CÁLCULO LNTEGRAL- 220146

INGENIERÍA CIVIL INFORMÁTICA

Yrina Vera

05 de julio, 2021

INTEGRACIÓN POR PARTES

Sean $f, g\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones reales continuas. Si f' y g' son continuas sobre $[a,b]$ entonces

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)\,dx$$

Haciendo $u = f(x)$ y $v = g(x)$ la ecuacin interior asume la forma

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du$$

Observación.

☞ Para integrales $\int_a^b x^p e^{ax} dx$, considere

$$u = x^p \,, \quad dv = e^{ax} dx.$$

☞ Para integrales $\int_a^b x^p (\ln x)^q dx$, considere

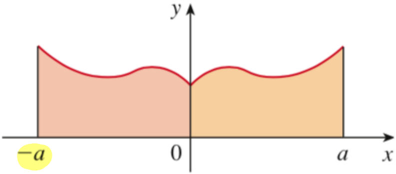
$$u = (\ln x)^q \,, \quad dv = x^p dx.$$

INTEGRALES DE FUNCIONES SIMÉTRICAS

Suponga que f es una función continua sobre $[-a, a]$.

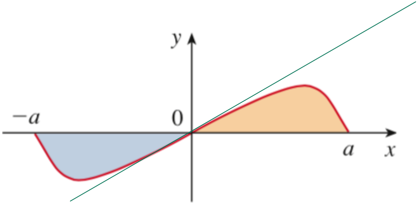
i) Si f es par, esto es, $f(-x) = f(x)$, entonces

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$



ii) Si f es impar, esto es, $f(-x) = -f(x)$, entonces

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0.$$



ÁREA ENTRE DOS CURVAS

Sean f y g funciones continuas sobre $[a,b]$. Entonces el área de la región S acotada por las curvas $y = f(x)$, $y = g(x)$ y las rectas $x = a$, $x = b$ es dada por

$$A(S) = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx$$

$$|x| = \begin{cases} x \,; & x \geq 0 \\ -x \,; & x < 0 \end{cases}$$

donde

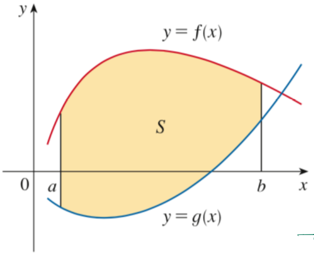
$$|f(x) - g(x)| = \begin{cases} f(x) - g(x)\,, & \text{si } f(x) \geq g(x) \\ g(x) - f(x)\,, & \text{si } f(x) < g(x) \end{cases}$$

$$-(f(x) - g(x))$$

$$-f(x) + g(x) = g(x) - f(x)$$

OBSERVACIÓN.

1. Si la gráfica de f se encuentra sobre la gráfica de g como en la siguiente figura



I

IV

y = +

y = −

entonces el área es

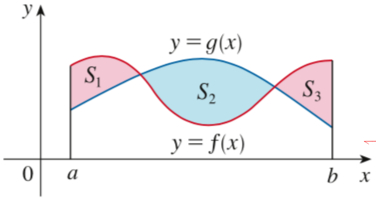
$$A(S) = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$$

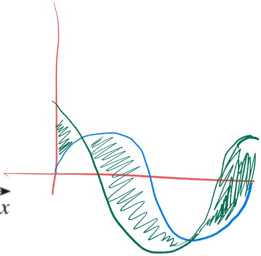
2. Si las gráficas de f y g se cortan entre sí sobre $[a,b]$ como en la siguiente figura

$y = \text{sen}\, x$

$y = \cos x$

$x = 0$





entonces el área es

$x = 2\pi$

$$A(S) = A(S_1) + A(S_2) + A(S_2)$$

Más precisamente,

$$A(S) = \int_a^{c_1} [f(x) - g(x)]\, dx + \int_{c_1}^{c_2} [g(x) - f(x)]\, dx + \int_{c_2}^{b} [f(x) - g(x)]\, dx$$

donde c_1 y c_2 son las abscisas de los puntos donde las grficas de f y g se intersectan.

ÁREA ENTRE DOS CURVAS CON RESPECTO A y

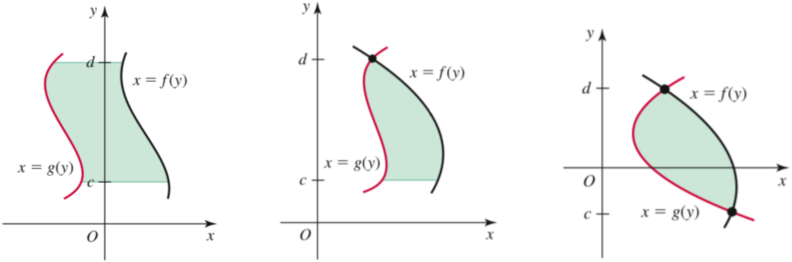
$y = f(x)$

Sean f y g funciones continuas sobre $[c, d]$ tales que

$$f(y) \geq g(y), \quad \forall y \in [c, d]$$

$x = g(y)$

es decir, la gráfica de f se encuentra a la derecha de la gráfica de g como en alguna de las siguientes figuras

