+2)\cos(x)-2x(1+\operatorname{sen}(x))}{(x^2+2)^2} \\ &\Longrightarrow \boxed{f''(0)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\left\{\begin{array}{ccc} p(x) &=& a+bx+cx^2 \\ p'(x) &=& b+2cx \\ p''(x) &=& 2c \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} p(0) &=& a=f(0)=3 \\ p'(0) &=& b=f'(0)=\frac{1}{2} \\ p''(0) &=& 2c=\frac{1}{2} \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} a &=& 3 \\ b &=& \frac{1}{2} \\ c &=& \frac{1}{4} \end{array}\right\}$$

Concluyendo que $\boxed{p(x)=3+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x^2}$

◄

Ejemplo 3.2.19.
Calcule el valor promedio para cada función luego determine el valor de c que satisface el Teorema del valor medio para integrales.

1. $f(x)=x^2,\ x\in[-1,4]$
2. $f(x)=\operatorname{sen}^2(x),\ x\in[0,2\pi]$

Resolución: ►

1. **Cálculo del valor promedio**

$$VP = \frac{1}{4-(-1)}\int_{-1}^{4} x^2 dx = \frac{1}{5}\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{4} = \frac{1}{5}\left(\frac{4^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3}\right) = \frac{1}{5}\left(\frac{64}{3}+\frac{1}{3}\right) = \frac{65}{15}$$

$$\Longrightarrow \boxed{VP = \frac{13}{3}}$$

Cálculo del valor(es) c

$$\frac{13}{3} = f(c) = c^2 \Longrightarrow \boxed{c = \pm\sqrt{\frac{13}{3}}}$$

$$Elegimos\ c = \sqrt{\frac{13}{3}} \in [-1,4],\ pues\ c = -\sqrt{\frac{13}{3}} \notin [-1,4]$$

2. *Rpta:* $\frac{1}{2}$, $c = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$

◄

3.3. Ejercicios Propuestos

Ejercicio 3.3.1. Hallar las derivadas indicadas

1. $\frac{d}{dx}\left(\int_x^5 \sqrt{1+t^4}dt + \int_1^{x^2} \sqrt{1+t^4}dt\right)$

2. $\frac{d}{dx}\left(\int_{1+x^2}^{\tan(x)} \frac{\text{sen}(t)}{t}dt\right)$

Ejercicio 3.3.2. Sea f una función derivable tal que $f(0) = f'(0) = 10$ se definen funciones

$$g(x) = \int_0^x f(u)du, \quad h(x) = \int_{-g(x)}^{g(x)} f(t)dt$$

Halle $(h(x))''$ para $x = 0$

Ejercicio 3.3.3. Si f es continua y $x^4 = \int_0^x (f(t))^3 dt + 17x$, hallar $f(-3)$

Ejercicio 3.3.4. Calcular $f(2)$ si f es continua y satisface $\forall\ x \geq 0$ la ecuación dada

1. $\int_0^x f(t)dt = x^2(1+x)$

2. $\int_0^{x^2} f(t)dt = x^2(1+x)$

3. $\int_0^{f(x)} t^2 dt = x^2(1+x)$

4. $\int_0^{x^2(1+x) f(t) dt = x}$

Ejercicio 3.3.5. Evaluar las siguiente integrales

1. $\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \text{sen}^3(x)dx$

2. $\int_{-a}^{a} x^3 \cos^3(x)dx$

3. $\int_{-1}^{1} x^3 dx$

4. $\int_{-2}^{2} (1-x)(1+x)dx$

Ejercicio 3.3.6. Calcule el valor promedio para cada función luego determine el valor de c que satisface el Teorema del valor medio para integrales.

1. $f(x) = x(1+x^2)^4,\ x \in [-1,1]$
2. $f(x) = x^2 + x^3,\ x \in [0,1]$
3. $f(x) = \operatorname{sen}(x)\cos(x),\quad x \in [0, \frac{\pi}{4}]$
4. $f(x) = \cos^2(x),\quad x \in [0, \pi]$

3.4. Aplicaciones de la Integral definida

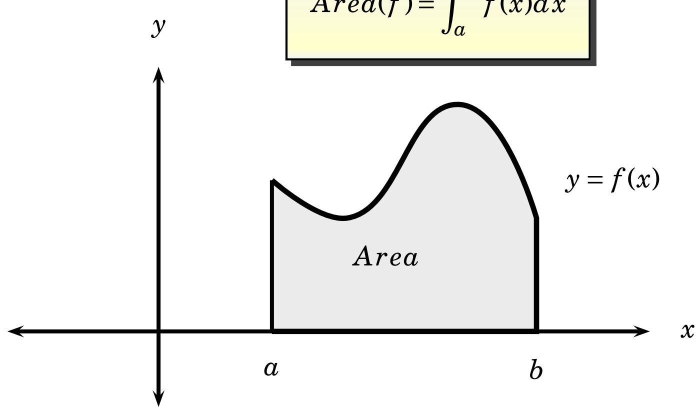
Para el cálculo de áreas y volúmenes, utilizaremos dos hechos básicos estudiados, suma de Riemann y el teorema fundamental del cálculo.

3.4.1. Cálculo de Áreas

Definición 3.4.1.

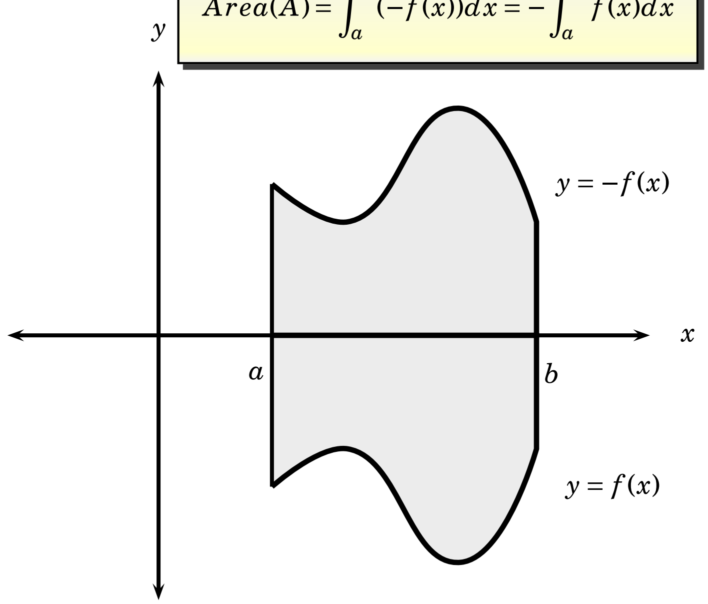
1. Si $f \geq 0$ y es integrable en $[a,b]$, entonces el área bajo la gráfica de f desde a hasta b se define como

$$Area(f) = \int_a^b f(x)dx$$



2. Si la función es negativa, es decir $f \leq 0$ entonces el área de la región A acotada por la función f el eje x y las rectas verticales $x = a,\ x = b$ es igual al área de A simétrica con respecto al eje X, acotada por la gráfica de $-f$ el eje x y las rectas verticales $x = a,\ x = b$ debido a que $-f$ es una función no negativa $-f \geq 0$.

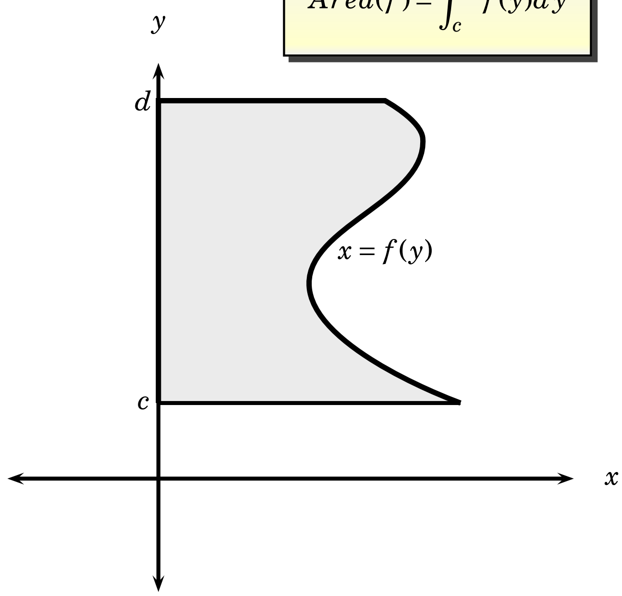
$$Area(A) = \int_a^b (-f(x))dx = -\int_a^b f(x)dx$$



Definición 3.4.2.

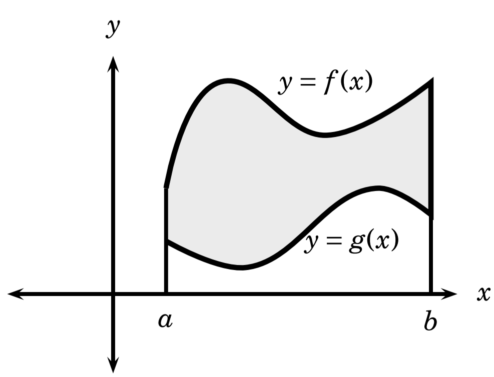
3. Si la región R está limitada por la curva $x = f(y)$ y las rectas $y = c,\ y = d$, entonces el área de la región R esta dada por

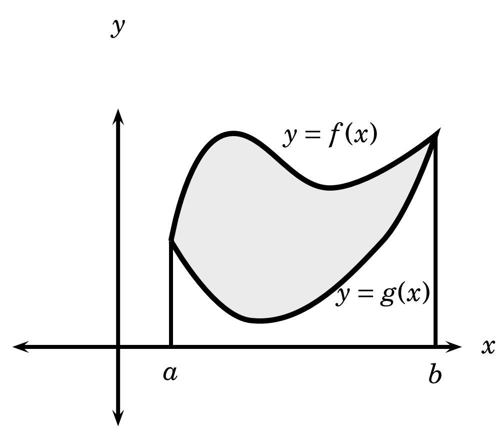
$$Area(f) = \int_c^d f(y)dy$$



4. Si queremos calcular el área de una región R encerrada por las gráficas de dos funciones f y g continuas tal que $\forall\ x \in [a,b]:\ g(x) \le f(x)$ limitadas por las rectas $x = a$ y $x = b$ es

$$Area(f) = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

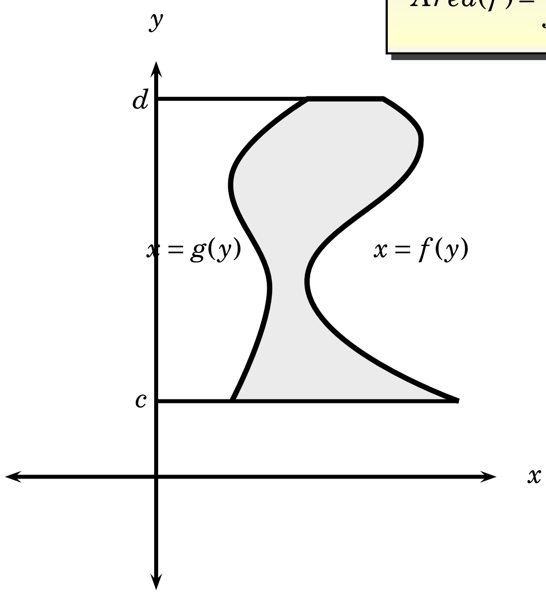


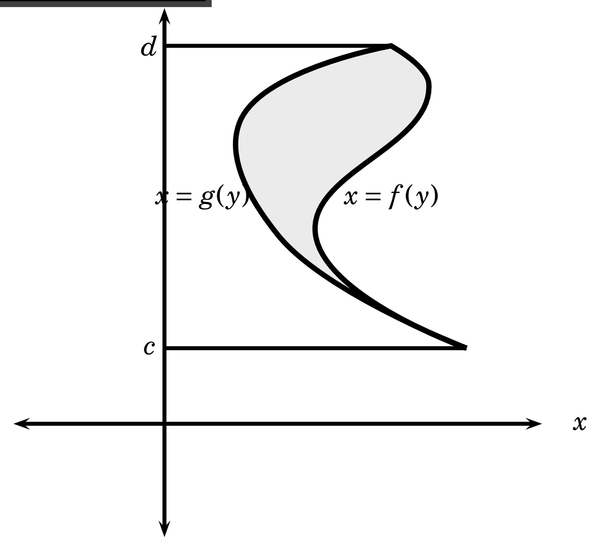


Definición 3.4.3.

5. Si queremos calcular el área de una región R encerrada por las gráficas de dos funciones $x = f(y)$ y $x = g(y)$ continuas tal que $\forall\ x \in [a,b]:\ g(y) \leq f(y)$ limitadas por las rectas $y = c$ y $y = d$ es

$$Area(f) = \int_c^d [f(y) - g(y)]dy$$

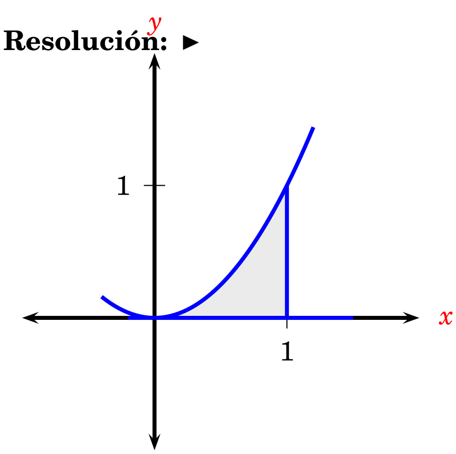




Ejemplo 3.4.1.
Dada la región R generada por la función $y = f(x) = x^2$ y la recta $x = 1$ y el eje X

1. Dibuje la región R.
2. Calcule el área de la región R.

Resolución: ►



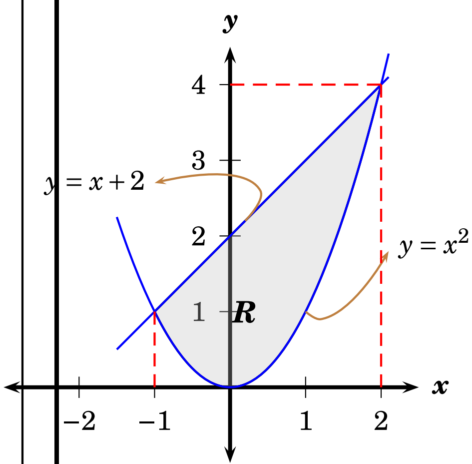
El área es aquella que esta por debajo de la gráfica de f y por encima del eje X positivo y a la izquierda de la recta $x = 1$

$$\begin{aligned} Area(R) &= \int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \left(\frac{1}{3} - \frac{0}{3}\right) u^2 \\ &= \boxed{\frac{1}{3}\, u^2} \end{aligned}$$

◄

Ejemplo 3.4.2.
Obtenga el área de la región R encerrada por las curvas de ecuaciones :$y = x^2, \quad y = x + 2$.

Resolución: ►



Puntos de intersección entre ambas curvas

Se resuelve el sistema $\left\{\begin{array}{rcl} y & = & x^2 \\ y & = & x+2 \end{array}\right\}$ *de donde*

$x^2 - x - 2 = 0 \Longrightarrow (x+1)(x-2) = 0 \Longrightarrow \boxed{x = 2,\ x = -1}$

Para $x = 2 \Longrightarrow y = 4$

Para $x = -1 \Longrightarrow y = 1$

Los puntos de intersección son $\boxed{(-1,1),\ (2,4)}$.

Cálculo del área ,*Note que* $x+2 \geq x^2,\ \forall x \in [-1,2]$. *Entonces el área es*

$$\begin{aligned} Area(R) &= \int_{-1}^{2}(x+2-x^2)dx = \left(\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{2} \\ &= \boxed{\frac{9}{2}u^2} \end{aligned}$$

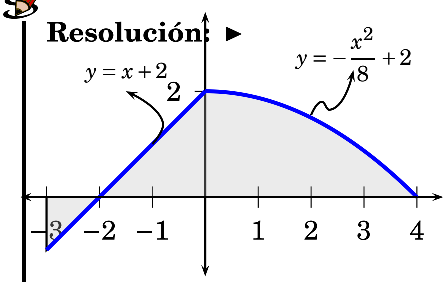
◄

Ejemplo 3.4.3.
Sea la función f cuya regla de correspondencia es

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) = x+2 & ; \quad x \in [-3,0] \\ f_2(x) = -\dfrac{x^2}{8} + 2 & ; \quad x \in]0,4]. \end{cases}$$

Calcule el área de la región limitada por la gráfica de $y = f(x)$ y el eje x.

Resolución: ▶



Puntos de intersección de $y = f_1$ **y** $y = f_2$ *se resuelve*

$$\left\{\begin{array}{lcl} y & = & x+2 \\ y & = & -\frac{x^2}{8}+2 \end{array}\right\} \Longrightarrow x(x+8)=0 \Longrightarrow x=0,\; x=-8 \notin [-3,4]$$

. Para $x = 0$, $y = 2$*. Luego* $(0,2)$ *es el único punto de intersección.*

Cálculo del área *, el área según el gráfico es:*

A_1 *: es el área encerrada por* f_1*, el eje* x *y* $x = -3$
A_2 *: es el área encerrada por* f_1*, y el eje* x *y* $x = 0$
A_3 *: es el área encerrada por* f_2*, el eje* x *y* $x = 0$

$$\begin{aligned}
A_1 + A_2 + A_3 &= \int_{-3}^{-2} [0-(x+2)]dx + \int_{-2}^{0} [x+2-0]dx + \int_{0}^{4} \left[-\frac{x^2}{8}+2\right] dx \\
&= \left(-\frac{x^2}{2} - 2x\right)\Big|_{-3}^{-2} + \left(\frac{x^2}{2} + 2x\right)\Big|_{-2}^{0} + + \left(-\frac{x^3}{24} + 2x\right)\Big|_{0}^{4} \\
&= -\frac{(-2)^2}{2} - 2(-2) + \frac{(-3)^2}{2} + 2(-3) - \frac{(-2)^2}{2} - 2(-2) - \frac{(4)^3}{24} + 2(4) \\
&= -2 + 4 + \frac{9}{2} - 6 - 2 + 4 - \frac{8}{3} + 8 = 6 + \frac{11}{6} \\
&\Longrightarrow \boxed{\frac{47}{6} u^2}
\end{aligned}$$

◀

3.4.2. Problemas Propuestos

Problema 3.4.1. Calcular el área de la región limitada por la gráfica de $f(x) = 3 + 2x - x^2$, la recta $x = 5$ y el eje x.

Problema 3.4.2. Calcule el área de la región limitada por la gráfica de $y = f(x)$ el eje x, las rectas $x = 1; x = 8$, donde

$$f(x) = \left\{\begin{array}{ll} x^2; & x \le 3 \\ 6x - x^2; & x > 3 \end{array}\right.$$

Problema 3.4.3. Calcule el área de la región limitada por f el eje x y las rectas $x = -5$; y $x = 3$

$$f(x) = \left\{\begin{array}{ll} \frac{x^2}{9} - 1; & x < 0 \\ -2x^2 - 1; & x \ge 0 \end{array}\right.$$

Problema 3.4.4. 1. Calcular la región encerrada por las curvas

$$(y-4)^2 = 4-4x\,; \quad y+2x = 2.$$

2. Hallar el área de la región limitada por la gráfica de las funciones

$$f(x) = 6+2x-\frac{x^2}{4}\,; \quad g(x) = \begin{cases} \frac{5}{2}x-14; & x \leq 6 \\ 13-2x; & x > 6 \end{cases}$$

3. Hallar el área de la región encerrada por las gráficas de $y = 10x - x^2$ y $y = 3x - 8$.
4. Hallar el área de la región encerrada por la gráfica de la curva $y = x^2 - 8x + 10$, el eje x y las rectas $x = 2$ y $x = 5$
5. Calcular el área encerrada por las curvas $y = \operatorname{sen} x$, $y = \cos x$ entre $x = 0$ y $x = \pi$
6. Hallar el área encerrada por las curvas $8y = x^3$ y $8y = 2x^3 + x^2 - 2x$.
7. Calcular el área encerrada por las curvas $y^2 = x$ y $y = 3x - 10$.
8. Calcular el área encerrada por el eje x y las curvas $y = \operatorname{arcsen} x$, $y = \arccos x$.
9. Calcule el área de la región acotada por las curvas $y^2 = ax$, $ay = x^2$, $y^2 = -ax$, $y = -x^2$, $a > 0$
10. Calcule el área de la región acotada por las curvas $y = \cos x$, $y = 1 - \frac{2x}{\pi}$
11. Hallar el área encerrada por la elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$
12. Hallar el área de la egión situada entre la rama derecha de la hipérbola $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ y la recta vertical $x = 2a$.
13. Hallar el área de la región limitada por las curvas $xy = 9$ y $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 4$
14. Hallar el área dentro de la curva $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$
15. Calcular el área de la región limitada por $(y-x-2)^2 = 9x$ y por uno ó ambos de los ejes coordenados.
16. Calcular el área de la región acotada por las dos ramas de la curva $(y-x)^2 = x^5$ y por la recta $x = 4$.
17. Hallar el área de la región comprendida entre la curva $y = 2x^3 - 3x^2$ y la recta tangente a esta curva y que pasa por el origen.

Problema 3.4.5. 1. Hallar el área de la regón limitada por las curvas:

a) $y = x^2, \quad y = 2x + 3$

b) $y = \sqrt{4-4x}, \quad y = \sqrt{4-x}$ y el eje x.

c) $y = \operatorname{sen} x, \quad \cos x$ y el eje y, en el primer cuadrante.

d) $x = y^2, \quad x = -2y^2 + 3$

e) $y^2 = 2x + 1, \quad x - y - 1 = 0$

f) $y = \operatorname{sen}(2x), \quad y = \operatorname{sen} x, \ x = 0, \ x = \pi.$

3.4.3. Cálculo de Volúmenes

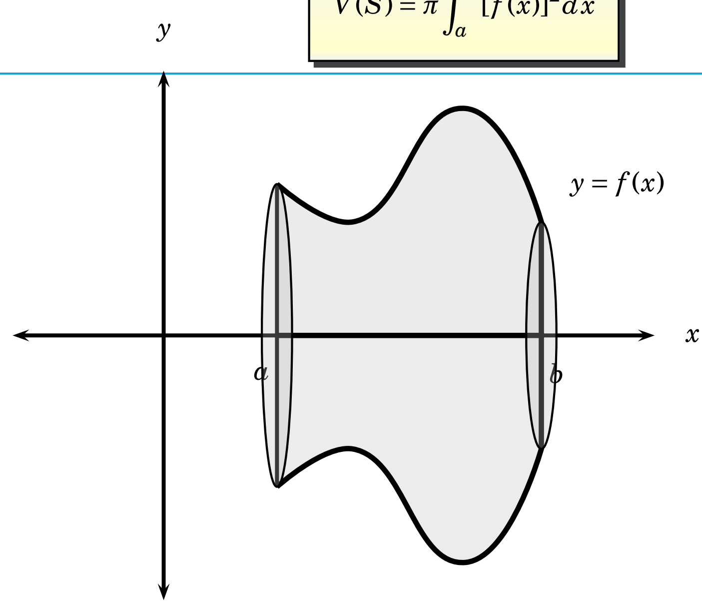
Definición 3.4.4. Volumen de un sólido con secciones planas paralelas conocidas
El volumen de una rebanada de un sólido es el volumen de un cilindro $A(x_i^*)\triangle x_i$, donde $A(x_i^*)$ es el área de la sección transversal plana del sólido, y $\triangle x_i = x_i - x_{i-1}$ es la altura de la rebanada. Luego si queremos calcular el volumen del sólido es

$$\boxed{Volumen(S) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} A(x_i^*)\triangle x_i = \int_a^b A(x)dx}$$

donde $A(x)$ es el área de la sección transversal del sólido.

