EJERCICIO : Definir si es posible una aplicación lineal $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ cuyo Kernel esté generado por $\{(1,3)\}$.

Proposición 2.2.

Sea $T : V \to W$ aplicación lineal $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ base de V, entonces $\{T(v_1), \ldots, T(v_n)\}$ genera a $Im(T)$.

Proposición 2.3.

Sea $T : V \to W$ aplicación lineal. Si $B = \{T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_n)\}$ es **l.i.**, entonces $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ también es **l.i.**.

Observación 2.2.

De la proposición anterior, tenemos: Sea $T : V \to W$ aplicación lineal. Si $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es **l. d.**, entonces $\{T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_n)\}$ también es **l.d**

Proposición 2.4.

Sea $T : V \to W$ aplicación lineal. Si $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es **l.i.** y T es $1-1$, entonces $\{T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_n)\}$ es **l.i.**

2.1.2. Composición de Aplicaciones Lineales

Sean U, V, W espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$.
Si $F : U \to V$ y $G : V \to W$ son aplicaciones lineales, entonces:

$$G \circ F : U \to W \quad \text{es también Aplicación Lineal}$$

EJERCICIO : Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. $T(x,y) = (x-y, x+y)$
Calcular $2T^2 + 4T - 3$.

2.2 Matriz Asociada a una Aplicación Lineal

2.2.1. Representación Matricial de una Transformación lineal

Sean V, W espacios vectoriales de dimensión finita sobre un mismo cuerpo $\mathbb{K}$, $T : V \to W$ una transformación lineal, $B_1 = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base de V y $B_2 = \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ una base de W.

Los vectores $T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_n)$ están en W y por lo tanto, cada uno de ellos se puede expresar como una combinación lineal de los vectores de la base B_2:

$$\begin{array}{rcl} T(v_1) & = & a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \cdots + a_{m1}w_m \\ T(v_2) & = & a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + \cdots + a_{m2}w_m \\ \vdots & = & \vdots \\ T(v_n) & = & a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + \cdots + a_{mn}w_m \end{array}$$

En otras palabras

$$[T(v_1)]_{B_2} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}; \qquad \cdots \qquad ; [T(v_n)]_{B_2} = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

De donde tenemos que:

Definición 2.7.

Se llama representación matricial de T en las bases B_1 y B_2 o matriz asociada a T en las basesB_1 y B_2, a la matriz que representaremos por $[T]_{B_1}^{B_2}$ y cuya i-ésima columna son las coordenadas del vector $T(v_i)$ en la base B_2.
Esto es,

$$\begin{array}{rcl} [T]_{B_1}^{B_2} & = & ([T(v_1)]_{B_2}, [T(v_2)]_{B_2}, \cdots, [T(v_n)]_{B_2}) \\ & & \\ & = & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{array}$$

Ejemplo 2.6.

Consideremos la transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$T(x, y) = (4x - 2y, 2x + y, x + y) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

y las bases $B_1 = \{(1,0),(0,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ y $B_2 = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$.
Hallar la matriz asociada a T en dichas bases:

Solución:

$$\begin{aligned} T(1,0) = (4,2,1) &= 4(1,0,0) + 2(0,1,0) + 1(0,0,1) \\ T(0,1) = (-2,1,1) &= -2(1,0,0) + 1(0,1,0) + 1(0,0,1) \end{aligned}$$

Luego, la matriz asociada a T es:

$$[T]_{B_1}^{B_2} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2.7.

Consideremos la transformación lineal $T : P_2[t] \to \mathbb{R}^2$ tal que $p(t) = at^2+bt+c$, $\forall t \in \mathbb{R}$, se cumple $T(p) = (2a + b, a + b + 4c)$, y las bases $B_1 = \{p_1, p_2, p_3\}$ de $P_2[t]$ donde $p_1(t) = t^2$, $p_2(t) = t$, $p_3(t) = 1$, $\forall t \in \mathbb{R}$; y $B_2 = \{(1,1),(1,0)\}$ de R^2.
Hallar la matriz asociada a T en dichas bases:

Solución: Se tiene que:

$$\begin{aligned} T(t^2) &= (2,1) = 1(1,1,) + 1(1,0) \\ T(t) &= (1,1) = 1(1,1) + 0(1,0) \qquad \Rightarrow \qquad [T]_{B_1}^{B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix} \\ T(1) &= (0,4) = 4(1,1) - 4(1,0) \end{aligned}$$

Observación 2.3.

Si $dim(V) = n$ y $dim(W) = m$ la matriz asociada tiene dimensión $m \times n$.

Ejemplo 2.6.

