

# Восстановление параметров модели

Шемякина Юлия

2017

# О чем будем говорить?



# Возможные области применения

1. Локализация объекта на изображении
2. Устранение геометрических искажений изображения объекта
3. Выбор из имеющегося множества шаблонов такого, которому удовлетворяет объект на изображении

...

# Параметрическая модель

Зададим параметрическую модель:

$$F(e_1, e_2, \theta) = 0$$

$e_1, e_2$  — некоторые элементы заранее известного пространства (скаляры, вектора)  
 $\theta$  — вектор параметров модели

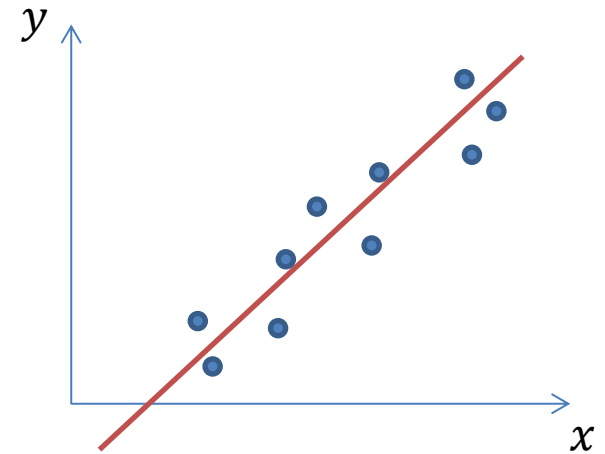
Будем говорить, что элементы  $e_1, e_2$  связаны моделью с параметрами  $\theta$ .

# Параметрические кривые

- **Прямая**

$$F(x, y, \theta) = ax + by + c = 0$$

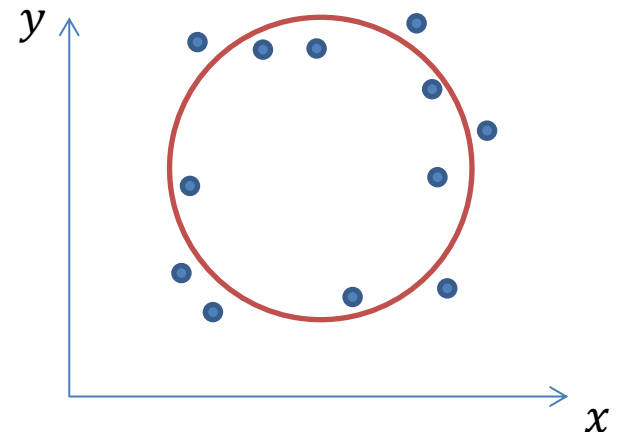
$$\theta = (a, b, c)$$



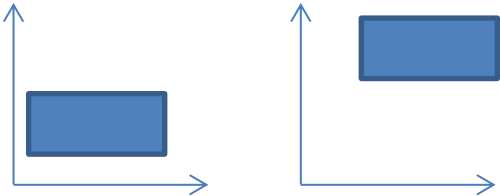
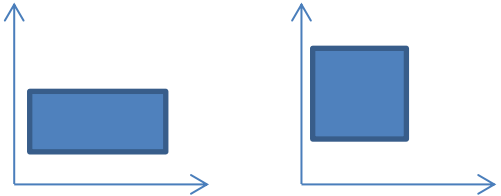
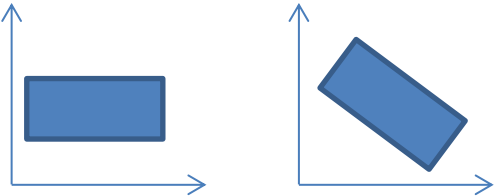
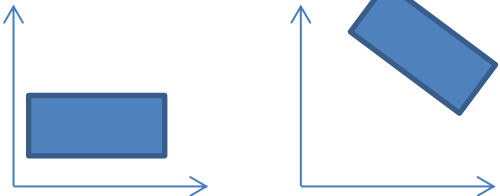
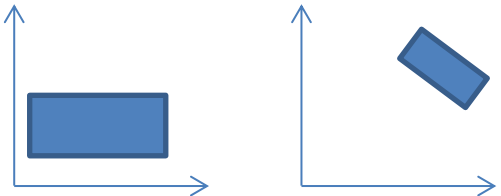
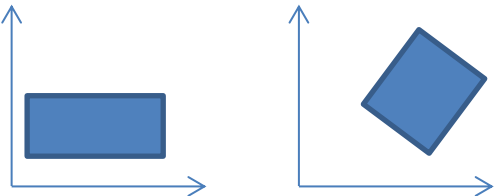
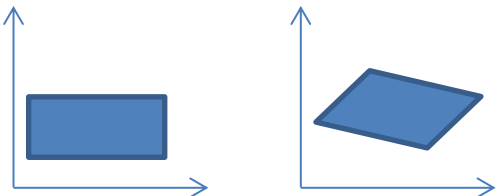
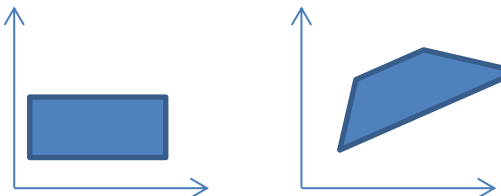
- **Окружность**

$$F(x, y, \theta) = (x - a)^2 + (y - b)^2 - R^2 = 0$$

$$\theta = (a, b, R)$$



# Геометрические модели

|  |  |  |
|--|--|--|
| <p>Сдвиг</p>                | <p>Сжатие</p>                  | <p>Поворот</p>                  |
| <p>Изометрия</p>            | <p>Подобие</p>                 | <p>Расширенная группа дв-я</p>  |
| <p>Аффинное преобр-е</p>  | <p>Проективное преобр-е</p>  |  |

# Сдвиг

Классика:

$$\begin{cases} x' = x + t_x \\ y' = y + t_y \end{cases}$$

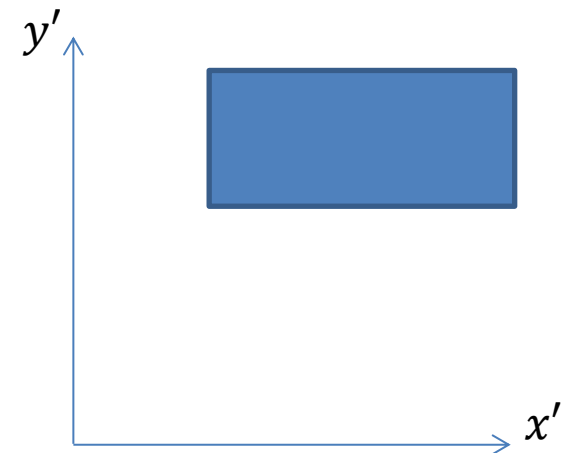
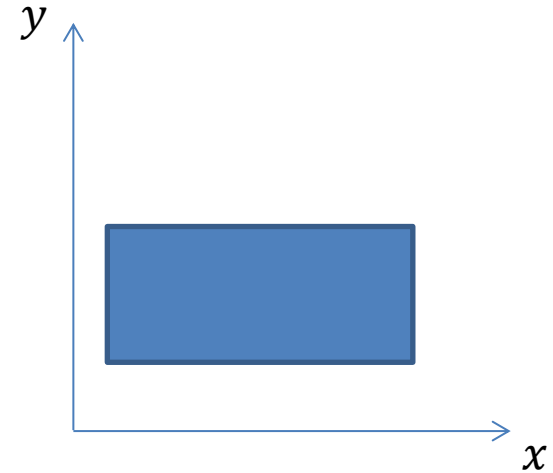
Векторное представление:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$p' = \begin{pmatrix} I & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} p$$

