RO4: Intégrales

Définition

Une intégrale définie est une somme continue permettant de calculer l'aire sous une courbe :

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

- a **et** b : bornes d'intégration
- $f(x)$: fonction à intégrer
- dx : élément infinitésimal de la variable

Les intégrales se notent de cette manière, avec $f(x)$ **la fonction à intégrer** et $F(x)$ **sa primitive**.

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b$$

1. Intégrales Classiques

Fonction	Primitive
$\int x^n\,dx$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$ si $n \neq -1$
$\int e^x\,dx$	e^x
$\int \frac{1}{x}\,dx$	(\ln
$\int \cos(x)\,dx$	$\sin(x)$
$\int \sin(x)\,dx$	$-\cos(x)$
$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx$	$\arctan(x)$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$	$\arcsin(x)$

Intégration par Parties (IPP)

Formule Générale

$$\int_a^b uv'\,dx = [uv]_a^b - \int_a^b u'v\,dx$$

avec :

- u : fonction choisie qui devient plus simple après dérivation
- v' : fonction facile à intégrer

Exemple

Calculer $I = \int_0^1 x(e^x + e^{-x})\,dx$.

1. Choisir $u = x$ et $v' = e^x + e^{-x}$, alors on pose:

$$\begin{cases} u = x, & u' = 1 \\ v' = e^x + e^{-x}, & v = e^x - e^{-x} \end{cases}$$

2. Appliquer la formule :

$$I = [uv]_a^b - \int_a^b u'v\,dx$$

$$I = [x(e^x - e^{-x})]_0^1 - \int_0^1 1(e^x - e^{-x})\,dx$$

$$I = [x(e^x - e^{-x}) - e^x - e^{-x}]_0^1$$

3. Remplacer x par 1 et 0 dans l'expression :

$$I = \left[1(e^1 - e^{-1}) - (e^1 - e^{-1})\right] - \left[0(e^0 - e^0) - (e^0 - e^0)\right]$$

4. Simplification :

$$I = 2 - \frac{2}{e}$$

3. Changement de Variable

Formule Générale

Si $x = g(t)$, alors :

$$dx = g'(t)dt$$

et l'intégrale devient :

$$\int f(x)\,dx = \int f(g(t))g'(t)\,dt$$

Exemple

Calculer $I = \int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}\,dx$.

1. **Poser le changement de variable :**
   On choisit $u = 1 + x^2$, donc on pose:

$$\begin{cases} u = 1 + x^2 \\ u' = 2x\,dx \end{cases}$$

On applique u sur les 2 bornes.

$$\begin{cases} \text{Quand } x = 0 & u = 1 + 0^2 = 1 \\ \text{Quand } x = 1 & u = 1 + 1^2 = 2 \end{cases}$$

2. **Transformer l'intégrale :**
   Etant donné que $u' = 2x\,dx$, on observe que l'on peut écrire :

$$I = \int_1^2 \frac{u'}{u}$$

3. **Calculer l'intégrale :**
   On sait que

$$(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$$

   Donc la primitive est `ln(u)` , ainsi:

$$I = [\ln(u)]_1^2$$

$$I = \ln(2) - \ln(1)$$

$$I = \ln(2) - \ln(1)$$

Puisque $\ln 1 = 0$, on a :

$$I = \ln 2$$

Exemple 2

Calculer $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t \cos t \, dt$.

1. **Poser le changement de variable :**
   On choisit $u = \sin t$, donc on pose :

$$\begin{cases} u = \sin t \\ u' = \cos t \, dt \end{cases}$$

On applique u sur les bornes :

$$\begin{cases} \text{Quand } t = 0, & u = \sin 0 = 0 \\ \text{Quand } t = \frac{\pi}{2}, & u = \sin \frac{\pi}{2} = 1 \end{cases}$$

2. **Transformer l'intégrale :**
   Étant donné que $u' = \cos t \, dt$, on observe que l'on peut écrire :

$$I = \int_0^1 u^3 \, du$$

3. **Calculer l'intégrale :**
   On utilise la formule de l'intégration des puissances :

$$\int u^n \, du = \frac{1}{n+1} u^{n+1}$$

$$I = \left[\frac{1}{4} u^4 \right]_0^1$$

4. **Remplacer les bornes :**

$$I = \frac{1^4}{4} - \frac{0^4}{4}$$

$$I = \frac{1}{4} - 0$$

$$I = \frac{1}{4}$$

Résumé des Méthodes

Méthode	Quand l'utiliser ?	Étapes clés
Intégrales classiques	Fonction simple ou directe	Utiliser les formules courantes
Intégration par parties (IPP)	Produit de fonctions ($xe^x, x \ln x, x \sin x$)	Choisir u et v', appliquer la formule
Changement de variable	Présence de $(1 + x^2)$, $(1 - x^2)$, e^x, $\sqrt{x}$, etc.	Poser $u = g(x)$, dériver du, transformer l'intégrale