НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ

«КПІ імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

Кафедра Автоматизованих Систем Обробки Інформації та Управління

Спеціальні розділи математики

Лабораторна робота № 2

Розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) прямими методами. Звичайний метод Гауса та метод квадратних коренів.

Зміст

1 Теоретичні відомості

Будемо розглядати системи вигляду

$$Ax = b, \tag{1}$$

де A ($n\times n$) - матриця системи, b - вектор правої частини, x - вектор розв’язку.

Метод Гауса.

Метод складається з двох етапів:

1) прямого хода методу (приведення системи (1) до еквівалентної системи з трикутною матрицею);
2) зворотного ходу (визначення невідомого вектору x) .

Існує декілька варіантів методу Гауса.

Схема з вибором головного елемента полягає у наступному:

1) Прямий хід.

1.1) Відшукати $a_{main} = \max\limits_{i,j} |a_{i,j}|,\ i,j = 1..n$. Нехай $a_{main} = a_{pq}$. Рядок p називається головним.

1.2) Обчислити множники $m_i = \dfrac{a_{iq}}{a_{pq}},\ i \neq p$.

1.3) З кожного i-го неголовного рядка віднімаємо покомпонентно головний рядок, який помножено на m_i:

$$a_{ij} := a_{ij} - m_i a_{pj},\quad i \neq p,\ j = 1..n,$$

для вектора правої частини:

$$b_i := b_i - m_i b_p.$$

В результаті отримуємо матрицю, де всі елементи стовпця q, крім a_{pq}, дорівнюють нулю. Відкидаючи стовпець q та головний рядок p, і відповідний елемент b_p, отримуємо систему з матрицею A_1 ($(n-1)\times(n-1)$). Якщо $n-1>1$, покладаємо $n := n-1$, і переходимо до п.1.1, інакше переходимо до п.2.

Примітка: Елементи головного рядка та відповідного елементу b_p *потрібно зберігати у окремому масиві, оскільки вони знадобляться в п.2).*

2) Зворотний хід.

2.1) Складаємо систему, еквівалентну вихідній, що складається з головних рядків, які отримувались у п.1. Права частина складається з відповідних елементів b_p. Отримана система має трикутну матрицю. Знаходимо послідовно значення елементів x_i.

Метод квадратного кореня.

Метод використовується для розв’язання СЛАР виду (1), у яких матриця A є симетричною, тобто

$$a_{ij} = a_{ji}\quad \forall i, j.$$

Метод полягає у наступному:

1) Прямий хід: факторизація $A = T'T$, де

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \ldots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & \ldots & t_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & t_{nn} \end{pmatrix},\ T' = \begin{pmatrix} t_{11} & 0 & .. & 0 \\ t_{12} & t_{22} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ t_{1n} & t_{2n} & \ldots & t_{nn} \end{pmatrix}$$

1.1) Знаходимо елементи t_{ij} матриць-множників.

$$t_{11} = \sqrt{a_{11}}\,,\; t_{1j} = \frac{a_{1j}}{t_{11}} \;\; (j > 1)\,,$$

$$t_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} t_{ki}^2} \;\; (1 < i \le n)\,,$$

$$t_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} t_{ki} t_{kj}}{t_{ii}} \; (i < j),$$

$$t_{ij} = 0 \; (i > j)$$

1.2) Формуємо замість вихідної системи дві наступні системи:

$$T' y = b\,,\; Tx = y\,.$$

2) <u>Зворотний хід</u>.

2.1) Послідовно знаходимо:

$$y_1 = \frac{b_1}{t_{11}}\,,\; y_i = \frac{b_i - \sum_{k=1}^{i-1} t_{ki} y_k}{t_{ii}} \; (i > 1)\,,$$

$$x_n = \frac{y_n}{t_{nn}}\,,\; x_i = \frac{y_i - \sum_{k=i+1}^{n} t_{ik} x_k}{t_{ii}} \; (i < n)\,.$$

2 Завдання

Розв’язати систему рівнянь з кількістю значущих цифр m = 6. Якщо матриця системи симетрична, то розв’язання проводити за методом квадратних коренів, якщо матриця системи несиметрична, то використати метод Гауса. Вивести всі проміжні результати (матриці А, що отримані в ході прямого ходу методу Гауса, матрицю зворотного ходу методу Гауса, або матрицю Т та вектор y для методу квадратних коренів), та розв’язок системи. Навести результат перевірки: вектор нев’язки $\boldsymbol{r = b - Ax}$**,** де $\boldsymbol{x}$ - отриманий розв’язок.

