МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ ім. ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК
З ДИСЦИПЛІНИ

СПЕЦІАЛЬНІ РОЗДІЛИ МАТЕМАТИКИ-2. ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ

Для студентів спеціальності
126 «Інформаційні системи та технології»
освітньо-професійної програми
«Інформаційні управляючі системи та технології»

Київ-2020

Навчальний посібник з дисципліни «Спеціальні розділи математики-2. Чисельні методи» для студентів спеціальності 126 «Інформаційні системи та технології» освітньо-професійної програми «Інформаційні управляючі системи та технології» / Рибачук Л.В. – Київ: КПІ, 2020. – 74 с.

Автори: Рибачук Людмила Віталіївна,
кандидат фізико-математичних наук, доцент

Рецензент: Солдатова М.О., ст. викл. кафедри ТК ФІОТ, к.т.н

Затверджено вченою радою ФІОТ	Затверджено на засіданні кафедри АСОІУ
Протокол № 4 від 23.11.2020 р.	Протокол № 6 від 13.11.2020 р.

ЗМІСТ

ВСТУП

Навчальний посібник з дисципліни «Спеціальні розділи математики-2. Чисельні методи» призначений для студентів спеціальності 126 «Інформаційні системи та технології» освітньо-професійної програми «Інформаційні управляючі системи та технології» кафедри автоматизованих систем обробки інформації і управління всіх форм навчання.

В навчальному посібнику викладені основні теоретичні відомості, надані практичні вказівки до виконання лабораторних робіт, вимоги до звіту, список літератури. У посібнику подано завдання, розв'язання яких необхідне для успішного оволодіння матеріалом курсу. Завдання призначені для перевірки поточної успішності.

Слід зазначити, що посібник має практичне спрямування. Основним його завданням є формування навичок із розв'язування задач. Виклад матеріалу у посібнику є стислим. Для більш глибокого вивчення розглянутих питань наприкінці посібника надається докладний перелік використаних джерел [1–22].

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 1

Тема: “Основи роботи в програмі MathCad”

Мета роботи: Освоїти основні поняття та техніку роботи у програмі MathCad.

Програма роботи

1. Ознайомитися з принципами роботи з документами MathCad (створення, збереження, відкриття і закриття).
2. Введення і редагування формул, в тому числі введення грецьких букв.
3. Введення тексту, в тому числі кирилічного.
4. Використання змінних та функцій, функцій користувача.
5. Операції з числами, в тому числі комплексними.
6. Операції з векторами і матрицями: створення, відображення. Матрична алгебра.
7. Побудова графіку, тривимірного графіку і поверхні.

Зміст звіту

1. Мета і програма роботи.
2. Усі вправи щодо роботи з документами, формул, текстів.

Теоретичні дані

Робота з документами

У Mathcad всі розрахунки організовуються на робочих областях, або "листах" (worksheets), спочатку порожніх, на яких можна додавати формули і текст. Тут і далі називатимемо робочий аркуш документом Mathcad. Це не зовсім точно передає сенс англійського терміну "worksheet", зате звичніше з точки зору термінології windows-додатків. Кожен документ є незалежною серією математичних розрахунків і зберігається в окремому файлі. Документ є одночасно і лістингом Mathcad-програми, і результатом виконання цієї програми, і звітом, який можна роздрукувати на принтері або опублікувати в Web.

Створення документу

Якщо Mathcad запускається з головного меню Windows (кнопкою Пуск), то вікно Mathcad з'являється з відкритим у ньому новим порожнім безіменним документом, названим системою Untitled:1.

Щоб створити новий порожній документ, вже працюючи в Mathcad, слід виконати одну з трьох еквівалентних дій:

- натиснення одночасно клавіш <Ctrl>+<n>;
- натиснення кнопки New (Створити) на панелі інструментів; клацнувши на команді верхнього меню File / New (Файл / Створити).

В Mathcad 11 кнопка New на стандартній панелі складається з двох частин (рис.1):

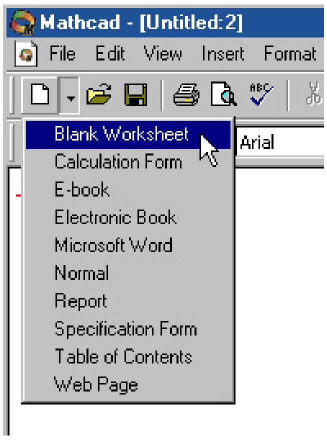


Рис.1. Створення нового документу кнопкою New

Вибір Blank Worksheet – створення пустого документу, інше – створення документу на основі того чи іншого шаблону (детальніше – в документації).

Збереження документу

Щоб зберегти документ у форматі Mathcad, виберіть File / Save (Файл / Сохранить), або натискайте клавіші <Ctrl>+<s> або кнопку Save на стандартній панелі інструментів. Якщо створений документ зберігається вперше, на екран буде виведено діалогове вікно Збереження (Save), в якому потрібно буде визначити його ім'я (мал. 2)

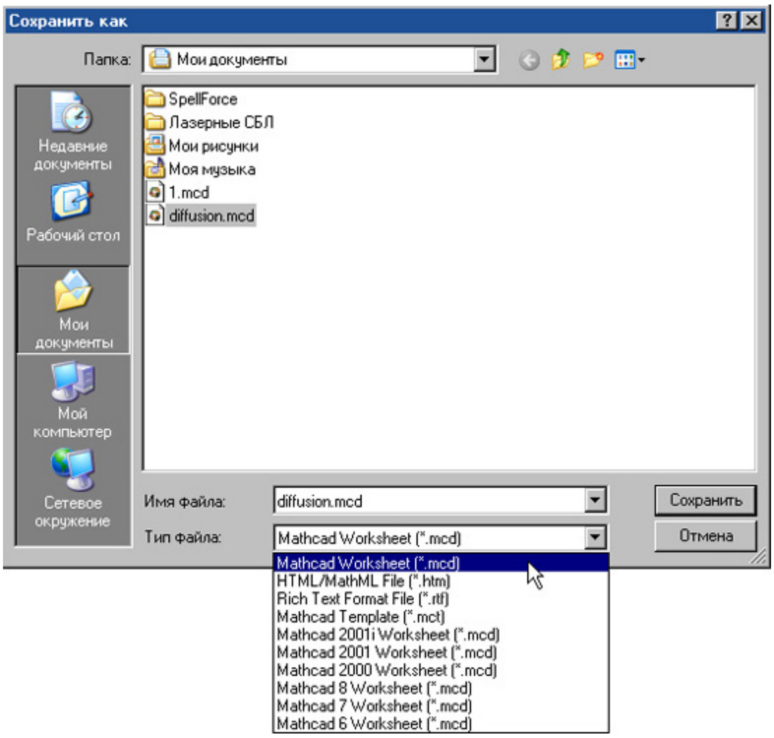


Рис.2. Збереження документу

Щоб перейменовати документ, збережіть його під іншим іменем командою File / Save As (Файл / Сохранить как).

Можливі формати файлів, що зберігаються:

- Mathcad 11 Worksheet (*.mcd) —найбільш потужний формат, використовується за замовчуванням,
- Html/mathml File (*.htm) — формат web-сторінки. Починаючи з версії Mathcad 11, всі атрибути документа Mathcad можуть зберігатися в html-файлі (з додатковою xml-розміткою). З одного боку, такі файли можуть бути видимими звичайним браузером, а з іншої — без збитку для функціональності — відкриватися і редагуватися в Mathcad як звичайні (*.mcd) документи.
- Mathcad Template (*.mct) — формат шаблону;
- Rich Text Format (*.rtf) — зберігайте файли в цьому форматі лише для подальшого редагування в текстових редакторах з метою створення звітів. Зокрема, зберігши документ в rtf-файлі, можна завантажити його в

Microsoft Word або іншому текстовому процесорі, більшість з яких підтримує цей формат;

- Mathcad 6...20011 Worksheet (*.mcd) — формати колишніх версій Mathcad.

Відкриття існуючого документу

Щоб відкрити існуючий документ для редагування, виконаєте команду File / Open (Файл / Открыть) або натискуйте клавіші <Ctrl>+<o> (або кнопку Open на стандартній панелі інструментів). У діалоговому вікні Open виберіть файл і натискуйте кнопку ОК.

Крім того, відкрити файл можна і в оглядачі Windows, клацнувши двічі на його імені з розширенням .mcd.

Відкрити документ Mathcad, що знаходиться в мережі Інтернет, можна за допомогою вікна Ресурсів Mathcad:

- Викличте один з Ресурсів Mathcad, наприклад, Швидкі шпаргалки (Help / Quicksheets)
- Натискуйте кнопку із зображенням глобуса і двох стрілок на панелі інструментів вікна Mathcad Resources, що з'явилося (мал. 2.7).
- Введіть url-адресу сторінки в мережі Інтернет, де знаходиться документ Mathcad, наприклад http://www.mathsoft.com — в полі для введення адреси у вікні. Натискайте клавішу <Enter>.

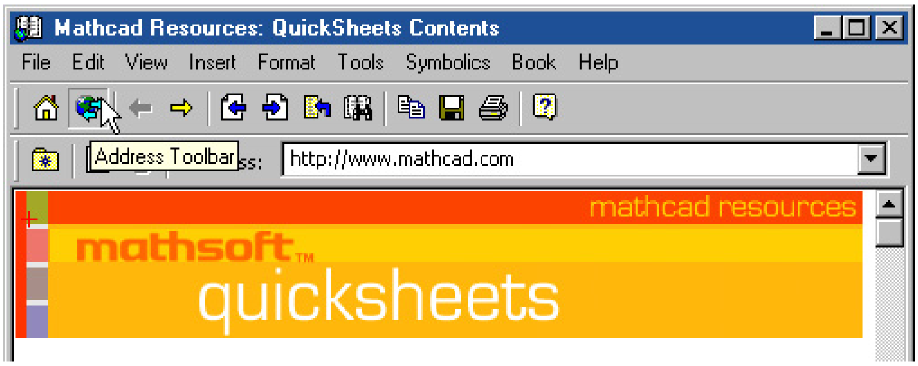


Рис.3. Відкриття документу в Інтернет

Закриття документу

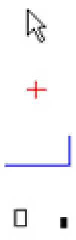
Активний документ закривають одним із способів:

- натисненням кнопки закриття вікна документа (хрестика) в його правій верхній частині
- за допомогою команди File / Close (Файл / Закрыть);
- натисненням клавіш <Ctrl>+<w>;
- при завершенні сеансу роботи з Mathcad: за допомогою або команди File / Exit (Файл / Выход), або кнопки управління вікном, або панелі завдань Windows, — будуть закриті всі відкриті документи, включаючи і неактивні.

Якщо внесені зміни не були збережені, Mathcad запропонує зробити це.

Елементи інтерфейсу Mathcad

- Курсор миші (mouse pointer) — грає звичайну для додатків Windows роль, слідуючи за рухами миші;
- курсор — обов'язково знаходиться усередині документа в одному з трьох видів:
    - курсор введення (crosshair) — хрестик червоного кольору, який відзначає порожнє місце в документі, куди можна вводити текст або формулу;
    - лінії введення (editing lines) — горизонтальна (underline) і вертикальна (insertion line) лінії синього кольору, що виділяють в тексті або формулі певну частину;
    - лінія введення тексту (text insertion point) — вертикальна лінія, аналог ліній введення для текстових областей.
- місцезаповнювачі (placeholders) — з'являються усередині незавершених формул в місцях, які мають бути заповнені символом або оператором: місцезаповнювач символу — чорний прямокутник; місцезаповнювач оператора — чорна прямокутна рамка.



Курсор миші

Курсор введення

лінії введення

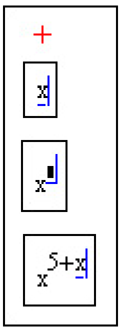
місцезаповнювачі оператора і символу

Рис.4. Елементи інтерфейсу

Введення формул

Ввести математичний вираз можна в будь-якому порожньому місці документа Mathcad. Для цього розташуйте курсор введення в бажане місце документа, клацнувши в нім мишею, і просто починайте вводити формулу, натискуючи клавіші на клавіатурі. При цьому в документі створюється математична область (math region), яка призначена для зберігання формул, що інтерпретуються процесором Mathcad. Продемонструємо послідовність дій на прикладі введення виразу x^{5+x}:

- Клікніть мишею, позначивши місце введення. Натискуйте клавішу <x> — в цьому місці замість курсора введення з'явиться регіон з формулою, що містить один символ x, причому він буде виділений лініями введення.



- Введіть оператор піднесення до ступеня, натискуючи клавішу <A>, або вибравши кнопку піднесення до ступеня на панелі інструментів Calculator — у формулі з'явиться місцезаповнювач для введення значення ступеня, а лінії введення виділять цей місцезаповнювач.
- Послідовно введіть останні символи <5>, <+>, <x>.

Рис.5. Введення формули

Якщо користувач починає введення формули з оператора (мал. 2.11), залежно від його типу, автоматично з'являються і місцезаповнювачі, без заповнення яких формула не сприйматиметься процесором Mathcad.

Послідовність вставки оператора у формулу така:

- Посуньте лінії введення на частину формули, яка повинна стати першим операндом.
- Введіть оператор, натискуючи кнопку на панелі інструментів або комбінацію клавіш.

Щоб вставити оператора не після, а перед частиною формули, виділеної лініями введення, натискуйте перед його введенням клавішу <lns>, яка пересуне вертикальну лінію введення вперед. Це важливо, зокрема, для вставки оператора заперечення.

Зміна операторів

Щоб видалити оператор, розмістіть його перед вертикальною лінією введення і натисніть клавішу <Backspace>. В результаті оператор або зникне (а операнди зліва і справа зіллються в одне ім'я), або (у складних формулах) з'явиться місцезаповнювач оператора у вигляді чорної рамки. За бажання можна видалити і цей місцезаповнювач повторним натисненням <Backspace>.

Резюме. Для вставки символів в документи доступні наступні інструменти:

- Більшість символів, наприклад латинські букви або цифри, для визначення імен змінних і функцій набираються на клавіатурі;
- грецькі букви найлегше вставляються за допомогою панелі інструментів Greek (Грецькі символи) (мал. 2.19). Можна також ввести відповідну латинську букву і натискувати клавіші <Ctrl>+<g> (після цього, наприклад, з латинської буква "a" виходить грецька α);

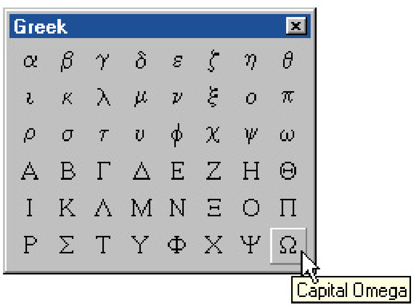


Рис.6. Панель інструментів Greek

- оператори можуть бути вставлені або з різних математичних панелей інструментів, або відповідною комбінацією клавіш. Наприклад, оператори (див. мал. 2.15), що найбільш часто вживаються, згруповані на панелі Calculator (Калькулятор);
- імена функцій вводяться або з клавіатури, або, надійніше, за допомогою команди Insert/ Function (Вставка/ Функція) . Дужки можуть бути вставлені з клавіатури. Проте, для того, щоб виділити дужками вже введену частину формули, краще помістити її між лініями введення і натискувати клавішу <'> (апостроф).

Введення тексту

Щоб до початку введення вказати програмі, що потрібно створити не формульний, а текстовий регіон, досить, перш ніж ввести перший символ, натиснути клавішу <"> В результаті на місці курсора введення з'являється новий текстовий регіон, який має характерне виділення. Курсор набирає при цьому вигляду вертикальної лінії червоного кольору, яка називається лінією введення тексту і аналогічна за призначенням лініям введення у формулах.

Відправлення документу електронною поштою

Відправити активний документ електронною поштою легко, і не виходячи з Mathcad. Для цього виберіть команду File / Send (Файл / Отправить), внаслідок чого відразу з'явиться вікно New Message (Новое сообщение), змальоване на мал. 2.38 з автоматично приєднаним до нього файлом Mathcad. Користувачеві треба ввести у відповідні поля вікна електронну адресу отримувача, тему і текст листа і відіслати листа.

