Física I

RAedo

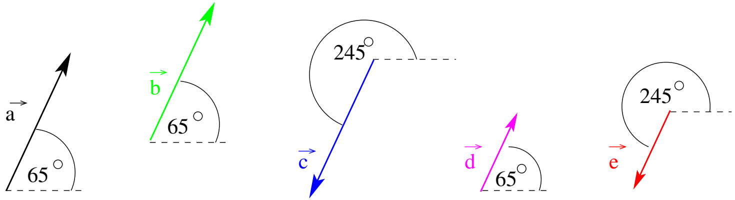
D Física
UBB

20 de marzo de 2021

UNIVERSIDAD DEL BÍO-BÍO

Vectores

Los vectores son un segmento orientado en el espacio, una representación gráfica de una cantidad física vectorial



En un vector se puede distinguir:

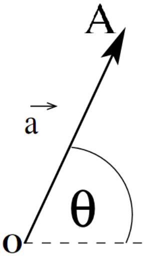
- Origen o punto de aplicación
- Extremo
- Módulo
- Dirección

UNIVERSIDAD DEL BÍO-BÍO

Vectores

Módulo es la distancia entre el origen y el extremo del vector

Dirección es el ángulo que el vector forma con algún eje de referencia



$$\begin{aligned} O &= \mathit{Origen} \\ A &= \mathit{Extremo} \\ \overline{OA} &= \mathit{Módulo} \\ \theta &= \mathit{Dirección} \end{aligned}$$

Notación de Módulo y Dirección

El módulo de un vector se denota por:

$$\| \vec{a} \| \, , \; \| \vec{b} \| \, , \; \| \vec{c} \| \, , \; etc.$$

también se usa:

$$\| \vec{a} \| = a \, , \; \| \vec{b} \| = b \, , \; \| \vec{c} \| = c \, , \; etc.$$

La dirección del vector se denotará por:

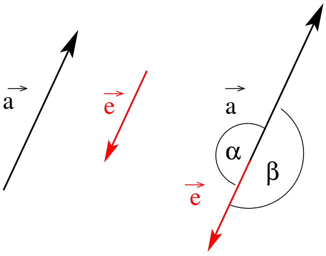
$$\theta = d_a = \text{dirección de } \vec{a}$$

Dos vectores son iguales, si tienen <u>igual módulo</u> e <u>igual dirección</u>

$$\vec{p} = \vec{q}$$

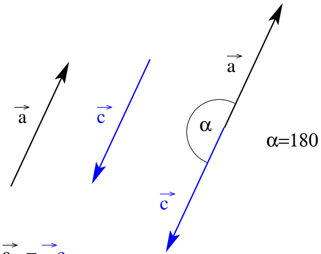
Vectores: Opuesto, Inverso Aditivo

Vectores Opuestos:
Dos vectores son opuestos si forman un ángulo de 180°, cuando se unen por sus orígenes.



$\alpha = \beta = 180°$

Inverso aditivo de un Vector:
es el vector opuesto que tiene igual módulo que el vector original.

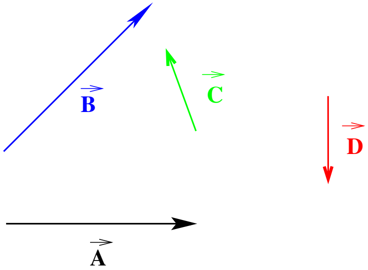


$\vec{a} = -\vec{c}$

Operatoria geométrica con Vectores

La **suma** de dos o más vectores $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}, ..., \vec{N}$ es un nuevo vector $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + ... + \vec{N} = \vec{R}$

