

Національний технічний університет України «КПІ ім. Ігоря Сікорського»
Факультет Інформатики та Обчислювальної Техніки
Кафедра Обчислювальної Техніки

Лабораторна робота № 5

з дисципліни «Чисельні методи»

на тему

«Інтерполяційні поліноми»

Виконав:
студент гр. ІП-93
Домінський Валентин

Викладач:
доц. Рибачук Л.В.

Київ – 2021

Зміст

Зміст	2
1 Постановка задачі	3
2 Розв'язок	4
3 Розв'язок у Mathcad.....	7
4 Лістинг програми	11
Висновок:	14

1 Постановка задачі

Створити програму, яка для заданої функції по заданим точкам будує інтерполяційний поліном $P_n(x)$ у формі Лагранжа, а також здійснює інтерполяцію кубічними сплайнами.

Програма має розраховувати значення похибки $\varepsilon = |P_n(x) - y(x)|$, для чого потрібно вивести на графік із кроком (графік можна будувати допоміжними засобами, наприклад, у Mathcad), меншим у 5-6 разів, ніж крок інтерполяції, відповідні значення поліному та точної функції. Якщо похибка дуже мала, застосувати масштабування.

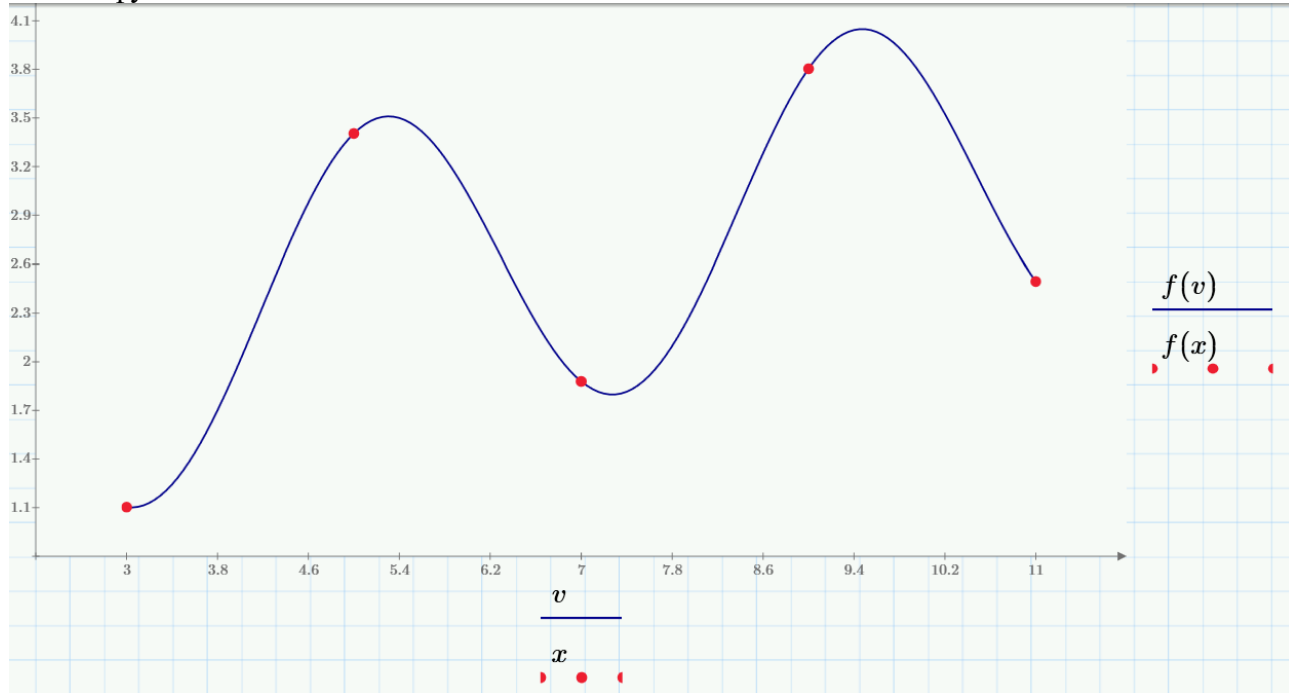
Знайти кубічний інтерполяційний сплайн для заданої функції у Mathcad. Вивести графік результатів.

2 Розв'язок

Номер варіанту = 9, отже метод Лагранжа

$$\begin{array}{lll}
 k := 9 - 1 & x1 := -5 + k = 3 & \alpha := 3 \\
 & x2 := -3 + k = 5 & \\
 & x3 := -1 + k = 7 & \\
 & x4 := 1 + k = 9 & \\
 & x5 := 3 + k = 11 &
 \end{array}
 \quad y(x) := \sin\left(\frac{\alpha}{2} \cdot x\right) + \sqrt[3]{x \cdot \alpha}$$

Задана функція:



Вигляд поліному Лагранжа:

Перевіряю поліном Лагранжа

$$temp1(z) := y1 \cdot \left(\frac{(z-5)}{(3-5)}\right) \cdot \left(\frac{(z-7)}{(3-7)}\right) \cdot \left(\frac{(z-9)}{(3-9)}\right) \cdot \left(\frac{(z-11)}{(3-11)}\right)$$

$$temp2(z) := y2 \cdot \left(\frac{(z-3)}{(5-3)}\right) \cdot \left(\frac{(z-7)}{(5-7)}\right) \cdot \left(\frac{(z-9)}{(5-9)}\right) \cdot \left(\frac{(z-11)}{(5-11)}\right)$$

$$temp3(z) := y3 \cdot \left(\frac{(z-3)}{(7-3)}\right) \cdot \left(\frac{(z-5)}{(7-5)}\right) \cdot \left(\frac{(z-9)}{(7-9)}\right) \cdot \left(\frac{(z-11)}{(7-11)}\right)$$

$$temp4(z) := y4 \cdot \left(\frac{(z-3)}{(9-3)}\right) \cdot \left(\frac{(z-5)}{(9-5)}\right) \cdot \left(\frac{(z-7)}{(9-7)}\right) \cdot \left(\frac{(z-11)}{(9-11)}\right)$$