Количество параметров: 2

Минимальный набор: 1 сопоставление точек



# Анизотропное сжатие

Классика:

$$\begin{cases} x' = s_x x \\ y' = s_y y \end{cases}$$

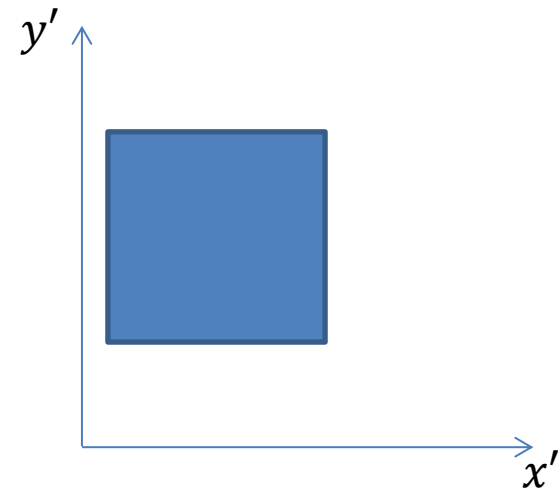
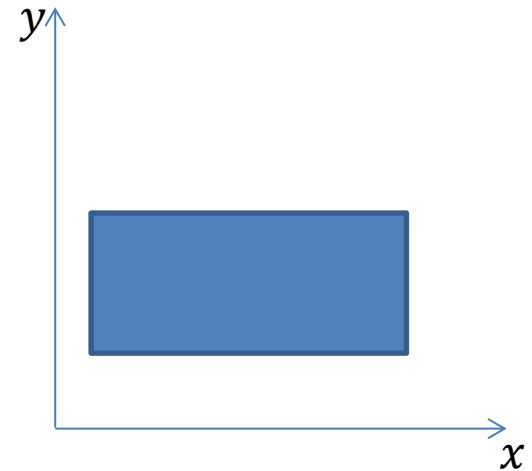
Векторное представление:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$p' = \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} p$$

Количество параметров: 2

Минимальный набор: 1 сопоставление точек





# Поворот

Классика:

$$\begin{cases} x' = \cos(\varphi) x - \sin(\varphi) y \\ y' = \sin(\varphi) x + \cos(\varphi) y \end{cases}$$

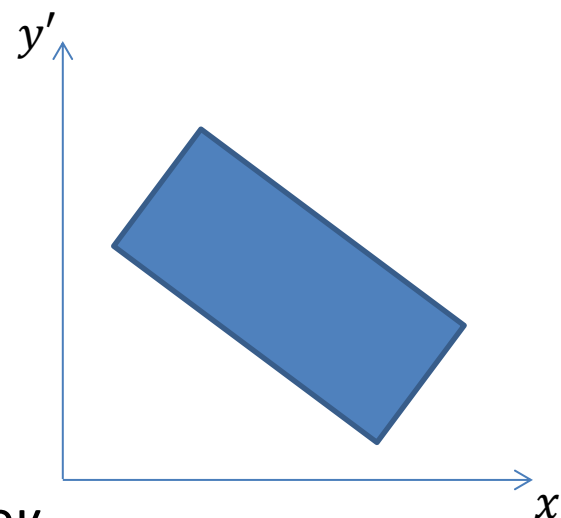
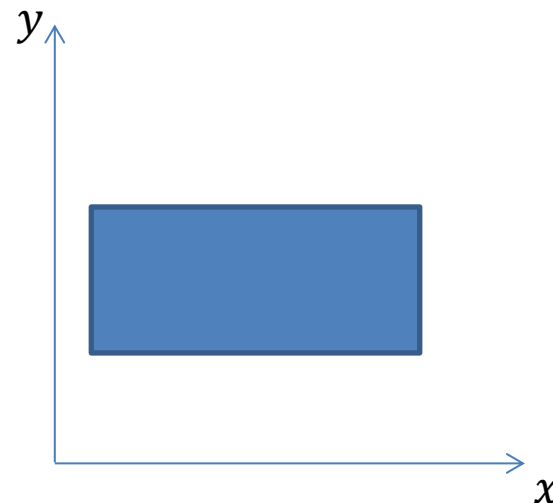
Векторное представление:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$p' = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} p$$

Количество параметров: 1

Минимальный набор: 1 сопоставление точек



# Изометрия

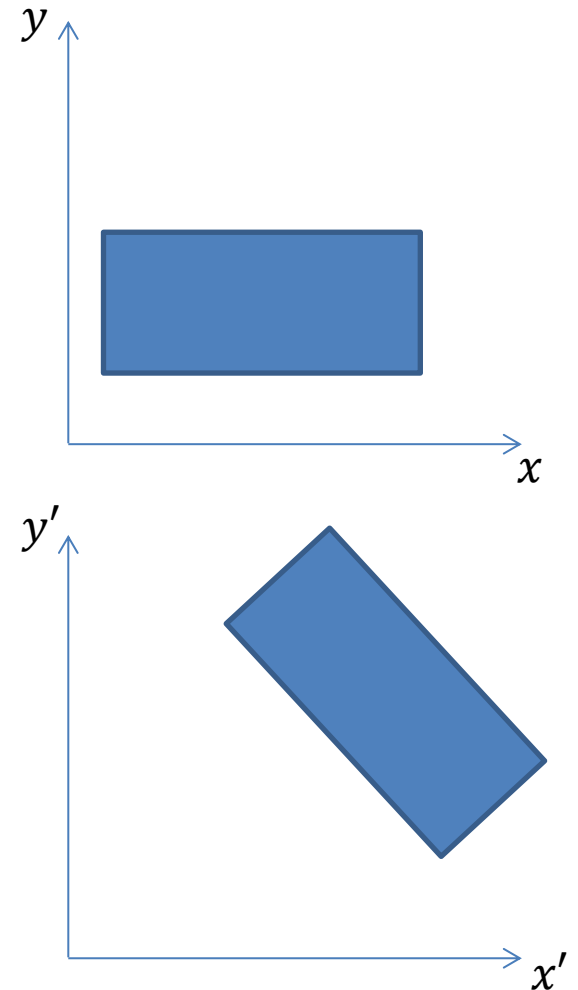
Изометрия = поворот + сдвиг

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & t_x \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$p' = \begin{pmatrix} R & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} p$$

