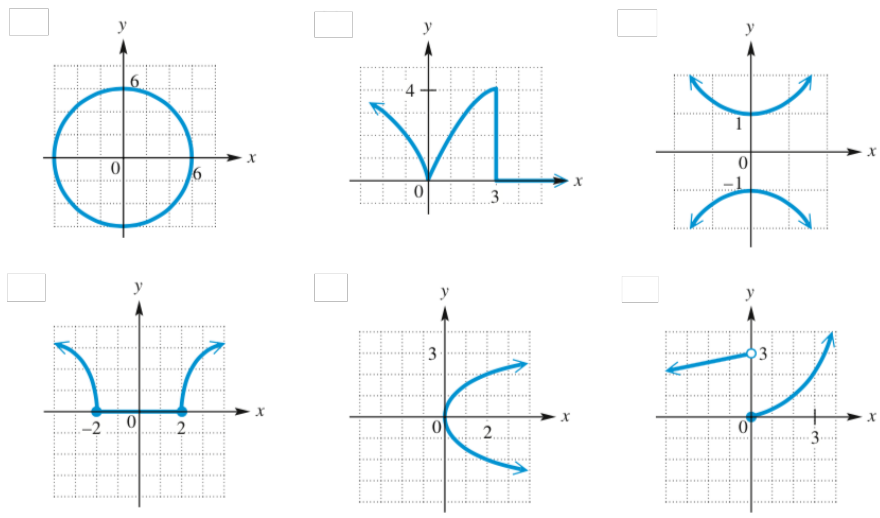
LISTADO N°2 - MÓDULO 1
ÁLGEBRA Y TRIGONOMETRÍA - 220143

☞ FUNCIONES Y GRÁFICAS DE FUNCIONES

1. Determine si la curva es el gráfico de una función de x. Si es así, indique el dominio y el recorrido de la función.



2. Encuentre el dominio de las siguientes funciones.

a) $f(x) = 3x - \dfrac{2}{x+1}$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x+2}$

c) $g(x) = \dfrac{2x^2+5x+3}{2x^2-5x-3}$

d) $f(x) = \sqrt{25-x^2}$

e) $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{3x-1}}$

f) $h(x) = \sqrt{4-x} + \sqrt{x^2-1}$

g) $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{2x+1}}{\sqrt[3]{2x+2}}$

h) $f(x) = \sqrt{\dfrac{5-x}{x}}$

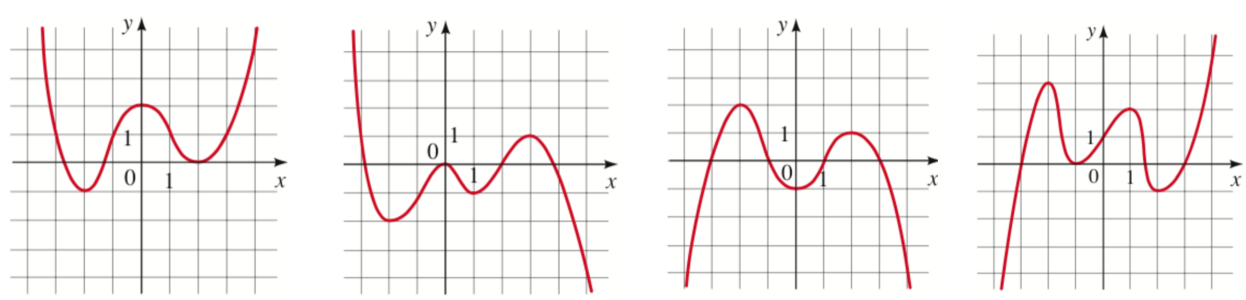
i) $f(x) = \sqrt{\dfrac{3-x}{x+2}}$

j) $f(t) = \sqrt{t} + \sqrt[3]{t}$

k) $g(u) = \sqrt{u} + \sqrt{4-u}$

l) $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{x^2-5x}}$

3. La gráfica de una función f es dada.



Use la gráfica de f para estimar lo siguiente.

a) Todos los valores máximos y mínimos locales de la función y el valor de x donde esto ocurre.

b) Los intervalos sobre los cuáles f es creciente o decreciente.

4. Dada la función f.

$i)$ Encuentre el dominio de la función.

$ii)$ Encuentre las intersecciones con los ejes.

$iii)$ Trace la gráfica de la función. Luego, usando la gráfica, encuentre el recorrido de la función.