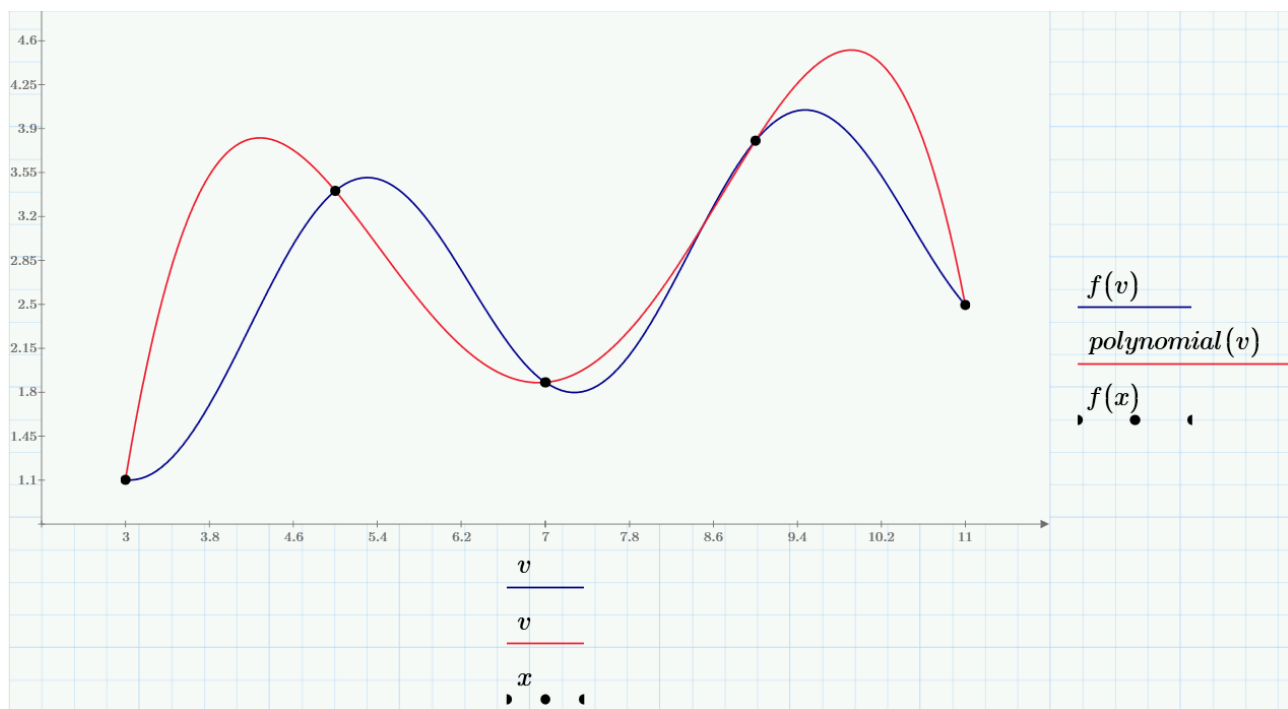
$$temp5(z) := y5 \cdot \left(\frac{(z-3)}{(11-3)}\right) \cdot \left(\frac{(z-5)}{(11-5)}\right) \cdot \left(\frac{(z-7)}{(11-7)}\right) \cdot \left(\frac{(z-9)}{(11-9)}\right)$$

$$polynomial(z) := temp1(z) + temp2(z) + temp3(z) + temp4(z) + temp5(z) \xrightarrow{\text{simplify}} -0.036349772706138297917 \cdot z^4 + 1.023981662140071 \cdot z^3 - 10.2401901829075371082 \cdot z^2 + 42.7843873673256356992 \cdot z - 59.79207003906808924$$

Lagrange Polynom:

$$\begin{aligned}
 & 1.102553705386807 \cdot ((x-5)/(3-5)) \cdot ((x-7)/(3-7)) \cdot ((x-9)/(3-9)) \cdot ((x-11)/(3-11)) + 3.4042120511052087 \\
 & \cdot ((x-3)/(5-3)) \cdot ((x-7)/(5-7)) \cdot ((x-9)/(5-9)) \cdot ((x-11)/(5-11)) + 1.8792284164094504 \cdot ((x-3)/(7-3)) \\
 & \cdot ((x-5)/(7-5)) \cdot ((x-9)/(7-9)) \cdot ((x-11)/(7-11)) + 3.803784426551621 \cdot ((x-3)/(9-3)) \cdot ((x-5)/(9-5)) \\
 & \cdot ((x-7)/(9-7)) \cdot ((x-11)/(9-11)) + 2.495748987626703 \cdot ((x-3)/(11-3)) \cdot ((x-5)/(11-5)) \cdot ((x-7)/(11-7)) \\
 & \cdot ((x-9)/(11-9))
 \end{aligned}$$