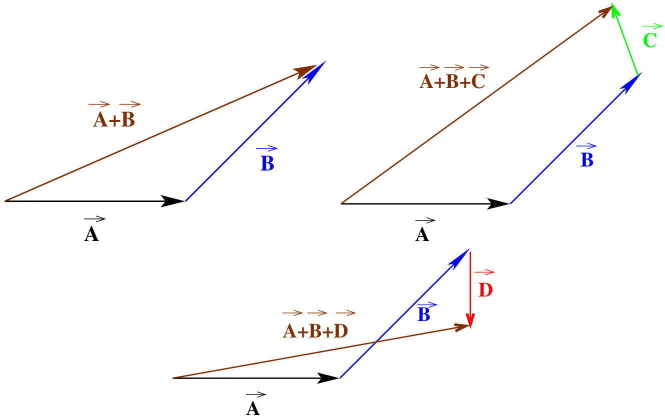
Suma geométrica de vectores
Para sumar geométricamente dos o más vectores usaremos los métodos: del **polígono** y del **paralelogramo**.
Para ilustrar la forma de proceder,utilizaremos los vectores mostrados en la figura.



UNIVERSIDAD DEL BÍO-BÍO

a) Método del póligono

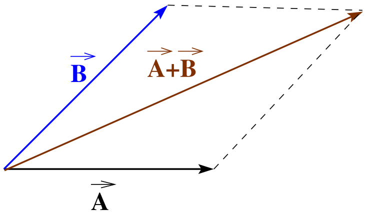
Consiste en copiar uno de los vectores y enseguida en el extremo de éste, se coloca el origen del otro vector (y así sucesivamente para más de dos vectores). Siendo el vector resultante aquel que tiene de origen el del primer vector y de extremo el del último vector. Como muestra la figura.

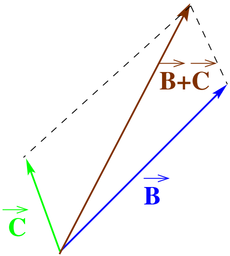


UNIVERSIDAD DEL BÍO-BÍO

b) Método del paralelogramo

Consiste en copiar los vectores con el mismo punto de origen (manteniendo su dirección). Luego se copian las proyecciones de los dos vectores formando un paralelogramo (ver figura).
El vector resultante es el que une el punto común de los origenes con el vértice opuesto del paralelogramo. Como muestra la figura.





Propiedades de la Adición (suma) de Vectores

La adición (suma) de vectores es:

Conmutativa

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$$

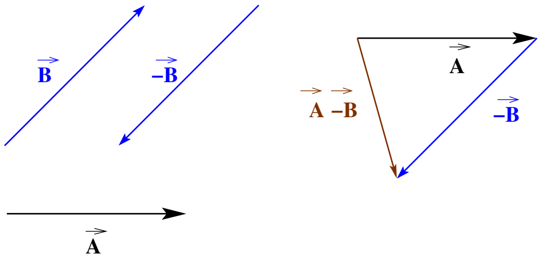
Asociativa

$$(\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} = \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C})$$

Diferencia de Vectores

La diferencia (resta) de dos vectores $\vec{A} y \vec{B}$ $(\vec{A} - \vec{B})$
es igual a la adición de $\vec{A}$ con el opueto de $\vec{B}$

