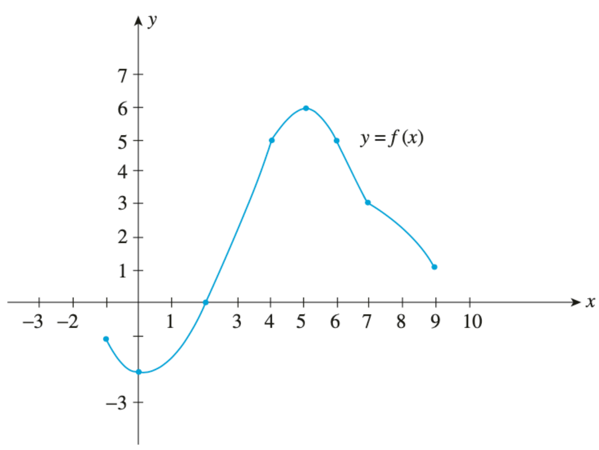
UNIVERSIDAD DEL BÍO BÍO

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

PAUTA SUMATIVO N°2
ÁLGEBRA Y TRIGONOMETRÍA - MÓDULO 1
220143

1. La gráfica de una función f es dada.



Determine

a) El dominio de la función

b) Las intersecciones con los ejes coordenados.

c) El recorrido de la función.

d) ¿Para cuáles valores de x se tiene que $f(x) = 5$?

e) Los intervalos sobre los cuáles la función es creciente, decreciente o constante.

f) Todos los valores máximos y mínimos locales (en caso existan) y el valor de x donde esto ocurre.

Solución.

a) El dominio de f es $D_f = [-1, 9]$ **(5 puntos)**

b) La gráfica de f intersecta al eje x en $(2, 0)$ y al eje y en $(0, -2)$. **(5 puntos)**

c) El recorrido de f es $R_f = [-2, 6]$. **(5 puntos)**

d) La gráfica de f intersecta a la recta horizontal $y = 5$ en $x = 4$ y $x = 6$. **(5 puntos)**

e) La función es creciente en el intervalo $[0, 5]$ y decreciente en los intervalos $[-1, 0]$ y $[5, 9]$. **(5 puntos)**

f) La función alcanza un máximo local en $x = 5$ y su valor es 6 y tiene un mínimo local en $x = 0$ cuyo valor es -2. **(5 puntos)**

2. Dadas las funciones

$$f(x) = \frac{2x^2 - 7x + 6}{x - 2} \quad ; \quad g(x) = 4 - x^2 \quad \text{y} \quad h(x) = \sqrt{4 - x^2}$$

Determine

a) El dominio de f, g y h.

b) El dominio de $f - g$ y su regla de correspondencia.

c) El dominio de $g \circ h$ y su regla de correspondencia.

Solución.

a) El dominio de la función f es $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$ y el dominio de la función g es $D_g = \mathbb{R}$. **(6 puntos)**
Note que para $x \in D_f$ podemos simplificar la expresión para $f(x)$ como sigue

$$f(x) = \frac{2x^2 - 7x + 6}{x - 2} = \frac{(x - 2)(2x - 3)}{x - 2} = 2x - 3$$

Finalmente, el dominio de la función h es

$$D_h = \{x \in \mathbb{R} \,:\, 4 - x^2 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} \,:\, (x + 2)(x - 2) \leq 0\} = [-2, 2].$$

b) El dominio de $f - g$ es **(6 puntos)**

$$D_{f-g} = D_f \cap D_g = (\mathbb{R} - \{2\}) \cap [-2, 2] = [-2, 2[$$

y su regla de correspondencia está dada por

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) = 2x - 3 - (4 - x^2) = x^2 + 2x - 7$$

c) El dominio de $g \circ h$ es dado por **(8 puntos)**

$$\begin{aligned} D_{(g \circ h)} &= \{x \in D_h \,:\, h(x) \in D_g\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \,:\, -2 \leq x \leq 2 \,\wedge\, \sqrt{4 - x^2} \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \,:\, -2 \leq x \leq 2 \,\wedge\, 4 - x^2 \geq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \,:\, -2 \leq x \leq 2 \,\wedge\, -2 \leq x \leq 2\} \\ &= [-2, 2]. \end{aligned}$$

y su regla de correspondencia es

$$(g \circ h)(x) = g\left(\sqrt{4 - x^2}\right) = 4 - (\sqrt{4 - x^2})^2 = 4 - (4 - x^2) = x^2.$$

