Ejercicio[section]

MATERIAL DE APOYO PARA EL MODULO 2 DE CÁLCULO DIFERENCIAL

Profesor: Fernando Flores Bazán.

Concepción, 2017.

Departamento de Matemática–Universidad del Bío-Bío

Índice general

1 Continuidad de Funciones **2**

1.1 Continuidad de funciones reales 2

1.2 Discontinuidad de funciones 5

1.2.1 Discontinuidad evitable 5

1.2.2 Ejercicios Resueltos 9

1.3 Ejercicios Propuestos 15

2 Derivadas de funciones reales **17**

2.1 Derivadas 17

2.2 Interpretación Geométrica 18

2.2.1 Algebra de derivadas 19

2.2.2 Ejercicios resueltos 19

2.2.3 Derivadas de funciones inversas 26

2.2.4 Ejercicios Resueltos 27

2.2.5 Derivadas de funciones trigonométricas y de inversas 30

2.2.6 Ejercicios Resueltos 32

2.3 Familia de curvas ortogonales,Derivadas de orden Superior 38

2.4 Aproximación lineal de Funciones 38

2.4.1 Ejercicios Resueltos 39

2.5 Aplicaciones de la derivada 41

2.5.1 Máximos y mínimos 41

2.5.2 Ejercicios Resueltos 44

2.5.3 Problemas de Optimización 49

2.5.4 Tasa de Variación 49

2.5.5 Variables Relacionadas 51

2.5.6 Regla de L'hospital 51

2.5.7 Ejercicios Resueltos 52

2.6 Ejercicios Propuestos 60

2.7 Aplicación de la derivada a la Economía 65

2.7.1 Funciones lineales de costos, ingresos y ganancias 65

Capítulo 1

Continuidad de Funciones

La idea de continuidad en matemática ocurre cuando no hay interrupción, que no haya separación de un punto a otro.
En el capítulo anterior se estudió el comportamiento de una función $y = f(x)$ para valores de x próximo a un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ mediante el límite, pudiendo existir el límite aún cuando f no esté definida en x_0, es decir $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ exista y $f(x_0)$ no esté definido.

1.1. Continuidad de funciones reales

Definición 1.1.1.

1. Sea $f : Dom(f) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ función, se dice que f es continua en $x_0 \in Dom(f)$ si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ simbólicamente

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \iff \forall\ \epsilon > 0,\ \exists\ \delta > 0 \text{ tal que } 0 < |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

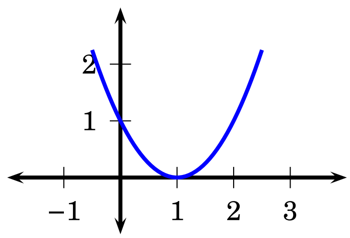
2. Sea $f : Dom(f) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ función, se dice que f es ***continua por la derecha*** en x_0 si $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$ simbólicamente

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0) \iff \forall\ \epsilon > 0,\ \exists\ \delta > 0 \text{ tal que } 0 < x - x_0 < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

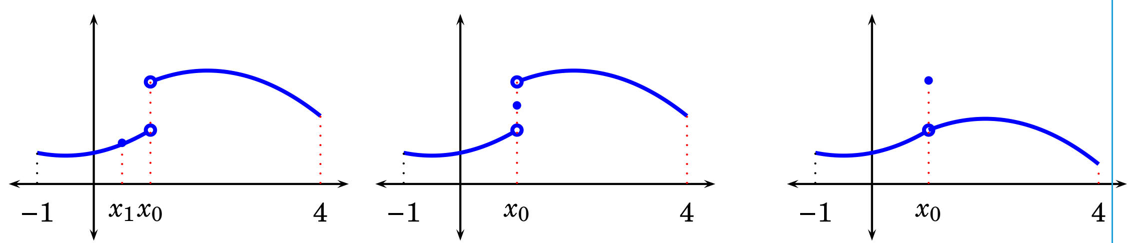
3. Sea $f : Dom(f) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ función, se dice que f es ***continua por la izquierda*** en x_0 si $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$ simbólicamente

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0) \iff \forall\ \epsilon > 0,\ \exists\ \delta > 0 \text{ tal que } 0 < x_0 - x < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

Propiedades 1.1.1.
Sea $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ función continua en I entonces es continua en cada punto de I.



Observación 1.1.2. Presentamos tres casos de funciones con saltos



$1.-\quad Dom(f) = [-1, x_1] \qquad 2.-\quad Dom(f) = [-1, 4] \qquad 3.-\quad Dom(f) = [-1, 4]$

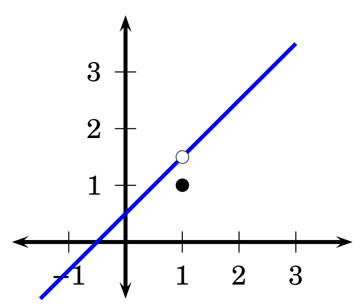
1. Para la primera función $x_0 \notin Dom(f)$ por tanto f es continua en todo su dominio, y no es necesario analizar continuidad en x_0

2. Para la segunda función $x_0 \in Dom(f)$ y $f(x_0)$ está definido y $\lim_{x\to x_0^+} f(x) \neq \lim_{x\to x_0^-} f(x) \neq f(x_0)$ por tanto no es continua en x_0 , hay un salto.

3. Para la tercera función $x_0 \in Dom(f)$ y $f(x_0)$ está definido y $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) \neq f(x_0)$ por tanto no es continua en x_0, hay un salto.

Por ejemplo la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & ; \quad x \neq 1 \\ 1 & ; \quad x = 1 \end{cases} \text{, el } Dom(f) = \mathbb{R}$$



Según el gráfico f no es continua en 1 pues $\lim\limits_{x\to 1^+}(x+1) = \lim\limits_{x\to 1^-}(x+1) = 2 \neq 1 = f(1)$

Teorema 1.1.3. Sean $f,g: I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ funciones continuas en $a\in I$, es decir $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$, $\lim_{x\to a} g(x)=g(a)$ entonces

1. $kf(x)$ es continua, $k\in\mathbb{R}$ y se cumple $\lim_{x\to a} kf(x)=kf(a)$
2. $(f+g)(x)$ es continua en a y se cumple $\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)]=f(a)+g(a)$
3. $(f-g)(x)$ es continua en a y se cumple $\lim_{x\to a}[f(x)-g(x)]=f(a)-g(a)$
4. $(f\cdot g)(x)$ es continua en a y se cumple $\lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)]=f(a)\cdot g(a)$
5. $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ es continua en a y se cumple $\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{f(a)}{g(a)}$ siempre que $g(a)\neq 0$.
6. $[f(x)]^n$ es continua en a y se cumple $\lim_{x\to a}[f(x)]^n=[f(a)]^n$
7. $\sqrt[n]{f(x)}$ es continua en a y se cumple $\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{f(a)}$, $f(a)>0, n$ par

Teorema 1.1.4. [Composición de funciones]
Si g es continua en a, es decir $\lim_{x\to a} g(x)=g(a)$, y si f es continua en $g(a)$, es decir $\lim_{x\to g(a)} f(x)=g(a)$, entonces $\lim_{x\to a} f(g(x))=f(\lim_{x\to a} g(x))=f(g(a))$

Propiedades 1.1.5.

1. Sea el ***polinomio*** $P(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, $a_k\in\mathbb{R}$. es continua en $\mathbb{R}$ pues está constituida de un número finito de productos y sumas de la función identidad y constante.
2. Las funciones ***racionales*** son de la forma

$$R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)},\ Q(x)\neq 0;\ \text{donde}\ P(x), Q(x)\ \text{polinomios}\ .$$

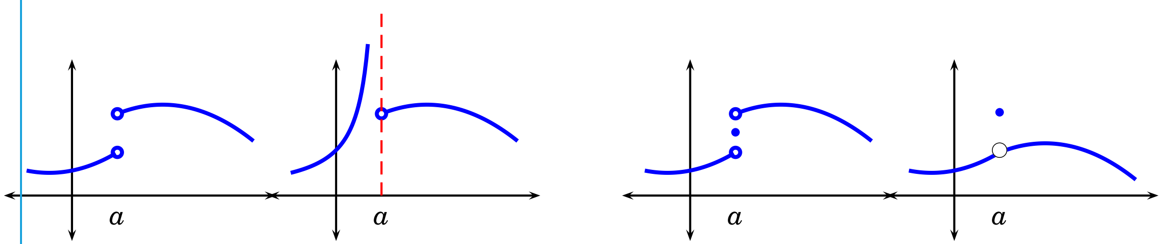
   Es continua en todos los puntos de $\mathbb{R}$, salvo de aquellos que anulen el denominador $Q(x)$; pero como estos puntos no estan en el dominio de $R(x)$ entonces $R(x)$ resulta continua en todo su dominio.

1.2. Discontinuidad de funciones

Observación 1.2.1.
A continuación veremos las condiciones para que una función no sea continua

1. f no está definida en a, ó no existe $f(a)$.
2. No existe alguno de los límites laterales de f en a.
3. Los límites laterales existen pero son distintos.a
4. Los límites laterales existen, son iguales, pero no coinciden con el valor de f en el punto a.

Presentamos 4 casos de discontinuidad



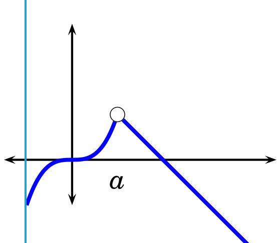
Observación 1.2.2. Una función f, es discontinua en un punto en donde f no es continua. Ahora procederemos a clasificar los puntos de discontinuidad.

$$\text{Discontinuidad}\begin{cases} Evitable \\ Esencial\begin{cases} De\,primera\,especie\begin{cases} De\,salto\,finito \\ De\,salto\,infinito \\ Asintótica \end{cases} \\ De\,segunda\,especie \end{cases} \end{cases}$$

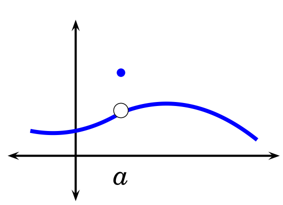
1.2.1. Discontinuidad evitable

Definición 1.2.1. [Discontinuidad evitable]

1. Se dice que f presenta una discontinuidad evitable en $x = a$ si existe $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ y es finito; si ocurre esto puede que,
   - $f(a)$ no exista
   - o que $f(a)$ exista pero $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq f(a)$.

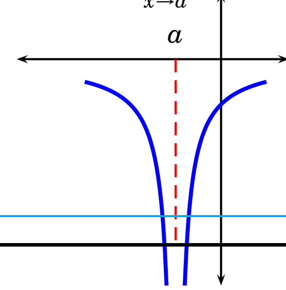


$f(a)$ no es definido



$\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq f(a)$

no es el caso
por que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$



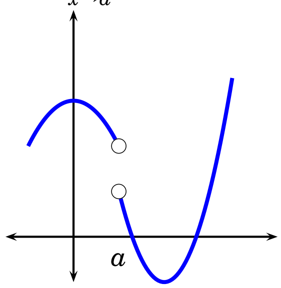
Definición 1.2.2. [Discontinuidad esencial]

1. Discontinuidad esencial de primera especie

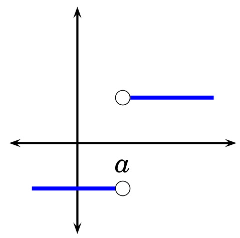
   Se presentan 3 tipos

   Discontinuidad esencial de primera especie de salto finito

   Cuando $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ existan y $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ y el salto viene dado por $|\lim\limits_{x\to a^-} f(x) - \lim\limits_{x\to a^+} f(x)|$



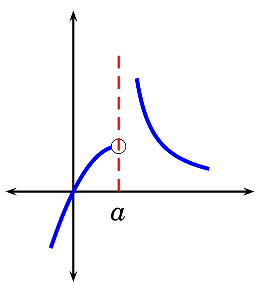
$\lim\limits_{x\to a^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to a^-} f(x)$



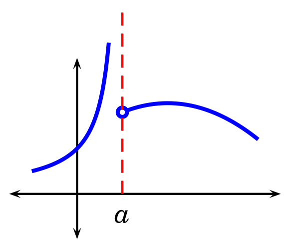
$\lim\limits_{x\to a^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to a^-} f(x)$

   Discontinuidad esencial de primera especie de salto infinito

   Cuando $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ exista y $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$ o $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$ y $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ exista.



$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ finita, $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = +\infty$

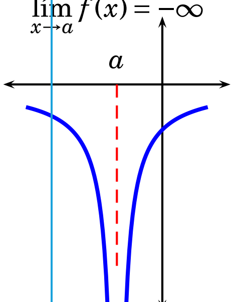


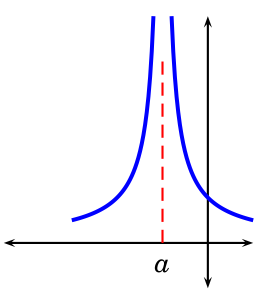
$\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ finita

   Discontinuidad esencial de primera especie asíntótica

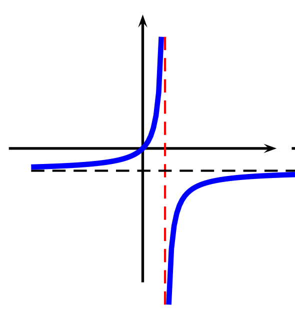
   Cuando $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$ y $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$

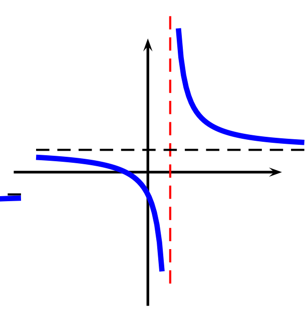
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$





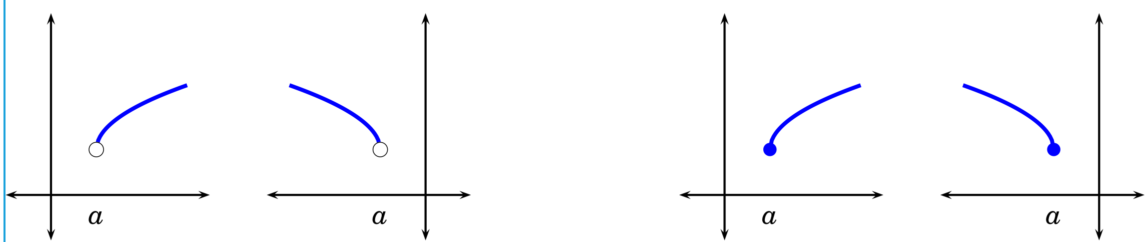
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$





Definición 1.2.3. [Discontinuidad esencial]

2. Discontinuidad esencial de segunda especie
   Cuando al menos uno de los límites laterales no existe.



$\exists \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$
$\nexists \lim\limits_{x\to a^-} f(x)$

$\exists \lim\limits_{x\to a^-} f(x)$
$\nexists \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$

$\exists \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$
$\nexists \lim\limits_{x\to a^-} f(x)$

$\exists \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = f(a)$
$\nexists \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$

exam:con Analice que tipos de discontinuidades son las funciones siguientes en el punto indicado

1. $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x \neq 0$ en el punto $a = 0$.
2. $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$, $x \neq 2$ en el punto $a = 2$.
3. $f(x) = \begin{cases} x+2, & x \neq 2 \\ 3, & x = 2 \end{cases}$ para $a = 2$
4. $f(x) = [\![x]\!]$, $a = n \in \mathbb{Z}$
5. $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$.
6. $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$
7. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & x < 0, \\ x, & x > 0, \end{cases}$
8. $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$
9. $f(x) = \sqrt{x}$

Resolución: ►

1. $f(x)=\dfrac{1}{x}, x\neq 0$
   $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty,\ \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x}=-\infty$, *es una discontinidad esencial de primera especie asintótica.*

2. $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$
   $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x^2-4}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^+}x+2=4=\lim\limits_{x\to 2^-}x+2$ *pero* $f(2)$ *no está definido, es una discontinidad evitable.*

3. $f(x)=\begin{cases} x+2, & x\neq 2\\ 3, & x=2 \end{cases}$ *para* $a=2$
   $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=4\neq 3=f(2)$ *es una discontinidad evitable.*

4. $f(x)=[\![x]\!]$ *y el punto* $a=n\in\mathbb{Z}$
   $\lim\limits_{x\to n^+}[\![x]\!]\neq\lim\limits_{x\to n^-}[\![x]\!]$ *discontinidad esencial de primera especie de salto finito.*

5. $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-1}$.
   $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\dfrac{1}{2}$, *podemos definir la función* f *en el punto* $x=1$ *como* $f(1)=1/2$. *De esta forma* f *posee una discontinuidad evitable en* $x=1$.

6. $f(x)=\dfrac{x}{|x|}$.
   $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=-1$ *y que* $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=1$. *discontinidad esencial de primera especie de salto finito.*

7. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x}, & x<0,\\ x, & x>0, \end{cases}$
   $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=-\infty$ *pero* $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=0$ *discontinuidad de primera especie de salto infinito.*

8. $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$
   $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=+\infty$ *y* $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=-\infty$ *discontinuidad de primera especie asintótica.*

9. $f(x)=\sqrt{x}$
   $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=0$ *pero* $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$ *no existe. Discontinuidad de segunda especie*

◄

Observación 1.2.3.

1. En general un punto a se llama ***punto de discontinuidad removible o evitable*** si

   a) $a\notin Dom f$ y $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ existe en $\mathbb{R}$.
   o

   b) $a\in Dom f$ y $\lim\limits_{x\to a}f(x)\neq f(a)$

2. Si $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ no existe, se dice que a es un ***punto de discontinuidad esencial***.