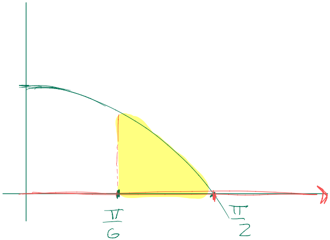


Entonces el área de la región S acotada por las curvas $x = f(y)$, $x = g(y)$ y las rectas $y = c$, $y = d$ es dada por

$$A(S) = \int_{c}^{d} [f(y) - g(y)]\, dy$$

EJEMPLOS

a. $y = \cos x$, $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{\pi}{2}$, $y = 0$.



$$A(S) = \int_{\pi/6}^{\pi/2} (\cos x - 0)\, dx$$

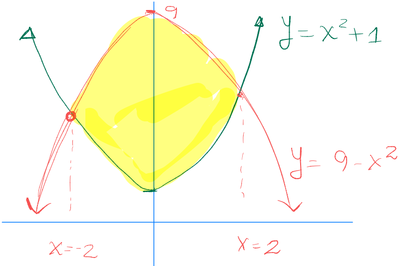
$$A(S) = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos x \, dx$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$A(S) = \operatorname{Sen} x \Big|_{\pi/6}^{\pi/2} = \operatorname{Sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) - \operatorname{Sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} u^2$$

EJEMPLOS

c. $y = 9 - x^2$, $y = x^2 + 1$.



$2\int_0^2 [9-x^2-(x^2+1)]\,dx$

1° Intersección

$$\begin{cases} y = 9 - x^2 \\ y = x^2 + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} 9 - x^2 &= x^2 + 1 \\ 0 &= 2x^2 - 8 \\ 0 &= 2(x^2-4) \\ 0 &= 2(x-2)(x+2) \end{aligned}$$

$x - 2 = 0 \quad \vee \quad x + 2 = 0$

$x = 2 \qquad\qquad x = -2$

2° Calcular el área

$$A(S) = \int_{-2}^{2} [9 - x^2 - (x^2+1)]\,dx = \int_{-2}^{2} (8 - 2x^2)\,dx = \left(8x - \frac{2}{3}x^3\right)\Big|_{-2}^{2}$$

$$A(s) = \int_{-2}^{2} (8 - 2x^2)\,dx = 8\int_{-2}^{2} dx - 2\int_{-2}^{2} x^2\,dx$$

$$A(s) = 8x\Big|_{-2}^{2} - \frac{2}{3}x^3\Big|_{-2}^{2}$$

$$A(s) = 8\left(2 - (-2)\right) - \frac{2}{3}\left((2)^3 - (-2)^3\right)$$

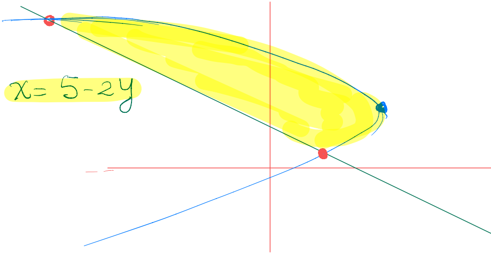
$$A(s) = 8(2+2) - \frac{2}{3}(8+8)$$

$$A(s) = 32 - \frac{32}{3}$$

$$A(s) = \frac{64}{3}\,u^2$$

EJEMPLOS

ñ. $x = 4y - y^2$, $x + 2y = 5$.



1º Intersección

$$4y - y^2 = 5 - 2y$$
$$0 = y^2 - 6y + 5$$
$$0 = (y-5)(y-1)$$

$y = 5$ v $y = 1$

$-x^2 + 4x$

2º Calcular área

$$A(S) = \int_1^5 [4y - y^2 - (5 - 2y)]\, dy = \int_1^5 (6y - y^2 - 5)\, dy$$

$$A(S) = \left(\frac{\cancel{6}y^2}{\cancel{2}} - \frac{y^3}{3} - 5y\right)\Big|_1^5 = 3(5^2 - 1^2) - \frac{1}{3}(5^3 - 1^3) - 5(5-1)$$
$$= \left(52 - \frac{124}{3}\right) u^2$$

$x = 4y - y^2$

$x = -(y^2 - 4y)$

$x = -[(y-2)^2 - 4]$

$x = -(y-2)^2 + 4$

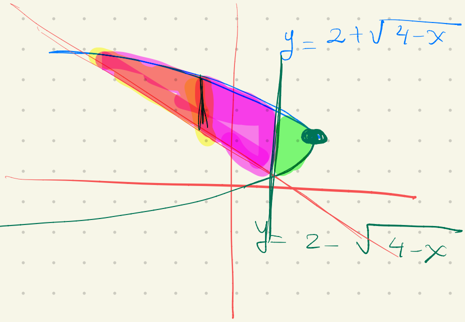
$(y-2)^2 = 4 - x$

$y - 2 = \pm\sqrt{4-x}$

$y = 2 \pm \sqrt{4-x}$

$y = 1 \Rightarrow x = 3$

$y = 5 \Rightarrow x = -5$



$x + 2y = 5$

$2y = 5 - x$

$y = \frac{5-x}{2}$

$$\int_{-5}^{3} \left(2+\sqrt{4-x} - \frac{5-x}{2}\right) dx$$

$+$

$$\int_{3}^{4} \left(2+\sqrt{4-x} - (2-\sqrt{4-x})\right) dx$$