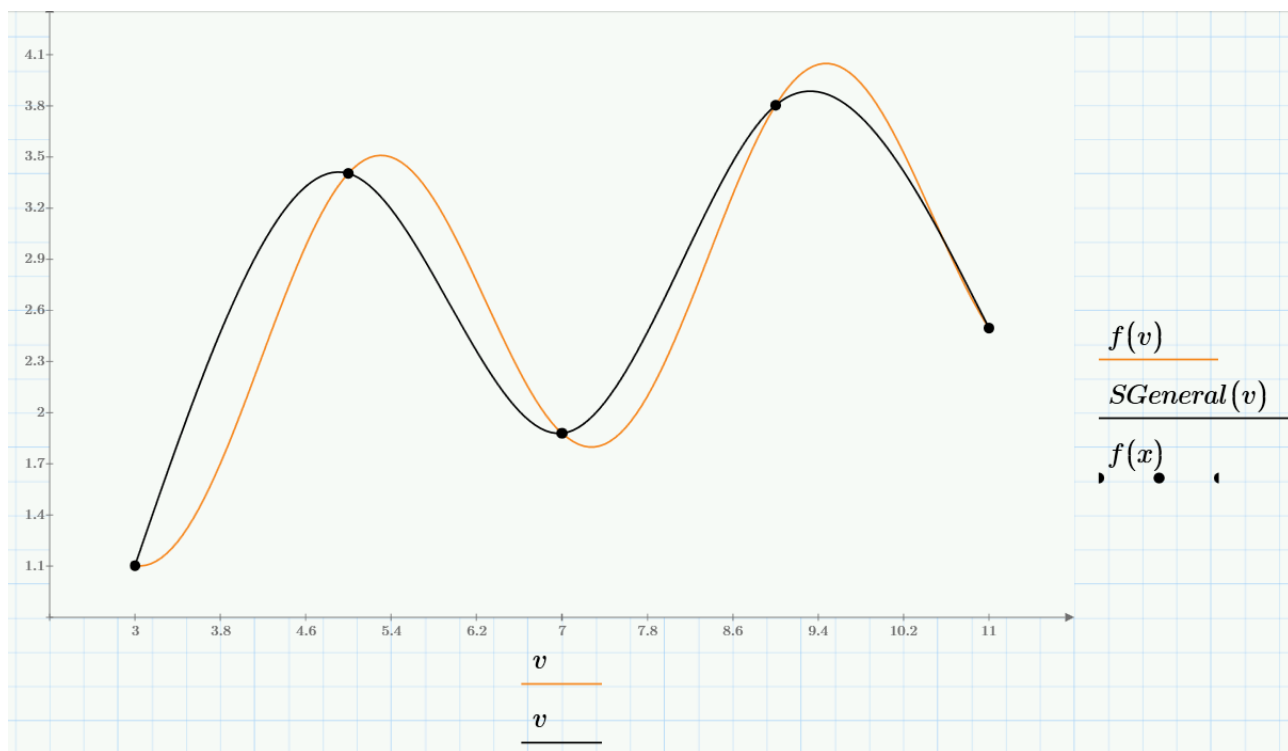
Порівняльний графік функції та інтерполяційного поліному:



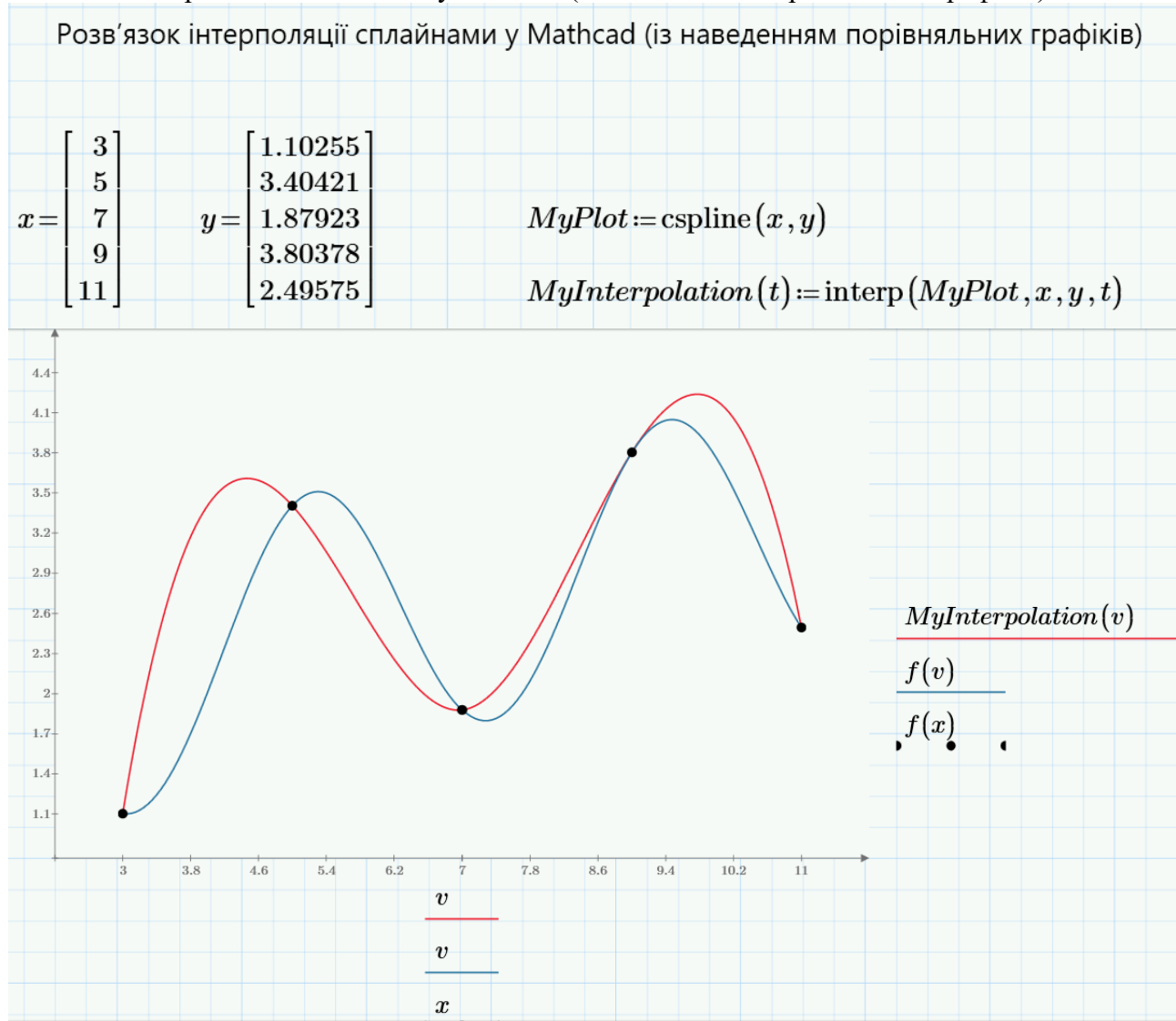
Сплайни (коефіцієнти сплайнових інтерполяційних поліномів):

```
Coefficients of spline interpolation polynomial =
[ 1.81539 -0.17828  0.06276  0.52658 -0.          -0.99684  1.11736 -0.88545
 -0.16614  0.35237 -0.3338  0.14758]
```

