PAUTA SUMATIVA 1 CÁLCULO DIFERENCIAL

RESULTADOS DE APRENDIZAJES	
1	Aplica la geometría analítica para la resolución de problemas de optimización en el ámbito de la ingeniería.

05 de Octubre de 2020

Nombre:..Rut:..................Sección:.......

Problema	1(25 puntos)	2 (25 puntos)	3 (25 puntos)	4 (25 puntos)	Total puntos	Nota (1-7)
Puntaje Obtenido						

1. **(25 puntos) Pregunta 1.**

(a) Indicar si las siguientes afirmaciones son verdadera o falsa, justificar adecuadamente.

i) $(x-1)^2+(y+5)^2-16=0$ es la ecuación de la circunferencia.

ii) La recta de ecuación $ay+c=0, \quad a,c\neq 0$ es una ecuación paralela al eje X.

iii) Si m_1 y m_2 son las pendientes de dos rectas perpendiculares, se cumple que $m_1=\frac{-1}{m_2}$.

iv) La pendiente de una recta paralela a $L: ax+by+c=0$ es $\frac{a}{b}$ con $a,b\neq 0$.

Solución

i) ***Verdadero***. *La ecuación de una circunferencia de centro $C(h,k)$ y radio r es:$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$. En este caso: $(x-1)^2+(y+5)^2=16$ cuyo radio es $r=4$ y centro $C(h,k)=C(1,-5)$.* *6 puntos*

ii) ***Verdadero***. *Pues, $ay+c=0 \longrightarrow y=\frac{-c}{a}$ es constante, luego la recta es paralela al eje X que pasa por el punto $(0,\frac{-c}{a})$.* *6 puntos*

iii) ***Verdadero***. *Dos rectas son perpendiculares si cumple que $m_1\cdot m_2=-1 \longrightarrow m_1=\frac{-1}{m_2}$.* *6 puntos*

iv) ***Falso***. *Ya que la pendiente de la recta L es $m_1=\frac{-a}{b}$ y la pendiente de la recta paralela es $m_2=\frac{-a}{b}$.* *7 puntos*

(b) Indicar si las siguientes afirmaciones son verdadera o falsa, justificar adecuadamente.

i) $x^2+(y-3)^2+9=0$ es la ecuación de la circunferencia.

ii) La recta de ecuación $ax+c=0, \quad a,c\neq 0$ es una ecuación paralela al eje Y.

iii) Si m_1 y m_2 son las pendientes de dos rectas paralelas se cumple que $m_1-m_2=0$.

iv) La pendiente de una recta perpendicular a $L: ax-by+c=0$ es $\frac{a}{b}$ con $a,b\neq 0$.

Solución

i) ***Falso***. *La ecuación de una circunferencia de centro $C(h,k)$ y radio r es:$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ En este caso: $(x-0)^2+(y-3)^2=-9$, pero r^2 no puede ser negativo; luego la ecuación dada no es la ecuación de una circunferencia.* *6 puntos*

ii) ***Verdadero***. *Pues, $ax+c=0 \longrightarrow x=\frac{-c}{a}$ es constante, luego la recta es paralela al eje Y que pasa por el punto $(\frac{-c}{a},0)$.* *6 puntos*

iii) ***Verdadero***. *Dos rectas son paralelas si $m_1=m_2 \longrightarrow m_1-m2=0$.* *6 puntos*

iv) ***Falso***. *La pendiente de la recta L es $m_1=\frac{a}{b}$ y la pendiente de la recta perpendicular es $m_1\cdot m_2=-1 \longrightarrow m_2=-\frac{b}{a}$.* *7 puntos*

2. **(25 puntos)** **Pregunta 2.**

a) **(25 puntos)** Hallar la ecuación de la recta que es paralela a la recta $L_1 : x - 3y + 2 = 0$ y que pasa por el centro de la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 4 = 0$

Solución

Sea m_1 la pendiente de L_1:

$$x - 3y + 2 = 0 \Rightarrow 3y = x + 2 \Rightarrow y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} \Rightarrow m_1 = \frac{1}{3} \quad \boxed{\textit{6 puntos}}$$

Sea m la pendiente de la recta L que debe cumplir que:

$$L \parallel L_1 \Leftrightarrow m = m_1 = \frac{1}{3} \quad \boxed{\textit{5 puntos}}$$