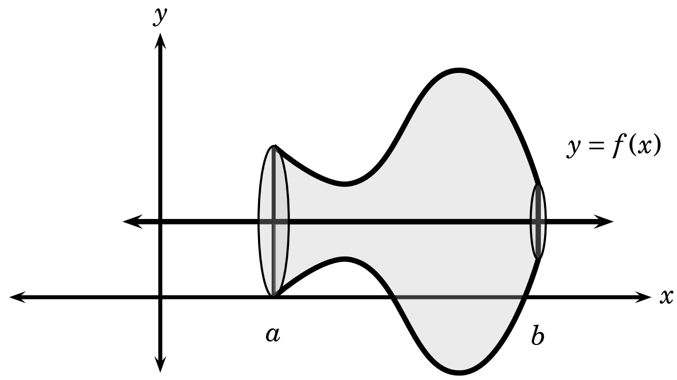
Definición 3.4.5. Volumen de un sólido de revolución por secciones planas paralelas: Método del disco
El volumen de un sólido (S) generado al rotar una región plana R, ubicada bajo la gráfica de una función $y = f(x) \geq 0$ y sobre el eje x desde $x = a$ hasta $x = b$ está dada por

$$\boxed{V(S) = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx}$$



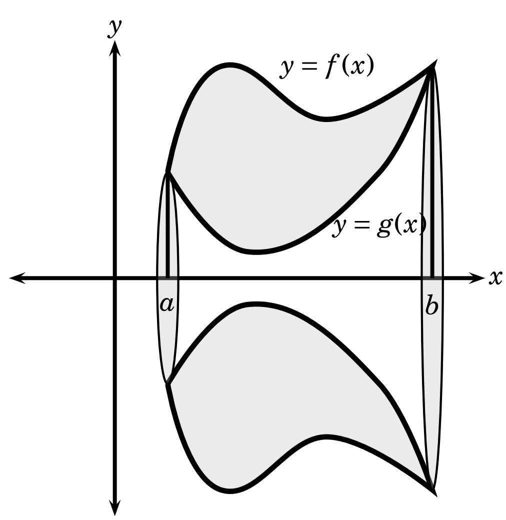
Definición 3.4.6. Volumen de un sólido de revolución por secciones planas paralelas alrededor de ejes paralelos al eje x: Método del disco
El volumen de un sólido (S) generado al rotar una región plana R alrededor del eje $y=c$, limitada por la grafica $y=f(x)$ desde $x=a$ hasta $x=b$ tal que $c\le f(x)$ ó $f(x)\le c$ está dada por

$$V(S)=\pi\int_a^b [f(x)-c]^2dx$$



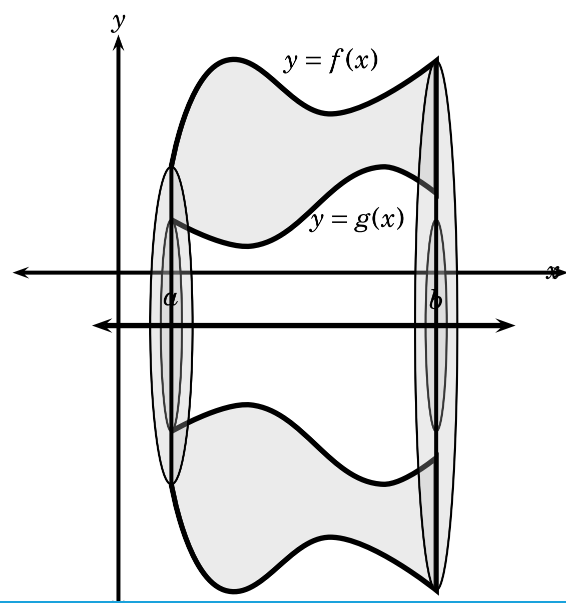
Definición 3.4.7. Volumen de un sólido de revolución por secciones planas paralelas: Método del anillo
Para calcular el volumen de un sólido (S) de revolución generado por la rotación alrededor del eje x de la región R encerrada entre dos curvas continuas $y=f(x)$ y $y=g(x)$, $\forall\ x\in[a,b]$ desde $x=a$ hasta $x=b$ tal que $0\le g(x)\le f(x)$ ó $f(x)\le g(x)\le 0$, está dada por

$$V(S)=\pi\int_a^b [((f(x))^2-(g(x))^2]dx$$



Definición 3.4.8. Volumen de un sólido de revolución por secciones planas paralelas alrededor de ejes paralelos al eje x (extensión del método del anillo)
Para calcular el volumen de un sólido (S) de revolución generado por la rotación alrededor de un eje $y = c$ de la región R encerrada entre dos curvas continuas $y = f(x)$ y $y = g(x)$, $\forall\ x \in [a,b]$ desde $x = a$ hasta $x = b$ tal que $c \leq g(x) \leq f(x)$ ó $f(x) \leq g(x) \leq c$ $\forall\ x \in [a,b]$, está dada por

$$V(S) = \pi \int_a^b [(f(x)-c)^2 - (g(x)-c)^2]dx$$



Definición 3.4.9. Volumen de un sólido de revolución: Método de las capas cilíndricas concéntricas

1. El volumen de un sólido (S) de revolución generado al rotar el área limitado superiormente por la gráfica de $y = f(x)$ continua en $[a,b]$, e inferiormente por el eje x desde $x = a \geq 0$ hasta $x = b$, alrededor del eje y, está dada por

$$V(S) = 2\pi \int_a^b [x(f(x)]dx$$

2. El volumen de un sólido generado al rotar el área encerrada por las gráficas de las funciones continuas $y = f(x)$, $y = g(x)$ con $f(x) \geq g(x)$ desde $x = a \geq 0$ hasta $x = b$, alrededor del eje y es

$$V(S) = 2\pi \int_a^b x(f(x) - g(x))dx$$

Definición 3.4.10. Volumen de un sólido de revolución alrededor de ejes paralelos al eje y: Método de las capas cilíndricas concéntricas
El volumen del sólido de revolución obtenido al rotar la región limitada por el eje x y por la gráfica de $y = f(x) \geq 0,\ x \in [a, b]$ desde $x = a$ hasta $x = b$, alrededor de la recta $x = c \notin]a, b[$ es

$$\boxed{V(S) = 2\pi \int_a^b |x - c| f(x) dx}$$

Note que si

- $a \leq x \leq b \leq c \Longrightarrow |x - c| = c - x$
- $c \leq a \leq x \leq b \Longrightarrow |x - c| = x - c$

Definición 3.4.11. Volumen de un sólido de revolución alrededor de ejes paralelos al eje y: extensión del Método de las capas cilíndricas concéntricas
El volumen del sólido de revolución obtenido al rotar la región limitada por las graficas de las funciones $y = f(x)$ y $y = g(x)$ desde $x = a$ hasta $x = b$, alrededor de la recta $x = c \notin]a, b[,\ f(x) \geq g(x),\ x \in [a, b]$ es

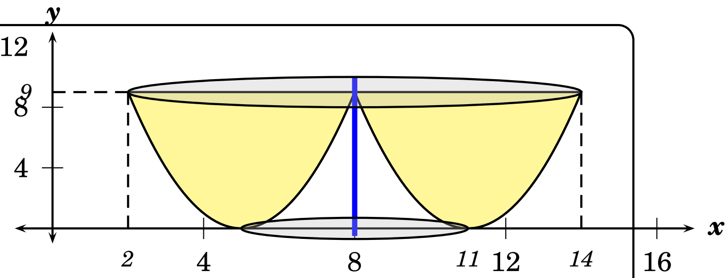
$$\boxed{V(S) = 2\pi \int_a^b |x - c|(f(x) - g(x)) dx}$$

Note que si

- $a \leq x \leq b \leq c \Longrightarrow |x - c| = c - x$
- $c \leq a \leq x \leq b \Longrightarrow |x - c| = x - c$

Ejemplo 3.4.4.
Halle el volumen del sólido de revolución generado por el rotación de la región R, en torno a la recta L, siendo:$R : y = x^2 - 10x + 25$ y $y = 9$ $L : x = 8$

Resolución: ►



$$\begin{aligned} V(R) &= 2\pi \int_2^8 |x-8|(9-(x-5)^2)dx = 2\pi \int_2^8 (8-x)(9-(x-5)^2) \\ &= 2\pi \int_2^8 (x^3-18x^2+96x-128)dx = 2\pi \left(\frac{x^4}{4} - 8x^3 + 48x^2 - 128x \right)\Bigg|_2^8 \\ &= 224\pi u^3 \end{aligned}$$

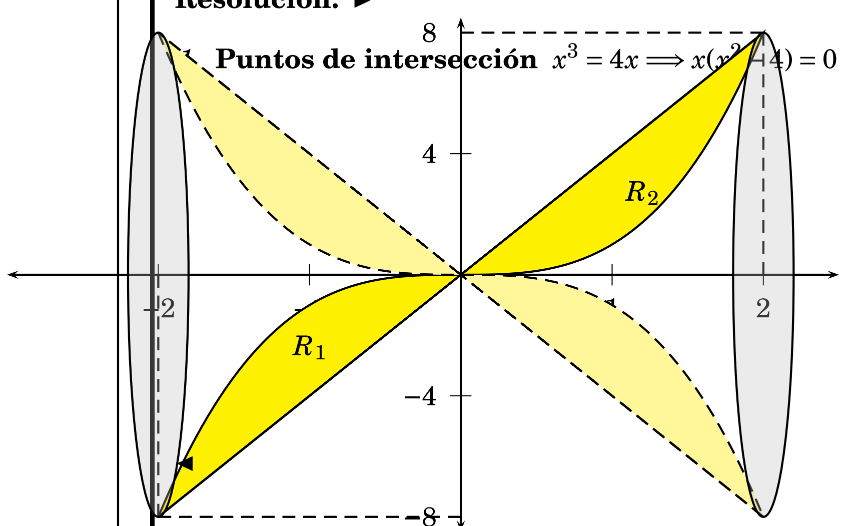
◄

Ejemplo 3.4.5.
Obtener el volumen del sólido generado por la rotación de la región R determinada por las gráficas de $y = x^3$ e $y = 4x$, en torno:

1. del eje x.
2. de la recta $x = 4$

Resolución: ►

✓ **Puntos de intersección** $x^3 = 4x \Longrightarrow x(x^2-4) = 0 \Longrightarrow x = 0 \vee x = \pm 2$



◄

continuación punto de intersección

Resolución: ►

1.

$$V_{R_1} = \pi\int_0^2 [(4x)^2-(x^3)^2]dx = \pi\int_0^2 (16x^2-x^6)dx = \pi\left(\frac{16x^3}{3}-\frac{x^7}{7}\right)\Big|_0^2 u^3$$

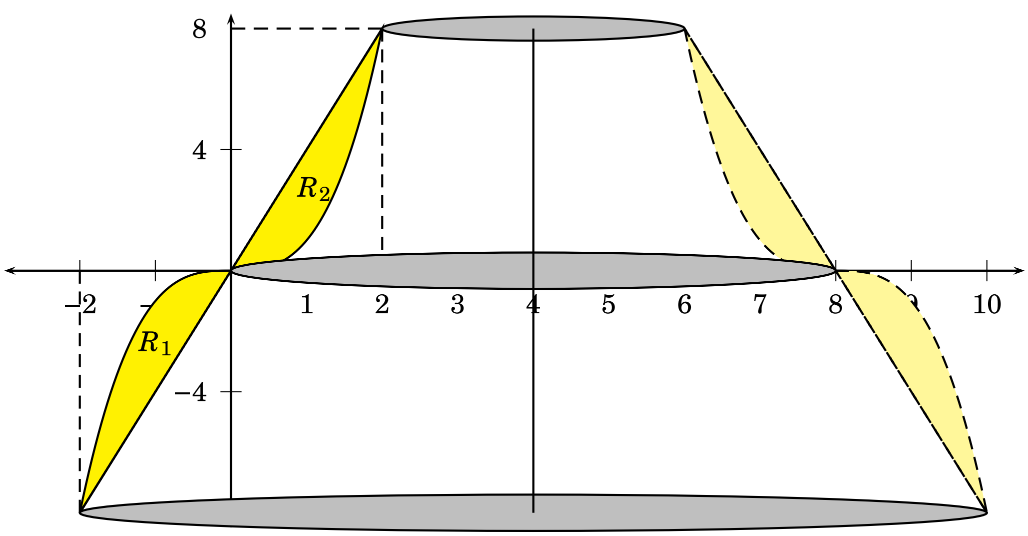
$$\Longrightarrow \boxed{V_{R_1} = \frac{4\pi(128)}{21}u^3}$$

$$V_{R_2} = \pi\int_{-2}^0 [(4x)^2-(x^3)^2]dx = \pi\int_{-2}^0 (16x^2-x^6)dx = \pi\left(\frac{16x^3}{3}-\frac{x^7}{7}\right)\Big|_{-2}^0 u^3$$

$$= \boxed{V_{R_2} = \frac{4\pi(128)}{21}u^3}$$

$$V = V_{R_1}+V_{R_2} = \frac{8\pi 128}{21}u^3$$

2.



$$V_{R_1} = 2\pi\int_0^2 (4-x)(4x-x^3)dx = 2\pi\int_0^2 (x^4-4x^3-4x^2+16x)dx$$

$$= 2\pi\left(\frac{x^5}{5}-\frac{4x^4}{4}-4x^3 3+\frac{16x^2}{2}\right)\Big|_0^2 u^3 \Longrightarrow \boxed{V_{R_1}\frac{2\pi(176)}{15}u^3}$$

$$V_{R_2} = 2\pi\int_{-2}^0 (4-x)(x^3-4x)dx = 2\pi\int_{-2}^0 (-x^4+4x^3+4x^2-16x)dx$$

$$= 2\pi\left(\frac{-x^5}{5}+\frac{4x^4}{4}+4x^3 3-\frac{16x^2}{2}\right)\Big|_{-2}^0 u^3 \Longrightarrow \boxed{V_{R_2} = \frac{2\pi(304)}{15}u^3}$$

$$V = V_{R_1}+V_{R_2} = 64\pi u^3$$

◄

3.4.4. Problemas Propuestos

Problema 3.4.6. 1. Hallar el volumen del sólido de revolución obtenido al rotar alrededor del eje y la región acotada por $y = x^2$ y las rectas $y = 1,\ x = 0$.

2. Hallar el volumen del sólido generado por la rotación de la región comprendida entre la curva $y = x^2 - 2x$ y el eje x, alrededor del eje x.

3. Hallar el volumen del sólido generado por la rotación de la región plana definida por $x^2 + y^2 \leq 20,\ y^2 \leq 8x,\ y \geq 0$ alrededor del eje x.

4. Hallar el volumen del sólido de revolución generado al rotar la región comprendida entre las curvas $y = x^2$ y $y = x + 2$

5. Hallar el volume del sólido de revolución obtenido al rotar alrededor de la rect $y = -1$ la región comprendida entre las curvas $y = x^2$ y $y = \sqrt{x}$.

6. Hallar el volumen del sólido generado al rotar la región encerrada por las gráficas de $y = x^3$ y $y = 2x - x^2$, alrededor de la recta $y = 1$.

7. Hallar el volumen del sólido generado cuando se hace girar la elipse $x^2 + 4y^2 = 4$ alrededor de la recta $y = 1$.

8. Encontrar el volumen del sólido generado al rotar la región plana encerrada por el eje x y la curva $y = \operatorname{sen} x$ para $x = [0, \pi]$, alrededor del eje y.

9. Halla el volumen del sólido generado por la región plana encerrada por la curva $y = 6x - x^2 - 8$ y el eje x, al girar alrededor del eje y.

10. Sea C el arco de la parábola cúbica $y = x^3,\ x \in [0, 1]$, calcular el volumen del sólido de revolución obtenido al rotar C alrededor de la recta $x = 1$.

11. Hallar el volumen del sólido formado al rotar alrededor de la recta $x = -2$ la región plana limitada por $y = x$ y $y = x^3$.

12. El área acotada por las curvas $y = \cos x,\ y = \operatorname{sen} x$ entre $x = 0$ y $x = \frac{\pi}{4}$ es rotada alrededor del eje $x = \frac{\pi}{2}$. ¿Cuál es el volumen del sólido generado?

Problema 3.4.7. 1. Hallar el volumen generado al rotar alrededor de $y = -2$ la región limitada por $x = 2y - y^2,\ x = y^2 - 4$.

2. La región que queda debajo de $y = 1 + \operatorname{sen} x$, sobre el eje x entre $x = 0$ y $x = 2\pi$ rota alrededor del eje y. Calcular el volume del sólido generado.

3. La región encerradas por las curvas $x=-y^3(y+3)$, $x=2y$ gira alrededor de la recta $y=1$. Calcular el volumen del sólido generado.

4. Hallar el volumen generado por el área encerrada entre las curvas $y=\dfrac{x^2}{4}$, $y=2\sqrt{x}$ al girar alrededor del eje y.

5. Calcular el volumen generado por la región comprendida entre las curvas $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$, $x^2+y^2=4$ al girar alrededor de la recta $x=-3$.

6. Calcular el volumen generado al rotar la región encerrada por la curva $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$, alrededor del eje y; al rededor de la recta $x=1$; alrededor de la recta $x=4$.

7. La región encerrada por las curvas $(y-4)^2=4-4x$, $y+2x=2$ gira alrededor de la recta $y=-1$. Calcular el volumen generado.

3.4.5. Momentos y centro de masa

Definición 3.4.12. Centro de masa o centro de gravedad de n partículas Sean n partículas con masas $m_1,\cdots,m_n$ ubicadas en los puntos (x_1,y_1), (x_2,y_2), $\cdots,(x_n,y_n)$ en el plano XY, entonces se define

1. ***momento del sistema respecto al eje y*** como

$$\boxed{M_y=\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}$$

2. ***momento del sistema respecto al eje x*** como

$$\boxed{M_x=\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}$$

3. Se define el centro de masa de esas n partículas por las coordenadas

$$\boxed{(\bar{x},\bar{y})=\left(\frac{M_y}{\sum_{i=1}^{n} m_i},\frac{M_x}{\sum_{i=1}^{n} m_i}\right)}$$

Definición 3.4.14. Momento de inercia de una placa formado por dos funciones Ahora si la placa llana de densidad uniforme ρ está definida por dos funciones $f(x) \leq g(x) \geq 0$ la cual ocupa una área A, entonces el ***centroide o centro de masa de esa placa*** se define por las coordenadas

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{M_y}{m}, \frac{M_x}{m}\right) = \left(\frac{\rho \displaystyle\int_a^b [xf(x) - xg(x)]dx}{\rho A}, \frac{\rho \displaystyle\int_a^b [\frac{1}{2}(f(x))^2 - \frac{1}{2}(g(x))^2]dx}{\rho A}\right).$$

Teorema 3.4.6. Teorema de Papus Consideremos una figura plana de área A y centro de gravedad $(\bar{x}, \bar{y})$ y un eje de rotación se define el volumen generado al rotar la figura plana alrededor del eje por

$$Volume = 2\pi \cdot dis(eje, (\bar{x}, \bar{y})) \cdot A$$

Capítulo 4

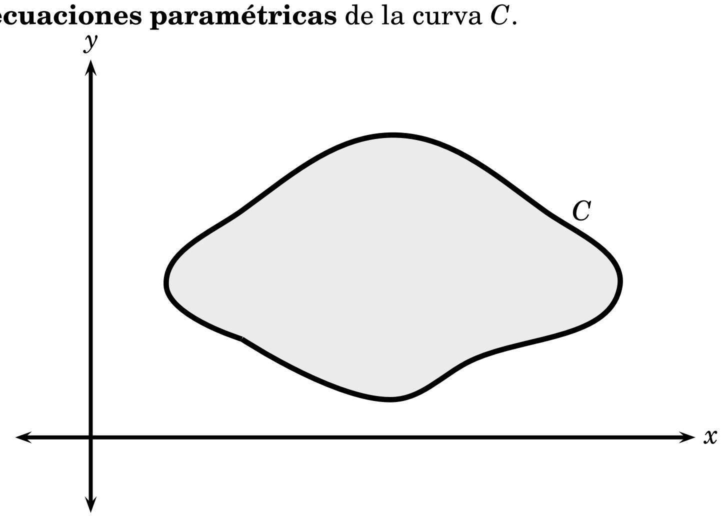
Curvas Paramétricas

4.1. Ecuaciones paramétricas

Definición 4.1.1. Sea el punto (x, y) de una curva C en el plano, si tal punto es de la forma

$$\boxed{\begin{cases} x = g(t) \\ y = h(t), \end{cases} \quad t \in dom(g) \cap dom(h)} \tag{4.1}$$

se dice que C está representada paramétricamente, donde t es el parámetro y a las ecuaciones 4.1 se les llama **ecuaciones paramétricas** de la curva C.



4.1.1. Derivadas de curvas paramétricas

Definición 4.1.2.

1. 4.1 definen una función $y = f(x)$, si g tiene inversa.
2. La derivada $\dfrac{dy}{dx}$ representa la pendiente de la recta tangente a la curva C en el punto (x_0, y_0), donde $x_0 = g(t_0)$, $y_0 = h(t_0)$ para algún t_0. En efecto

$$\boxed{\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}}$$

3. Se demuestra que

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\dfrac{dx}{dt} \cdot \dfrac{d^2y}{dt^2} - \dfrac{dy}{dt} \cdot \dfrac{d^2x}{dt^2}}{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx} = y'\right) = \frac{\dfrac{dy'}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}}$$

4.1.2. Gráfico de curvas paramétricas

Simetrías

Definición 4.1.3.

1. La gráfica de una curva paramétrica $(x(t), y(t))$ es **simétrica respecto al eje X** si para cada $t_1 \in dom(x) \cap dom(y)$ existe $t_2 \in dom(x) \cap dom(y)$ tal que

$$\boxed{(x(t_2), y(t_2)) = (x(t_1), -y(t_1))}$$

2. La gráfica de una curva paramétrica $(x(t), y(t))$ es **simétrica respecto al eje Y** si para cada $t_1 \in dom(x) \cap dom(y)$ existe $t_2 \in dom(x) \cap dom(y)$ tal que

$$\boxed{(x(t_2), y(t_2)) = (-x(t_1), y(t_1)).}$$

Observación 4.1.1.