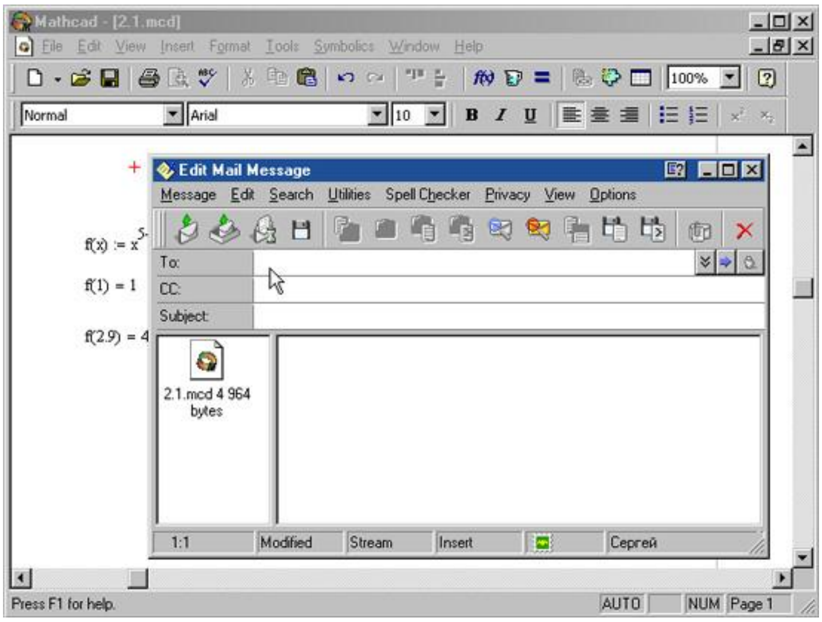


Рис.7. Відсилання листа по Email

Для використання цієї опції комп'ютер має бути підключений до Інтернету і на нім має бути заздалегідь встановлене відповідне поштове застосування.

Визначення змінних та присвоєння їм значень

Щоб визначити змінну, досить ввести її ім'я і надати їй певне значення, для чого служить оператор присвоєння.

Щоб надати змінній нове значення, наприклад змінну x зробити рівною 10:

- Введіть в бажаному місці документа ім'я змінної, наприклад x.
- Введіть оператор присвоєння за допомогою клавіші <:> або натисканням відповідної кнопки Definition (Присвоєння) на панелі інструментів Calculator або Evaluation (Вирази), як показано на мал. 3.1.
- Введіть в місцезаповнювач, що з'явився, нове значення змінної (10).

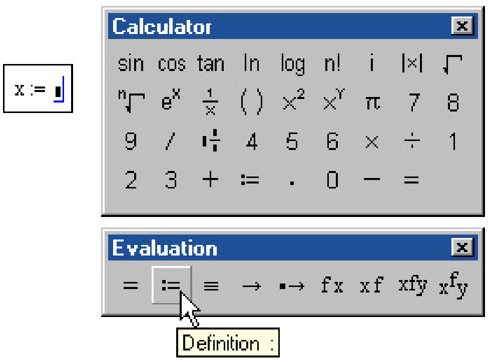


Рис.8. Присвоєння значення змінній

Визначення функції користувача

Для того, щоб визначити функцію користувача, наприклад $f(x,y)= x^2$-$cos (x+y)$:

- Введіть в бажаному місці документа ім'я функції (f). Введіть ліву дужку "(", імена змінних через кому x, в і праву дужку ")". При введенні лівої дужки і коми автоматично з'являтимуться відповідні місцезаповнювачі.
- Введіть оператор присвоєння з панелі інструментів або натисканням клавіші <:>.
- Введіть у новий місцезаповнювач вираз, що визначає функцію x^2-$cos (x+y)$, користуючись клавіатурою або панелями інструментів.

Всі змінні, присутні справа у виразі визначення функції, або повинні входити в список аргументів функції (у дужках, зліва після імені функції), або мають бути визначені раніше. Інакше буде виведено повідомлення про помилку.

Обчислення виразів

Значення змінної або виразу обчислюється після знаку < = >. Перш ніж обчислити значення математичного виразу, Ви зобов'язані визначити значення всіх змінних, що в нього входять (два перші рядки лістингу 1). Обчислюваний вираз може містити будь-яку кількість змінних, операторів і функцій.

$x := 10$

$y := (x - 3)^2 + 1$

$x^y = 1 \times 10^{50}$

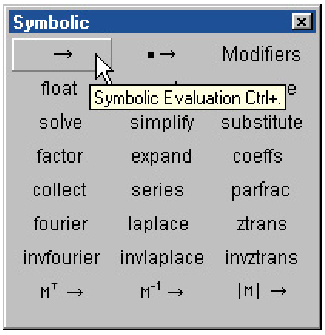
$x = 10$

Лістінг 1. Обчислення виразу.

Символьні обчислення

У Mathcad є можливість символьного, або аналітичного, обчислення значення вираження. амоє просте з них — це оператор символьного виводу (symbolic evaluation). Він позначається символом -». Робота символьного процесора полягає в аналізі самого тексту математичних виразів. Звичайно, набагато вужчий круг формул можна розрахувати символьно, хоч би тому, що не така велика частина математичних задач допускає аналітичне рішення.

Наприклад, є вираз: B • sin(arcsin(C • X)), где B,C,X — деякі змінні. Для символьного обчислення (перетворення) цього виразу:



- Введіть цей вираз: B • sin(arcsin(3 • X)).
- Введіть оператора символьного виводу натисненням відповідної кнопки (рис. 9) на панелі Symbolic (Символіка) або Evaluation (Вирази).

Рис.9. Панель символьних обчислень

Арифметичні оператори

Оператори, що позначають основні арифметичні дії, вводяться з панелі Calculator (Калькулятор) – рис.10.

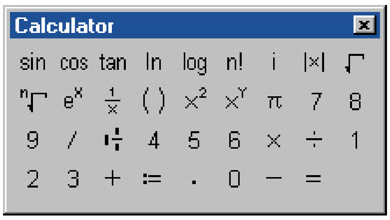


Рис.10. Панель арифметичних операторів

Панель містить:

- складання і віднімання: + — (лістинг 2);
- множення і ділення: • / + (лістинг 3);
- факторіал: ! (лістинг 4);
- модуль числа: |x| (лістинг 4);
- квадратний корінь: (лістинг 5);
- корінь n-й міри: (лістинг 5);
- піднесення x до ступеня в: xy (лістинг 5);

- зміна пріоритету: дужки (лістинг 6);
- чисельний вивід: = (всі лістинги).

$1 + 3 - 7 = -3$

$-(-2) = 2$

Лістінг 2. Складання, віднімання, заперечення

$\frac{5}{2} = 2.5$

$5 \div 2 = 2.5$

$2\frac{3}{4} = 2.75$

$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$

Лістінг 3. Ділення і множення

$5! = 120$

$|-10| = 10$

Лістінг 4. Факторіал та модуль

$\sqrt{4} = 2$

$\sqrt[3]{125} = 5$

$e^{\ln(3)} = 3$

$3^2 = 9$

$10^{0.2} = 1.585$

Лістінг 5. Корені і ступінь

$(1 + 2) \cdot 3 = 9$

$1 + 2 \cdot 3 = 7$

Лістінг 6. Дужки

Обчислювальні оператори

Обчислювальні оператори вставляються в документи за допомогою панелі інструментів Calculus (Обчислення). При натисненні будь-якій з кнопок в документі з'являється символ відповідної математичної дії, забезпечений декількома місцезаповнювачами. Кількість і розташування місцезаповнювачів визначається типом оператора і в точності відповідає їх загальноприйнятому математичному запису.

$$\sum_{i=1}^{10} i = 55$$

$$\prod_{i=1}^{10} i = 3.629\times 10^{6}$$

Лістінг 7. Обчислювальні оператори

Комплексні числа

Mathcad обробляє також комплексні числа. По замовчанню уявну одиницю представляє символ *i*, або *j*.

$x := 2i \qquad x\cdot x = -4$

$x^2 = -4$

Лістінг 8. Комплексне число.

Комплексне число можна ввести у вигляді звичайної суми дійсної і уявної частин або у вигляді будь-якого виразу, що містить уявне число. Для роботи з комплексними числами є декілька простих функцій і операторів, дія яких показана в лістингу 9.

$y := 19.785j + 0.1$

$\mathrm{Im}(y) = 19.785$ $\quad\quad$ $\mathrm{Re}(y) = 0.1$

$z := 23 \cdot e^{0.1i}$

$|z| = 23$ $\quad\quad$ $\arg(z) = 0.1$

Лістінг 9. Функції та оператори для комплексних чисел.

Масиви, вектори, матриці

Масивами (arrays) називають впорядковані послідовності чисел або елементів масиву. Доступ до будь-якого елементу масиву можливий по імені векторної змінної та його індексу, тобто номеру в послідовності чисел.

У Mathcad є і оператори, і вбудовані функції, які діють на вектори і матриці цілком, наприклад, транспонування, матричне множення і так далі Над елементами масиву можна здійснювати дії як над звичайними числами. Потрібно лише правильно задати відповідний індекс або поєднання індексів масиву. ORIGIN – глобальна змінна, початковий номер індексів масивів, по замовчанню 0.

$ORIGIN = 1$

$a := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\quad\quad$ $B := \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$

$2 \cdot a = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ $\quad\quad$ $B \cdot a = \begin{pmatrix} 30 \\ 36 \\ 42 \end{pmatrix}$ $\quad\quad$ $B^{T} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

Множення вектора на число, матриці на вектор, транспонування матриці.

$$C := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$D := \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad |D| = -9$$

$$D^{-1} \cdot D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad D^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{9} & \frac{4}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{5}{9} & -\frac{2}{9} \\ \frac{5}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \qquad B^{3} = \begin{pmatrix} 468 & 1062 & 1656 \\ 576 & 1305 & 2034 \\ 684 & 1548 & 2412 \end{pmatrix}$$

Визначник матриці, обернена матриця, піднесення матриці у ступінь.

$$f := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad f \cdot f = 14$$

Скалярний добуток векторів.

Лістінг 10. Операції над векторами і матрицями

Побудова графіку, тривимірного графіку і поверхні.

Нехай є функція f (x). Щоб побудувати її графік, показаний на рис. 11, слід натискати на панелі Graph кнопку з потрібним типом графіка і в заготівці графіка, що з'явилася, визначити значення, які будуть відкладені по осях. У нашому випадку потрібно було ввести x в місцезаповнювач біля осі x і f (x) (або відповідний вираз в нашому випадку) — біля осі Y.

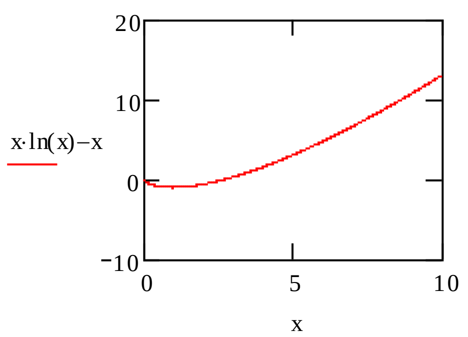


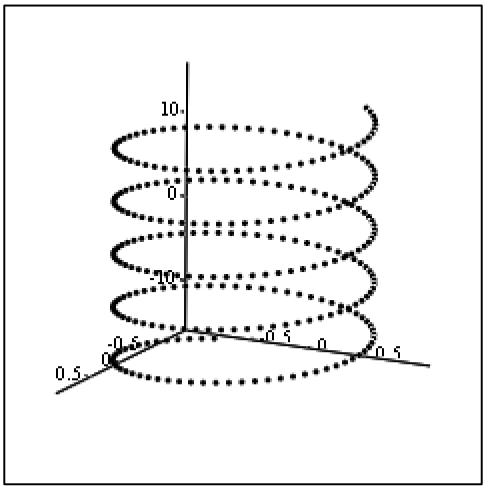
Рис.11. Графік функції одного аргумента

Тривимірну криву можна побачити за допомогою функції

- Createspace(F(або f1, f2, f3), t0, t1, tgrid, fmap) — створення вкладеного масиву, що представляє x-, y- і z-координати параметричної просторової кривої, заданої функцією p;
- F(t) — векторна функція від трьох аргументів, задана параметрично відносно єдиного аргументу t;
- f1(t),f2(t), f3(t) — скалярні функції;
- t0 — нижня межа t (за умовчанням -5);
- t1 — верхня межа t (за умовчанням 5);
- tgrid — число точок сітки по змінній t (за умовчанням 2o);
- fmap — векторна функція від трьох аргументів, задаюча перетворення координат.

$$F(t) := \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{pmatrix}$$

$\text{CreateSpace}(F, -15, 15, 300) = (\{3,1\})$



CreateSpace(F, –15, 15, 300)

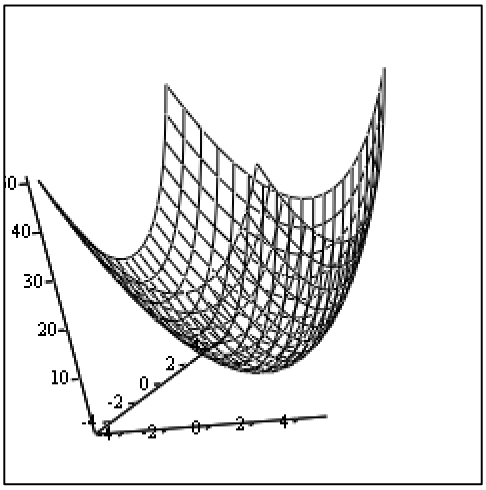
Рис.12. Графік тривимірної кривої

Функція для задання тривимірної поверхні є функцією від функції двох аргументів. Ці аргументи та значення останньої функції разом утворюють тривимірну поверхню.

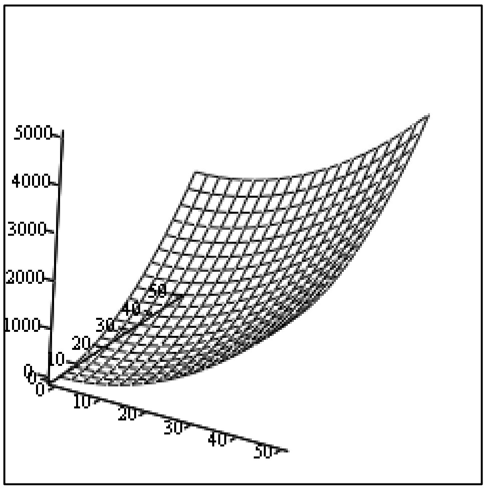
- Createmesh(F(або g, або f1, f2, f3), s0, s1, t0, t1, sgrid, tgrid, fmap) - створення вкладеного масиву, представляючого x-, y- і z-координати параметричної поверхні, заданої функцією F;
- F(s,t) — векторна функція з трьох елементів, задана параметрично відносно двох аргументів s і t;
- g (s, t) — скалярна функція; f1(s,t),f2(s,t),f3(s,t) — скалярні функції;
- s0, t0 — нижні межі аргументів s, t (за умовчанням -5);
- s1, t1 — верхні межі аргументів s, t (за умовчанням 5);
- sgrid, tgrid — число точок сітки по змінних s і t (за умовчанням 20);
- fmap — векторна функція з трьох елементів від трьох аргументів, що задає перетворення координат.

Для побудови графіку треба створити в документі вікно графіку відповідного типу за допомогою панелі *Графики* та заповнити місце заповнювач викликом функції створення графіку (в нашому випадку це *Сreatespace* або *Сreatemesh*).

$g(s,t) := s^2 + t^2$



CreateMesh (g)



CreateMesh (g, 0, 50, 0, 50)

Рис.12. Побудова тривимірної поверхні

Завдання

Виконати всі вправи відповідно до програми роботи.

Контрольні питання

1. Як визначати змінні та присвоювати їм значення в документі?
2. Як зберегти і відчинити документ?
3. Як відчинити документ в Internet?
4. Що таке місцезаповнювач (placeholder)?
5. Як використати грецькі букви для назв змінних і функцій?
6. Як відіслати документ по електронній пошті?
7. Як виконати символьне обчислення виразу?
8. Що таке обчислювальні оператори та які у них місцезаповнювачі?
9. Як звернутись до елементу масива?
10. Які існують основні операції над векторами і матрицями?
11. Як побудувати графік функції одного аргумента?
12. Як побудувати графік функції у тривимірному просторі?
13. Як побудувати поверхню у тривимірному просторі?

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 2

Тема: “Розв’язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) прямими методами. Звичайний метод Гауса та метод квадратних коренів”

1 Теоретичні відомості

Будемо розглядати системи вигляду

$$Ax = b, \tag{1}$$

де A ($n\times n$) - матриця системи, b - вектор правої частини, x - вектор розв’язку.

Метод Гауса

Метод складається з двох етапів:

1) прямого хода методу (приведення системи (1) до еквівалентної системи з трикутною матрицею);
2) зворотного ходу (визначення невідомого вектору x) .

Існує декілька варіантів методу Гауса.

Схема з вибором головного елемента полягає у наступному:

1) Прямий хід.

1.1) Відшукати $a_{main} = \max\limits_{i,j} |a_{i,j}|,\ i, j = 1..n$. Нехай $a_{main} = a_{pq}$. Рядок p називається головним.

1.2) Обчислити множники $m_i = \dfrac{a_{iq}}{a_{pq}}$, $i \neq p$.