Порівняльний графік функції та сплайн-інтерполяції:



Розв'язок інтерполяції сплайнами у Mathcad (із наведенням порівняльних графіків):



Увесь вивід:

```
X =
[ 3 5 7 9 11]

Y =
[1.10255 3.40421 1.87923 3.80378 2.49575]

Lagrange Polynom:

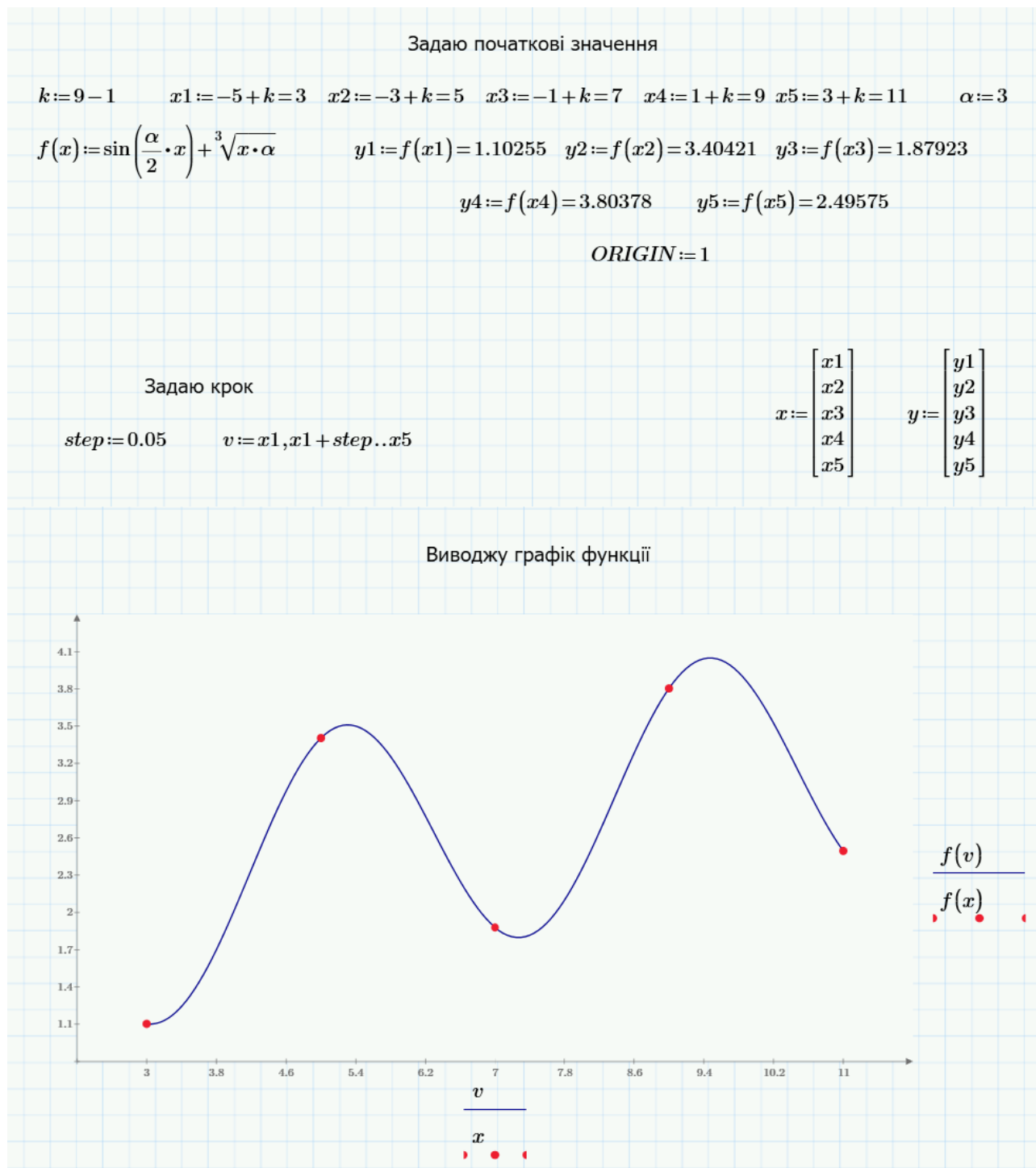
1.102553705386807 * ((x - 5)/(3 - 5)) * ((x - 7)/(3 - 7)) * ((x - 9)/(3 - 9)) * ((x - 11)/(3 - 11)) + 3.4042120511052087
* ((x - 3)/(5 - 3)) * ((x - 7)/(5 - 7)) * ((x - 9)/(5 - 9)) * ((x - 11)/(5 - 11)) + 1.8792284164094504 * ((x - 3)/(7 -
3)) * ((x - 5)/(7 - 5)) * ((x - 9)/(7 - 9)) * ((x - 11)/(7 - 11)) + 3.803784426551621 * ((x - 3)/(9 - 3)) * ((x - 5)/(9
- 5)) * ((x - 7)/(9 - 7)) * ((x - 11)/(9 - 11)) + 2.495748987626703 * ((x - 3)/(11 - 3)) * ((x - 5)/(11 - 5)) * ((x - 7)
/(11 - 7)) * ((x - 9)/(11 - 9))

Coef of 3 element = 1.102553705386807
Fault of element 3 = 0.0
Coef of 5 element = 3.4042120511052087
Fault of element 5 = 0.0
Coef of 7 element = 1.8792284164094504
Fault of element 7 = 0.0
Coef of 9 element = 3.803784426551621
Fault of element 9 = 0.0
Coef of 11 element = 2.495748987626703
Fault of element 11 = 0.0

Coefficients of spline interpolation polynomial =
[ 1.81539 -0.17828 0.06276 0.52658 -0. -0.99684 1.11736 -0.88545
-0.16614 0.35237 -0.3338 0.14758]
```