1. Si $x(t)$ es una función par e $y(t)$ es una función impar, la gráfica es simétrica respecto al eje x, es decir

$$\boxed{(x(-t), y(-t)) = (x(t), -y(t)).}$$

2. Si $x(t)$ es una función impar e $y(t)$ es una función par, la gráfica es simétrica respecto al eje y, es decir

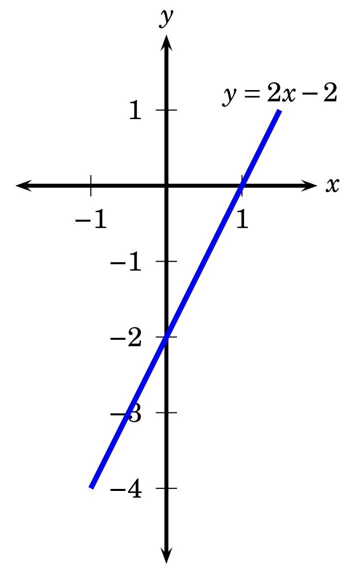
$$\boxed{(x(-t), y(-t)) = (-x(t), y(t)).}$$

Ejemplo 4.1.2. Obtenga una ecuación cartesiana y la gráfica de la curva definida por las ecuaicones paramétricas y siguientes

(a) $\begin{cases} x &= t+3 \\ y &= 2t+4 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x &= 3\cos(t) \\ y &= 3\,\mathrm{sen}(t) \end{cases}$ (c) $\begin{cases} x &= \cosh(t) \\ y &= \mathrm{senh}(t) \end{cases}$

Resolución: ►

Eliminando el parámetro t
Como $x = t + 3 \Longrightarrow t = x - 3$, reemplazando en la otra ecuación $y = 2(x-3) + 4$



(a) *Obtención de la ecuación cartesiana*

$$y = 2x - 6 + 4 = 2x - 2$$

Graficamente

(b) *Eliminando el parámetro t*

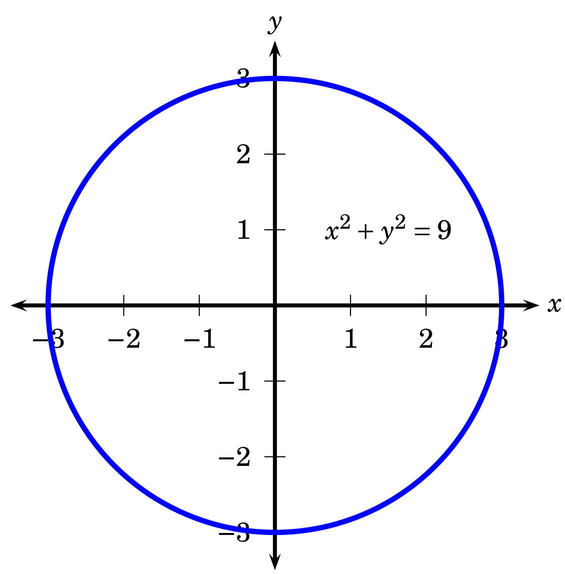
$$\begin{cases} x &= 3\cos(t)/(\cdot)^2 \\ y &= 3\,\text{sen}(t)/(\cdot)^2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x^2 &= 9\cos^2(t) \\ y^2 &= 9\,\text{sen}^2(t) \end{cases}$$

Sumando ambas ecuaciones obtenemos

Obtención de la ecuación cartesiana

$$x^2 + y^2 = 9\left[\cos^2(t) + \text{sen}^2(t)\right] \Longrightarrow \boxed{x^2 + y^2 = 9}$$

Graficamente



(c) *tarea*

◄

Ejemplo 4.1.3. Dada las ecuaciones paramétricas $\begin{cases} x(t) &= 2 + t^2 \\ y(t) &= -t^2 + 2t \end{cases}$ determine

1. $\dfrac{dy}{dx}$

2. $\dfrac{d^2y}{dx^2}$

Resolución: ►

1. $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2+t^2 \\ y &=& -t^2+2t \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{dx}{dt} &=& 2t \\ \dfrac{dy}{dt} &=& -2t+2 \end{array}\right.$

Entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-2t+2}{2t} \Longrightarrow \boxed{\frac{dy}{dx} = -1+\frac{1}{t}}$$

2.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-\frac{1}{t^2}}{2t} \Longrightarrow \boxed{\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{2t^3}}$$

◄

4.1.3. Longitud de arco

Teorema 4.1.4. [Longitud de Arco en coordenadas cartesianas]

1. Si la función f y f' son continuas en $[a,b]$ entonces la **longitud de arco** de la curva $y = f(x)$ a partir del punto $(a, f(a))$ hasta el punto $(b, f(b))$ está dado por

$$\boxed{L = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx}$$

2. Si la función g y su derivada g' son continuas en $[c,d]$, entonces la **longitud de arco** de la curva $g(y) = x$ a partir del punto $(g(c), c)$ hasta el punto $(g(d), d)$ está dado por

$$\boxed{L = \int_c^d \sqrt{1+(g'(y))^2}\,dy}$$

Teorema 4.1.5. [Longitud de arco de curvas paramétricas] Sea $C : \left\{\begin{array}{l} x = g(t) \\ y = h(t) \end{array}\right.$ $t \in [a,b]$ una curva paramétrica suave, entonces su longitud de arco es:

$$\boxed{L = \int_a^b \sqrt{(g'(t))^2+(h'(t))^2}\,dx}$$

Ejemplo 4.1.6. Considere el arco de curva de ecuaciones paramétricas $\left\{\begin{array}{lcl} x(t) & = & t\,\text{sen}(t) \\ y(t) & = & t\cos(t) \end{array}\right.$, $t \in [0,\pi]$. Obtenga

a) $\dfrac{d^2y}{dx^2}$

b) Longitud de arco en $[0,\pi]$

Resolución: ►

(a) *Cálculo de* $\dfrac{dy}{dx}$

Como $\left\{\begin{array}{lcl} x(t) & = & t\,\text{sen}(t) \\ y(t) & = & t\cos(t) \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} \dfrac{dx}{dt} & = & \text{sen}(t)+t\cos(t) \\ \dfrac{dy}{dt} & = & \cos(t)-t\,\text{sen}(t) \end{array}\right.$

Entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \Longrightarrow \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{\cos(t)-t\,\text{sen}(t)}{\text{sen}(t)+t\cos(t)}}$$

Cálculo de $\dfrac{d^2y}{dx^2}$

$$\begin{aligned}
\frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\left(\frac{\cos(t)-t\,\text{sen}(t)}{\text{sen}(t)+t\cos(t)}\right)'}{\text{sen}(t)+t\cos(t)} \\
&= \frac{\frac{(\cos(t)-t\,\text{sen}(t))'\cdot(\text{sen}(t)+t\cos(t))-(\cos(t)-t\,\text{sen}(t))\cdot(\text{sen}(t)+t\cos(t))'}{(\text{sen}(t)+t\cos(t))^2}}{\text{sen}(t)+t\cos(t)} \\
&= \frac{(-2\,\text{sen}(t)-t\cos(t))\cdot(\text{sen}(t)+t\cos(t))-(\cos(t)-t\,\text{sen}(t))\cdot(2\cos(t)-t\,\text{sen}(t))}{(\text{sen}(t)+t\cos(t))^3} \\
&= \frac{-2\,\text{sen}^2(t)-3t\,\text{sen}(t)\cos(t)-t^2\cos^2(t)-2\cos^2(t)+3t\,\text{sen}(t)\cos(t)-t^2\,\text{sen}^2(t)}{(\text{sen}(t)+t\cos(t))^3} \\
&\Longrightarrow \boxed{\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2+t^2}{(\text{sen}(t)+t\cos(t))^3}}
\end{aligned}$$

◄

Resolución: ▶

(b) Calculando la longitud de arco.

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt = \int_0^{\pi}\sqrt{(\cos(t)-t\,\mathrm{sen}(t))^2+(\mathrm{sen}(t)+t\cos(t))^2}dt \\ &\Longrightarrow \boxed{L=\int_0^{\pi}\sqrt{1+t^2}dt} \end{aligned}$$

Cálculo de la integral
Haciendo un cambio de variable $t=\tan(\theta)$ *Entonces* $dt=sec^2(\theta)d\theta$ *y se tiene:*

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi}\sqrt{1+t^2}dt &= \int_a^b sec^3(\theta)d\theta = \left(\frac{\tan(\theta)sec(\theta)}{2}+\frac{\ln|\tan(\theta)+sec(\theta)|}{2}\right)\Bigg|_a^b \\ &= \left(\frac{t\sqrt{1+t^2}}{2}+\frac{\ln|t+\sqrt{1+t^2}|}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi} \\ &= \frac{\pi\sqrt{1+\pi^2}}{2}+\frac{\ln|\pi+\sqrt{1+\pi^2}|}{2} \end{aligned}$$

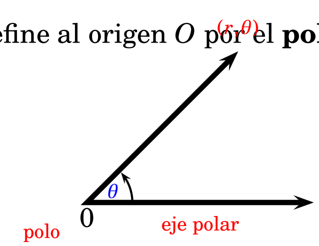
◀

4.2. Gráfica en coordenadas polares

Hasta ahora hemos representado puntos en el plano mediante un sistema de coordenadas rectangulares. Veremos otra forma de representar puntos en el plano según un sistema de **coordenadas polares**.

Definición 4.2.1.

1. Para representar un punto en coordenadas polares se necesita de un plano, un rayo OX con origen en O.
2. Un punto en coordenadas polares se representa por $P=(r,\theta)$, donde r es la distancia del origen O al punto dado, θ es el **ángulo de inclinación** del radio vector OX con respecto al semieje positivo X, medido en sentido antihorario.
3. Se define al origen O por el **polo** y al vector OX el **eje polar**.



Observación 4.2.1.

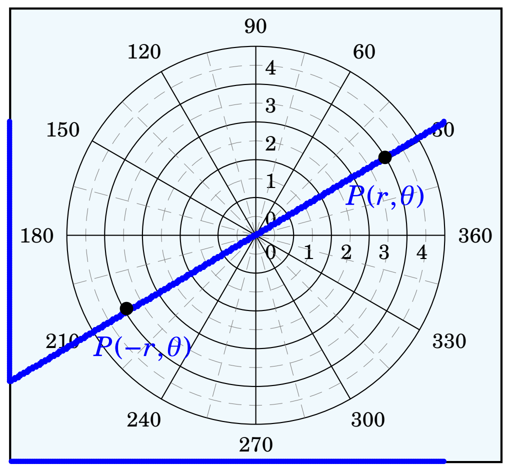
1. Un punto $P(r,\theta)$ en el plano polar se encuentra en la intersección de una circunferencia de radio r con una recta cuyo ángulo de inclinación es θ.

2. El ángulo debe estar dado en radianes y en sentido antihorario.

3. Las coordenadas polares (r,θ) representan un punto P que se encuentra a una distancia $|r|$ del origen por lo tanto: se encontrará sobre el rayo θ si $r>0$ y sobre el rayo $\theta+\pi$ si $r<0$.

4. Por lo anterior un punto en coordenadas polares no es único.

5. Para todo $n \in Z$ se tiene $(r,\theta)=(r,\theta+2n\pi)$ de esto se desprende que $(r,\theta)=(-r,\theta+\pi)$ y $(r,\theta)=(-r,\theta+(2n+1)\pi)$.



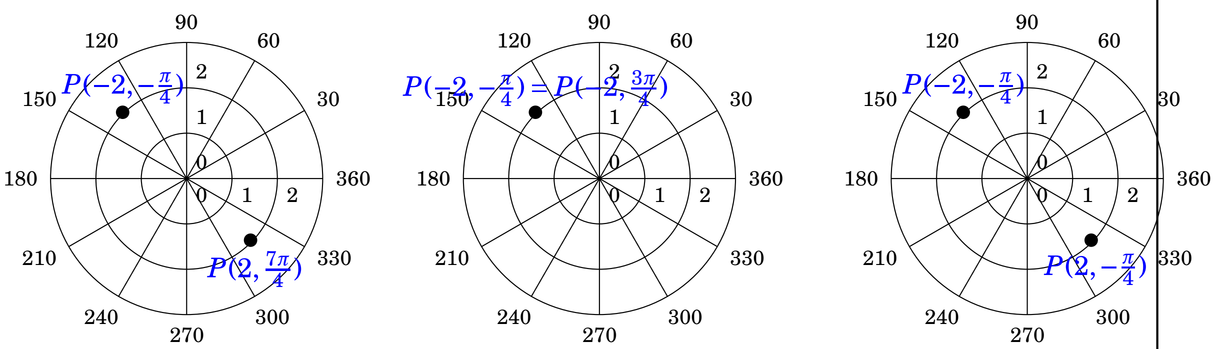
Ejemplo 4.2.2.

1. Localizar el punto $Q=(-2,-\frac{\pi}{4})$ en el plano de coordenadas polares (usando un dibujo) y luego hallar otras coordenadas polares de Q tales que

   (a) $r>0,\ 0<\theta<2\pi$ (b) $r<0,\ 0<\theta<2\pi$ (c) $r>0,\ -2\pi<\theta<0$

2. Hallar todas las coordenadas polares (r,θ) tales que $0<\theta<2\pi$, del punto $(5,-\frac{\pi}{4})$.

Resolución: ▶



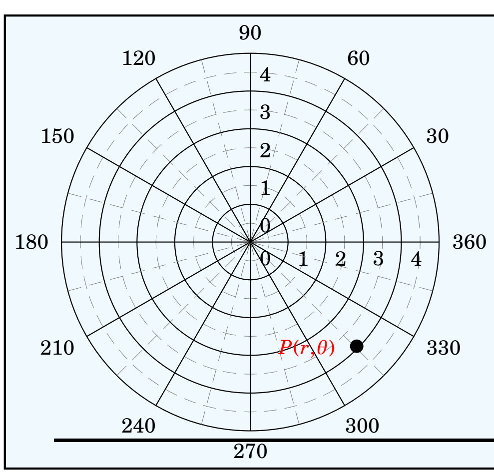
1. *(a)* *(b)* *(c)*
2. *TAREA*

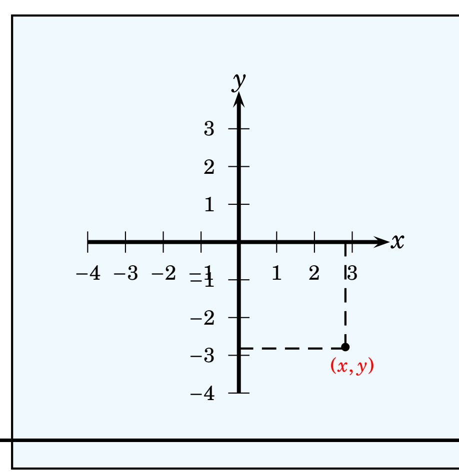
◀

4.2.1. Relación entre coordenadas cartesianas y polares

Es sumamente útil transformar coordenadas y ecuaciones que están dadas en ecuaciones rectangulares a la forma polar y recíprocamente.
Es decir, representamos el origen de coordenadas cartesianas como el polo en coordenadas polares y el semieje positivo OX dada en coordenadas rectangulares como el eje polar en coordenadas polares. El semieje positivo Y en coordenadas rectangulares como el rayo $\theta = \dfrac{\pi}{2}$. Así tenemos que un punto (r,θ) se puede representar en coordenadas rectangulares y viceversa si se cumple:

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta, \quad x^2+y^2=r^2,\ \tan(\theta)=\frac{y}{x}, x\neq 0$$





Definición 4.2.2.

1. Sea f una función real de una variable real define un conjunto $C \subset \mathbb{R}^2$ definida por $r = f(\theta)$, donde (r, θ) son las coordenadas polares de los puntos en $\mathbb{R}^2$ que se encuentra en la curva C.

2. El conjunto C se define por

$$C := \{(r\cos(\theta), r\,\mathrm{sen}(\theta)), r = f(\theta), \forall \theta \in dom f\}$$

llamado **gráfica polar** de f, y a la ecuación que la origina $r = f(\theta)$ se llama **ecuación polar** de C

4.2.2. Longitud y área en coordenadas polares

Teorema 4.2.3. [Longitud de arco en coordenadas polares]
Sea $r(\theta) = f(\theta)$ y sea la curva paramétrica : $r = r(\theta)$. La longitud de arco de la curva desde $\theta = \alpha$ hasta $\theta = \beta$ está dada por:

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{(r(\theta))^2 + (r'(\theta))^2}\,d\theta$$

Teorema 4.2.4. [Área en coordenadas polares]

1. Sea $r = f(\theta) \geq 0$ continua definida en $[\alpha, \beta]$ el área de la región encerrada por la gráfica $r = f(\theta)$ y los rayos $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$ está dada por

$$A = \int_\alpha^\beta \frac{1}{2}(f(\theta))^2 d\theta, \quad \alpha, \beta \in [0, 2\pi[$$

2. Si queremos calcular el área encerrada por dos gráficas en coordenadas polares $r = f(\theta)$ y $r = g(\theta)$ definidas en $[\alpha, \beta]$ tal que $f(\theta) \geq g(\theta) \geq 0$ se tiene:

$$A = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta [(f(\theta))^2 - (g(\theta))^2] d\theta$$

Ejemplo 4.2.5.

(a) Para la coordenada polar $(r, \theta) = \left(-4, \frac{3\pi}{4}\right)$ halle su respectiva coordenada rectangular (x, y)

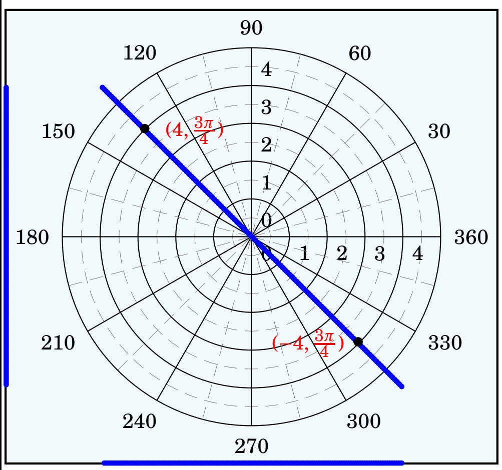
(b) Para la coordenada rectangular $(x, y) = (-2\sqrt{3}, -2)$ halle su respectiva coordenada polar (r, θ)

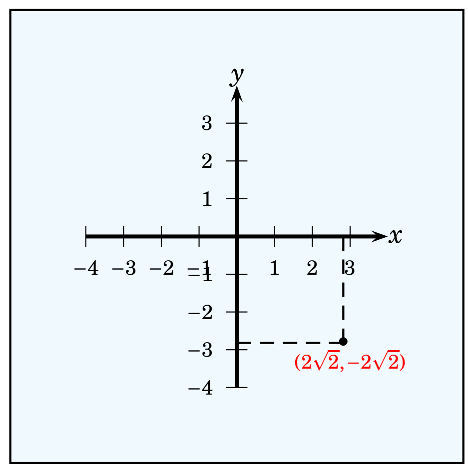
Resolución: ▸

(a) *Para el punto* $(r,\theta) = \left(-4, \dfrac{3\pi}{4}\right)$ *dado en coordenadas polares vamos a determinar su respectiva coordenada cartesiana utilizando las ecuaciones siguientes:*

$$\begin{aligned} x &= r\cos(\theta) = -4\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -4(-\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \\ y &= r\,\mathrm{sen}(\theta) = -4\,\mathrm{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -4(\frac{1}{\sqrt{2}}) = -\frac{4}{\sqrt{2}} = -2\sqrt{2} \end{aligned}$$

Las coordenadas del punto $(r,\theta) = \left(-4, \dfrac{3\pi}{4}\right)$ *en coordenadas cartesianas es* $(x,y) = (2\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$





(b) *Para el punto* $(x,y) = (-2\sqrt{3}, -2)$ *dado en coordenadas catesianas vamos a determinar su respectiva coordenada polar utilizando las ecuaciones siguientes:*

$$x^2 + y^2 = r^2 \Longrightarrow r^2 = (-2\sqrt{3})^2 + (-2)^2 \Longrightarrow r^2 = 16 \Longrightarrow r = \pm 4$$

$$\tan(\theta) = \frac{-2}{-2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{6} \text{ ó } \theta = \frac{7\pi}{6}$$

Como el punto $(-2\sqrt{3}, -2)$ *está ubicado en el tercer cuadrante entonces* $r = -4$ *si* $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ *y* $r = 4$ *si* $\theta = \dfrac{7\pi}{6}$

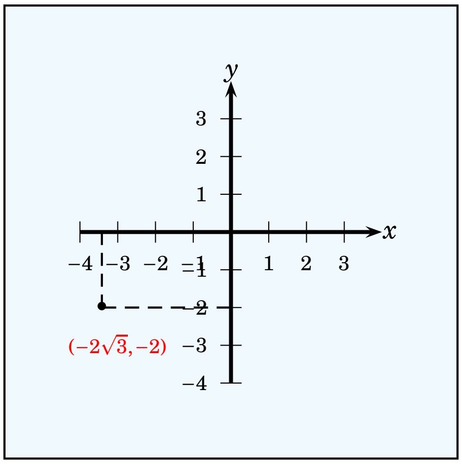
◂

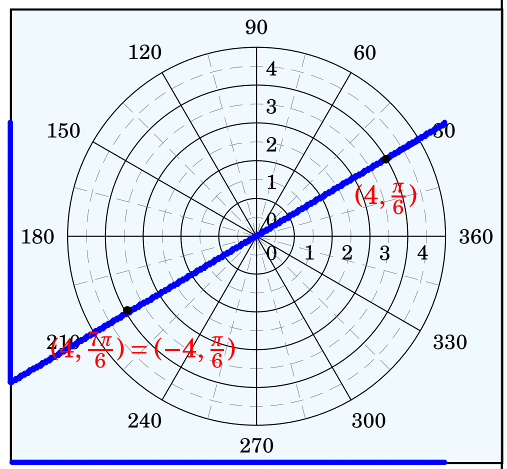
Continuación ejercicio

Resolución: ►

(b) Por tanto existen dos coordenadas polares equivalentes para $(x, y) = (-2\sqrt{3}, -2)$*:*

$$(r, \theta) = (-4, \frac{\pi}{6}) \text{ y } (r, \theta) = (4, \frac{7\pi}{6})$$





◄

Ejercicio 4.2.6. La relación $r = a$. Corresponde a la ecuación polar de una circunferencia con centro en el origen y radio $|a|$

$$:= \{(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta) : r = a,\ \theta \in\}$$

Propiedades 4.2.7.

1. **Extensión** está determinada por la relación siguiente:

$$\boxed{|r| \leq M, \forall r, \theta \text{ para algún } M > 0.}$$

2. **Simetrías**

- **Simetría respecto al eje polar.** Se presenta cuando la ecuación polar no varía al reemplazar

$$\boxed{\theta \text{ por } -\theta \quad \text{ó} \quad r \text{ por } -r \text{ y } \theta \text{ por } \pi - \theta.}$$

  Basta que se cumpla una de las dos condiciones.

- **Simetría respecto al eje normal.** Se presenta cuando la ecuación polar o varía al reemplazar

$$\boxed{\theta \text{ por } \pi - \theta \quad \text{ó} \quad r \text{ por } -r \text{ y } \theta \text{ por } -\theta.}$$

  Basta que se cumpla una de las dos condiciones.

- **Simetría respecto al origen.** Esto sucede cuando la ecuación polar no varía al reemplazar

$$\boxed{\theta \text{ por } \pi + \theta \quad \text{ó} \quad r \text{ por } -r.}$$

3. **Rectas tangentes en el polo.** Son rectas que pasan por el origen y es de la forma $\theta = \theta_k$ que se hallan haciendo $r = 0$ en la ecuación polar.