1.3) З кожного i-го неголовного рядка віднімаємо покомпонентно головний рядок, який помножено на m_i:

$$a_{ij} := a_{ij} - m_i a_{pj},\quad i \neq p,\ j = 1..n,$$

для вектора правої частини:

$$b_i := b_i - m_i b_p.$$

В результаті отримуємо матрицю, де всі елементи стовпця q, крім a_{pq}, дорівнюють нулю. Відкидаючи стовпець q та головний рядок p, і відповідний елемент b_p, отримуємо систему з матрицею A_1 ($(n-1)\times(n-1)$). Якщо $n-1>1$, покладаємо $n := n-1$, і переходимо до п.1.1, інакше переходимо до п.2.

Примітка: Елементи головного рядка та відповідного елементу b_p *потрібно зберігати у окремому масиві, оскільки вони знадобляться в п.2).*

2) <u>Зворотний хід</u>.

2.1) Складаємо систему, еквівалентну вихідній, що складається з головних рядків, які отримувались у п.1. Права частина складається з відповідних елементів b_p. Отримана система має трикутну матрицю. Знаходимо послідовно значення елементів x_i.

Метод квадратного кореня.

Метод використовується для розв'язання СЛАР виду (1), у яких матриця A є симетричною, тобто

$$a_{ij}=a_{ji}\ \ \forall i,j\,.$$

Метод полягає у наступному:

1) <u>Прямий хід</u>: факторизація $A=T'T$, де

$$T=\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n}\\ 0 & t_{22} & \dots & t_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & t_{nn}\end{pmatrix},\ T'=\begin{pmatrix} t_{11} & 0 & .. & 0\\ t_{12} & t_{22} & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ t_{1n} & t_{2n} & \dots & t_{nn}\end{pmatrix}$$

1.1) Знаходимо елементи t_{ij} матриць-множників.

$$t_{11}=\sqrt{a_{11}}\,,\ t_{1j}=\frac{a_{1j}}{t_{11}}\ \ (j>1)\,,$$

$$t_{ii}=\sqrt{a_{ii}-\sum_{k=1}^{i-1}t_{ki}^2}\ \ (1<i\le n)\,,$$

$$t_{ij}=\frac{a_{ij}-\sum_{k=1}^{i-1}t_{ki}t_{kj}}{t_{ii}}\ (i<j),$$

$$t_{ij}=0\ (i>j)$$

1.2) Формуємо замість вихідної системи дві наступні системи:

$$T'y = b\,,\; Tx = y\,.$$

2) Зворотний хід.

2.1) Послідовно знаходимо:

$$y_1 = \frac{b_1}{t_{11}}\,,\; y_i = \frac{b_i - \sum_{k=1}^{i-1} t_{ki} y_k}{t_{ii}} \; (i > 1)\,,$$

$$x_n = \frac{y_n}{t_{nn}}\,,\; x_i = \frac{y_i - \sum_{k=i+1}^{n} t_{ik} x_k}{t_{ii}} \; (i < n)\,.$$

2 Завдання

Розв’язати систему рівнянь з кількістю значущих цифр m = 6. Якщо матриця системи симетрична, то розв’язання проводити за методом квадратних коренів, якщо матриця системи несиметрична, то використати метод Гауса. Вивести всі проміжні результати (матриці А, що отримані в ході прямого ходу методу Гауса, матрицю зворотного ходу методу Гауса, або матрицю Т та вектор у для методу квадратних коренів), та розв’язок системи. Навести результат перевірки: вектор нев’язки ***r* = *b* – *Ax*,** де ***x*** - отриманий розв’язок.

Розв’язати задану систему рівнянь за допомогою програмного забезпечення Mathcad. Навести результат перевірки: вектор нев’язки ***r* = *b* – *Ax*$_m$,** де ***x*$_m$** - отриманий у Mathcad розв’язок.

Порівняти корені рівнянь, отримані у Mathcad, із власними результатами за допомогою методу середньоквадратичної похибки:

$$\delta = \sqrt{\tfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{mk})^2}\,,$$

де ***x*** - отриманий у програмі розв’язок, ***x*$_m$** - отриманий у Mathcad розв’язок.

Зазвичай при використанні для обчислень 4-байтових чисел (тип *float* у Visual C++) порядок δ:

- у методі Гауса - $10^{-4} - 10^{-6}$,
- у методі квадратних коренів - $10^{-5} - 10^{-7}$, бувають і повні співпадання рішень до 6 знаків після коми.

3 Варіанти завдань

Система має вигляд (1).

№ вар.	Матриця системи A	Вектор правої частини b
1-4	$\begin{pmatrix} 3,81 & 0,25 & 1,28 & 0,75+\alpha \\ 2,25 & 1,32 & 4,58+\alpha & 0,49 \\ 5,31 & 6,28+\alpha & 0,98 & 1,04 \\ 9,39+\alpha & 2,45 & 3,35 & 2,28 \end{pmatrix}$ $\alpha = 0,5k, k = \text{№}\mathit{вар} - 1,$	$\begin{pmatrix} 4,21 \\ 6,47+\beta \\ 2,38 \\ 10,48+\beta \end{pmatrix}$ $\beta = 0,5k$, $k = \text{№}\mathit{вар} - 1$
5-9	$\begin{pmatrix} 8,30 & 2,62+\alpha & 4,10 & 1,90 \\ 3,92 & 8,45 & 8,78-\alpha & 2,46 \\ 3,77 & 7,21+\alpha & 8,04 & 2,28 \\ 2,21 & 3,65-\alpha & 1,69 & 6,99 \end{pmatrix}$ $\alpha = 0,2k, k = \text{№}\mathit{вар} - 5$	$\begin{pmatrix} -10,65+\beta \\ 12,21 \\ 15,45-\beta \\ -8,35 \end{pmatrix}$ $\beta = 0,2k, k = \text{№}\mathit{вар} - 5$
10	$\begin{pmatrix} 1,00 & 0,42 & 0,54 & 0,66 \\ 0,42 & 1,00 & 0,32 & 0,44 \\ 0,54 & 0,32 & 1,00 & 0,22 \\ 0,66 & 0,44 & 0,22 & 1,00 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,3 \\ 0,5 \\ 0,7 \\ 0,9 \end{pmatrix}$
11-15	$\begin{pmatrix} 5,18+\alpha & 1,12 & 0,95 & 1,32 & 0,83 \\ 1,12 & 4,28-\alpha & 2,12 & 0,57 & 0,91 \\ 0,95 & 2,12 & 6,13+\alpha & 1,29 & 1,57 \\ 1,32 & 0,57 & 1,29 & 4,57-\alpha & 1,25 \\ 0,83 & 0,91 & 1,57 & 1,25 & 5,21+\alpha \end{pmatrix}$ $\alpha = 0,25k,\ k = \text{№}\mathit{вар} - 11$	$\begin{pmatrix} 6,19+\beta \\ 3,21 \\ 4,28-\beta \\ 6,25 \\ 4,95+\beta \end{pmatrix}$ $\beta = 0,35k,\ k = \text{№}\mathit{вар} - 11$
16	$\begin{pmatrix} 2,12 & 0,42 & 1,34 & 0,88 \\ 0,42 & 3,95 & 1,87 & 0,43 \\ 1,34 & 1,87 & 2,98 & 0,46 \\ 0,88 & 0,43 & 0,46 & 4,44 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 11,172 \\ 0,115 \\ 0,009 \\ 9,349 \end{pmatrix}$

17	$\begin{pmatrix} 6,92 & 1,28 & 0,79 & 1,15 & -0,66 \\ 0,92 & 3,5 & 1,3 & -1,62 & 1,02 \\ 1,15 & -2,46 & 6,1 & 2,1 & 1,483 \\ 1,33 & 0,16 & 2,1 & 5,44 & -18 \\ 1,14 & -1,68 & -1,217 & 9 & -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2,1 \\ 0,72 \\ 3,87 \\ 13,8 \\ -1,08 \end{pmatrix}$
18	$\begin{pmatrix} 7,03 & 1,22 & 0,85 & 1,135 & -0,81 \\ 0,98 & 3,39 & 1,3 & -1,63 & 0,57 \\ 1,09 & -2,46 & 6,21 & 2,1 & 1,033 \\ 1,345 & 0,16 & 2,1 & 5,33 & -12 \\ 1,29 & -1,23 & -0,767 & 6 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2,1 \\ 0,84 \\ 2,58 \\ 11,96 \\ -1,47 \end{pmatrix}$
19	$\begin{pmatrix} 5,5 & 7,0 & 6,0 & 5,5 \\ 7,0 & 10,5 & 8,0 & 7,0 \\ 6,0 & 8,0 & 10,5 & 9 \\ 5,5 & 7 & 9 & 10,5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 23 \\ 32 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix}$
20	$\begin{pmatrix} 6,59 & 1,28 & 0,79 & 1,195 & -0,21 \\ 0,92 & 3,83 & 1,3 & -1,63 & 1,02 \\ 1,15 & -2,46 & 5,77 & 2,1 & 1,483 \\ 1,285 & 0,16 & 2,1 & 5,77 & -18 \\ 0,69 & -1,68 & -1,217 & 9 & -6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2,1 \\ 0,36 \\ 3,89 \\ 11,04 \\ -0,27 \end{pmatrix}$
21	$\begin{pmatrix} 3,81 & 0,25 & 1,28 & 1,75 \\ 2,25 & 1,32 & 5,58 & 0,49 \\ 5,31 & 7,28 & 0,98 & 1,04 \\ 10,39 & 2,45 & 3,35 & 2,28 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4,21 \\ 8,97 \\ 2,38 \\ 12,98 \end{pmatrix}$
22-25	$\begin{pmatrix} 5,18+\alpha & 1,12 & 0,95 & 1,32 & 0,83 \\ 1,12 & 4,28-\alpha & 2,12 & 0,57 & 0,91 \\ 0,95 & 2,12 & 6,13+\alpha & 1,29 & 1,57 \\ 1,32 & 0,57 & 1,29 & 4,57-\alpha & 1,25 \\ 0,83 & 0,91 & 1,57 & 1,25 & 5,21+\alpha \end{pmatrix}$ $\alpha = 0,25k,\ k = \lvert \text{№}вар - 25 \rvert$	$\begin{pmatrix} 6,19+\beta \\ 3,21 \\ 4,28-\beta \\ 6,25 \\ 4,95+\beta \end{pmatrix}$ $\beta = 0,35k,\ k = \text{№}вар - 21$

4 Вимоги до звіту

Звіт має містити:

- постановку задачі;
- вихідну систему рівнянь;
- проміжні результати та кінцевий результат;
- вектор нев’язки;
- копія розв’язку задачі у Mathcad; вектор нев’язки для цього розв’язку;
- порівняння власного розв’язку та розв’язку, отриманого у Mathcad;
- лістинг програми.

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 3

Тема "Розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) ітераційними методами. Метод простої ітерації. Метод Зейделя"

1 Теоретичні відомості

Ітераційними методами є такі, що навіть у припущенні, що обчислення ведуться без округлень, дозволяють отримати розв'язок системи лише із заданою точністю. До таких методів відносяться метод простої ітерації (метод Якобі) та метод Зейделя.

Будемо розглядати системи вигляду

$$Ax = b, \tag{1}$$

де A ($n \times n$) - матриця системи, b - вектор правої частини, x - вектор розв'язку.

Метод простої ітерації

Систему $Ax = b$ приводять до вигляду

$$x = Cx + d, \tag{2}$$

де C - деяка матриця, для якої виконується

$$\alpha = \max_i \sum_{j=1}^{n} |c_{ij}| < 1 \text{ або } \alpha = \max_j \sum_{i=1}^{n} |c_{ij}| < 1 \text{ або } \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}^{\ 2} < 1 \tag{3}$$

d - вектор-стовпець.

Умова (3) буде виконана, якщо матриця A є матрицею з діагональною перевагою, для якої $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$ або $|a_{jj}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$

Розглянемо спосіб зведення (1) до (2). Запишемо (1) у розгорнутій формі:

$$-\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + b_i = 0, i = \overline{1,n} \tag{4}$$

Якщо $a_{ii} \neq 0$ для всіх i, то можна (4) зобразити у вигляді

$$x_i = -\sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j - \sum_{j=i+1}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j + \frac{b_i}{a_{ii}}, i = \overline{1,n} \tag{5}$$

Звідси отримуємо значення елементів матриці C та вектору d:

$$c_{ij} = \begin{cases} -\dfrac{a_{ij}}{a_{ii}}, i \neq j \\ 0, i = j \end{cases} \quad d_i = \frac{b_i}{a_{ii}}, i = \overline{1,n}$$

Запишемо розв'язок у матричному вигляді. Нехай матрицю A задано у вигляді:

$$A = A_1 + D + A_2,$$

де A_1 – нижня трикутна матриця з нульовою головною діагоналлю; D – діагональна матриця з a_{ii} на головній діагоналі; A_2 – верхня трикутна матриця з нульовою головною діагоналлю.

За припущенням $a_{ij} \neq 0$ для всіх i, існує D^{-1}. Тоді зображенню у формі (5) відповідає

$$x = -D^{-1}A_1x - D^{-1}A_2x + D^{-1}b$$

або

$$x = -D^{-1}(A_1 + A_2)x + D^{-1}b.$$

Якщо матриця А не забезпечує виконання (3), тобто не є матрицею з діагональною перевагою, її приводять до такої за допомогою еквівалентних перетворень.

Виходячи з довільного вектора $x^{(0)}$ (можна взяти вектор b, або вектор b, поділений на діагональ матриці A) будують ітераційний процес:

$$x^{(k+1)} := Cx^{(k)} + d$$

або

$$x^{(k+1)} = -D^{-1}(A_1 + A_2)x^{(k)} + D^{-1}b$$

Критерій закінчення ітераційного процесу:

$$\max_j |x_j^{k+1} - x_j^k| < \varepsilon.$$

Метод Зейделя

Цей метод – модифікація методу простої ітерації. В цьому методі вже знайдені компоненти беруть у правій частині співвідношення з (n+1)-го наближення, а інші – з n-го наближення:

$$x_i^{(k+1)} = -\sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(k)} + \frac{b_i}{a_{ii}}, i = \overline{1,n}.$$

Або у матричному вигляді:

$$x^{(k+1)} = -D^{-1}A_1x^{(k+1)} - D^{-1}A_2x^{(k)} + D^{-1}b\,.$$

Умови застосування методу Зейделя, критерій закінчення ітерацій такі самі, як для методу простої ітерації.

2 Завдання

Якщо матриця не є матрицею із діагональною перевагою, привести систему до еквівалентної, у якій є діагональна перевага (письмово). Можна, наприклад, провести одну ітерацію метода Гауса, зкомбінувавши рядки з метою отримати нульовий недіагональний елемент у стовпчику. Розробити програму, що реалізує розв'язання за ітераційним методом, який відповідає заданому варіанту. Обчислення проводити з з кількістю значущих цифр m = 6. Для кожної ітерації розраховувати нев'язку $\boldsymbol{r = b - Ax}$**,** де $\boldsymbol{x}$ - отриманий розв'язок.

Розв'язати задану систему рівнянь за допомогою програмного забезпечення Mathcad. Навести результат перевірки: вектор нев'язки $\boldsymbol{r = b - Ax_m}$**,** де $\boldsymbol{x_m}$ - отриманий у Mathcad розв'язок.

Порівняти корені рівнянь, отримані у Mathcad, із власними результатами за допомогою методу середньоквадратичної похибки.

3 Варіанти завдань

Система має вигляд (1). Метод розв'язання визначається так: метод простої ітерації для парних варіантів та метод Зейделя для непарних варіантів.