3 Розв'язок у Mathcad

Нижче наведено розв'язок системи у Mathcad



Перевіряю поліном Лагранжа

$$temp1(z) := y1 \cdot \left(\frac{(z-5)}{(3-5)} \right) \cdot \left(\frac{(z-7)}{(3-7)} \right) \cdot \left(\frac{(z-9)}{(3-9)} \right) \cdot \left(\frac{(z-11)}{(3-11)} \right)$$

$$temp2(z) := y2 \cdot \left(\frac{(z-3)}{(5-3)} \right) \cdot \left(\frac{(z-7)}{(5-7)} \right) \cdot \left(\frac{(z-9)}{(5-9)} \right) \cdot \left(\frac{(z-11)}{(5-11)} \right)$$

$$temp3(z) := y3 \cdot \left(\frac{(z-3)}{(7-3)} \right) \cdot \left(\frac{(z-5)}{(7-5)} \right) \cdot \left(\frac{(z-9)}{(7-9)} \right) \cdot \left(\frac{(z-11)}{(7-11)} \right)$$

$$temp4(z) := y4 \cdot \left(\frac{(z-3)}{(9-3)} \right) \cdot \left(\frac{(z-5)}{(9-5)} \right) \cdot \left(\frac{(z-7)}{(9-7)} \right) \cdot \left(\frac{(z-11)}{(9-11)} \right)$$

$$temp5(z) := y5 \cdot \left(\frac{(z-3)}{(11-3)} \right) \cdot \left(\frac{(z-5)}{(11-5)} \right) \cdot \left(\frac{(z-7)}{(11-7)} \right) \cdot \left(\frac{(z-9)}{(11-9)} \right)$$

$$polynomial(z) := temp1(z) + temp2(z) + temp3(z) + temp4(z) + temp5(z) \xrightarrow{\text{simplify}} -0.036349772706138297917 \cdot z^4 + 1.023981662140071 \cdot z^3 - 10.2401901829075371082 \cdot z^2 + 42.7843873256356992 \cdot z - 59.7920700390069808924$$

Перевіряю похибку без заокруглення та з ним

$$|f(x1) - polynomial(x1)| = 0 \quad |f(x2) - polynomial(x2)| = 0 \quad |f(x3) - polynomial(x3)| = 0$$

$$|f(x4) - polynomial(x4)| = 0 \quad |f(x5) - polynomial(x5)| = 0$$

$$polynomialWithRounding(z) := -0.03634 \cdot z^4 + 1.02398 \cdot z^3 - 10.24019 \cdot z^2 + 42.78438 \cdot z - 59.79207$$

$$|f(x1) - polynomialWithRounding(x1)| = 0.00073 \quad |f(x2) - polynomialWithRounding(x2)| = 0.00587$$

$$|f(x3) - polynomialWithRounding(x3)| = 0.02285$$

$$|f(x4) - polynomialWithRounding(x4)| = 0.06286 \quad |f(x5) - polynomialWithRounding(x5)| = 0.14081$$