1.2.2. Ejercicios Resueltos

exam:con Encuentre los valores de a y b para que la función f sea continua en $x=-2$ y $x=2$

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3-x^2-4x+4}{x+2} & , \quad x<-2 \\ ax^2-2bx+1 & , \quad -2\leq x\leq 2 \\ \dfrac{x^2-13x+22}{x-2} & , \quad x>2 \end{cases}$$

Resolución: ▶

- *Cálculo de los límites laterales en -2 y 2*

Límite lateral izquierdo en -2

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -2^-}\frac{x^3-x^2-4x+4}{x+2} &= \lim_{x\to -2^-}\frac{\cancel{(x+2)}(x-2)(x-1)}{\cancel{(x+2)}}\\ &= \lim_{x\to -2^-}(x-2)(x-1)\\ &= (-2-2)(-2-1)\\ &= 12 \qquad (1.1)\end{aligned}$$

Límite lateral derecho en -2

$$\lim_{x\to -2^+} ax^2-2bx+1 = 4a+4b+1 \qquad (1.2)$$

Límite lateral izquierdo en 2

$$\lim_{x\to 2^-} ax^2-2bx+1 = 4a-4b+1 \qquad (1.3)$$

Límite lateral derecho en 2

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2-13x+22}{x-2} &= \lim_{x\to 2^+}\frac{(x-11)\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}}\\ &= \lim_{x\to 2^+}(x-11)\\ &= -9 \qquad (1.4)\end{aligned}$$

- *Como los límites laterales en -2 deben ser iguales, obtenemos la ecuación siguiente al igualar las ecuaciones (1.1) y (1.2)*

$$4a+4b+1=12$$

- *Como los límites laterales en 2 deben ser iguales, obtenemos la ecuación siguiente al igualar las ecuaciones (1.3) y (1.4)*

$$4a-4b+1=-9$$

Ahora resolveremos las dos últimas ecuaciones

$$\begin{cases}4a+4b = 11\\ 4a-4b = -10\end{cases}$$

de donde $a=\frac{1}{8},\ \ b=\frac{21}{8}$ ◀

exam:con Determinar los valores de a y b para que f sea continua en $\mathbb{R}$ donde

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-2x+a}{x-3}, & x<3\end{cases}$$

Resolución: ►

Cálculo de a

Como f es continua en $x_0 = 3$, se cumple

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{x^2-2x+a}{x-3} = 4 = \lim_{x\to 3^+} (x^2-5) = f(3)$$

La división $\dfrac{x^2-2x+a}{x-3}$ *debe ser exacta, entoces usando polinimio se tiene:*

$$\begin{array}{c|ccc|}
 & 1 & -2 & a \\
3 & & 3 & 3 \\
\hline
 & 1 & 1 & \boxed{3+a=0}
\end{array}$$

de donde el valor de $\boxed{a=-3}$

Comprobando de esta forma que

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{x^2-2x-3}{x-3} = \lim_{x\to 3^-} (x+1) = 4 = \lim_{x\to 3^+} x^2-5 = f(3)$$

Cálculo de b

Como f es continua en $x_0 = 5$ se cumple

$$\lim_{x\to 5^-} x^2-5 = \lim_{x\to 5^+} x+b = f(5)$$

de donde $20 = 5+b \Longrightarrow \boxed{b=15}$

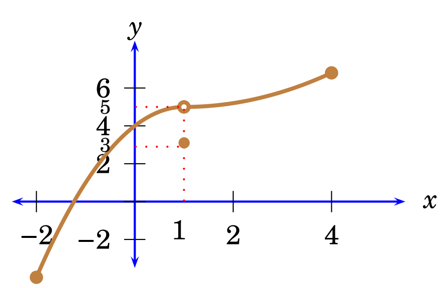
Así la función f es

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-2x-3}{x-3} & , \quad x<3 \\ x^2-5 & , \quad 3\le x<5 \\ x+15 & , \quad x\ge 5 \end{cases}$$

◄

exam:con

(a) Para la gráfica siguiente, determine el tipo de discontinuidad que se produce (esencial o de salto, removible o evitable). Justifique su respuesta.



(b) Encontrar asíntotas, horizontal, vertical y oblícua, si es que existen de la función $f(x) = \dfrac{3x^2+1}{x-2}$

Resolución: ►

(a) *Observando el gráfico se tiene que* $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=5=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)\neq f(1)=3$, *de esto vemos que es posible redefinir* f *en* $x_0=1$ *por* $f(1)=5$, *convirtiendo a* f *continua, se determina así que* f *tiene una* **discontinuidad evitable** *en* $x_0=1$.

(b) **Búsqueda de asíntota vertical**

Cálculo de $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{3x^2+1}{x-2}$

En efecto, haciendo $f(x)=3x^2+1,\ g(x)=x-2$ *se tiene* $\left\{\begin{array}{lcl}\lim\limits_{x\to 2^+} 3x^2+1 & = & 13\\ \lim\limits_{x\to 2^+} x-2 & = & 0^+\end{array}\right\}\Longrightarrow$

$\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{3x^2+1}{x-2}=+\infty$

así tenemos que $\boxed{x=2}$ *es* **asíntota vertical**.

Búsqueda de asíntota oblícua

Es de la forma $y=mx+b$

Cálculo m

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{3x^2+1}{x-2}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2+1}{x^2-2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^2}\left(3+\dfrac{1}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)}=3$$

$$\Longrightarrow \boxed{m=3}$$

Cálculo de b

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2+1}{x-2}-3x = \lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2+1-3x^2+6x}{x-2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{6x+1}{x-2}=6$$

$$\Longrightarrow \boxed{b=6}$$

Así tenemos que la asíntota oblícua es $\boxed{y=3x+6}$

Búsqueda de asíntota horizontal

No tiene ya que $m\neq 0$

◄

Ejercicio 1.2.4. Sea $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ función definida por la regla de correspondencia

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3x+a}{x+3} & ; \quad -3<x<-2\\ a+b-10 & ; \quad x=-2\\ \sqrt{x+3}-6 & ; \quad x>-2\end{cases}$$

Si f es continua, hallar a,b

Resolución: ►

Como f es continua en $x = 2$, entonces

Calculamos límite lateral de f cuando x tiende a -2 por la izquierda

$$\lim_{x\to -2^-} \frac{3x+a}{x+3} = \frac{\lim\limits_{x\to -2^-} 3x+a}{\lim\limits_{x\to -2^-} x+3} = \frac{3(-2)+a}{-2+3} = -6+a$$

$$\Longrightarrow \boxed{\lim_{x\to -2^-} \frac{3x+a}{x+3} = -6+a}$$

Calculamos límite lateral de f cuando x tiende a -2 por la derecha

$$\lim_{x\to -2^+} \sqrt{x+3}-6 = \sqrt{-2+3}-6 = -5$$

$$\Longrightarrow \boxed{\lim_{x\to -2^+} \sqrt{x+3}-6 = -5}$$

Luego igualamos los límites laterales por la existencia del límite

$$-6+a = -5 \Longrightarrow \boxed{a=1}$$

Además por la continuidad de f en $x = -2$ se tiene

$$\lim_{x\to -2} f(x) = \boxed{-5 = a+b-10} = f(-2) \Longrightarrow 1+b-10 = -5 \Longrightarrow \boxed{b=4}$$

◄

Ejercicio 1.2.5. Un comerciante vende un determinado producto. Por cada unidad de producto cobra la cantidad de 5 euros. No obstante, si se le encargan más de 10 unidades,disminuye el precio por unidad, y por cada x unidades cobra: $C(x) = \begin{cases} 5x & ; \quad 0 < x \leq 10 \\ \sqrt{ax^2+500} & ; \quad x > 10 \end{cases}$

(a) Halla a de forma que el precio varíe de forma continua al variar el número de unidades que se compran.

(b) ¿A cuánto tiende el precio de una unidad cuando se compran muchísimas unidades? (El precio de una unidad es $\dfrac{C(x)}{x}$.)

Resolución: ►

(a) Analizamos continuidad en $x = 10$

$\lim_{x\to 10^-} C(x) = \lim_{x\to 10^-} (5x) = 50$

$\lim_{x\to 10^+} C(x) = \lim_{x\to 10^+} \sqrt{ax^2+500} = \sqrt{100a+500}$

$C(10) = 50$ *Para que sea continua, se igualan ambas ecuaciones:*

$\sqrt{100a+500} = 50 \Longrightarrow 100a+500 = 2500 \Longrightarrow \boxed{a=20}$

(b) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{C(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{ax^2+500}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{20x^2+500}}{x} = \sqrt{20} \approx 4{,}47\ euros$

◄

Ejercicio 1.2.6. En el laboratorio de Biologia de la universidad, han determinado que el tamaño T de los ejemplares de una cierta bacteria (medido en micras) varía con el tiempo t, siguiendo la ley: $T(t) = \begin{cases} \sqrt{t+a} & ; \quad t < 8\ horas \\ \dfrac{-3+\sqrt{3t-15}}{t-8} & ; \quad t > 8\ horas \end{cases}$ El parámetro a es una variable biológica cuya interpretación trae de cabeza a los científicos, pero piensan que puede haber un valor para el cual el crecimiento se mantenga continuo en $t = 8$.

(a) Determine el valor de a para el que el crecimiento se mantenga continuo.

(b) Investiga cual llegará a ser el tamano de una bacteria si se la cultiva indefinidamente.

Resolución: ►

(a) *Cálculo de* $\lim\limits_{t\to 8^-} T(t)$

$$\lim_{t\to 8^-} T(t) = \lim_{t\to 8^-} \sqrt{t+a} = \sqrt{8+a}$$

Cálculo de $\lim\limits_{t\to 8^+} T(t)$

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 8^+} T(t) &= \lim_{t\to 8^+} \frac{\sqrt{3t-15}-3}{t-8} = \lim_{t\to 8^+} \frac{(\sqrt{3t-15}-3)(\sqrt{3t-15}+3)}{(t-8)\sqrt{3t-15}+3)} \\
\lim_{t\to 8^+} \frac{3t-15-9}{(t-8)\sqrt{3t-15}+3)} &= \lim_{t\to 8^+} \frac{3\cancel{(t-8)}}{\cancel{(t-8)}\sqrt{3t-15}+3)} = \lim_{t\to 8^+} \frac{3}{\sqrt{3t-15}+3} = \frac{3}{6} \\
&\Longrightarrow \boxed{\lim_{t\to 8^+} \frac{\sqrt{3t-15}-3}{t-8} = \frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Para que $T(t)$ *pueda ser continua, tendria que cumplirse que:* $\sqrt{8+a} = \dfrac{1}{2} \Longrightarrow a = -\dfrac{31}{4}$

Pero, si $a = -\dfrac{31}{4} \approx 7{,}75$ *, quedaria* $T(t) = \sqrt{t - \dfrac{31}{4}}$ *si* $t < 8$. *Esto daria lugar a que* $T(t)$ *no existiera para* $t \leq = \dfrac{31}{4} \approx 7{,}75$ *horas.*

Por tanto, no hay ningun valor de a para el que el crecimiento se mantenga continuo.

(b) $\lim\limits_{t\to +\infty} T(t) = \lim\limits_{t\to +\infty} \dfrac{-3+\sqrt{3t-15}}{t-8} = \sqrt{3} = 1{,}73$ *micras.*

◄

1.3. Ejercicios Propuestos

1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} ax^2+2 & ; \quad 0 \leq x < 1 \\ x+1 & ; \quad 1 \leq x < 2 \\ \dfrac{x^3+b}{x-1} & ; \quad 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$

   Determine los valores de a y b para que f sea continua en $x = 1$, $x = 2$ Determine si f es continua en todo su dominio, definida por $f(x) = \begin{cases} 2-x & ; \quad -2 \leq x < 1 \\ x^3 & ; \quad 1 \leq x < 2 \\ 5x+4 & ; \quad 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$

2. Para cada una de las funciones siguientes $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, determinar si es o no continua en el punto a indicado. En caso exista discontinuidad, redefina f para que sea continua en ese punto.

   (a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x+1} & , \quad x \neq -1 \\ 6 & , \quad x = -1 \end{cases}$ en $a = -1$ (b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-2x-8}{x-4}, & x \neq 4 \\ 3, & x = 4 \end{cases}$ en $a = 4$

(c) $f(x)=\begin{cases} 1-x, & x\leq 2 \\ x^2-2x, & 2<x \end{cases}$ en $a=2$ (d) $f(x)=\begin{cases} 2x+1, & x<-1 \\ 3x, & x\in]-1,1[\\ 2x-1, & 1\leq x \end{cases}$ en $a=1$ y $a=-1$

3. Sea $f:\ ]0,3[\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\begin{cases} ax+2 & , & 0<x<1 \\ x^2+2 & , & 1\leq x<2 \\ bx^3+1 & , & 2\leq x<3 \end{cases}$.

   Calcule los valores de a y b, para que la función $f(x)$ sea continua en 1 y 2.

4. Sea $f:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\begin{cases} x+2c & , & x<-2 \\ 3cx+k & , & -2\leq x<1 \\ 3x-2k & , & x\geq 1 \end{cases}$.

   Calcule los valores de c y k para que f sea continua en todo $\mathbb{R}$.

5. Dada $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Hallar los valores reales de a,b,c para que la función definida por

$$f(x)=\begin{cases} 2x-x^2+a, & x\leq 0 \\ \dfrac{x+a}{x+b}, & x\in]0,b[\\ \sqrt{x+a}, & x\in[b,2[\\ \sqrt{4+\sqrt{\frac{x}{c}}}, & x\in[2,\infty[\end{cases}$$

   sea continua en todo su dominio.

6. Pruebe que $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ es continua en todo punto de su dominio.

7. Sea $\begin{cases} 2x-2 & ; & x<-1 \\ ax+b & ; & -1\leq x\leq 1 \\ 5x+7 & ; & x>1 \end{cases}$ Determinar $a,\ b$ tal que f sea continua en todo $\mathbb{R}$

Capítulo 2

Derivadas de funciones reales

Las aparecieron en el siglo XVIII como consecuencia del estudio de velocidades, hecho por el msatemático y físico inglés Newton y el estudio sobre tangentes de curvas hecho por el matemático y filósofo alemán Leibniz.

2.1. Derivadas

Definición 2.1.1.

1. Sea $f: Dom(f) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ función, se define la ***derivada*** de f en $x \in Dom(f)$, denotada por $f'(x)$ como

$$\boxed{f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}$$

siempre que existe el límite.

2. La recta tangente a la gráfica de f en el punto (x_0, y_0) es la recta que pasa por el punto (x_0, y_0) y que tiene pendiente $f'(x_0)$ (cuando exista), está dado por

$$\boxed{L: y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)}$$

3. La ecuación de la recta normal L_N al gráfico f en el punto (x_0, y_0) es

$$\boxed{L_N: y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0),\ f'(x_0) \neq 0}$$

Observación 2.1.1.

1. Una función $f: Dom(f) \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es derivable en $x_0 \in Dom(f)$ si existe el límite

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$$

2. Haciendo un cambio $h = x - x_0$ tenemos

$$\boxed{\text{si } x \to x_0 \text{ entonces } h \to 0, \text{ así } f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}}$$

Definición 2.1.2. Se define **derivada lateral derecha** y **derivada lateral izquierda** de f en x_0, respectivamente como

$$\boxed{f'_{+}(x_0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}, \quad f'_{-}(x_0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}}$$

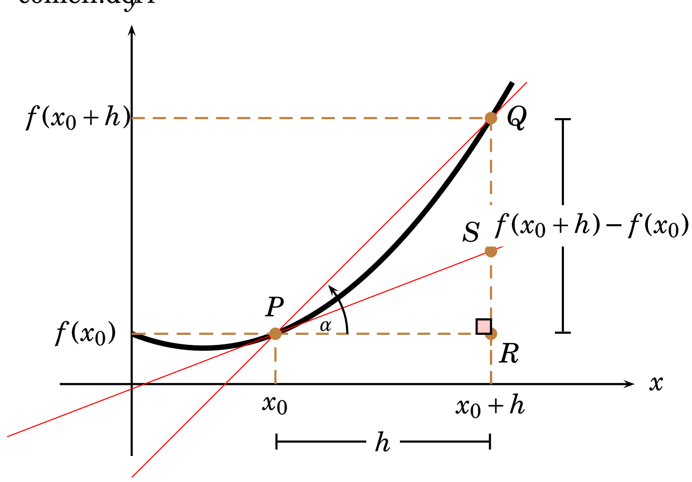
Observación 2.1.2.

1. f es derivable en x_0 si y sólo si las derivadas laterales son iguales.

2. Sea $F: Dom(F) - \{x_0\} \to \mathbb{R}$ definida por $F(x) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, esta función representa geométricamente el coeficiente angular de la recta secante al gráfico de f que pasa por los puntos $(x_0, f(x_0))$ y $(x, f(x))$. Si f es derivable en x_0, la recta de coeficiente angular $f'(x_0)$ esta pasando por el punto $(x_0, f(x_0))$ y es la recta tangente al gráfico f en el punto $(x_0, f(x_0))$

2.2. Interpretación Geométrica

comen:deri



Según el dibujo en el triangulo rectángulo PQR se tiene $\tan(\alpha)=\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$,ahora si la recta secante $\overline{PQ}$ que corta a la curva f en P y Q se aproxima a la recta tangente $\overline{PS}$ de la curva en el punto (x_0,y_0), interpretamos el acercamiento de la recta como una aproximación de límite obteniendo $\lim\limits_{h\to 0}=\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ el cuál se interpreta como la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto (x_0,y_0)

Teorema 2.2.1.

1. Si f es derivable en x_0 entonces f es continua en x_0.
2. Si f no es continua entonces f es no es derivable.

2.2.1. Algebra de derivadas

Teorema 2.2.2. [Algebra de derivadas]
Sean $f,g:I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ derivables, donde I es un intervalo, entonces:

1. $f+g$ es derivable en I $(f+g)'(x)=f'(x)+g'(x)$
2. $f-g$ es derivable en I y $(f-g)'(x)=f'(x)-g'(x)$.
3. $f\cdot g$ es derivable en I y $(f\cdot g)'(x)=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$.
4. Para $c\in\mathbb{R},\ \ cf(x)$ es derivable y $(cf)'(x)=cf'(x)$.
5. $$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2},\ \forall x\in I,\ g(x)\neq 0$$

exam:deri

1. Sea $f:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=|x|$, esta función es continua pero no derivable.
2. Sea $f:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\begin{cases} x^2\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right) & ,\quad x\neq 0\\ 0 & ,\quad x=0\end{cases}$, esta función es derivable en 0 entonces es continua en 0.

