Cálculo lntegral- 220146

Ingeniería Civil Informática

Yrina Vera

23 de junio, 2021

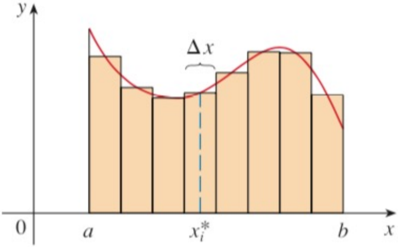
LA INTEGRAL DEFINIDA COMO SUMA DE ÁREA

Si $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua no negativa, esto es,

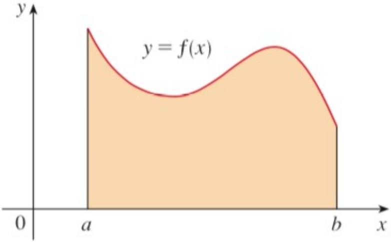
$$f(x) \geq 0 \,, \quad \forall\, x \in [a, b]$$

Entonces

- La *suma de Riemann* $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$ es la suma de las áreas de los rectángulos de aproximación.



- La integral $\int_a^b f(x)dx$ es el área bajo la curva $y = f(x)$ desde a hasta b.



TEOREMA

Si f es continua sobre $[a, b]$, o si tiene únicamente un número finitos de saltos discontinuos, entonces f es integrable en $[a, b]$ y además se verifica

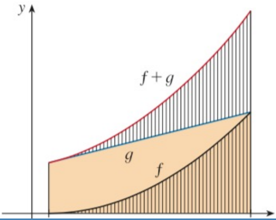
$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$$

donde
$$\Delta x = \frac{b-a}{n} \quad \text{y} \quad x_i = a + i\Delta x$$

PROPIEDADES

Sean $f, g\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones integrables y $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces

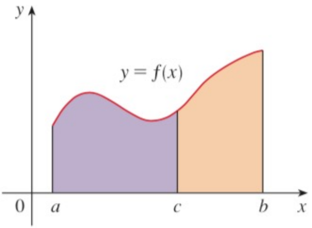
1. $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = 0$
2. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$
3. $\displaystyle\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$



4. $$\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$$

5. $$\int_a^b \alpha f(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx$$

6. Si $a < c < b$ entonces
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

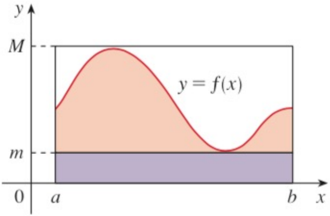


7. Si existen $m, M \in \mathbb{R}$ tales que

$$m \leq f(x) \leq M\,, \quad \forall\, x \in D$$

entonces

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$$



PRIMER TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

Si f es una función continua sobre $[a,b]$, entonces la función g definida por

$$g(x) = \int_a^x f(t)\,dt \qquad a \leq x \leq b$$

es continua sobre $[a,b]$, diferenciable sobre $]a,b[$ y satisface la ecuación $g'(x) = f(x)$, esto es,

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)\,dt\right) = f(x).$$

Observación.

Si g y h son funciones diferenciables, entonces se verifican las siguientes propiedades.

1. $$\frac{d}{dx}\left(\int_{a}^{g(x)} f(t)\,dt\right) = f(g(x))\cdot g'(x)$$

2. $$\frac{d}{dx}\left(\int_{g(x)}^{b} f(t)\,dt\right) = -f(g(x))\cdot g'(x)$$

3. $$\frac{d}{dx}\left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(t)\,dt\right) = f(h(x))\cdot h'(x) - f(g(x))\cdot g'(x)$$

SEGUNDO TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

Si f es continua sobre $[a,b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

donde F es cualquier antiderivada de f, esto es, una función tal que $F' = f$.

Observación. La relación anterior puede ser reescrita como

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

PROMEDIO O VALOR MEDIO DE UNA FUNCIÓN

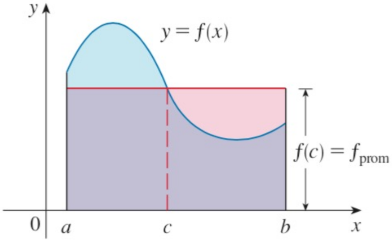
Si f es una función integrable sobre $[a,b]$, entonces el PROMEDIO de f sobre $[a,b]$ está definido por

$$\bar{f} = f_{prom} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx$$

TEOREMA DEL VALOR MEDIO

Si f es una función continua sobre el intervalo $[a, b]$, entonces existe $c \in]a, b[$ tal que

$$f(c) = f_{prom} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx.$$



CAMBIO DE VARIABLE

Sean $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g\colon [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones reales continuas tales que $g([c,d]) \subset [a,b]$. Si $u = g(x)$ es una función diferenciable entonces

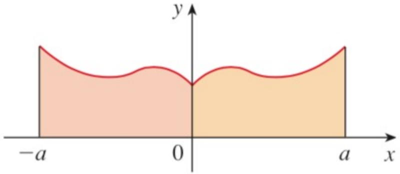
$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du$$

INTEGRALES DE FUNCIONES SIMÉTRICAS

Suponga que f es una función continua sobre $[-a, a]$.

i) Si f es par, esto es, $f(-x) = f(x)$, entonces

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$



ii) Si f es impar, esto es, $f(-x) = -f(x)$, entonces

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0.$$