Количество параметров: 3

Минимальный набор: 2 сопоставления точек



# Подобие

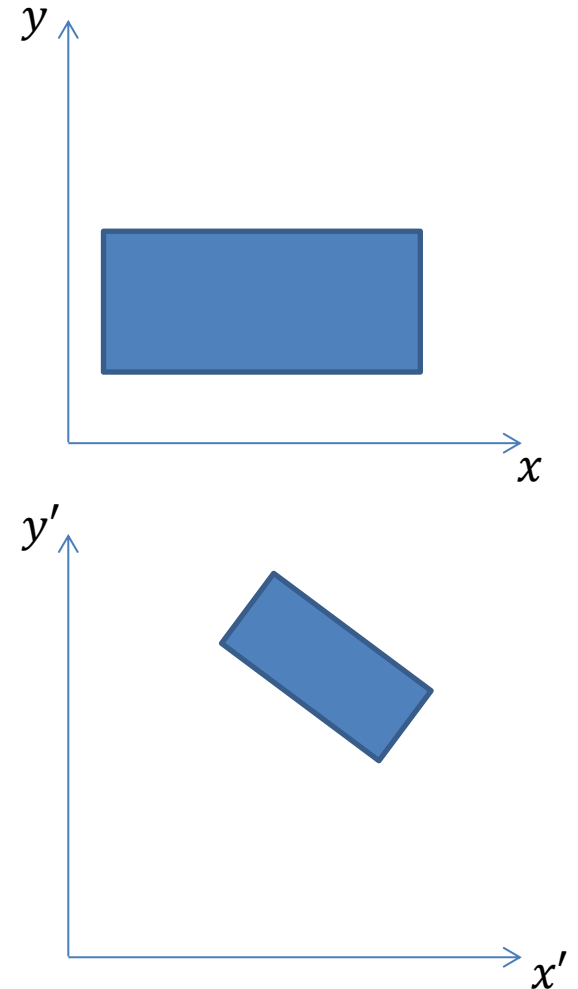
Подобие = изотропное сжатие + поворот + сдвиг

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \cos(\varphi) & -s \sin(\varphi) & t_x \\ s \sin(\varphi) & s \cos(\varphi) & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$p' = \begin{pmatrix} sR & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} p$$

Количество параметров: 4

Минимальный набор: 2 сопоставления точек



# Расширенная группа движения

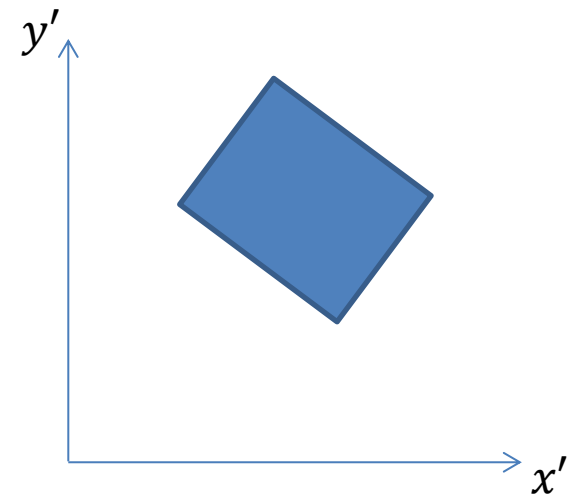
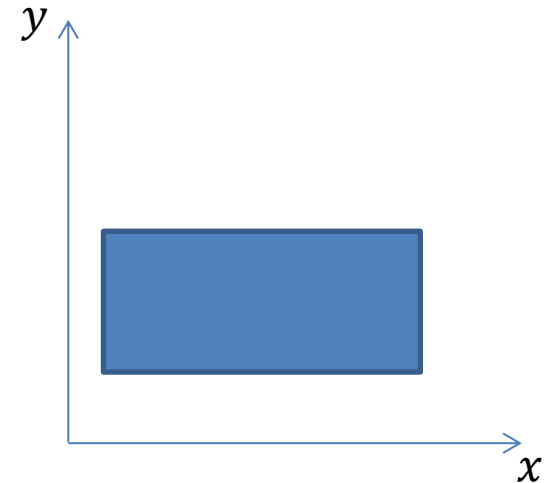
Расширенная группа движения =  
анизотропное сжатие + поворот + сдвиг

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_x \cos(\varphi) & -s_y \sin(\varphi) & t_x \\ s_x \sin(\varphi) & s_y \cos(\varphi) & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$p' = \begin{pmatrix} RS & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} p$$