4. **Interceptos con los ejes principales.**

- **Con el eje polar (X).** Se hacen $\theta = k\pi, k \in I\!N \cup \{0\}$ y se resuelve la ecuación polar $r = f(\theta)$.
- **Con el eje normal (Y).** Se hacen $\theta = (2k-1)\frac{\pi}{2}$ y se resuelve la ecuación polar $r = f(\theta)$.

Ejemplo 4.2.8. Dada la cardiode $r = 2(1+\cos\theta)$ y la circunferencia $r = 6\cos\theta$.

(a) Grafique la cardiode $r = 2(1+\cos\theta)$ y la circunferencia $r = 6\cos\theta$.

(b) Calcular la longitud de arco de la cardiode $r = 2(1+\cos\theta)$, $\theta \in [0,\pi]$

(c) Hallar el área de la región que se encuentra fuera de la cardioide $r = 2(1+\cos\theta)$ y dentro de la circunferencia $r = 6\cos\theta$.

Resolución: ▸

(a) Gráfica de la cardiode $r(\theta) = 2(1+\cos(\theta))$

- ***Extensión***
  $|r(\theta)| = |2+2\cos(\theta)| \le 2+|2\cos(\theta)| = 2+2 = 4$

- ***Simetrías con el eje polar***
  Para saber si la función $r(\theta) = 2+2\cos(\theta)$ *es simétrica con el eje polar realizar el cambio de coordenadas de* (r,θ) *por* $(r,-\theta)$ *y las expresiones* $r(\theta)$ *y* $r(-\theta)$ *permanecen iguales.*

$$\begin{aligned} r(-\theta) &= 2+2\cos(-\theta) = 2+2\cos(\theta) \\ r(-\theta) &= r(\theta) \end{aligned}$$

  Esto implica que la gráfica $r(\theta) = 2+2\cos(\theta)$ *es* ***es simétrica respecto al eje polar.***

- ***Simetrías con el eje normal***
  Para saber si la la función $r = 2+2\cos(\theta)$ *es simétrica respecto al eje normal se debe hacer cambio de coordenadas de* (r,θ) *por* $(r,\pi-\theta)$ *ó* (r,θ) *por* $(-r,-\theta)$ *y las expresiones* $r(\theta)$ *y* $-r(-\theta)$ *permanecen iguales.*

$$\begin{aligned} -r(-\theta) &= -(2+2\cos(-\theta)) = -2-2\cos(\theta) \\ = -2-\cos(\theta) \neq 2+2\cos(\theta) = r(\theta) \\ -r(-\theta) &\neq r(\theta) \end{aligned}$$

  Implica que la gráfica ***no es simétrica respecto al eje normal.***

- ***Simetrías respecto el origen***
  Para saber si la la función $r = 2+2\cos(\theta)$ *es simétrica respecto al origen de debe hacer cambio de coordenadas de* (r,θ) *por* $(r,\pi+\theta)$ *ó* (r,θ) *por* $(-r,\theta)$ *y las expresiones* $r(\theta)$ *y* $r(-\theta)$ *permanecen iguales.*

$$\begin{aligned} r(\pi+\theta) &= 2+2\cos(\pi+\theta) = 2-2\cos(\theta) \neq r(\theta) \\ r(\pi+\theta) &\neq r(\theta) \end{aligned}$$

  Implica que la gráfica ***no es simétrica respecto al origen.***

- ***Rectas tangentes en el polo***
  En la ecuación $r = 2+2\cos(\theta)$ *reemplazar* $r = 0$ *y se obtiene así los valores* θ *que son tangentes en el polo.*
  $2+2\cos(\theta) = 0 \Longrightarrow \cos(\theta) = -1 \Longrightarrow \theta = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ ***son tangente en el polo***.

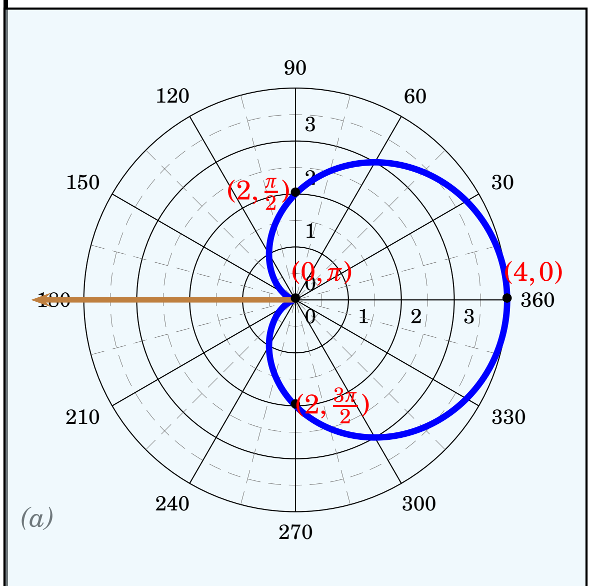
- ***Interceptos con el eje polar***
  Si $\theta = 0$ *entonces* $r(0) = 2+2\cos(0) = 4 \Longrightarrow (r,\theta) = (4,0)$ *es un intercepto*
  Si $\theta = \pi$ *entonces* $r(\pi) = 2+2\cos(\pi) = 0 \Longrightarrow (r,\theta) = (0,\pi)$ *es otro intercepto.*

- ***Interceptos con el eje normal***
  Si $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ *entonces* $r(\frac{\pi}{2}) = 2+2\cos(\frac{\pi}{2}) = 2 \Longrightarrow (r,\theta) = (2,\frac{\pi}{2})$ *es un intercepto*
  Si $\theta = \dfrac{3\pi}{2}$ *entonces* $r(\frac{3\pi}{2}) = 2+2\cos(\frac{3\pi}{2}) = 2 \Longrightarrow (r,\theta) = (2,\frac{3\pi}{2})$ *es otro intercepto.*

◂

continuación del ejercicio

Resolución: ►



θ	r
0	4
$\frac{\pi}{6}$	$2+\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$2+\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	3
$\frac{\pi}{2}$	2
$\frac{2\pi}{3}$	1
$\frac{3\pi}{4}$	$2-\sqrt{2}$
$\frac{5\pi}{6}$	$2-\sqrt{3}$
π	0

(b) Gráfica de la circunferencia $r(\theta) = 6\cos(\theta)$

- ***Extensión***
  $|r(\theta)| = |6\cos(\theta)| \leq |6\cos(\theta)| = 6$
- ***Simetrías con el eje polar***
  Para saber si la función $r(\theta) = 6\cos(\theta)$ *es simétrica con el eje polar realizar el cambio de coordenadas de* (r,θ) *por* $(r,-\theta)$ *y las expresiones* $r(\theta)$ *y* $r(-\theta)$ *permanecen iguales.*

$$\begin{aligned} r(-\theta) &= 6\cos(-\theta) = 6\cos(\theta) \\ r(-\theta) &= r(\theta) \end{aligned}$$

  Esto implica que la gráfica $r(\theta) = 6\cos(\theta)$ *es* ***es simétrica respecto al eje polar.***
- ***Simetrías con el eje normal***
  Para saber si la la función $r = 6\cos(\theta)$ *es simétrica respecto al eje normal se debe hacer cambio de coordenadas de* (r,θ) *por* $(r,\pi-\theta)$ *ó* (r,θ) *por* $(-r,-\theta)$ *y las expresiones* $r(\theta)$ *y* $-r(-\theta)$ *permanecen iguales.*

$$\begin{aligned} -r(-\theta) &= -(6\cos(-\theta)) = -(6\cos(\theta)) = -6\cos(\theta) \neq 6\cos(\theta) = r(\theta) \\ -r(-\theta) &\neq r(\theta) \end{aligned}$$

  Implica que la gráfica ***no es simétrica respecto al eje normal.***
- ***Simetrías respecto el origen***
  Para saber si la función $r = 6\cos(\theta)$ *es simétrica respecto al origen de debe hacer cambio de coordenadas de* (r,θ) *por* $(r,\pi+\theta)$ *ó* (r,θ) *por* $(-r,\theta)$ *y las expresiones* $r(\theta)$ *y* $-r(\theta)$ *permanecen iguales.*

$$\begin{aligned} r(\pi+\theta) &= 6\cos(\pi+\theta) = -6\cos(\theta) \neq r(\theta) \\ r(\pi+\theta) &\neq r(\theta) \end{aligned}$$

  Implica que la gráfica ***no es simétrica respecto al origen.***

continuación del ejercicio

Resolución: ►

(b)

- ***Rectas tangentes en el polo***

  En la ecuación $r = 6\cos(\theta)$ reemplazar $r = 0$ y se obtiene así los valores θ que son tangentes en el polo.

  $6\cos(\theta) = 0 \Longrightarrow \cos(\theta) = 0 \Longrightarrow \theta = \dfrac{(2k-1)\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$ ***son tangente en el polo***.

- ***Interceptos con el eje polar***

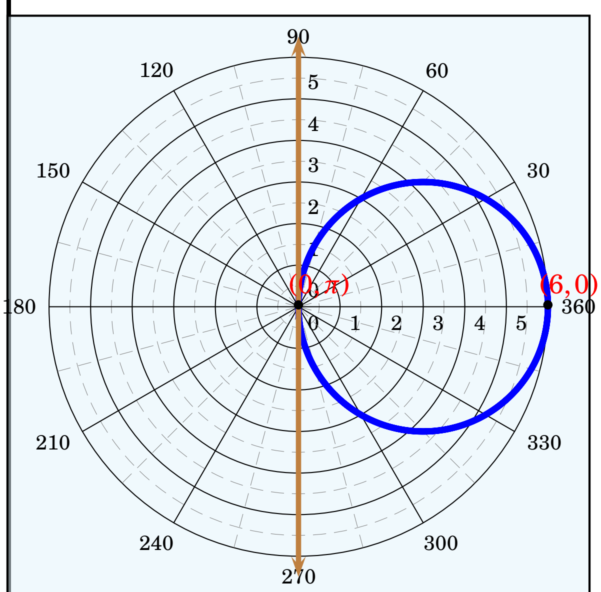
  Si $\theta = \pi$ entonces $r(\pi) = 6\cos(\pi) = -6 \Longrightarrow (r,\theta) = (-6,\pi)$ es un intercepto

  Si $\theta = 0$ entonces $r(0) = 6\cos(0) = 6 \Longrightarrow (r,\theta) = (6,0)$ es otro intercepto.

- ***Interceptos con el eje normal***

  Si $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ entonces $r(\frac{\pi}{2}) = 6\cos(\frac{\pi}{2}) = 0 \Longrightarrow (r,\theta) = (0,\frac{\pi}{2})$ es un intercepto

  Si $\theta = \dfrac{3\pi}{2}$ entonces $r(\frac{3\pi}{2}) = 6\cos(\frac{3\pi}{2}) = 0 \Longrightarrow (r,\theta) = (0,\frac{3\pi}{2})$ es otro intercepto.



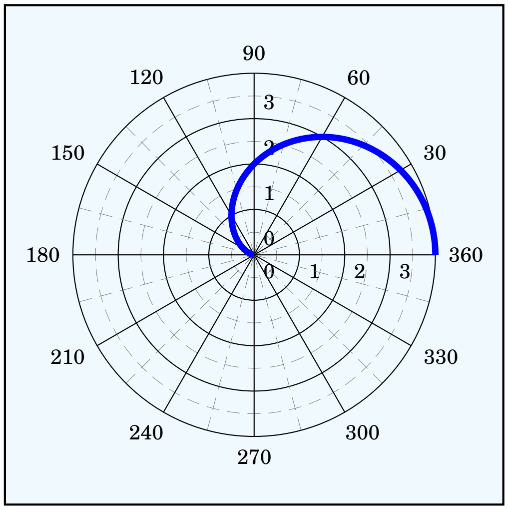
θ	r
0	6
$\frac{\pi}{6}$	$3\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$3\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	3
$\frac{\pi}{2}$	0
$\frac{2\pi}{3}$	-3
$\frac{3\pi}{4}$	$-3\sqrt{2}$
$\frac{5\pi}{6}$	$-3\sqrt{3}$
π	0

$$
\begin{aligned}
\int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{(r(\theta))^2 + (r'(\theta))^2}\, d\theta &= \int_0^{\pi} \sqrt{(2+2\cos(\theta))^2 + (-2\operatorname{sen}(\theta))^2}\ d\theta \\
&= \int_0^{\pi} \sqrt{4 + 8\cos(\theta) + 4\cos^2(\theta) + 4\operatorname{sen}^2(\theta)} \\
&= \int_0^{\pi} \sqrt{8 + 8\cos(\theta)}\ d\theta = \int_0^{\pi} 4\sqrt{\frac{1+\cos(\theta)}{2}}\, d\theta \\
&= \int_0^{\pi} 4\sqrt{\cos^2(\frac{\theta}{2})}\, d\theta = \int_0^{\pi} 4\cos(\frac{\theta}{2})\, d\theta \\
&= 8\operatorname{sen}(\frac{\theta}{2})\Big|_0^{\pi} = 8
\end{aligned}
$$

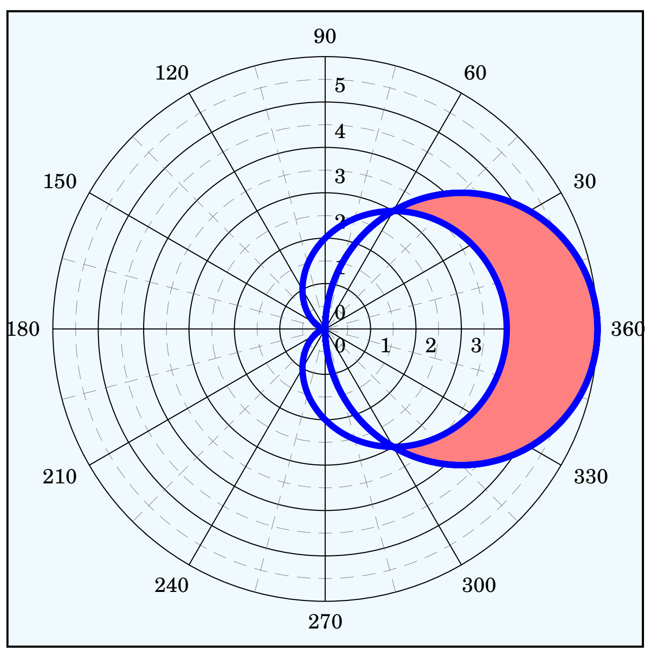
◄

Resolución: ►

(b)



(c)



◄

Resolución: ►

(c)

$$
\begin{aligned}
A &= 2(\frac{1}{2})\int_0^{\frac{\pi}{3}}[(6\cos(\theta))^2-(2+2\cos(\theta))^2]d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{3}}(36\cos^2(\theta)-4-8\cos(\theta)-4\cos^2(\theta))d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{3}}(32\cos^2(\theta)-8\cos(\theta)-4)d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{3}}\left[32\left(\frac{1+\cos(2\theta)}{2}\right)-8\cos(\theta)-4\right]d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{3}}[16+16\cos(2\theta)-8\cos(\theta)-4]d\theta \\
&= 12\theta+8\,\mathrm{sen}(2\theta)-8\,\mathrm{sen}(\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} \\
&= 4\pi u^2
\end{aligned}
$$

◄

4.2.3. Ejercicios Propuestos

Problema 4.2.1. Para cada una de las coordenadas polares (r,θ) dadas, halle sus respectivas coordenadas rectangulares (x,y)

1. $(r,\theta)=\left(8,\frac{\pi}{3}\right)$
2. $(r,\theta)=\left(4,-\frac{\pi}{3}\right)$
3. $(r,\theta)=\left(-4,\frac{3\pi}{4}\right)$
4. $(r,\theta)=\left(\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right)$

Problema 4.2.2. Para cada una de las coordenadas rectangulares (x,y) dadas, halle sus respectivas coordenadas polares (r,θ),$\theta\in]0,2\pi[$

1. $(x,y)=(5,-5)$
2. $(x,y)=(-\sqrt{3},3)$
3. $(x,y)=(2,2)$
4. $(x,y)=(-2\sqrt{3},-2)$

Problema 4.2.3. 1. Dada la ecuación $r=4\,\mathrm{sen}(\theta)$ en coordenadas polares transformarla a la coordenadas cartesianas e identificar su gráfica.

2. Probar que las ecuaciones polares $r=3$ y $r=-3$, representan ambas a la misma circunferencia de centro el origen y de radio 3.

3. Transformar la ecuación $r^2\cos(2\theta)=4$ a coordenadas cartesianas e identificar su gráfica en el plano.

4. Dada la ecuación cartesiana $x^2+y^2-2x=0$, transformarla a coordenadas polares e identificar su gráfica.

Problema 4.2.4. Escribir cada una de las siguientes ecuaciones cartesianas rectangulares en términos de las coordenas polares (r,θ).

1. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$
2. $x-2y+3=0$
3. $x^2+y^2-6x=0$
4. $y=-4$
5. $x^2=1-4y$
6. $x^2+y^2-4x+2y=0$
7. $y^2=1-4x$
8. $xy=1$

Problema 4.2.5. Expresar cada una de las siguientes ecuaciones, dadas en coordenadas polares, en términos de las coordenadas rectangulares:

1. $r=\operatorname{sen}(\theta)$
2. $r=-4$
3. $r=3+2\cos(\theta)$
4. $r=\dfrac{4}{4-\cos(\theta)}$
5. $\theta=\dfrac{\pi}{6}$
6. $r^2=1-\cos(\theta)$
7. $r=2$
8. $\theta=-\dfrac{\pi}{4}$

Problema 4.2.6. Grafique las siguientes ecuaciones polares

1. $r=3$
2. $r=2\operatorname{sen}(3\theta)$
3. $r=e^\theta$
4. $r=2\cos(\theta)$
5. $\theta=\pi$
6. $r=\cos(\theta)$
7. $r^2=\cos(2\theta)$
8. $r=2\operatorname{sen}(\theta)$
9. $r=|4\operatorname{sen}(\theta)|$
10. $r=2\operatorname{sen}(2\theta)$
11. $r\cos(\theta)=a$
12. $r=(1\pm\cos(\theta))$
13. $r=1+\cos(\theta)$
14. $r=1+2\cos(\theta)$
15. $r\operatorname{sen}(\theta)=1$
16. $r=3(1\pm\operatorname{sen}(\theta))$
17. $r=4-3\operatorname{sen}(\theta)$
18. $r=\operatorname{sen}(\theta)+\cos(\theta)$
19. $r=4-3\cos(\theta)$

Problema 4.2.7. Hallar los puntos de intersección de las gráficas siguientes y el área que encierra las curvas interior y exteriormente, en el orden que aparecen las curvas respectivamente

1. $r=2\operatorname{sen}(\theta)$ y $r=2\cos(\theta)$, $\theta\in[0,2\pi]$
2. $r=\cos(2\theta)$ y $r=\cos(\theta)$, $\theta\in[0,2\pi]$
3. $r=4\left(\cos^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right)-\operatorname{sen}^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\right)$ y $r(1+3\operatorname{sen}^2(\theta))=4\cos(\theta)$
4. $r=2+\cos(\theta)$ y $r=5\cos(\theta)$
5. $r=4\operatorname{sen}(\theta)\cos^2(\theta)$ y $r=\operatorname{sen}(\theta)$
6. $r=\dfrac{2\operatorname{sen}(\theta)}{(3\cos^2(\theta)+1)}$ y $r=\dfrac{8}{7}\operatorname{sen}(\theta)$
7. $r^2=9\cos(2\theta)$ y $r=2-\cos(\theta)$
8. $r=2\cos(2\theta)$ y $r=-2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$, $\theta\in[0,2\pi]$
9. $r=\operatorname{sen}\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$ y $r=1$
10. $r=1+\cos(\theta)$ y $r=1+\operatorname{sen}(\theta)$
11. $r=2\cos(3\theta)$ y $r=1$
12. $r=2(1-\cos(\theta))$ y $r(1+\cos(\theta))=1$
13. $r=4(1-\operatorname{sen}(\theta))$ y $r(1+\operatorname{sen}(\theta))=3$

Problema 4.2.8. 1. Hallar el área de la región que se encuentra fuera de la cardioide $r=2(1+\cos(\theta))$ y dentro de la circunferencia $r=6\cos(\theta)$.

2. Hallar el área común a las circunferencias $r=2\operatorname{sen}(\theta)$ y $r=2\cos(\theta)$

Problema 4.2.9. Dadas las curvas

$$r = 2\cos(3\theta) \tag{4.2}$$

$$r = 1 \tag{4.3}$$

1. Hallar el área que se encuentra interior a (4.2) y exterior a (4.3).

2. Hallar el área que se encuentra exterior a (4.2) e interior a (4.3).

3. Hallar el área que se encuentra interior a (4.2) y a (4.3).

Capítulo 5

Integrales Impropias

En el capítulo de integrales definidas de funciones, calculamos el valor cuyas funciones son continuas y estaban definidas en intervalos de la forma $[a,b]$ con $a,\ b \in \mathbb{R}$, nuestro propósito es calcular integrales de funciones definidas en intervalos de la forma $]-\infty, a]$, $[a, +\infty[$, $]-\infty, +\infty[$, así como también de funciones que son dicontinuas en algún punto $c \in [a,b]$, estas integrales son conocidas como integrales impropias, tienen gran utilidad en diversos de la Matemática, por ejemplo en la solución de ecuacoiones diferenciales ordinarias via trasformada de Laplace, en el estudio de las probabilidades.

5.1. Integrales Impropias de primera y segunda especie

Definición 5.1.1.

1. Llamaremos integral impropia a una expresión siguiente

   a) $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$

   b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$

   c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$

   d) $\displaystyle\int_a^{b} f(x)dx,\ f$ discontinua en $c \in [a,b]$

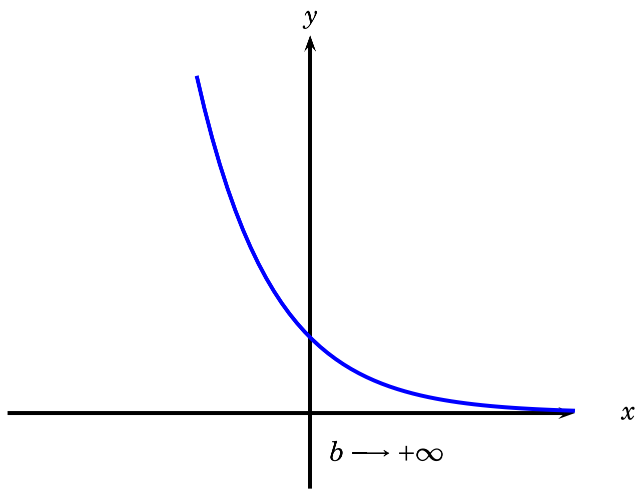
2. Las integrales de la forma $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx,\ \int_{-\infty}^{a} f(x)dx$ se llaman **integral impropia de primera especie**.

3. Las integral de la forma $\displaystyle\int_a^{b} f(x)dx$ con f discontinua en $c \in [a,b]$ se llama **integral impropia de segunda especie**.

Teorema 5.1.1. [Integrales impropias de primera especie] Sea $f(x)$ integrable en $[a,b]$, $\forall b < \infty$ y f es integrable en $[a,b]$, $\forall a > -\infty$ respectivamente.