№ вар.	Матриця системи A	Вектор правої частини b
1-4	$\begin{pmatrix} 5{,}18+\alpha & 1{,}12 & 0{,}95 & 1{,}32 & 0{,}83 \\ 1{,}12 & 4{,}28-\alpha & 2{,}12 & 0{,}57 & 0{,}91 \\ 0{,}95 & 2{,}12 & 6{,}13+\alpha & 1{,}29 & 1{,}57 \\ 1{,}32 & 0{,}57 & 1{,}29 & 4{,}57-\alpha & 1{,}25 \\ 0{,}83 & 0{,}91 & 1{,}57 & 1{,}25 & 5{,}21+\alpha \end{pmatrix}$ $\alpha = 0{,}25k,\ k = \text{№}вар - 1$	$\begin{pmatrix} 6{,}19+\beta \\ 3{,}21 \\ 4{,}28-\beta \\ 6{,}25 \\ 4{,}95+\beta \end{pmatrix}$ $\beta = 0{,}35k,\ k = \text{№}вар - 1$

5-9	$\begin{pmatrix} 3,81 & 0,25 & 1,28 & 0,75+\alpha \\ 2,25 & 1,32 & 4,58+\alpha & 0,49 \\ 5,31 & 6,28+\alpha & 0,98 & 1,04 \\ 9,39+\alpha & 2,45 & 3,35 & 2,28 \end{pmatrix}$ $\alpha = 0{,}5k, k = \text{№вар} - 5$,	$\begin{pmatrix} 4,21 \\ 6,47+\beta \\ 2,38 \\ 10,48+\beta \end{pmatrix}$ $\beta = 0{,}5k$, $k = \text{№вар} - 5$
10	$\begin{pmatrix} 2,12 & 0,42 & 1,34 & 0,88 \\ 0,42 & 3,95 & 1,87 & 0,43 \\ 1,34 & 1,87 & 2,98 & 0,46 \\ 0,88 & 0,43 & 0,46 & 4,44 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 11,172 \\ 0,115 \\ 0,009 \\ 9,349 \end{pmatrix}$
11-15	$\begin{pmatrix} 8,30 & 2,62+\alpha & 4,10 & 1,90 \\ 3,92 & 8,45 & 8,78-\alpha & 2,46 \\ 3,77 & 7,21+\alpha & 8,04 & 2,28 \\ 2,21 & 3,65-\alpha & 1,69 & 6,99 \end{pmatrix}$ $\alpha = 0{,}2k, k = \text{№вар} - 11$	$\begin{pmatrix} -10,65+\beta \\ 12,21 \\ 15,45-\beta \\ -8,35 \end{pmatrix}$ $\beta = 0{,}2k, k = \text{№вар} - 11$
16	$\begin{pmatrix} 1,00 & 0,42 & 0,54 & 0,66 \\ 0,42 & 1,00 & 0,32 & 0,44 \\ 0,54 & 0,32 & 1,00 & 0,22 \\ 0,66 & 0,44 & 0,22 & 1,00 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,3 \\ 0,5 \\ 0,7 \\ 0,9 \end{pmatrix}$
17	$\begin{pmatrix} 5,5 & 7,0 & 6,0 & 5,5 \\ 7,0 & 10,5 & 8,0 & 7,0 \\ 6,0 & 8,0 & 10,5 & 9 \\ 5,5 & 7 & 9 & 10,5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 23 \\ 32 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix}$
18	$\begin{pmatrix} 6,59 & 1,28 & 0,79 & 1,195 & -0,21 \\ 0,92 & 3,83 & 1,3 & -1,63 & 1,02 \\ 1,15 & -2,46 & 5,77 & 2,1 & 1,483 \\ 1,285 & 0,16 & 2,1 & 5,77 & -18 \\ 0,69 & -1,68 & -1,217 & 9 & -6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2,1 \\ 0,36 \\ 3,89 \\ 11,04 \\ -0,27 \end{pmatrix}$
19	$\begin{pmatrix} 3,81 & 0,25 & 1,28 & 1,75 \\ 2,25 & 1,32 & 5,58 & 0,49 \\ 5,31 & 7,28 & 0,98 & 1,04 \\ 10,39 & 2,45 & 3,35 & 2,28 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4,21 \\ 8,97 \\ 2,38 \\ 12,98 \end{pmatrix}$

20	$\begin{pmatrix} 6,92 & 1,28 & 0,79 & 1,15 & -0,66 \\ 0,92 & 3,5 & 1,3 & -1,62 & 1,02 \\ 1,15 & -2,46 & 6,1 & 2,1 & 1,483 \\ 1,33 & 0,16 & 2,1 & 5,44 & -18 \\ 1,14 & -1,68 & -1,217 & 9 & -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2,1 \\ 0,72 \\ 3,87 \\ 13,8 \\ -1,08 \end{pmatrix}$
21	$\begin{pmatrix} 7,03 & 1,22 & 0,85 & 1,135 & -0,81 \\ 0,98 & 3,39 & 1,3 & -1,63 & 0,57 \\ 1,09 & -2,46 & 6,21 & 2,1 & 1,033 \\ 1,345 & 0,16 & 2,1 & 5,33 & -12 \\ 1,29 & -1,23 & -0,767 & 6 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2,1 \\ 0,84 \\ 2,58 \\ 11,96 \\ -1,47 \end{pmatrix}$
22-25	$\begin{pmatrix} 8,30 & 2,62+\alpha & 4,10 & 1,90 \\ 3,92 & 8,45 & 8,78-\alpha & 2,46 \\ 3,77 & 7,21+\alpha & 8,04 & 2,28 \\ 2,21 & 3,65-\alpha & 1,69 & 6,99 \end{pmatrix}$ $\alpha = 0,2k, k = №вар - 22$	$\begin{pmatrix} -10,65+\beta \\ 12,21 \\ 15,45-\beta \\ -8,35 \end{pmatrix}$ $\beta = 0,2k, k = №вар - 22$

4 Вимоги до звіту

Звіт має містити:

- постановку задачі;
- вихідну систему рівнянь;
- письмовий етап приведення матриці до діагональної переваги (якщо таке необхідно);
- проміжні результати та кінцевий результат;
- результати перших трьох та останньої ітерацій методу, на кожній ітерації потрібно навести вектор нев'язки
- копія розв'язку задачі у Mathcad; вектор нев'язки для цього розв'язку;
- порівняння власного розв'язку та розв'язку, отриманого у Mathcad;
  лістинг програми.

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 4

Тема “Обчислення власних значень та власних векторів матриць”

1 Теоретичні відомості

Велика кількість задач математики та фізики потребує знаходження власних значень та власних векторів матриць, тобто знаходження таких значень λ, для яких існують нетривіальні розв’язки однорідної системи рівнянь

$$Ax = \lambda x, \tag{1}$$

та знаходження цих нетривіальних розв’язків. Тут A – квадратна матриця порядку m, x – невідомий вектор-стовпець.

Такий розв’язок системи (1) існує тоді і тільки тоді, коли

$$\mathrm{D}(\lambda) = |A - \lambda E| = 0, \tag{2}$$

де E – одинична матриця.

Визначник $\mathrm{D}(\lambda)$ називається характеристичним або віковим визначником, а рівняння (2) – характеристичним або віковим рівнянням.

Метод Данилевського

Квадратну матрицю P порядку m називають подібною до матриці A, якщо її можна подати у вигляді

$$P = S^{-1}AS,$$

де S – невироджена матриця порядку m.

Виконується наступна теорема: характеристичні визначники вихідної та подібної матриці збігаються.

Ідея методу Данилевського полягає у тому, що матрицю A подібним перетворенням зводять до так званої нормальної форми Фробеніюса.

$$P = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_{m-1} & p_m \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ . & . & \ldots & . & . \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Можна перевірити, що характеристичне рівняння для матриці P набуває простого вигляду:

$$D(\lambda)=\begin{pmatrix} p_1-\lambda & p_2 & \dots & p_{m-1} & p_m \\ 1 & -\lambda & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & \dots & . & . \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -\lambda \end{pmatrix}=$$

$$=(-1)^m\left(\lambda^m-p_1\lambda^{m-1}-p_2\lambda^{m-2}-\dots-p_{m-1}\lambda-p_m\right)=0$$

тобто коефіцієнти при степенях λ характеристичного поліному безпосередньо виражаються через елементи першого рядка матриці P.

Зведення матриці A до нормальної форми Фробеніюса P здійснюється послідовно по рядках, починаючи з останнього рядка. Це робиться за допомогою ітеративного процесу, який виражається у вигляді:

$$A^{(i+1)}=M_{m-i}^{-1}A^{(i)}M_{m-i}, \tag{3}$$

де

$$M_{m-i}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & \dots & . & . \\ \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_{m-1} & \mu_m \\ . & . & \dots & . & . \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mu_j=\begin{cases} \dfrac{-a_{m-i+1,j}^{(i)}}{a_{m-i+1,m-i}^{(i)}}, & j\neq m-i \\ \dfrac{1}{a_{m-i+1,m-i}^{(i)}}, & j=m-i \end{cases},$$

$$M_{m-i}^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & \dots & . & . \\ a_{m-i+1,1}^{(i)} & a_{m-i+1,2}^{(i)} & \dots & a_{m-i+1,m-1}^{(i)} & a_{m-i+1,m}^{(i)} \\ . & . & \dots & . & . \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тут $a_{f,j}^{(i)}$ – відповідні елементи матриці $A^{(i)}$, індекс $i = 1\dots m$-1, $A^{(1)} = A$, елемент $a_{m-i+1,m-i}^{(i)}\neq 0$.

Таким чином, нормальну форму Фробеніюса буде одержано за (m-1) крок і вона набуде вигляду

$$P=M_1^{-1}M_2^{-1}\dots M_{m-2}^{-1}M_{m-1}^{1}AM_{m-1}M_{m-2}\dots M_2M_1.$$

Якщо ж умова $a^{(i)}_{m-i+1,m-i} \neq 0$ не виконується на якомусь кроці $i=k$, то можливі два випадки. У першому випадку у $(m-k+1)$-рядку лівіше елемента $a^{(k)}_{m-k+1,m-k}$ є елемент $a^{(k)}_{m-k+1,l}$, де $l < m-k$. Тоді ми можемо переставити місцями $(m-k)$- та l-рядки та стовпці одночасно. Отже, на потрібному нам місці одержуємо ненульовий елемент $a^{(k)}_{m-k+1,l}$, вже перетворена частина матриці не змінюється і можна застосовувати звичайний крок методу Данилевського.

Розглянемо другий випадок, коли $a^{(k)}_{m-k+1,m-k}=0$ і всі елементи цього рядка лівіше нього теж дорівнюють нулю. У цьому разі характеристичний визначник матриці $A^{(k)}$ можна подати у вигляді

$$\left|A^{(k)} - \lambda E\right| = \left|B^{(k)} - \lambda E_{m-k}\right| \left|C^{(k)} - \lambda E_k\right|,$$

де E_{m-k} та E_k – одиничні матриці відповідної вимірності, а квадратні матриці $B^{(k)}$ та $C^{(k)}$ мають вигляд:

$$B^{(k)} = \begin{pmatrix} a^{(k)}_{1,1} & \dots & a^{(k)}_{1,m-k} \\ . & \dots & . \\ a^{(k)}_{m-k,1} & \dots & a^{(k)}_{m-k,m-k} \end{pmatrix}, C^{(k)} = \begin{pmatrix} a^{(k)}_{m-k+1,m-k+1} & \dots & a^{(k)}_{m-k+1,m-1} & a^{(k)}_{m-k+1,m} \\ 1 & \dots & 0 & 0 \\ . & \dots & . & . \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Звернімо увагу на те, що матриця $C^{(k)}$ вже має нормальну форму Фробеніюса, і тому співмножник $\left|C^{(k)} - \lambda E_k\right|$ просто розгортаємо у вигляді багаточлена з коефіцієнтами, що дорівнюють елементам першого рядка.

Співмножник $\left|B^{(k)} - \lambda E_{m-k}\right|$ є характеристичним визначником матриці $B^{(k)}$. Для його розгортання можна знову застосувати метод Данилевського, зводячи матрицю $B^{(k)}$ подібними перетвореннями до нормальної форми Фробеніюса.

Припустимо тепер, що матрицю A подібними перетвореннями $P = S^{-1}AS$ вже зведено до нормальної форми Фробеніюса. Розв’язуючи характеристичне рівняння

$$\lambda^m - p_1\lambda^{m-1} - p_2\lambda^{m-2} - \dots - p_{m-1}\lambda - p_m = 0,$$

знаходимо одним з відомих методів його корені λ_i, $i = 1,\dots,m$, які є власними значеннями матриць P та A.

Тепер маємо задачу знайти власні вектори, які відповідають цим власним значенням, тобто вектори $x^{(i)}$, $i = 1,\dots,m$, такі що

$$Ax^{(i)} = \lambda_i x^{(i)},\ i = 1,...,m.$$

Для цього спочатку знайдемо власні вектори для матриці P. Нехай це будуть вектори $y^{(i)}$. Тоді $x^{(i)} = Sy^{(i)}$, де $S = M_{m-1}M_{m-2}...M_2M_1$.

Для знаходження власних векторів P, запишемо рівність $Py^{(i)} = \lambda_i y^{(i)}$ у розгорнутій формі

$$\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_{m-1} & p_m \\ 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ . & . & ... & . & . \\ 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ... & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1^{(i)} \\ y_2^{(i)} \\ \vdots \\ y_m^{(i)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 y_1^{(i)} \\ \lambda_2 y_2^{(i)} \\ \vdots \\ \lambda_m y_m^{(i)} \end{pmatrix}, \text{ або } \begin{cases} p_1 y_1^{(i)} + ... + p_m y_m^{(i)} = \lambda_i y_1^{(i)}, \\ y_1^{(i)} = \lambda_i y_2^{(i)}, \\ ... \\ y_{m-1}^{(i)} = \lambda_i y_m^{(i)}. \end{cases}.$$

У цій системі одна із змінних може бути вільною і може набути довільного значення. Як таку візьмемо $y_m^{(i)}$ і покладемо $y_m^{(i)} = 1$. Тоді послідовно отримуємо:

$$y_m^{(i)} = 1,\ y_{m-1}^{(i)} = \lambda,\ y_{m-2}^{(i)} = \lambda^2,...,y_1^{(i)} = \lambda^{m-1}\quad .$$

А звідси вже отримуємо за виразом $x^{(i)} = Sy^{(i)}$ значення власного вектору $x^{(i)}$ для матриці A.

2 Завдання

Створити програму, для приведення матриці A до нормальної форми Фробеніюса. Отримане характеристичне рівняння розв'язати довільним способом у Mathcad і отримати всі власні числа λ_i, $i = 1,\dots,m$ з точністю 5 знаків після коми. Знайти по одному власному вектору для кожного власного числа.

Перевірити точність знайдених результатів, підставляючи у рівняння (1) знайдені власні числа та власні вектори.

Знайти власні числа матриці A виключно за допомогою Mathcad і порівняти з отриманими раніше результатами.

3 Варіанти завдань

Матриця A обчислюється за формулою

$$A=\begin{pmatrix} 6{,}26+a & 1{,}10-b & 0{,}97+g & 1{,}24-d \\ 1{,}10-b & 4{,}16-a & 1{,}30 & 0{,}16 \\ 0{,}97+g & 1{,}30 & 5{,}44+a & 2{,}10 \\ 1{,}24-d & 0{,}16 & 2{,}10 & 6{,}10-a \end{pmatrix},$$

де a = 0,11×t; b = 0,02×k; g = 0,02×k; d = 0,015×t; t = остання цифра № у списку групі; k = 3× (молодша цифра № групи – 4) + перша цифра № у списку групи (наприклад, для номеру 15 у списку ІС-62 t=5, k=3×(2 – 4) + 1 = –5).

4 Вимоги до звіту

Звіт має містити:

- постановку задачі;
- проміжні матриці M_i^{-1} та M_i, результуючу матрицю Р у нормальній формі Фробеніюса;
- отримане характеристичне рівняння;
- власні числа – корені характеристичного рівняння;
- власний вектор для кожного власного числа;
- оцінка точності обчислень (підстановка результатів у вихідне рівняння (1));
- копія розв’язку задачі у Mathcad;
- порівняння власного розв’язку та розв’язку, отриманого у Mathcad;
- лістинг програми.

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 5

Тема “Інтерполяційні поліноми”

1 Теоретичні відомості

Інтерполяція – в обчислювальній математиці спосіб знаходження проміжних значень величини по наявному дискретному наборі відомих значень.

Нехай маємо n значень x_i, кожному з який відповідає своє значення y_i. Потрібно знайти таку функцію F, що

$$F(x_i) = y_i,\ i = 0,\ldots,n. \qquad (1)$$

При цьому x_i називаються вузлами інтерполяції; пари $(x_i,\ y_i)$ – точками даних; функцію $F(x)$ – інтерполянтом.

Інтерполянти, як правило, будуються у вигляді лінійних комбінацій деяких елементарних функцій:

$$y = \sum_{k=0}^{n} c_k \Phi_k(x),$$

де $\Phi_k(x)$ – фіксовані лінійно незалежні функції; $c_0,\ldots,c_n$ – не визначені поки що коефіцієнти.

З умови (1) отримуємо систему n+1 рівнянь відносно коефіцієнтів c_k:

$$\sum_{k=0}^{n} c_k \Phi_k(x_i) = y_i,\ i = 0,\ldots,n.$$

В якості системи лінійно незалежних функцій $\Phi_k(x)$ частіше за все обирають: степеневі функції $\Phi_k(x) = x^k$ (в цьому випадку $F = P_n(x)$ – поліном ступеня n); тригонометричні функції.

Поліном Лагранжа

Будемо шукати інтерполяційний поліном у вигляді

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k\ . \qquad (2)$$

Звідси отримуємо систему рівнянь:

$$c_0 + c_1 x_0 + \ldots + c_n x_0{}^n = y_0$$
$$\ldots$$
$$c_0 + c_1 x_n + \ldots + c_n x_n{}^n = y_n$$

Ця система має єдиний розв’язок, а отже і інтерполяційний поліном вигляду (2) також єдиний. Форм запису його існує багато.

