PAUTA GLOBAL –MÓDULO 1- CÁLCULO DIFERENCIAL (220144)

	Resultados de aprendizajes
1	Aplica la geometría analítica para la resolución de problemas de optimización en el ámbito de la ingeniería
2	Aplica los axiomas de cuerpo y orden de los números reales para resolver inecuaciones lineales, cuadráticas y con valor absoluto
3	Analiza la existencia de límites en funciones reales para resolver problemas relativos a la Continuidad y derivabilidad de funciones.

2 Noviembre del 2020

(30 PTS) PROBLEMA 1:

Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar apropiadamente.

a) __F___ Sean $L_1: x+2y=6$ y $L_2: 3x+\frac{y}{7}=4$ se tiene que $L_1 // L_2$

$$\textit{Dado que} \quad m_1=\frac{-1}{2} \quad m_2=-21 \quad \textit{No son paralelas.}$$

b) __F___ Sean $L_1: 5x+3y=8$ y $L_2: 15x+\frac{15y}{5}=1$ se tiene que $L_1 \perp L_2$

$$\textit{Dado que} \quad m_1=\frac{-5}{3} \quad m_2=-5 \ \textit{No son perpendiculares.}$$

c) __F__ En la ecuación de la circunferencia $(x-2)^2+(y+5)^2=9$ su centro es $(-2,5)$

Dado que Centro C(2,--5)

d) __F__ En la ecuación de la Hipérbola $\frac{x^2}{625}-\frac{y^2}{144}=1$ su centro es el punto (25,12)

Dado que Centro C(0,0)

e) ___F___ $(\forall a,b \in \mathbb{R})(a<b \Rightarrow a^2<b^2)$

$$\textit{Si consideramos } a=-2 \quad b=1 \quad a<b \quad \textit{pero } a^2 \nless b^2$$

f) __F___ $(\forall a,b \in \mathbb{R})(a^2<b^2 \Rightarrow a<b)$

$$\textit{Si consideramos } a=2 \quad b=-3 \quad \textit{tal que } a^2<b^2 \quad \textit{pero } a \nless b$$

g) __F___ $\{x \in \mathbb{R}^+ : \big||x|-1\big| \le 1\} = [-2,2]$

$$\textit{Se tiene} \quad \big||x|-1\big| \le 1 \Leftrightarrow -1 \le |x|-1 \le 1 \Leftrightarrow 0 \le |x| \le 2$$
$$\Leftrightarrow 0 \le |x| \wedge |x| \le 2$$
$$\Leftrightarrow V \wedge -2 \le x \le 2 \Leftrightarrow x \in [-2,2]$$
$$\textit{Luego } \{x \in \mathbb{R}^+ : \big||x|-1\big| \le 1\} = \mathbb{R}^+ \cap [-2,2] = \,]0,2]$$

h) __V____ La solución de $\sqrt{(x-1)^3} \leq |x-1|$ es $[1,2]$

$$\sqrt{(x-1)^3} \leq |x-1| \Leftrightarrow |x-1|\sqrt{x-1} \leq |x-1|$$
$$\Leftrightarrow |x-1|\left(\sqrt{x-1}-1\right) \leq 0$$
$$\Leftrightarrow x = 1 \vee \sqrt{x-1}-1 \leq 0$$
$$\Leftrightarrow x = 1 \vee \sqrt{x-1} \leq 1$$
$$\Leftrightarrow x\, 0\, 1 \vee \sqrt{x-1} \leq 1$$

i) __V___ $\lim\limits_{x \to 1} \frac{3}{(x-1)^2} = +\infty$

j) __V___ $\mathop{lim}\limits_{x \to +\infty} \frac{-4x^4-x^2}{2x^4+10x} = -2$

$$Se\ tiene\ que\ \mathop{lim}\limits_{x \to +\infty} \frac{-\frac{4x^4}{x^4}-x^2/x^4}{2x^4/x^4+10x/x^4} = -2$$

k) ___V__ Si $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ no existe, entonces f no es continua en $x = a$.

Por definición de continuidad.

l) ___V___ $f(x) = {}^{1}\!/_{x}$ es continua en su dominio.

