НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ

«КПІ імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

Кафедра Автоматизованих Систем Обробки Інформації та Управління

Спеціальні розділи математики

Лабораторна робота № 7
Чисельне інтегрування функцій

Зміст

1 Теоретичні відомості

Чисельне інтегрування функцій

Квадратурна формула може бути записана у вигляді

$$\int_a^b p(x)f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k); \quad x_k \in [a,b] \tag{1.1}$$

Величини A_k називаються квадратурними коефіцієнтами, x_k – квадратурними вузлами, а права частина формули – квадратурною сумою. Функція *p(x)* називається функцією ваги.

Інтегрування, що грунтується на інтерполяційних формулах

При обчисленні квадратурних коефіцієнтів вузли x_k обираються рівновіддаленими. Інтерполяційні квадратури з такими вузлами прийнято називати *формулами Ньютона-Котеса.*

Припустимо, що відрізок інтегрування скінченний. Поділимо його на *n* рівних частин довжини *h = (b-a)/n*, так що $x_k = x_0 + hk$. Інтерполяційну формулу запишемо у наступному вигляді:

$$\int_a^b p(x)f(x)dx \approx (b-a)\sum_{k=0}^{n} B_k^n f(a+kh) \tag{1.2}$$

$$B_k^n = \frac{A_k}{b-a} = \int_a^b p(x)\frac{\omega(x)}{(x-x_k)\omega'(x_k)}dx. \tag{1.3}$$

Для сталої вагової функції $p(x)=1$ формула Ньютона-Котеса має вигляд

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)\sum_{k=0}^{n} B_k^n f(a+kh) \tag{1.4}$$

$$B_k^n = \frac{(-1)^{n-k}}{nh!(n-k)!}\int_a^b \frac{q(q-1)...(q-n)}{q-k}dq. \tag{1.5}$$

Таблиця, що наведена нижче, містить значення коефіцієнтів B_k^n. Для кожного *n* має місце співвідношення симетрії: $B_k^n = B_{n-k}^n$, тому в таблицю включені лише коефіцієнти з індексами $k \le n/2$.

Таблиця 9.1. Значення коефіцієнтів B_k^n $(k \le n/2)$.

n/k	0	1	2	3
1	1/2			
2	1/6	4/6		
3	1/8	3/8		
4	7/90	32/90	12/90	
5	19/288	75/288	50/288	
6	41/840	216/840	27/840	272/840

Задамо деякі точки $a_i \in [-1,1]$ й побудуємо інтерполяційний поліном $L_m(x)$, що співпадає з *f(x)* у вузлах

$$x_i = (b+a)/2 + a_i(b-a)/2.$$

Формула трапеції

Найпростіша інтерполяційна квадратурна формула одержується при $m=2$; $a_1 = -1$; $a_2 = 1$. Тоді коефіцієнти при A_k*; k = 0, 1, 2* обчислюються за формулою

$$A_0 = \int_{-1}^{1} \frac{|x^2-1|}{2} dx = \frac{2}{3}; \quad A_1 = \int_{-1}^{1} \frac{1-x}{2} dx = 1; \quad A_2 = \int_{-1}^{1} \frac{1+x}{2} dx = 1 .$$

На відрізку [a,b] одержуємо наступну формулу

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2n}\left[y_0 + 2\sum_{i=1}^{n-1} y_i + y_n \right]. \tag{1.6}$$

Формула (1.6) має назву формули *трапецій*. Оцінка похибки цієї формули:

$$|R_2(f)| \le \frac{(b-a)^3}{12n^2} \max_{x\in[a,b]} |f''(x)| \tag{1.7}$$

Формула Сімпсона

При значеннях параметрів $m=4;\ a_1=-1;\ a_2=a_3=0;\ a_4=1$ одержуємо

$$A_0 = \int_{-1}^{1} \frac{x^2(x^2-1)}{4!} dx = \frac{1}{90}; \quad A_1 = \int_{-1}^{1} \frac{x^2(x-1)}{-2} dx = \frac{1}{3};$$

$$A_2 = \int_{-1}^{1} (x^2-1)dx = -\frac{4}{3}\ ;\ A_3 = \frac{1}{3}.$$

Тоді, розбивши [a, b] на *2n* підінтервалів, маємо формулу Сімпсона

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6n}\left[2\sum_{i=1}^{n}(2y_{2i-1}+y_{2i}) + y_0 + y_{2n} \right]. \tag{1.8}$$

