Prof: Rodrigo Carrasco Jofré   Lunes 05 de Julio

Certamen 3 - Álgebra Lineal

ALUMNO:________________________________ **RUT:** _______________ **SECCION:** _______

PROFESOR:________________________________

P1 (30 ptos)	P2 (30 ptos)	P3 (40 ptos)	P4 (40 ptos)	Total Ptos	Nota(1-7)

RESULTADOS DE APRENDIZAJES

Resuelve problemas asociados a las transformaciones lineales para interpretar sus resultados.

INSTRUCCIONES

- HACER SOLAMENTE LOS EJERCICIOS QUE VIENEN ASIGNADOS, EN CASO CONTRARIO NO SERAN CONSIDERADOS.
- Escribir sus respuestas con letra clara y legible con lapiz pasta.
- Las respuestas deben venir debidamente justificada.**Identificando claramente los pasos desarrollados.**
- Cada una las hojas de respuestas debe venir con **Nombre y rut** y número de la pregunta.
- Al enviar la resolución de la evaluación, esta debe venir en un archivo pdf (o comprimido), de la siguiente forma: $NombreApellidoAlumno - Carrera.pdf$
- Tiene 80 minutos para responder + 20 minutos para el envio de archivo.

RUT	Preg 1	Preg 2	Preg 3	Preg 4
20087673-3	X	X	X	
20275862-2	X	X		X
20836765-K	X	X	X	
20949203-2	X	X		X
19510913-3	X	X	X	
20912987-6	X	X		X
20101700-9	X	X	X	
19799648-K	X	X		X
21005789-7	X	X	X	
19088998-K	X	X		X
20740165-K	X	X	X	
20953595-5	X	X		X
20691801-2	X	X	X	
21002029-2	X	X		X
20943210-2	X	X	X	
20516495-2	X	X		X
20379069-4	X	X	X	
20681033-5	X	X		X
20254941-1	X	X	X	
20780898-9	X	X		X
20914920-6	X	X	X	
20908710-3	X	X		X

RUT	Preg 1	Preg 2	Preg 3	Preg 4
20983027-2	X	X		X
20256423-2	X	X	X	
20942282-4	X	X		X
20758882-2	X	X	X	
20831765-2	X	X		X
20391033-9	X	X	X	
20257520-K	X	X		X
20489097-8	X	X	X	
20894954-3	X	X		X
20517117-7	X	X	X	
21014113-8	X	X		X
20488773-K	X	X	X	
20940570-9	X	X		X
20977746-0	X	X	X	
20915490-0	X	X		X
20519059-7	X	X	X	
20848288-2	X	X		X
20527914-8	X	X	X	
20915062-K	X	X		X
19511677-6	X	X	X	
20955127-6	X	X		X
20720419-6	X	X	X	

PREGUNTA 1. **30 puntos**

a) Sea $T : M_{m\times n}(\mathbb{R}) \longrightarrow M_{n\times m}(\mathbb{R})$ definida como $T(A) = A^t$. Probar que T es una aplicación lineal.

Solución: Probaremos que T es una transformación lineal

i) Sea $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$

$$T(A + B) = (A + B)^t = A^t + B^t = T(A) + T(B)$$

ii) Sea $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ y sea $\alpha \in \mathbb{R}$

$$T(\alpha A) = (\alpha A)^t = \alpha A^t = \alpha T(A)$$

por lo tanto, T es una transformación lineal. 15 puntos

b) Dada la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $T(1, 1, 1) = (2, 0, -1)$, $T(0, -1, 2) = (-3, 2, -1)$ y $T(1, 0, 1) = (1, 1, 0)$. Encontrar la $T(2, -1, 1)$.

Solución: Escribiremos el vector $(2, -1, 1)$ como combinación lineal

$$(2, -1, 1) = \alpha(1, 1, 1) + \beta(0, -1, 2) + \gamma(1, 0, 1) \Longrightarrow \alpha = -\frac{3}{2} \quad , \quad \beta = -\frac{1}{2} \quad , \quad \gamma = \frac{7}{2}.$$

Luego,

$$\begin{aligned} T(2, -1, 1) &= -\frac{3}{2}T(1, 1, 1) - \frac{1}{2}T(0, -1, 2) + \frac{7}{2}T(1, 0, 1) \\ &= -\frac{3}{2}(2, 0, -1) - \frac{1}{2}(-3, 2, -1) + \frac{7}{2}(1, 1, 0) \\ &= \left(-3, 0, \frac{3}{2}\right) + \left(\frac{3}{2}, -1, \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{7}{2}, \frac{7}{2}, 0\right) \\ &= \left(2, \frac{5}{2}, 2\right) \end{aligned}$$

15 puntos

PREGUNTA 2. **30 puntos**

Dada la aplicación $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $F(a, b, c) = (2a - b, c + b)$

a) Encontrar el kernel, una base y su dimensión.

Solución: Sea $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$

$$(2a - b, c + b) = (0, 0) \Longrightarrow 2a - b = 0 \quad , \quad c + b = 0.$$

Así, $Ker(F) = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : 2a - b = 0, c + b = 0\}$.