$iv)$ Determine los intervalos sobre los cuáles la función es creciente, decreciente o constante.

$v)$ Determine todos los valores máximos y mínimos locales de la función (en caso que existan) y el valor de x donde esto ocurre.

a) $f(x) = x^2 - 1, \quad -3 \le x \le 3$

b) $f(x) = x^2 + 4x + 3$

c) $f(x) = -\sqrt{25-x^2}$

d) $f(x) = \sqrt{x^2-2x+8}$

e) $f(x) = \dfrac{3x+|x|}{x}$

f) $g(x) = \dfrac{|x|}{x^2}$

g) $f(x) = \begin{cases} 3 - \dfrac{x}{2}, & \text{si } x \le 2 \\ 2x-5, & \text{si } x > 2 \end{cases}$

h) $f(x) = \begin{cases} x+2, & \text{si } x \le -1 \\ x^2, & \text{si } x > -1 \end{cases}$

5. Describa con palabras cómo difieren las gráficas de las funciones dadas.

$$f(x) = x^2, \qquad g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3-x^2}{x-1}, & \text{si } x \ne 1 \\ 0, & \text{si } x = 1 \end{cases}, \qquad h(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3-x^2}{x-1}, & \text{si } x \ne 1 \\ 2, & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

☞ Combinación de Funciones

1. Encuentre $f+g$, $f-g$, $f\cdot g$, f/g y sus dominios.

   a) $f(x)=x, \quad g(x)=\sqrt{x}$
   b) $f(x)=3-x^2, \quad g(x)=x^2-4$
   c) $f(x)=x^2+2x, \quad g(x)=3x^2-1$
   d) $f(x)=\sqrt{25-x^2}, \quad g(x)=\sqrt{x+3}$
   e) $f(x)=\sqrt{16-x^2}, \quad g(x)=\sqrt{x^2-1}$
   f) $f(x)=\dfrac{2}{x}, \quad g(x)=\dfrac{4}{x+4}$
   g) $f(x)=\dfrac{2}{x+1}, \quad g(x)=\dfrac{x}{x+1}$

2. Encontrar las funciones $f\circ g$, $g\circ f$, $f\circ f$, $g\circ g$ y sus dominios.

   a) $f(x)=2x+3, \quad g(x)=4x-1$
   b) $f(x)=x^2, \quad g(x)=x+1$
   c) $f(x)=x^3+2, \quad g(x)=\sqrt[3]{x}$
   d) $f(x)=\dfrac{1}{x}, \quad g(x)=2x+4$
   e) $f(x)=x^2, \quad g(x)=\sqrt{x-3}$
   f) $f(x)=|x|, \quad g(x)=2x+3$
   g) $f(x)=x-4, \quad g(x)=|x+4|$
   h) $f(x)=\dfrac{x}{x+1}, \quad g(x)=2x-1$
   i) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}, \quad g(x)=x^2-4x$
   j) $f(x)=\dfrac{2}{x}, \quad g(x)=\dfrac{x}{x+2}$

☞ Funciones Exponenciales y Logarítmicas

1. Encuentre el dominio de las siguientes funciones

   a) $f(x)=\dfrac{1}{1-e^x}$
   b) $f(x)=\sqrt{1-2^t}$
   c) $f(x)=\sqrt{10-e^x}$
   d) $f(x)=\sqrt{3^{2-3x}-4}$
   e) $f(x)=10^x+\log(1-2x)$
   f) $f(x)=\log(2+x-x^2)$
   g) $f(x)=\log_3(x^2-4)$
   h) $f(x)=\ln|x|+\ln(x^2+1)$
   i) $f(x)=\ln(x-x^2)$
   j) $f(x)=\ln x+\ln(2-x)$
   k) $f(x)=\sqrt{x-2}+\log_5(10-x)$
   l) $f(x)=\ln(x-4)-\ln(x^2+4x)$
   m) $f(x)=\log(x^3-x)$
   n) $f(x)=\ln\sqrt{\dfrac{x^2-1}{x^2+1}}$
   ñ) $f(x)=\ln(x-\sqrt{x^2-1})$
   o) $f(x)=\sqrt{\ln x-2}+\sqrt{9-\ln x}$