$$polynomial(x1) = 1.10255$$

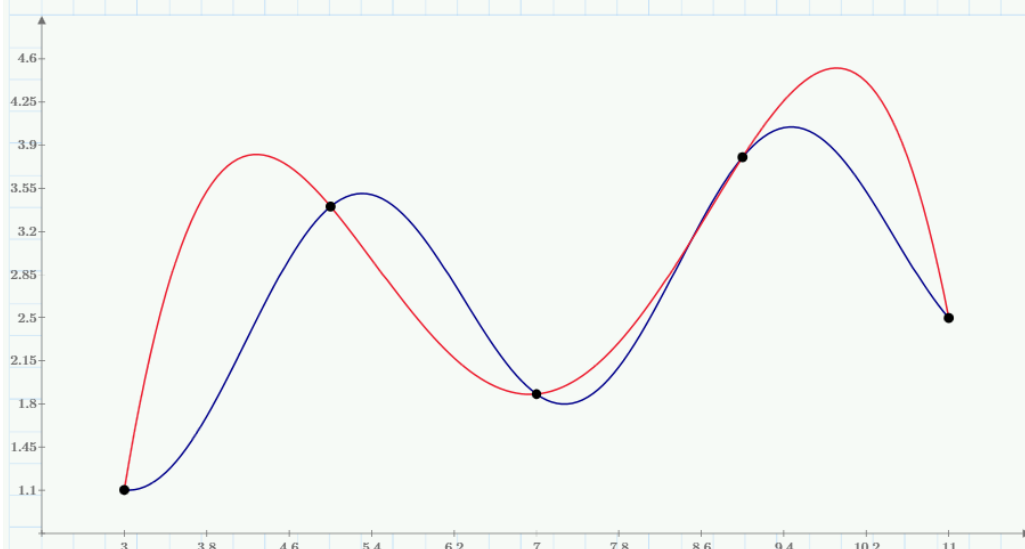
$$polynomial(x3) = 1.87923$$

$$polynomial(x5) = 2.49575$$

$$polynomial(x2) = 3.40421$$

$$polynomial(x4) = 3.80378$$

Порівняльний графік функції та інтерполяційного поліному



$$\frac{f(v)}{polynomial(v)}$$

$$f(x)$$

Приклад роботи різних функцій

$exampleS1 := lspline(x, y)$

$exampleS2 := pspline(x, y)$

$exampleS3 := cspline(x, y)$

$A1(v) := \text{interp}(exampleS1, x, y, v)$

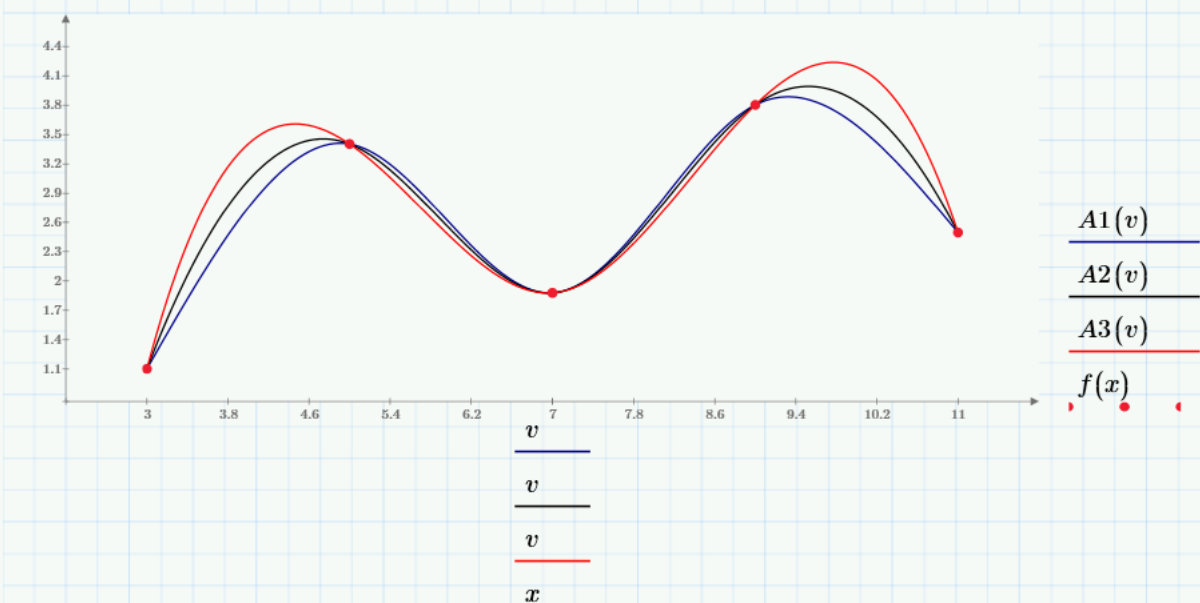
$A2(v) := \text{interp}(exampleS2, x, y, v)$

$A3(v) := \text{interp}(exampleS3, x, y, v)$

$A1(3) = 1.10255$

$A2(3) = 1.10255$

$A3(3) = 1.10255$



Порівняльний графік функції та сплайн-інтерполяції з програми

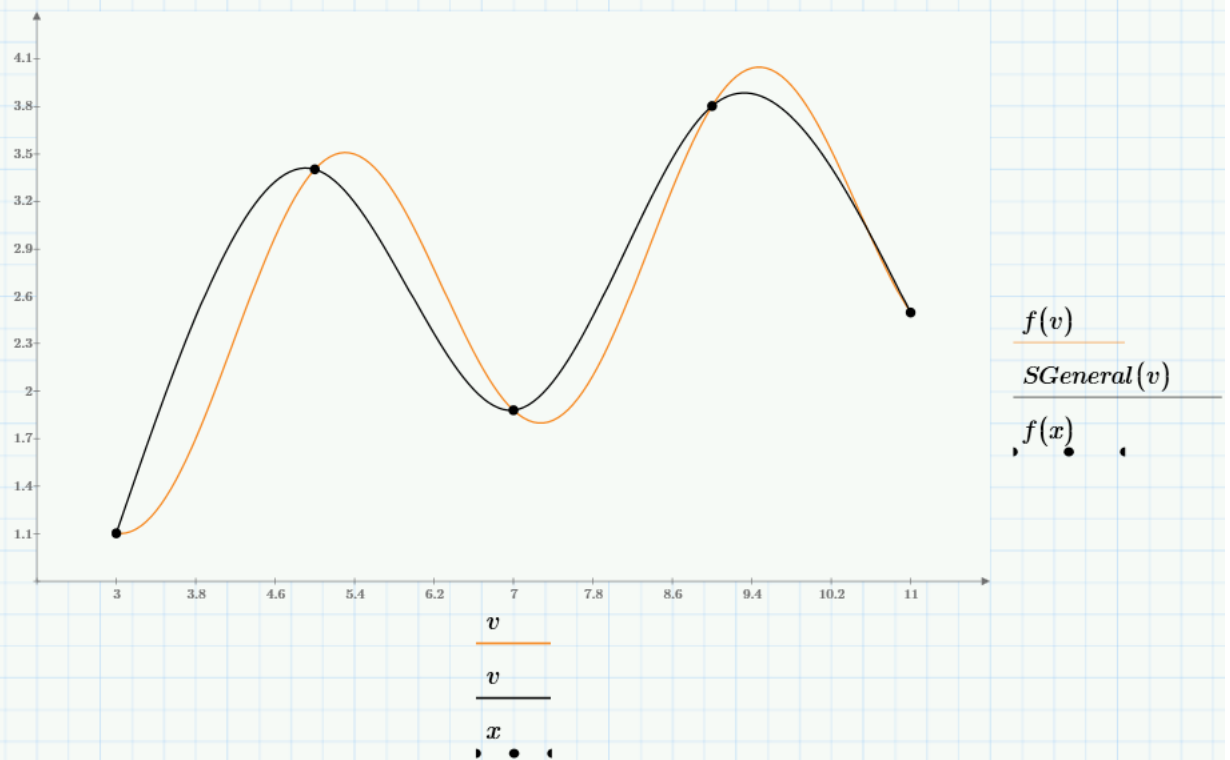
$$x = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \\ 9 \\ 11 \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} 1.10255 \\ 3.40421 \\ 1.87923 \\ 3.80378 \\ 2.49575 \end{bmatrix} \quad b := \begin{bmatrix} 1.81539 \\ -0.17828 \\ 0.06276 \\ 0.52658 \end{bmatrix} \quad c := \begin{bmatrix} 0 \\ -0.99684 \\ 1.11736 \\ -0.88545 \end{bmatrix} \quad d := \begin{bmatrix} -0.16614 \\ 0.35237 \\ -0.3338 \\ 0.14758 \end{bmatrix}$$