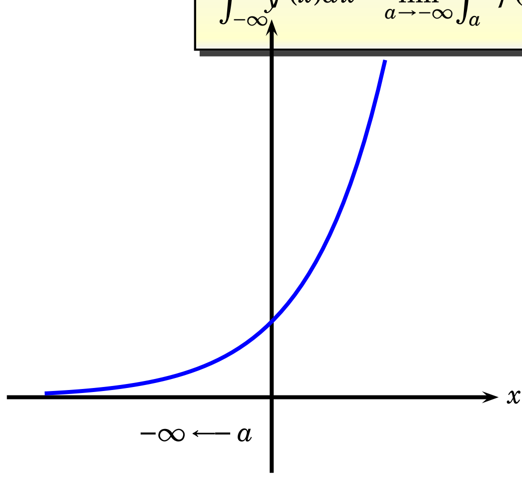
1. Si $\lim\limits_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$ existe entonces

$$\boxed{\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx}$$



2. Si $\lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$ existe entonces

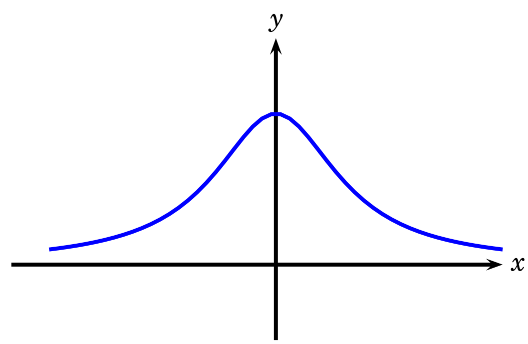
$$\boxed{\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx}$$



Definición 5.1.2. Si f es integrable sobre cada intervalo finito, entonces la integral impropia $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ se define por

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{\infty} f(x)dx,\ a \in R}$$

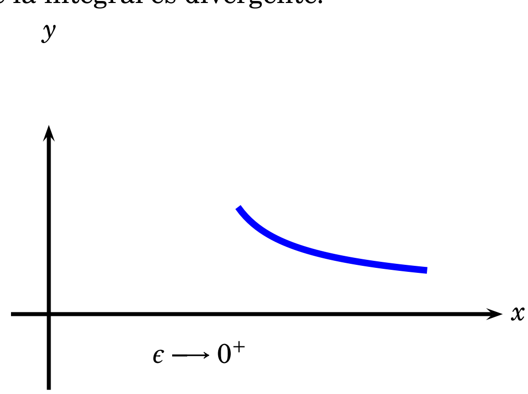
Se dice que la integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ es convergente si ambas integrales del segundo miembro son convergentes, y es divergente si al menos una o ambas integrales del segundo miembro de la igualdad es divergente.



Teorema 5.1.2. [Integrales de segunda especie] Son integrales de la forma $\int_a^b f(x)dx$ para los cuales $f(x)$ no está acotada sobre $[a,b[$, pero es integrable sobre $[a,b-\epsilon]$ para cada $\epsilon > 0$. Estas integrales son convergentes si $\lim\limits_{\epsilon\to 0^+} \int_a^{b-\epsilon} f(x)dx$ existe y en tal caso se tiene

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_a^{b-\epsilon} f(x)dx.}$$

Si tal límite no existe se dice que la integral es divergente.



Teorema 5.1.3. De manera similar, si $f(x)$ es integrable sobre $[a+\epsilon, b]$ para cada $\epsilon > 0$ y no está acotada sobre $]a, b]$ entonces se define

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{a+\epsilon}^b f(x)dx.$$

Teorema 5.1.4. Considere $f,\ g:\ [a,b[\to \mathbb{R}$ tales que $0 \le g(x) \le f(x),\ \forall\ x \in [a,b[$ y además integrable en $[a,c[,\ \forall\ c \in [a,b[$ entonces

1. si $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ es convergente, entonces $\displaystyle\int_a^b g(x)dx$ es convergente

2. si $\displaystyle\int_a^b g(x)dx$ es divergente, entonces $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ es divergente

Ejemplo 5.1.5. Calcular la integral $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x}{e^x}dx$,

Resolución: ► *En efecto*

$$\int \frac{x}{e^x}dx = \int xe^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x}$$

Entonces

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} \frac{x}{e^x}dx &= \lim_{a\to+\infty}\int_1^a xe^{-x}dx = \lim_{a\to+\infty}\left(-xe^{-x} - e^{-x}\right)\Big|_1^a \\ &= \lim_{a\to+\infty}(-ae^{-a} - e^{-a} + e^{-1} + e^{-1}) = \frac{2}{e}\end{aligned}$$

La integral es convergente. ◄

Ejemplo 5.1.6. Calcule las integrales siguientes

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$
2. $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^3dx}{\sqrt{x-1}}$
3. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |x|e^{-x^2}dx$

Resolución: ▶

1.

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} &= \lim_{\epsilon\to 0}\int_0^{1-\epsilon}\frac{dx}{\sqrt{1-x}}\\ &= \lim_{\epsilon\to 0}(-2\sqrt{1-x})\Big|_0^{1-\epsilon} = -2\lim_{\epsilon\to 0}(\sqrt{\epsilon}-1) = -2(0-1)=2\\ &\Longrightarrow \boxed{\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = 2}\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{x^3dx}{\sqrt{x-1}} &= \lim_{\epsilon\to 0}\int_{1+\epsilon}^2 \frac{x^3dx}{\sqrt{x-1}} = \lim_{\epsilon\to 0}2\sqrt{x-1}\left(\frac{x-2}{3}7+3(x-1)^{\frac{3}{2}}+x\right)\Bigg|_{1+\epsilon}^2\\ &= \lim_{\epsilon\to 0}\left(\frac{72}{7}+\sqrt{\epsilon}(\frac{\epsilon}{7}+3\epsilon^{\frac{3}{2}}+17\epsilon)\right)\\ &\Longrightarrow \boxed{\int_1^2 \frac{x^3dx}{\sqrt{x-1}} = \frac{72}{7}}\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}|x|e^{-x^2}dx &= \int_{-\infty}^0 |x|e^{-x^2}dx+\int_0^{+\infty}|x|e^{-x^2}dx\\ &= \int_{-\infty}^0 -xe^{-x^2}dx+\int_0^{+\infty}xe^{-x^2}dx\\ &= \lim_{a\to-\infty}\frac{e^{-x^2}}{2}\Bigg|_a^0 - \lim_{b\to+\infty}\Bigg|_0^b = \frac{1}{2}\left(\lim_{a\to-\infty}(1-e^{-a^2})-\lim_{b\to+\infty}(e^{-b^2}-1)\right)\\ &= \frac{1}{2}[(1-0)-(0-1)]\\ &\Longrightarrow \boxed{\int_{-\infty}^{+\infty}|x|e^{-x^2}dx = 1}\end{aligned}$$

◀

Ejemplo 5.1.7. Calcule

1. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+1}$ 2. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x^5}{(1+x^3)^{5/2}}dx$ 3. $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^3+x^2}$

Resolución: ▶

(1)

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+1} = \lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{b\to\infty}(arctan(b)-arctan(0)) = \frac{\pi}{2}$$

◀

Continuación ejercicio anterior
Resolución: ►

$$
\begin{aligned}
B &= \int_1^b \frac{x^5}{(1+x^3)^{5/2}}dx = \frac{1}{3}\int_2^{b^3+1}\frac{(u-1)}{u^{5/2}}du = \frac{1}{3}\int_2^{b^3+1}(u^{-3/2}-u^{-5/2})du \\
&= \frac{2}{3}\left.(u^{-3/2}-u^{-1/2})\right|_2^{b^3+1} = \frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{2}{3(b^3+1)^{3/2}} - \frac{2}{3(b^3+1)^{1/2}}
\end{aligned}
$$

Luego

$$\lim_{b\to\infty} \frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{2}{3(b^3+1)^{3/2}} - \frac{2}{3(b^3+1)^{1/2}} = \frac{1}{3\sqrt{2}}$$

Note que $\frac{1}{x^3+x^2} \leq \frac{1}{x^3}$, $\forall\ x \in [1,+\infty[$,*y como* $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^3} = \frac{1}{4}$, $\forall\ x\in[1,+\infty[$ *es convergente, entonces*

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^3+x^2} \quad \leq \quad \int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^3}$$

por tanto $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^3+x^2}$ *es convergente.*

◄

5.1.1. Ejercicios Propuestos

Problema 5.1.1. Explique por qué cada una de las integrales siguientes es impropia

1. $\int_1^{+\infty} x^4 e^{-x^4}dx$ 2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sec(x)dx$ 3. $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^2+5}dx$ 4. $\int_0^2 \frac{x}{x^2-5x+6}dx$

Problema 5.1.2. ¿Cuál de las siguientes integrales son impropias? ¿Por qué?

1. $\int_1^2 \frac{1}{2x-1}dx$ 2. $\int_0^1 \frac{1}{2x-1}dx$ 3. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\text{sen}(x)}{1+x^2}dx$ 4. $\int_1^2 \ln(x-1)dx$

Problema 5.1.3. Calcule el valor de las siguientes integrales

1. $\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx$ 2. $\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x)^2}dx$ 3. $\int_{-\infty}^1 \frac{1}{(2-x)^3}dx$ 4. $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$

Problema 5.1.4. Analice la convergencia o divergencia de las siguientes integrales

1. $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x}$ 4. $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$, $p\in R$ 7. $\int_0^{+\infty}\cos(x)dx$ 10. $\int_1^{+\infty}\frac{\ln(x)}{x}dx$

2. $\int_{-\infty}^0 xe^x dx$ 5. $\int_0^{+\infty}e^{-x}dx$ 8. $\int_0^{+\infty}\frac{5}{2x+3}dx$ 11. $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}dx$

3. $\int_1^{+\infty}\frac{1+e^{-x}}{x}dx$ 6. $\int_{-\infty}^1\frac{1}{(2x-3)^2}dx$ 9. $\int_{-\infty}^1 xe^{2x}dx$ 12. $\int_1^{+\infty}\frac{x}{x^4+1}dx$

Problema 5.1.5. Analice la convergencia o divergencia de las siguientes integrales, en caso que converja calcule el valor de la integral.

1. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$
2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{(1+x^2)^2}dx$
3. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}dx$
4. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(a^2+x^2)^{3/2}}$
5. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^3 dx$
6. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2}dx$
7. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (2x^2-x+3)dx$
8. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$

Problema 5.1.6. Calcule las integrales siguientes:

1. $\displaystyle\int_0^9 \frac{dx}{\sqrt{x}}$
2. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{\sqrt{\operatorname{sen}(x)}}dx$
3. $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$
4. $\displaystyle\int_{-4}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x+2}}$

Problema 5.1.7. Analice la convergencia o divergencia de las integrales siguientes:

1. $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$
2. $\displaystyle\int_0^1 x\ln(x)dx$
3. $\displaystyle\int_0^4 \frac{xdx}{\sqrt{16-x^2}}$
4. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$

Capítulo 6

Sucesiones y series de números reales

El propósito de esta sección es desarrollar la unidad de series de números reales. Esta unidad está estrechamente ligada al concepto de sucesiones de números reales y para lograr rigurosidad en el tratamiento de ellas es necesario referirse previamente a sucesiones infinitas de números reales.

6.1. Sucesiones de números reales

Definición 6.1.1.

1. Una sucesión de números reales es una aplicación:

$$\boxed{f:\mathbb{N}\to\mathbb{R} \text{ tal que} f(n)\to a_n.}$$

2. Escribiremos la sucesión en la forma $\{a_n\}_{n\in I\!N}$, entendiendo $\{a_n\}_{n\in I\!N}=\{a_1,a_2,a_3,a_4,\cdots,a_n,\cdots\}$ con $a_i\in\mathbb{R},\ i=\{1,2,3,\cdots\}$. En algunos casos, es conveniente iniciar la sucesión desde $i=0$.

Ejemplo 6.1.1.

(a) $\{a_n\}_{n\in I\!N}=\{3+(-1)^n\}=\{2,4,2,4,2,4,2,4,\cdots\}$

(b) $\{a_n\}_{n\in I\!N}=\left\{\dfrac{n}{2^n-1}\right\}_{n\in I\!N}=\left\{1,\dfrac{2}{3},\dfrac{3}{7},\dfrac{5}{15},\dfrac{5}{24},\cdots\right\}$

(c) $\{a_n\}_{n\in I\!N}=\{2n\}_{n\in I\!N}=\{2,4,6,8,10,12,\cdots\}$ sucesión de los números pares.

(d) $\{a_n\}_{n\in I\!N}=\{2n-1\}_{n\in I\!N}=\{1,3,5,7,9,11,\cdots\}$ sucesión de los números impares.

(e) $\{a_n\}_{n\in I\!N}=\left\{\dfrac{1}{n}\right\}_{n\in I\!N}=\left\{1,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{4},\cdots\right\}$

(f) $\{a_n\}_{n\in I\!N}=\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}_{n\in I\!N}=\left\{\dfrac{1}{2},\dfrac{2}{3},\dfrac{3}{4},\cdots\right\}$

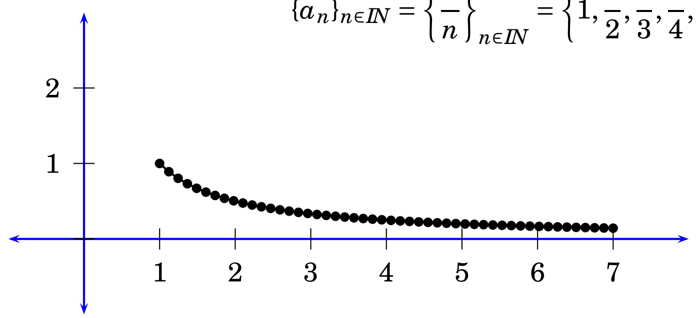
Observación 6.1.2.

1. Entre la gran variedad de sucesiones de números reales que podemos estudiar nos interesará aquellas que están relacionadas con sumas infinitas. En la unidad siguiente introduciremos estas ideas.

2. Los ejemplos anteriores tienen la particularidad de que a medida que avanzamos en la sucesión, los términos presentan una tendencia a aproximarse a un valor real determinado.

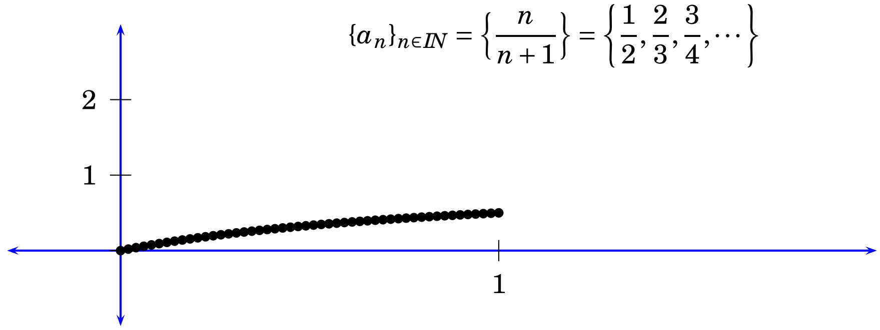
3. Por ejemplo, en la sucesión siguiente la tendencia es 0

$$\{a_n\}_{n\in I\!N} = \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\in I\!N} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots\right\}$$



En este otro ejemplo la tendencia de la sucesión siguiente es 1

$$\{a_n\}_{n\in I\!N} = \left\{\frac{n}{n+1}\right\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots\right\}$$



En ambos casos decimos que la sucesión tiene un límite.En el primer caso el límite es 0 y en el segundo es 1. Daremos la siguiente definición:

Definición 6.1.2. Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión de números reales y sea $L \in \mathbb{R}$. Diremos que el límite de $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es el número L si

$$\boxed{\text{dado } \epsilon > 0 \text{ existe } N \in \mathbb{N} \text{ tal que } |a_n - L| < \epsilon \text{ siempre que } n > N}.$$

o equivalentemente

$$\boxed{\forall\ \epsilon > 0,\ \exists\ N \in \mathbb{N}:\ |a_n - L| < \epsilon,\ \forall\ n \geq N}.$$

En tal caso diremos que la sucesión es convergente y converge al número L. En cualquier otro caso diremos que la sucesión es divergente.

Ejemplo 6.1.3. Usando la definición demostremos que $\lim\limits_{n\to\infty}\left(5-\dfrac{1}{n^2}\right)=5$

Resolución: ► *Debemos probar que dado $\epsilon>0$ existe $N\in\mathbb{N}$ tal que para todo $n>N$ se cumple $|a_n-L|<\epsilon$. En efecto,*

$$|a_n-L|=\left|5-\frac{1}{n^2}-5\right|=\left|-\frac{1}{n^2}\right|=\left|\frac{1}{n^2}\right|=\frac{1}{n^2}\Rightarrow|a_n-L|=\frac{1}{n^2}<\frac{1}{N^2}$$

de esta forma, para hacer que $|a_n-L|<\epsilon$ basta exigir que $\dfrac{1}{N^2}\leq\epsilon$ o bien $N\geq\dfrac{1}{\sqrt{\epsilon}}$ para completar la demostración.

Por ejemplo, si $\epsilon=0{,}002$, entonces $\dfrac{1}{\epsilon}\approx 22{,}36$ y de esta manera podemos seleccionar $N=23$ o cualquier otro entero positivo mayor. ◄

Teorema 6.1.4.

1. Si el límite de una sucesión existe entonce el límite es único.
2. Sea $A\subset\mathbb{R}$ y sea $f:A\to\mathbb{R}$ función tal que $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=L$. Sea $\{a_n\}_{n\in I\!N}$ una sucesión de números reales tal que $a_n=f(n)$ para cada $n\in I\!N$. Entonces

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}(a_n)=L}$$

Propiedades 6.1.5. [Sobre álgebra de sucesiones] Dadas las sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$ y $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=B$ entonces

1. la sucesión $(a_n+b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente y $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=A+B$
2. la sucesión $(a_n-b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente y $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=A-B$
3. la sucesión $(a_n\cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente y $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=A\cdot B$
4. la sucesión $\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente y $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)=\dfrac{A}{B}$ si $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=B\neq 0$

Observación 6.1.6. Dadas las sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$

1. Si $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$ y $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=B$ y $B=0,\ A\neq 0$ entonces $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)=\dfrac{A}{B}$ no existe.
2. Si $B=0$ y $A=0$ entonces $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)$ puede no existir.

6.1.1. Sucesiones especiales

Propiedades 6.1.7.

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1,\ a > 0$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} n^a = \begin{cases} +\infty & , \quad a > 0 \\ 1 & , \quad a = 0 \\ 0 & , \quad a < 0 \end{cases}$
4. $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = \begin{cases} +\infty & , \quad a > 1 \\ 1 & , \quad a = 1 \\ 0 & , \quad |a| < 1 \end{cases}$
5. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e$
6. Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ existe entonces $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^p = A^p$, con $p \in \mathbb{R}$.
7. Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ existe entonces $\lim\limits_{n\to\infty} p^{a_n} = p^A$ si p^A existe, con $p \in \mathbb{R}$.

Teorema 6.1.8. [Teorema del Sandwich] Sean $(a_n)_{n\in N}$, $(b_n)_{n\in N}$ sucesiones convergentes tales que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = L$. Sea $(c_n)_{n\in I\!N}$ tal que $a_n \leq c_n \leq b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ o para todo $n > N$, N algún entero positivo. Entonces la sucesión $(c_n)_{n\in I\!N}$ es también convergente y converge a L, es decir

$$\boxed{\text{si } \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = L \text{ y } (c_n)_{n\in I\!N} \text{ tal que } a_n \leq c_n \leq b_n \text{ entonces } \lim_{n\to\infty} c_n = L}$$

Teorema 6.1.9. [L$'$hospital para $\frac{0}{0}$] Sean f, g diferenciables en $\mathbb{R}$ tales que $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$. Si existe L tal que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$ entonces

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L}$$

Teorema 6.1.10. [L$'$hospital para $\frac{\infty}{\infty}$] Sean f, g diferenciables en $\mathbb{R}$ y se tiene $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$. Si además existe L tal que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$ entonces

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L}$$

Ejemplo 6.1.11.

1. $a_n = a$ donde $(a_n) = \{a, a, \cdots\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, donde $a \in \mathbb{R}$, esta sucesión se llama ***sucesión constante***

2. $a_n = n$ donde $(a_n) = \{1, 2, \cdots, n, \cdots\}$, esta sucesión se llama ***sucesión de los números naturales***

3. Sucesiones recurrentes son las ***progresiones aritméticas*** de primer término x y razón h, que pueden definirse recursivamente por $a_1 = x, a_n + 1 = a_n + h$,

4. Las progresiones geométricas de primer término x y razón r, dadas por $S_1 = x$, $S_n + 1 = S_n \cdot r$.

Propiedades 6.1.12.

1. El límite de un sucesión convergente es única.

2. Una sucesión (a_n) está aotada superiormente si existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $\forall\ n \in \mathbb{N}$ se cumple $a_n \leq c$.

3. Una sucesión (S_n) está acotada inferiormente si existe algún número $c \in \mathbb{R}$ tal que $\forall\ n \in \mathbb{N}$ se cumple $c \leq a_n$.

4. Una sucesión (a_n) está acotada si lo está superior e inferiormente, es decir si existe un número $M \geq 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}, |a_n| \leq M$

5. Toda suscesión convergente es acotada.

6. Si (a_n) es una sucesión acotada y (b_n) es una sucesión convergente a 0, la sucesion $(a_n \cdot b_n)$ converge a cero.

6.1.2. Sucesiones monótonas

Definición 6.1.3.

1. Una sucesión (S_n) es monótona no decreciente si y solo si para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica $S_n \leq S_{n+1}$.

2. Una (S_n) es monótona no creciente si y solo si para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica $S_n \geq S_{n+1}$.

3. Una sucesión (S_n) es estrictamente creciente si y solo si para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica $S_n < S_{n+1}$.