Hallaremos el centro de la circunferencia, para lo que debemos completar cuadrados

$$\begin{aligned} (x^2 + 4x) + (y^2 - 6y) &= -4 \\ (x^2 + 4x + 4) + (y^2 - 6y + 9) &= -4 + 4 + 9 \\ (x + 2)^2 + (y - 3)^2 &= 9 \end{aligned}$$

El centro de la circunferencia es $C(-2, 3)$ $\boxed{\textit{8 puntos}}$. La ecuación de la recta de pendiente $m = \frac{1}{3}$ y que pasa por el punto $C(-2, 3)$ es

$$y - 3 = \frac{1}{3}(x + 2) \Rightarrow y = \frac{1}{3}x + \frac{11}{3} \quad \boxed{\textit{6 puntos}}$$

b) **(25 puntos)** Hallar la ecuación de la recta que es perpendicular a la recta $L_1 : x + 12 - 4y = 0$ y que pasa por el centro de la circunferencia de $x^2 + y^2 - 2x + 8y + 1 = 0$

Solución *Sea m_1 la pendiente de L_1:*

$$4y = x + 12 \Rightarrow y = \frac{1}{4}x + 3 \Rightarrow m_1 = \frac{1}{4} \quad \boxed{\textit{6 puntos}}$$

Sea m la pendiente de la recta L que debe cumplir que:

$$L \perp L_1 \Leftrightarrow m \cdot m_1 = -1 \Rightarrow m = -4 \quad \boxed{\textit{5 puntos}}$$

Hallaremos el centro de la circunferencia, para lo que debemos completar cuadrados

$$\begin{aligned} (x^2 - 2x) + (y^2 + 8y) &= -1 \\ (x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 8y + 16) &= -1 + 1 + 16 \\ (x - 1)^2 + (y + 4)^2 &= 16 \end{aligned}$$

El centro de la circunferencia es $C(1, -4)$ $\boxed{\textit{8 puntos}}$. La ecuación de la recta de pendiente $m = -4$ y que pasa por el punto $C(1, -4)$ es

$$y + 4 = -4(x - 1) \Rightarrow y = -4x \quad \boxed{\textit{6 puntos}}$$

3. **(25 puntos)** **Pregunta 3.**

(a) **(25 puntos)**

i) Escribe la ecuación de la parábola con vértice en $(-2, 4)$ y un punto focal $(0, 4)$.

Solución

La parábola es de la forma

$$(y-k)^2 = 4p(x-h) \; \boxed{\textit{4 puntos}}$$

donde la distancia focal(distancia del vértice al foco) es 2 y el vértice es $(-2, 4)$. *Luego,*

$$(y-4)^2 = 4 \cdot 2(x-(-2)) \Longrightarrow (y-4)^2 = 8(x+2) \; \boxed{\textit{6 puntos}}$$

ii) Determinar las coordenadas de los vértices, los focos, y las longitudes del eje mayor y el eje menor de la elipse. Luego graficar en el plano cartesiano.

$$4x^2 + 9y^2 - 16x + 36y + 16 = 0$$

Solución

4x^2+9y^2-16x+36y+16=0 - Calculadora de secciones cónicas - Symbolab 04-10-20 08:39

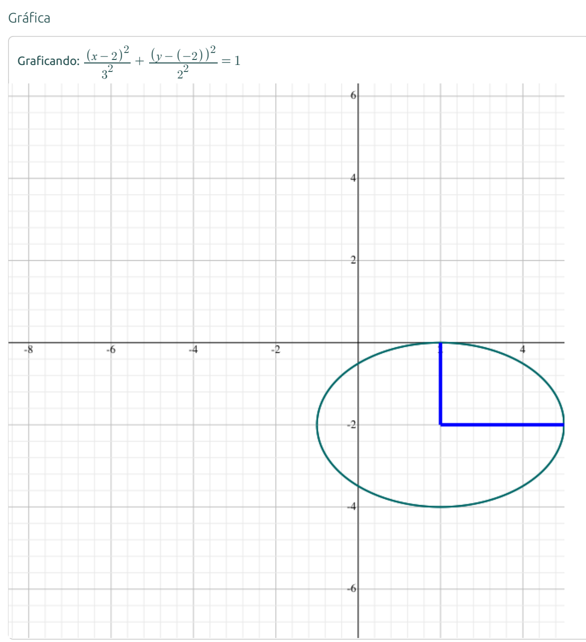

Figura 1: gráfico del problema

https://es.symbolab.com/solver/conic-sections-calculator/%204x%5E%7B2%7D%2B9y%5E%7B2%7D-16x%2B36y%2B16%3D0 Página 2 de 2

$$\begin{aligned}
(4x^2 - 16x) + (9y^2 + 36y) &= -16 \\
4(x^2 - 4x) + 9(y^2 + 4y) &= -16 \\
4(x^2 - 4x + 4 - 4) + 9(y^2 + 4y + 4 - 4) &= -16 \\
4(x^2 - 4x + 4) + 9(y^2 + 4y + 4) &= -16 + 16 + 36 \\
4(x^2 - 4x + 4) + 9(y^2 + 4y + 4) &= 36 \\
4(x-2)^2 + 9(y+2)^2 &= 36 \\
\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{4} &= 1
\end{aligned}$$