Para determinar la base, sea $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$

$$(a, b, c) = (a, 2a, -2a) = a(1, 2, -2).$$

Luego,

$$B_K = \{(1, 2, -2)\} \Longrightarrow dim(Ker(F)) = 1.$$

15 puntos

b) Encontrar la imagen, una base y su dimensión.

Solución: Sea $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$(2a - b, c + b) = (x, y)$$

Analizando el rango del sistema formado por la igualdad anterior, vemos que el sistema no posee restricciones, así

$$Im(F) = \mathbb{R}^2$$

Una base es $B_I = \{(1, 0), (0, 1)\}$ y $dim(Im(F)) = 2$. 15 puntos

PREGUNTA 3. **40 puntos**

Dada la aplicación lineal $H : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^4$, $H\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (2a - 3d, b, 2c - 4b, d)$

a) Determine la dimensión del kernel y la dimensión de la imagen.

Solución: Encontraremos el kernel. Sea $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

$$(2a - 3d, b, 2c - 4b, d) = (0, 0, 0, 0) \Longrightarrow a = b = c = d = 0.$$

Así,

$$Ker(H) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \Longrightarrow dim(Ker(H)) = 0.$$

Usando el teorema de las dimensiones, tenemos

$$4 = 0 + dim(Im(H)) \Longrightarrow dim(Im(H)) = 4.$$

10 puntos

b) ¿H es automorfismo?

Solución: No, pues no es endomorfismo. 10 puntos

c) Determine H^{-1}, si existe.

Solución: Como H es monomorfismo y epimorfismo, entonces H es isomorfismo. Así, H^{-1} existe.

Dada una base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$,

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Aplicamos la transformación a cada elemento

$$T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (2,0,0,0) \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = T^{-1}(2,0,0,0),$$

$$T\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (0,1,-4,0) \Longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = T^{-1}(0,1,-4,0),$$

$$T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (0,0,2,0) \Longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = T^{-1}(0,0,2,0),$$

$$T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (-3,0,0,1) \Longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = T^{-1}(-3,0,0,1).$$

Sea $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$

$$(a,b,c,d) = \alpha(2,0,0,0) + \beta(0,1,-4,0) + \gamma(0,0,2,0) + \delta(-3,0,0,1).$$

Determinando los escalares, tenemos

$$(a,b,c,d) = \left(\frac{a+3d}{2}\right)(2,0,0,0) + b(0,1,-4,0) + \left(\frac{c+4b}{2}\right)(0,0,2,0) + d(-3,0,0,1).$$

Aplicando T^{-1}

$$\begin{aligned} T^{-1}(a,b,c,d) &= \left(\frac{a+3d}{2}\right)T^{-1}(2,0,0,0) + bT^{-1}(0,1,-4,0) + \left(\frac{c+4b}{2}\right)T^{-1}(0,0,2,0) + dT^{-1}(-3,0,0,1) \\ &= \left(\frac{a+3d}{2}\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \left(\frac{c+4b}{2}\right)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \dfrac{a+3b}{2} & b \\ \dfrac{c+4d}{2} & d \end{pmatrix} \end{aligned}$$

20 puntos

PREGUNTA 4. **40 puntos**

Dada la aplicación lineal $G : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^4$, $G\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a, 2a+b, c, 3c-d)$

a) Determine la dimensión del kernel y la dimensión de la imagen.

Solución: Encontraremos el kernel. Sea $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

$$(a, 2a+b, c, 3c-d) = (0,0,0,0) \Longrightarrow a = b = c = d = 0.$$

Así,

$$Ker(G) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \Longrightarrow dim(Ker(G)) = 0.$$

Usando el teorema de las dimensiones, tenemos

$$4 = 0 + dim(Im(G)) \Longrightarrow dim(Im(G)) = 4.$$

10 puntos

b) ¿G es automorfismo?

Solución: No, pues no es endomorfismo. 10 puntos

c) Determine G^{-1}, si existe.

Solución: Como G es monomorfismo y epimorfismo, entonces G es isomorfismo. Así, G^{-1} existe.

Dada una base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$,

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Aplicamos la transformación a cada elemento

$$T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (1,2,0,0) \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = T^{-1}(1,2,0,0),$$

$$T\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (0,1,0,0) \Longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = T^{-1}(0,1,0,0),$$

$$T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (0,0,1,3) \Longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = T^{-1}(0,0,1,3),$$

$$T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (0,0,0,-1) \Longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = T^{-1}(0,0,0,-1).$$

Sea $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$

$$(a,b,c,d) = \alpha(1,2,0,0) + \beta(0,1,0,0) + \gamma(0,0,1,3) + \delta(0,0,0,-1).$$

Determinando los escalares, tenemos

$$(a,b,c,d) = a(1,2,0,0) + (b-2a)(0,1,0,0) + c(0,0,1,3) + (3c-d)(0,0,0,-1).$$

Aplicando T^{-1}

$$\begin{aligned}
T^{-1}(a,b,c,d) &= aT^{-1}(1,2,0,0) + (b-2a)T^{-1}(0,1,0,0) + cT^{-1}(0,0,1,3) + (3c-d)T^{-1}(0,0,0,-1) \\
&= a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (b-2a)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + (3c-d)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a & b-2a \\ c & 3c-d \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

20 puntos