$Se\ indefine\ en\ x = 0\ pero\ o\ \notin dom\ f$

(20 PTS) PROBLEMA 2: Considere las siguientes ecuaciones:

2.1 $-16x^2 + 25y^2 - 32x - 250y + 209 = 0$
2.2 $3y^2 - 8x + 12y + 20 = 0$
2.3 $9x^2 + 4y^2 + 36x - 24y + 36 = 0$
2.4 $25x^2 + 25y^2 - 20x + 25y + 4 = 0$

a) Identifique la cónica que la ecuación describe y escriba ecuación de la cónica en forma canónica.
b) Determine los elementos principales de la cónica.
(a, b, c, vértices, centro, focos, excentricidad, directriz, p, radio de existir)

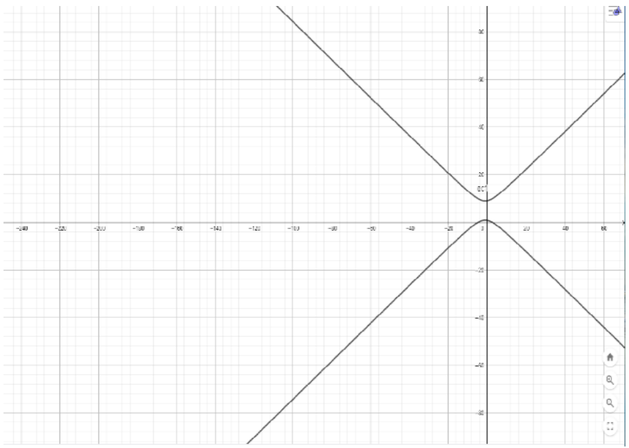
2.1

a) $\frac{(y-5)^2}{4^2} - \frac{(x+1)^2}{5^2} = 1$ ***(4 putos ecuación)*** *La cual corresponde a una Hipérbola.* ***(2 puntos Cónica)***

b) $H = -1$; $K = 5$; $a = 4$, $b = 5$; $c = \sqrt{41}.$ ***(2 pts)***

Por lo que tenemos los elementos principales.

C(-1,5) $V_1(-1,1)$ $V_2(-1,9)$ $F_1(-1,5-\sqrt{41})$ $F_1(-1,5+\sqrt{41})$ $e = \frac{\sqrt{41}}{4}$ ***(12 pts)***

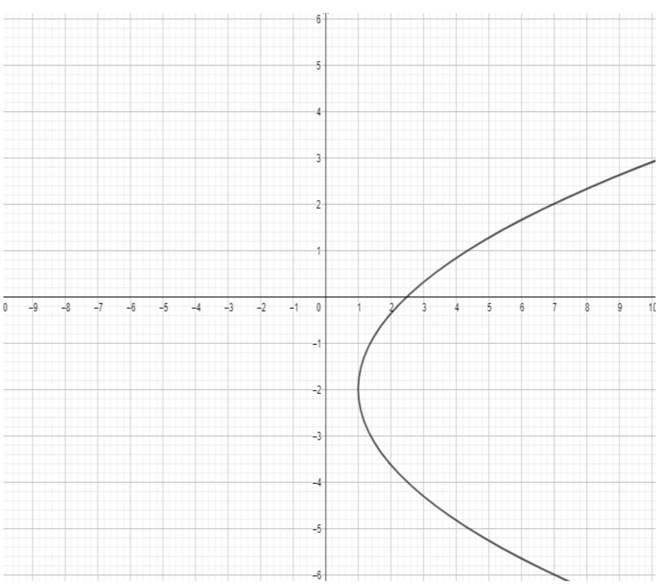


2.2

a) $(y+2)^2 = 4 \cdot \frac{2}{3}(x-1)$ ***(4 pts)*** *La cual corresponde a una Parábola.* ***(2 pts)***

b) $a = 1$; $b = -2$ $p = \frac{2}{3} > 0$ *. Por lo que los elementos principales son:* ***(6 pts)***