2. Trace la gráfica de la función. Encuentre el dominio, el recorrido y la asíntota.

   a) $f(x)=3^{x-2}$
   b) $f(x)=2^{-x+1}$
   c) $f(x)=3+2^x$
   d) $f(x)=5^{-x}-5$
   e) $f(x)=e^{x-1}+1$
   f) $f(x)=-e^{x+1}-2$
   g) $f(x)=e^{|x|}$
   h) $f(x)=\log_3(x-1)$
   i) $f(x)=\log(-x)$
   j) $f(x)=2-\log_2 x$
   k) $f(x)=3+\log_5(x+4)$
   l) $f(x)=2\ln x$
   m) $f(x)=\ln(x^2)$
   n) $f(x)=\ln|x|$
   ñ) $f(x)=|\ln x|$

3. Encuentre la solución de las siguientes ecuaciones exponenciales y logarítmicas.

   a) $4^x+2^{1+2x}=50$
   b) $\dfrac{10}{1+e^{-x}}=2$
   c) $e^{2x}-3e^x+2=0$
   d) $e^x+15e^{-x}-8=0$
   e) $4-\log(3-x)=3$
   f) $\log_2(x^2-x-2)=2$
   g) $\log_2 x+\log_2(x-3)=2$
   h) $\ln(x+2)-\ln(x-3)=2$
   i) $\log_2(\log_3 x)=4$

☞ Funciones Inyectivas, Sobreyectivas, Biyectivas e Inversas

1. En cada caso, determine si la función indicada es sobreyectiva, inyectiva o biyectiva. Justifique su respuesta.

   a) $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=2x^2+3$
   b) $f:\mathbb{R}\longrightarrow[3,+\infty[$ definida por $f(x)=x^2+3$
   c) $f:\mathbb{Z}\longrightarrow\mathbb{Z}$ definida por $f(n)=n^2+n$
   d) $f:\mathbb{R}-\{1\}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$
   e) $f:\mathbb{R}\longrightarrow]0,1]$ definida por $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$
   f) $f:\mathbb{R}\longrightarrow[0,\infty[$ definida por
   $$f(x)=\begin{cases} x^2\,, & \text{si } x\le 0\\ x+1\,, & \text{si } x>0\end{cases}$$
   g) $f:\mathbb{R}\longrightarrow[2,+\infty[$ definida por $f(x)=|x|+2$.
   h) $f:\mathbb{R}\longrightarrow[0,1[$ definida por $f(x)=\dfrac{x^2}{1+x^2}$

2. Dada la función f.

   $i)$ Encuentre el dominio de f.
   ii Demuestre que la función es inyectiva.
   $iii)$ Encuentre la inversa de f y su dominio.

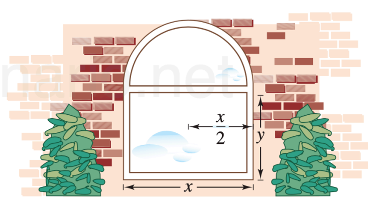
   a) $f(x)=\dfrac{x+1}{2x+1}$
   b) $f(x)=2^{2x}$
   c) $f(x)=3^{x+1}$
   d) $f(x)=e^{x^2}$
   e) $f(x)=\log_2(x-1)$
   f) $f(x)=\log(3x)$
   g) $f(x)=\ln(x+3)$
   h) $f(x)=\sqrt{3-e^{2x}}$
   i) $f(x)=\ln(2+\ln x)$
   j) $f(x)=\dfrac{2^x}{1+2^x}$
   k) $f(x)=\dfrac{e^x}{1+2e^x}$

☞ Modelado con Funciones

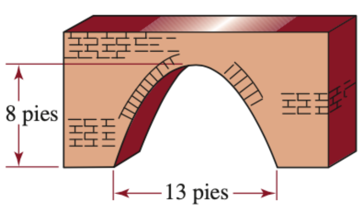
1. El número N de bacterias en un alimento refrigerado está dado por
$$N(T) = 25T^2 - 50T + 300, \quad 2 \leq T \leq 20$$
donde T es la temperatura del alimento en grados Celsius. Cuando el alimento se retira de refrigeración, su temperatura está dada por
$$T(t) = 2t + 1, \quad 0 \leq t \leq 9,$$
donde t es el tiempo en horas.
   - *a*) Encuentre la composición $N(T(t))$ e interprete su significado en el contexto y
   - *b*) encuentre el tiempo cuando la cantidad de bacterias llegue a 750.