Teorema 2.2.3. [Regla de la cadena]
Sea $g:I\to\mathbb{R}$ derivable y si $f:J\to\mathbb{R}$ es derivable tal que $g(I)\subset J$ entonces $f\circ g$ es derivable en I y

$$\boxed{(f\circ g)'(x)=f'(g(x))\cdot g'(x)}$$

2.2.2. Ejercicios resueltos

Ejercicio 2.2.4. Usando la definición de derivada, demostrar que la derivada de $f(x)=x^3$ es $3x^2$

Resolución: ►

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x^3}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h(3x^2+3xh+h^2)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}(3x^2+3xh+h^2)}{\cancel{h}} = \lim_{h\to 0}(3x^2+3xh+h^2)\\
&= 3x^2
\end{aligned}$$

◄

Ejercicio 2.2.5. Un vehículo sigue la trayectoria del gráfico de la función f que está definida $f(t)=\begin{cases} 3 & ; \quad t\le 0\\ t^2+3 & ; \quad t>0\end{cases}$. Utilizando la definición de derivada diga si f es derivable en $t=0$. Justifique su respuesta.

Resolución: ►

Cálulo de la derivada izquierda de f en $t=0$

$$\begin{aligned}
f'_-(t) &= \lim_{h\to 0^-}\frac{f(t+h)-f(t)}{h} = \lim_{h\to 0^-}\frac{3-3}{h} = \lim_{h\to 0^-} 0 = 0\\
&\Longrightarrow \boxed{f'_-(0)=0}
\end{aligned}$$

Cálulo de la derivada derecha de f en $t=0$

$$\begin{aligned}
f'_+(t) &= \lim_{h\to 0^+}\frac{f(t+h)-f(t)}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{(t+h)^2+3-(t^2+3)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0^+}\frac{\cancel{t^2}+2th+h^2+\cancel{3}-\cancel{t^2}-\cancel{3}}{h}\\
&= \lim_{h\to 0^+}\frac{\cancel{h}(2t+h)}{\cancel{h}} = \lim_{h\to 0^+}(2t+h) = 2t\\
&\Longrightarrow \boxed{f'_+(0)=0}
\end{aligned}$$

Como $f'_-(0)=f'_+(0)=0$ entonces existe la derivada de f en $t=0$

◄

Ejercicio 2.2.6. Un cometa sigue la trayectoria de una función $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x^2+x+3$ que roza tangencialmente a la atmósfera terrestre en el punto de abscisa $x=1$. Determine la ecuación de la recta tangente en $x=1$

Resolución: ►

Determinación del punto de tangencia (x_0, y_0) *por donde pasará la recta L tangencialmente.*

$$x_0 = 1, \text{ entonces } y_0 = 1+1+3 = 5, \text{ así } \boxed{(x_0, y_0) = (1,5)}$$

Cálculo de la pendiente de la recta L tangente a la parábola en $(1,5)$

$$f'(x) = 2x+1 \Longrightarrow \boxed{m = 2\cdot 1+1 = 3}$$

Ecuación de la recta tangente a la parábola en $(1,5)$

$$y - y_0 = m(x-x_0) \Longrightarrow \boxed{y-5 = 3(x-1)}$$

◄

Ejercicio 2.2.7. Obtenga la ecuación de la recta tangente a la curva de ecuación $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^3}{2a-x}}$ en el punto $(a, f(a))$ con $a > 0$, a constante real

Resolución: ►
Cálculo de la pendiente.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{2a-x}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{x^3}{2a-x}\right)' = \frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{2a-x}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left[\frac{(x^3)'(2a-x) - x^3(2a-x)'}{(2a-x)^2}\right] \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2a-x}{x^3}} \cdot \left[\frac{3x^2(2a-x) - x^3(-1)}{(2a-x)^2}\right] \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2a-x}{x^3}} \cdot \frac{6ax^2 - 2x^3}{(2a-x)^2} \end{aligned}$$

Luego evaluamos $f'(x)$ *en* $x = a$ *para calcular la pendiente* m *en ese punto, es decir*

$$m = f'(a) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2a-a}{a^3}} \cdot \frac{6a^3 - 2a^3}{(2a-a)^2} = \frac{4a^3}{2a^3} = 2$$

Finalmente la ecuación de la recta tangente en el punto $(a, f(a)) = (a, a) = (x_0, y_0)$ *es*

$$y - y_0 = 2(x - x_0) \text{ es decir } y - a = 2x - 2a \Longrightarrow \boxed{y - 2x + a = 0}$$

◄

Ejercicio 2.2.8. Un cometa sigue la trayectoria de una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2+x+3$ que roza tangencialmente a la atmósfera terrestre en el punto de abscisa $x = 1$. Determine la ecuación de la recta tangente en $x = 1$

Resolución: ►

Determinación del punto de tangencia (x_0, y_0) *por donde pasará la recta L tangencialmente.*

$$x_0 = 1, \textit{ entonces } y_0 = 1+1+3 = 5, \textit{ así } \boxed{(x_0, y_0) = (1,5)}$$

Cálculo de la pendiente de la recta L tangente a la parábola en $(1,5)$

$$f'(x) \quad = \quad 2x+1 \Longrightarrow \boxed{m = 2\cdot 1 + 1 = 3}$$

Ecuación de la recta tangente a la parábola en $(1,5)$

$$y - y_0 \quad = \quad m(x - x_0) \Longrightarrow \boxed{y - 5 = 3(x-1)}$$

◄

Ejercicio 2.2.9. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 - 4x + 1$

(a) Encuentre los puntos (x, y) sobre la gráfica de f, donde $f' = -2$.

(b) Entre la ecuación (o ecuaciones) de la recta tangente en el punto(os) obtenida en (a).

Resolución: ►

(a)

$$
\begin{aligned}
(f(x))' &= \left(\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-4x+1\right)'=-2\\
&\Longrightarrow x^2+x-4=-2 \Longrightarrow x^2+x-2=0 \Longrightarrow (x+2)(x-1)=0\\
&\Longrightarrow \boxed{x=-2,\ x=1}
\end{aligned}
$$

(b) *Cálculo del punto de tangencia para $x=-2$*

$y=f(-2)=-\dfrac{8}{3}+11=\dfrac{25}{3}$. *Así el punto de tangencia es* $(x_0,y_0)=\left(-2,\dfrac{25}{3}\right)$.

Obtención de la ecuación de la recta tangente

La ecuación de la recta tangente en $(-2,\frac{25}{3})$ *con pendiente* $m=-2$ *es*

$$y-\frac{25}{3}=-2(x+2)\Longrightarrow y=-2x-4+\frac{25}{3}\Longrightarrow \boxed{y=-2x+\tfrac{13}{3}}$$

Cálculo del punto de tangencia para $x=1$

$y=f(1)=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}-4+1=\dfrac{-13}{6}$. *Así el punto de tangencia es* $(x_0,y_0)=\left(1,\dfrac{-13}{6}\right)$.

Obtención de la ecuación de la recta tangente

La ecuación de la recta tangente que pasa por $\left(1,\dfrac{-13}{6}\right)$ *con pendiente* $m=-2$ *es*

$$y-\frac{-13}{6}=-2(x-1)\Longrightarrow y=-2x+2+\frac{-13}{6}\Longrightarrow \boxed{y=-2x-\tfrac{1}{6}}$$

◄

Ejercicio 2.2.10. Hallar la recta tangente y normal a la gráfica de la función $f(x)=2x^2-x+5$ en el punto de abscisa $x_0=1$

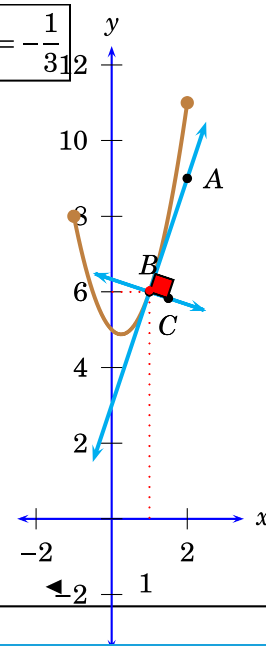
Resolución: ►

Cálculo de la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto de abscisa $x_0 = 1$

$$f'(x) = 4x - 1 \Longrightarrow m = 4(1) - 1 = 3 \Longrightarrow \boxed{m = 3}$$

Cálculo de la pendiente de la recta normal a la curva en el punto de abscisa $x_0 = 1$

$$m \cdot m_n = -1 \Longrightarrow 3 \cdot m_n = -1 \Longrightarrow \boxed{m_n = -\frac{1}{3}}$$



Cálculo de la ordenada
$y = f(1) = 2 \cdot 1^2 - 1 + 5 = 6$

Cálculo de la ecuación de la recta tangente
$y - 6 = 3(x - 1) \Longrightarrow \boxed{y = 3x + 3}$

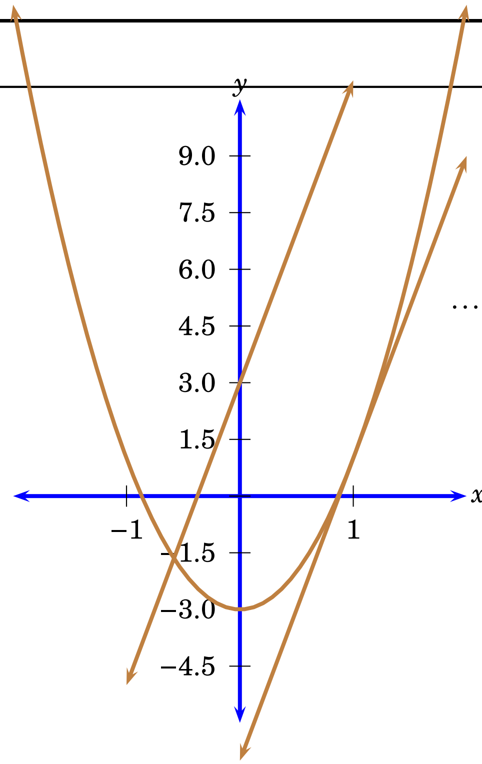
Cálculo de la ecuación de la recta normal
$y - 6 = -\dfrac{1}{3}(x - 1) \Longrightarrow \boxed{y = -\dfrac{1}{3}x + \dfrac{19}{3}}$

Ejercicio 2.2.11. Sea la curva C definida por la función $y = 2x^2 - 3$.

(a) Determinar la ecuación de la recta tangente a la curva que es paralela a la recta $y = 8x + 3$.

(b) Encuentre la ecuación de la recta normal a la curva en el punto de tangencia.

Resolución: ►



(a)

blueCálculo de la pendiente m de la recta L tangente a la curva C

$$y' = (2x^2-3)' = 4x \Longrightarrow \boxed{m = 4x}$$

Valor numérico de la pendiente m

Por otro lado la pendiente de la recta tangente L a C es 8, pues es la misma pendiente de la recta $y = 8x+3$, por tanto

$$m = 4x = 8 \Longrightarrow \boxed{x = 2, \quad y = 5}$$

Ecuación de la recta tangente

$$y-5 = 8(x-2) \Longrightarrow \boxed{y = 8x-11}$$

(b) *Ecuación de la recta normal*

Como $m_L \cdot m_N = -1 \Longrightarrow \boxed{m_N = -\frac{1}{8}}$

$$y-5 = -\frac{1}{8}(x-2) \Longrightarrow \boxed{y = -\frac{x}{8} + \frac{21}{4}}$$

◄

2.2.3. Derivadas de funciones inversas

Teorema 2.2.12. [Derivada de la función Inversa]
Sea $g : I \to \mathbb{R}$, función biyectiva y derivable en I abierto y si $f(x)' \neq 0$ en I entonces f tiene inversa derivable y

$$\boxed{(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}}$$

Observación 2.2.13.

1. Sea $y = f(x)$, $x = g(t)$ la derivada de $y = (f \circ g)(t)$ puede escribirse

$$\begin{aligned} \frac{dy(t)}{dt} &= (f \circ g)'(t) = f'(g(t)) \cdot g'(t) = f'(x) \cdot g'(t) \\ &= \frac{df(x)}{dx} \cdot \frac{dg(t)}{dt} = \frac{dy(x)}{dx} \cdot \frac{dx(t)}{dt} = \frac{dy(x)}{dx} . \frac{dx(t)}{dt} \end{aligned}$$

Obteniendo $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{dy}{dx} . \dfrac{dx}{dt}$ (notación de ***Leibniz*** para la regla de la cadena)

exam:deriConsidere la función $f : \ ]0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $y = f(x) = x^3$

(a) Suponga que f es biyectiva, determine la función inversa de f.

(a) Asuma que $f'(x) \neq 0$ en el intervalo $]0, +\infty[$ entonces verifique $\left(f^{-1}(x)\right)' = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

Resolución: ►

(a) $y = x^3 \Longrightarrow x = \sqrt[3]{y} \Longrightarrow f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$

(b) *Cálculo de* $\left(f^{-1}(x)\right)'$

$$\left(f^{-1}(x)\right)' = \left(\sqrt[3]{x}\right)' = \frac{1}{3} \cdot x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

Cálculo de $\dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$

$$f'(f^{-1}(x)) = 3x^2 = 3(\sqrt[3]{x})^2) \Longrightarrow \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)} = \frac{1}{3(\sqrt[3]{x})^2}$$

Concluyendo que $\left(f^{-1}(x)\right)' = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

◄

Teorema 2.2.14. [Derivada de funciones especiales]

1. Sea $y = f(x)^p$ entonces $y\,' = p(f(x))^{p-1} \cdot f\,'(x),\ p \in \mathbb{Q}$
2. Sea $y = u(x)^{v(x)},\ u(x) > 0$ aplicando ln a la expresión obtenemos

$$\begin{aligned} \ln(y) &= \ln\left(u(x)^{v(x)}\right) = v(x) \cdot \ln(u(x) \text{ derivando} \\ \Longrightarrow &\ \frac{y\,'}{y} = v\,'(x) \cdot \ln(u(x)) + v(x) \cdot \frac{u\,'(x)}{u(x)} \\ \Longrightarrow &\ y\,' = y \cdot \left[v\,'(x) \cdot \ln(u(x)) + v(x) \cdot \frac{u\,'(x)}{u(x)}\right] \\ \Longrightarrow &\ \left[u(x)^{v(x)}\right]' = u(x)^{v(x)} \cdot \left[v\,'(x) \cdot \ln(u(x)) + v(x) \cdot \frac{u\,'(x)}{u(x)}\right] \end{aligned}$$

3. En particular si $u(x) = a$ entonces $y\,' = \left(a^{v(x)}\right)' = a^{v(x)}\left(v\,'\ln(a)\right)$
4. En particular si $u(x) = a = e$ entonces $y\,' = \left(e^{v(x)}\right)' = e^{v(x)}\left(v\,'\right)$
5. $y = \log_a(u(x)),\ u(x) > 0 \Longleftrightarrow a^y = u(x)$ derivando ésta última expresión

$$\begin{aligned} (a^y)\,' &= a^y \cdot y\,'\ln(a) = u\,'(x)\,' = \frac{u\,'(x)}{u(x)\ln(a)} \\ \Longrightarrow &\ \left(\log_a(u(x))\right)' = \frac{u\,'(x)}{u(x)\ln(a)} \end{aligned}$$

6. En particular si $a = e$ entonces $y\,' = (\ln(u(x)))\,' = \dfrac{u\,'(x)}{u(x)}$

2.2.4. Ejercicios Resueltos

Ejercicio 2.2.15. Calcular las derivadas para las siguientes funciones:

(a) $f(x) = 5\sqrt[3]{x^2} + x^{\frac{4}{3}} - \dfrac{x^{-4}}{4}$

(b) $f(x) = (3x^5 + 2)^3$

Resolución: ►

(a)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(5x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{4}{3}} - \frac{x^{-4}}{4}\right)' = 5\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}} + \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{4}\cdot(-4)x^{-5} \\ &= \frac{10}{3}x^{\frac{-1}{3}} + \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} + x^{-5} \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left((3x^5+2)^3\right)' = 3(3x^5+2)^2\cdot(3x^5+2)' = 3(3x^5+2)^2 15x^4 \\ &= 45x^4(3x^5+2)^2 \end{aligned}$$

◄

Ejercicio 2.2.16. Calcula la derivada para las funciones siguientes

(a) $f(x) = \left(\dfrac{3x-1}{2x-5}\right)^6$ (b) $f(x) = (x^2-1)(x^3+3x)$ (c) $f(x) = \ln\left(\sqrt[3]{\dfrac{3x}{x+2}}\right)$

Resolución: ►

(a)

$$\begin{aligned}
y' &= 6\cdot\left(\frac{3x-1}{2x-5}\right)^5\cdot\left(\frac{3x-1}{2x-5}\right)' \\
&= 6\cdot\left(\frac{3x-1}{2x-5}\right)^5\cdot\left(\frac{(3x-1)'(2x-5)-(3x-1)(2x-5)'}{(2x-5)^2}\right) \\
&= 6\cdot\left(\frac{3x-1}{2x-5}\right)^5\cdot\left(\frac{3(2x-5)-2(3x-1)}{(2x-5)^2}\right) \\
&= 6\cdot\left(\frac{3x-1}{2x-5}\right)^5\cdot\left(\frac{-13}{(2x-5)^2}\right) \\
&= \frac{-78(3x-1)^5}{(2x-5)^7}
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
f'(x) &= (x^2-1)'(x^3+3x)+(x^2-1)(x^3+3x)' \\
&= 2x(x^3+3x)+(x^2-1)(3x^2+3) \\
&= 2x^4+6x^2+3x^4+3x^2-3x^2-3 \\
&= 5x^4+6x^2-3
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left[\ln\left(\sqrt[3]{\frac{3x}{x+2}}\right)\right]' = \left[\ln\left(\frac{3x}{x+2}\right)^{\frac{1}{3}}\right]' = \left(\frac{1}{3}\ln\left(\frac{3x}{x+2}\right)\right)' \Longrightarrow \\
&= \frac{1}{3}\left(\frac{x+2}{3x}\right)\cdot\left(\frac{3x}{x+2}\right)' \\
&= \frac{1}{3}\left(\frac{x+2}{3x}\right)\cdot\left(\frac{3(x+2)-3x}{(x+2)^2}\right) \\
&= \frac{2}{3}\left(\frac{1}{x(x+2)}\right)
\end{aligned}$$