$$\vec{A} + (-\vec{B})$$

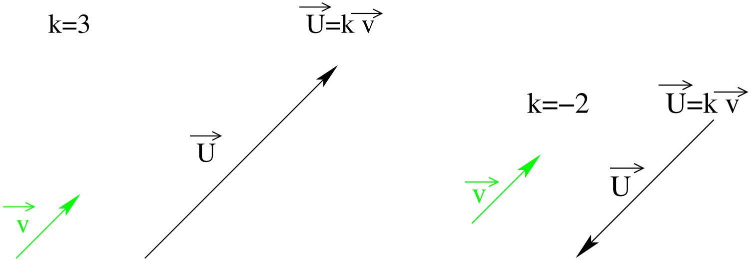


La suma de un vector con su opuesto nos da el vector cero $(\vec{0})$

$$\vec{A} + (-\vec{A}) = \vec{0}$$

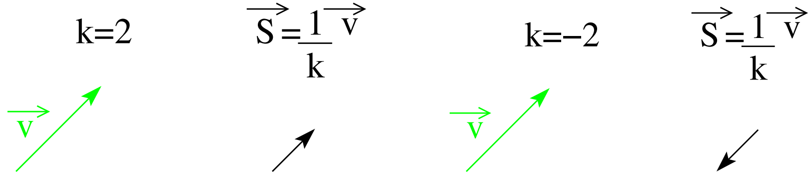
UNIVERSIDAD DEL BÍO-BÍO

Producto entre un escalar y un Vector



Consideremos al escalar **k** y al vector $\vec{v}$
Se define el producto de un escalar por un vector ($k\vec{v}$)
como un nuevo vector $\vec{U}$ ($\vec{U} = k\vec{v}$)
de <u>módulo</u> **k veces** el módulo de $\vec{v}$,
con la **misma dirección** de $\vec{v}$, si **k**$>$**0** ó
con **dirección opuesta** si **k**$<$**0**.

Cuociente entre un escalar y un Vector



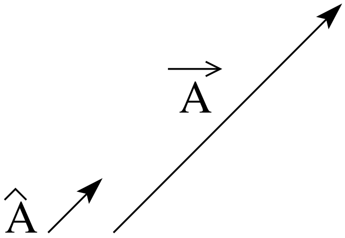
El cuociente entre un escalar y un vector ($\frac{\vec{v}}{k}$) es equivalente al producto del inverso multiplicativo del escalar ($\frac{1}{k}$) por el vector ($\vec{v}$)

$$\frac{\vec{v}}{k} = \frac{1}{k}\vec{v} = \vec{S}$$

El módulo de este nuevo vector será:
$\frac{1}{|k|}$ veces el módulo de $\vec{v}$

UNIVERSIDAD DEL BÍO-BÍO

Vector unitario



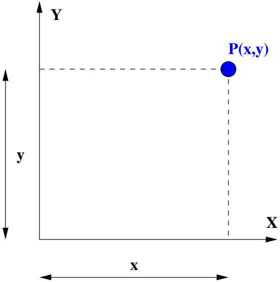
Se define el vector unitario de $\vec{A}$ ($\hat{A}$) al vector que resulta del cuociente entre el vector y su módulo:

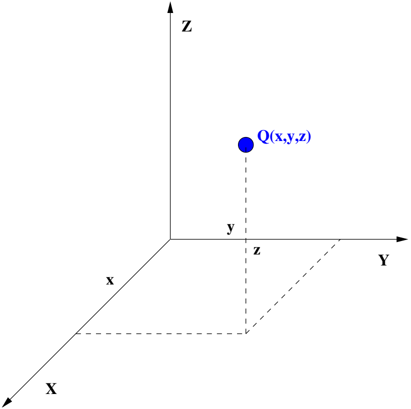
$$\hat{A} = \frac{\vec{A}}{\|\vec{A}\|}$$

Todo vector unitario tiene magnitud 1

Componentes ortogonales (cartesianas) de un Vector

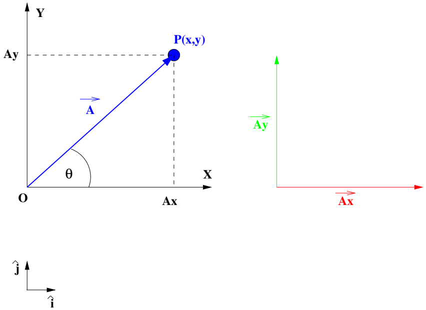
En el sistema de coordenadas cartesianas, un punto queda identificado: en el plano, por un par de números reales (por ejemplo **P**(x,y)),
y en el espacio por un trío de números reales (por ejemplo **Q**(x,y,z));
también llamadas coordenadas cartesianas.





UNIVERSIDAD DEL BÍO-BÍO

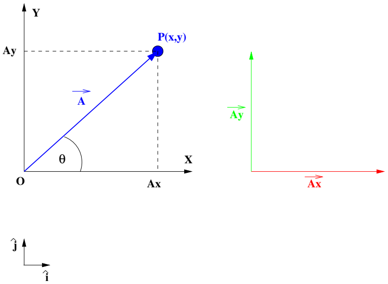
Componentes Cartesianas de un Vector (en 2-D)



El punto **P** (situado en un plano) puede ser determinado por un vector $\vec{A}$, ubicado en el plano, cuyo origen coincide con el origen del sistema de coordenadas y su extremo está en el punto P(x,y) considerado.