   - *a*) Escriba el tiempo total T del viaje como función de x.
   - *b*) Determine el dominio de la función.
   - *c*) Use una calculadora gráficadora

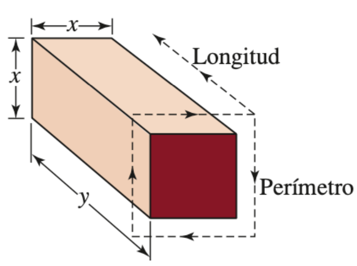
2. Una ventana "normanda" se construye al unir un semicírculo a la parte superior de una ventana rectangular ordinaria (vea **figura**). El perímetro de la ventana es 16 $pies$.
   - *a*) Escriba el área A de la ventana como función de x.
   - *b*) ¿Qué dimensiones producirán una ventana de máxima área?



3. Determine la función cuadrática que describe el arco parabólico que se ilustra en la figura.



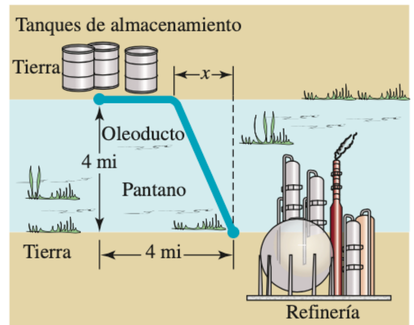
4. El reglamento del servicio postal para paquetería estipula que la longitud más el perímetro del extremo de un paquete no debe ser mayor que 108 $pulgadas$. Exprese el volumen del paquete en función del ancho x, como se indica en la **figura**.



5. Si una tarea se aprende a cierto nivel P_0, después de cierto tiempo t el nivel de recordatorio P satisface la ecuación
$$\log P = \log P_0 - c \log(t + 1),$$
donde c es una constante que depende del tipo de tarea y t se mide en meses.
   - *a*) Despeje P
   - *b*) Si su calificación en el examen de matemática es 90, ¿qué calificación esperaría obtener en un examen similar después de dos meses? ¿Después de un año? (Suponga que $c = 0{,}2$)

6. Cuando se las cultiva, ciertas bacterias forman colonias circulares. El radio del círculo, en centímetros, se expresa con el modelo matemático
$$r(t) = 4 - \frac{4}{t^2 + 1},$$
donde el tiempo t se mide en horas. Exprese
   - *a*) El área de la colonia en función del tiempo t.
   - *b*) La circunferencia de la colonia en función del tiempo t.

7. Se construirá un oleoducto que saldrá de una refinería, cruzará un pantano y llegará a los tanques de almacenamiento (ver **figura**). El costo de construcción es de \$25 000 por $milla$ en el pantano y \$20 000 por $milla$ en tierra firme. Exprese el costo del oleoducto que se ilustra en la figura como funcin de x.



8. Supongamos que la población de conejos en la granja del Sr. Jenkins sigue la fórmula
$$p(t) = \frac{3000t}{t + 1}$$
donde t es el tiempo (en meses) desde que empezó el año.
   - *a*) Trace la gráfica de la población de conejos.
   - *b*) ¿Qué sucede eventualmente con la población de conejos?
   - *c*) Encuentre la función inversa de p.

9. La población de cierta especie en un ambiente limitado, con población inicial de 100 y que soporta una capacidad de 1000 es
$$P(t) = \frac{100000}{100 + 900e^{-t}}$$
donde t se mide en años.
   - *a*) Demuestre que P es inyectiva.
   - *b*) Encuentre la función inversa de esta función.
   - *c*) ¿Cuántos años transcurren para que la población llegue a 900?

10. Supongamos que estás conduciendo tu auto en un día de invierno frío ($20°F$ fuera) y el motor se sobrecalienta (alrededor de $220°F$). Cuando estacionas, el motor comienza a enfrisare. La temperatura T del motor t minutos después de aparcar satisface la ecuación
$$\ln\left(\frac{T - 20}{200}\right) = -0.11t$$
   - *a*) Resuelva la euación para t.
   - *b*) Use la parte *a*) para encontrar la temperatura del motor después de 20 min ($t = 20$).

11. Un circuito eléctrico contiene una batería que produce un voltaje de 60 $volts$ (V), un resistor con una resistencia de 13 $ohms$ (?), y un inductor con una inductancia de 5 $henrys$ (H), como se muestra en la **figura**. Usando cálculo, se puede demostrar que la corriente $I(t)$ (en $amperes$, A) t segundos después de cerrar el interruptor es $I(t) = \frac{60}{13}(1 - e^{-13t/5})$.
   - *a*) Use la ecuación para expresar el tiempo t como función de la corriente I.
   - *b*) ¿Después de cuántos segundos será la corriente de 2 A?