4. Una sucesión (S_n) es estrictamente decreciente si y solo si para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica $S_n > S_{n+1}$

Definición 6.1.4. [Límites infinitos]

1. Sea $f :]a, +\infty[\to \mathbb{R}$, se dice que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \text{ sí y sólo si para cada } \epsilon > 0 \text{ existe un } N > 0 \text{ tal que } N < x \Longrightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

2. Sea $f :]-\infty, b[\to \mathbb{R}$, se dice que

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L \text{ sí y sólo si para cada } \epsilon > 0 \text{ existe un } N > 0 \text{ tal que } x < -N \Longrightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

3. Sea $f :]-\infty, +\infty[\to \mathbb{R}$, se dice que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \text{ sí y sólo si para cada } M > 0 \text{ existe un } N > 0 \text{ tal que } x > N \Longrightarrow f(x) > M > 0$$

4. Sea $f :]-\infty, +\infty[\to \mathbb{R}$, se dice que

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \text{ si y sólo si para cada } M > 0 \text{ existe un } N > 0 \text{ tal que } x < -N \Longrightarrow f(x) > M > 0$$

5. Sea $f :]-\infty, +\infty[\to \mathbb{R}$, se dice que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \text{ y sólo si para cada } M > 0 \text{ existe un } N > 0 \text{ tal que } x > N \Longrightarrow f(x) < -M$$

6. Sea $f :]-\infty, +\infty[\to \mathbb{R}$, se dice que

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \text{ si y sólo si para cada } M > 0 \text{ existe un } N > 0 \text{ tal que } x < -N \Longrightarrow f(x) < -M$$

Ejemplo 6.1.13. Escribir los 5 primeros términos de la sucesiones:

1. $\left\{\dfrac{2n+1}{3n+1}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$

2. $\left\{\dfrac{1-(-1)^n}{n^3}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$

3. $\left\{\dfrac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$

4. $\left\{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$

Resolución: ►

1. $\dfrac{3}{5},\dfrac{5}{8},\dfrac{7}{11},\dfrac{9}{14},\dfrac{11}{17}$

2. $\dfrac{x}{1!},-\dfrac{x^3}{3!},\dfrac{x^5}{5!},-\dfrac{x^7}{7!},\dfrac{x^9}{9!}$

◄

Ejemplo 6.1.14. Diga si es o no convergente las sucesiones siguientes

1. $\left\{\dfrac{6n+1}{8n+5}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} x^n,\ |x|<1$

Resolución: ►

1.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{6n+1}{8n+5}\right) &= \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\cancel{n}}{\cancel{n}}\right)\cdot\left(\frac{6+\dfrac{1}{n}}{8+\dfrac{5}{n}}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(6+\dfrac{1}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(8+\dfrac{5}{n}\right)} \\
&= \frac{\left(6+\cancelto{0}{\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}}\right)}{\left(8+\cancelto{0}{\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{5}{n}}\right)} = \frac{6}{8} \\
&\Longrightarrow \boxed{\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{6n+1}{8n+5}\right)=\frac{3}{4}}
\end{aligned}$$

2. Tarea

◄

Ejemplo 6.1.15. Calcular

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(3+e^n)}{4n}$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{4-2n-3n^2}{2n^2+n}\right)$

Resolución: ►

1. Note que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left[\ln(3+e^n)\right] = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} 4n = +\infty$, *aplicamos L´Hospital*

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(3+e^n)}{4n} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{(\ln(3+e^n))'}{(4n)'} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\left(\frac{1}{3+e^n}\right)\cdot(3+e^n)'}{4} \right) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{3+e^n}\cdot e^n}{4} = \lim_{n\to+\infty} \frac{e^n}{4(3+e^n)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\frac{12}{e^n}+4} \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n+1}-\sqrt{n} &= \lim_{n\to+\infty} (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\cdot\frac{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(\sqrt{n+1})^2-(\sqrt{n})^2}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\cdot \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} \\
&= 0\cdot\frac{1}{2} = 0
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{4-2n-3n^2}{2n^2+n}\right) &= \lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{n^2}\left(\frac{4}{n^2}-\frac{2}{n}-3\right)}{\cancel{n^2}\left(2+\frac{1}{n}\right)} = \frac{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{4}{n^2}-\frac{2}{n}-3\right)}{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right)} \\
&= \frac{\overset{0}{\cancel{\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{4}{n^2}}} - \overset{0}{\cancel{\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2}{n}}} - \lim\limits_{n\to+\infty} 3}{\lim\limits_{n\to+\infty} 2 + \overset{0}{\cancel{\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2}{n}}}} \\
&= \frac{-3}{2}
\end{aligned}$$

◄

Ejemplo 6.1.16. Calcule

1. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n$ 2. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{5}{3}\right)^n$ 3. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\cos(n)}{n}$

Resolución: ►

1.

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n = 0, \text{ por propiedad 3.1.7 con } a=\frac{3}{4}$$

2.

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{5}{3}\right)^n = +\infty, \text{ por propiedad 3.1.7 con } a=\frac{5}{3}$$

3. Note que $|\cos(x)|\le 1,\ \forall\ x\in\mathbb{R}$, *entonces*

$$\begin{array}{ccccc}
0 & \le & \left|\frac{\cos(n)}{n}\right| & \le & \frac{1}{n}\\
\lim\limits_{n\to+\infty}(0) & \le & \lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{\cos(n)}{n}\right| & \le & \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\\
0 & \le & \lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{\cos(n)}{n}\right| & \le & 0
\end{array}$$

Esto implica que $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\cos(n)}{n}=0$

◄

6.1.3. Criterios de convergencia de sucesiones

Teorema 6.1.17. [De la media aritmética] Dada la sucesión convergente $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$,

$$\text{si } \lim_{n\to+\infty}a_n=L \text{ entonces } \lim_{n\to+\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=L$$

Teorema 6.1.18. [Criterio de la razón] Dada la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$,

$$\text{si } \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<1 \text{ entonces } \lim_{n\to+\infty}a_n=0$$

Por lo tanto la sucesión es convergente.

Ejemplo 6.1.19. Calcule

1. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{16n^2+3}}\left(\sqrt{\frac{3}{4}}+\sqrt{\frac{4}{5}}+\sqrt{\frac{5}{6}}+\cdots+\sqrt{\frac{n+2}{n+3}}\right)$

2. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{6^n}{n!}$

3. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{4^n}$

Resolución: ►

1. Note que

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt{\frac{n+2}{n+3}}=\sqrt{\lim_{n\to+\infty}1-\frac{1}{n+3}}=1$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{\sqrt{16n^2+3}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\cancel{n}}{\cancel{n}\sqrt{16+\frac{3}{n^2}}}=\frac{1}{\sqrt{\lim_{n\to+\infty}\left(16+\frac{3}{n^2}\right)}}=\frac{1}{4}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{\frac{3}{4}}+\sqrt{\frac{4}{5}}+\sqrt{\frac{5}{6}}+\cdots+\sqrt{\frac{n+2}{n+3}}}{n}\right)=1$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{\sqrt{16n^2+3}}\cdot\frac{1}{n}\left(\sqrt{\frac{3}{4}}+\sqrt{\frac{4}{5}}+\sqrt{\frac{5}{6}}+\cdots+\sqrt{\frac{n+2}{n+3}}\right)\quad=\quad\frac{1}{4}\cdot 1$$

$$\Longrightarrow\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{16n^2+3}}\left(\sqrt{\frac{3}{4}}+\sqrt{\frac{4}{5}}+\sqrt{\frac{5}{6}}+\cdots+\sqrt{\frac{n+2}{n+3}}\right)\quad=\quad\frac{1}{4}$$

2. $a_n=\dfrac{6^n}{n!}$, $a_{n+1}=\dfrac{6^{n+1}}{(n+1)!}$. *Entonces*

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\frac{6^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{6^n}{n!}}\right| &= \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{n!6^{n+1}}{(n+1)!6^n}\right|=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\cancel{n!}6\cdot\cancel{6^n}}{(n+1)\cdot\cancel{n!}\cancel{6^n}}\right|\\ &= \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{6}{n+1}\right|=0<1\end{aligned}$$

Por tanto la sucesión es convergente.

◄

6.2. Series de números reales

Definición 6.2.1.

1. Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión de números reales, se define a la suma infinita $a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots$ **serie infinita**.
2. A la serie infinita la denotaremos por

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}a_n=a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots}$$

Ejemplo 6.2.1. Representar las series siguientes como la suma de algunos de sus términos

1. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n+1}$ 2. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n+1}$ 3. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-1)!}{(3n-2)!}$ 4. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

Resolución: ►

1.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n+1} = \frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\cdots+\frac{n}{n+1}+\cdots$$

2.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n+1} = \frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{2n+1}+\cdots$$

3.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-1)!}{(3n-2)!} = \frac{1}{1}+\frac{3!}{4!}+\frac{5!}{7!}+\cdots+\frac{(2n-1)!}{(3n-2)!}+\cdots$$

4.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots$$

◄

Observación 6.2.2. Estamos interesados en calcular el valor de la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots$, para ello construiremos una sucesión de sumas parciales denotada por $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de la manera siguiente

$$\begin{aligned}
S_1 &= a_1 = \sum_{n=1}^{1} a_n \\
S_2 &= a_1+a_2 = \sum_{n=1}^{2} a_n \\
S_3 &= a_1+a_2+a_3 = \sum_{n=1}^{3} a_n \\
\vdots &= \vdots \\
S_n &= a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n = \sum_{n=1}^{n} a_n \\
\vdots &= \vdots
\end{aligned}$$

Definición 6.2.2.

1. A la sucesión $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ se llama sucesión de sumas parciales, donde $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$.

2. Dada la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots +$ y la sucesión $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de sumas parciales, si $\lim\limits_{n\to+\infty} (S_n) = S$ existe, es decir $S \in \mathbb{R}$ entonces la serie $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge a S, en caso contrario diverge.

3. Si tal serie es convergente se puede escribir

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} (S_n) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = S}$$

.

Teorema 6.2.3.

1. Si la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente entonces $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$

2. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n \neq 0$ entonces la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente.

Ejemplo 6.2.4. analice la convergencia o divergencia de las siguientes series

1. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n$
2. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n(n+1)}$
3. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{3n^2+n+1}{n^2-2}$
4. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n}$

Resolución: ►

1. **Forma 1** *Resolveremos la serie $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n$ mediante sucesión de sumas parciales*

$$\{S_n\} = \{\sum_{n=1}^{n} n\} = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n(n+1)}{2} = +\infty \neq 0$$

Por tanto la serie diverge.

Forma 2 *La serie $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n$ tiene término general $a_n = n$, entonces*

$$\lim_{n\to+\infty} n = +\infty \neq 0$$

Por tanto la serie diverge.

◄

Resolución: ►

2. *Resolveremos la serie* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ *mediante sucesión de sumas parciales* $\{S_n\}$, *note que* $a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

$$
\begin{aligned}
S_1 &= 1 - \frac{1}{2} = \sum_{n=1}^{1} \frac{1}{n(n+1)} \\
S_2 &= \left(1 - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}\right) = 1 - \frac{1}{3} = \sum_{n=1}^{2} \frac{1}{n(n+1)} \\
S_3 &= \left(1 - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \frac{1}{4}\right) = 1 - \frac{1}{4} = \sum_{n=1}^{3} \frac{1}{n(n+1)} \\
\vdots &= \vdots \\
S_n &= \left(1 - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}}\right) + \cdots + \left(\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} = \sum_{n=1}^{n} \frac{1}{n(n+1)} \\
\vdots &= \vdots
\end{aligned}
$$

$$
\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1
$$

Por tanto la serie es convergente y el valor de la suma es 1.

3. *el término* $a_n = \frac{3n^2+n+1}{n^2-2}$ *entonces*

$$
\lim_{n\to+\infty} \frac{3n^2+n+1}{n^2-2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{n^2}\left(3 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)}{\cancel{n^2}\left(1 - \frac{2}{n^2}\right)} = \frac{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(3 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1 - \frac{2}{n^2}\right)} = 3 \neq 0
$$

Por tanto la serie diverge.

◄

Observación 6.2.5.

1. Algunas veces la serie infinita comienza en el término a_0 ó en a_2 ó en algún otro término, entonces

   Si $k>0$ entero escribiremos $\sum_{n=k}^{+\infty} a_n = a_k + a_{k+1} + \cdots$

2. Suponga la serie $\sum_{n=k}^{+\infty} a_n$ y que la sucesión de sumas parciales es convergente, entonces: $\lim_{n\to+\infty} S_n = S$ si y sólo si $\lim_{n\to+\infty}(S_n - c) = S - c$
   esto indica que podemos omitir un número finito de términos, entre los primeros, de una serie infinita, sin que afecta la convergencia o divergencia de la serie, claro esta que le valor de la suma quedará afectado.

Propiedades 6.2.6. Sean las series $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ convergentes y $c \in \mathbb{R}$, entonces

1. $\sum_{n=1}^{+\infty} ca_n = c\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ es convergente.
2. $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ es convergente.
3. $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n - b_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n - \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ es convergente.

Teorema 6.2.7. [Serie geométrica] La serie de la forma $\sum_{n=0}^{+\infty} ar^n$ se llama geométrica y si

1. $|r|<1$ la serie es convergente y $\sum_{n=0}^{+\infty} ar^n = \dfrac{a}{1-r}$.
2. $|r|\geq 1$ la serie es divergente.

Teorema 6.2.8. [Criterio de la integral] Sea $f:\ [1,+\infty[\to \mathbb{R}$ función tal que

- f es continua
- f decreciente
- f es positiva

y sea $a_n = f(n)$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$. Entonces

1. la integral $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ es convergente si y sólo la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ es convergente.
2. la integral $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ es divergente si y sólo la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ es divergente.

Ejemplo 6.2.9. analice la convergencia o divergencia de las siguientes series

1. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 3^n$
2. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n}$
3. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1+n}{n}\right)^n$
4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$
5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$
6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^n}$

Resolución: ►

1. *La serie* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 3^n$ *es geométrica, es decir*

$$\sum_{n=0}^{\infty} 3^n = \sum_{n=0}^{+\infty} ar^n, \text{ donde } a = 1,\ r = 3 > 1$$

Como $|r| > 1$ *la serie es divergente.*

2. *La serie* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ *es geométrica, es decir*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} ar^n, \text{ donde } a = 1,\ r = \frac{1}{3} < 1$$

Como $|r| < 1$ *la serie es convergente.*

◄

Resolución: ►

3. *Para la serie* $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1+n}{n}\right)^n$ *el término* $a_n=\left(\frac{1+n}{n}\right)^n$, *ahora calculamos*

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1+n}{n}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e\neq 0$$

entonces la serie $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1+n}{n}\right)^n$ *es divergente*

4. *Identificando* $f(x)=\frac{1}{x},\ x\geq 1$

   - $f(x)=\frac{1}{x},\ \forall\, x\geq 1$ *es continua.*
   - $f(x)=\frac{1}{x}\geq 1,\ \forall\ x\geq 1$ *es positiva.*
   - $f(x)=\frac{1}{x}$ *es decreciente.*

   En efecto

   $x\leq x+1,\ \forall x\geq 1 \Longrightarrow \underbrace{\frac{1}{x+1}}_{f(x+1)}\underbrace{\leq}_{\leq}\underbrace{\frac{1}{x}}_{f(x)}$ *implica que* f *es decreciente*

   $a_n=f(n)=\frac{1}{n}$, *calculando la integral impropia*

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}dx = \lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{dx}{x}=\lim_{b\to+\infty}\left(\ln|x|\Big|_1^b\right)=\lim_{b\to+\infty}(\ln|b|-\ln(1))=\lim_{b\to+\infty}\ln|b|-0=+\infty$$

   La integral diverge por tanto la serie también diverge.

6. *Para la serie* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{e^n}$ *definimos la función* $f:[1,\infty[\to$ *tal que* $f(x)=\frac{x}{e^x}$ *es positiva y continua para todo* $x\geq 1$

   Veremos que $f(n)=\frac{n}{e^n}$ *es decreciente*

$$f'(n) = \frac{e^n-ne^n}{(e^n)^2}=\frac{1-n}{e^n}<0$$

   entonces f *es decreciente. Aplicando el criterio de la integral y resolviendo por partes la integral, tenemos*

$$\int_1^{+\infty}\frac{x}{e^x}dx = \lim_{b\to+\infty}\left(\underbrace{\int_1^b xe^{-x}dx}_{u=x;\ du=dx; dv=e^{-x}dx;\ v=-e^{-x}}\right)=\lim_{b\to+\infty}\left(-xe^{-x}-e^{-x}\right)\Big|_1^b$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\left(-e^{-x}(1+x)\right)\Big|_1^b=\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{-(1+x)}{e^x}\right)\Big|_1^b=\lim_{b\to+\infty}\left(\underbrace{-\frac{b+1}{e^b}}_{Lhospital}+\frac{2}{e}\right)=\frac{2}{e}$$

   de donde, $\int_1^{\infty}\frac{x}{e^x}dx$ *converge Por tanto la serie también converge.*

◄

Ejemplo 6.2.10. Expresar el número $0,070707\cdots$ periódico, como un número racional.

Resolución: ► *Escribimos*

$$\begin{aligned}
0{,}070707070\cdots &= 0{,}07+0{,}0007+0{,}000007+0{,}00000007+\cdots\\
&= \frac{7}{100}+\frac{7}{10000}+\frac{7}{1000000}+\frac{7}{100000000}+\cdots\\
&= \frac{7}{10^2}+\frac{7}{10^4}+\frac{7}{10^6}+\frac{7}{10^8}+\cdots\\
&= \frac{7}{10^2}\left(1+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^4}+\frac{1}{10^6}+\cdots\right)\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{7}{10^2}\left(\frac{1}{10^2}\right)^n
\end{aligned}$$

Donde la serie $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{7}{10^2}\left(\frac{1}{10^2}\right)^n$ *es una serie geométrica* $a=\frac{7}{10^2}$, $r=\frac{1}{10^2}$ *entonces*

$$0{,}070707070\cdots = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{7}{10^2}\left(\frac{1}{10^2}\right)^n = \frac{\frac{7}{10^2}}{1-\frac{1}{10^2}} = \frac{7}{99}$$

◄

Ejemplo 6.2.11. Se deja caer libremente una pequeña esfera desde una altura 12 metros alcanzado en cada bote $\frac{4}{5}$ de la altura alcanzada en el bote anterior. Obtenga la distancia total que habrá recorrido la bola.

Resolución: ►
Al llegar al suelo la primera vez, la esfera ha alcanzado una distancia $d_1 = 12$ *metros. Según la hipótesis las distancias* $d_1,\ d_2,\ d_3,\ \cdots$ *estará dada por*

$$
\begin{array}{rcccl}
d_1 & = & 12 = 24 - 12 & = & -12 + 24\left(\frac{4}{5}\right)^0 \\
d_2 & = & 12\left(\dfrac{4}{5}\right) + 12\left(\dfrac{4}{5}\right) & = & 24\left(\frac{4}{5}\right) \\
d_3 & = & 12\left(\dfrac{4}{5}\right)\left(\dfrac{4}{5}\right) + 12\left(\dfrac{4}{5}\right)\left(\dfrac{4}{5}\right) & = & 24\left(\frac{4}{5}\right)^2 \\
d_4 & = & 12\left(\dfrac{4}{5}\right)\left(\dfrac{4}{5}\right)\left(\dfrac{4}{5}\right) + 12\left(\dfrac{4}{5}\right)\left(\dfrac{4}{5}\right)\left(\dfrac{4}{5}\right) & = & 24\left(\frac{4}{5}\right)^3 \\
\vdots & = & \vdots & & \\
d_n & = & & = & 24\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}
\end{array}
$$

Sumando todos los términos obtenemos la serie

$$
\begin{array}{rcl}
d & = & \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} d_n = -12 + 24\left(\frac{4}{5}\right)^0 24\left(\frac{4}{5}\right) + 24\left(\frac{4}{5}\right)^2 + 24\left(\frac{4}{5}\right)^3 + \cdots = -12 + \sum_{n=0}^{+\infty} 24\left(\frac{4}{5}\right)^n \\
& = & -12 + \dfrac{24}{1-\frac{4}{5}} = -12 + 24\cdot 5 \\
& = & 108
\end{array}
$$

◄

Definición 6.2.3.

1. La serie de la forma

$$\boxed{\sum_{n=1} +\infty\frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots}$$

   se llama **serie armónica**

2. La serie de la forma

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^p} = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots}$$

   se llama **serie** P y es convergente si $p > 1$ y divergente si $p \leq 1$

Observación 6.2.12. La propiedad telescópica para sumas finitas:

$$\sum_{k=1}^{n}(b_k - b_{k+1}) = b_1 - b_{n+1}$$

Deseamos extender esta propiedad a las series de infinitos términos siendo cada término la diferencia $a_n = b_n - bn + 1$, quedando así

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty}(b_n - b_{n+1})$$

Estas series se llaman series telescópicas. Su comportamiento está determinado por la propiedad siguiente:

Propiedades 6.2.13. [Serie telescópica] Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ dos sucesiones de números reales tales que $a_n = b_n - b_{n+1}$ para $n \in \mathbb{N}$ Entonces :

1. la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge si y sólo si la sucesión $\{b_n\}$ converge en cuyo caso se tiene

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} a_n = b_1 - \lim_{n\to\infty} b_n}$$

2. la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge si y sólo si la sucesión $\{b_n\}$ diverge

Ejemplo 6.2.14. Analice las siguientes series

1. $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2+n}$
2. $\sum_{n=1}^{+\infty} \log\left[\dfrac{n}{n+1}\right]$

Resolución: ►

1. *La serie* $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2+n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}\right)$ *es telescópica ya que*
   - $a_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$
   - $\{b_n\} = \left\{\dfrac{1}{n}\right\}$
   - $b_1 = 1$

   Como $\{b_n\}$ *es convergente la serie converge y su valor es*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+n} = b_1 - \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 1 - 0$$

2. *La serie* $\sum_{n=1}^{+\infty} \log\left[\dfrac{n}{n+1}\right] = \sum_{n=1}^{+\infty} \log(n) - \log(n+1)$ *es telescópica ya que*
   - $a_n = \log(n) - \log(n+1)$
   - $\{b_n\} = \{\log(n)\}$
   - $b_1 = 0$

   Como $\lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} \log(n) = +\infty$ *entonces* $\{b_n\}$ *es divergente, por tanto la serie diverge.*

◄

6.2.1. Criterios de convergencia de series

Teorema 6.2.15. [Criterio de convergencia de Cauchy] Una sucesión $(a_n)_{n\in I\!N}$ de números reales es convergente si y sólo si para cada $\epsilon > 0$ existe número real N tal que $|a_p - a_q| < \epsilon$ para todo p, q mayores que N.

Teorema 6.2.16. [Criterio de Comparación] Dada las series $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ de términos positivos.

1. Si $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ converge y $0 \le a_n \le b_n$, $\forall\ n > N$ entonces $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.
2. Si $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ diverge y $a_n \ge b_n \ge 0$, $\forall\ n > N$ entonces $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ también diverge.

Teorema 6.2.17. [Criterio de Comparación al límite] Sean $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ series de términos no negativos. Supongamos que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = l \in [0, +\infty[\cup \{+\infty\}$

1. Si $l < +\infty$ y la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, entonces la serie $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ también converge.
2. Si $0 < l$ y la serie $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ diverge, entonces la serie $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ también diverge.

Ejemplo 6.2.18. Usando criterio de comparación, examinar la convergencia o divergencia de las series siguientes:

1. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{1+3^n}$
2. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n}{2^n(n+1)}$
3. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\ln(n)}{n}$

Resolución: ►

1. *Podemos comparar con la serie geométrica* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n}$, *que es convergente. Se tiene*

$$3^n < 1 + 3^n, \ \forall n \in \mathbb{N} \Longrightarrow \frac{1}{1+3^n} < \frac{1}{3^n}$$

Luego, por criterio de comparación concluimos que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+3^n}$ *es convergente*

2. *Podemos comparar con la serie* $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ *que es convergente.*

Note que $\frac{n}{2^n(n+1)} = \left(\frac{1}{2^n}\right)\frac{n}{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{n}{n+1}$. *Entonces*

$$\begin{aligned} n \quad &< \quad n+1 \Big/ \cdot \left(\frac{1}{n+1}\right), \ \forall \ n \in \mathbb{N} \Longrightarrow \frac{n}{n+1} < 1 \Big/ \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &\Longrightarrow \quad \left(\frac{n}{n+1}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n < \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{aligned}$$

por el criterio de comparación la serie es convergente

3. *Note que* $\frac{\ln(n)}{n} > \frac{1}{n}$, $\forall n \geq 3$ *y como* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *diverge. Entonces* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n}$ *es divergente*

◄

Ejemplo 6.2.19. Usando criterio de comparación al límite, examinar la convergencia o divergencia de las series siguientes:

1. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+5}$
2. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+n+1}$
3. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4+3^n}{2^n}$

Resolución: ►

1. *Comparamos, en el límite, con* $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ *que es divergente. Como* $\frac{1}{n+5}>0,\ \frac{1}{n}>0,\ \forall n\in\mathbb{N}$ *y*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{n+5}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+5}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=1$$

entonces $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n+5}$ *es divergente.*

2. *Comparamos con* $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ *que es convergente. Por criterio de comparación en el límite tenemos*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{n^2+n+1}}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{n^2+n+1}=1,$$

Así, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2+n+1}$ *es convergente.*

3. *Comparamos con la serie* $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3^n}{2^n}$*, geométrica de razón* $r=\frac{3}{2}>1$ *divergente. Además*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{4+3^n}{2^n}}{\frac{3^n}{2^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{4+3^n}{3^n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{3^n}+1\right)=+\infty$$

Entonces, por criterio de comparación en el límite, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4+3^n}{2^n}$ *es divergente.*

◄

Teorema 6.2.20. [Criterio de la razón] Sea $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ con $a_n\ge 0$ tal que $R=\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$.

