Guía Espacios Vectoriales

RESULTADOS DE APRENDIZAJES	
1	Aplica la teoría de espacios vectoriales y sus propiedades para la resolución de problemas.

Espacios Vectoriales

1. Analizar si los siguientes conjuntos son o no subespacios de los espacios vectoriales dados.

   a) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x + 2y = 0\}, V = \mathbb{R}^2$.
   b) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 - y = 0\}, V = \mathbb{R}^2$.
   c) $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 3x - 2y = 2\}, V = \mathbb{R}^2$.
   d) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2x - 3y + z = 0\}, V = \mathbb{R}^3$.
   e) $R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 4x - y + z = 0, x + y - 3z = 0\}, V = \mathbb{R}^3$.
   f) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x > 0\}, V = \mathbb{R}^3$.
   g) $T = \{A = (a_{ij}) \in M_2(\mathbb{R}) / a_{11} + a_{21} = 0\}, V = M_2(\mathbb{R})$.
   h) $W = \{A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R}) / A^t = -A\}, V = M_n(\mathbb{R})$.
   i) $U = \{f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f \text{ una función par}\}, V = \{f : A \subset \mathbb{R}\ f \text{ es función}\}$.
   j) $R = \{A = (a_{ij}) \in M_2(\mathbb{R}) / a_{12} = a_{11} + 1\}, V = M_2(\mathbb{R})$.

2. Dados los subespacios $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - y + z = 0; 2x - z = 0\}$ y $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 3x - 2y + z = 0\}$. Halle $S \cap T$. ¿$S \oplus T = \mathbb{R}^3$?

3. Sea $V = \mathbb{R}^3$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, determine si el conjunto es linealmente dependiente o independiente: $A = \{(1, -3, 2), (0, 7, -1), (2, 1, 3)\}$

4. Sean u, v, w vectores l.i. de un espacio vectorial V. Probar que el conjunto $\{u + v, u - v, u - 2v + w\}$ es l.i.

5. Sea $V = \mathbb{R}^3$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, probar que $\{(1, 3, 5), (2, -2, 3), (3, 2, -5)\}$ forma una base de $\mathbb{R}^3$.

6. Sean los subespacios de $\mathbb{R}^3$, dados por $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 3x + y - 3z = 0; x - y + 4z = 0\}$ y $T = \langle\{(-1, 0, 1), (1, -1, 2)\}\rangle$.

   a) Caracterice el subespacio T.
   b) Halle una base y dimensión de S.
   c) Determine $S \cap T$, una base y su dimensión. ¿$S \oplus T = \mathbb{R}^3$?

7. Sea el sunconjunto $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 3x - 2y - z = 0\}$ de $\mathbb{R}^3$:

   a) Pruebe que S es un subespacio de $\mathbb{R}^3$
   b) Halle una base y dimensión de S.
   c) Verifique que el vector $(3, -2, 13) \in S$ y escribalo como combinación lineal de la base de S encontrada en $b)$.

8. Dado el conjunto $A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right\} \subset M_2(\mathbb{R})$

   a) Determine si A es un conjunto l.i o l.d.
   b) Caracterice el subespacio S generado por A.
   c) Determine la dimensión S.

9. Dados los conjuntos $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 3x - 4y - z = 0\}$ y $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - 3y = 0\}$.

   a) Determine una base y dimensión de S.
   b) Caracterice $S \cap T$.

10. Probar que los siguientes vectores de $\mathbb{R}^3$: $A = \{(1, 2, -1), (3, -1, 2)\}$ y $B = \{(2, -3, 3), (5, 3, 0)\}$ generan el mismo subespacio.

11. Dado el conjunto $\boldsymbol{A = \{2, x+1, x^2-1, x^2+3x-4\}}$, en el espacio de los polinomios de grado 2.

a) Muestre que el conjunto es l.d.

b) De $\boldsymbol{A}$, halle una base de $\boldsymbol{P_2}(\mathbb{R})$.

12. Sea $\boldsymbol{V = M_2}(\mathbb{R})$ y considere el conjunto $\boldsymbol{A} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \subset \boldsymbol{M_2}(\mathbb{R})$

a) Caracterice el subespacio $\boldsymbol{S}$ generado por $\boldsymbol{A}$.

b) Extienda el conjunto $\boldsymbol{A}$ a una base de $\boldsymbol{V = M_2}(\mathbb{R})$.

13. Verificar si el conjunto $\boldsymbol{\{(2,-1,4,0), (-1,0,1,1), (4,1,7,-5)\}}$ es l.i o l.d.

14. Considere en $\mathbb{R}^4$ los subespacios vectoriales $\boldsymbol{W_1 = \{(1,-1,0,1), (-1,0,1,0), (1,-2,1,2)\}}$ y $\boldsymbol{W_2 = \{(0,-1,1,1), (1,-2,1,2)\}}$.

a) Caracterice los subespacios $\boldsymbol{W_1}$ y $\boldsymbol{W_2}$.

b) Hallar $\boldsymbol{dim(W_1 \cap W_2)}$ y $\boldsymbol{dim(W_1 + W_2)}$.