◄

Propiedades 2.2.17. Límites de funciones especiales, trigonométricas y exponenciales

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1,\ a>0$

2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

3. $\lim\limits_{n\to+\infty} n^a = \begin{cases} +\infty & , \quad a>0 \\ 1 & , \quad a=0 \\ 0 & , \quad a<0 \end{cases}$

4. $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = \begin{cases} +\infty & , \quad a>1 \\ 1 & , \quad a=1 \\ 0 & , \quad |a|<1 \end{cases}$

5. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e$

6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x-1}{x} = \ln(a)$

7. $\lim\limits_{x\to 0} \cos(x) = 1$

8. $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sen}(x) = 0$

9. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1$

10. $\lim\limits_{x\to 0} \cos(x) = 1$

2.2.5. Derivadas de funciones trigonométricas y de inversas

Propiedades 2.2.18. [Derivadas de funciones trigonométricas]
Derivar $y = \operatorname{sen}(x)$ entonces

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x+h)-\operatorname{sen}(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{h}{2}\right)\cdot\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)}{\left(\dfrac{h}{2}\right)} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{h}{2}\right)}{\left(\dfrac{h}{2}\right)} \cdot \lim_{h\to 0} \cos\left(x+\frac{h}{2}\right) \\ &= 1\cdot\cos(x) \\ &= \cos(x) \end{aligned}$$

Propiedades 2.2.19. [Derivadas de funciones trigonométricas]

DERIVADAS DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS CON ARGUMENTO x

FUNCIÓN	DERIVADA
$f(x)=\operatorname{sen}(x)$	$f'(x)=\cos(x)$
$f(x)=\cos(x)$	$f'(x)=-\operatorname{sen}(x)$
$f(x)=\tan(x)$	$f'(x)=\sec^2(x)$
$f(x)=\cot(x)$	$f'(x)=-\csc^2(x)$
$f(x)=\sec(x)$	$f'(x)=\sec(x)\tan(x)$
$f(x)=\csc(x)$	$f'(x)=-\csc(x)\cot(x)$

Propiedades 2.2.20. [Derivadas de funciones trigonométricas]

DERIVADAS DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS CON ARGUMENTO FUNCIÓN $u(x)$

FUNCIÓN	DERIVADA
$f(x)=\operatorname{sen}(u(x))$	$f'(x)=\cos(u(x))\cdot u'(x)$
$f(x)=\cos(u(x))$	$f'(x)=-\operatorname{sen}(u(x))\cdot u'(x)$
$f(x)=\tan(u(x))$	$f'(x)=\sec^2(u(x))\cdot u'(x)$
$f(x)=\cot(u(x))$	$f'(x)=-\csc^2(u(x))\cdot u'(x)$
$f(x)=\sec(u(x))$	$f'(x)=\sec(u(x))\tan(u(x))\cdot u'(x)$
$f(x)=\csc(u(x))$	$f'(x)=-\csc(u(x))\cot(u(x))\cdot u'(x)$

Propiedades 2.2.21. [Derivadas de funciones trigonométricas inversas]

DERIVADAS DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS CON ARGUMENTO x

FUNCIÓN	DERIVADA
$f(x)=\arccos(x)$	$f'(x)=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x)=\operatorname{arc\,sen}(x)$	$f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x)=\arctan(x)$	$f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$
$f(x)=\operatorname{arccot}(x)$	$f'(x)=-\dfrac{1}{1+x^2}$
$f(x)=\operatorname{arcsec}(x)$	$f'(x)=\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$
$f(x)=\operatorname{arccosec}(x)$	$f'(x)=-\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

Propiedades 2.2.22. [Derivadas de funciones trigonométricas inversas]

DERIVADAS DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS CON ARGUMENTO $u(x)$

FUNCIÓN	DERIVADA
$f(x)=\operatorname{arc\,sen}(u(x))$	$f'(u(x))=\dfrac{u'(x)}{\sqrt{1-u(x)^2}}$
$f(x)=\arccos(u(x))$	$f'(u(x))=-\dfrac{u'(x)}{\sqrt{1-u(x)^2}}$
$f(x)=\arctan(u(x))$	$f'(u(x))=\dfrac{u'(x)}{1+u(x)^2}$
$f(x)=\operatorname{arccot}(u(x))$	$f'(u(x))=-\dfrac{u'(x)}{1+u(x)^2}$
$f(x)=\operatorname{arcsec}(u(x))$	$f'(u(x))=\dfrac{u'(x)}{\lvert u(x)\rvert\sqrt{u(x)^2-1}};\ \lvert u(x)\rvert>1$
$f(x)=\operatorname{arccosec}(u(x))$	$f'(u(x))=-\dfrac{u'(x)}{\lvert u(x)\rvert\sqrt{u(x)^2-1}};\ \lvert u(x)\rvert>1$

Propiedades 2.2.23. [Derivadas de funciones hiperbólicas]
$y = \operatorname{senh}(x) = \dfrac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad y = \cosh(x) = \dfrac{1}{2}(e^x + e^{-x})$

DERIVADAS DE FUNCIONES HIPERBÓLICAS
CON ARGUMENTO $u(x)$

FUNCIÓN	DERIVADA
$f(x) = \operatorname{senh}(u(x))$	$f\,'(x) = \cosh(u(x)) \cdot u\,'(x)$
$f(x) = \cosh(u(x))$	$f\,'(x) = \operatorname{senh}(u(x)) \cdot u\,'(x)$
$f(x) = \tanh(u(x))$	$f\,'(x) = \operatorname{sech}^2(u(x)) \cdot u\,'(x)$
$f(x) = \coth(u(x))$	$f\,'(x) = -\operatorname{cosech}^2(u(x)) \cdot u\,'(x)$
$f(x) = \operatorname{sech}(u(x))$	$f\,'(x) = -\operatorname{sech}(u(x))\tanh(u(x)) \cdot u\,'(x)$
$f(x) = \operatorname{cosech}(u(x))$	$f\,'(x) = -\operatorname{cosech}(u(x))\coth(u(x)) \cdot u\,'(x)$

2.2.6. Ejercicios Resueltos

Ejercicio 2.2.24. Obtenga las derivadas de las funciones siguientes en el punto de abscisa dada:

(a) $f(x) = \dfrac{(x^3+1)^3}{(x+\ln(x))^2}$ en $x = 1$

(b) $f(x) = \operatorname{sen}^2(3x^2+8)$ en $x = 0$

Resolución: ►

(a)

$$\left[\frac{(x^3+1)^3}{(x+\ln(x))^2}\right]' = \frac{[(x^3+1)^3]'(x+\ln(x))^2-(x^3+1)^3[(x+\ln(x))^2]'}{(x+\ln(x))^2)^2}$$

$$= \frac{3(x^3+1)^2(x^3+1)'(x+\ln(x))^2-2(x^3+1)^3(x+\ln(x))\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{(x+\ln(x))^4}$$

$$= \frac{9x^2(x^3+1)^2(x+\ln(x))^2-2(x^3+1)^3(x+\ln(x))\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{(x+\ln(x))^4} \Longrightarrow$$

$$\left[\frac{(x^3+1)^3}{(x+\ln(x))^2}\right]'\Bigg|_1 = \frac{9\cdot 1(1+1)^2(1+0)^2-2\cdot(1+1)^3(1+0)(1+1)}{(1+0)^4}$$

$$= \frac{9\cdot 4\cdot 1-2\cdot 2^3\cdot 1\cdot(2)}{1^4}$$

$$= 36-32=4$$

(b)

$$\begin{aligned}
\left(\operatorname{sen}^2(3x^2+8)\right)' &= \left([\operatorname{sen}(3x^2+8)]^2\right)' \\
&= 2\operatorname{sen}(3x^2+8)\cdot(\operatorname{sen}(3x^2+8))' \\
&= 2\operatorname{sen}(3x^2+8)\cdot\cos(3x^2+8)\cdot(3x^2+8)' \\
&= 2\operatorname{sen}(3x^2+8)\cdot\cos(3x^2+8)\cdot 6x \\
&= 12x\operatorname{sen}(3x^2+8)\cdot\cos(3x^2+8) \\
&= 6x\operatorname{sen}(6x^2+16) \Longrightarrow \\
\left(\operatorname{sen}^2(3x^2+8)\right)'\Big|_0 &= 6\cdot 0\operatorname{sen}(6\cdot 0+16)=0
\end{aligned}$$

◄

Ejercicio 2.2.25. (a) Sea la función $g: Dom(g)\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $g(x)=\operatorname{sen}(3x^2+2x)-\cos(2x+1)$, determine $g'(0)$

(b) Sea $f: Dom(f)\subseteq\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ función definida por $f(t)=\sqrt[4]{(1-3t)^4+t^4}$. Hallar $f'(t)$

Resolución: ►

(a)

$$\begin{aligned}
\left[\operatorname{sen}(3x^2+2x)-\cos(2x+1)\right]' &= \left[\operatorname{sen}(3x^2+2x)\right]' - [\cos(2x+1)]' \\
&= \cos(3x^2+2x)[3x^2+2x]' - [-\operatorname{sen}(2x+1)][2x+1]' \\
&= (6x+2)\cos(3x^2+2x) + 2\operatorname{sen}(2x+1) \\
&\Longrightarrow g'(0) = (6\cdot 0+2)\cdot\left[\cos(3\cdot 0^2+2\cdot 0)\right] + 2\operatorname{sen}(1) \\
&\Longrightarrow g'(0) = 2\cos(0) + 2\operatorname{sen}(1) \\
&\Longrightarrow g'(0) \approx 2\cdot 1 + 2\cdot(0{,}8414709848\cdots) \\
&\Longrightarrow g\prime(0) \approx 2 + 1{,}6829419696\cdots \\
&\Longrightarrow \boxed{g'(0) \approx 3{,}6829419696\cdots}
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\left[\sqrt[4]{(1-3t)^4+t^4}\right]' &= \frac{1}{4}\left[(1-3t)^4+t^4\right]^{-\frac{3}{4}}\cdot\left[(1-3t)^4+t^4\right]' \\
&= \frac{1}{4}\left[(1-3t)^4+t^4\right]^{-\frac{3}{4}}\cdot\left[\left((1-3t)^4\right)'+(t^4)'\right] \\
&= \frac{1}{4}\left[(1-3t)^4+t^4\right]^{-\frac{3}{4}}\cdot\left[4(1-3t)^3\cdot(1-3t)'+4t^3\right] \\
&= \frac{1}{4}\left[(1-3t)^4+t^4\right]^{-\frac{3}{4}}\cdot\left[4(1-3t)^3\cdot(-3)+4t^3\right] \\
&= \frac{1}{4}\left[(1-3t)^4+t^4\right]^{-\frac{3}{4}}\cdot\left[-12(1-3t)^3+4t^3\right]
\end{aligned}$$

◄

Ejercicio 2.2.26. Calcule las derivadas de las funciones siguientes

(a) $y = \dfrac{\operatorname{sen}^2(x)}{1+\cos(x)} + \dfrac{\cos^2(x)}{1+\operatorname{sen}(x)}$ (b) $y = (\operatorname{sen}(x))^{\cos(x)}$

Resolución: ▶

(a) Note que

$$\begin{aligned} y &= \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{1+\cos(x)} + \frac{\cos^2(x)}{1+\operatorname{sen}(x)} = \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{1+\cos(x)} \cdot \frac{1-\cos(x)}{1-\cos(x)} + \frac{\cos^2(x)}{1+\operatorname{sen}(x)} \cdot \frac{1-\operatorname{sen}(x)}{1-\operatorname{sen}(x)} \\ &= \frac{\operatorname{sen}^2(x)\cdot(1-\cos(x))}{1-\cos^2(x)} + \frac{\cos^2(x)\cdot(1-\operatorname{sen}(x))}{1-\operatorname{sen}^2(x)} \\ &= \frac{\cancel{\operatorname{sen}^2(x)}\cdot(1-\cos(x))}{\cancel{\operatorname{sen}^2(x)}} + \frac{\cancel{\cos^2(x)}\cdot(1-\operatorname{sen}(x))}{\cancel{\cos^2(x)}} \\ &= 2-\cos(x)-\operatorname{sen}(x) \end{aligned}$$

Así derivamos esta última expresión

$$\begin{aligned} y' &= [2-\cos(x)-\operatorname{sen}(x)]' = 2' - [\cos(x)]' - [\operatorname{sen}(x)]' \\ &= 0-(-\operatorname{sen}(x))-\cos(x) = \operatorname{sen}(x)-\cos(x) \\ \Longrightarrow & \boxed{y' = \operatorname{sen}(x)-\cos(x)} \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} y' &= \left((\operatorname{sen}(x))^{\cos(x)}\right)' = (\operatorname{sen}(x))^{\cos(x)}\left(-\operatorname{sen}(x)\ln(\operatorname{sen}(x)) + \cos(x)\cdot\frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}\right) \\ &= (\operatorname{sen}(x))^{\cos(x)}\left(\frac{-\operatorname{sen}^2(x)\ln(\operatorname{sen}(x))+\cos^2(x)}{\operatorname{sen}(x)}\right) \\ &= (\operatorname{sen}(x))^{\cos(x)-1}(-\operatorname{sen}^2(x)\ln(\operatorname{sen}(x))+\cos^2(x)) \end{aligned}$$

◀

Ejercicio 2.2.27. (a) Calcule $f'(x)$ de $f(x) = \left(\dfrac{x^2+3}{1+x^2}\right)^2$

(b) Considerando el resultado anterior, calcula los valores de $f'(1)$ y $f'(-1)$

Resolución: ▶

(a)

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left[\left(\frac{x^2+3}{x^2+1}\right)^2\right]' = 2\left(\frac{x^2+3}{x^2+1}\right)\cdot\left(\frac{x^2+3}{x^2+1}\right)' = 2\left(\frac{x^2+3}{x^2+1}\right)\cdot\left[\frac{(x^2+2)'(x^2+1)-(x^2+3)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}\right] \\
&= 2\left(\frac{x^2+3}{x^2+1}\right)\cdot\left(\frac{2x(x^2+1)-2x(x^2+3)}{(x^2+1)^2}\right) \\
&= 2\left(\frac{x^2+3}{x^2+1}\right)\cdot\left(\frac{\cancel{2x^3}+2x-\cancel{2x^3}-6x}{(x^2+1)^2}\right) \\
&= 2\left(\frac{x^2+3}{x^2+1}\right)\cdot\left(\frac{-4x}{(x^2+1)^2}\right) \\
&\Longrightarrow \boxed{f'(x) = -\frac{8x(x^2+3)}{(x^2+1)^3}}
\end{aligned}$$

(b)

$$f'(x) = -\frac{8x(x^2+3)}{(x^2+1)^3} \Longrightarrow \boxed{f'(1) = -\frac{32}{8} = -4}$$

$$f'(x) = -\frac{8x(x^2+3)}{(x^2+1)^3} \Longrightarrow \boxed{f'(-1) = \frac{32}{8} = 4}$$

◀

Ejercicio 2.2.28. Dada la función$f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\operatorname{sen}\left(\frac{x+1}{x^2+1}\right)$ Determine la derivada de $f(x)$ en $x=0$

Resolución: ▶

$$\begin{aligned}
f'(x) = \left[\operatorname{sen}\left(\frac{x+1}{x^2+1}\right)\right]' &= \operatorname{sen}'\left(\frac{x+1}{x^2+1}\right)\cdot\left(\frac{x+1}{x^2+1}\right)' = \cos\left(\frac{x+1}{x^2+1}\right)\cdot\left(\frac{(x+1)'(x^2+1)-(x+1)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}\right) \\
&= \cos\left(\frac{x+1}{x^2+1}\right)\cdot\left(\frac{(x^2+1)-(x+1)2x}{(x^2+1)^2}\right) = \cos\left(\frac{x+1}{x^2+1}\right)\cdot\left(\frac{-x^2-2x+1}{(x^2+1)^2}\right) \\
&\Longrightarrow f'(0) = \cos\left(\frac{0+1}{0+1}\right)\cdot\left(\frac{-0-0+1}{(0+1)^2}\right) \\
&\Longrightarrow \boxed{f'(0) = \cos(1)}
\end{aligned}$$

◀

Ejercicio 2.2.29. Dada la función $f(x)=\begin{cases} x^2+a & ; \quad x\leq 1 \\ bx-2 & ; \quad x>1 \end{cases}$. Calcule los valores a, b para que f sea derivable en su dominio.

Resolución: ►

Analizando derivabilidad en $x=1$

Como f es derivable en todo $\mathbb{R}$, lo es también en $x=1$, por tanto

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} \Longleftrightarrow \lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

Cálculo de $\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{bx-2-(1+a)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{bx-3-a}{x-1} \tag{2.3}$$

Cálculo de $\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{x^2+a-1-a}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}x+1=2 \tag{2.4}$$

Analizando la continuidad de f en $x=1$

Como f es derivable en $x=1$, también es continua en $x=1$, por tanto

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^-}f(x)=f(1)$$

Cálculo de $\lim_{x\to 1^+}f(x)$ y $\lim_{x\to 1^-}f(x)$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1^+}f(x) &= \lim_{x\to 1^+}bx-2=b-2 \\ \lim_{x\to 1^-}f(x) &= \lim_{x\to 1^-}x^2+a=1+a \\ &\Longrightarrow b-2=1+a \Longrightarrow \boxed{b=3+a} \end{aligned} \tag{2.5}$$

Reemplazando (2.5) en (2.3), obtenemos

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{bx-3-a}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{(3+a)x-3-a}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{(3+a)\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}}=3+a \tag{2.6}$$

Igualando (2.6) y (2.4), obtenemos

$$a+3=2 \Longrightarrow \boxed{a=-1,\ b=2}$$

◄

2.3. Familia de curvas ortogonales,Derivadas de orden Superior

Definición 2.3.1.

