НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ

«КПІ імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

Кафедра Автоматизованих Систем Обробки Інформації та Управління

Спеціальні розділи математики

Лабораторна робота № 4

Обчислення власних значень та власних векторів матриць

Зміст

1 Теоретичні відомості

Велика кількість задач математики та фізики потребує знаходження власних значень та власних векторів матриць, тобто знаходження таких значень λ, для яких існують нетривіальні розв’язки однорідної системи рівнянь

$$Ax = \lambda x, \tag{1}$$

та знаходження цих нетривіальних розв’язків. Тут A – квадратна матриця порядку m, x – невідомий вектор-стовпець.

Такий розв’язок системи (1) існує тоді і тільки тоді, коли

$$\mathrm{D}(\lambda) = |A - \lambda E| = 0, \tag{2}$$

де E – одинична матриця.

Визначник $\mathrm{D}(\lambda)$ називається характеристичним або віковим визначником, а рівняння (2) – характеристичним або віковим рівнянням.

Метод Данилевського

Квадратну матрицю P порядку m називають подібною до матриці A, якщо її можна подати у вигляді

$$P = S^{-1}AS,$$

де S – невироджена матриця порядку m.

Виконується наступна теорема: характеристичні визначники вихідної та подібної матриці збігаються.

Ідея методу Данилевського полягає у тому, що матрицю A подібним перетворенням зводять до так званої нормальної форми Фробеніюса.

$$P = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_{m-1} & p_m \\ 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 & 0 \\ . & . & ... & . & . \\ 0 & 0 & ... & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Можна перевірити, що характеристичне рівняння для матриці P набуває простого вигляду:

$$D(\lambda) = \begin{pmatrix} p_1 - \lambda & p_2 & \cdots & p_{m-1} & p_m \\ 1 & -\lambda & ... & 0 & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 & 0 \\ . & . & ... & . & . \\ 0 & 0 & ... & 1 & -\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (-1)^m \left(\lambda^m - p_1\lambda^{m-1} - p_2\lambda^{m-2} - ... - p_{m-1}\lambda - p_m\right) = 0$$

тобто коефіцієнти при степенях λ характеристичного поліному безпосередньо виражаються через елементи першого рядка матриці P.

Зведення матриці A до нормальної форми Фробеніюса P здійснюється послідовно по рядках, починаючи з останнього рядка. Це робиться за допомогою ітеративного процесу, який виражається у вигляді:

$$A^{(i+1)} = M_{m-i}^{-1} A^{(i)} M_{m-i}, \tag{3}$$

де

$$M_{m-i}=\begin{pmatrix}1&0&...&0&0\\0&1&...&0&0\\.&.&...&.&.\\\mu_1&\mu_2&...&\mu_{m-1}&\mu_m\\.&.&...&.&.\\0&0&...&0&1\end{pmatrix},\ \mu_j=\begin{cases}\dfrac{-a^{(i)}_{m-i+1,j}}{a^{(i)}_{m-i+1,m-i}},\ j\neq m-i\\ \dfrac{1}{a^{(i)}_{m-i+1,m-i}},\ j=m-i\end{cases},$$

$$M^{-1}_{m-i}=\begin{pmatrix}1&0&...&0&0\\0&1&...&0&0\\.&.&...&.&.\\a^{(i)}_{m-i+1,1}&a^{(i)}_{m-i+1,2}&...&a^{(i)}_{m-i+1,m-1}&a^{(i)}_{m-i+1,m}\\.&.&...&.&.\\0&0&...&0&1\end{pmatrix}.$$

Тут $a^{(i)}_{f,j}$ – відповідні елементи матриці $A^{(i)}$, індекс $i = 1\ldots m$-1, $A^{(1)} = A$, елемент $a^{(i)}_{m-i+1,m-i}\neq 0$.

Таким чином, нормальну форму Фробеніюса буде одержано за (m-1) крок і вона набуде вигляду

$$P=M_1^{-1}M_2^{-1}...M_{m-2}^{-1}M_{m-1}^{1}AM_{m-1}M_{m-2}...M_2M_1.$$

Якщо ж умова $a^{(i)}_{m-i+1,m-i}\neq 0$ не виконується на якомусь кроці i=k, то можливі два випадки. У першому випадку у (m-k+1)-рядку лівіше елемента $a^{(k)}_{m-k+1,m-k}$ є елемент $a^{(k)}_{m-k+1,l}$, де $l < m$-k. Тоді ми можемо переставити місцями (m-k)- та l-рядки та стовпці одночасно. Отже, на потрібному нам місці одержуємо ненульовий елемент $a^{(k)}_{m-k+1,l}$, вже перетворена частина матриці не змінюється і можна застосовувати звичайний крок методу Данилевського.

Розглянемо другий випадок, коли $a^{(k)}_{m-k+1,m-k}$ =0 і всі елементи цього рядка лівіше нього теж дорівнюють нулю. У цьому разі характеристичний визначник матриці $A^{(k)}$ можна подати у вигляді

$$\left|A^{(k)}-\lambda E\right|=\left|B^{(k)}-\lambda E_{m-k}\right|\left|C^{(k)}-\lambda E_k\right|,$$

де E_{m-k} та E_k – одиничні матриці відповідної вимірності, а квадратні матриці $B^{(k)}$ та $C^{(k)}$ мають вигляд:

$$B^{(k)}=\begin{pmatrix}a^{(k)}_{1,1}&...&a^{(k)}_{1,m-k}\\.&...&.\\a^{(k)}_{m-k,1}&...&a^{(k)}_{m-k,m-k}\end{pmatrix},\ C^{(k)}=\begin{pmatrix}a^{(k)}_{m-k+1,m-k+1}&...&a^{(k)}_{m-k+1,m-1}&a^{(k)}_{m-k+1,m}\\1&...&0&0\\.&...&.&.\\0&...&1&0\end{pmatrix}.$$

Звернімо увагу на те, що матриця $C^{(k)}$ вже має нормальну форму Фробеніюса, і тому співмножник $\left|C^{(k)}-\lambda E_k\right|$ просто розгортаємо у вигляді багаточлена з коефіцієнтами, що дорівнюють елементам першого рядка.

