GUÍA DE EJERCICIOS DE MATRICES Y SISTEMAS DE ECUACIONES

Resultados de aprendizaje
Utiliza matrices y sus propiedades para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

Matrices

1. Sean las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} -5 & -1 & 3 \\ -3 & 7 & 0 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}; D = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

Efectuar las operaciones indicadas si es que está definida.

a) $4A$ *c*) $3C - 4D$ *e*) CD

b) $-5A + 2B$ *d*) $(3B)(5C)$ *f*) AC

2. Sea $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

a) Hallar A^2 *b*) Calcular A^4 *c*) Calcular A^8

3. Sea $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ y $x = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}$, Calcular Ax y xA.

4. Encontrar los valores de α y β tales que las matrices conmuten, esdecir $AB = BA$.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & \beta \end{bmatrix} \qquad y \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

5. Llenar todas las entradas faltantes, de modo que se obtenga una matriz simétrica.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & \square & 3 \\ \square & 3 & \square & 6 \\ 1 & -2 & 4 & \square \\ \square & \square & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

6. Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$ y $f(x) = x^2 + 2x - 11$. Evaluar $f(A)$.

7. Encontrar todas las matrices $M = \begin{bmatrix} x & y \\ w & z \end{bmatrix}$ que conmuten con $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

8. ¿Pueden existir matrices cuadradas de orden 2×2, A y B, tales que verifiquen la ecuación $A \cdot B - B \cdot A = I$, donde I es la matriz identidad?

9. Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. Se pide:

   a) Demostrar que $A^2 = 2A - I$, donde I es la matriz identidad 2×2.

   b) Expresar A^3 y A^4 en función de A.

   c) Calcular A^{100}.

10. Calcule el determinante de las siguientes matrices.

$$a)\ \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -5 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad c)\ \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & -3 & 4 \end{pmatrix} \qquad e)\ \begin{pmatrix} 3 & -6 & 3 & 9 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -4 & 2 \\ 5 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$b)\ \begin{pmatrix} x & y & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad d)\ \begin{pmatrix} a & 0 & b & a \\ 0 & a & 0 & b \\ b & 0 & a & 0 \\ a & b & 0 & a \end{pmatrix} \qquad f)\ \begin{pmatrix} 2a & 1 & 2 & -1 \\ a & 3 & 2 & 1 \\ -a & 1 & 2 & -1 \\ 3a & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

11. Sean $A, B \in \mathcal{M}_3$, tales que $|A| = -1$,$|B| = 2$. Calcular:

$$a)\ |A + A| \qquad c)\ |2B| \qquad e)\ |A^2| \qquad g)\ |A^t| \qquad i)\ |(AB)^2|$$

$$b)\ |B^t A| \qquad d)\ |\tfrac{1}{2}B| \qquad f)\ |-B| \qquad h)\ |(B^t A^t B)^t|$$

12. Comprobar, sin desarrollar, que son nulos los siguientes determinantes:

$$a)\ \begin{vmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 4 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \qquad b)\ \begin{vmatrix} 2 & 7 & 11 \\ 4 & 5 & 13 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} \qquad c)\ \begin{vmatrix} 3 & 5 & 6 \\ -1 & 3 & 2 \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

13. Calcular el determinante de la matriz $A = (a_{ij})_{i,j \in \{1,\dots,n\}}$, donde $a_{ij} = |i - j|$.

14. Para qué valores de $x \in \mathbb{R}$, la matriz es invertible:

$$a)\ \begin{pmatrix} x^2 + x & x + 1 \\ x - 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad b)\ \begin{pmatrix} x^2 - 1 & x + 2 \\ x^2 - 2x + 3 & x \end{pmatrix}$$

15. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, demuestra que su inversa y su traspuesta coinciden.

16. Encuentre la inversa si existe de las siguientes matrices.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & -4 & 5 \\ -2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

17. Encontrar los valores de α tales que la matriz $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & \alpha & -1 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ sea invertible.

18. Resolver la ecuación matricial $AX = B$, siendo $A = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 6 \\ 4 & 6 & -2 \\ 2 & 10 & 4 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

19. Resolver la ecuación matricial $AX = BX + C$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

20. Determinar la matriz X que satisface la ecuación:

$$3X + I_3 = AB - A^2,$$

siendo

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

e I_3 la matriz identidad de orden 3.

21. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Hallar, si existe, una matriz B tal que $A^2 - A = AB$.

22. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Resolver la ecuación matricial: $A^2X - A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

23. En cada una de las siguientes afirmaciones, verifique si son verdaderas o falsas.

   a) C invertible, $AC = BC \Rightarrow A = B$.

b) C invertible, $AC = \Theta \Rightarrow A = \Theta$.

c) A^2 invertible, $\Rightarrow A$ invertible.

d) A, B invertible, $\Rightarrow A + B$ invertible.

e) A invertible, $\Rightarrow A + A^t$ invertible.

f) A invertible, $\Rightarrow A^2$ invertible.

g) A, B no singulares (invertibles), $\Rightarrow A + B$ no singulares.

24. Calcular la inversa de las siguientes matrices:

$$a)\ \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -2 & 5 & 11 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad c)\ \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & 5 & 5 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad e)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 6 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$b)\ \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -2 & 5 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad d)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 3 & 6 & 19 \\ 1 & 2 & 5 & 11 \\ 1 & 1 & 2 & 10 \end{pmatrix} \qquad f)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & 6 & 14 \\ 1 & 2 & 5 & 9 \\ 1 & 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

Rango de Matrices

1. Determinar el rango de las siguientes matrices.

$$a)\ \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad c)\ \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 & 1 \\ 1 & 6 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad e)\ \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \\ 3 & 7 & 11 & 15 & 19 \\ -10 & -8 & -6 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$b)\ \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad d)\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad f)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Estudiar el rango de las siguientes matrices según el valor del parámetro m.