1. Dos curvas son ortogonales en un punto de intersección si sus rectas tangentes en ese punto son perpendiculares.
2. Una familia de curvas es ortogonal a otra familia de curvas si cada curva de una familia es ortogonal a todas las curvas de la otra familia.
3. Sea f una función derivable, si la derivada $f\,'$ es una función derivable entonces su derivada se llama **segunda derivada** y se denota por $(f\,')\,' = f\,''$. Si $f\,''$ es derivable entonces su derivada se llama tercera derivada .
4. En general si la derivada de orden $(n-1)$ de f es una función derivable entonces su derivada se llama enésima derivada y se denota por $(f^{(n-1)})\,' = f^{\,(n)}$
5. $f^{(0)} = f,\;\; f^{(1)} = f\,',\;\; f^{(2)} = f\,''$

2.4. Aproximación lineal de Funciones

Definición 2.4.1.

1. Sea $f : Dom(f) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ función definida por $y = f(x)$ derivable en x_0, se define **aproximación lineal** de f en torno de x_0 denotada $l(x)$ y definida por
$$l(x) = f(x_0) + f\,'(x_0)(x - x_0),\text{ si } x \in]x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon[,\; \epsilon > 0$$
2. Se llama a $l(x)$ **linealización** de f alrededor del punto x_0.
3. Se llama **error de aproximación** a $E(x) = f(x) - l(x)$ si satisface
$$\lim_{x\to x_0}\left|\frac{E(x)}{x - x_0}\right| = \lim_{x\to x_0}\left|\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f\,'(x_0)\right| = 0$$

Definición 2.4.2. [Derivación Implícita]

1. La ecuación $F(x, y) = 0$ se llama ecuación de dos variable x, y
2. Una función $y = f(x)$ está **definida implícitamente** por la ecuación $F(x, y) = 0$ cuando $F(x, f(x)) = 0$, es decir cuando $y = f(x)$ satisface la ecuación $F(x, y) = 0$

exam:deri

1. Dada la ecuación $F(x, y) = x^3 + y - 1 = 0$ la función $y = f(x) = 1 - x^3$ es definida implícitamente por la ecuación $F(x, y) = 0$ pues $F(x, f(x)) = x^3 + (1 - x^3) - 1 = 0$
2. La ecuación $F(x, y) = x^2 + y^2 - 16 = 0$ define implícitamente una familia de funciones $y = \pm\sqrt{16 - x^2}$.

3. Nada garantiza que una función definida implícitamente sea continua, derivable, etc.; no siempre una ecuación $F(x,y)=0$ define implíictamente alguna función, por ejemplo $x^2y^3+\tan(y)+\ln(yx)=0$

Definición 2.4.3. [Velocidad y Aceleración]

1. Suponga que una partícula se mueve a lo largo de un gráfico de función $u=u(t)$, $t\in[a,b]\subset Dom(u)$, entonces **la velocidad media** de la partícula en $[a,b]$ ésta definida

$$v_{ab}=\frac{\text{distancia}}{\text{tiempo}}=\frac{u(b)-u(a)}{b-a}$$

2. v_{ab} es la pendiente de la recta que pasa por $(a,f(a))$ y $(b,f(b))$, nos la información acerca de la velocidad de la partícula en $t=t_0$
3. La **velocidad instántánea** en $t=t_0$, es $v(t_0)=u\,'(t)$
4. **la aceleración media** de la partícula es $a_{ab}==\dfrac{v(b)-v(a)}{b-a}$
5. La **aceleración instántánea** en $t=t_0$, es $a(t_0)=v\,'(t_0)=u\,''(t_0)$

2.4.1. Ejercicios Resueltos

Ejercicio 2.4.1. (a) Calcule y'' para $y=\ln(x^4+x^2)$

(b) Calcule y', en $\sqrt{\dfrac{x}{y}}+\sqrt{\dfrac{y}{x}}=6$ utilizando derivación implícita.

Resolución: ►

(a) *Cálculo de la primera derivada de* y

$$\begin{aligned} y' &= \left(\ln(x^4+x^2)\right)' = \frac{(x^4+x^2)'}{x^4+x^2} \\ &= \frac{4x^3+2x}{x^4+x^2} = \frac{x(4x^2+2)}{x(x^3+x)} = \frac{\cancel{x}(4x^2+2)}{\cancel{x}(x^3+x)} \\ y' &= \frac{4x^2+2}{x^3+x} \end{aligned}$$

Cálculo de la segunda derivada de y.

$$\begin{aligned} y'' &= \left(\frac{4x^2+2}{x^3+x}\right)' = \frac{(4x^2+2)'(x^3+x)-(4x^2+2)(x^3+x)'}{(x^3+x)^2} \\ &= \frac{8x(x^3+x)-(4x^2+2)(3x^2+1)}{(x^3+x)^2} \\ &= \frac{-4x^4-2x^2-2}{\left(x^3+x\right)^2} \end{aligned}$$

(b) *Transformando la expresión* $\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}=6$ *en otra (considere que cada término es inversa de la otra), entonces elevando al cuadrado se tiene*

$$\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}=6 \Big/ (\ \cdot\ )^2$$

$$\Longrightarrow \left(\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}\right)^2=6^2 \Longrightarrow \left(\sqrt{\frac{x}{y}}\right)^2+2\sqrt{\frac{x}{y}}\cdot\sqrt{\frac{y}{x}}+\left(\sqrt{\frac{y}{x}}\right)^2=36$$

$$\Longrightarrow \frac{x}{y}+2+\frac{y}{x}=36 \Longrightarrow \boxed{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=34}$$

Ahora si, derivando implícitamente $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=34$, *se tiene.*

$$\begin{aligned} \left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)'=(34)' \quad &\Longrightarrow \quad \frac{y-xy'}{y^2}+\frac{y'x-y}{x^2}=0 \Longrightarrow \frac{1}{y}-\frac{xy'}{y^2}+\frac{y'}{x}-\frac{y}{x^2}=0 \\ &\Longrightarrow \quad y'\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{y^2}\right)=\frac{y}{x^2}-\frac{1}{y} \Longrightarrow y'\left(\frac{y^2-x^2}{xy^2}\right)=\frac{y^2-x^2}{x^2y} \Longrightarrow y'=\frac{xy^2\cancel{(y^2-x^2)}}{x^2y\cancel{(y^2-x^2)}} \\ &\Longrightarrow \quad y'=\frac{xy^2}{x^2y}=\frac{y}{x} \end{aligned}$$

◄

Ejercicio 2.4.2. Utilizando derivación implícita calcule $y' = \dfrac{dy}{dx}$, para la ecuación implícita $3x^2y^3 - x + y - 25 = 0$

Resolución: ►

$$
\begin{aligned}
\frac{d(3x^2y^3 - x + y - 25)}{dx} &= \frac{d(0)}{dx} \\
3\underbrace{\frac{d(x^2y^3)}{dx}}_{derivadaproducto} - \frac{d(x)}{dx} + \frac{dy}{dx} - \frac{d(25)}{dx} &= 0 \\
3\left(\frac{d(x^2)}{dx}\cdot y^3 + x^2\cdot\frac{d(y^3)}{dx}\right) - 1 + \frac{dy}{dx} - 0 &= 0 \\
3(2xy^3 + 3x^2y^2\cdot\frac{dy}{dx}) - 1 + \frac{dy}{dx} &= 0 \\
\frac{dy}{dx}(9x^2y^2 + 1) &= 1 - 6xy^3 \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{1 - 6xy^3}{9x^2y^2 + 1}
\end{aligned}
$$

◄

2.5. Aplicaciones de la derivada

2.5.1. Máximos y mínimos

comen:deri Sabemos que una función continua sobre un conjunto cerrado alcanza su mínimo y máximo. pero no sabíamos como hallarlo, aqui presentaremos métodos como encontrar tales puntos.

Definición 2.5.1.

1. Una función f tiene ***máximo relativo (o local)*** en un punto $x_0 \in Domf$ si existe un intervalo I abierto, $x_0 \in I$ tal que
$$f(x) \leq f(x_0), \quad \forall\ x \in I \cap Domf$$
2. La imagen $f(x_0)$ de x_0 se llama **valor máximo** de f.
3. Una función f tiene ***mínimo relativo (o local)*** en un punto $x_0 \in Domf$ si existe un intervalo I abierto, $x_0 \in I$ tal que
$$f(x) \geq f(x_0), \quad \forall\ x \in I \cap Domf$$
4. La imagen $f(x_0)$ de x_0 se llama **valor mínimo** de f.
5. Se dicen ***valores extremos*** de una función f a todos sus máximos y mínimos relativos.

Teorema 2.5.1. Sea $f:\ ]a,b[\to\mathbb{R}$ una función que tiene un valor extremo en $x_0 \in]a,b[$ y f derivable entonces $f'(x_0) = 0$

Definición 2.5.2. [Puntos críticos de una función]

1. Sea $f:\ Dom(f) \to \mathbb{R}$ derivable en $x_0 \in Dom(f)$ y si $f\ '(x_0) = 0$ entonces x_0 es ***punto crítico*** de f.

2. Sea $f:\ Dom(f) \to \mathbb{R}$ y $x_0 \in Dom(f)$ y si $f\ '(x_0)$ no exista, entonces x_0 es punto crítico.

3. Sea $f:\ [a,b] \to \mathbb{R}$ y $x_0 = a \in I$ o $x_0 = b \in I$ (uno de los extremos del intervalo) entonces $x_0 \in I$ es un punto crítico.

Teorema 2.5.2. Sea $f:\ [a,b] \to \mathbb{R}$ continua entonces existen $x_1,\ x_2 \in [a,b]$ tales que $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2),\ \forall\ x \in [a,b]$

Teorema 2.5.3. [de Rolle]
Sea una función $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ continua, y derivable en $]a,b[$ tal que $f(a) = f(b)$, entonces existe al menos un punto $x_0 \in]a,b[$ tal que $f\ '(x_0) = 0$.

Teorema 2.5.4. [de Valor Medio]
Sea $f:\ [a,b] \to \mathbb{R}$ coninua y derivable en $]a,b[$ entonces $\exists\ x_0 \in]a,b[$ tal que $f\ '(x_0) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Teorema 2.5.5. Sea $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ función continua y derivable en $]a,b[$

1. Si $f\ '(x) > 0,\quad \forall x \in]a,b[$ entonces f es creciente en $[a,b]$.

2. Si $f\ '(x) < 0,\quad \forall x \in]a,b[$ entonces f es decreciente en $[a,b]$.

3. Si $f\ '(x) = 0,\quad \forall x \in]a,b[$ entonces f es constante en $[a,b]$.

4. Si g es derivable en $]a,b[$ y si $f\ '(x) = g\ '(x),\ \forall\ x \in]a,b[$, entonces $\exists\ x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = g(x) + x_0,\ \forall\ x \in [a,b]$.

Observación 2.5.6.

1. Suponga que un vehículo recorre una distancia de 400 km. en 4 hr y defina $s = s(t)$ la distancia recorrida por el vsehículo en t horas. Se define la **velocidad media** en ese período de tiempo como
$$\frac{s(2)-s(0)}{4-0} = \frac{400-0}{4} = 100\frac{km}{h}$$
Por el teorema del valor medio se concluye que el vehículo debió haber tenido una velocidad $s\ '(t_0) = 100\frac{km}{h}$ por lo menos una vez en ese período de tiempo.

2. El teorema del valor medio asegura que existe un punto del gráfico de una función f donde la recta tangente en ese punto es paralela a la recta secante que une $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ donde $[a,b]$ es el dominio de f.

Teorema 2.5.7.

1. Sea una función $f:[a,b] \to \mathbb{R}$, si $f\ '(a) > 0$ entonces $f(a)$ es un mínimo relativo.

2. Sea una función $f:[a,b] \to \mathbb{R}$, si $f\ '(b) < 0$ entonces $f(b)$ es un mínimo relativo.

3. Sea una función $f:[a,b] \to \mathbb{R}$, si $f\ '(a) < 0$ entonces $f(a)$ es un máximo relativo.

4. Sea una función $f:[a,b] \to \mathbb{R}$, si $f\ '(b) > 0$ entonces $f(b)$ es un máximo relativo.

Teorema 2.5.8. [Criterio de la primera derivada]
Sea x_0 un punto crítico de f ($f'(x_0) = 0$, o $f'(x_0)$ no existe). Si f es continua $[a,b]$ tal que $x_0 \in]a,b[$, entonces:

1. $\left\{\begin{array}{lcl} f'(x) > 0 & , & x \in]a, x_0[\\ & y & \\ f'(x) < 0 & , & x \in]x_0, b[\end{array}\right. \Longrightarrow f(x_0)$es un máximo relativo de f

2. $\left\{\begin{array}{lcl} f'(x) < 0 & , & x \in]a, x_0[\\ & y & \\ f'(x) > 0 & , & x \in]x_0, b[\end{array}\right. \Longrightarrow f(x_0)$ es un mínimo relativo de f

3. $\left\{\begin{array}{lcl} f'(x) > 0 & , & x \in]a, x_0[\\ & y & \\ f'(x) > 0 & , & x \in]x_0, b[\end{array}\right.$ $f(x_0)$ no es máximo ni mínimo relativo.

4. $\left\{\begin{array}{lcl} f'(x) < 0 & , & x \in]a, x_0[\\ & y & \\ f'(x) < 0 & , & x \in]x_0, b[\end{array}\right.$ $f(x_0)$ no es máximo ni mínimo relativo.

Teorema 2.5.9. [Criterio de la segunda derivada]
Sea f derivable en $]a,b[$. Si $f'(x_0) = 0$ y si $f''(x_0)$ existe, entonces

1. $f''(x_0) < 0$ entonces $f(x_0)$ es un máximo relativo.

2. $f''(x_0) > 0$ entonces $f(x_0)$ es un mínimo relativo.

Definición 2.5.3. Sea $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ función derivable entonces

1. f es cóncava hacia arriba si $f'(x)$ es creciente en $]a,b[$.

2. f es cóncava hacia abajo si $f'(x)$ es decreciente en $]a,b[$.

Teorema 2.5.10. [Concavidad]
Sea f dos veces derivable en $]a,b[$ entonces

1. si $f''(x) > 0$ implica que f es cóncava hacia arriba en $]a,b[$.

2. $f''(x) < 0$ implica que f es cóncava hacia abajo en $]a,b[$.

Observación 2.5.11.

1. Si f es dos veces derivable, y deseamos calcular los puntos x_0 candidatos a puntos de inflexión, debemos resolver la ecuación $f''(x_0) = 0$ y estudiamos el signo de $f''(x)$ para $x > x_0$ y $x < x_0$

2. Si $f''(x_0) = 0$ no implica que x_0 sea la abscisa de un punto de inflexión, de hecho la función $f(x) = x^4$ se tiene que $f''(x) = 12x^2$ si $f''(x) = 0 \Longrightarrow x = 0$ pero $x_0 = 0$ es un mínimo.

3. Sea $f(x) = x|x|$ si $x > 0$, $f''(x) = 2$ y si $x < 0$, $f''(x) = -2$ entonces 0 es un punto de inflexión pero $f''(0)$ no existe.

Teorema 2.5.12. Sea f continua en $[a,b]$ y sea $x_0 \in]a,b[$ tal que $f''(x_0) = 0$ o que no exista $f''(x_0)$, entonces:

1. $\left\{\begin{array}{ccc} f''(x) > 0 & , & x \in]a, x_0[\\ & y & \\ f''(x) < 0 & , & x \in]x_0, b[\end{array}\right. \Longrightarrow (x_0, f(x_0))$ es punto de inflexión

2. $\left\{\begin{array}{ccc} f''(x) < 0 & , & x \in]a, x_0[\\ & y & \\ f''(x) > 0 & , & x \in]x_0, b[\end{array}\right. \Longrightarrow (x_0, f(x_0))$ es punto de inflexión.

3. $\left\{\begin{array}{ccc} f''(x) > 0 & , & x \in]a, x_0[\\ & y & \\ f''(x) > 0 & , & x \in]x_0, b[\end{array}\right.$ $(x_0, f(x_0))$ no es punto inflexión de f

4. $\left\{\begin{array}{ccc} f''(x) < 0 & , & x \in]a, x_0[\\ & y & \\ f''(x) < 0 & , & x \in]x_0, b[\end{array}\right.$ $(x_0, f(x_0))$ no es punto inflexión de f.

2.5.2. Ejercicios Resueltos

Ejercicio 2.5.13. Dada la función $f : [1,2] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$

(a) Verifcar que se cumplen las condiciones del Teorema del Valor Medio (TVM) en el dominio indicado.

(b) Obtener el o los valores de c que satisfacen el TVM.

Resolución: ►

(a) f **es continua en** $[1,2]$, *en efecto*

Note que la función es un polinomio, por tanto es continua en todo su dominio.

f **es derivable en** $]1,2[$, *en efecto*

Como f es un polinomio por tanto es derivable en $]1,2[$

cumple las condiciones del TVM.

(b) *Por el TVM se tiene que existe $c\in]1,2[$ tal que* $f'(c)=\dfrac{f(2)-f(1)}{2-1}$

$$\begin{aligned}
3c^2-6c &= \frac{(2^3-3\cdot2^2+2)-(1-3+2)}{2-1}=8-12+2\\
&\Longrightarrow 3c^2-6c+2=0\Longrightarrow c_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{36-4\cdot3\cdot2}}{6}\\
&\Longrightarrow \boxed{c_1=\frac{6+2\sqrt{3}}{6}=1{,}57735,\ c_2=\frac{6-2\sqrt{3}}{6}=0{,}42264}
\end{aligned}$$

El único valor que satisface las condiciones es c_1

◄

Ejercicio 2.5.14. Considere la función $f:\ [1,2]\to\mathbb{R}$ definida por $g(x)=\sqrt[3]{x^2-3x+2}$

(a) Verificar si se cumplen las condiciones del teorema del Rolle en el intervalo indicado.