- Si $R<1$ entonces $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ es convergente.
- Si $R>1$ y $\lim_{n\to+\infty}a_n\neq 0$ entonces $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ es divergente.
- Si $R=1$ no se puede afirmar nada.

Teorema 6.2.21. [Criterio de la raíz] Sea $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ con $a_n \geq 0$ tal que $R = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n}$.

- Si $R < 1$ entonces $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ es convergente.
- Si $R > 1$ entonces $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ es divergente.
- Si $R = 1$ no se puede afirmar nada.

Ejemplo 6.2.22. Usando criterio de la razón o raíz, examinar la convergencia o divergencia de las series siguientes:

1. $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$
2. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^n}{\sqrt{n^3+1}}$
3. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{2^n}$
4. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{n!}$

Resolución: ►

1. *Usando el criterio de la raíz, considerando* $a_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}} = \frac{1}{\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}} = \frac{1}{e}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}} = \frac{1}{e} = R < 1}$$

Como $R < 1$ *la serie es convergente*

2. *Usando el criterio de la razón, considerando* $a_n = \dfrac{e^n}{\sqrt{n^3+1}}$, $a_{n+1} = \dfrac{e^{n+1}}{\sqrt{(n+1)^3+1}}$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\dfrac{e^{n+1}}{\sqrt{(n+1)^3+1}}}{\dfrac{e^n}{\sqrt{n^3+1}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{e^n}\cdot e\cdot\sqrt{n^3+1}}{\sqrt{(n+1)^3+1}\cdot\cancel{e^n}} = \lim_{n\to+\infty} e\cdot\sqrt{\frac{n^3+1}{(n+1)^3+1}}$$

$$= e\sqrt{\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)^3+1}{n^3+1}} = e > 1$$

Como $R > 1$ *la serie diverge.*

3. *Usando el criterio de la razón, considerando* $a_n = \dfrac{n^n}{2^n}$, $a_{n+1} = \dfrac{(n+1)^{n+1}}{2^{n+1}}$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\dfrac{(n+1)^{n+1}}{2^{n+1}}}{\dfrac{n^n}{2^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^n\cdot(n+1)\cancel{2^n}}{\cancel{2^n}\cdot 2\cdot n^n} = \frac{1}{2}\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot(n+1) = +\infty$$

Indica que $R > 1$ *por tanto la serie es divergente.*

4. *tarea*

◄

6.2.2. Series de términos positivos y negativos

Definición 6.2.4. La serie $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}a_n = a_1 - a_2 + a_3 + \cdots + (-1)^{n+1}a_n + \cdots$ donde $a_n > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$, se llaman serie alternada.

Observación 6.2.23. Tambien las siguientes series son alternadas

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}a_n = a_1 - a_2 + a_3 + \cdots + (-1)^{n-1}a_n + \cdots$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n}a_n = -a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + (-1)^{n}a_n + \cdots$

Teorema 6.2.24. [Criterio de Leibniz]
Sea la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}a_n \left(\text{ó} \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}a_n \ \text{ ó } \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n}a_n\right)$ si cumple que

1. $0 \le a_{n+1} \le a_n, \ \forall\ n \in \mathbb{N}$ ($\{a_n\}$ decreciente).
2. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

entonces la serie alternada es convergente.

Observación 6.2.25.

1. Si la sucesión $\{a_n\}$ no es decreciente no se puede aplicar el criterio de Leibniz.

2. Si $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n \neq 0$ no se puede aplicar el criterio de Leibniz.

Se debe buscar otra alternativa la que veremos má adelante.

Ejemplo 6.2.26. Examinar la convergencia o divergencia de las series

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n}}{n!}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{n^2}{2^n}$

Resolución: ►

(a) $\{a_n\} = \left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ *es decreciente, en efecto*

Como $n < n+1\ \forall n \in \mathbb{N} \Longrightarrow \underbrace{\dfrac{1}{n+1}}_{a_{n+1}} < \underbrace{\dfrac{1}{n}}_{a_n}$ *así comprobamos que* $\{a_n\}$ *es decreciente.*

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$

Entonces $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ *es convergente.*

(b) $\{a_n\} = \left\{\dfrac{1}{n!}\right\}$ *es decreciente, en efecto*

Como $n! < n+1!\ \forall n \in \mathbb{N} \Longrightarrow \underbrace{\dfrac{1}{(n+1)!}}_{a_{n+1}} < \underbrace{\dfrac{1}{n!}}_{a_n}$ *así comprobamos que* $\{a_n\}$ *es decreciente.*

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n!} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n\cdot(n-1)\cdots 2\cdot 1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} \cdot \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n-1} \cdot \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n-2} \cdots \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2} \cdot \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{1} = 0.$

Por lo tanto, la serie es convergente.

(c) $\{a_n\} = \left\{\dfrac{n^2}{2^n}\right\}$ *es decreciente, en efecto*

$$\left(\frac{n^2}{2^n}\right)' = \frac{2n2^n - n^2 2^n \ln(2)}{2^2 n} = \frac{\cancel{2^n}(2n - n^2\ln(2))}{\cancel{2^n}\cdot 2^n} = \frac{2n - n^2\ln(2)}{2^n}$$

Para que la sucesión $\left\{\dfrac{n^2}{2^n}\right\}$ *sea decreciente* $\dfrac{2n-n^2\ln(2)}{2^n} < 0$ *y como* $2^n > 0$ *entonces* $2n - n^2\ln(2) < 0$

Cálculo de los valores de n *para que* $2n - n^2\ln(2) < 0$

$n^2\ln(2) - 2n > 0 \Longrightarrow n(n\ln(2) - 2) > 0 \Longrightarrow n \in]-\infty, 0[\cup \left]\dfrac{2}{\ln(2)}, +\infty\right[$

como $n \in \mathbb{N}$ *entonces* $n > \dfrac{2}{\ln(2)}$ *osea* $n \geq 3$

Conclusión la sucesión $\left\{\dfrac{n^2}{2^n}\right\}$ *es decreciente para* $n \geq 3$.

cálculo de $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{2^n}$*, usamos la regla de L'Hopital*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{2^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n^2)'}{(2^n)'} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n}{2^n\ln(2)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(2n)'}{(2^n\ln(2))'} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{2^n\ln^2(2)} = 0$$

Entonces la serie $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{n^2}{2^n}$ *es convergente.*

Por otro lado $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{n^2}{2^n} = \underbrace{\dfrac{1}{2} - 1}_{convergente} + \underbrace{\sum\limits_{n=3}^{+\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{n^2}{2^n}}_{convergente}$

Concluyendo así que la serie $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{n^2}{2^n}$ *es convergente*

6.2.3. Convergencia absoluta

Teorema 6.2.27. Si la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \left|(-1)^{n+1}a_n\right|$ es convergente, entonces la serie alternada $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}a_n$ es convergente.

Definición 6.2.5.

1. Sea $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1}a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$. Se dice que la serie alternada $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ es absolutamente convergente si la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$ es convergente.

2. La serie alternada $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ que es convergente, pero no absolutamente convergente ,se dice que la serie es condicionalmente convergente.

Observación 6.2.28.

1. Según el teorema (6.2.27) se tiene en general que cualquier serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ que es absolutamente convergente es convergente, es decir

   s i $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$, converge entonces $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge

2. Si la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge no quiere decir que la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ converge.

Ejemplo 6.2.29. Analice si las siguientes series son absolutamente convergente o condicionalmente convergente.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^3}$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}3}{2^n}$

Resolución: ▶

1. *La serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ *es convergente, en efecto*

   $\{a_n\} = \frac{1}{n}\}$ *es decreciente y* $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ *por tanto la serie es convergente*

   La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ *es condicionalmente convergente. en efecto*

   $$\sum_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

   es divergente. Luego $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ *es condicionalmente convergente.*

2. *La serie es absolutamente convergente, en efecto*

   $$\sum_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{(-1)^{n-1}}{n^3}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$$

   por tanto la serie es absolutamente convergente, concluyendo así que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^3}$ *es convergente*

3. *tarea*

◀

Teorema 6.2.30. [Criterio de la razón]
Sea $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ con $a_n \neq 0$ tal que $R = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$.

- Si $R < 1$ entonces $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ es absolutamente convergente.
- Si $R > 1$ y $\lim_{n\to+\infty} a_n \neq 0$ entonces $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ es divergente.
- Si $R = 1$ no se puede afirmar nada.

Teorema 6.2.31. [Criterio de la raíz]
Sea $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ con $a_n \neq 0$ tal que $R = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.

- Si $R < 1$ entonces $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ es absolutamente convergente.
- Si $R > 1$ entonces $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ es divergente.
- Si $R = 1$ no se puede afirmar nada.

Ejemplo 6.2.32. Analice la convergencia o divergencia de las series siguientes

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-3)^n}{\sqrt{n+1}}$ 2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^n}$ 3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n}{3^{n+1}}$

Resolución: ►

1. *Sea* $a_n = \dfrac{(-3)^n}{\sqrt{n+1}}$, $a_{n+1} = \dfrac{(-3)^{n+1}}{\sqrt{n+1+1}}$ *y utilizando el criterio de la razón tenemos*

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\dfrac{(-3)^{n+1}}{\sqrt{n+1+1}}}{\dfrac{(-3)^n}{\sqrt{n+1}}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\cancel{(-3)^n}\cdot 3\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2}\cancel{(-3)^n}}\right| \\
&= 3\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2}}\right| = 3\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\cancel{\sqrt{n}}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{\cancel{\sqrt{n}}\cdot\sqrt{1+\frac{2}{n}}}\right| = 3\sqrt{\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}}\right)} \\
&= 3 = R
\end{aligned}$$

Como $R > 1$ *la serie es divergente.*

2. *Sea* $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n^n}$ *y y utilizando el criterio de la raíz tenemos*

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^n}{n^n}\right|} = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(-1)}{n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n} = 0 = R$$

Como $R < 1$ *la serie es convergente.*

3. *Sea* $a_n = \dfrac{(-1)^n n}{3^{n+1}}$, $a_{n+1} = \dfrac{(-1)^{n+1} n+1}{3^{n+1+1}}$ *y utilizando el criterio de la razón tenemos*

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\dfrac{(-1)^{n+1}(n+1)}{3^{n+1+1}}}{\dfrac{(-1)^n n}{3^{n+1}}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(-1)(n+1)\cancel{3^{n+1}}}{\cancel{3^{n+1}}\cdot 3n}\right| \\
&= \lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{3n} = \frac{1}{3} = R
\end{aligned}$$

Como $R < 1$ *la serie es convergente.*

◄

6.3. Series de Potencias

Definición 6.3.1.

1. Una serie de la forma

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(x-a)^n = c_0(x-a)^0 + c_1(x-a)^1 + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \cdots + c_n(x-a)^n + \cdots$$

   donde $a,\ c_i,\ i=0,1,2\cdots,n$ son constante reales; es llamada **serie de potencia centrada en** a

2. El conjunto de todos los valores de x para los cuales una serie de potencia converge, se llama **intervalo de convergencia**

3. Si existe un $R_s > 0$ tal que $|x-a| < R_s$ entonces la serie es absolutamente convergente (por tanto convergente) y al número R se llama **radio de convergencia**

4. La serie de potencias diverge para los valores de x tal que cumpla $|x-a| > R_s$

Observación 6.3.1.

1. Cuando x toma un valor real particular, se obtiene una serie numérica, por ejemplo para la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(x-2)^n}{3^{n+1}}$ si $x=1$ la serie se transforma en $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(1-2)^n}{3^{n+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(-1)^n}{3^{n+1}}$ y esta forma de serie ya se ha estudiado.

2. Si una serie converge para ciertos valores de x, podemos definir una función de x haciendo

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(x-a)^n$$

   donde el dominio de estas funciones son todos los valores de x para los cuales la serie converge.

Teorema 6.3.2. Para una serie de potencias $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(x-a)^n$ solo sucede una de las tres posibilidades:

1. La serie sólo converge cuando $x=a$
2. La serie converge para toda x.
3. Hay un número positivo R, tal que la serie converge si $|x-a| < R_s$ y diverge si $|x-a| > R_s$.

Ejemplo 6.3.3. hallar el intervalo y radio de convergencia de las siguientes series

1. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ 2. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x+3)^n}{(n+1)^n}$ 3. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n(x)^{n-1}}{n^2+1}$

Resolución: ►

1. *Identificando los elementos de la serie de potencias*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \cdot (x-0)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \cdot (x-a)^n$$ *es decir* $c_n = \dfrac{1}{n}$, $a = 0$ *por tanto el intervalo de convergencia quedaría así* $|x-0| < R_s$

Cálculo de R_s *para ello utilizamos el criterio de la razón haciendo* $a_n = \dfrac{x^n}{n}$, $a_{n+1} = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ *y calculando el límite*

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{\frac{x^{n+1}}{n+1}}{\frac{x^n}{n}}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{n\cancel{x^n}\cdot x}{(n+1)\cancel{x^n}}\right| \\ &= \lim_{n\to+\infty} |x|\frac{n}{n+1} = |x| \underbrace{\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1}}_{1} = |x|\cdot 1 = |x| = R \end{aligned}$$

Para que la serie converja $R < 1$, *entonces* $|x-0| < 1$ *cuyo radio de convergencia es* $R_s = 1$ *el intervalo de convergencia ebventualmente es* $-1 < x < 1$, *analicemos en los extremos*

Reemplazamos $x = -1$ *en la serie tenemos* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ *y utilizando el criterio de Leibniz la serie es convergente.*

Reemplazamos $x = 1$ *en la serie tenemos* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ *que es divergente.*

Finalmente el intervalo de convergencia es $[-1, 1[$

2. *Identificando los elementos de la serie de potencias*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^n} \cdot (x-(-3))^n = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \cdot (x-a)^n$$ *es decir* $c_n = \dfrac{1}{(n+1)^n}$, $a = -3$

por tanto el intervalo de convergencia quedaría así $|x-(-3)| < R_s$

Cálculo de R_s *para ello utilizamos el criterio de la raíz haciendo* $a_n = \frac{(x+3)^n}{(n+1)^n}$ *y calculando el límite*

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{(x+3)^n}{(n+1)^n}\right|} &= \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{x+3}{n+1}\right| = \lim_{n\to+\infty} |x+3|\cdot\frac{1}{n+1} = |x+3| \underbrace{\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1}}_{0} \\ &= |x+3|\cdot 0 = 0 = R \end{aligned}$$

Como $0 = R < 1$ *la serie converge para todo valor de* x, *cuyo radio de convergencia es* $R_s = 1$ $(|x+3|\cdot 0 = 0 = R < 1 = R_s)$

3. *TAREA*

◄

6.3.1. Representación de funciones mediante series de potsencias

Existen funciones que se pueden representar como series de potencia, por ejemplo $\frac{1}{1-x}$, $\frac{1}{1+x^2}$, $\frac{x^3}{x+2}$, etc. Para ello necesitamos criterios para representarla

Teorema 6.3.4. [Diferenciación de series de potencias]
Sea $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(x-a)^n$ una serie de potencias con radio de convergencia $R>0$ y si

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(x-a)^n$$

entonces existe la derivada de $f(x)$, $x \in]a-R, a+R[$ cuya derivada está definida como

$$f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + \cdots \quad = \quad \sum_{n=1}^{+\infty} n c_n(x-a)^{n-1}$$

Teorema 6.3.5. [Inregración de series de potencias]
Sea $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(x-a)^n$ una serie de potencias con radio de convergencia $R>0$ y si

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(x-a)^n$$

entonces $f(x)$ es integrable en todo subintervalo cerrado de $]a-R, a+R[$ y la integral queda definida como

$$\int f(x)dx \quad = \quad C + c_0(x-a) + c_1\frac{(x-a)^2}{2} + c_2\frac{(x-a)^3}{3} + \cdots = C + \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}$$

además R es el radio de convergencia de la serie resultante.

Observación 6.3.6.

1. Recuerde que la serie geométrica $\sum_{n=0}^{+\infty} ar^n$ es convergente si $|r| < 1$ cuya suma se puede hallar a través de una fórmula sencilla el cual es $\sum_{n=0}^{+\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}$.

2. Por ejemplo si $a = 1,\ r = x$ la serie es $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ es convergente si $|x| < 1$

   Esta serie geométrica es de la forma de una serie de potencias $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(x-a)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ donde $c_n = 1,\ a = 0$ el cual es convergente para $|x| < 1$.

3. La serie geométrica $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ tiene una gran importancia, pues a partir de ella se puede obtener la suma de un gran número de series.

4. También podemos decir que $f(x) = \frac{1}{1-x}$ se puede representar mediante una serie de potencias para $|x| < 1$

5. A continuación veremos algunas algunas funciones que se pueden representar mediante una serie de potencias.

Ejemplo 6.3.7. Para las funciones siguientes obtenga una representación en serie de potencias y el intervalo de convergencia

1. $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$ 2. $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$ 3. $f(x) = \frac{1}{1+x}$ 4. $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ 5. $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$

Resolución: ►

1. *Utilizando la observación (6.3.6)3* ($\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$) *y sustituyendo* x *por* x^2 *en la fórmula resulta:*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(x^2)^n = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots + x^{2n} + \cdots = \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{1-x^2}, \; si \;\; |x^2| < 1$$

2. *Multiplicando por* x *la serie anterior*

$$x\sum_{n=0}^{+\infty}(x^2)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n+1} = x + x^3 + x^5 + x^7 + \cdots + x^{2n+1} + \cdots = \frac{x}{1-x^2}, \; si \;\; |x^2| < 1$$

3. *Utilizando la observación (6.3.6)3 y sustituyendo* x *por* $-x$ *en la fórmula resulta:*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-x)^n = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-x)^n + \cdots = \frac{1}{1+x} \; si \;\; |x| < 1$$

4. *Si a la ecuación anterior reemplazamos* x *por* x^2 *tenemos*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-x^2)^n = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots = \frac{1}{1+x^2} \; si \; |x^2| < 1$$

5. *Si multiplicamos ambos miembros de la ecuación anterior por* x*, se tiene*

$$x\sum_{n=0}^{+\infty}(-x^2)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n+1} = x - x^3 + x^5 - x^7 + \cdots + (-1)^n x^{2n+1} + \cdots = \frac{x}{1+x^2} \; si \;\; |x| < 1$$

◄

6.3.2. Serie de Taylor y Maclaurin

Teorema 6.3.8. Si f tiene una representación en forma de serie de potencias de centro a, es decir

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n, \quad |x-a| < R,$$

entonces los coeficientes están expresados por la fórmula $c_n = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$. A esta serie se llama **serie de Taylor centrada** en a y si $a = 0$ se llama **serie de Maclaurin**.

Teorema 6.3.9.

1. Si $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$ donde T_n es el polinomio de Taylor de n-ésimo grado de f centrada en a, y si $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n(x) = 0$ para $|x-a| < R$, entonces f es igual a la suma de su serie de Taylor en el intervalo de $|x-a| < R$.