Розв’язати задану систему рівнянь за допомогою програмного забезпечення Mathcad. Навести результат перевірки: вектор нев’язки $\boldsymbol{r = b - Ax_m}$**,** де $\boldsymbol{x_m}$ - отриманий у Mathcad розв’язок.

Порівняти корені рівнянь, отримані у Mathcad, із власними результатами за допомогою методу середньоквадратичної похибки:

$$\delta = \sqrt{\tfrac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{mk})^2}\;,$$

де $\boldsymbol{x}$ - отриманий у програмі розв’язок, $\boldsymbol{x_m}$ - отриманий у Mathcad розв’язок.

Зазвичай при використанні для обчислень 4-байтових чисел (тип *float* у Visual C++) порядок δ:

- у методі Гауса - $10^{-4} - 10^{-6}$,
- у методі квадратних коренів - $10^{-5} - 10^{-7}$, бувають і повні співпадання рішень до 6 знаків після коми.

3 Варіанти завдань

Система має вигляд (1).

№ вар.	Матриця системи А	Вектор правої частини b

1-4	$\begin{pmatrix} 3{,}81 & 0{,}25 & 1{,}28 & 0{,}75+\alpha \\ 2{,}25 & 1{,}32 & 4{,}58+\alpha & 0{,}49 \\ 5{,}31 & 6{,}28+\alpha & 0{,}98 & 1{,}04 \\ 9{,}39+\alpha & 2{,}45 & 3{,}35 & 2{,}28 \end{pmatrix}$ $\alpha = 0{,}5k, k = \text{№}\mathit{вар} - 1,$	$\begin{pmatrix} 4{,}21 \\ 6{,}47+\beta \\ 2{,}38 \\ 10{,}48+\beta \end{pmatrix}$ $\beta = 0{,}5k,\ k = \text{№}\mathit{вар} - 1$
5-9	$\begin{pmatrix} 8{,}30 & 2{,}62+\alpha & 4{,}10 & 1{,}90 \\ 3{,}92 & 8{,}45 & 8{,}78-\alpha & 2{,}46 \\ 3{,}77 & 7{,}21+\alpha & 8{,}04 & 2{,}28 \\ 2{,}21 & 3{,}65-\alpha & 1{,}69 & 6{,}99 \end{pmatrix}$ $\alpha = 0{,}2k, k = \text{№}\mathit{вар} - 5$	$\begin{pmatrix} -10{,}65+\beta \\ 12{,}21 \\ 15{,}45-\beta \\ -8{,}35 \end{pmatrix}$ $\beta = 0{,}2k, k = \text{№}\mathit{вар} - 5$
10	$\begin{pmatrix} 1{,}00 & 0{,}42 & 0{,}54 & 0{,}66 \\ 0{,}42 & 1{,}00 & 0{,}32 & 0{,}44 \\ 0{,}54 & 0{,}32 & 1{,}00 & 0{,}22 \\ 0{,}66 & 0{,}44 & 0{,}22 & 1{,}00 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0{,}3 \\ 0{,}5 \\ 0{,}7 \\ 0{,}9 \end{pmatrix}$
11-15	$\begin{pmatrix} 5{,}18+\alpha & 1{,}12 & 0{,}95 & 1{,}32 & 0{,}83 \\ 1{,}12 & 4{,}28-\alpha & 2{,}12 & 0{,}57 & 0{,}91 \\ 0{,}95 & 2{,}12 & 6{,}13+\alpha & 1{,}29 & 1{,}57 \\ 1{,}32 & 0{,}57 & 1{,}29 & 4{,}57-\alpha & 1{,}25 \\ 0{,}83 & 0{,}91 & 1{,}57 & 1{,}25 & 5{,}21+\alpha \end{pmatrix}$ $\alpha = 0{,}25k,\ k = \text{№}\mathit{вар} - 11$	$\begin{pmatrix} 6{,}19+\beta \\ 3{,}21 \\ 4{,}28-\beta \\ 6{,}25 \\ 4{,}95+\beta \end{pmatrix}$ $\beta = 0{,}35k,\ k = \text{№}\mathit{вар} - 11$
16	$\begin{pmatrix} 2{,}12 & 0{,}42 & 1{,}34 & 0{,}88 \\ 0{,}42 & 3{,}95 & 1{,}87 & 0{,}43 \\ 1{,}34 & 1{,}87 & 2{,}98 & 0{,}46 \\ 0{,}88 & 0{,}43 & 0{,}46 & 4{,}44 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 11{,}172 \\ 0{,}115 \\ 0{,}009 \\ 9{,}349 \end{pmatrix}$
17	$\begin{pmatrix} 6{,}92 & 1{,}28 & 0{,}79 & 1{,}15 & -0{,}66 \\ 0{,}92 & 3{,}5 & 1{,}3 & -1{,}62 & 1{,}02 \\ 1{,}15 & -2{,}46 & 6{,}1 & 2{,}1 & 1{,}483 \\ 1{,}33 & 0{,}16 & 2{,}1 & 5{,}44 & -18 \\ 1{,}14 & -1{,}68 & -1{,}217 & 9 & -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2{,}1 \\ 0{,}72 \\ 3{,}87 \\ 13{,}8 \\ -1{,}08 \end{pmatrix}$
18	$\begin{pmatrix} 7{,}03 & 1{,}22 & 0{,}85 & 1{,}135 & -0{,}81 \\ 0{,}98 & 3{,}39 & 1{,}3 & -1{,}63 & 0{,}57 \\ 1{,}09 & -2{,}46 & 6{,}21 & 2{,}1 & 1{,}033 \\ 1{,}345 & 0{,}16 & 2{,}1 & 5{,}33 & -12 \\ 1{,}29 & -1{,}23 & -0{,}767 & 6 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2{,}1 \\ 0{,}84 \\ 2{,}58 \\ 11{,}96 \\ -1{,}47 \end{pmatrix}$