$$S1(t) := 1.10255 + 1.81539 (t-3) + 0 (t-3)^2 - 0.16614 (t-3)^3$$

$$S2(t) := 3.40421 - 0.17828 (t-5) - 0.99684 (t-5)^2 + 0.35237 (t-5)^3$$

$$S3(t) := 1.87923 + 0.06276 (t-7) + 1.11736 (t-7)^2 - 0.3338 (t-7)^3$$

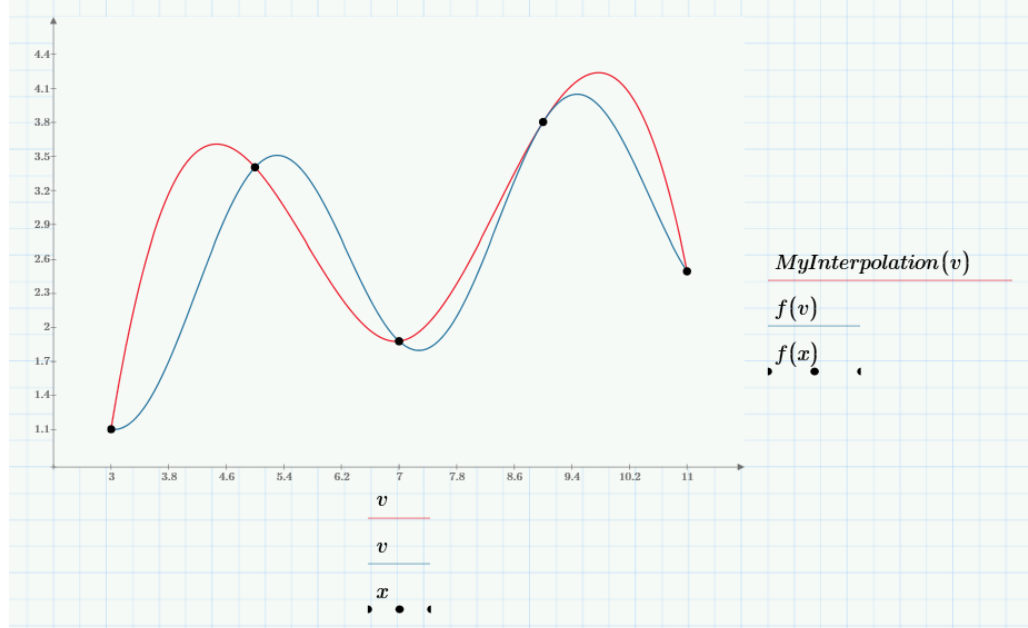
$$S4(t) := 3.80378 + 0.52658 (t-9) - 0.88545 (t-9)^2 + 0.14758 (t-9)^3$$

$$SGeneral(x) := \text{if}(x < 5, S1(x), \text{if}(x \geq 5 \wedge x < 7, S2(x), \text{if}(x \geq 7 \wedge x < 9, S3(x), \text{if}(x \geq 9 \wedge x < 11, S4(x), 10))))$$


Розв'язок інтерполяції сплайнами у Mathcad (із наведенням порівняльних графіків)

$$x = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \\ 9 \\ 11 \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} 1.10255 \\ 3.40421 \\ 1.87923 \\ 3.80378 \\ 2.49575 \end{bmatrix}$$

$$MyPlot := \text{cspline}(x, y)$$

$$MyInterpolation(t) := \text{interp}(MyPlot, x, y, t)$$


У технічних розрахунках точність вимірювань характеризують відносною похибкою. Результат вважають гарним, якщо відносна похибка не перевищує 0,1 %. Отже Наш результат є гарним