Співмножник $\left|B^{(k)}-\lambda E_{m-k}\right|$ є характеристичним визначником матриці $B^{(k)}$. Для його розгортання можна знову застосувати метод Данилевського, зводячи матрицю $B^{(k)}$ подібними перетвореннями до нормальної форми Фробеніюса.

Припустимо тепер, що матрицю A подібними перетвореннями $P = S^{-1}AS$ вже зведено до нормальної форми Фробеніюса. Розв'язуючи характеристичне рівняння

$$\lambda^m-p_1\lambda^{m-1}-p_2\lambda^{m-2}-...-p_{m-1}\lambda-p_m=0,$$

знаходимо одним з відомих методів його корені λ_i, $i = 1,\ldots,m$, які є власними значеннями матриць P та A.

Тепер маємо задачу знайти власні вектори, які відповідають цим власним значенням, тобто вектори $x^{(i)}$, $i = 1,\ldots,m$, такі що

$$Ax^{(i)} = \lambda_i x^{(i)},\ i = 1,...,m.$$

Для цього спочатку знайдемо власні вектори для матриці P. Нехай це будуть вектори $y^{(i)}$. Тоді $x^{(i)} = Sy^{(i)}$, де $S = M_{m-1}M_{m-2}...M_2M_1$.

Для знаходження власних векторів P, запишемо рівність $Py^{(i)} = \lambda_i y^{(i)}$ у розгорнутій формі

$$\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_{m-1} & p_m \\ 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ . & . & ... & . & . \\ 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ... & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1^{(i)} \\ y_2^{(i)} \\ \vdots \\ y_m^{(i)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 y_1^{(i)} \\ \lambda_2 y_2^{(i)} \\ \vdots \\ \lambda_m y_m^{(i)} \end{pmatrix},\ \text{або}\ \left\{ \begin{array}{c} p_1 y_1^{(i)} + ... + p_m y_m^{(i)} = \lambda_i y_1^{(i)}, \\ y_1^{(i)} = \lambda_i y_2^{(i)}, \\ ... \\ y_{m-1}^{(i)} = \lambda_i y_m^{(i)}. \end{array} \right. .$$

У цій системі одна із змінних може бути вільною і може набути довільного значення. Як таку візьмемо $y_m^{(i)}$ і покладемо $y_m^{(i)} = 1$. Тоді послідовно отримуємо:

$$y_m^{(i)} = 1,\ y_{m-1}^{(i)} = \lambda,\ y_{m-2}^{(i)} = \lambda^2, ..., y_1^{(i)} = \lambda^{m-1} \quad .$$

А звідси вже отримуємо за виразом $x^{(i)} = Sy^{(i)}$ значення власного вектору $x^{(i)}$ для матриці A.

2 Завдання

Створити програму, для приведення матриці A до нормальної форми Фробеніюса. Отримане характеристичне рівняння розв'язати довільним способом у Mathcad і отримати всі власні числа λ_i, $i = 1,\dots,m$ з точністю 5 знаків після коми. Знайти по одному власному вектору для кожного власного числа.

Перевірити точність знайдених результатів, підставляючи у рівняння (1) знайдені власні числа та власні вектори.

Знайти власні числа матриці A виключно за допомогою Mathcad і порівняти з отриманими раніше результатами.

3 Варіанти завдань

Матриця A обчислюється за формулою

$$A = \begin{pmatrix} 6{,}26 + a & 1{,}10 - b & 0{,}97 + g & 1{,}24 - d \\ 1{,}10 - b & 4{,}16 - a & 1{,}30 & 0{,}16 \\ 0{,}97 + g & 1{,}30 & 5{,}44 + a & 2{,}10 \\ 1{,}24 - d & 0{,}16 & 2{,}10 & 6{,}10 - a \end{pmatrix},$$

де $a = 0{,}11 \times t$; $b = 0{,}02 \times k$; $g = 0{,}02 \times k$; $d = 0{,}015 \times t$; t = остання цифра № у списку групі; $k = 3\times$ (молодша цифра № групи – 4) + перша цифра № у списку групи (наприклад, для номеру 15 у списку ІС-62 t=5, k=3×(2 – 4) + 1 = –5).

4 Вимоги до звіту

Звіт має містити:

- постановку задачі;
- проміжні матриці M_i^{-1} та M_i, результуючу матрицю P у нормальній формі Фробеніюса;
- отримане характеристичне рівняння;
- власні числа – корені характеристичного рівняння;
- власний вектор для кожного власного числа;
- оцінка точності обчислень (підстановка результатів у вихідне рівняння (1));
- копія розв'язку задачі у Mathcad;
- порівняння власного розв'язку та розв'язку, отриманого у Mathcad;

- лістинг програми.

5 Література

1. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. М., Наука, 1989.
2. Волков Е.А., Численные методы. М., Наука, 1987.
3. Демидович В.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики.Наука, 1986.
4. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. Т.1., М., Наука, 1966; Т.2., М., Физматгиз, 1960.
5. Кузнецов В.М., Жданова О.Г., Галицька І.Є. Методи розв'язання систем лінійних і нелінійних рівнянь та їх систем. Проблема власних значень. Методичні вказівки до виконання розрахунково-графічної роботи з дисципліни „Числові методи". „Політехніка", НТУУ „КПІ", 2001.