Лагранж запропонував наступну форму поліному, в основі якої лежить базис поліномів Лагранжа $l_k(x)$ ступеня n:

$$l_k(x_i) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } i = k \\ 0, \text{ якщо } i \neq k \end{cases}.$$

Поліноми Лагранжа мають вигляд:

$$l_k(x) = \prod_{i=0, i\neq k}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i} = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1)\ldots(x_k - x_n)}. \qquad (3)$$

Тоді поліном $P_n(x)$ набуде вигляду:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \prod_{i=0, i\neq k}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}. \qquad (4)$$

Цей поліном має ступінь не вищу за n та $P_n(x_i) = y_i$. Формулу (4) називають формулою Лагранжа. Кількість арифметичних дій для обчислення за (4) пропорційна n^2.

Поліном Ньютона

При використанні інтерполяційного поліному Ньютона застосовується поняття роздільної різниці:

роздільна різниця першого роду: $y(x_i, x_j) = \dfrac{y(x_i) - y(x_j)}{x_i - x_j}$,

роздільна різниця другого роду $y(x_i, x_j, x_k) = \dfrac{y(x_i, x_j) - y(x_j, x_k)}{x_i - x_k}$ і т.д.

Якщо $y(x) = P_n(x)$ – поліном ступеню n, то для нього перша роздільна різниця $P(x,x_0)$ – поліном n-1 ступеню, друга роздільна різниця $P(x,x_0,x_1)$ – поліном n-2 ступеню і т.д., так що (n+1)-а роздільна різниця дорівнює нулю.

Із визначення роздільних різниць отримуємо:

$$P(x) = P(x_0) + (x - x_0)P(x, x_0)$$
$$P(x, x_0) = P(x_0, x_1) + (x - x_1)P(x, x_0, x_1)$$
$$P(x, x_0, x_1) = P(x_0, x_1, x_2) + (x - x_2)P(x, x_0, x_1, x_2)$$
$$\ldots$$

Звідси отримуємо формулу для $P_n(x)$:

$$P(x) = P(x_0) + (x - x_0)P(x_0, x_1) + (x - x_0)(x - x_1)P(x_0, x_1, x_2) + \ldots + \\ + (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})P(x_0, x_1, \ldots, x_n) \tag{5}$$

Якщо $P_n(x)$ – інтерполяційний поліном для функції $y(x)$, то його роздільні різниці співпадають із роздільними різницями функції. Тоді можна записати:

$$F(x) = y_0 + \sum_{k=1}^{n} (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{k-1})y(x_0, x_1, \ldots, x_k)$$

Частіше використовують поліном Ньютона у формі Горнера (перед цим необхідно обчислити всі роздільні різниці):

$$F(x) = y(x_0) + (x - x_0)[y(x_0, x_1) + (x - x_1)[y(x_0, x_1, x_2) + \ldots]] \tag{6}$$

Обчислення $F(x)$ для кожного x потребує n множень та $2n$ додавань або віднімань.

Сплайн-інтерполяція

Розглянемо спеціальний випадок кусково-поліноміальної інтерполяції, коли між будь-якими сусідніми вузлами інтерполяції функція інтерполюється кубічним поліномом (кубічна сплайн-інтерполяція). Його коефіцієнти на кожному інтервалі визначаються з умов сполучення у вузлах:

$$F(x_i) = y_i, \tag{7}$$

$$F'(x_i - 0) = F'(x_i + 0), \tag{8}$$

$$F''(x_i - 0) = F''(x_i + 0), \quad i = 1, \ldots, n\text{-}1. \tag{9}$$

Крім того, на границях при $x = x_0$ та $x = x_n$ встановлюються умови $F''(x_0) = 0$, $F''(x_n) = 0$.

Будемо шукати кубічний поліном у вигляді:

$$F_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + \frac{c_i}{2}(x - x_i)^2 + \frac{d_i}{6}(x - x_i)^3, \quad i = 1, \ldots, n - 1. \tag{10}$$

Тоді $F_i(x_i) = a_i$, $F'_i(x_i) = b_i$, $F''_i(x_i) = c_i$. Для виконання умови неперервності: $F_i(x_{i-1}) = y_{i-1}$. Звідси отримуємо формули для обчислення коефіцієнтів сплайну, підставивши (10) у рівняння (7), (8), (9) (тут $h_i = x_i – x_{i-1}$).

$$a_i = y_i$$

$$h_i c_{i-1} + 2(h_i + h_{i+1})c_i + h_{i+1}c_{i+1} = 6\left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_1 - y_{i-1}}{h_i}\right)$$

$$d_i = \frac{c_i - c_{i-1}}{h_i}$$

$$b_i = \frac{1}{2}h_i c_i - \frac{1}{6}h_i^2 d_i + \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i}$$

Якщо врахувати, що $c_1 = c_{n+1} = 0$, то обчислення коефіцієнтів c можна провести за допомогою методу прогону для трьохдіагональної матриці.

Метод прогону

Більшість технічних задач зводиться до розв'язування систем ЛАР, в яких матриці містять багато нульових елементів, а ненульові елементи розміщені за спеціальною структурою (стрічкові квазітрикутні матриці).

Задачі побудови інтерполяційних сплайнів, різницевих методів розв'язування крайових задач для диференціальних рівнянь зводяться до розв'язування систем ЛАР з трьохдіагональною матрицею А. В матриці А всі елементи, що не лежать на головній діагоналі і двох сусідніх паралельних діагоналях, дорівнюють нулю.

В загальному вигляді такі системи записують так:

$$a_i x_{i-1} + b_i x_i + c_i x_{i+1} = d_\mathrm{i} \tag{1}$$

$$1 \le i \le n\ ;\ a_1 = 0\ ;\ c_n = 0$$

або в розгорнутому вигляді:

$$\begin{cases} b_1 x_1 + c_1 x_2 & = d_1 \\ a_2 x_1 + b_2 x_2 + c_2 x_3 & = d_2 \\ \quad a_3 x_2 + b_3 x_3 + c_3 x_4 & = d_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ \qquad a_i x_{i-1} + b_i x_i + c_i x_{i+1} & = d_\mathrm{i} \end{cases} \tag{2}$$

$$a_{n-1} x_{n-2} + b_{n-1} x_{n-1} + c_{n-1} x_\mathrm{n} = d_{n-1}$$

$$a_n x_{n-1} + b_n x_n = d_n$$

Вибір найбільшого елемента при виключенні невідомих за методом Гауса в таких системах робити не можна, оскільки перестановка рядків руйнує структуру матриці. Найчастіше для розв'язку системи з трьохдіагональною матрицею використовують метод прогону, який є частковим випадком методу Гауса.

Прямий хід прогону (алгоритм прямого ходу методу Гауса).

Кожне невідоме x_i виражається через x_{i+1} з допомогою прогоночних коефіцієнтів A_i та B_i

$$x_i = A_i x_{i+1} + B_i\,; \quad i = \overline{1,n} \tag{3}$$

Наприклад, з першого рівняння системи (2) знайдемо

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= -\frac{c_1}{b_1}x_2 + \frac{d_1}{b_1} \\ x_1 &= A_1x_2 + B_1 \end{aligned}\right\}, \quad \text{звідки} \quad \begin{aligned} A_1 &= -\frac{c_1}{b_1} \\ B_1 &= \frac{d_1}{b_1} \end{aligned} \tag{4}$$

З другого рівняння системи (3) виразимо x_2 через x_3, замінюючи x_1 формулою (3) або (4)

$$a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 = a_2(A_1x_2 + B_1) + b_2x_2 + c_2x_3 = d_2$$

Звідси знайдемо

$$x_2 = \frac{d_2 - c_2x_3 - a_2B_1}{a_2A_1 + b_2}, \quad \text{або} \quad x_2 = A_2x_3 + B_2$$

де $$A_2 = -\frac{c_2}{a_2A_1 + b_2}; \quad B_2 = \frac{d_2 - a_2B_1}{a_2A_1 + b_2}\,.$$

Позначивши $e_2 = a_2A_1 + b_2$, отримаємо:

$$A_2 = -\frac{c_2}{e_2}; \qquad B_2 = \frac{d_2 - a_2B_1}{e_2}$$

Аналогічно матимемо, що прогоночні коефіцієнти з рівняння $x_i = A_i\,x_{i+1} + B_i$ мають вигляд:

$$A_i = -\frac{c_i}{e_i}; \qquad B_i = \frac{d_i - a_iB_{i-1}}{e_i} \tag{5}$$

$$e_i = a_i\,A_{i-1} + b_i\,; \quad i = \overline{1,n}\,.$$

При цьому враховуючи, що $a_1 = c_n = 0$, приймаємо

$$A_o = 0\ ;\quad B_o = 0. \tag{6}$$

В розгорнутому вигляді формула (5) буде мати вигляд формули (7).

Значення прогоночних коефіцієнтів можна одержати і таким шляхом. В рівнянні (3) понизимо індекс на одиницю $x_{i-1} = A_{i-1} \cdot x_i + B_{i-1}$ та підставимо значення x_{i-1} в i-е рівняння системи (1)

$$a_i x_{i-1} + b_i x_i + c_i x_{i+1} = d_i$$

$$\Rightarrow\ a_i(A_{i-1}x_i + B_{i-1}) + b_i x_i + c_i x_{i+1} = d_i$$

$$x_i = \frac{d_i - c_i x_{i+1} - a_i B_{i-1}}{a_i A_{i-1} + b_i} = -\frac{c_i}{a_i A_{i-1} + b_i} x_{i+1} + \frac{d_i - a_i B_{i-1}}{a_i A_{i-1} + b_i} = A_i x_{i+1} + B_i \tag{7}$$

<u>Обернений хід прогонки</u> (аналог оберненого ходу методу Гауса).

Він полягає в послідовному обчисленні невідомих x_i. Спочатку знаходять x_n. Для цього формулу (7) запишемо при i = n (враховуючи, що Cn = 0)

$$x_n = -\frac{c_n}{a_n A_{n-1} + b_n} x_{n+1} + \frac{d_n - a_n B_{n-1}}{a_n A_{n-1} + b_n} = \frac{d_n - a_n B_{n-1}}{a_n A_{n-1} + b_n} = B_n .$$

Долі використовуючи формулу (3) знаходимо послідовно всі невідомі x_{n-1}, x_{n-2}, … , x_1.

Майже у всіх задачах, що приводять до розв’язку системи (2) з трьохдіагональною матрицею, забезпечується умова переважання діагональних коефіцієнтів

$$|b_i| \geq |a_i| + |c_i|$$

Це забезпечує існування єдиного розв’язку та достатню стійкість методу прогону відносно похибок заокруглення.

Для запису коефіцієнтів a_i, b_i, та прогоночних коефіцієнтів A_{i-1}, B_{i-1} використовують один і той же масив.

Кубічна сплайн-інтерполяція в MathCad

Для цього використовується

- **interp(s,x,y,t)** — функція, що апроксимує дані векторів x і y кубічними сплайнами;
    - s — вектор других похідних, створений однією з супутніх функцій cspline, pspline або lspline;
    - x — вектор дійсних даних аргументу, елементи якого розташовані в порядку зростання;
    - y — вектор дійсних даних значень того ж розміру;
    - t — значення аргументу, при якому обчислюється інтерполююча функція.

Перед застосуванням функції interp необхідно заздалегідь визначити перший з її аргументів — векторну змінну s. Робиться це за допомогою однієї з трьох вбудованих функцій тих же аргументів (x,y).

- lspline(x,y) — вектор значень коефіцієнтів линійного сплайну;
- pspline(x,y) — вектор значень коефіцієнтів квадратичного сплайну;
- cspline(x,y) — вектор значень коефіцієнтів кубічного сплайну;
- x, y — вектори даних.

Вибір конкретної функції коефіцієнтів сплайнів впливає на інтерполяцію поблизу кінцевих точок інтервалу. Приклад сплайн-інтерполяції наведений в лістингу 1.

Листинг 1. Кубічна сплайн-інтерполяція

$$x := (0\ \ 1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 5\ \ 6)^T$$

$$y := (4.1\ \ 2.4\ \ 3\ \ 4.3\ \ 3.6\ \ 5.2\ \ 5.9)^T$$

$$s := \mathrm{cspline}(x,y)$$

$$A(t) := \mathrm{interp}(s,x,y,t)$$

Інтерполююча функція наведена на рис.1.

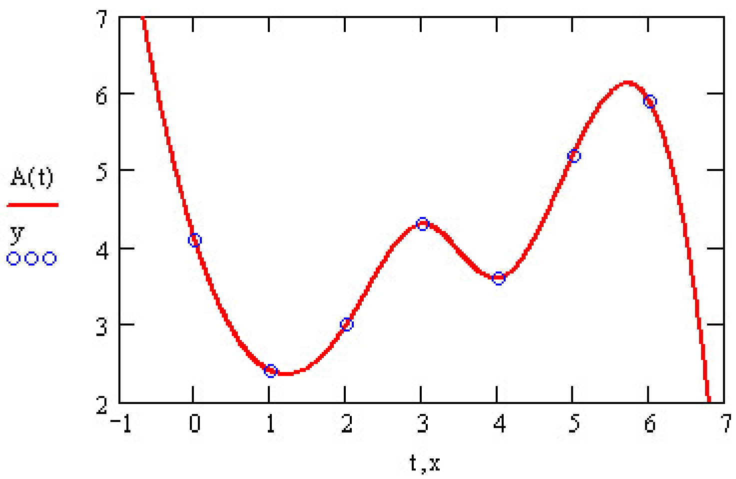


Рис.1. *Сплайн-інтерполяція до лістінгу 1*

2 Завдання

Створити програму, яка для заданої функції по заданим точкам будує інтерполяційний поліном $P_n(x)$ у формі Лагранжа або Ньютона, а також здійснює інтерполяцію кубічними сплайнами.

Програма має розрахувавати значення похибки $\varepsilon = |P_n(x) - y(x)|$, для чого потрібно вивести на графік із кроком (графік можна будувати допоміжними засобами, наприклад, у Mathcad), меншим у 5-6 разів, ніж крок інтерполяції, відповідні значення поліному та точної функції. Якщо похибка дуже мала, застосувати масштабування.

Знайти кубічний інтерполяційний сплайн для заданої функції у Mathcad. Вивести графік результатів.

3 Варіанти завдань

№	Функція $y(x)$	Вузли інтерполяції x_i
1-10	$\sin(\frac{\alpha}{2} \cdot x) + \sqrt[3]{x \cdot \alpha}$	-5+k, -3+k, -1+k, 1+k, 3+k; k = №*вар* – 1
11-20	$\frac{1}{2} x \cdot \cos(\alpha \cdot x)$	-6+k, -4+k, -2+k, 0+k, 2+k; k = №*вар* – 11
21-25	$\frac{x^2}{15} + \cos(x + \alpha)$	-6+k, -4+k, -2+k, 0+k, 2+k; k = 2*(№*вар* – 21)

α – остання цифра номеру групи. Якщо номер варіанту кратний 2, то потрібно робити інтерполяцію методом Ньютона, інакше – методом Лагранжа.

4 Вимоги до звіту

Звіт має містити:

- постановку задачі у вигляді заданої функції (із графіком) та значень точок даних у вузлах інтерполяції;
- вигляд поліному Лагранжа або Ньютона (за варіантом);
- порівняльний графік функції та інтерполяційного поліному;
- сплайни (коефіцієнти сплайнових інтерполяційних поліномів);
- порівняльний графік функції та сплайн-інтерполяції;
- розв'язок інтерполяції сплайнами у Mathcad (із наведенням порівняльних графіків);
- лістинг програми.

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 6

Тема “Розв’язання нелінійних рівнянь”

1 Теоретичні відомості

Знаходження коренів рівнянь за допомогою чисельних методів складається з двох етапів:

1)Відокремлення коренів: знаходження сукупності проміжків, кожен з яких містить один з коренів рівняння.

2) Уточнення коренів: знаходження приблизного значення коренів із заданою точністю ε.

Розглядається рівняння

$$f(x)=0, \tag{1}$$

де $f(x) = P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$, та $a_n > 0$, для якого потрібно знайти його дійсні корені x^*.

Перший етап виконується із використанням теорем, які допомагають виділити межі розташування додатніх та від’ємних коренів та знайти проміжки, що містять ці корені.

Теорема про границі усіх (комплексних) коренів рівняння.

Нехай $A = \max|a_i|$, i=0,…,n-1; $B = \max|a_i|$, i=1,…,n.

Тоді всі (комплексні) корені рівняння (1) лежать у кільці

$$\frac{|a_0|}{B+|a_0|} \le |x^*| \le \frac{|a_n| + A}{|a_n|}$$

Теорема про верхню межу додатніх коренів.