4 Лістинг програми

Lab5.py

```
# region Starting Values
import numpy as np
np.set_printoptions(suppress=True)
from math import sin

rounding = 5
N = 5
numberOfUnknown = 12
lengthOfRowForMatrix = numberOfUnknown + 1

differenceBetweenTwoPoints = 2

Xarray = [3, 5, 7, 9, 11]

# My Sin Function
def MySinFun(x) -> float:
    element = sin(3 / 2 * x) + (x * 3) ** (1 / 3)
    return element

Yarray = [MySinFun(Xarray[0]), MySinFun(Xarray[1]), MySinFun(Xarray[2]), MySinFun(Xarray[3]),
MySinFun(Xarray[4])]

# endregion Starting Values

# region Prints

# Print matrix
def PrintMatrixAsNp(matrixName, matrix):
    print("\n", matrixName, "=")
    npMatrix = np.array(matrix)
    print(npMatrix.round(rounding))

# Print vector
def PrintVectorAsNp(vectorName, vector):
    print("\n", vectorName, "=")
    npMatrix = np.array(vector)
    print(npMatrix.round(rounding))

# Print Lagrange
def PrintLagrange(Xarray, Yarray):
    PrintVectorAsNp("X", Xarray)
    PrintVectorAsNp("Y", Yarray)
    print("\nLagrange Polynom:")
    firstPart = f"\n{Yarray[0]} * ((x - {Xarray[1]})/({Xarray[0]} - {Xarray[1]})) * ((x - {Xarray[2]})/({Xarray[0]} - {Xarray[2]})) * ((x - {Xarray[3]})/({Xarray[0]} - {Xarray[3]})) * ((x - {Xarray[4]})/({Xarray[0]} - {Xarray[4]})) +"
    secondPart = f"\n{Yarray[1]} * ((x - {Xarray[0]})/({Xarray[1]} - {Xarray[0]})) * ((x - {Xarray[2]})/({Xarray[1]} - {Xarray[2]})) * ((x - {Xarray[3]})/({Xarray[1]} - {Xarray[3]})) * ((x - {Xarray[4]})/({Xarray[1]} - {Xarray[4]})) +"
    thirdPart = f"\n{Yarray[2]} * ((x - {Xarray[0]})/({Xarray[2]} - {Xarray[0]})) * ((x - {Xarray[1]})/({Xarray[2]} - {Xarray[1]})) * ((x - {Xarray[3]})/({Xarray[2]} - {Xarray[3]})) * ((x - {Xarray[4]})/({Xarray[2]} - {Xarray[4]})) +"
    fourthPart = f"\n{Yarray[3]} * ((x - {Xarray[0]})/({Xarray[3]} - {Xarray[0]})) * ((x - {Xarray[1]})/({Xarray[3]} - {Xarray[1]})) * ((x - {Xarray[2]})/({Xarray[3]} - {Xarray[2]})) * ((x - {Xarray[4]})/({Xarray[3]} - {Xarray[4]})) +"
    fifthPart = f"\n{Yarray[4]} * ((x - {Xarray[0]})/({Xarray[4]} - {Xarray[0]})) * ((x - {Xarray[1]})/({Xarray[4]} - {Xarray[1]})) * ((x - {Xarray[2]})/({Xarray[4]} - {Xarray[2]})) * ((x - {Xarray[3]})/({Xarray[4]} - {Xarray[3]})) +"
    print(firstPart, secondPart, thirdPart, fourthPart, fifthPart, "\n")

# endregion Prints

# Implementing Lagrange Interpolation
def Lagrange(X_array, Y_array, pointToShow, show) -> float:
```

```

# Create some prerequisites
resultAsYpoint = 0
for k in range(len(Y_array)):
    # Create some prerequisites
    tempPoint1 = 0
    tempPoint2 = 0

    tempPointArray = [tempPoint1, tempPoint2]

    tempPointArray[0] = 1
    tempPointArray[1] = 1

    for m in range(len(X_array)):
        if m == k:
            for z in range(2):
                tempPointArray[z] = tempPointArray[z] * 1

        else:
            tempPointArray[1] = tempPointArray[1] * (X_array[k] - X_array[m])
            tempPointArray[0] = tempPointArray[0] * (pointToShow - X_array[m])

    resultAsYpoint = resultAsYpoint + Y_array[k] * tempPointArray[0] / tempPointArray[1]

if show:
    print("Coef of", pointToShow, "element =", resultAsYpoint)

return resultAsYpoint

def CreateMatrixForCramer(Xarray, Yarray) -> [list, list]:
    # Create some prerequisites
    matrixForCramer = list()
    rightPartForCramer = [0] * (lengthOfRowForMatrix - 1)

    # Call Our functions to create matrix
    FirstPartOfEquation(Xarray, Yarray, matrixForCramer)

    SecondPartOfEquation(Xarray, Yarray, matrixForCramer)

    ThirdPartOfEquation(Xarray, Yarray, matrixForCramer)

    FourthPartOfEquation(Xarray, Yarray, matrixForCramer)

    FifthPartOfEquation(Xarray, Yarray, matrixForCramer)

    # Create Right Part
    for i in range(len(matrixForCramer)):
        rightPartForCramer[i] = matrixForCramer[i][-1]

    # Clean matrix
    matrixForCramer = np.delete(matrixForCramer, np.s_[-1:], axis=1)

    return rightPartForCramer, matrixForCramer

#region PartsOfEquation

def FirstPartOfEquation(Xarray, Yarray, matrixForCramer):
    for i in range(1, len(Xarray)):
        queue = [0] * lengthOfRowForMatrix

        queue[i-1] = differenceBetweenTwoPoints; queue[i+3] = differenceBetweenTwoPoints ** 2
        queue[i+7] = differenceBetweenTwoPoints ** 3; queue[12] = Yarray[i] - Yarray[i - 1]

        matrixForCramer.append(queue)

```

```

def SecondPartOfEquation(Xarray, Yarray, matrixForCramer):
    for i in range(1, len(Xarray) - 1):
        queue = [0] * lengthOfRowForMatrix

        queue[i] = 1; queue[i-1] = -1; queue[12] = 0
        queue[i+3] = -2 * differenceBetweenTwoPoints; queue[i+7] = -3 * differenceBetweenTwoPoints ** 2

        matrixForCramer.append(queue)

def ThirdPartOfEquation(Xarray, Yarray, matrixForCramer):
    for i in range(1, len(Xarray) - 1):
        queue = [0] * lengthOfRowForMatrix

        queue[i+4] = 1; queue[i+3] = -1; queue[i+7] = -3 * differenceBetweenTwoPoints; queue[12] = 0

        matrixForCramer.append(queue)

def FourthPartOfEquation(Xarray, Yarray, matrixForCramer):
    queue = [0] * lengthOfRowForMatrix

    queue[7] = 1; queue[11] = 3 * differenceBetweenTwoPoints; queue[12] = 0

    matrixForCramer.append(queue)

def FifthPartOfEquation(Xarray, Yarray, matrixForCramer):
    queue = [0] * lengthOfRowForMatrix

    queue[4] = 1; queue[12] = 0

    matrixForCramer.append(queue)

#endregion PartsOfEquation

# Do Cramer Method
def Cramer(matrixForComputations, matrixForCramer, rightPartForCramer) -> list:
    # Create some prerequisites
    SIPcoeffs = list()

    for k in range(0, len(rightPartForCramer)):
        for h in range(0, len(rightPartForCramer)):
            # Get values for right part
            matrixForComputations[h][k] = rightPartForCramer[h]

            if k > 0:
                matrixForComputations[h][k - 1] = matrixForCramer[h][k - 1]

        # Add value to the vector
        SIPcoeffs.append(np.linalg.det(matrixForComputations) / np.linalg.det(matrixForCramer))

        # Rounding values
        SIPcoeffs[k] = round(SIPcoeffs[k], rounding)

    return SIPcoeffs

# Printing Lagrange Equation
PrintLagrange(Xarray, Yarray)

for i in range(N):
    Lagrange(Xarray, Yarray, Xarray[i], True)
    print("Fault of element", Xarray[i], "=", abs(MySinFun(Xarray[i]) - Lagrange(Xarray, Yarray, Xarray[i],
False)))

```

```
rightPartForCramer, matrixForCramer = CreateMatrixForCramer(Xarray.copy(), Yarray.copy())
matrixForComputations = list(map(list, matrixForCramer))

# Coefficients of spline interpolation polynomials
SIPcoeffs = Cramer(matrixForComputations, matrixForCramer, rightPartForCramer)
PrintVectorAsNp("Coefficients of spline interpolation polynomial", SIPcoeffs)
```

Висновок:

Я навчився використовувати різні методи інтерполяції, визначати сплайн коефіцієнти. Покращив навички роботи з графіками у маткад.