3. Dada la función por tramos

$$f(x) = \begin{cases} 4+x & , \text{ si } \quad x \le -2 \\ |x| & , \text{ si } \quad -2 < x < 2 \\ 4-x & , \text{ si } \quad x \ge 2 \end{cases}$$

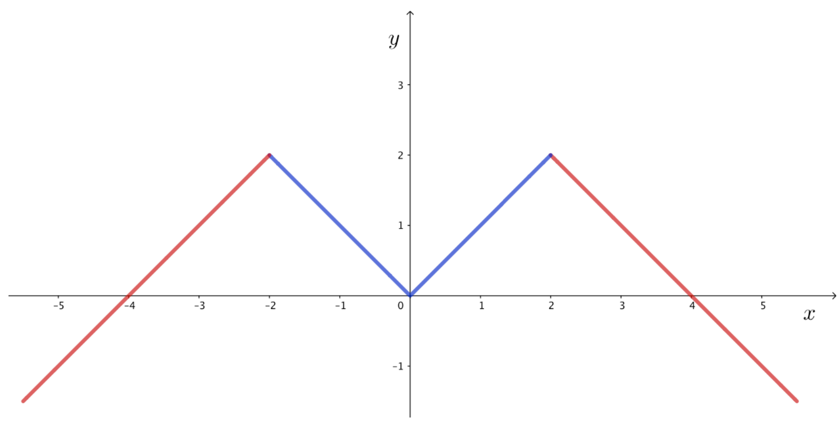
a) Trace la gráfica de f.

b) Usando la gráfica, determine el recorrido de f.

c) ¿Es la función par, impar o ninguna de las dos? Justifique su respuesta.

Solución.

a)



(10 puntos)

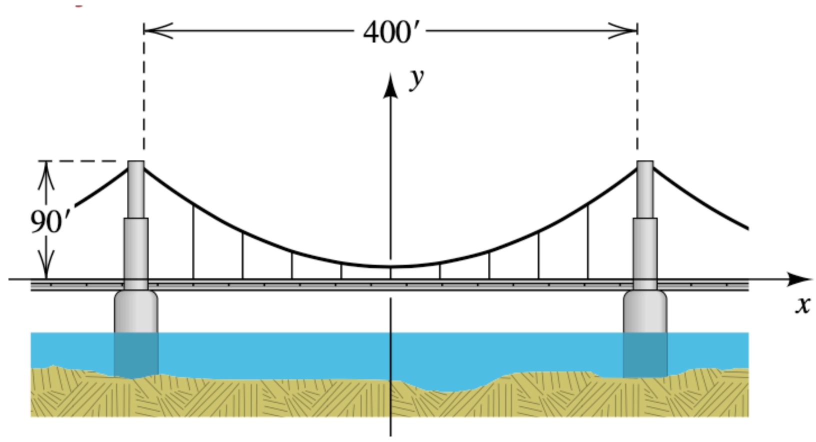
b) En base a la gráfica de f se tiene que su recorrido es $R_f =]-\infty, 2]$. **(5 puntos)**

c) La función f es par ya que su gráfica es simétrica con respecto al eje y. **(5 puntos)**

4. Una sección de un puente colgante tiene su peso uniformemente distribuido entre torres gemelas que están a 400 $pies$ entre sí y se elevan 90 $pies$ sobre la calzada horizontal (**vea la figura**). Un cable tendido entre los remates de las torres tiene la forma de una parábola y su punto central está a 10 $pies$ sobre la calzada. Suponga que se introducen ejes de coordenadas, como se ve en la figura.

i) Encuentre una ecuación para la parábola.

ii) Nueve cables verticales igualmente espaciados se usan para sostener el puente (**vea la figura**). Encuentre la longitud de los cables verticales situados a 80 $pies$ del centro del puente.



Solución.

a) Tomando en cuenta el enunciado y la figura se deduce que el vértice de la parábola está en $V(0, 10)$. Luego, la ecuación que modela la forma del cable es **(20 puntos)**

$$y = f(x) = ax^2 + 10$$

Ahora, como los puntos $Q_1(200, 90)$ y $Q_2(-200, 90)$ son puntos en la parábola, entonces se verifica

$$90 = a(200)^2 + 10$$

de lo cual resulta $a = 1/500$. Por lo tanto, la ecuación del cable asume la forma

$$\mathcal{P} : y = \frac{1}{500}x^2 + 10$$

b) La longitud de los cables verticales a 80 $pies$ del centro del puente es **(10 puntos)**

$$y = f(80) = \frac{1}{500}(80)^2 + 10 = \frac{114}{5} \approx 22,8 \quad pies$$