Нехай A=$\max\limits_i |a_i|$, $a_i < 0$;

$$m = \max i : a_i < 0.$$

Тоді $R = 1 + \sqrt[n-m]{\frac{A}{a_n}}$ - верхня межа додатніх коренів :

$$\forall x^* \le R,\ f(x^*) = 0\,.$$

Цю ж теорему можна застосувати для визначення нижньої межи додатніх коренів

заміною x:= $1/y$; тоді $\forall x^* \ge \frac{1}{R_y}$. Заміна знаку x:= - у дозволяє обмежити від'ємні

корені.

Теорема Гюа про наявність комплексних коренів. Якщо $\exists$k: 1 < k < n

$a^2{}_k < a_{k-1} \cdot a_{k+1}$, то рівняння має хоча б одну пару комплексноспряжених

коренів.

Теорема Штурма про чередування коренів.

Нехай f(x)=P_n(x)-поліном без кратних коренів. Утворимо послідовність

многочленів:

f_0 = f(x);

f_1 =f ' (x);

f_{i+1} = - [f_{i-1} mod f_i], i=1,…,n-1

- кожний наступний многочлен є залишком від ділення двох попередніх многочленів, взятим з протилежним знаком.

Стверджується, що кількість дійсних коренів полінома f_0(x) на довільному відрізку [a; b] дорівнює різниці між кількістю змін знаку у цій послідовності при x = a та x = b.

Другий етап передбачає застосування одного з нижченаведених методів до кожного з проміжків, отриманих на першому етапі.

Метод бісекції.

Дано: кінці інтервалу **a** та **b**, точність ε. На кожному кроці інтервал ділять навпіл:

$$c := (a + b) / 2,$$

та залишають той підінтервал, до якого належить корінь.

Метод хорд.

Вхідні дані аналогічні тим, що використовуються методом бісекції.

Проводиться січна до графіку функції. Точкою перетину її з віссю абсцис ділять інтервал:

$$c := (a*f(b) - b*f(a)) / (f(b) - f(a)),$$

та залишають той підінтервал, до якого належить корінь.

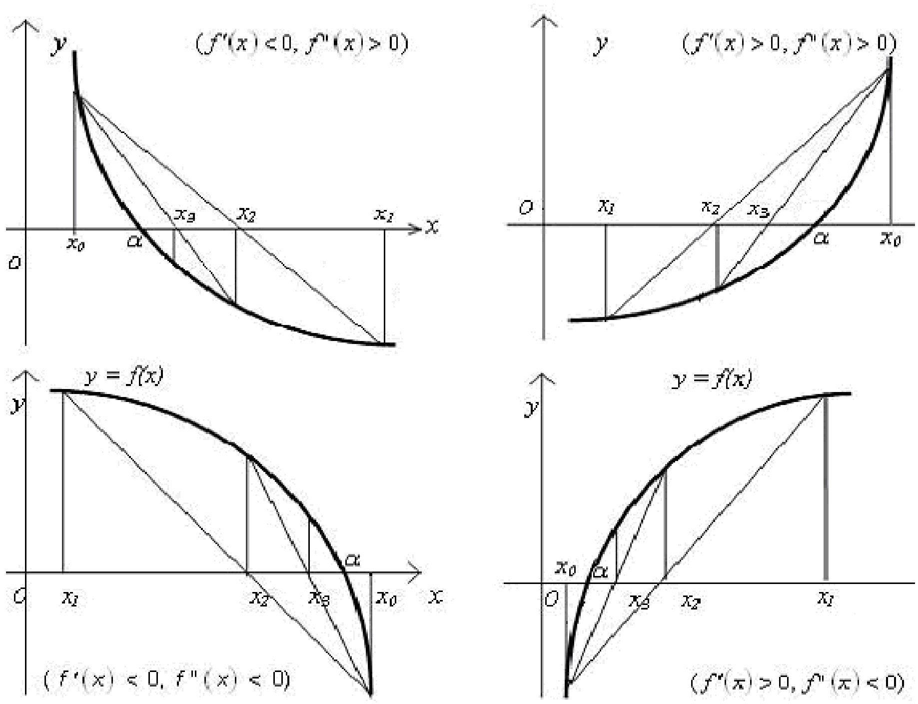


Рис.1.Графічна інтерпретація методу хорд.

Метод Ньютона (дотичних).

Дано: початкове наближення $\mathbf{x_0}$ та точність ε. Проводять дотичні до графіку функції, що дає формулу

$x_{k+1} := x_k - f(x_k) / f\,'(x_k)$.

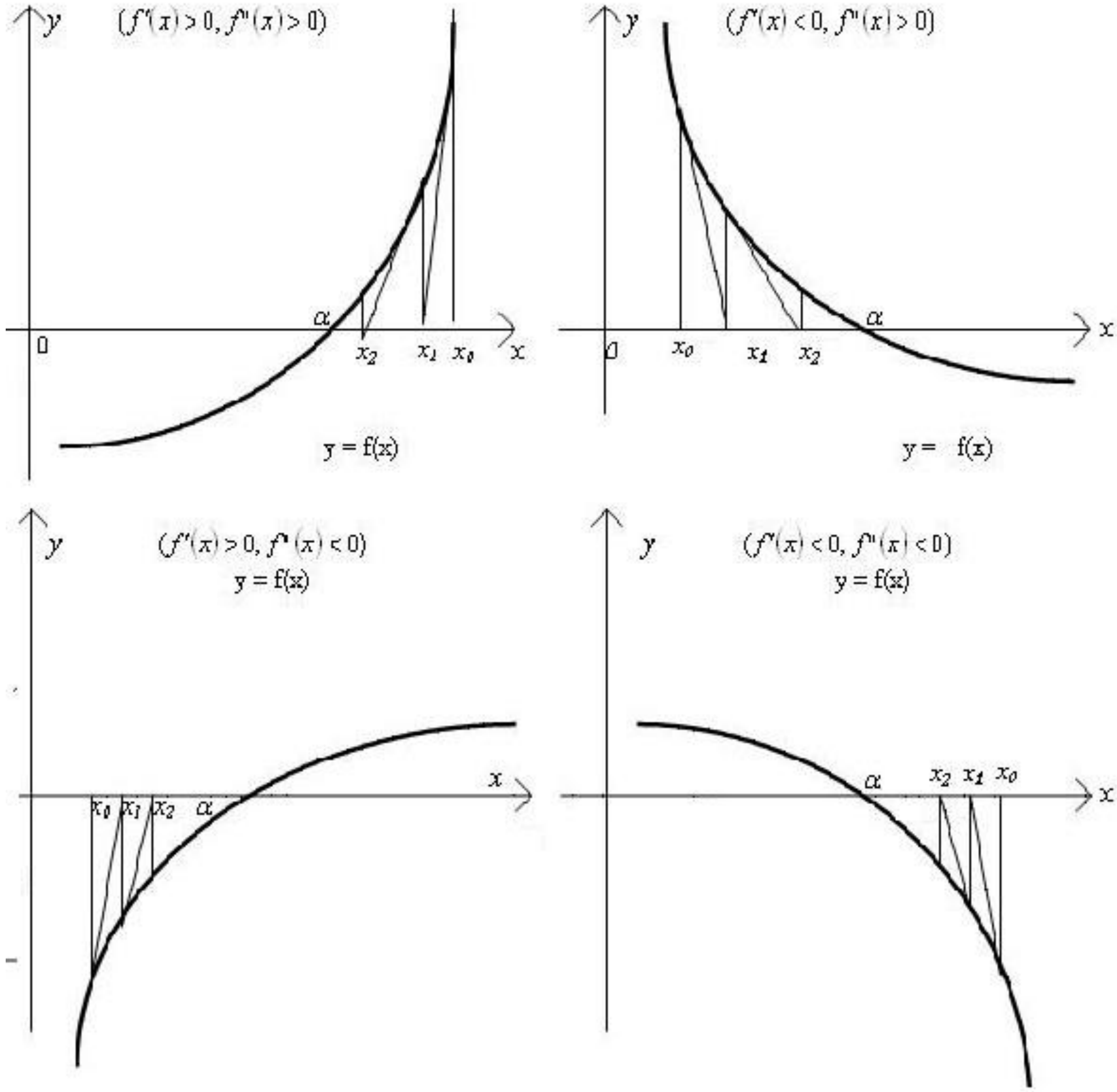


Рис.2.Графічна інтерпретація методу дотичних.

Перевірка існування кореня на відрізку $[a,b]$ здійснюється так:

корінь належить відрізку, якщо $f(a)\cdot f(b) < 0$,

якщо $f(a)\cdot f(b) > 0$, то відрізок не містить коренів.

2 Завдання

1. <u>Допрограмовий етап</u>: визначити кількість дійсних коренів рівняння, відокремити корені рівняння (письмово) (див. теореми про верхню та нижню

границі, Гюа, метод поліномів Штурма). Результатом є висновок: перший корінь належить проміжку […], другий корінь належить проміжку […] і т.д.

2. Програмний етап: уточнити корені рівняння:

2.1. Методом бісекції.

2.2. Методом хорд.

2.3. Методом Ньютона (дотичних).

Критерієм закінчення мають бути нерівності

для методу бісекції (інтервальний метод; *a* та *b* - кінці інтервалу)

$$|\, \mathbf{b} - \mathbf{a} \,| < \boldsymbol{\varepsilon} \quad \text{та} \quad |\, \mathbf{f(x_k)} \,| < \boldsymbol{\varepsilon}$$

для методів хорд та дотичних

$$|\, \mathbf{x_k} - \mathbf{x_{k-1}} \,| < \boldsymbol{\varepsilon} \quad \text{та} \quad |\, \mathbf{f(x_k)} \,| < \boldsymbol{\varepsilon}$$

3. Порівняти отримані результати, зробити висновки, який метод приводить до меншої кількості ітерацій і чим це зумовлено.

3 Варіанти завдань

Номер варіанту - це молодша цифра Вашого номера у заліковці. Параметр **k** - це молодша цифра номера Вашої групи. Параметр α - старша цифра Вашого номеру у заліковці.

Вигляд рівняння:

$a_5(1+\alpha)\, x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x^1 + k\, a_0 = 0$

Примітка 1: поліноми, що розглядаються в даній роботі, обов’язково повинні містити дійсні корені.

Таблиця 1. Варіанти завдань.

№ вар.	Коефіцієнти поліному					
	A5	a4	a3	a2	a1	a0
1	1	-2	-4	0	2	1
2	1	-3	0	7	0	-3
3	0	1	-3	1	-2	-2
4	0	-1	3	0	-2	1
5	2	-3	-1	0	0	3
6	0	0	2	-4	-1	1
7	2	-3	1	2	-4	1
8	1	0	0	3	-2	-1
9	0	1	-2	-9	-3	-1
10	0	-2	1	5	-2	1

4 Вимоги до звіту

Звіт має містити:

- постановку задачі у вигляді вихідного рівняння.
- виконання допрограмового етапу, результатом якого повинні бути проміжки, щодо яких проводиться уточнення.
- розв’язок уточнення коренів за методами бісекції, хорд, дотичних у Mathcad
- висновки
- лістинг програми (вхідними даними для цієї програми є координати проміжків $[a_i, b_i]$ та коефіцієнти поліному).

Примітка 2:При виконанні лабораторних робіт потрібно намагатися створювати універсальні процедури, які можуть бути використані для нелінійних рівнянь будь-якого порядку. Методи рекомендовано реалізувати у *вигляді методів класу (об'єкту) «поліном», або у вигляді процедури, до якої передаються*

- *посилання на функцію, корінь якої шукається,*
- *межі інтервалу, до якого належить корінь, та точність, з якою треба його знайти.*

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 7

Тема “Чисельне інтегрування функцій”

1 Теоретичні відомості

Чисельне інтегрування функцій

Квадратурна формула може бути записана у вигляді

$$\int_a^b p(x)\,f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} A_k\,f(x_k)\,; \qquad x_k \in [a,b] \tag{1.1}$$

Величини A_k називаються квадратурними коефіцієнтами, x_k – квадратурними вузлами, а права частина формули – квадратурною сумою. Функція *p(x)* називається функцією ваги.

Інтегрування, що грунтується на інтерполяціїних формулах

При обчисленні квадратурних коефіцієнтів вузли x_k обираються рівновіддаленими. Інтерполяціїні квадратури з такими вузлами прийнято називати *формулами Ньютона-Котеса.*

Припустимо, що відрізок інтегрування скінченний. Поділимо його на *n* рівних частин довжини *h = (b-a)/n*, так що $x_k = x_0 + hk$. Інтерполяційну формулу запишемо у наступному вигляді:

$$\int_a^b p(x)f(x)dx \approx (b-a)\sum_{k=0}^{n} B_k^n f(a+kh) \tag{1.2}$$

$$B_k^n = \frac{A_k}{b-a} = \int_a^b p(x)\frac{\omega(x)}{(x-x_k)\omega'(x_k)}dx. \tag{1.3}$$

Для сталої вагової функції $p(x)=1$ формула Ньютона-Котеса має вигляд

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)\sum_{k=0}^{n} B_k^n f(a+kh) \tag{1.4}$$

$$B_k^n = \frac{(-1)^{n-k}}{nh!(n-k)!}\int_a^b \frac{q(q-1)...(q-n)}{q-k}dq. \tag{1.5}$$

Таблиця, що наведена нижче, містить значення коефіцієнтів B_k^n. Для кожного n має місце співвідношення симетрії: $B_k^n = B_{n-k}^n$, тому в таблицю включені лише коефіцієнти з індексами $k \le n/2$.

Таблиця 9.1. Значення коефіцієнтів B_k^n $(k \le n/2)$.

n/k	0	1	2	3
1	1/2			
2	1/6	4/6		
3	1/8	3/8		
4	7/90	32/90	12/90	
5	19/288	75/288	50/288	
6	41/840	216/840	27/840	272/840

Задамось деякими точками $a_i \in [-1,1]$ й побудуємо інтерполяційний поліном $L_m(x)$, що співпадає з *f(x)* у вузлах

$$x_i = (b+a)/2 + a_i(b-a)/2.$$

Формула трапеції

Найпростіша інтерполяційна квадратурна формула одержується при $m=2$; $a_1=-1$; $a_2=1$.

Тоді коефіцієнти при A_k; *k = 0, 1, 2* обчислюються за формулою

$$A_0 = \int_{-1}^{1} \frac{|x^2-1|}{2} dx = \frac{2}{3}; \quad A_1 = \int_{-1}^{1} \frac{1-x}{2} dx = 1; \quad A_2 = \int_{-1}^{1} \frac{1+x}{2} dx = 1 .$$

На відрізку [a,b] одержуємо наступну формулу

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2n}\left[y_0 + 2\sum_{i=1}^{n-1} y_i + y_n \right]. \qquad (1.6)$$

Формула (1.6) має назву формули *трапецій.* Оцінка похибки цієї формули:

$$|R_2(f)| \le \frac{(b-a)^3}{12n^2} \max_{x\in[a,b]} |f''(x)| \qquad (1.7)$$

Формула Сімпсона

При значеннях параметрів $m=4;\ a_1=-1;\ a_2=a_3=0;\ a_4=1$ одержуємо

$$A_0=\int_{-1}^{1}\frac{x^2(x^2-1)}{4!}dx=\frac{1}{90};\quad A_1=\int_{-1}^{1}\frac{x^2(x-1)}{-2}dx=\frac{1}{3};$$

$$A_2=\int_{-1}^{1}(x^2-1)dx=-\frac{4}{3}\ ;\ A_3=\frac{1}{3}.$$

Тоді, розбивши [a, b] на *2n* підінтервалів, маємо формулу Сімпсона

$$\int_a^b f(x)dx\approx\frac{b-a}{6n}\left[2\sum_{i=1}^{n}(2y_{2i-1}+y_{2i})+y_0-y_{2n}\right]. \tag{1.8}$$

Оцінка похибки цієї формули:

$$\left|R_4(f)\right|\le\frac{(b-a)^2}{180(2n)^4}\max_{x\in[a,b]}\left|f^{(4)}(x)\right|. \tag{1.9}$$

Квадратурна формула Гауса

При побудові квадратурних формул, що грунтуються на інтерполяційних формулах, використовувалися рівновіддалені вузли. Для побудови квадратурних формул Гауса вузли формуются іншим шляхом.

Побудуємо квадратурну формулу у вигляді

$$I=\frac{b-a}{2}\sum_{i=1}^{n}A_i f(x_i), \tag{1.10}$$

що буде точною для поліномів найбільш високого степеню при найменшій кількості вузлів. Коєфіцієнти A_i та вузли x_i визначимо за умови, щоб формула була точною для $2m$ функцій $x^{k-1}, k=\overline{1,2m}$. З цієї умови та (9.16) одержуємо наступні $2m$ рівнянь

$$\int_a^b x^{k-1}dx=\sum_{i=1}^{2m}A_i x^{k-1};\quad k=\overline{1,2m}.$$

Якщо розв’язати цю систему рівнянь й замістити одержані значення A_i та x_i у рівнянні (9.16), одержимо квадратурну формулу Гауса, що буде точною для поліномів степеню $\le 2m-1$.