Количество параметров: 5

Минимальный набор: 3 сопоставления точек

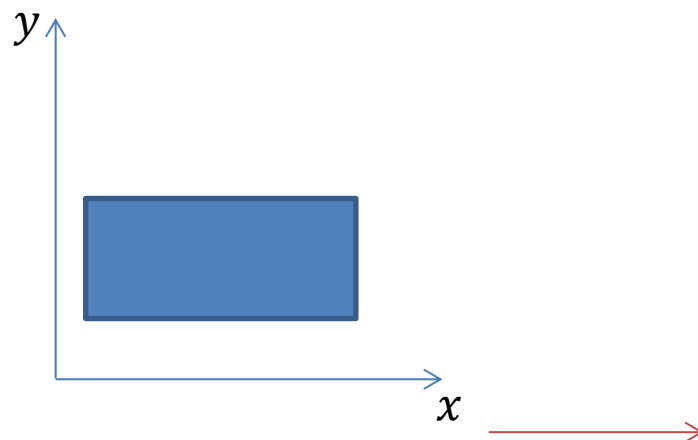


# Аффинное преобразование

Аффинное пр-е = поворот + анизотропное сжатие + поворот + сдвиг

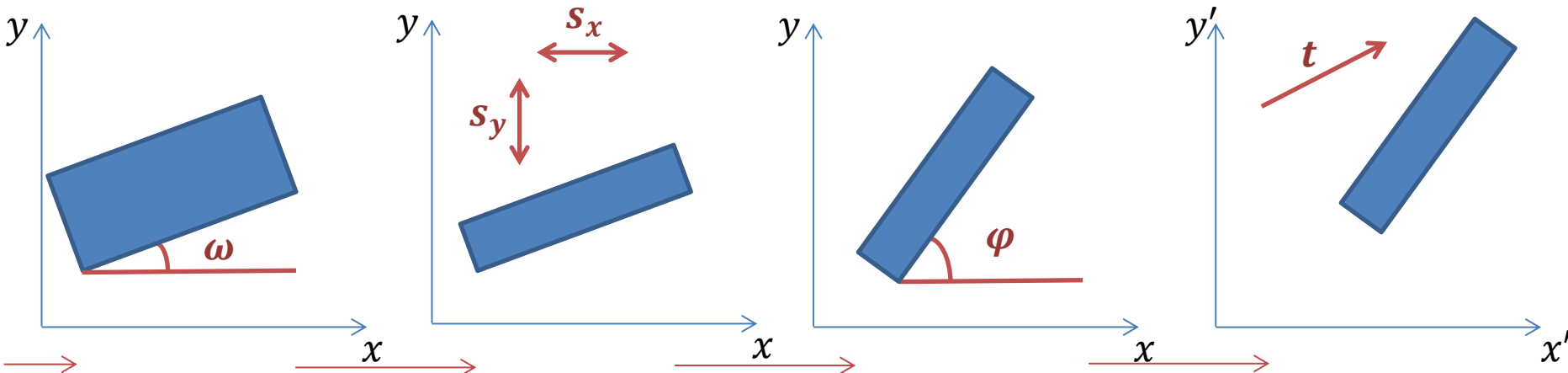
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & t_x \\ a_3 & a_4 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$p' = \begin{pmatrix} A & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} p, \quad A = R(\varphi) \cdot S \cdot R(\omega)$$



Количество параметров: 6

Минимальный набор: 3 сопоставления точек



# Однородные координаты

Точка на плоскости задается 3 координатами

$$p = (x, y, z)$$

Точка задается с точность до множителя:

$$p \equiv \lambda p, \lambda \neq 0$$
$$(1,1,1) \equiv (2,2,2)$$

Переход из евклидовой СК в однородную и обратно:

$$(x, y) \rightarrow (x, y, 1)$$
$$(x, y, z) \rightarrow (x/z, y/z)$$

# Проективное преобразование

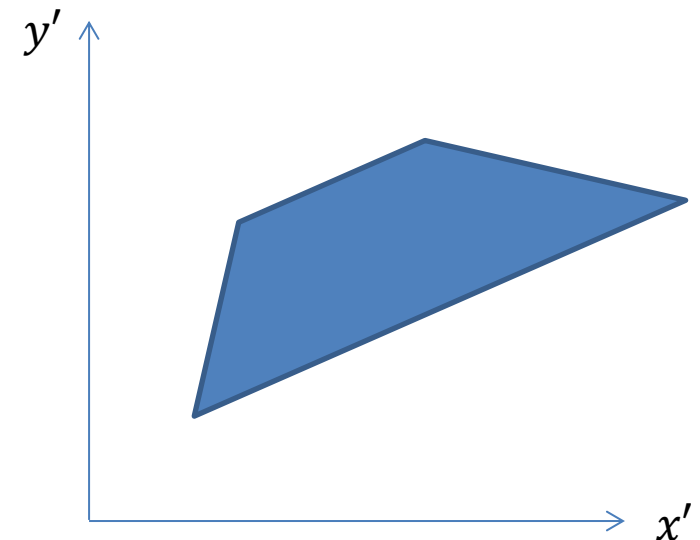
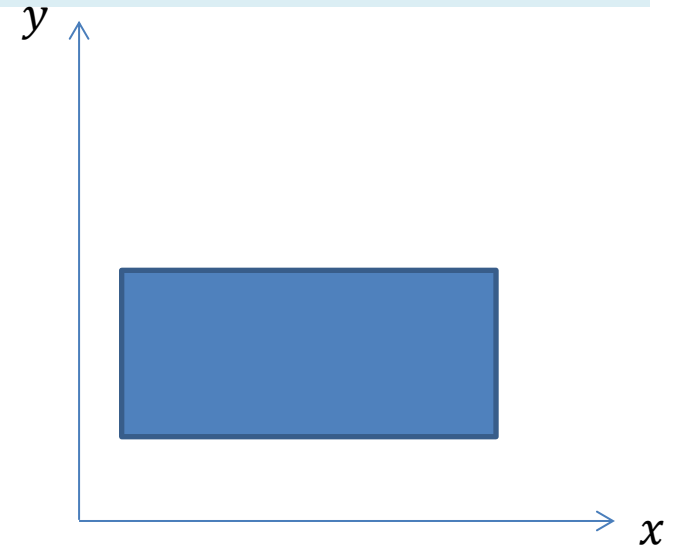
Переводит прямые в прямые

$$\begin{cases} x' = \frac{h_1x + h_2y + h_3}{h_7x + h_8y + h_9} \\ y' = \frac{h_4x + h_5y + h_6}{h_7x + h_8y + h_9} \end{cases}$$

Линейно в однородных координатах:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1 & h_2 & h_3 \\ h_4 & h_5 & h_6 \\ h_7 & h_8 & h_9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$p' = H_P p$$



# Проективное преобразование

$$H_P \equiv \lambda H_P, \lambda \neq 0$$

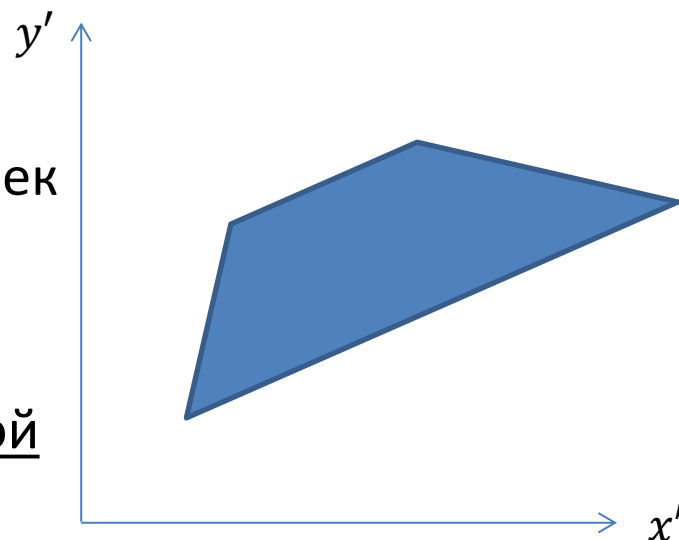
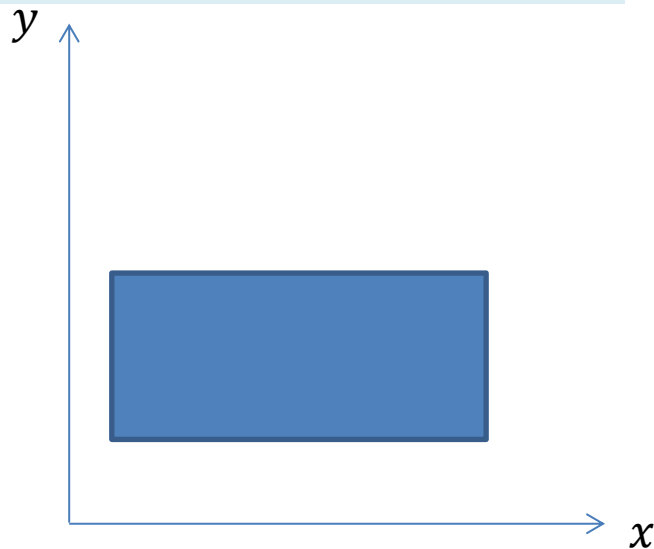
Для однозначности введем нормировку:

- $\|H_P\| = 1$
- $\|(h_7 \ h_8 \ h_9)\| = 1$
- $h_9 = 1$

Количество параметров: 8

Минимальный набор: 4 сопоставления точек

Переводит любой четырехугольник в любой





# Как считать по точкам?

Уравнение  $p' = H_p p$  эквивалентно

$$p' \times H_p p = 0$$

Раскроем, выпишем систему:

$$\begin{pmatrix} \mathbb{O}^T & -z'_i p_i^T & y'_i p_i^T \\ z'_i p_i^T & \mathbb{O}^T & -x'_i p_i^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h^1 \\ h^2 \\ h^3 \end{pmatrix} = \mathbb{O}, i = 1..n_p, n_p \geq 4$$

$h^j, j = 1, 2, 3$  —  $j$ -ая строка матрицы  $H_p$

$n_p = 4$ : никакие 3 точки не лежат на одной прямой

# Точки & Прямые

Определим отображение прямых в точки:

$$ax + by + c = 0 \rightarrow l = (a \ b \ c)^T$$
$$p = (x_0 \ y_0 \ 1)^T \rightarrow x_0 a + y_0 b + c = 0$$

Получим двойственные проективные пространства:

- пространство точек  $P_p$
  - пространство прямых  $P_l$
- (где прямая линия задается точкой этого пространства)

$$p' = H_P p \Leftrightarrow l' = H_L l$$

$$H_L^T H_P = I$$

# Как считать по прямым?

Тогда вместо  $l' = H_L l$  получим

$$\begin{aligned} l^T &= l'^T H_P \\ l^T \times l'^T H_P &= 0 \end{aligned}$$

$n_L = 4$ :

В пространстве прямых  $P_l$  никакие три точки не лежат на одной прямой

Тогда в пространстве точек  $P_p$  никакие три прямые не должны пересекаться в одной точке

# Как считать по точкам и прямым?

Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} p'_i \times H_P p_i = \mathbb{O} \\ l_j^T \times l_j'^T H_P = \mathbb{O} \end{cases}, i = 1..n_P, j = 1..n_L$$

$$n_P = 1 \text{ \& } n_L = 3:$$

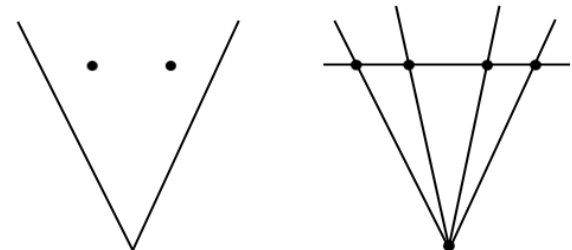
три прямые не имеют общей точки, точка не лежит на прямых