15. Sean los subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^4$, $\boldsymbol{U = \{(1,1,0,-1), (1,2,3,0), (2,3,3,-1)\}}$ y $\boldsymbol{V = \{(1,2,2,-2), (2,3,2,-3), (1,3,4,-3)\}}$. Hallar

a) Caracterizar $\boldsymbol{U + V}$ y $\boldsymbol{dim(U + V)}$.

b) Caracterizar $\boldsymbol{U \cap V}$ y $\boldsymbol{dim(U \cap V)}$.

16. Sean los subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^4$, $\boldsymbol{W_1 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / x - z = 0; y + t = 0\}}$ y $\boldsymbol{W_2 = \{(0,0,0,1), (1,1,1,-1)\}}$. Calcular:

a) $\boldsymbol{dim(W_1)}$ y $\boldsymbol{dim(W_2)}$.

b) Caracterizar $\boldsymbol{W_1 \cap W_2}$ y $\boldsymbol{dim(W_1 \cap W_2)}$. ¿Es $\mathbb{R}^4 = \boldsymbol{W_1 \oplus W_2}$?

c) Hallar $\boldsymbol{dim(W_1 + W_2)}$.

17. Sea el espacio vectorial $\boldsymbol{M_{2\times 2}}(\mathbb{R})$ y consideremos los subespacios vectoriales $\boldsymbol{T} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \boldsymbol{M_{2\times 2}}(\mathbb{R}) / \boldsymbol{a + b + c + d = 0} \right\}$ y $\boldsymbol{U} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

a) Hallar base para $\boldsymbol{T}$.

b) Caracterizar $\boldsymbol{U}$.

c) Hallar una base y caracterizar $\boldsymbol{T + U}$ y $\boldsymbol{T \cap U}$.

18. Calcular los valores de $\boldsymbol{a}$ para los cuales los vectores $\boldsymbol{\{(1,2,-1,2), (2,-1,3,-1), (1,a,-6,a)\}}$ de $\mathbb{R}^4$ son linealmente independientes.

19. Sea $\boldsymbol{R}$ el conjunto de matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a+b+c & b \\ c & b & a \end{pmatrix}$$

donde $\boldsymbol{a, b, c} \in \mathbb{R}$. Probar que $\boldsymbol{R}$ es un subespacio vectorial de $\boldsymbol{M_3}(\mathbb{R})$.

20. Dada la base $\boldsymbol{B = (1,1,1), (1,1,2), (1,2,3)}$ de $\mathbb{R}^3$. Hallar las coordenadas del vector $\boldsymbol{x = (6,9,14)}$.

21. Sea el espacio vectorial $\boldsymbol{M_{2\times 2}}(\mathbb{R})$ y las bases $\boldsymbol{B_1} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ y $\boldsymbol{B_2} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \right\}$

a) Encuentre la matriz cambio de base de $\boldsymbol{B_1}$ a $\boldsymbol{B_2}$.

b) Encuentre la matriz cambio de base de $\boldsymbol{B_2}$ a $\boldsymbol{B_1}$.

21. Considere las bases de $\mathbb{R}^3$. $\boldsymbol{B_1 = \{(1,0,1), (-1,1,1), (1,-1,0)\}}$ y $\boldsymbol{B_2 = \{(2,1,1), (1,1,1), (1,-1,1)\}}$

a) Calcular la matriz de cambio de base de $\boldsymbol{B_2}$ a $\boldsymbol{B_1}$.

b) Calcular las coordenadas en la base $\boldsymbol{B_1}$ del vector cuyas coordenadas en $\boldsymbol{B_2}$ son $\boldsymbol{(3,-2,2)}$.

22. Sean $\boldsymbol{B_1 = \{e_1, e_2, e_3\}}$ y $\boldsymbol{B_2 = \{e_1^* = e_1 + e_2 + e_3, e_2^* = e_1 + 2e_2 + e_3, e_3^* = e_1 + e_2 + 3e_3\}}$ dos bases de $\mathbb{R}^3$. Calcular la matriz de cambio de base de $\boldsymbol{B_1}$ a $\boldsymbol{B_2}$ y de $\boldsymbol{B_2}$ a $\boldsymbol{B_1}$. Si $[v]_{B_1} = \boldsymbol{(23,-7,19)}$ calcular las coordenadas de $\boldsymbol{v}$ en la base $\boldsymbol{B_2}$.