$a)$ $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & m \end{pmatrix}$ $c)$ $\begin{pmatrix} 5 & -5 & -6 \\ -5 & 3 & -1 \\ 0 & m & 7 \end{pmatrix}$ $e)$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & 3 \\ 4 & 1 & -m \end{pmatrix}$

$b)$ $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & m & 2 \end{pmatrix}$ $d)$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & m \end{pmatrix}$ $f)$ $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 10 & 3 & m \end{pmatrix}$

3. Dada la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & m \\ m & 2 & -1 \end{pmatrix},$$

donde m es un parámetro real, se pide:

$a)$ Determinar el rango de M según los distintos valores de m.

$b)$ Calcular el determinante de M si $m = 3$. Justificar si esa matriz tiene inversa.

$c)$ Dar un valor de m para que la matriz M sea singular (no admita inversa).

Sistemas de Ecuaciones

1. Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones cuando corresponda:

$a)$ $\begin{cases} x + 2y - z &= 4 \\ 3x + 4y - 2z &= 7 \end{cases}$ $c)$ $\begin{cases} x - 2y + z &= 5 \\ 2x - y - 2z &= -1 \\ x + 3y + z &= 0 \end{cases}$

$b)$ $\begin{cases} x + 3y - 5z &= 1 \\ -2x - 3y + 10z &= 1 \\ -x + z &= 0 \end{cases}$ $d)$ $\begin{cases} x + y &= 4 \\ 2x + 3y &= 7 \\ 3x - 2y &= 11 \end{cases}$

2. Estudie las soluciones de los siguientes sistemas de ecuaciones lineales dependiendo

de los parámetros α y β.

$$a)\begin{cases} 2x - 3y + z &= 0 \\ x - \alpha y - 3z &= 0 \\ 5x + 2y - z &= 0 \end{cases} \qquad c)\begin{cases} \alpha x + \beta y + z &= 1 \\ x + \alpha\beta y + z &= \beta \\ x + \beta y + \alpha z &= 1 \end{cases}$$

$$b)\begin{cases} \alpha x + y + z &= \alpha^2 \\ x - y + z &= 1 \\ 6x - y + z &= 3\alpha \end{cases} \qquad d)\begin{cases} \alpha x - y + z &= 0 \\ x + 2y - \alpha z &= 0 \\ x + 2y - z &= 0 \end{cases}$$

3. Determine los valores de k para cada uno de los siguientes sistemas, de modo que:

$$a)\begin{cases} x + y - z &= 1 \\ 2x + 3y\ kz &= 3 \\ x + ky + 3z &= 2 \end{cases} \qquad b)\begin{cases} x + 2y - 3z &= 4 \\ 3x - y + 5z &= 2 \\ 4x + y + (k^2 - 14)z &= k + 2 \end{cases}$$

a) Tenga solución única.

b) No tenga solución.

c) Infinitas soluciones.

4. Un agente secreto sabe que 60 equipos aéreos, que consisten en aviones de combate y bombarderos, están estacionados en cierto campo aéreo secreto. El agente quiere determinar cuántos de los 60 equipos son aviones de combate y cuántos son bombarderos. Existe un tipo de cohete que llevan ambos aviones; el de combate lleva seis de ellos y el bombardero solo dos. El agente averigua que se requieren 250 cohetes para armar a todos los aviones del campo aéreo. Aún más, escucha que se tiene el doble de aviones de combate que de bombarderos en la base. Calcule el número de aviones de combate y bombarderos en el campo aéreo o muestre que la información del agente debe ser incorrecta ya que es inconsistente.

5. Un granjero da de comer a su ganado una mezcla de dos tipos de alimento. Una unidad estándar del alimento A proporciona a un novillo 10 % del requerimiento diario de proteínas y 15 % del de carbohidratos. Una unidad estándar del alimento tipo B contiene 12 % del requerimiento diario de proteínas y 8 % del de carbohidratos. Si el granjero quiere alimentar a su ganado con el 100 % de los requerimientos mínimos de proteínas y carbohidratos, ¿cuántas unidades de cada tipo de alimento debe dar a un novillo al día?

6. Un comerciante tiene dos clases de aceite, la primera de 6$ litro y la segunda de 7,2$ litro. ¿Cuántos litros de cada clase hay que poner para obtener 60 litros de mezcla a 7$ litro?

7. Jorge invita a sus amigos al cine. Si todos ingresan a platea, le van a faltar x miles de pesos pues cada entrada vale y miles de pesos, pero si entran a platea alta le va a sobrar m miles de pesos pues cada entrada vale n miles de pesos, ¿Cuántas personas conformaban el grupo?

8. Un joyero tiene dos lingotes de oro, con un 80 % de pureza y el otro con un 95 % de pureza. ¿cuánto debe fundir de cada uno para obtener un lingote de 5 Kg con un 86 % de pureza?

9. Resolver los siguientes ejercicios mediante la Regla de Cramer,

$$a)\begin{cases} 3x - 4y &= -5 \\ 2x + y &= 4 \end{cases} \qquad b)\begin{cases} 4x + 5y &= 2 \\ 11x + y + 2z &= 3 \\ x + 5y + 2z &= 1 \end{cases}$$

$$c)\begin{cases} x + y - 2z &= 1 \\ 2x - y + z &= 2 \\ x - 2y - 4z &= -4 \end{cases} \qquad d)\begin{cases} x - 3y + z &= 4 \\ 2x - y &= -2 \\ x - 3z &= 0 \end{cases}$$