$$n_P = 3 \text{ \& } n_L = 1:$$

три точки не коллинеарны, прямая не пересекает точки

$$n_P = 2 \text{ \& } n_L = 2:$$

невозможно задать преобразование



# Камера-обскура и проективность

$C$  – центр камеры

$CXYZ$  – мировая система координат

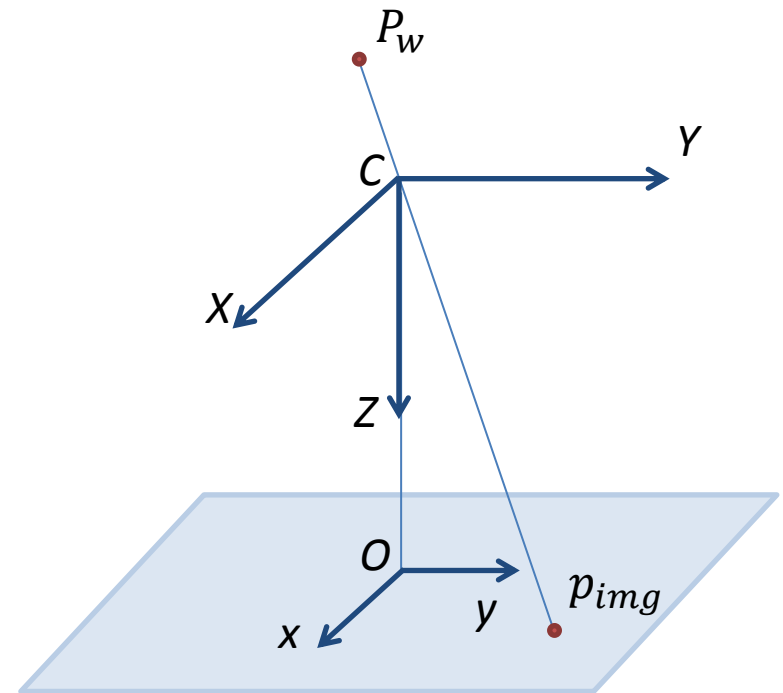
$Oxy$  – система координат изображения

$OC = f$  – фокусное расстояние камеры

$P_w = (X_P \ Y_P \ Z_P)$  – точка в мировой СК

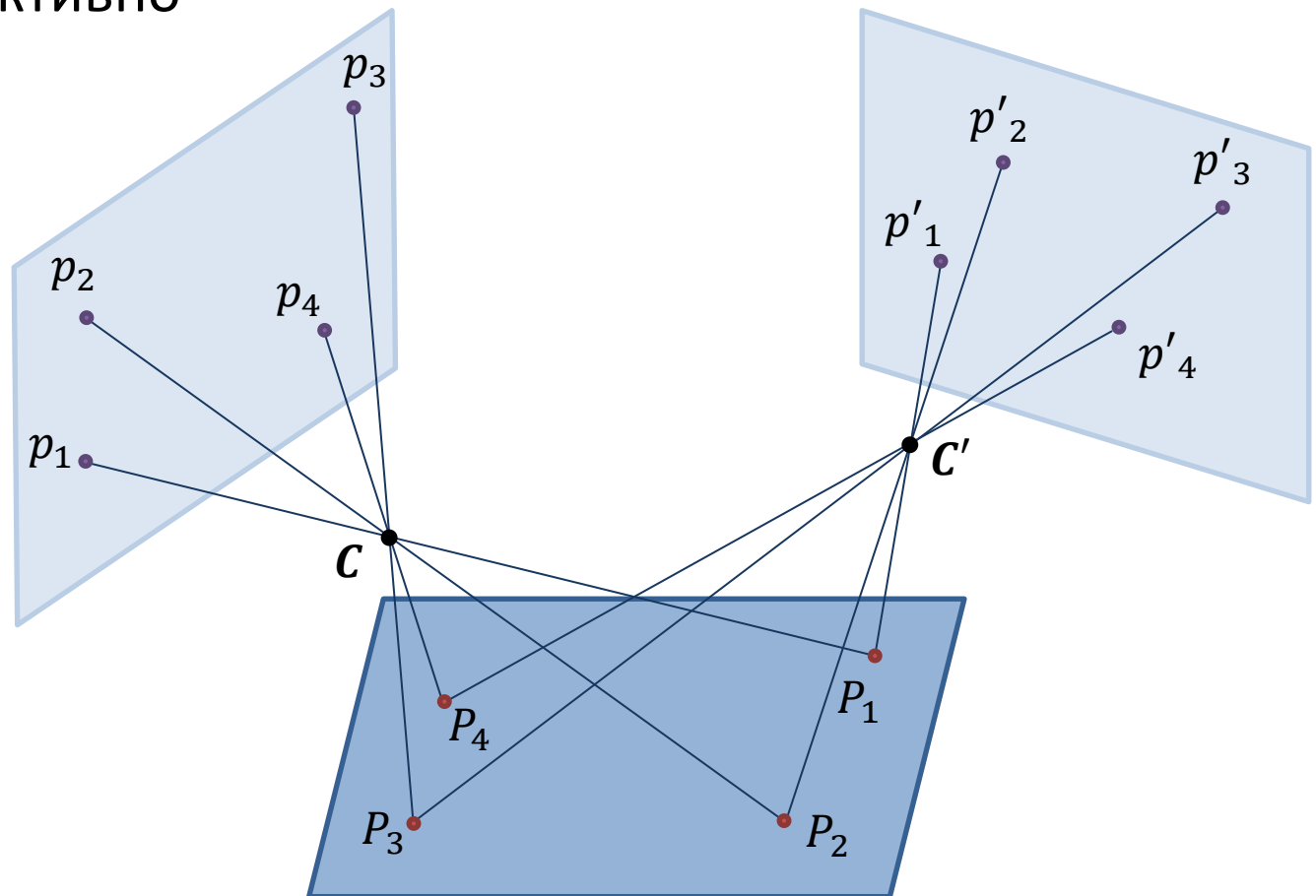
$p_{img} = (x_P \ y_P)$  – точка на изображении

$$\begin{cases} x_P = \frac{fX_P}{Z_P} \\ y_P = \frac{fY_P}{Z_P} \end{cases} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$



# Камера-обскура и проективность

Если в мировой СК объект плоский, 2 его изображения будут связаны проективно

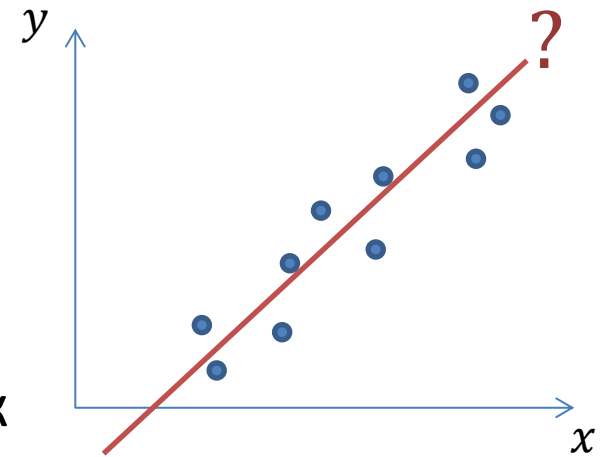


# Оценка параметров модели: неробастные методы

## Задача 1

Дано: набор  $E$  из  $n$  сопоставлений  $x$  и  $y$

Найти: параметры прямой



## Задача 2

Дано: набор  $E$  из  $n$  сопоставлений точек

Найти: параметры проективной модели

В наборе присутствует координатный шум

# Метод Наименьших Квадратов

Решим переопределенную систему  $Ax = b$

Пусть ошибка  $e_i = (a_i x - b_i)$  распределена гауссово  
( $\mu = 0, \sigma^2$ )

Например:

$$\begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

МНК:  $E = (Ax - b)^T (Ax - b) \rightarrow \min_x$



# МНК для параметров прямой

Система:  $\{ax_i + by_i = c, \quad i = 1..n, \quad a^2 + b^2 = 1$

$$E = \sum_{i=1..n} (ax_i + by_i - c)^2 \rightarrow \min_{a,b,c}$$

$$\frac{\partial E}{\partial c} = -2 \sum_{i=1..n} (ax_i + by_i - c) = 0 \qquad c = \frac{a}{n} \sum_{i=1..n} x_i + \frac{b}{n} \sum_{i=1..n} y_i = a\bar{x} + b\bar{y}$$

$$E = \sum_{i=1..n} (a(x - \bar{x}) + b(y - \bar{y}))^2 = \left\| \begin{pmatrix} x_1 - \bar{x} & y_1 - \bar{y} \\ \vdots & \vdots \\ x_n - \bar{x} & y_n - \bar{y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right\|^2 = (AN)^T(AN)$$
$$\frac{\partial E}{\partial N} = 2(A^T A)N = 0$$

Решение системы  $(A^T A)N = 0, \|N\| = 1$ :

Собственный вектор  $A^T A$ , соответствующий минимальному собственному числу

# Singular Value Decomposition

$$A = UDV^T$$

- $D$  – диагональная матрица
- $U, V$  – ортогональны ( $U^T U = I, V^T V = I$ )

Связь с собственными числами и векторами:

$$A^T A = V D^2 V^T$$

$$A^T A V = V D^2$$

Собственные числа  $\lambda$  и вектора  $x$  удовлетворяют:  $Ax = \lambda x$

- Диагональные элементы  $D^2$  – собственные числа  $A^T A$
- Столбцы  $V$  – собственные вектора  $A^T A$

# МНК & SVD для проективности

Система:  $Ax = b$

Решение:  $x = A^+b$ , где  $A^+$  - псевдообратная матрица

Как найти  $A^+$ ?

$$A = UDV^T$$

$$\text{Тогда } A^+ = VD^{-1}U^T$$

Действительно, подставим решение в систему

$$AA^+b = b$$

$$AA^+ = UDV^T \cdot VD^{-1}U^T = UD \cdot D^{-1}U^T = UU^T = I$$

# Оценка параметров модели: робастные методы

## Задача 1

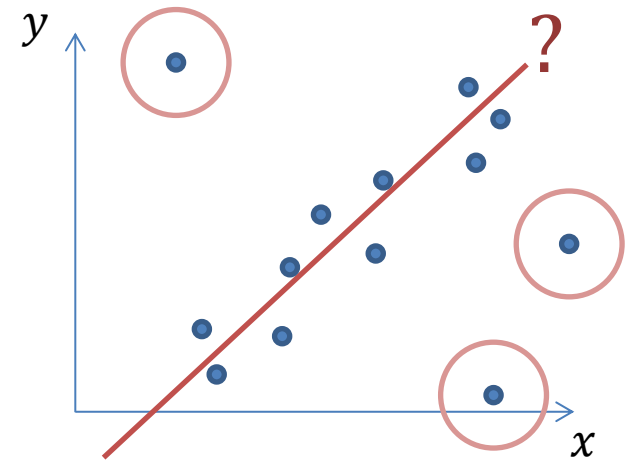
Дано: набор  $E$  из  $n$  сопоставлений  $x$  и  $y$