$V(1,-2)$ $F(\frac{5}{3},-2)$ $D: x = \frac{1}{3}$ *(directriz)* ***(8 pts)***



2.3

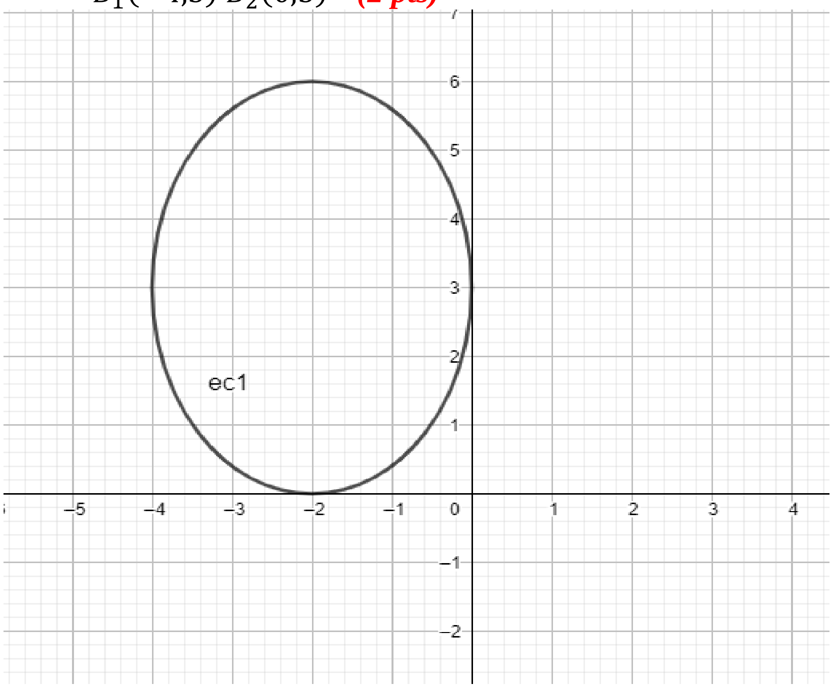
a) $\frac{(x+5)^2}{2^2} + \frac{(y-3)^2}{3^2} = 1$ ***(2pts)*** *La cual corresponde a una Elipse.* ***(2 pts)***

b) $H = -2$; $K = 3$; $a = 3$, $b = 2$; $c = \sqrt{5}.$ ***(2 pts)***

Por lo que tenemos los elementos principales.

C(-2,3) $V_1(-2{,}0)$ $V_2(-2{,}6)$ $F_1(-2{,}3-\sqrt{5})$ $F_1(-2{,}3+\sqrt{5})$ $e = \frac{\sqrt{5}}{3}$ ***(2 pts c/u)***

$B_1(-4{,}3)$ $B_2(0{,}3)$ ***(2 pts)***

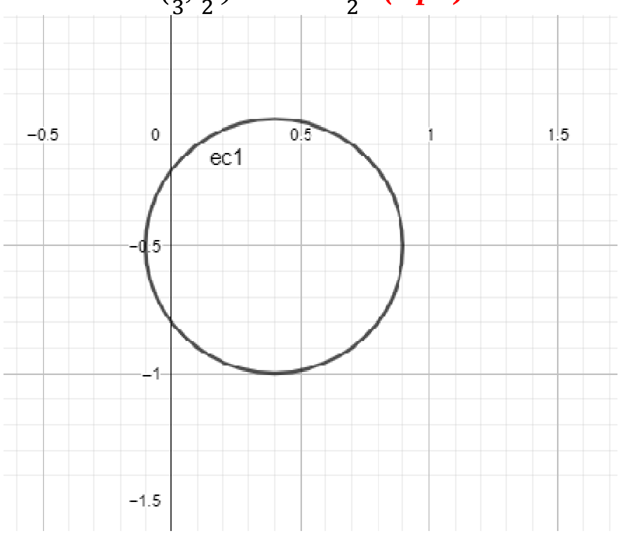


2.4

a) $\left(x - \frac{2}{5}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$ ***(4 pts)*** *La cual corresponde a una Circunferencia.* ***(4 pts)***

b) $a = \frac{2}{5}$; $b = -\frac{1}{2}$ $r = \frac{1}{2}$ *Por lo que los elementos principales son*: ***(6 pts)***