$\boxed{\textit{5 puntos}}$

El centro es $C(2, -2)$ $\boxed{\textit{1 puntos}}$, *y*

$$a^2 = 9 \Longrightarrow a = 3 \; \boxed{\textit{1 puntos}}$$

, luego,

$$a^2 = b^2 + c^2 \Longrightarrow c = \sqrt{9-4} = \sqrt{5}\ \boxed{\textit{1 puntos}}$$

Focos $F(2 \pm \sqrt{5}, -2)$ $\boxed{\textit{3 puntos}}$

Vértices $V(2 \pm 3, -2)$ *y* $V(2, -2 \pm 2)$ $\boxed{\textit{3 puntos}}$.

(b) **(25 puntos)**

i) Escribe la ecuación de la parábola con foco en $(-2, 4)$ y directriz $y = 9$.

Solución

Podemos ver que es una parábola vertical que se abre hacia abajo, ya que la directriz es horizontal y el foco está por debajo. Conocemos que la parábola tiene la forma

$$(x-h)^2 = -4p(y-k)\ \boxed{\textit{4 puntos}}$$

Dado que la longitud desde el foco a la directriz es 5*, y el vértice está exactamente entre el foco y la directriz, la distancia focal (distancia desde el vértice al foco) es* $\frac{5}{2}$*, luego el vértice es* $(-2, 6{,}5)$*. Por lo tanto la ecuación de la parábola es*

$$(x - -2)^2 = -4 \cdot \frac{5}{2}(y - 6{,}5) \Longrightarrow (x+2)^2 = -10(y - 6{,}5)\ \boxed{\textit{6 puntos}}$$

ii) Identificar el centro, vértices, focos y ecuaciones de las asíntotas para las siguientes hipérbolas, graficar:

$$9x^2 - 16y^2 - 144 = 0$$

Solución

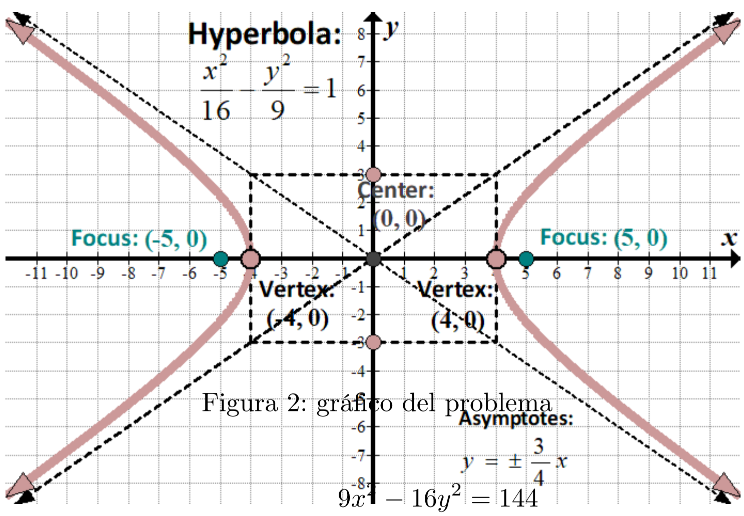

Figura 2: gráfico del problema

$$9x^2 - 16y^2 = 144$$

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

$\boxed{\textit{3 puntos}}$ *Luego,* $a^2 = 16 \Longrightarrow a = 4$*. El centro de la hipérbola es* $(0, 0)$ *entonces los vertices son*

$$V(\pm 4, 0)\ \boxed{\textit{3 puntos}}$$

. Por otro lado, $b^2 = 9 \Longrightarrow b = 3$*. Ahora para obtener los focos* $c^2 = a^2 + b^2 \Longrightarrow 9 + 16 = 25$*. Asi* $c = 5$ $\boxed{\textit{3 puntos}}$*. Por lo tanto los focos son* $F(\pm 5, 0)$*.* $\boxed{\textit{3 puntos}}$ *Finalmente las asintotas son* $y = \pm \frac{b}{a} = \pm \frac{3}{4}$ $\boxed{\textit{3 puntos}}$

4. **(25 puntos) Pregunta 4.**

a) **(25 puntos)** Un puente cuya abertura tiene forma semi-elíptica sobre un río tiene 28 metros de largo y una altura de 12 metros sobre el nivel del río. Determina la altura máxima que debe tener un barco de 14 metros de ancho para que pase con total seguridad bajo el puente.