(b) En caso afrmativo determine el (los) valor(es) de c adecuados que satisfacen la conclusión del teorema.

Resolución: ►

(a) f **es continua en** $[1,2]$, *en efecto*

f es continua por que es algebraica.

f **es derivable en** $]1,2[$, *en efecto*

$$g'(x) = \left[\left(x^2-3x+2\right)^{\frac{1}{3}}\right]'=\frac{1}{3}(x^2-3x+2)^{\frac{-2}{3}}(2x-3)=\frac{2x-3}{\sqrt[3]{(x^2-3x+2)^2}}$$

está definida $\forall\ x\in]1,2[$, es decir es diferenciable en todo el intervalo $]1,2[$.

$f(1)=f(2)$ en efecto

$f(1)=f(2)=0$ entonces por el Teorema del Rolle $\exists c\in]1,2[$ tal que $f'(c)=0$

(b) $f'(c)=0\Longrightarrow\dfrac{2c-3}{\sqrt[3]{(c^2-3c+2)^2}}=0\Longrightarrow 2c-3=0\Longrightarrow c=\dfrac{3}{2}\in]1,2[$

◄

Ejercicio 2.5.15. Encuentra los valores de a y b en la función $f(x) = x^2 + ax + b$ sabiendo que la gráfica pasa por el punto $(-2,1)$ y tiene un extremo relativo en el punto de abscisa $x = -3$

Resolución: ▶

Sabemos que la función $f(x) = x^2 + ax + b$ tiene un extremo relativo en el punto de abscisa $x = -3$
Es decir

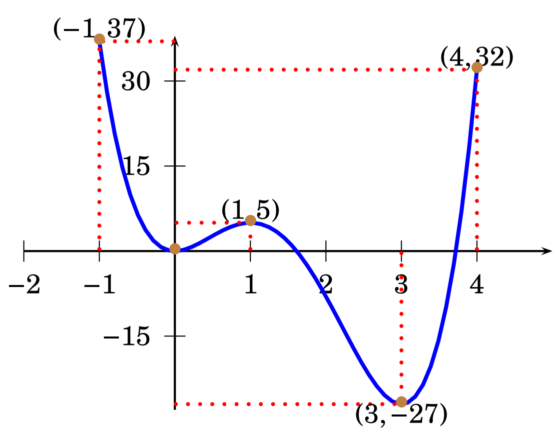
$$\begin{aligned} f(x)' &= 2x + a = 0 \Longrightarrow f(-3)' = (-3) + a = 0 \\ &\Longrightarrow \boxed{a = 6} \end{aligned}$$

Sabemos que la gráfica de $f(x) = x^2 + ax + b$ pasa por el punto $(-2,1)$ y por lo anterior
Se tiene

$$\begin{aligned} f(-2) &= 4 - 2a + b = 1 \Longrightarrow 2a + b = -3 \\ &\Longrightarrow \boxed{b = 9} \end{aligned}$$

◀

Ejercicio 2.5.16. (a) Dada la gráfica de $f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2,\ x \in [-1,4]$



Utilizando la gráfica identifique:

(i) los valores de x que determina a f máximo y mínimo global.

(ii) los valores de x que determina a f mínimos y máximos locales.

(b) Para la función $f(x) = x^2 - 6x + 9,\ x \in [0,1]$, verifique que se cumple las hipótesis del Teorema del Valor Medio, y encuentre el valor de c que aparece en el teorema.

(c) Encuentre los puntos críticos de $f(x) = x^{\frac{3}{5}}(4 - x)$

Resolución: ►

(a) **Mínimo global**

Según el gráfico la abscisa $x = 3$ hace que la función f tenga un valor mínimo global (absoluto), cuyo valor es $f(3) = -27$

Máximo global

Según el gráfico la abscisa $x = -1$ hace que la función f un valor máximo global (absoluto), cuyo valor es $f(-1) = 37$

Mínimos locales

Según el gráfico las abscisas $x = 0$ y $x = 3$ hace que la función f tenga valores de mínimo local cuyos valores son $f(0) = 0$ y $f(3) = -27$.

Máximos locales

Según el gráfico la abscisa $x = 1$ hace que la función f tenga valor de máximo local cuyo valor es $f(1) = 5$

(b) **f es continua en $[0,1]$**

En efecto, como f es un polinomio entonces f es continua en $\mathbb{R}$ por tanto lo es en cualquier intervalo de $\mathbb{R}$.

f es derivable en $]0,1[$

En efecto, como f es un polinomio entonces f es derivable en $\mathbb{R}$ por tanto lo es en cualquier intervalo de $\mathbb{R}$.

Conclusión del Teorema del Valor Medio

Existe un número real $c \in]0,1[$ tal que satisface $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}$

Cálculo de c

Para nuestro problema $a = 0,\ b = 1 \Longrightarrow f(0) = 9,\ f(1) = 4$ y $f'(x) = 2x - 6 \Longrightarrow f'(c) =$ $2c - 6 \Longrightarrow 2c - 6 = \dfrac{4-9}{1-0} \Longrightarrow 2c - 6 = -5 \Longrightarrow \boxed{c = \dfrac{1}{2} \in]0,1[}$

(c)

$$\begin{aligned}
\left(x^{\frac{3}{5}}(4-x)\right)' &= \frac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}}(4-x) + x^{\frac{3}{5}}(-1) = \frac{3(4-x)}{5x^{\frac{2}{5}}} - x^{\frac{3}{5}} = 0 \\
&= \frac{3(4-x) - 5x}{5x^{\frac{2}{5}}} = \frac{12-8x}{5x^{\frac{2}{5}}} = 0 \\
&\Longrightarrow 12 - 8x = 0 \vee x = 0 \Longrightarrow \boxed{x = \frac{3}{2} \vee x = 0}
\end{aligned}$$

Puntos críticos

$P.C. = \left\{0,\ \dfrac{3}{2}\right\}$

◄

Ejercicio 2.5.17. Sea $f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$. Encuentre:

(a) Los puntos críticos.

(b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

(c) Máximos y/o mínimos relativos.

(d) Los intervalos de concavidad.

(e) puntos de inflexión si es que existen.

(f) Gráfico de f

Resolución: ►

(a) **Puntos críticos (posibles máximo y/o mínimo)**
$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 0 \Longrightarrow 4x^2(x-3) = 0 \Longrightarrow x = 0,\ x = 3$
Los $P.C = \{0, 3\}$

Posibles puntos de inflexión
$f''(x) = 12x^2 - 24x = 0 \Longrightarrow 12x(x-2) = 0 \Longrightarrow x = 0,\ x = 2$

	$]-\infty, 0[$	$]0, 2[$	$]2, 3[$	$]3, +\infty[$
$4x^2$	(+)	(+)	(+)	(+)
$x-3$	(−)	(−)	(−)	(+)
$f'(x)$	(−)	(−)	(−)	(+)
$f(x)$	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

	$]-\infty, 0[$	$]0, 2[$	$]2, +\infty[$
$12x$	(−)	(+)	(+)
$x-2$	(−)	(−)	(+)
$f''(x)$	(+)	(−)	(+)
$f(x)$	$\smile$	$\frown$	$\smile$

(b) **Intervalos de crecimiento**
Según el cuadro hay un intervalo de crecimiento para $f(x)$ *que es* $]3, +\infty[$

Intervalos de decrecimiento

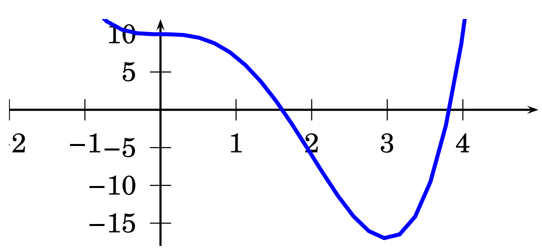
Según el cuadro los intervalos de decrecimiento para $f(x)$ *son* $]-\infty, 0[,\ ]0, 2[,\ ]2, 3[$

(c) **Mínimo y máximo**
$f''(0) = 0$ *no hay mínimo ni máximo.*
$f''(2) = 0$ *no hay mínimo ni máximo.*
$f''(3) = 36 > 0$ *hay un mínimo en* $x = 3$*, cuyas coordenadas es* $(3, -17)$

(d) **Intervalos de concavidad**
En $]-\infty, 0[$ *es cóncava hacia arriba*
En $]0, 2[$ *es cóncava hacia abajo*
En $]2, +\infty[$ *es cóncava hacia arriba*

(e) **Puntos de inflexión**
Según el cuadro hay puntos de inflexión en $x = 0$ *y* $x = 2$ *cuyos puntos son* $(0, 10)$, $(2, -6)$

(f)



◄

Ejercicio 2.5.18. Para la función $f(x) = x\sqrt{4-x}$ definida en $]-\infty, 4]$, determine los puntos máximos y mínimos, si existen.

Resolución: ►

Cálculo de los punto críticos

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x)'(4-x)^{\frac{1}{2}} + x[(4-x)^{\frac{1}{2}}]' = (4-x)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x(4-x)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{4-x} - \frac{x}{2\sqrt{4-x}} = \frac{2(4-x)-x}{2\sqrt{4-x}} = \frac{8-3x}{2\sqrt{4-x}} = 0 \end{aligned}$$

De donde

$$8 - 3x = 0 \Longrightarrow \quad x = \frac{8}{3}$$

o donde la derivada no existe, es decir en

$$4 - x = 0 \Longrightarrow \quad x = 4$$

Por lo tanto hay dos puntos críticos $P.C. = \left\{\frac{8}{3},\ 4\right\}$

	$\left]-\infty, \frac{8}{3}\right[$	$\left]\frac{8}{3}, 4\right[$	$]4, +\infty[$
$8-3x$	$+$	$-$	$-$
$2\sqrt{4-x}$	$+$	$+$	$-$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$

Según la tabla y utilizando el criterio de la primera derivada se obtiene que el punto $\frac{8}{3}$ *es un valor tal que* $f(\frac{8}{3})$ *es un máximo relativo (máximo global o absoluto). El punto* $x = 4$ *es un valor tal que* $f(4)$ *es un mínimo relativo pues*

$$f(x) = x(4-x)^{\frac{1}{2}} \geq f(4) = 0, \ \forall\ x \in [\frac{8}{3}, 4]$$

◄

2.5.3. Problemas de Optimización

comen:deri[Introducción]

Presentaremos problemas de maximización y minimización aplicados en diferente áreas. Para resolver este tipo de problemas primero se debe determinar la función a optimizar, que generalmente es una función de dos variables y usando las condiciones del problema esta expresión se puede reescribir como una función de una variable y así aplicar los resultados de los teoremas.

2.5.4. Tasa de Variación

comen:deri[Tasa de variación]

1. La velocidad de una partícula que se mueve a lo largo del gráfico de una función derivable $s = s(t)$ en el tiempo t es $v(t) = s'(t)$ y representa la **razón del desplazamiento por unidad de variación de tiempo**.

2. $s'(t)$ expresa la **tasa de variación de** $s(t)$ **por unidad de tiempo**

$$s'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{s(t+h) - s(t)}{h}$$

Si $y = f(x)$ es función derivable entonces $f'(x)$ es la tasa de variación de y en relación de x .

Observación 2.5.19. La interpretación de la derivada como tasa de variación se aplica en diversas áreas de la ciencia: Por ejemplo si $y = f(x)$ mide la **concentración de glóbulos rojos** de la sangre en el instante t entonces $\dfrac{f(t+h) - f(t)}{h}$ mide la **tasa de variación media de concentración de glóbulos rojos** durante el intervalo $[h, h+t]$ y $f'(a)$ mide la **tasa de variación instantánea** de glóbulos rojos en el instante $t = a$

exam:deri Una partícula se mueve a lo largo del gráfico de $y = x^3 + 2$, de modo que cuando $x = 5$ la abscisa crece a una velocidad de $2\dfrac{\text{cm}}{\text{seg}}$. ¿Cuál es la velocidad de crecimiento de la ordenada en ese instante?

Resolución: ►
$x = x(t)$ e $y = y(t)$ dependen del tiempo.
Debemos calcular $\left.\dfrac{dy}{dt}\right|_{x=5}$ *velocidad de la ordenada en el instante t cuando* $x = 5$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = (3x^2)\cdot\frac{dx}{dt} \\ \Longrightarrow \left.\frac{dy}{dt}\right|_{x=5} &= \left.\left[(3x^2)\cdot\frac{dx}{dt}\right]\right|_{x=5} = 3\cdot 25\cdot 2 = 150 \end{aligned}$$

La ordenada crece a una razón de $150\dfrac{cm}{seg}$ ◄

exam:deri El tronco de un árbol tiene la forma de un cilindro circular y crece a razón de $\dfrac{1}{4}\dfrac{\text{cm}}{\text{año}}$ y su altura crece a razón de $1\dfrac{\text{m}}{\text{año}}$. Determine la tasa de variación del volumen del tronco cuando el diámetro es 3 cm y su altura es de 50m.

Resolución: ►

1. *$r = r(t)$ radio en el instante t*
2. *$h = h(t)$: altura en el instante t*
3. *$V(t) = \pi r^2 h$: volumen del tronco*
4. *$r = \frac{3}{2}$, $h = 5000$*
5. *La velocidad de crecimiento del tronco en el instante t está relacionado con el diámetro por tanto según el problema se concluye $\frac{dr}{dt} = \frac{1}{8}$.*
6. *La velocidad de crecimiento de la altura en el instante t es $\frac{dh}{dt} = 100$*

Entonces

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \pi\left(2rh\frac{dr}{dt} + r^2\frac{dh}{dt}\right) \\ &= \pi(2 \cdot \frac{3}{2} \cdot 500 \cdot \frac{1}{8} + \frac{9}{4} \cdot 100 \\ &= 2100\pi\frac{cm^3}{año} \end{aligned}$$

◄

2.5.5. Variables Relacionadas

comen:deri[Introducción] Sea $y = f(x)$ función si la variable y depende del tiempo t, entonces $\frac{dy}{dt}$ se llama **razón de cambio** con respecto al tiempo. En particular, si y mide una distancia, se llama velocidad. Existe una amplia variedad de razones de cambio con respecto al tiempo: la razón con la que el agua fluye en un depósito, la razón con la cual crece o decrece su altura, la razón en la cual se separan dos móviles después de pasar por un punto específico A, etc. Cuando la variable y está dada en términos de t, basta con derivar y calcular luego el valor de la derivada en el tiempo requerido. Pero en la mayoría de los casos la variable y está relacionada con otras variables de las cuales conocemos su razón de cambio. Los problemas en que intervienen derivadas de variables relacionadas entre sí se llaman problemas de variables relacionadas.

2.5.6. Regla de L'hospital

Teorema 2.5.20. [L'hospital para $\frac{0}{0}$]
Sean f, g diferenciables en $]a, b[$ tales que $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in]a, b[$, $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to a^+} g(x) = 0$. Si existe L tal que $\lim\limits_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ entonces $\lim\limits_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$

Teorema 2.5.21. [L'hospital para $\frac{\infty}{\infty}$]
Sean f, g diferenciables en $]a,b[$ y para algún $c \in]a,b[$, se tiene $\lim\limits_{x\to c^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to c^+} g(x) = +\infty$.
Si además existe L tal que $\lim\limits_{x\to c^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$ entonces $\lim\limits_{x\to c^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to c^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$

Observación 2.5.22. El método de L'Hôpital también es válido para las indeterminaciones de la forma:

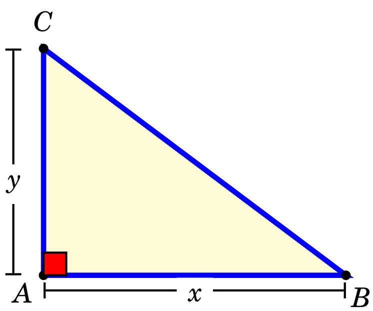
1. $\dfrac{\infty}{0}$
2. $\dfrac{0}{\infty}$
3. 0^0
4. ∞^∞
5. $(0\cdot\infty)$
6. 1^∞

Además se puede aplicar de forma repetitiva.

2.5.7. Ejercicios Resueltos

Ejercicio 2.5.23. Con una cuerda, se quiere construir un triángulo rectángulo con la condición que los catetos suman 10 cm, halla las dimensiones para que el área sea máxima.

Resolución: ►

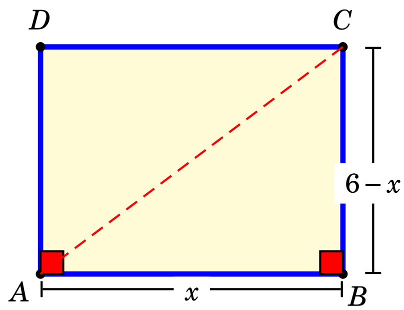


Sean y *: cateto opuesto ,* x *: cateto adyacente, tal que* $x + y = 10$

$Area_\triangle := f(x) = \dfrac{x\cdot y}{2} = \dfrac{x(10-x)}{2} = \dfrac{10x - x^2}{2}$, $x \in]0,10[$
Maximizando f
$f'(x) = \dfrac{10-2x}{2} = \dfrac{5-x}{=} 0 \Longrightarrow x = 5$ *el único punto crítico,* $f''(x) = -1 < 0$ *entonces* $x = 5$ *hace máximo la función área, por tanto los catetos miden* $x = y = 5$ *cm.* ◄

Ejercicio 2.5.24. En un rectángulo de perímetro 12 m, ¿cuál es la longitud que debe tener la diagonal para que sea mínima?