Найти: параметры прямой

## Задача 2

Дано: набор  $E$  из  $n$  сопоставлений точек

Найти: параметры проективной модели



В наборе присутствуют ошибки:

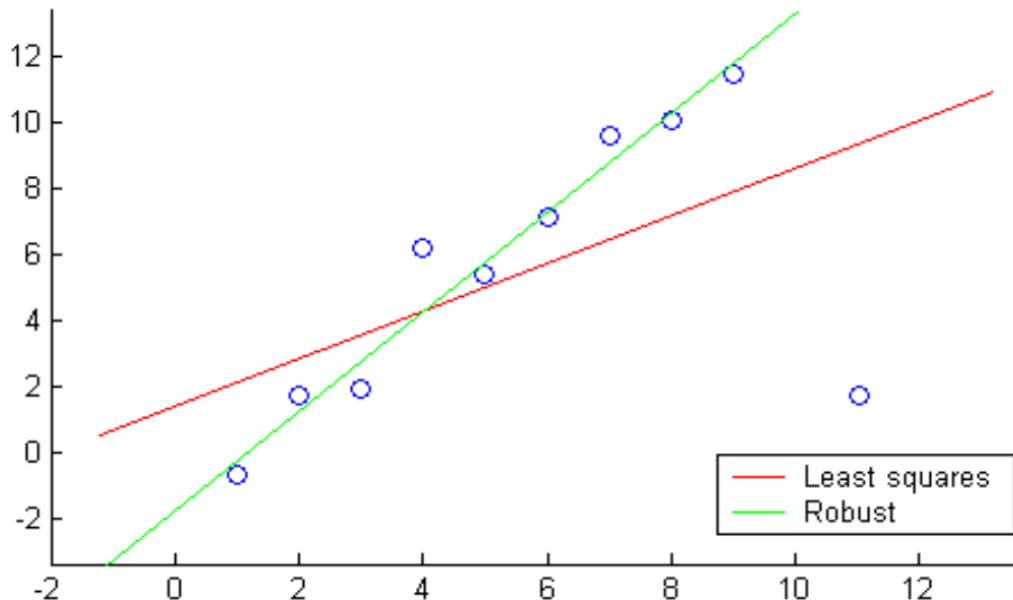
- координатный шум распределенный нормально ( $\mu = 0, \sigma^2$ )
- выбросы

# В чем проблема выбросов?

**Выбросы** – сопоставления, не удовлетворяющие оцениваемой модели

**Инлаеры** - сопоставления, удовлетворяющие оцениваемой модели

Если есть выбросы, при оценке МНК результат может быть сколь угодно далек от истинных параметров модели



# Медианные методы

## 1. Метод Тайла и Сена

- По каждому минимальному набору сопоставлений оценим параметры модели
- Возьмем медиану среди всех полученных векторов параметров

При оценке параметров прямой устойчив к 29,3% выбросов

# Медианные методы

## 2. Метод повторной медианы

Рассмотрим некоторый параметр модели  $\theta$

$m$  — минимальное количество сопоставлений для оценки параметров

$\theta(i_1, \dots, i_m)$  — оценка параметра по набору сопоставлений с индексами  $\{i_1, \dots, i_m\}$

Возьмем медиану среди всех параметров, полученных по фиксированным сопоставлениям  $\{i_1, \dots, i_{m-1}\}$  и варьирующемуся последнему сопоставлению  $\{j\}$ :

$$\theta(i_1, i_2, \dots, i_{m-1}) = \underset{j}{\text{med}} \theta(i_1, i_2, \dots, i_{m-1}, j)$$

# Медианные методы

Повторим процедуру для полученных оценок параметра, варьируя последовательно  $(m - 1)$ -ое,  $(m - 2)$ -ое сопоставление и т.д.

$$\begin{aligned}\theta(i_1, i_2 \dots i_{m-2}) &= \underset{j}{\text{med}} \theta(i_1, i_2 \dots i_{m-2}, j) \\ &\dots \\ \hat{\theta} &= \underset{j}{\text{med}} \theta(j)\end{aligned}$$

Итоговая формула:

$$\hat{\theta} = \underset{j^m}{\text{med}} \underset{j^{m-1}}{\text{med}} \dots \underset{j^1}{\text{med}} \theta(j^m, j^{m-1} \dots j^1)$$

Метод устойчив к 50% выбросов



# Медианные методы

## 3. Метод наименьших медиан квадратов

$m$  — минимальное количество сопоставлений для оценки параметров

По каждому минимальному набору вычислим:

$\theta(i_1, \dots, i_m)$  — оценка параметра по набору сопоставлений с индексами  $\{i_1, \dots, i_m\}$

$r(i, \theta(i_1, \dots, i_m))$  — отклонение  $i$ -ого элемента входных данных от модели  $\theta(i_1, \dots, i_m)$

$$\hat{\theta} = \min_s \operatorname{med}_i r(i, s)^2$$

Метод устойчив к 50% выбросов

# RANSAC: идея

## Как не учитывать выбросы?

Оценим модель по минимальному необходимому набору сопоставлений, не содержащих выбросов.

## Как найти набор без выбросов?

Будем искать его среди достаточного количества случайно выбранных наборов

Вероятность выбора хотя бы одного набора без выбросов при  $N$  попытках:

$$P = 1 - (1 - w^m)^N$$

$w$  — вероятность выбора инлаера из входных данных

# RANSAC: алгоритм

Пусть минимальный набор, необходимый для восстановления параметров модели, состоит из  $m$  сопоставлений.

1. От  $k = 1$  до  $k = N$ :

- случайно выбираем набор из  $m$  сопоставлений
- по набору вычисляем параметры модели - гипотезу  $H_k$
- вычисляем оценку качества гипотезы

$R(H_k)$  – количество соответствий, удовлетворяющих модели с заданной точностью  $T$ .

2. Выбираем гипотезу с наибольшим значением  $R_k$ .

3. Вычисляем результирующее преобразование  $\hat{H}$  на основе всех соответствий, согласованных с лучшей гипотезой, с помощью МНК.