Los vectores unitarios $\hat{i}$ y $\hat{j}$ definen la dirección de los semiejes positivos
x^+ e y^+ respectivamente.

Componentes Cartesianas de un Vector (en 2-D)



$\vec{A}_x$ y $\vec{A}_y$ son las componentes cartesianas de $\vec{A}$.
Así pues, si se quiere expresar $\vec{A}$, en 2-D, en función de sus componenes cartesianas, se escribe, (empleando los vectores unitarios):

$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j}$$

A_x y A_y se llaman coordenadas escalares cartesianas de $\vec{A}$ y pueden ser positivas o negativas.

Magnitud y **Dirección** de un Vector, conocidas sus Componentes Cartesianas

Sea el vector: $\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j}$

Magnitud

Se determina la Magnitud de $\vec{A}$ como:

$$\| \vec{A} \| = \sqrt{(A_x)^2 + (A_y)^2}$$

Dirección

La dirección (θ) de $\vec{A}$ se puede determinar al aplicar la función tigonométrica tangente de un ángulo:

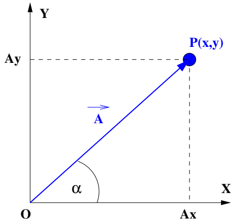
$$\tan(\theta) = \frac{A_y}{A_x} \Rightarrow \theta = Arctan(\frac{A_y}{A_x})$$

Observación:

Funciona correctamente para vectores del primer cuadrante, para los otros casos: examine con cuidado la situación.

Componentes Cartesianas de un Vector

Cuando se expresa un vector indicando su **Magnitud** y **Dirección**, lo que se conoce es su longitud y los ángulos formados con los ejes. A partir de ellos se pueden determinar los valores de las componentes escalares, aplicando las funciones trigonométricas: seno y coseno de un ángulo que están definidas como:

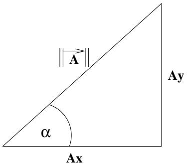


sen$(\alpha)=\frac{A_y}{\|\vec{A}\|} \;\Rightarrow\; A_y = \| \vec{A} \| \, sen(\alpha)$;

cos$(\alpha)=\frac{A_x}{\|\vec{A}\|} \Rightarrow A_x = \| \vec{A} \| \, cos(\alpha)$

entonces, como $\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j}$

$$\vec{A} = \| \vec{A} \| \, cos(\alpha)\hat{i} + \| \vec{A} \| \, sen(\alpha)\hat{j}$$



Nota: El vector unitario es: $\hat{A} = cos(\alpha)\hat{i} + sen(\alpha)\hat{j}$

UNIVERSIDAD DEL BÍO-BÍO

Operatoria con Vectores

Sean los vectores:

$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j};\ \vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j}$$

Adición

$$\vec{A} + \vec{B} = (A_x\hat{i} + A_y\hat{j}) + (B_x\hat{i} + B_y\hat{j})$$
$$\vec{A} + \vec{B} = (A_x + B_x)\hat{i} + (A_y + B_y)\hat{j}$$

Producto entre un escalar (k) y un Vector

$$\mathrm{k}\vec{B} = k(B_x\hat{i} + B_y\hat{j}) = (kB_x)\hat{i} + (kB_y)\hat{j}$$
$$\text{Ej.(k=-1)} \Rightarrow k\vec{B} = (-1)\vec{B} = (-1)B_x\hat{i} + (-1)B_y\hat{j}$$
$$(-1)\vec{B} = -B_x\hat{i} - B_y\hat{j} = -\vec{B}$$

Sustracción

$$\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B}) = (A_x\hat{i} + A_y\hat{j}) + (-B_x\hat{i} - B_y\hat{j})$$
$$\vec{A} - \vec{B} = (A_x - B_x)\hat{i} + (A_y - B_y)\hat{j}$$