Оцінка похибки цієї формули:

$$|R_4(f)| \le \frac{(b-a)^5}{180n^4} \max_{x\in[a,b]} \left| f^{(4)}(x) \right|. \tag{1.9}$$

Квадратурна формула Гауса

При побудові квадратурних формул, що грунтуються на інтерполяційних формулах, використовувалися рівновіддалені вузли. Для побудови квадратурних формул Гауса вузли формуются іншим шляхом.

Побудуємо квадратурну формулу у вигляді

$$I = \frac{b-a}{2}\sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i), \tag{1.10}$$

що буде точною для поліномів найбільш високого степеню при найменшій кількості вузлів. Коефіцієнти A_i та вузли x_i визначимо за умови, щоб формула була точною для $2m$ функцій $x^{k-1}, k=\overline{1,2m}$. З цієї умови та (9.16) одержуємо наступні $2m$ рівнянь

$$\int_a^b x^{k-1}dx = \sum_{i=1}^{2m} A_i x^{k-1}; \quad k=\overline{1,2m}.$$

Якщо розв'язати цю систему рівнянь й замістити одержані значення A_i та x_i у рівнянні (9.16), одержимо квадратурну формулу Гауса, що буде точною для поліномів степеню $\le 2m-1$.

Нехай

$$y(x) = \sum_{i=1}^{2m} b_i x^{i-1}.$$

Тоді

$$\int_a^b y(x)dx = \sum_{i=1}^{2m} b_i \int_a^b x^{i-1}dx = \sum_{i=1}^{m} A_i \sum_{i=1}^{2m} b_i x^{i-1} = \sum_{i=1}^{m} A_i y(x_i).$$

Будемо шукати розв'язок цієї системи рівнянь за допомогою поліномів Лежандра. З цієї метою домножимо перше та наступні m рівнянь системи на $(-1)^k C_m^k C_{m-k}^k$; $k=\overline{1,m}$ й складемо одержані $m+1$ рівнянь:

$$\int_a^b (-1)^k C_m^k C_{m-k}^k x^i dx = \sum_{i=1}^m A_i \sum_{k=1}^m (-1)^k C_m^k C_{m-k}^k x_i^k.$$

За визначенням поліномів Лежандра

$$\int_a^b L_m(x)dx = \sum_{i=1}^m A_i L_m(x_i).$$

Якщо виконати ці ж дії із наступними m рівняннями, то одержимо для k-го рівняння

$$\int_a^b x^{k-1} L_m(x)dx = \sum_{i=1}^m x_i^{k-1} A_i L_m(x_i), k=\overline{1,m}.$$

За умови ортогональності поліномів Лежандра

$$\int_a^b x^{k-1} L_m(x)dx = 0; k=\overline{1,m}.$$

одержимо

$$\sum_{i=1}^m x_i^{k-1} A_i L_m(x_i) = 0; k=\overline{1,m}.$$

Якщо в якості вузлів $\overline{x_i}$ взяти корені поліномів Лежандра, то одержимо вузли для квадратурної формули Гауса

$$L_m(\overline{x_i}) = 0.$$

У такому разі для визначення коефіцієнтів квадратурної формули (1.9) одержуємо наступну систему лінійних рівнянь

$$\begin{aligned} &A_1 + A_2 + \ldots + A_m = 1; \\ &\overline{x_1}A_1 + \overline{x_2}A_2 + \ldots + \overline{x_m}A_m = 1/2; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\overline{x_1}^{m-1}A_1 + \overline{x_2}^{m-1}A_2 + \ldots + \overline{x_m}^{m-1}A_m = 1/m. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Інтеграл буде дорівнювати

$$I = \sum_{i=1}^m A_i f(x_i) \quad . \tag{1.12}$$

У випадку відрізку довільної довжини $[a,b]$ заміною змінної

$$x = (b+a)/2 + z(b-a)/2 \tag{1.13}$$

приходимо до обчислення інтегралу на відрізку [-1,1].