C$(\frac{2}{3}, \frac{-1}{2})$ $r = \frac{1}{2}$ ***(6 pts)***



(25 PTS) PROBLEMA 3: Desarrollar y calcular:

3.1 a) La inecuación $|x^2 - x| < |x+1|$

Solución: *Al dividir* $|x+1| > 0$ *si* $x \neq -1$ *y aplicar propiedad de valor absoluto se tiene:*

$$\left|\frac{x^2-x}{x+1}\right| < 1 \Leftrightarrow -1 < \frac{x^2-x}{x+1} < 1$$

- *Para* $-1 < \frac{x^2-x}{x+1} \Leftrightarrow 0 << \frac{x^2-x}{x+1}$ *de donde basta analizar el denominador* $x+1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$
- *Para* $\frac{x^2-x}{x+1} < 1 \Leftrightarrow \frac{x^2-2x-1}{x+1} < 0$ *de donde al construir tabal de signos se tiene la solución*

$$x \in \left]-\infty, -1\right[\cup \left]1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}\right[$$

Finalmente la solución se obtiene intersectando ambos conjuntos, por lo que se obtiene

$S = \left]1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}\right[$ ***(15 pts)***

b) $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{-x}{x^2-1} = +\infty$ **(5 pts)**

c) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{-2x}{1+x} = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{-2x/x}{(1+x)/x} =) \quad \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{-2}{\frac{1}{x}+1} = -2$ **(5 pts)**

3.2 a) La inecuación $\left|\frac{1}{x-2} - \frac{x}{x^{2-4}}\right| \geq 2$

Solución: $\left|\frac{1}{x-2} - \frac{x}{x^{2-4}}\right| = \left|\frac{2}{x^2-4}\right| = \frac{2}{|x^2-4|} \geq 2$

Lo cual ocurre cuando $|x^2-4| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x^2 - 4 \leq 1 \Leftrightarrow \sqrt{3} \leq |x| \leq \sqrt{5}$

Así la solución es $\left[-\sqrt{5}, -\sqrt{3}\right] \cup \left[\sqrt{3}, \sqrt{5}\right] - \{\pm 2\}$ ***(15 pts)***

b) $\lim\limits_{x\to 2^+} \frac{1}{x^2-4} = +\infty$ **(5 pts)**

c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{2x}{1+x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{2x/x}{(1+x)/x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{2}{\frac{1}{x}+1} = 2$ **(5 pts)**

(25 PTS) PROBLEMA 4:

Hallar los valores de las constantes C y K que hacen que la función sea continua en todo $x \in \mathbb{R}$

a) $f(x) = \begin{cases} x + 2C, & x > -2 \\ 3Cx + K, & -2 \leq x \leq 1 \\ 3x - 2k, & x > 1 \end{cases}$

Solución: *Como la función está definida en $x = 2$ y $x = 1$, entonces los límites deben ser iguales .*

Por lo tanto $\lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2^+} f(x) \Rightarrow -6C + k = -2 + 2C$ **(8 pts)**

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) \Rightarrow 3C + K = 3 - 2k$ **(8 pts)**

$$\begin{matrix} -6C + k = -2 + 2C \\ 3C + K = 3 - 2k \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} -8C + K = -2 \\ -C - K = -1 \end{matrix}$$ **(5 pts)** $\Rightarrow \boldsymbol{C = \frac{1}{3}}$ $\boldsymbol{K = \frac{2}{3}}$ **(4 pts)**

b) $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 1 \\ Cx + K, & 1 < x < 4 \\ -2x, & x \geq 4 \end{cases}$

Solución: *Como la función está definida en $x = 2$ y $x = 1$, entonces los límites deben ser iguales .*

Por lo tanto $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) \Rightarrow 1 = C + K$ **(8 pts)**

$\lim_{x \to 4^-} f(x) = \lim_{x \to 4+} f(x) \Rightarrow 4C + K = -8$ **(8pts)**

$$\begin{matrix} C + K = 1 \\ 4C + K = -8 \end{matrix}$$ ***(5 pts)*** $\Rightarrow \boldsymbol{C = -3}$ $\boldsymbol{K = 4}$ ***(4 pts)***