2. Si $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$ para $|x-a| < R$, entonces el residuo $R_n(x)$ de la serie de Taylor satisface la desigualdad

$$|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}, \quad |x-a| < R$$

Ejemplo 6.3.10. Exprese las siguientes funciones en forma de una serie de potencias, y calcule el radio de convergencia

1. $f(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$
2. $f(x) = \ln(1-x)$

Resolución: ►

1. *Se sabe que* $\left(\dfrac{1}{1-x}\right)' = \dfrac{1}{(1-x)^2}$ *entonces*

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right)' \quad = \quad \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^n$$

2. *Se sabe que* $(\ln(1-x))' = -\dfrac{1}{(1-x)}$, *entonces*

$$-\ln(1-x) = \int \frac{1}{1-x}dx = \int \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right) dx = c + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots = C + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

◄

Ejemplo 6.3.11. Desarrollar en serie de Maclaurin las funciones

1. $f(x) = e^x$
2. $f(x) = \text{sen}(x)$
3. $f(x) = e^{-x}$
4. $f(x) = \cos(x)$

Resolución: ►

1. $f(x)=e^x=\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n = c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots$ *donde*

a) $f^0(x)=f(x)=e^x \Longrightarrow c_0=\dfrac{f(0)}{0!}=e^0=1$

b) $f'(x)=e^x \Longrightarrow c_1=\dfrac{f'(0)}{1!}=e^0=1$

c) $f''(x)=e^x \Longrightarrow c_2=\dfrac{f''(0)}{2!}=\dfrac{e^0}{2!}=\dfrac{1}{2!}$

d) $f'''(x)=e^x \Longrightarrow c_3=\dfrac{f'''(0)}{3!}=\dfrac{e^0}{3!}=\dfrac{1}{3!}$

e) $f^{(iv)}(x)=e^x \Longrightarrow c_4=\dfrac{f^{(iv)}(0)}{4!}=\dfrac{e^0}{4!}=\dfrac{1}{4!}$

$$f(x)=e^x=\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n = c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}$$

2. $f(x)=\operatorname{sen}(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n = c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots$ *donde*

a) $f^0(x)=f(x)\operatorname{sen}(x) \Longrightarrow c_0=\dfrac{f(0)}{0!}=\operatorname{sen}(0)=0$

b) $f'(x)=\cos(x) \Longrightarrow c_1=\dfrac{f'(0)}{1!}=\dfrac{\cos(0)}{1!}=1$

c) $f''(x)=-\operatorname{sen}(x) \Longrightarrow c_2=\dfrac{f''(0)}{2!}=\dfrac{-\operatorname{sen}(0)}{2!}=\dfrac{0}{2!}=0$

d) $f'''(x)=-\cos(x) \Longrightarrow c_3=\dfrac{f'''(0)}{3!}=\dfrac{-\cos(0)}{3!}=\dfrac{-1}{3!}$

e) $f^{(iv)}(x)=\operatorname{sen}(0) \Longrightarrow c_4=\dfrac{f^{(iv)}(0)}{4!}=\dfrac{\operatorname{sen}(0)}{4!}=\dfrac{0}{4!}=0$

f) $f^{(v)}(x)=\cos(0) \Longrightarrow c_5=\dfrac{f^{(v)}(0)}{4!}=\dfrac{\cos(0)}{5!}=\dfrac{1}{5!}$

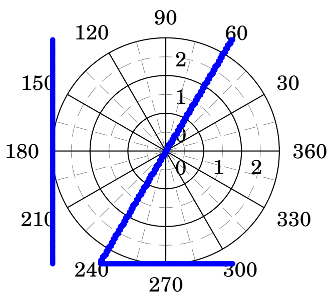
$$\begin{aligned} f(x)=\operatorname{sen}(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n &= c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots = 0+x+0\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+0\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}\cdots+ \\ &= x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\end{aligned}$$

◄

Capítulo 7

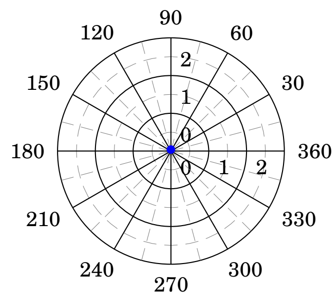
Anexos

7.1. Gráficos en coordenadas polares



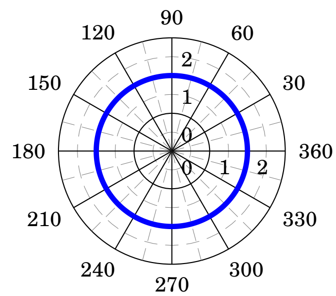
$\theta = a,\ a \in$

Para la figura $a = \frac{\pi}{3}$



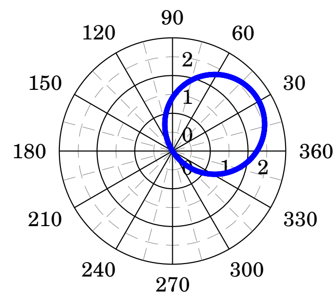
$r(\theta) = a,\ a = 0$

Para la figura $a = 0$



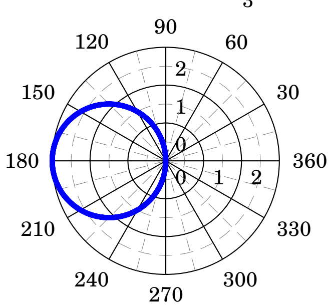
$r(\theta) = a,\ a \neq 0$

Para la figura $a = -2$ o $a = 2$



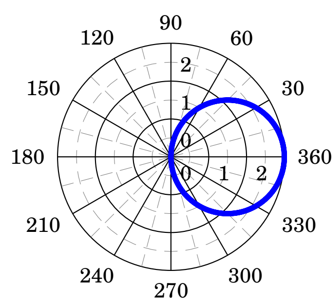
$r(\theta) = a\cos(\theta) + b\,\mathrm{sen}(\theta);\ a,\ b \neq 0$

Para la figura $a = 2,\ b = \sqrt{5}$



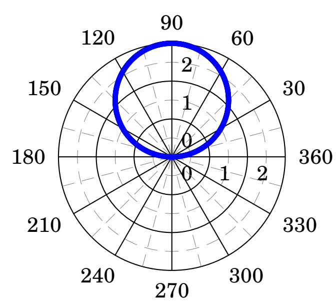
$r(\theta) = -a\cos(\theta), a > 0$

Para la figura $a = 3$



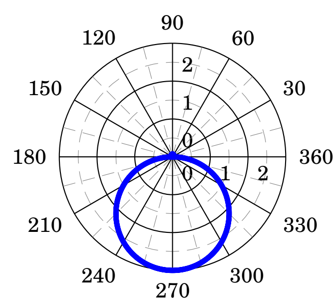
$r(\theta) = a\cos(\theta), a > 0$

Para la figura $a = 3$



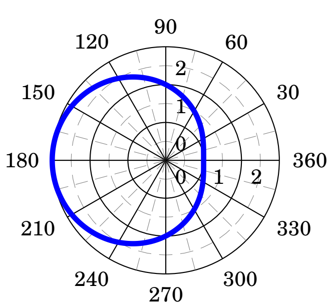
$r(\theta) = a\,\mathrm{sen}(\theta), a > 0$

Para la figura $a = 3$



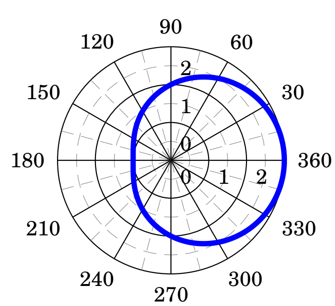
$r(\theta) = -a\,\mathrm{sen}(\theta), a > 0$

Para la figura $a = 3$



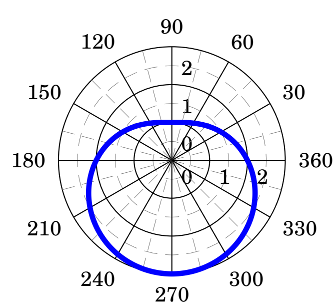
$r(\theta) = a - b\cos(\theta), a > b$

Para la figura $a = 2,\ b = 1$



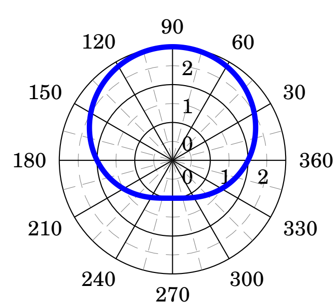
$r(\theta) = a + b\cos(\theta), a > b$

Para la figura $a = 2,\ b = 1$



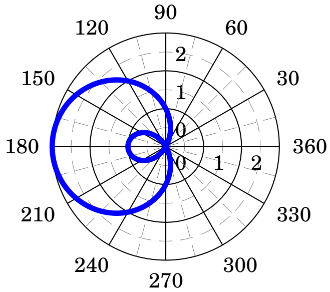
$r(\theta) = a - b\,\mathrm{sen}(\theta), a > b$

Para la figura $a = 2,\ b = 1$



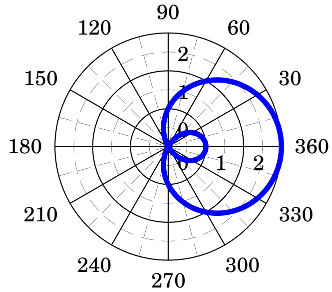
$r(\theta) = a + b\,\mathrm{sen}(\theta), a > b$

Para la figura $a = 2,\ b = 1$



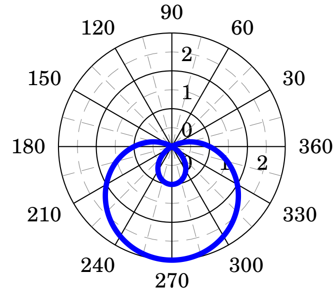
$r(\theta) = a - b\cos(\theta), a < b$

Para la figura $a = 1,\ b = 2$



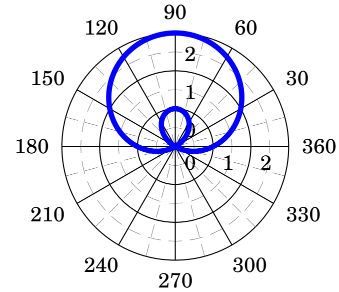
$r(\theta) = a + b\cos(\theta), a < b$

Para la figura $a = 1,\ b = 2$



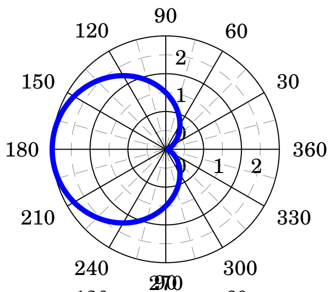
$r(\theta) = a - b\,\mathrm{sen}(\theta), a < b$

Para la figura $a = 1,\ b = 2$



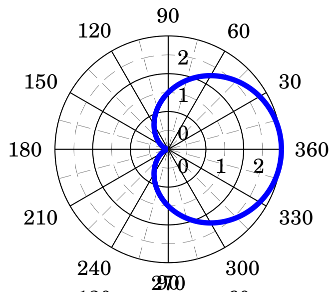
$r(\theta) = a + b\,\mathrm{sen}(\theta), a < b$

Para la figura $a = 1,\ b = 2$



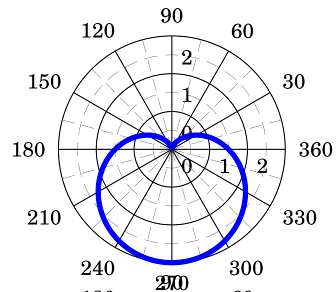
$r(\theta) = a - b\cos(\theta), a = b$

Para la figura $a = 1{,}5$



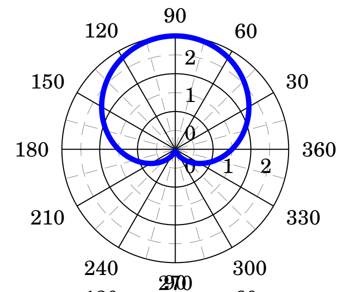
$r(\theta) = a + b\cos(\theta), a = b$

Para la figura $a = 1{,}5$



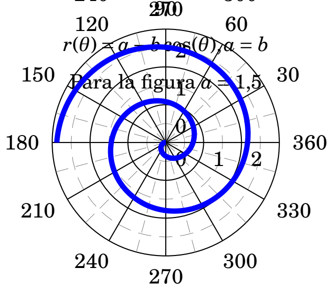
$r(\theta) = a - b\,\mathrm{sen}(\theta), a = b$

Para la figura $a = 1{,}5$



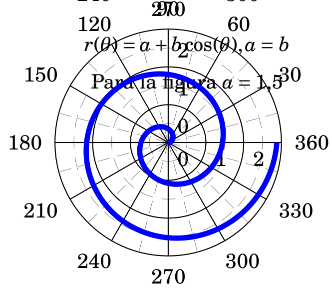
$r(\theta) = a + b\,\mathrm{sen}(\theta), a = b$

Para la figura $a = 1{,}5$



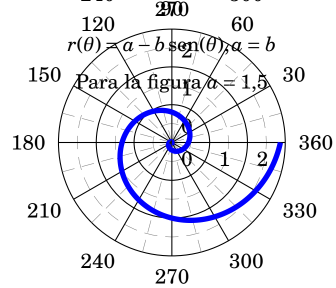
$r(\theta) = -a\theta, a \neq 0$

Para la figura $a = 0{,}004$



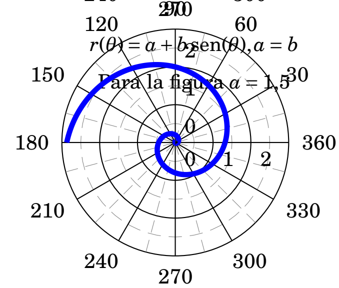
$r(\theta) = a\theta, a \neq 0$

Para la figura $a = 0{,}004$



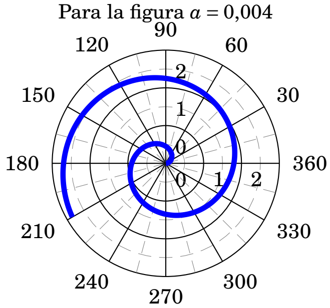
$r(\theta) = e^{a\theta}, a \neq 0$

Para la figura $a = 0{,}00205$



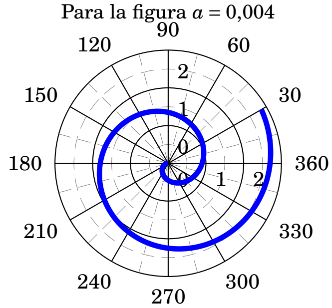
$r(\theta) = -e^{a\theta}, a \neq 0$

Para la figura $a = 0{,}00205$



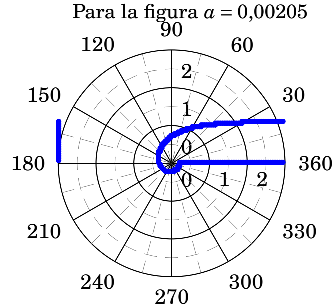
$r(\theta) = \dfrac{a}{\theta}, \theta,\ a \neq 0$

Para la figura $a = 200$



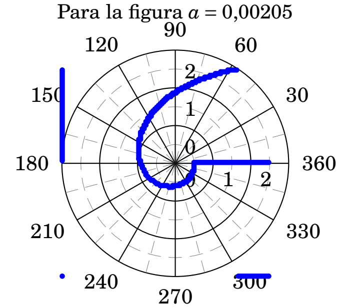
$r(\theta) = -\dfrac{a}{\theta}, \theta,\ a \neq 0$

Para la figura $a = 200$



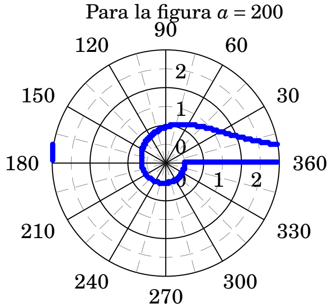
$r\theta = a,\ a \neq 0$

Para la figura $a = 64$



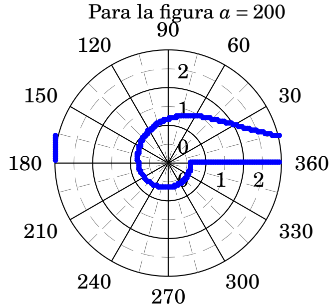
$r\theta = a,\ a \neq 0$

Para la figura $a = 169$



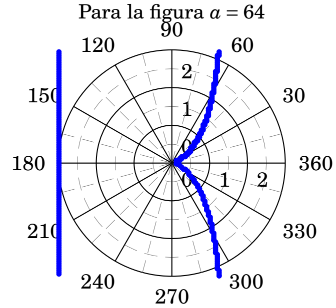
$r^2\theta = a^2,\ a \neq 0$

Para la figura $a = 9$



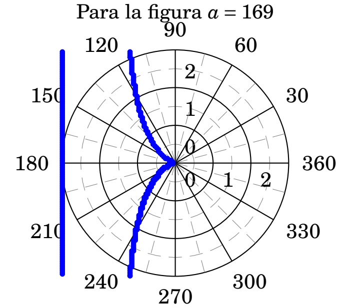
$r^2\theta = a^2,\ a \neq 0$

Para la figura $a = 11$



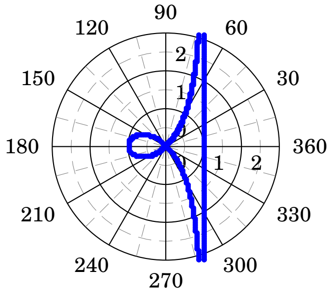
$r(\theta) = a\,\mathrm{sen}(\theta)\tan(\theta), a \neq 0$

Para la figura $a = 0{,}7$



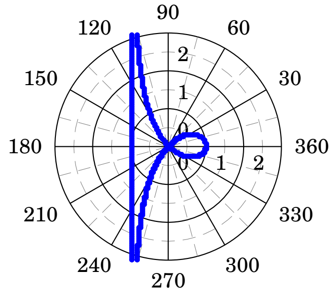
$r(\theta) = -a\,\mathrm{sen}(\theta)\tan(\theta), a \neq 0$

Para la figura $a = 0{,}7$



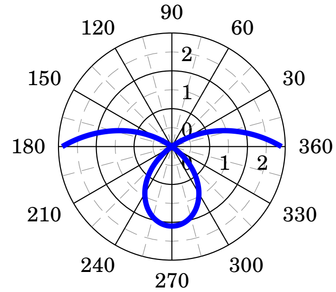
$y^2 = x^2(\frac{a+x}{a-x}),\ a \neq 0$

Para la figura $a = 1$



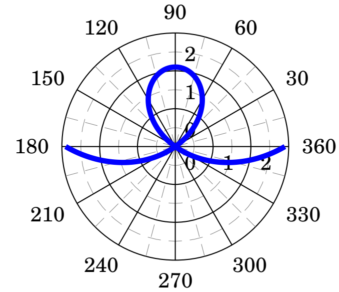
$y^2 = x^2(\frac{a-x}{a+x}),\ a \neq 0$

Para la figura $a = 1$



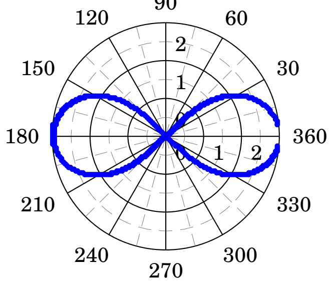
$r(\theta) = a\,\mathrm{cosec}(\theta) - b,\ a,\ b\ \neq 0$

Para la figura $a = 2{,}9,\ b = 0{,}2$



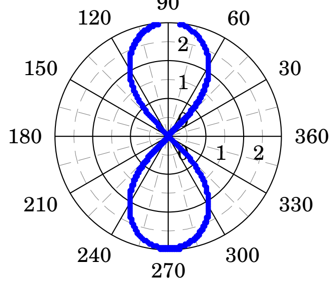
$r(\theta) = -(a\,\mathrm{cosec}(\theta) - b),,\ a \neq 0$

Para la figura $a = 0{,}2,\ b = 2{,}9$



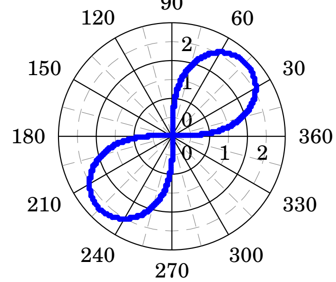
$r^2 = a^2\cos(2\theta),\theta,\ a \neq 0$

Para la figura $a = 3$



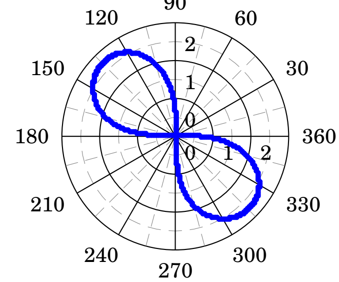
$r^2 = -a^2\cos(2\theta),\theta,\ a \neq 0$

Para la figura $a = 3$



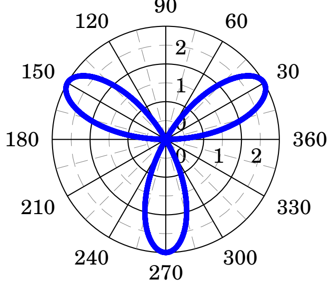
$r^2 = a^2\,\mathrm{sen}(2\theta),\ a \neq 0$

Para la figura $a = \sqrt{15}$



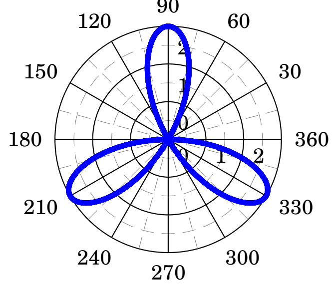
$r^2 = -a^2\,\mathrm{sen}(2\theta),\ a \neq 0$

Para la figura $a = \sqrt{15}$



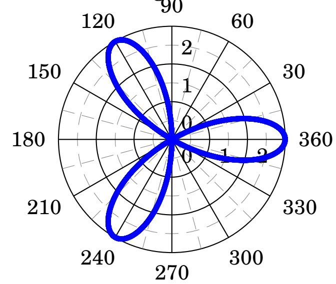
$r(\theta) = a\,\mathrm{sen}(3\theta),\ a \neq 0$

Para la figura $a = 3$



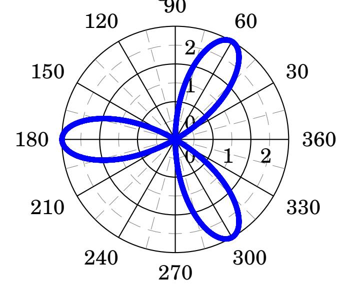
$r(\theta) = -a\,\mathrm{sen}(3\theta),\ a \neq 0$

Para la figura $a = 3$



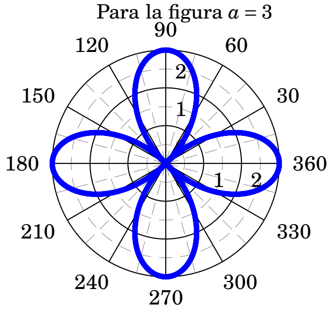
$r(\theta) = a\cos(3\theta),\ a \neq 0$

Para la figura $a = 3$



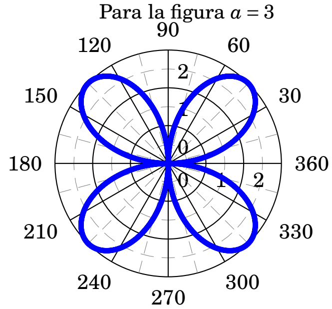
$r(\theta) = -a\cos(3\theta),\ a \neq 0$

Para la figura $a = 3$



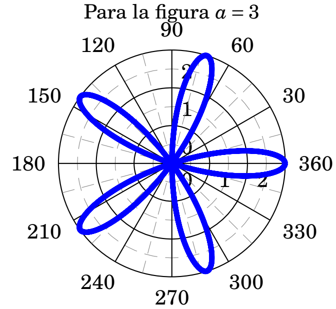
$r(\theta) = a\cos(2\theta),\ a \neq 0$

Para la figura $a = 3$



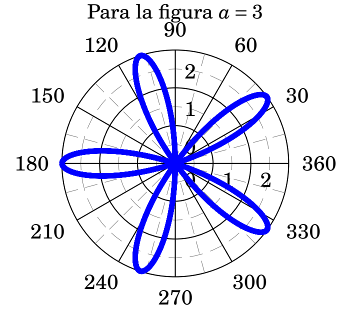
$r(\theta) = -a\,\mathrm{sen}(2\theta),\ a \neq 0$

Para la figura $a = 3$



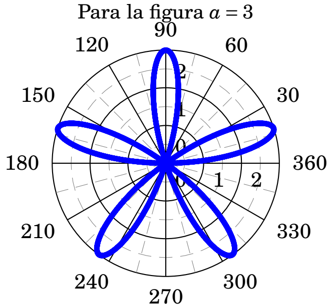
$r(\theta) = a\cos(5\theta),\ a \neq 0$

Para la figura $a = 3$



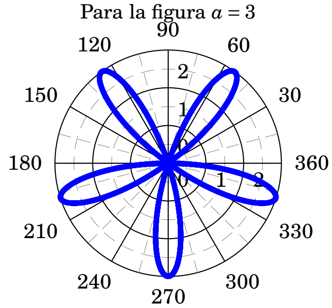
$r(\theta) = -a\cos(5\theta),\theta,\ a \neq 0$

Para la figura $a = 3$



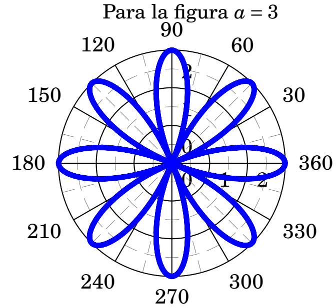
$r(\theta) = a\,\mathrm{sen}(5\theta),\ a \neq 0$

Para la figura $a = 3$



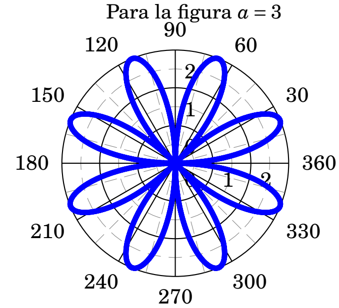
$r(\theta) = -a\,\mathrm{sen}(5\theta), a \neq 0$

Para la figura $a = 3$



$r(\theta) = a\cos(4\theta),\ a \neq 0$

Para la figura $a = 3$



$r(\theta) = a\,\mathrm{sen}(4\theta), a \neq 0, \theta \neq 0$

Para la figura $a = 3$