Resolución: ►



Según gráfico y utilizando pitágoras se obtiene una función para la diagonal: $f(x) = d(x) =$

$\sqrt{(6-x)^2 + x^2}$, $x \in]0,6[$, *minimizando se tiene*

$$f'(x) = \frac{-2(6-x)+2x}{2\sqrt{(6-x)^2+x^2}} \quad = \quad \frac{-6+2x}{\sqrt{(6-x)^2+x^2}} = 0$$

Entonces $-6+2x = 0 \Longrightarrow x = 3$ *Puntos críticos son* $x = 0,\ x = 6,\ x = 3$ *evaluando en todos ellos* $f(0) = 6,\ f(6) = 6,\ f(3) = 3\sqrt{2} \approx 4{,}24$, *entonces en* $x = 3$ *se obtiene la diagonal menor.* ◄

Ejercicio 2.5.25. Si se deja caer desde 100 pies de altura un objeto, su altura en el instante t viene dada por la función de posición $s = f(t) = -16t^2 + 100$, con s medida en pies y t en segundos. Encuentre la velocidad media en los siguientes intervalos:

1. $[1, 1{,}5]$
2. $[1, 1{,}1]$

Luego halle la velocidad en el instante $t = 1$.

Resolución: ►
La velocidad media en el primer intervalo es dada por

$$v_{media} = \frac{f(1+0{,}5) - f(1)}{0{,}5} = -40.$$

La velocidad media en el segundo intervalo es dada por

$$v_{media} = \frac{f(1+0{,}1) - f(1)}{0{,}1} = -6{,}72.$$

La velocidad en el instante $t = 1$ *corresponde a la velocidad instantánea en* $t = 1$, *es decir, la derivada de la función en* $t = 1$, $f'(1) = -32$. ◄

Ejercicio 2.5.26. La posición de una partícula está dada por la ecuación $s = f(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$ donde t se mide en segundos y s en metros.

1. Encontrar la velocidad en el instante t.
2. ¿ Cuál es la velocidad a los 2 seg.?
3. ¿En qué momento está en reposo la partícula ?.
4. ¿ Cuándo se mueve la partícula en dirección positiva ?.

Resolución: ►

1. *La velocidad de la partícula en el instante t es dada por*

$$f'(t) = 3t^2 - 12t + 9.$$

2. *La velocidad de la partícula a los* 2 *segundos es dada por*

$$f'(2) = -3.$$

3. *La partícula está en reposo cuando* $f'(t) = 0$*, entonces resolviendo la ecuación* $3t^2 - 12t + 9 = 0$ *si y sólo si* $(3t-9)(t-1) = 0$*. Por lo tanto,* $f'(t) = 0$ *si y sólo si* $t = 3$ *o* $t = 1$*. Así la partícula está en reposo en el primer segundo o en el tercer segundo.*

4. *La partícula se mueve en dirección positiva para los instantes t tal que* $f'(t) > 0$*. Dado que* $f'(t) = (3t-9)(t-1)$*, entonces*

$$\begin{aligned} f'(t) > 0 &\iff (3t-9)(t-1) > 0 \\ &\iff (t > 3 \wedge t > 1) \vee (t < 3 \wedge t < 1) \\ &\iff t > 3 \vee t < 1 \\ &\iff t \in]-\infty, 1[\cup]3, \infty[. \end{aligned}$$

◄

Ejercicio 2.5.27. Se estima que dentro de x meses, la población de cierta comunidad será $P(x) = x^2 + 20x + 8{,}000$.

1. ¿ Cuál será la razón de cambio de la población con respecto al tiempo dentro de 15 meses ?.
2. ¿ En cuánto cambiará realmente la población durante el mes número 16 ?.

Resolución: ►

1. *La razón de cambio de la población con respecto al tiempo, es la derivada de la función P, así,*

$$Razón\ de\ cambio = P'(x) = 2x + 20.$$

Así la razón de cambio de la población dentro de 15 meses será

$$P'(15) = 50 personas\ al\ mes.$$

2. *El cambio real en la población durante el mes 16 es la diferencia entre la población al cabo de 16 meses y la población al cabo de 15 meses. Es decir,*

$$Cambio\ de\ población = P(16) - P(15) = 51 personas.$$

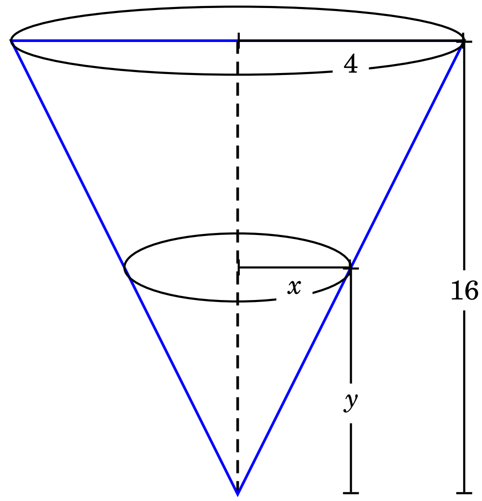
◄

Ejercicio 2.5.28. A un estanque que tienen la forma de un cono circular recto invertido de 4 metros de radio y 16 metros de altura entra agua a razón de $50cm^2/seg$.

1. ¿A qué velocidad está subiendo el nivel del agua cuando éste se encuentra a 4 metros de altura?.
2. ¿A qué velocidad está cambiando el radio en ese instante?.

Resolución: ►

1. *Sean V volumen en cm^3 del agua en el instante t (en segundos). x radio (en cm) de la sección del cono al nivel del agua en el instante t*
   y la altura del agua (en cm) en el instante t (ver Figura)



. *Además de la hipótesis se tiene*

$$\frac{dV}{dt} = 50(\frac{cm^3}{seg})$$

El volumen del agua en el instante t viene dado por

$$V = \frac{1}{3}\pi x^2 y$$

Por semejanza de triángulos se deduce que:

$$\frac{y}{x} = 4 \Rightarrow y = 4x \Longrightarrow x = \frac{y}{4}.$$

Así, la pregunta 1) puede formularse como

¿ Cuál es el valor de $\frac{dy}{dt}$ cuando $y = 4m = 400cm$. ?

Para calcular $\frac{dy}{dt}$, expresamos la formula del volumen en función de la variable y.

$$V = \frac{1}{3}\pi(\frac{y}{4})^2 y = \frac{\pi}{48}y^3.$$

◄

Continuación

Resolución: ►

(1) *Derivando y aplicando la regla de la cadena, obtenemos.*

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{3}\pi\frac{3}{16}y^2\frac{dy}{dt} = \frac{\pi}{16}y^2\frac{dy}{dt}.$$

De acuerdo con las condiciones del problema, tenemos la ecuación:

$$50\frac{cm^3}{seg} = \frac{\pi}{16}(400cm/seg)^2\frac{dy}{dt}.$$

De donde

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{200\pi}(\frac{cm}{seg}),$$

lo que significa que la altura crece con esa velocidad cuando $y = 4m$.

(2) *La pregunta 2) puede formularse como, ¿ Cuál es el valor de* $\frac{dx}{dt}$ *cuando* $h = 4m$ *?.*

Puesto que $x = \dfrac{y}{4}$ *obtenemos* $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{4}\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{800\pi}(\dfrac{cm}{seg})$ *lo que indica que el radio crece a esta velocidad.*

◄

Ejercicio 2.5.29. Calcule los siguientes límites

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sen(x)}{x}$.
2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^5 - 6x^3 + 8x - 3}{x^4 - 1}$.
3. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{e^x}{x}$.

Resolución: ►

1. *Como podemos ver, cuando x tiende a cero, este límite es de la forma indeterminada* $\dfrac{0}{0}$*, así que es necesario aplicar L'Hôpital, entonces tenemos que:*

$$\lim_{x\to 0}\frac{[sen(x)]'}{x'} \quad = \quad \lim_{x\to 0}\frac{cos(x)}{1} = \lim_{x\to 0} cos(0) = 1$$

2. *Notemos que al igual que en el ejercicio anterior que cuando x tiende a 1, este límite se torna de la forma indeterminada* $\frac{0}{0}$*, así que aplicaremos L'Hôpital. Entonces se tiene que:*

$$\lim_{x\to 1}\frac{[x^5-6x^3+8x-3]'}{[x^4-1]'} \quad = \quad \lim_{x\to 1}\frac{5x^4-18x^2+8}{4x^3} = -\frac{5}{4}$$

3. *Aplicando L'Hôpital obtenemos lo siguiente:*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(e^x)'}{(x)'} \quad = \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{1} = +\infty.$$

◄

Ejercicio 2.5.30. Calcular los siguientes límites.

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-cos(x)}{x}$.
2. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x+1}$.
3. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}$.
4. $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\ln(x)$.
5. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x$
6. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-6x^2+8x-3}{x^4-4x^3+2x^2+x+1}$.
7. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{\text{sen}(x)}{\ln(x)}$.
8. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}(\text{sen}(x))^x$.

Resolución: ►

1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{[1-cos(x)]'}{x'} = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)}{1} = \operatorname{sen}(0)=0$$

2.

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x-1}{x+1} = \lim_{x\to +\infty}\frac{1}{1}=1$$

3.

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x'}{(e^x)'} = \lim_{x\to +\infty}\frac{1}{e^x}=\frac{1}{+\infty}=0$$

4.

$$\lim_{x\to 0}x\ln(x) = \lim_{x\to 0}\frac{(\ln(x))'}{[\frac{1}{x}]'}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}}=-\lim_{x\to 0}x=0$$

5. $\lim\limits_{x\to +\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x$.
Calcular este límite no es para nada trivial, observe que

$$f(x)=(1+\frac{1}{x})^x=e^{\ln(1+\frac{1}{x})^x}=e^{x\ln(1+\frac{1}{x})}$$

Ahora calculemos el límite del exponente de nuestra nueva función, por L'Hôpital que es de la forma $\dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to +\infty}x\ln(1+\frac{1}{x}) = \lim_{x\to +\infty}\frac{\left[\ln(1+\frac{1}{x})\right]'}{\left[\frac{1}{x}\right]'}=\lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\cdot\frac{-1}{x^2}}{\frac{-1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to +\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x}}=\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{1+0}=1$$

Luego

$$\lim_{x\to +\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e^{\lim\limits_{x\to +\infty}x\ln(1+\frac{1}{x})}=e^1=e$$

◄

Resolución: ▶

6. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3-6x^2+8x-3}{x^4-4x^3+2x^2+x+1}$.
Este limite es de la forma $\frac{\infty}{\infty}$*, así aplicando L'Hôpital 3 veces se tendrá*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-6x^2+8x-3}{x^4-4x^3+2x^2+x+1} &\underbrace{=}_{}^{L'H} \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2-12x+8}{4x^3-12x^2+4x+1}\\ &\underbrace{=}_{}^{L'H} \lim_{x\to+\infty} \frac{6x-12}{12x^2-24x+4}\\ &\underbrace{=}_{}^{L'H} \lim_{x\to+\infty} \frac{6}{24x-24} = 0.\end{aligned}$$

(7.) $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{\ln(x)}$.
Dado que $\operatorname{sen}(x)$ *es acotada y* $\ln(x)\to-\infty$ *cuando* $x\to0^+$ *se tiene*

$$\lim_{x\to0^+} \frac{\operatorname{sen}(x)}{\ln(x)} = 0.$$

(8) $\lim\limits_{x\to0^+} (\operatorname{sen}(x))^x$.
Este limite es de la forma 0^0*, pero sabemos que* $(\operatorname{sen}(x))^x = e^{\ln(\operatorname{sen}(x))^x} = e^{x\ \ln(\operatorname{sen}(x))}$*. Y ahora observamos que* $x\ \ln(\operatorname{sen}(x)) = \frac{\ln(\operatorname{sen}(x))}{1/x}$ *el cual cuándo* $x\to0^+$ *es de la forma* $\frac{-\infty}{\infty}$*, así aplicando L'Hôpital se tendrá*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0^+} \frac{\ln(\operatorname{sen}(x))}{1/x} &\underbrace{=}_{}^{L'H} \lim_{x\to0^+} \frac{\frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}}{-1/x^2}\\ &= -\lim_{x\to0^+} \left(\frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}\right) x^2\\ &= -\lim_{x\to0^+} \left(\cos(x)\ \frac{x^2}{\operatorname{sen}^2(x)}\ \operatorname{sen}(x)\right)\\ &= -\lim_{x\to0^+} \cos(x)\ \lim_{x\to0^+} \left(\frac{x^2}{\operatorname{sen}^2(x)}\right) \lim_{x\to0^+} \operatorname{sen}(x)\\ &= -1\cdot1^2\cdot0\\ &= 0.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\lim_{x\to0^+} (sen(x))^x = e^0 = 1.$$

◀

2.6. Ejercicios Propuestos

1. Calcule $f\,'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ y $f\,'(x_0) = \lim\limits_{h\to0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ para las funciones siguientes en el punto dado.

(a) $f(x)=x^2,\ x_0=2$ (c) $f(x)=|x^2|,\ x_0=2$ (e) $f(x)=e^{2x},\ x_0=0$

(b) $f(x)=x^2+1,\ x_0=2$ (d) $f(x)=\ln(x),\ x_0=1$ (f) $f(x)=x(1-x),\ x_0=1$

2. Usando definición de derivada calcule las derivadas de las funciones siguientes

   (a) $f(x)=6x+8$ (b) $f(x)=5x^2-7$ (c) $f(x)=\sqrt{x+5}$ (d) $f(x)=4^x$

3. Obtenga las derivadas de las funciones siguientes

   (a) $f(x)=x^3+x^2+3$

   (b) $f(x)=x^2\operatorname{sen}x$

   (c) $f(x)=\dfrac{\cos(x)}{x^2+2}$

   (d) $f(x)=\dfrac{1+x\operatorname{sen}(x)}{1+\cos(x)}$

   (e) $f(x)=\dfrac{3x^2+5x}{\operatorname{sen}(x)}$

   (f) $f(x)=5\sqrt{x}+4\sqrt[3]{x}+\dfrac{2}{\sqrt[5]{x}}$

   g) $f(x)=(\operatorname{sen}x-\cos x)^5$

   (h) $f(x)=\operatorname{sen}(3x)+\cos^2(3x)$

   (i) $f(x)=\operatorname{sen}^2(3x^2+8)$

   (j) $f(x)=\operatorname{sen}(\ln(\cos(\sqrt{x}))$

   (k) $f(x)=\dfrac{3x^2\sqrt[4]{x}-2x\sqrt{x}}{5\sqrt[4]{x^3}}$

   (l) $f(x)=\ln(e^x+\sqrt{e^{2x}-1})$

   (ll) $f(x)=\ln\sqrt{\dfrac{1-\cos^2 x}{1+\cos^2 x}}$

   (m) $f(x)=e^{\sqrt{x^4+3x^2}}\cdot(4x^2+3x)$

   (n) $f(x)=[\operatorname{sen}(x)]^{\cos(x)}$

   (ñ) $f(x)=[\log_3(x^2+1)]^{e^{x-1}}$

4. Calcule las derivadas de las siguientes funciones en el punto dado

   (a) $f(x)=\dfrac{(x^3+1)^3}{(x+\ln(x))^2}$ en $x=1$.

   (b) $f(x)=\operatorname{sen}(3x^2+2x)-\cos(2x+1)$ en $x=0$

   (c) $f(x)=\sqrt[4]{(1-3x)^4+x^4}$ en $x=-1$

   (d) $f(x)=\left(\dfrac{x^3+2}{x^2+\ln(x)}\right)$ en $x=2$

5. Hallar la ecuación de la normal a la curva $f(x)=x^3-1$ en el punto $(2,7)$.

6. Hallar el punto de la curva $f(x)=2x^2+4x-3$ en que la pendiente de la recta tangente es igual a 8.

7. Encontrar la ecuación de cada una de las rectas que pasan por el punto $(3,-2)$ que son tangentes a la curva $y=x^2-7$.

8. Dada la función $f(x)=\begin{cases} ax^3+bx & ;\quad x\le 1\\ bx^2+c & ;\quad x>1\end{cases}$ Determine los valores de los parámetros $a,\ b,\ c$ tal que f resulte derivable en $x_0=1$.

   Calcule las siguientes derivadas de orden superior:

   (a) $(y)'''=(x^3+2x^2-4x+5)'''$

   (b) $y'''=(\operatorname{sen}(5x))'''$

   (c) $y''=\left(\dfrac{1}{x-3}\right)''$

   (d) $y''=(7x^3-8x^2+5)''$

   (e) $y''=(\cos(x^2))''$

   (f) $y''=\left(\dfrac{2x}{5x+13}\right)''$

   (g) $y''=(2x^5-3x^3+x)''$

   (h) $y^{iv}=((3x+2)^4)^{iv}$

   (i) $y''=(\operatorname{sen}(x^3+7x^2))''$

9. Obtenga las ecuaciones de la recta tangente y normal a la gráfica de la curva de ecuación

(a) $y=(2-3x+x^2)\cdot\sqrt{1+x^2}$ en $x=0$

(b) $y=\dfrac{1}{x-2}$ en $x=1$

(c) $y=(2+4x+x^2)\sqrt{2+x^2}$ en $x=0$

10. La carga q de un capacitor que se empieza descargar en el tiempo $t=0$ está dada por $q=\begin{cases} c & ; \ t\leq 0 \\ c\mathrm{e}^{\frac{t}{kc}} & ; \ t>0 \end{cases}$ donde $k,\ c$ son constantes positivas dependiendo del circuito. La corriente I que circula en el circuito está dada por $I=\dfrac{dq}{dt}$

    (a) Hallar la corriente I para $t<0$ y para $t>0$

    (b) ¿Es posible definir I en $t=0$?

    (c) ¿La función q es derivable en $t=0$?

11. Suponga que la distancia s de un cuerpo en movimiento desde un punto fijo está dada como función mediante la expresión $s(t)=20\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}$

    (a) Halle la velocidad v del cuerpo como función de t

    (b) Demuestre que s satisface la ecuación $s'-\dfrac{1}{2}s=0$

12. Obtenga los valores de las constantes $a,\ b$, y c de modo que $f(x)=x^2+ax+b$ y $g(x)=x^2+cx$ tengan la misma recta tangente en el punto $P(2,2)$. Rpta: $a=c=-1,\ b=0$

13. Un partícula se desplaza a la ley de movimiento $s(t)=\dfrac{1}{2}t^4-5t^3+12t^2$. Obtenga su velocidad cuando la aceleración es nula. Rpta: $v(1)=11,\ v(4)=-16$

14. Obtenga los valores de a y b de manera que la recta tangente de ecuación $2x-y=b$ sea tangente en $x=1$ a la parábola $y=ax^2$

15. Considere la función definida por $f:\ ]0,+\infty[\to]-3,+\infty[\ ; y=f(x)=x^2-3$

    (a) Demuestre que f es estrictamente creciente y continua en $]0,+\infty[$.