Похибка квадратурної формули Гауса оцінюєтся нерівністю

$$|R_m(f)| \le \frac{(m!)^4 (b-a)^{m-1}}{(2m+1)[(2m)!]^3} \max_{\xi\in[a,b]} \left| f^{(2m)}(\xi) \right|. \tag{1.14}$$

РЕАЛІЗАЦІЯ КВАДРАТУРНОЇ ФОРМУЛИ ГАУСА

1. Для визначення кількості m (як правило, обчислення починають з 2) членів у формулі Гауса оцінити похибку за нерівністю 1.14. Якщо одержана таким чином похибка перевищує бажану точність інтегрування, то треба m збільшити на 1.
2. У випадку, коли відрізок інтегрування довільний, але скінчений, заміною 1.13 привести його до [-1,1].
3. Обчислити або взяти з таблиць корені поліномів Лежандра $L_m(x)=0$ та вагові коефіцієнти A_i.
4. Обчислити значення функції
5. Обчислити значення інтегралу за формулою 1.12.

2 Завдання

1. Реалізувати програму, яка обчислює інтеграл за допомогою формули трапеції або Сімпсона, в залежності від варіанту. Точність обчислень має бути 0,0001. Мінімальну кількість кроків визначити за формулою (1.7). Оцінити похибку результату.
2. Реалізувати програму, яка обчислює інтеграл за допомогою квадратурної формули Гауса (для всіх варіантів). Оцінити похибку результату.
3. Обчислити визначений інтеграл у Mathcad та порівняти реальну похибку кожного метода (це різниця між розрахованим значенням інтегралу і значенням у MathCad) з аналітичною похибкою кожного методу. Реальна похибка має бути не більша ніж аналітична.

3 Варіанти завдань

$$\int_a^b f(x)dx$$

Функція для 1-10 варіантів:

$$f(x) = \frac{\cos(x)}{x+1}$$

Функція для 11-20 варіантів:

$$f(x) = (x+1)\sin x$$

Функція для 21-25 варіантів:

$$f(x) = \frac{\lg(x^2+1)}{x}$$

Таблиця 1. Варіанти завдань.

№ вар.	Границі інтегрування	
	a	b
1,11,21	0.7	1.4
2,12,22	1	3
3,13,23	0.8	1.6
4,14,24	-0.7	1.2
5,15,25	-2	3
6,16,26	0.5	1.4
7,17	2	5
8,18	1.4	2.1
9,19	0.1	1.1
10,20	0.8	1.7

Парні варіанти - метод трапецій, непарні – метод Сімпсона.

4 Вимоги до звіту

Звіт має містити:

- постановку задачі у вигляді вихідного інтегралу.
- обчислення інтегралу за допомогою формули трапеції або Сімпсона, та квадратурної формули Гауса
- перевірочний розрахунок інтегралу за допомогою програми Mathcad
- висновки
- лістинг програми.

5 Література

1. Фельдман Л.П., Петренко А.І., Дмітрієва О.А. Чисельні методи в інформатиці. – К.: Видавнича група BHV, 2006. – 480 с.
2. Зеленский К.Х., Игнатенко В.Н., Коц А.П. Компьютерные методы прикладной математики. – К.: Дизайн – В, 1999. – 352 с.
3. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. М., Наука, 1989.
4. Волков Е.А., Численные методы. М., Наука, 1987.
5. Демидович В.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики.Наука, 1986.
6. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. Т.1., М., Наука, 1966; Т.2., М., Физматгиз, 1960.