Consideremos la transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$T(x,y) = (4x - 2y, 2x + y, x + y) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

y las bases $B_1 = \{(1,0),(0,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ y $B_2 = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$. Hallar la matriz asociada a T en dichas bases:

Solución

$$T(x,y) = (4x - 2y, 2x + y, x + y)$$

$$T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \text{Como } B_1 = \{\underset{v_1}{(1,0)}, \underset{v_2}{(0,1)}\}$$

$$T(v_1) = T(\overset{x,y}{1,0}) = (4(1) - 2\cdot 0, 2(1) + 0, 1 + 0)$$

$$= (4,2,1) = 4(1,0,0) + 2(0,1,0) + 1(0,0,1)$$

$$T(v_2) = T(\overset{x,y}{0,1}) = (4(0) - 2(1), 2\cdot 0 + 1, 0 + 1)$$

$$= (-2,1,1) = -2(1,0,0) + 1(0,1,0) + 1(0,0,1)$$

La matriz asociada a la T.L.

$$[T]_{B_1}^{B_2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2.7.

Consideremos la transformación lineal $T : P_2[t] \to \mathbb{R}^2$ tal que $p(t) = at^2+bt+c$, $\forall t \in \mathbb{R}$, se cumple $T(p) = (2a + b, a + b + 4c)$, y las bases $B_1 = \{p_1, p_2, p_3\}$ de $P_2[t]$ donde $p_1(t) = t^2$, $p_2(t) = t$, $p_3(t) = 1$, $\forall t \in \mathbb{R}$; y $B_2 = \{(1, 1), (1, 0)\}$ de R^2.
Hallar la matriz asociada a T en dichas bases:

Solución: $T(p) = (2a+b, a+b+4c)$

$a=1$, $b=0$ y $c=0$

$p(t) = at^2 + bt + c$; $p_1(t) = t^2$

- $T(p_1(t)) = T(t^2) = (2(1)+0, 1+0+4.0)$
$= (2,1) = 1(1,1) + 1(1,0)$

- $p_2(t) = t \Rightarrow a=0$, $b=1$, y $c=0$

$T(p_2(t)) = T(t) = (2.0+1, 0+1+4.0)$
$= (1,1) = 1(1,1) + 0(1,0)$

- $P_3(t) = 1 \Rightarrow a=0$, $b=0$, $c=1$

- $T(p_3(t)) = T(1) = (2.0+0, 0+0+4(1))$

$= (0,4) = 4(1,1) - 4(1,0)$

la matriz Asociada a la T.L.

$$[T]_{B_1}^{B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$T : V \to W.$

B_2

B_1

Observación 2.4.

La matriz $[T]_{B_1}^{B_2}$ como recién vimos, queda completamente determinada conocidas la transformación lineal T y las bases B_1 y B_2 del dominio y codominio respectivamente.

Teorema 2.4.

Sean V, W dos espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo $\mathbb{K}$, $B_1 = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ y $B_2 = \{w_1, w_2, \cdots, w_m\}$ bases ordenadas de V y W respectivamente; y $T : V \to W$ una transformación lineal. Entonces se cumple que

$$[T(v)]_{B_2} = [T]_{B_1}^{B_2} \cdot [v]_{B_1}.$$

Ejemplo 2.8.

Dadas $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ y las bases $B_1 = B_2 = \{(1,0,0), (1,1,0), (1,1,1)\}$ tal que

$$[T]_{B_1}^{B_2} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix},$$

Hallar $T(2, 0, -1)$.

Solución: Usando el teorema-2.4: $[T(v)]_{B_2} = [T]_{B_1}^{B_2} \cdot [v]_{B_1}$, primero calculamos $[(2,0,-1)]_{B_1}$

$$(2,0,-1) = \alpha(1,0,0) + \beta(1,1,0) + \gamma(1,1,1) \Rightarrow \begin{array}{rcr|} \alpha + \beta + \gamma & = & 2 \\ \beta + \gamma & = & 0 \\ \gamma & = & -1 \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \alpha = 2 \\ \beta = 1 \\ \gamma = -1 \end{array}$$

Así: $[(2,0,-1)]_{B_1} = (2, 1, -1)$ y $[T(2,0,-1)]_{B_2} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$

De esto se tiene que:

$$T(2,0,-1) = (1)(1,0,0) + (3)(1,1,0) + (9)(1,1,1) = (13, 12, 9)$$

Observación 2.5.

Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$, podemos considerar la transformación lineal $T_A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, definida por

$$T_a(x) = A \cdot x, \quad \text{donde } x \in \mathbb{R}^m \text{ considerado como vector columna}$$

Si C_m y C_n son bases canónicas de $\mathbb{R}^m$ y $\mathbb{R}^n$ respectivamente, entonces:

$$[T]_{C_m}^{C_n} = A$$

Esto es, la matriz asociada es la misma matriz A de definición.

Ejemplo 2.9.

Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ y sean $C_2 = \{(1,0),(0,1)\}$ $C_3 = \{(1,0,0),$ $(0,1,0),(0,0,1)\}$ bases de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, respectivamente. Entonces.

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Luego,

$$[T]_{C_2}^{C_3} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = A$$

Observación 2.6.

Sean $T : V \to W$ transformación lineal, con $dim(V) = n$ y $dim(W) = m$. Entonces si B_1 es base de V y B_2 es base de W, se tiene que:

$$[T]_{B_1}^{B_2} \in \mathcal{M}_{m\times n}$$

es decir, la matriz asociada es de dimensión $m \times n$.