Нехай

$$y(x)=\sum_{i=1}^{2m} b_i x^{i-1}.$$

Тоді

$$\int_a^b y(x)dx=\sum_{i=1}^{2m} b_i \int_a^b x^{i-1}dx=\sum_{i=1}^{m} A_i \sum_{i=1}^{2m} b_i x^{i-1}=\sum_{i=1}^{m} A_i y(x_i).$$

Будемо шукати розв’язок цієї системи рівнянь за допомогою поліномів Лежандра. З цієї метою домножимо перше та наступні m рівнянь системи на $(-1)^k C_m^k C_{m-k}^k$; $k=\overline{1,m}$ й складемо одержані $m+1$ рівнянь:

$$\int_a^b (-1)^k C_m^k C_{m-k}^k x^i dx=\sum_{i=1}^{m} A_i \sum_{k=1}^{m} (-1)^k C_m^k C_{m-k}^k x_i^k.$$

За визначенням поліномів Лежандра

$$\int_a^b L_m(x)dx=\sum_{i=1}^{m} A_i L_m(x_i).$$

Якщо виконати ці ж дії із наступними m рівняннями, то одержимо для k-го рівняння

$$\int_a^b x^{k-1} L_m(x)dx=\sum_{i=1}^{m} x_i^{k-1} A_i L_m(x_i), k=\overline{1,m}.$$

За умови ортогональності поліномів Лежандра

$$\int_a^b x^{k-1} L_m(x)dx=0; k=\overline{1,m}.$$

одержимо

$$\sum_{i=1}^{m} x_i^{k-1} A_i L_m(x_i)=0; k=\overline{1,m}.$$

Якщо в якості вузлів $\overline{x_i}$ взяти корені поліномів Лежандра, то одержимо вузли для квадратурної формули Гаусса

$$L_m(\overline{x_i})=0.$$

У такому разі для визначення коефіцієнтів квадратурної формули (1.9) одержуємо наступну систему лінійних рівнянь

$$\begin{aligned}
&A_1+A_2+\ldots+A_m=1;\\
&\overline{x}_1 A_1+\overline{x}_2 A_2+\ldots+\overline{x}_m A_m=1/2;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\overline{x}_1^{\,m-1} A_1+\overline{x}_2^{\,m-1} A_2+\ldots+\overline{x}_m^{\,m-1} A_m=1/m.
\end{aligned}\qquad(1.11)$$

Інтеграл буде дорівнювати

$$I = \sum_{i=1}^{m} A_i f(x_i) \quad . \tag{1.12}$$

У випадку відрізку довільної довжини $[a,b]$ заміною змінної

$$x = (b+a)/2 + z(b-a)/2 \tag{1.13}$$

приходимо до обчислення інтегралу на відрізку [-1,1].

Похибка квадратурної формули Гауса оцінюєтся нерівністю

$$|R_m(f)| \le \frac{(m!)^4 (b-a)^{m-1}}{(2m+1)[(2m)!]^3} \max_{\xi \in [a,b]} \left| f^{(2m)}(\xi) \right|. \tag{1.14}$$

<u>РЕАЛІЗАЦІЯ КВАДРАТУРНОЇ ФОРМУЛИ ГАУСА</u>

1. Для визначення кількості m (як правило, обчислення починають з 2) членів у формулі Гауса оцінити похибку за нерівністю 1.14. Якщо одержана таким чином похибка перевищує бажану точність інтегрування, то треба m збільшити на 1.
2. У випадку, коли відрізок інтегрування довільний, але скінчений, заміною 1.13 привести його до [-1,1].
3. Обчислити або взяти з таблиць корені поліномів Лежандра $L_m(x)=0$ та вагові коефіцієнти A_i.
4. Обчислити значення функції
5. Обчислити значення інтегралу за формулою 1.12.

2 Завдання

1. Реалізувати програму, яка обчислює інтеграл за допомогою формули трапеції або Сімпсона, в залежності від варіанту. Точність обчислень має бути 0,0001. Мінімальну кількість кроків визначити по формулі (1.7). Оцінити похибку результату.
2. Реалізувати програму, яка обчислює інтеграл за допомогою квадратурної формули Гауса (для всіх варіантів). Оцінити похибку результату.

3. Обчислити визначений інтеграл у Mathcad та порівняти реальну похибку кожного метода (це різниця між розрахованим значенням інтегралу і значенням у MathCad) з аналітичною похибкою кожного методу. Реальна похибка має бути не більша ніж аналітична.

3 Варіанти завдань

$$\int_a^b f(x)dx$$

Функція для 1-10 варіантів: $f(x) := \frac{\cos(x)}{x+1}$

Функція для 11-20 варіантів: $f(x) = (x+1)\sin x$

Функція для 21-25 варіантів: $f(x) = \frac{\lg(x^2+1)}{x}$

Таблиця 1. Варіанти завдань.

№ вар.	Границі інтегрування	
	a	b
1,11,21	0.7	1.4
2,12,22	1	3
3,13,23	0.8	1.6
4,14,24	-0.7	1.2
5,15,25	-2	3
6,16,26	0.5	1.4
7,17	2	5
8,18	1.4	2.1
9,19	0.1	1.1
10,20	0.8	1.7

Парні варіанти - метод трапецій, непарні – метод Сімпсона.

4 Вимоги до звіту

Звіт має містити:

- постановку задачі у вигляді вихідного інтегралу.
- обчислення інтегралу за допомогою формули трапеції або Сімпсона, та квадратурної формули Гаусса
- перевірочний розрахунок інтегралу за допомогою програми Mathcad
- висновки
- лістинг програми.

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 8

Тема “Розв’язання задачі Коші”

1. Теоретичні відомості

Розглянемо задачу Коші для диференційного рівняння

$$y' = f(x, y), \; y(x_0) = y_0 \qquad (1)$$

Умова $y(x_0) = y_0$ є початковою умовою.

Метод Рунге-Кутта

Нехай y_i - наближене значення розв’язку, який шукаємо, у точці x_i. Тоді обчислення наближеного значення y_{i+1} в наступній точці $x_{i+1} = x_i + h$ (h – шаг сітки по x) виконується за формулами

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(K_1^{(i)} + 2K_2^{(i)} + 2K_3^{(i)} + K_4^{(i)}), \qquad (2)$$

де

$$K_1^{(i)} = f(x_i, y_i),$$
$$K_2^{(i)} = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{hK_1^{(i)}}{2}),$$
$$K_3^{(i)} = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{hK_2^{(i)}}{2}),$$
$$K_4^{(i)} = f(x_i + h, y_i + hK_3^{(i)}).$$

Цей метод має 4 порядок, тобто помилка на кожному кроці складає $O(h^5)$, а сумарна похибка на скінченому інтервалі інтегрування - $O(h^4)$.

Пояснимо як вести розрахунок по цій схемі. При $n=0$ відомо $y_0 = u_0$. Можна обчислити послідовно $K_1^{(0)}, K_2^{(0)}, K_3^{(0)}, K_4^{(0)}$ і знайти y_1, після чого обчислення повторюються для $n = 1, 2,\ldots$

Для контроля правильності вибору кроку h обчислюють дріб:

$$\tau = \left|\frac{K_2^{(i)} - K_3^{(i)}}{K_1^{(i)} - K_2^{(i)}}\right|,$$

причому τ не повинно перевищувати декількох сотих, інакше крок потрібно зменшити.

Формула нев'язки для цього методу у конкретних точках:

$$\varepsilon_i = \frac{1}{6}\Big(K_1^{(i)}(y(x_i)) + 2K_2^{(i)}(y(x_i)) + 2K_3^{(i)}(y(x_i)) + K_4^{(i)}(y(x_i))\Big) - \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h}, \quad (3)$$

де $K_j^{(i)}(y_i(x_i))$ отримуються з (2) підстановкою у вирази для $K_1^{(0)}, K_2^{(0)}, K_3^{(0)}, K_4^{(0)}$ замість знайдених y_i точні значення функції $y(x_i)$. Якщо точні значення $y(x_i)$ функції невідомі, то похибку обчислень можна знаходити за наближеною формулою Рунге, яка наводиться нижче у цьому розділі.

Метод Рунге-Кутта є явним (для визначення y_{i+1} потрібно проводити обчислення по явним формулам) і однокроковим (для визначення y_{i+1} потрібно зробити один крок по сітці з x_i до x_{i+1}.

Метод Адамса

Метод Рунге-Кутта має різні зручні властивості, які стосуються обчислень, але має також один суттєвий недолік. При побудові цього методу застосовується інформація на відрізку прямої довжиною в один крок, тому подібна інформація має бути отримана знову, що передбачає велику трудоємкість відповідних обчислювальних правил.

Якщо відмовитись від умови однокроковості, можна обчислювальні методи будувати таким чином, щоби частина отриманої інформації використовувалась повторно на декількох наступних кроках обчислювального процесу. Такі методи називаються багатокроковими. До них відноситься зокрема метода Адамса (Адамса-Башфорта).

Нехай для рівняння $y' = f(x, y)$ з початковою умовою $y(x_0) = y_0$ методом Рунге- Кутта знайдені три послідовних значення невідомої функції

$$y_1 = y(x_1) = y(x_0 + h),$$
$$y_2 = y(x_2) = y(x_0 + 2h),$$
$$y_3 = y(x_3) = y(x_0 + 3h).$$

Далі обчислюємо величини

$$q_0 = y'_0 = f(x_0, y_0),$$
$$q_1 = y'_1 = f(x_1, y_1),$$
$$q_2 = y'_2 = f(x_2, y_2),$$
$$q_3 = y'_3 = f(x_3, y_3).$$

За числами x_k, y_k, y'_k, q_k (k = 0,1,2,3) обчислюємо скінчені різниці величини q. Метод Адамса полягає у продовженні обчислень за допомогою екстраполяційної формули:

$$y_{k+1} = y_k + q_k + \frac{1}{2}\Delta q_{k-1} + \frac{5}{12}\Delta^2 q_{k-2} + \frac{3}{8}\Delta^3 q_{k-3},\ k = 3, 4, \ldots \tag{4}$$

Тут $\Delta q_k = q_{k+1} - q_k$, $\Delta^{i+1} q_k = \Delta^i q_{k+1} - \Delta^i q_k$. Враховуючи це, отримуємо:

$$\begin{aligned}
&\Delta q_{k-1} = q_k - q_{k-1} = h(f(x_k, y_k) - f(x_{k-1}, y_{k-1}));\\
&\Delta^2 q_{k-2} = \Delta q_{k-1} - \Delta q_{k-2} = \Delta q_{k-1} - h(f(x_{k-1}, y_{k-1}) - f(x_{k-2}, y_{k-2}));\\
&\Delta^3 q_{k-3} = \Delta^2 q_{k-2} - \Delta^2 q_{k-3} = h\big(f(x_k, y_k) - 3f(x_{k-1}, y_{k-1}) + 3f(x_{k-2}, y_{k-2}) - f(x_{k-3}, y_{k-3})\big).
\end{aligned} \tag{5}$$

Спрогнозоване значення потрібно ще уточнити. Для цього використовують значення x_{k+1}, y_{k+1}, y'_{k+1}, q_{k+1} і застосовують формулу корекції

$$y_{k+1} = y_k + q_{k+1} + \frac{1}{2}\Delta q_k - \frac{1}{12}\Delta^2 q_{k-1} - \frac{1}{24}\Delta^3 q_{k-2}, \tag{6}$$

яка називається інтерполяційною формулою методу Адамса.

Спочатку використовують формулу (4), а потім коректують за допомогою (6). І якщо результат уточненого значення не перевищує припустиму похибку обчислень, то крок h є допустимим.

$$\left| y_{k+1}^{кор} - y_{k+1}^{екстр} \right| \le \varepsilon.$$

Для обчислень на комп'ютері формули (4) та (6) у такому вигляді є незручними. З урахуванням (5) їх можна представити у вигляді

$$\begin{aligned}
&y_{k+1}^{екстр} = y_k + \frac{h}{24}\big(55f(x_k, y_k) - 59f(x_{k-1}, y_{k-1}) + 37f(x_{k-2}, y_{k-2}) - 9f(x_{k-3}, y_{k-3})\big),\\
&y_{k+1}^{інтер} = y_k + \frac{h}{24}\big(9f(x_{k+1}, y_{k+1}) + 19f(x_k, y_k) - 5f(x_{k-1}, y_{k-1}) + f(x_{k-2}, y_{k-2})\big)
\end{aligned} \tag{7}$$

Наведені формули мають достатньо велику точність. Вони мають похибку порядку $O(h^4)$, але самі формули оцінки похибки достатньо складні, тому використовують більш просте та загальне правило Рунге:

Правило Рунге

Якщо наближений метод має порядок похибки *m*, то похибку можна приблизно оцінити за формулою:

$$\varepsilon(x_i) \approx h^m O(x_i) \approx \frac{y_i^h - y_i^{h/2}}{2^m - 1}. \qquad (8)$$

У формулі (8) y_i^h та $y_i^{h/2}$ наближені розв'язки у точці x_i, які знайдені з кроком *h* та *h/2* відповідно.

2. Вирішення звичайних диференційних рівнянь в системі MathCad

Є два типи задач, які можливо вирішувати за допомогою Mathcad:

- задача Коші — для яких визначені початкові умови на шукані функції, тобто задані значення цих функцій в початковій точці інтервалу інтеграції рівняння;
- крайові задачі — для яких задані певні співвідношення відразу на обох межах інтервалу.

ЗДР першого порядку

Диференціальне рівняння першого порядку може за визначенням містити, окрім самої шуканої функції y(t), лише її першу похідну y'(t). У переважній більшості випадків диференціальне рівняння можна записати в стандартній формі (формі Коші):

$$y(t)=f(y(t),t), \qquad (6)$$

і лише з такою формою вміє працювати обчислювальний процесор Mathcad. Правильна з математичної точки зору постановка відповідної задачі Коші для ЗДР першого порядку повинна, окрім самого рівняння, містити одну початкову умову — значення функції y(t0) в деякій точці t0. Потрібно явно визначити функцію(t) на інтервалі від t0 до tx.

Для чисельної інтеграції однієї ЗДР у користувача Mathcad (починаючи з версії Mathcad 2000 Pro) є вибір — або використовувати обчислювальний блок Given/odesoive, або вбудовані функції Rkfixed, Rkadapt, Bulstoer, як в колишніх версіях Mathcad. Перший шлях кращий переважно з міркувань наочності представлення задачі і результатів, а другий дає користувачеві більше важелів впливу на параметри чисельного методу.

Всі методи засновані на апроксимації диференціальних рівнянь різницевими аналогами. Залежно від конкретної форми апроксимації, виходять алгоритми різної точності і швидкодії. У Mathcad використаний найбільш популярний алгоритм Рунге-Кутта четвертого порядку. Він забезпечує малу похибку для широкого класу систем ЗДР за винятком жорстких систем.

Обчислювальний блок Given/Odesolve

Обчислювальний блок для вирішення одного ЗДР, що реалізовує чисельний метод Рунге-Кутта, складається з трьох частин:

- Given — ключове слово;
- ЗДР
- і початкову умову, записану за допомогою логічних операторів, причому початкова умова має бути у формі в(t1) = b; odesolve(t, t1) — вбудована функція для вирішення ОДУ відносно змінної t на інтервалі (t0,t1).

Припустимо, і навіть часто бажано, задання функції Odesolve (t, t1, step) з трьома параметрами, де step— внутрішній параметр чисельного методу, що визначає кількість кроків, в яких метод Рунге-Кутта розраховуватиме рішення диференціального рівняння. Чим більше step, тим з кращою точністю буде отриманий результат, але тим більше часу буде витрачено на його пошук. Підбором цього параметру можна у декілька разів прискорити розрахунки без істотного погіршення їх точності.

Приклад рішення задачі Коші для ЗДР першого порядку $y' = y - y^2$ за допомогою обчислювального блоку наведений в лістингу 1.

Лістінг 1. Вирішення задачі Коші для ЗДР первого порядку

Given

$$\frac{d}{dt}y(t) = y(t) - y(t)^2$$

$$y(0) = 0.1$$

$$y := \mathrm{Odesolve}(t, 10)$$

Mathcad вимагає, щоб кінцева точка інтеграції ЗДР лежала правіше початкової: t0<t1 (у лістингу 11.1 t0=0,t1=10), інакше буде видано повідомлення про помилку. Результатом роботи блоку Given/odesoive є функція y(t), визначена на проміжку (t0,t1). Слід скористатися звичайними засобами Mathcad, щоб побудувати її графік або отримати значення функції в якій-небудь точці вказаного інтервалу, наприклад: y(3) =0.691.