Solución

Podemos deducir que $a = 14$ es el simieje mayor y $b = 12$ es el semieje menor, entonces la ecuación de

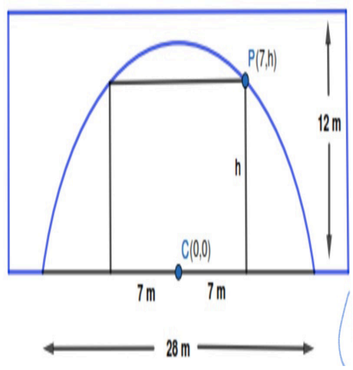

Figura 3: gráfico del problema
5 puntos

la elipse con centro en el origen $C(0,0)$ *6 puntos* *es :*

$$\frac{x^2}{14^2} + \frac{y^2}{12^2} = 1 \ \textit{8 puntos}$$

y dado que el punto $P(7,h)$ pertenece a la elipse, reemplazamos

$$\frac{7^2}{14^2} + \frac{h^2}{12^2} = 1 \Longrightarrow y^2 = 144(1 - \frac{49}{196}) \ \textit{8 puntos}$$

Así, $h = \sqrt{108}$ *3 puntos*. *Por lo tanto la altura máxima que deberia tener el barco para que pase es aprox $h = 10{,}39$.*

b) **(25 puntos)** El aceite que fluye de un grifo horizontal que está a 14 metros del piso describe una curva parabólica con vértice en el grifo. Si a 8 metros del piso, el flujo del aceite se ha alejado 6 metros de la recta vertical que pasa por el grifo, ¿a qué distancia de esta recta vertical tocará el aceite al suelo?
Solución

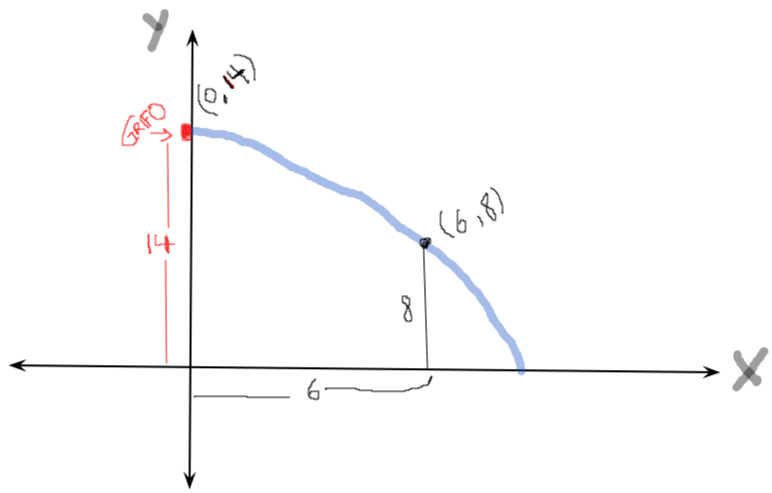

Figura 4: gráfico del problema
5 puntos

De acuerdo a la gráfica tenemos que la ecuación de la parábola tiene la forma:

$$(x-0)^2 = -4p(y-14),$$

de donde $x^2 = -4p(y-14)$. *[Ecuación de la parábola]* *5 puntos*

El punto $(6, 8)$ *pertenece a la parábola, lo que implica*

$$6^2 = -4p(8-14).$$

$36 = 24p$, *de donde* $p = 1{,}5$. *5 puntos*

Reemplazando en la ecuación de la parábola nos queda

$$x^2 = -4(1{,}5)(y-14) = -6(y-14).$$

Es decir $x^2 = -6(y-14)$. *[Ecuación del flujo del aceite*
5 puntos
Cuando toca el aceite al suelo hacemos $y = 0$, *en la ecuación flujo del aceite*

$$x^2 = -6(0-14) = 84.$$

De donde $x = \sqrt{84} = 2\sqrt{21}$.

En conclusión, el aceite toca al suelo a $2\sqrt{21}$ *m de distancia de la vertical.* *5 puntos*