# Функция оценки гипотезы

$(p_i, p'_i)$  —  $i$ -ое сопоставление входных данных,  $i = 1..n$

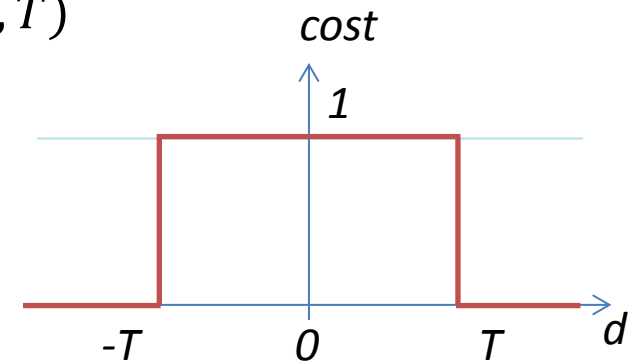
$H$  — оцениваемая модель с фиксированными параметрами

Расстояние  $|p'_i - H(p_i)| = d$

$$R(H) = \sum_{i=1..n} cost(d, T)$$

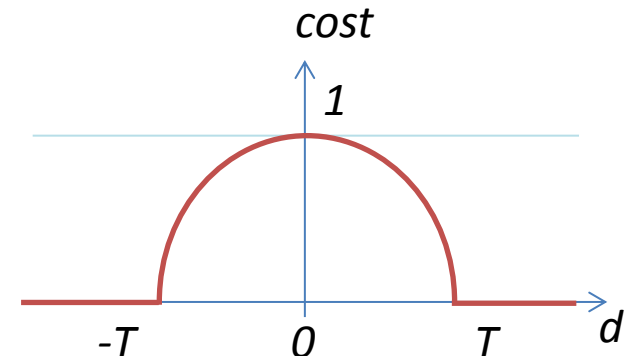
## RANSAC

$$cost(d, T) = \begin{cases} 1, & \text{если } d^2 \leq T^2 \\ 0, & \text{если } d^2 > T^2 \end{cases}$$



## MSAC

$$cost(d, T) = \begin{cases} d^2, & \text{если } d^2 \leq T^2 \\ 0, & \text{если } d^2 > T^2 \end{cases}$$



# Выбор параметров $N$ и $T$

## Параметр $N$

Выбираем так, чтобы достигалась вероятность  $P$  хотя бы одного набора без выбросов ( $P = 0,95$ )

$$N = \frac{\log(1 - w^m)}{\log(1 - P)}$$

## Параметр $T$

$\alpha$  — вероятность того, что нормально зашумленная ( $\mu = 0, \sigma^2$ ) точка  $p_{noised}$  будет лежать в окрестности идеальной точки  $p_{ideal}$  с радиусом  $T$

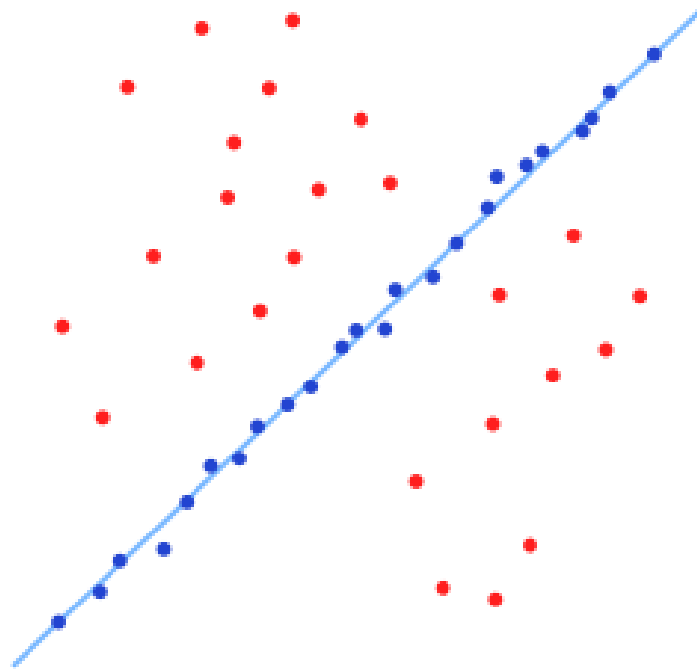
$$\alpha = P\{d^2 = |p_{noised} - p_{ideal}|^2 < T^2\}$$

Если координатный шум гауссов, то величина  $d^2$  подчиняется распределению  $\chi^2$ , тогда

$$T^2 = F^{-1}(\alpha)\sigma^2$$

$F^{-1}(\alpha)$  — обратное распределение  $\chi^2$

# Пример использования RANSAC



# Пример использования RANSAC



# PROSAC: идея

В схеме RANSAC предполагается, что при формировании случайного минимального набора, вероятности выбора каждого сопоставления равны.

Можем оценить вероятность правильности каждого сопоставления, например, по близости дескрипторов соответствующих особых точек.

Тогда приравняем вероятность правильности сопоставления с вероятностью его включения в набор.

Тогда вероятность выбора набора без выбросов за  $N$  итераций увеличится.



# Список литературы

## **Лекция Конушина**

[http://courses.graphicon.ru/files/courses/vision/2012/lectures/cv2012\\_05\\_fitting\\_web.pdf](http://courses.graphicon.ru/files/courses/vision/2012/lectures/cv2012_05_fitting_web.pdf)

## **Учебник по геометрии**

Hartley R., Zisserman A. Multiple View Geometry in Computer Vision // New York: Cambridge University Press, 2004. 655 p.

## **Точки&Прямые**

Ю.А. Шемякина «Использование точек и прямых для вычисления проективного преобразования по двум изображениям плоского объекта» // «Информационные технологии и вычислительные системы», (03) 2017

## **Сравнение скорости и точности работы разных алгоритмов вычисления проективного преобразования**

J. Shemiakina; A. Zhukovsky; I. Faradjev, “The calculation of a projective transformation in the problem of planar object targeting by feature points”, Proceedings Volume 10341, Ninth International Conference on Machine Vision (ICMV 2016)

## **Метод повторных медиан**

Siegel A. F. Robust Regression Using Repeated Medians // Biometrika, 1982. Vol. 69, No. P. 242-244.

## **Метод наименьших медиан квадратов**

Rousseeuw P. J. Least median of squares regression // Journal of the American Statistical Association, 1984. Vol. 79, No. 388. P. 871–880

## **RANSAC**

M.A. Fischler, R.C. Bolles, “Random Sample Consensus: A Paradigm for Model Fitting with Applications to Image Analysis and Automated Cartography”, Comm. Of the ACM, Vol. 24, 381–395, (1981)

## **MSAC**

Torr P.H.S., Zisserman A. A MLESAC: A New Robust Estimator with Application to Estimating Image Geometry // Computer Vision and Image Understanding, 2000.

## **PROSAC**

Chum O., Matas J. Matching with PROSAC - progressive sample consensus // IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, 2005