Користувач має можливість вибирати між двома модифікаціями чисельного методу Рунге-Кутта. Для зміни методу необхідно натисненням правої кнопки миші на області функції odesolve викликати контекстне меню і вибрати в ньому один з двох пунктів: Fixed (Фіксований крок) або Adaptive (Адаптивний). За умовчанням застосовується перший з них, тобто метод Рунге - Кутта з фіксованим кроком.

Графік рішення даного рівняння показаний на мал. 1. Зверніть увагу, що він відповідає отриманню рішення в матричному вигляді (лістинг 1), тому по осях відкладені відповідні стовпці, виділені з матриці оператором <>.

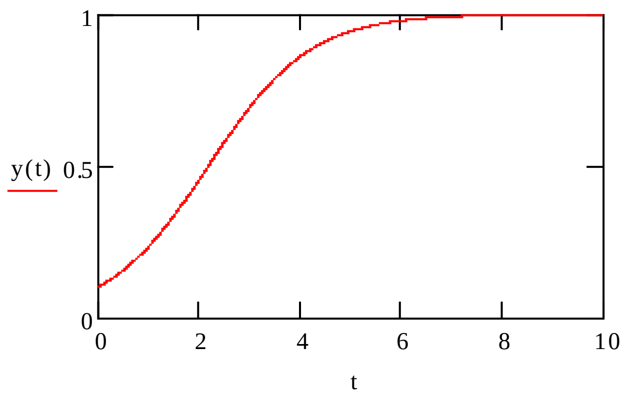


Рис. 1. *Рішення рівняння* $y' = y - y^2$ *(лістінг 1)*

Приклад, вирішений в лістингу 1 та рис.1, узятий з області математичної екології і описує динаміку популяцій з внутрішньовидовою конкуренцією (людожери). Спочатку відбувається зростання чисельності популяції, близьке до експоненціального, а потім вихід на стаціонарний стан.

Системи ЗДР першого порядку

Для MathCad система диференціальних рівнянь має бути представлена в стандартній формі.

Задання системи еквівалентно наступному векторному представленню, де Y і B " — відповідні невідомі векторні функції змінної t розміру N*1, а p — векторна функція того ж розміру і (N+i) кількості змінних (N компонент вектора і, можливо, t). Саме векторне представлення використовується для введення системи ЗДР в середовищі Mathcad.

Задача сформульована для систем ЗДР першого порядку. Якщо в систему входять рівнян-ня вищих порядків, її можна звести до системи більшого числа рівнянь першого порядку.

Вбудовані функції для рішення систем ЗДР

У Mathcad є три вбудовані функції, які дозволяють вирішувати задачу Коші для систем рівнянь різними чисельними методами.

- rkfixed(y0, t0, t1, M, D) — метод Рунге-Кутта з фіксованим кроком,
- Rkadapt(y0, t0, t1, M, D) — метод Рунге-Кутта зі змінним кроком;
- Buistoer(y0, t0, t1, M, D) — метод Булирша-Штера;
  - y0 — вектор початкових значень в точці to розміру NXI;
  - t0 — початкова точка розрахунку,
  - t1 — кінцева точка розрахунку,
  - M — число кроків, на яких чисельний метод знаходить рішення;
  - D — векторна функція розміру N*1 двох аргументів — скалярного t та векторного y . При цьому y — шукана векторна функція аргумента t того ж розміру N*1.

Кожна з наведених функцій видає рішення у вигляді матриці розміру (M+1)x(N+1). У її лівому стовпці знаходяться значення аргументу t, що ділять інтервал на рівномірні кроки, а в останніх N стовпцях — значення шуканих функцій y0(t),y1(t) ..,yn-1(t), розраховані для цих значень аргументу. Оскільки всього точок (окрім початкової) M, то рядків у матриці рішення буде всього M+1.

Лістінг 2. Рішення системи двох ЗДР за допомогою функції *rkfixed*.

$$D(t,y) := \begin{pmatrix} y_1 \\ -y_0 - 0.1 \cdot y_1 \end{pmatrix} \qquad y0 := \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$M := 100$$

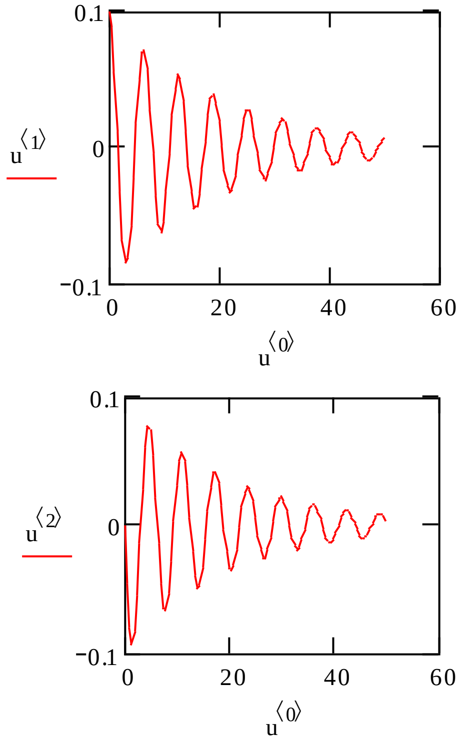
$$u := rkfixed(y0, 0, 50, M, D)$$

По-перше, функція D, що входить до числа параметрів вбудованих функцій для рішення ЗДР, має бути функцією обов'язково двох аргументів. По-друге, другий її аргумент має бути вектором того ж розміру, що і сама функція D. По-третє, такий самий розмір має бути і у вектора початкових значень yo (він визначений у першому рядку лістингу правіше).

У другому рядку лістингу визначено число кроків, на яких розраховується рішення, а його останній рядок надає матричній змінній результат дії функції *rkfixed*. Рішення системи ЗДР буде здійснено на проміжку (0, 50).

u =

	0	1	2
85	42.5	$-4.397\cdot10^{-4}$	0.012
86	43	$5.181\cdot10^{-3}$	0.01
87	43.5	$9.291\cdot10^{-3}$	$6.014\cdot10^{-3}$
88	44	0.011	$6.666\cdot10^{-4}$
89	44.5	$9.974\cdot10^{-3}$	$-4.579\cdot10^{-3}$
90	45	$6.634\cdot10^{-3}$	$-8.475\cdot10^{-3}$
91	45.5	$1.874\cdot10^{-3}$	-0.01
92	46	$-3.1\cdot10^{-3}$	$-9.338\cdot10^{-3}$
93	46.5	$-7.092\cdot10^{-3}$	$-6.329\cdot10^{-3}$
94	47	$-9.197\cdot10^{-3}$	$-1.957\cdot10^{-3}$
95	47.5	$-9.004\cdot10^{-3}$	$2.668\cdot10^{-3}$
96	48	$-6.674\cdot10^{-3}$	$6.431\cdot10^{-3}$
97	48.5	$-2.865\cdot10^{-3}$	$8.476\cdot10^{-3}$
98	49	$1.442\cdot10^{-3}$	$8.399\cdot10^{-3}$
99	49.5	$5.194\cdot10^{-3}$	$6.322\cdot10^{-3}$
100	50	$7.523\cdot10^{-3}$	$2.838\cdot10^{-3}$



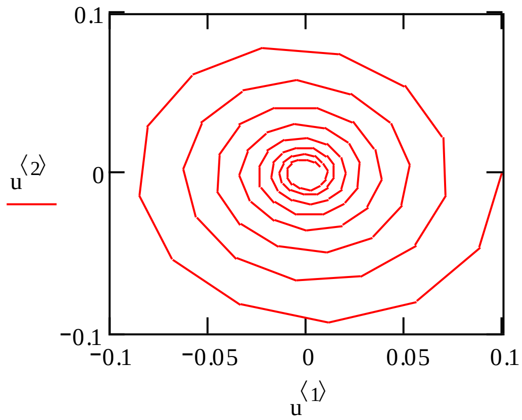


Рис.2. Рішення системи з двох ЗДР (лістінг 2)за допомогою функції rkfixed.

Фазовий портрет типу змальованого на рис. 2 (останній графік), має одну стаціонарну точку (аттрактор), на яку "накручується" рішення. В теорії динамічних систем аттрактор такого типу називається фокусом.

Приклад вирішення ЗДР у MathCad за допомогою функції rkfixed

$$D(x,y) := \left[1 + 1.4\left(y_0\right)\cdot\sin(x) - \left(y_0\right)^2\right]$$

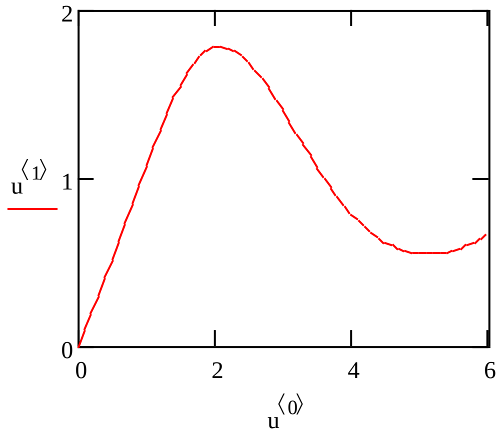
(це вектор з одного елемета)

$y0 := (0)$

$M := 6($

$u := rkfixed(y0, 0, 6, M, D)$

$f(i) := u(i, 0)$



u =

	0	1
0	0	0
1	0.1	0.1
2	0.2	0.201
3	0.3	0.303
4	0.4	0.408
5	0.5	0.515
6	0.6	0.624
7	0.7	0.735
8	0.8	0.848
9	0.9	0.961
10	1	1.074
11	1.1	1.183
12	1.2	1.288
13	1.3	1.387
14	1.4	1.477
15	1.5	1.558

Рис.3. Рішення одного ЗДР і побудова графіка за допомогою функції rkfixed.

Проглянути всі компоненти матриці і, які не вміщуються на екрані, можна за допомогою вертикальної смуги прокрутки. Щоб побудувати графік рішення, треба відкласти відповідні компоненти матриці рішення по координатних осях: значення аргументу $u^{\langle 0 \rangle}$ — уздовж осі *x*, а $u^{\langle 1 \rangle}$ і $u^{\langle 2 \rangle}$ — уздовж осі *y*. Для виділення з матриці стовпчика слід скористатися $M^{\langle\rangle}$ на панелі матриць або функцією *submatrix*. Як відомо, вирішення звичайних диференціальних рівнянь часто зручніше змальовувати не у такому вигляді, а у фазовому просторі, по кожній з осей якого відкладаються значення кожній із знайдених функцій. При цьому аргумент входить в них лише параметрично. Для його побудови потрібно було лише поміняти мітки осей на $u^{\langle 1\rangle}$ і $u^{\langle 2\rangle}$, відповідно.

2. Завдання

Методами Рунге-Кутта та Адамса розв'язати задачу Коші. На початку інтервалу у необхідній кількості точок значення для методу Адамса визначити методом Рунге-Кутта четвертого порядку.

Для фіксованого *h* потрібно навести:

– значення наближеного розв'язку $y(x)$ у тих самих точках, одержані обома методами;
– значення функції помилки $\varepsilon(x)$ для обох методів;

графіки:

– обох наближених - на одному малюнку;
– обох помилок - на другому малюнку.

Розв’язати задане рівняння за допомогою Matchad, порівняти із власними результатами.

Розв’язати за допомогою Matchad систему рівнянь, побудувати графік y_0 та фазовий портрет системи $u^{<2>}(u^{<1>})$, зробити висновки щодо стійкості системи.

3. Варіанти завдань

№ вар.	Рівняння	Інтервал
1 - 5	$y' = 1 + ay\sin x - y^2,\ a = 1{,}0 + 0{,}4k,\ k = \text{№}вар.$	[0; 6]
6 - 10	$y' = e^{-ax}(y^2 + b),\ a = 1{,}0 + 0{,}4n,\ n = \text{№}вар - 5,\ b = 1{,}0 + 0{,}4k,$ $k = \text{№}вар - 5$	[0; 4]
11 - 15	$y' = \cos(ax + y) + (x - y),\ a = 1{,}0 + 0{,}4k,\ k = \text{№}вар - 10$	[0; 6]

16-20	$y' = 1 - \sin(ax + y) + \dfrac{by}{2 + x}, \; a = 1{,}0 + 0{,}4k, \; b = 1{,}0 + 0{,}8k,$ $k = \text{№}вар - 15$	[0; 5]
21 - 25	$y' = \dfrac{\cos y}{a + x} + y^2, \; a = 1{,}0 + 0{,}4k, \; k = \text{№}вар - 20.$	[0; 2]

Взяти крок h = 0,1. Якщо вимоги на величину τ (див. метод Рунге-Кутта) для даного кроку не виконано, подрібнити крок. Початкові умови $y(0)=0$. Відрізок, що розглядається: [0; 1].

Розв’язати за допомогою Matchad систему рівнянь

$$y_0' = y_1$$

$$y_1' = -y_0 + \frac{(k-10)}{10} \cdot y_1,$$

де $y_0(0) = 0.1, \; y_1(0) = 0$, k - № варіанту, тобто № у списку групи.

4. Вимоги до звіту

Звіт має містити:

- постановку задачі;
- вихідне рівняння;
- значення наближеного розв'язку $y(x)$ у тих самих точках, одержані обома методами;
- спільний графік значень обох наближених методів;
- значення функції помилки ε для обох методів у всіх точках x_i;
- спільний графік помилок ε для обох методів;
- графік y_0 та фазовий портрет системи;
- лістинг програми.

ЛІТЕРАТУРА

1. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.Н. Численные методы, М., Наука, 1987.
2. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. Т.1., М., Наука, 1966; Т.2., М., Физматгиз, 1960.
3. Волков Е.А. Численные методы. М., Наука, 1987.
4. Воробьева Г.Н., Данилова А.Н. Практикум по вычислительной математике. М., Высшая школа, 1990.
5. Демидович В.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. Наука, 1986.
6. Додаткові розділи числових методів. Ітераційні методи розв’язання рівнянь та систем. Методичні вказівки до виконання самостійної роботи з дисципліни / Уклад.: І.Є. Галицька, О.Г. Жданова, В.М. Кузнецов. К.: НТУУ “КПІ” ВПІ ВПК “Політехніка”, 2009. – 72 с.
7. Додаткові розділи числових методів. Методи розв’язання диференційних рівнянь з частинними похідними та інтегральних рівнянь. Методичні вказівки до виконання самостійної роботи / Уклад.: І.Є. Галицька, О.Г. Жданова, В.М. Кузнецов. К.: НТУУ “КПІ” ВПІ ВПК “Політехніка”, 2010. – 46 с.
8. Задача інтерполяції. Числове диференціювання та інтегрування. Методичні вказівки до самостійної роботи та виконання розрахунково-графічної роботи з дисципліни “Числові методи” / Уклад.: І.Є. Галицька, О.Г. Жданова, В.М. Кузнецов. К.: НТУУ “КПІ” ВПІ ВПК “Політехніка”, 2007. – 52 с.
9. Зеленський К.Х., Ігнатенко В.М., Коц О.П. Комп’ютерні методи прикладної математики. К., Академперіодика, 2002.
10. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М., Наука, 1968.

11. Краскевич В.Е., Зеленский К.Х., Гречко В.И. Численные методы в инженерных исследованиях. Киев, Вища школа, 1986.
12. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И. Вычислительные методы. Т.1., М., Наука, 1976; Т.2., М., Наука, 1977.
13. Кудрявцев Е.М. Mathcad 2000 Pro. – М.: ДМК Пресс, 2001.
14. Мак-Кракен Д., Дорн У. Численные методы и программирование на ФОРТРАНЕ. М., Мир, 1977.
15. Методи розв’язання систем лінійних алгебричних і нелінійних рівнянь та їх систем. Проблема власних значень. Методичні вказівки до виконань розрахунково-графічної роботи з дисципліни “Числові методи” / Уклад.: В.М. Кузнецов, О.Г. Жданова, І.Є. Галицька. К.: ІВЦ “Видавництво “Політехніка” , 2001. – 64 с.
16. Пшеничный Б.Д., Данилин Ю.М. Численные методы в экстремальных задачах. М., Наука, 1975.
17. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. М., Наука, 1989.
18. Сухарев А.Г., Тимохов АВ., Федоров В.В. Курс методов оптимизации. М., Наука, 1986.
19. Фельдман Л. П., Петренко А. І., Дмитрієва О. А. Чисельні методи в інформатиці. Підручник. – К., 2006. – 480 с.
20. Форсайт Дж., Малкольм М., Моулер К. Машинные методы математических вычислений. М., Мир, 1980.
21. Чабан Василь. Чисельні методи. Навчальний посібник.– Львів, 2001.
22. Щуп Т. Решение математических задач на ЭВМ. М., Мир, 1982.