    (b) Comprobar que f es biyectiva y obtenga la función inversa de f, es decir $g=f^{-1}$.

    (c) Verificar que $f'(x)\neq 0$ en el intervalo $]0,+\infty[$.

    (d) Determine la derivada de la función inversa y comprobar que $g'(y)=\dfrac{1}{f'(x)}$

16. Sea $f:\ Dom(f)\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ función, calcule las derivadas de las funciones siguientes:

    (a) $f(x)=\ln\left(\dfrac{\operatorname{sen}(x)}{1+x^2}\right)$

    (b) $f(x)=x^{x^2},\ x>0$

    (c) $f(x)=\arccos\left(\sqrt{1-x^2}\right)$

    (d) $f(x)=5^{x^2+\operatorname{sen}(x)}$

    (e) $f(x)=\arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$

    (f) $f(x)=\ln\left(\cos\left(\dfrac{x-1}{x}\right)\right)$

17. Sea $y=f(x)$ una función derivable definida implícitamente por las ecuaciones siguientes, calcule y'

(a) $xe^y = \ln(xy)$

(b) $3x^2y^3 - y = 2y^2x$

(c) $y^3 = \dfrac{x-y}{x+y}$

(d) $xy = \arctan\left(\dfrac{x}{y}\right)$

(e) $\operatorname{sen}(xy) + \cos(xy) = \tan(x+y)$

(f) $x - y = \operatorname{arc\,sen}(x) - \operatorname{arc\,sen}(y)$

18. Calcule y' en el punto dado, luego defina la recta tangente al gráfico de la función implícita en ese punto.

(a) $(x^2+y^2)(y^2+x(x+1)) = 4xy^2,\ (x_0,y_0) = \left(\dfrac{1}{2}\right)$

(b) $\dfrac{x^2}{5} + \dfrac{y^2}{3} = 1,\ (x_0,y_0) = (5,3)$

(c) $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{2} = 1,\ (x_0,y_0) = (2,4)$

(d) $2(x^2+y^2)^2 = 25(x^2-y^2),\ (x_0,y_0) = (3,1)$

19. Un vehículo se desplaza a lo largo de la ecuación $x^2+2y^2 = 6$ determine los puntos que satisface la ecuación $\dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{dy}{dt}$, suponga que $x = x(t),\ y = y(t)$

20. (a) Pruebe que la familia de parábolas $y^2 = 4a$ son ortogonales a la familia de elipses $2x^2 + y^2 = b^2$

(b) Pruebe que la familia de círculos $x^2+y^2 = ax$ son ortogonales a la familia de círculos $x^2+y^2 = by$

21. (a) Sea $f(x) = \operatorname{sen}(x),\ x \in \mathbb{R}$ pruebe que $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$ es punto de máximo relativo y que $x_0 = -\dfrac{\pi}{2}$ es punto de mínimo relativo.

(b) Sea $f(x) = |x|,\ x \in \mathbb{R}$ pruebe que $x_0 = 0$ es un punto de mínimo relativo (único punto extremo de f)

(c) Sea $f(x) = x^2,\ x \in [-1,2]$ pruebe que $x_0 = -1$ y $x_0 = 2$ son máximos locales; $x_0 = 2$ es máximo absoluto de f en $[-1,2]$ y $x_0 = 0$ es mínimo absoluto de f en $[0,2]$

22. Pruebe el teorema de Rolle en las siguientes funciones.

(a) $f(x) = \sqrt[3]{x^4} - 3\sqrt[3]{x},\ x \in [0,3]$

(b) $f(x) = \dfrac{x^2+4x}{x-7},\ x \in [2,6]$

(c) $f(x) = 6x^2 - x^3,\ x \in [0,6]$

23. Encuentre el punto c garantizado por el teorema del valor medio para la función

(a) $f(x) = \sqrt{x},\ x \in [0,2]$

(b) $f(x) = \dfrac{2x-1}{3x-4},\ x \in [0,3]$

(c) $f(x) = x^3 + 2x^2 + 1,\ x \in [-1,2]$

24. Calcule los puntos críticos, si existen, de las funciones siguientes

(a) $f(x) = x^3 + 2x^2 + 5x + 3$

(b) $f(x) = e^x - x$

(c) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-4}$

(d) $f(x) = \operatorname{sen}(x) - \cos(x)$

(e) $f(x) = \sqrt[3]{(x^2-9)^2}$

(f) $f(x) = |2x-3|$

(g) $f(x) = -x^2 + 4x + 5$

(h) $f(x) = x + \dfrac{1}{x^2}$

25. Usando el criterio de la primera derivada, determine los intervalos de crecimiento, decrecimiento para las funciones siguientes

    (a) $f(x) = 6x^4 - 6x^2 - 12x$
    (b) $f(x) = x^2 \ln(x)$
    (c) $f(x) = xe^{-x}$
    (d) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
    (e) $f(x) = \operatorname{sen}(x)$

26. Para las siguientes funciones estudie máximos y mínimos relativos

    (a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$
    (b) $f(x) = (x^2-1)^4$
    (c) $f(x) = \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{4}{3}x^3$
    (d) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x}$
    (e) $f(x) = \sqrt[3]{6x^2} - 2x$
    (f) $f(x) = (x+2)^2(x-1)^3$
    (g) $f(x) = x - 3 + \dfrac{2}{x+1}$
    (h) $f(x) = \dfrac{4x}{x^2+4}$

27. Para las siguientes funciones calcule los puntos de inflexión y estudie la concavidad

    (a) $f(x) = -x^3 + 5x^2 - 6x$
    (b) $f(x) = \dfrac{1}{x+4}$
    (c) $f(x) = x^2 - \dfrac{1}{3x^2}$
    (d) $f(x) = \dfrac{x^2+9}{(x-3)^2}$
    (e) $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$
    (f) $f(x) = 2xe^{-3x}$

28. Grafique las siguientes funciones considerando: intervalos de crecimiento,decrecimiento,máximos y mínimos, concavidad, puntos de inflexión, asíntotas.

    (a) $f(x) = -x^2 + 4x + 2$
    (b) $f(x) = \dfrac{3x+1}{(x+2)(x-3)}$
    (c) $f(x) = \dfrac{4}{\sqrt{x+2}}$
    (d) $f(x) = \ln(x^2+1)$
    (e) $f(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2}$
    (f) $f(x) = (x^4 - x^2)\ln(x)$
    (g) $f(x) = \dfrac{x^2-4x-5}{x-5}$
    (h) $f(x) = \dfrac{x^2}{e^{x^2}}$

29. Sea la función f definida en $\mathbb{R}$ por : $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Determinar las constantes a, b, c, d de modo que :

    a) La curva de f pasa por el punto origen $(0,0)$;

    b) La curva de f presente en el punto $(2,1)$ una tangente paralela al eje X;

    c) La curva de f presente en el punto $(2,1)$ una inflexión.

30. Encontrar el área del mayor triángulo isósceles que tenga un perímetro de 18cm.

31. Un espejo rectangular de 100cm de largo y 60cm de ancho se quiebra perdiendo en una de sus esquinas un triángulo de lados 15cm y 10cm respectivamente. Encuentre las dimensiones del espejo de mayor área que se puede construir a partir de éste.

32. Las bases de una escalera de tijera resbalan sobre una superficie horizontal lisa, de modo que su extremo superior desciende a velocidad $10cm = seg$. Los brazos de la escalera son de 2 metros de longitud. ¿Cómo varía la distancia entre las bases cuando ellas están a 1.2 mts?

33. Cierta cantidad de aceite fluye en el interior de un depósito en forma de cono invertido a razón de $3\pi m^3/min$. Si el depósito tiene un radio de 2.5m en su parte superior y una profundidad de 10m: ¿Qué tan rápido cambia dicha profundidad cuando tiene 8m?

34. Cualcule los siguientes límites utilizando la regla de L'Hopital

    a) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln(x)} - \frac{x}{\ln(x)}\right)$

    b) $\lim_{x\to 0}\frac{x-\text{sen}(x)}{x-\tan(x)}$

    c) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{\cos(x)-1}$

    d) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln(x)}\right)$

    e) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\text{sen}(x)}$

    f) $\lim_{x\to 0} x^x$

    g) $\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$

2.7. Aplicación de la derivada a la Economía

Las distintas funciones que hemos estudiado a lo largo de la asignatura cálculo diferencial se usan frecuentemente en Economía tales como las funciones de costo, oferta y otras.

Con la ayuda de la derivada estudiaremos algunos problemas del tipo económico. Las razones de cambio en economía no se miden con respecto al tiempo, lo hacen refiriéndose al beneficio marginal, ingreso marginal y costo marginal, con respecto al número de unidades producidas o vendidas.

2.7.1. Funciones lineales de costos, ingresos y ganancias

La conducción de una empresa, debe mantener un registro constante de los costos de operaciones, de los ingresos resultantes de la venta de productos y servicios, para ello la empresa necesita tomar medidas sobre la función lineal de costos totales, la función de ingresos y la función ganancia. En la producción de una empresa de cualquier bien, se tiene dos tipos de costos:

Definición 2.7.1.

1. ***Costos fijos***, se le considera sin importar la cantidad producida del artículo, es decir no depende del nivel de producción; por ejemplo las rentas, interés sobre préstamo y salarios de administración.

2. ***Costos variables***, depende del nivel de producción, es decir de la cantidad de artículos producidos; por ejemplo costos de materiales y de la mano de obra.

3. El ***costo total*** está dado por

$$\boxed{\text{COSTO TOTAL = COSTOS VARIABLES + COSTOS FIJOS}}$$

4. Cuando el ***costo variable por unidad del artículo es constante***, los costos variables son proporcionales a la cantidad de artículos producidos.

5. Si m representa el costo por unidad, entonces los costos totales de producir x unidades de artículos es US\$ mx y si los costos fijos son de US \$$b$, entonces el costo total es

$$\boxed{\text{COSTO TOTAL} = y_c = C(x) \; = \; mx+b}$$

6. En economía el ***Costo marginal***, es la razón de cambio del costo, es importante en la administración al tomar decisiones en áreas como control de costos, fijación de precios y planeación de la producción.

7. Para el costo total $C(x) = mx+b$ la pendiente m representa el costo marginal, también se define como ***la razón de cambio promedio***. Si $C(x)$ es el costo total de fabricar x artículos, entonces el costo promedio por artículo está dado por

$$\boxed{\overline{C(x)} = \frac{C(x)}{x}}$$

Observación 2.7.1.

1. la pendiente m representa el ***costo variable por unidad***
2. La función $C(x) = mx + b$ representa la ecuación de una recta, de pendiente m que intersecta con el eje y en b.
3. El costo fijo para $C(x)$ se calcula reemplazando el valor $x = 0$ en $C(x) = C(0)$ obteniendo costo fijo igual a b.
4. Supóngase que una empresa tiene costos fijos por b dólares y costo de producción de m dólares por unidad y un precio de venta de k dólares por unidad entoces la función de ingreso $I(x)$ está dado

$$\boxed{y_I = I(x) = kx}$$

donde x es el número de unidades de un producto fabricado o vendido.

5. Recuerde que

$$\boxed{\text{PRECIO VENTA O INGRESO} = \text{PRECIO COSTO} + \text{GANANCIA}}$$

Sea $C(x) = mx + b$ la función costo y $I(x)$ es la función de ingreso, entonces la ***función de ganancia o de utilidades*** esta dado por

$$\boxed{G(x) = I(x) - C(x) = (k-m)x - b}$$

donde x representa la cantidad de unidades del artículo producidos y vendidos.

Ejemplo 2.7.2. El costo variable de procesar un kilo de granos de café es de $US\$0{,}5$ y los costos fijos por día son $US\$300$

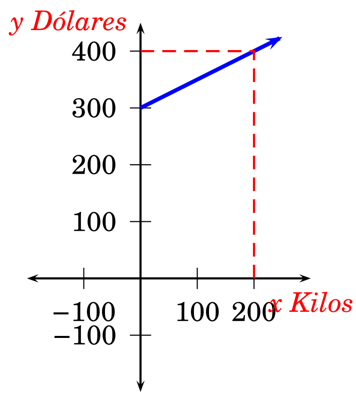
(a) Dé la ecuación del costo lineal y dibujar su gráfica

(b) Determine el costo de procesar 1.000 kilos de granos de café por un día.

Resolución: ►

(a) **Función lineal**
$C(x) = y_c$ representa el costo de procesar x kilos de granos de café por día, entonces el modelo $C(x) = y_c = mx + b$ se utiliza para el calculo donde $m = 0{,}5$ es el costo variable por unidad y $b = 300$ es el costo fijo, por lo tanto $C(x) = y_c = 0{,}5x + 300$.

Gráfico



Note que la gráfica está en el primer cuadrante ya que $x \geq 0$ y por lo tanto $y_c \geq 0$

(b) *Al reemplazar $x = 1000$ en la ecuación lineal se obtiene $C(x) = 0{,}5(1000) + 300 = 800$ por lo tanto el costo de procesar 1000 kilos de granos de café al día será de $800*

◄

Ejemplo 2.7.3. Una empresa fabricante de filtros para agua, tiene costos fijos por $20000, costos de producción de $20 por unidad y un precio de venta unitario de $30. Determinar las funciones de costos, ingresos y ganancias para la empresa.

Resolución: ► *Sea x el número de unidades producidas y vendidas.*
La función de costo es: $C(x) = 20x + 20000$
La función ingreso es: $I(x) = 30x$
La función ganancia es: $G(x) = I(x) - C(x) = 30x - (20x + 20000) = 10x - 20000$ ◄

Definición 2.7.2.

1. Se define ***función costo*** $C(x)$ al costo de producir x unidades de cierto producto.
2. El ***costo marginal*** es la razón de cambio de la función costo $C(x)$ respecto de x, es decir es la derivada de la función costo $C_m(x) = C'(x)$.
3. La función ***costo promedio*** es $C_p(x) = \dfrac{C(x)}{x}$, representa el costo por unidad cuando se producen x unidades.
4. La ***función demanda o de precio*** es el precio por unidad que la empresa impone si vende x unidades.
5. Se define ***función de ingreso o de ventas*** por $I(x) = x \cdot p(x)$
6. Se define ***función de ingreso marginal*** como la razón de cambio del ingreso con respecto al número de unidades vendidas, se denota $I_m(x) = I'(x)$.
7. Se define la ***función utilidad*** por $U(x) = I(x) - C(x)$ cuando se evnden x unidades.
8. Se define la ***función utilidad marginal*** a la derivada de la función utilidad, es decir $U_m(x) = U'(x)$
9. Si el costo promedio es un mínimo entonces el costo marginal es igual al costo promedio $(C_m(x) = C_p(x))$
10. Si la utilidad es un máximo entonces el ingreso marginal es igual al costo marginal $(I_m(x) = C_m(x))$

Ejemplo 2.7.4. Una compañía estima que el costo, en dólares, para producir x artículos es $C(x) = 2600 + 2x + 0{,}001x^2$.

1. Encuentre la función costo promedio y costo marginal.
2. Encuentre el costo, costo promedio y costo marginal para producir $1000, 2000$ y 3000 artículos.
3. ¿A cuál nivel de producción el costo promedio será el más bajo y cuál es este costo promedio mínimo?.

Resolución: ►

1. **La función costo promedio es**

$$\begin{aligned} C_p(x) &= \frac{C(x)}{x} = \frac{2600+2x+0{,}001x^2}{x} \\ &= \boxed{\frac{2600}{x}+2+0{,}001x} \end{aligned} \quad (2.7)$$

La función costo marginal es $\boxed{C'(x) = 2+0{,}002x}$

2.

x	$C(x)$	$C_p(x)$	$C'(x)$
1000	*5600*	*5.6*	*4*
2000	*10600*	*5.3*	*6*
3000	*17600*	*5.87*	*8*

3. **Vamos encontrar el nivel de producción** *Para que el costo promedio sea mas bajo se debe minimizar el costo promedio es decir* $\boxed{C'(x) = C_p(x)}$ *esto es:*

$$2+0{,}002x = \frac{2600}{x}+2+0{,}001x$$

de donde obtenemos $x = \sqrt{2600000} \approx 1612$

Vamos encontrar el costo promedio mínimo $C_p(1612) = \dfrac{2600}{1612} + 2 + 0{,}001(1612) =$ $5{,}22$ *por artículo.*

◄

Ejemplo 2.7.5. Una compañía desea determinar la cantidad de unidades que debe producir para maximizar la utilidad. Esta compañía utiliza las siguientes funciones de costo y de demanda

$$C(x) = 84+1{,}26x-0{,}01x^2+0{,}00007x^3 \qquad p(x) = 3{,}5-0{,}01x$$

Resolución: ►

Cálculo de la función de ingreso marginal *Se obtiene primero la función ingreso* $I(x) = xp(x) = 3{,}5x-0{,}01x^2$ *después se deriva y se obtiene la función ingreso marginal* $I_m(x) = 3{,}5-0{,}02x$

Cálculo de la función costo marginal $C_m(x) = C'(x) = 1{,}26-0{,}02x+0{,}00021x^2$ *esta es una ecuación cuadrática y se resuelve utilizando la fórmula* $ax^2+bx+c = 0 \Longrightarrow x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, *obteniendo así el valor de* $x \approx 103$

◄

Ejemplo 2.7.6. Sea $C(x) = 50x+10000$ el costo total, determine el costo marginal.

Resolución: ► $C_m(x) = C'(x) = 50$, *note que en este caso el costo marginal es igual al precio del producto de cada unidad del producto.* ◄

Ejemplo 2.7.7. Un fabricante de LCD desea vender un promedio de 1000 LCD'S al mes a 50 millones. El fabricante piensa que puede vender 100 LCD'S adicionales al mes por cada 2 millones de reducción en el precio. ¿Cuál es el precio que produce el mayor ingreso?