19	$\begin{pmatrix} 5,5 & 7,0 & 6,0 & 5,5 \\ 7,0 & 10,5 & 8,0 & 7,0 \\ 6,0 & 8,0 & 10,5 & 9 \\ 5,5 & 7 & 9 & 10,5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 23 \\ 32 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix}$
20	$\begin{pmatrix} 6,59 & 1,28 & 0,79 & 1,195 & -0,21 \\ 0,92 & 3,83 & 1,3 & -1,63 & 1,02 \\ 1,15 & -2,46 & 5,77 & 2,1 & 1,483 \\ 1,285 & 0,16 & 2,1 & 5,77 & -18 \\ 0,69 & -1,68 & -1,217 & 9 & -6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2,1 \\ 0,36 \\ 3,89 \\ 11,04 \\ -0,27 \end{pmatrix}$
21	$\begin{pmatrix} 3,81 & 0,25 & 1,28 & 1,75 \\ 2,25 & 1,32 & 5,58 & 0,49 \\ 5,31 & 7,28 & 0,98 & 1,04 \\ 10,39 & 2,45 & 3,35 & 2,28 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4,21 \\ 8,97 \\ 2,38 \\ 12,98 \end{pmatrix}$
22-25	$\begin{pmatrix} 5,18+\alpha & 1,12 & 0,95 & 1,32 & 0,83 \\ 1,12 & 4,28-\alpha & 2,12 & 0,57 & 0,91 \\ 0,95 & 2,12 & 6,13+\alpha & 1,29 & 1,57 \\ 1,32 & 0,57 & 1,29 & 4,57-\alpha & 1,25 \\ 0,83 & 0,91 & 1,57 & 1,25 & 5,21+\alpha \end{pmatrix}$ $\alpha = 0,25k,\ k = \mid №вар - 25 \mid$	$\begin{pmatrix} 6,19+\beta \\ 3,21 \\ 4,28-\beta \\ 6,25 \\ 4,95+\beta \end{pmatrix}$ $\beta = 0,35k,\ k = №вар - 21$

4 Вимоги до звіту

Звіт має містити:

- постановку задачі;
- вихідну систему рівнянь;
- проміжні результати та кінцевий результат;
- вектор нев'язки;
- копія розв'язку задачі у Mathcad; вектор нев'язки для цього розв'язку;
- порівняння власного розв'язку та розв'язку, отриманого у Mathcad;
- лістинг програми.

5 Література

1. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. М., Наука, 1989.
2. Волков Е.А., Численные методы. М., Наука, 1987.
3. Демидович В.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики.Наука, 1986.
4. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. Т.1., М., Наука, 1966; Т.2., М., Физматгиз, 1960.
5. Кузнецов В.М., Жданова О.Г., Галицька І.Є. Методи розв'язання систем лінійних і нелінійних рівнянь та їх систем. Проблема власних значень. Методичні вказівки до виконання розрахунково-графічної роботи з дисципліни „Числові методи". „Політехніка", НТУУ „КПІ", 2001.