Задание:

1. $\neg(\exists x)(\phi \wedge (\exists z)\psi) \vee (\forall y)\theta \ \vdash \ (\exists y)\theta \to (\forall x)((\forall z)\neg\psi \vee \neg\phi)$

2. Доказать, что введение $\exists$ слева обратимо.

3. Доказать, что введение $\exists$ справа необратимо.

Решение:

1. Предположение: данная секвенция невыводима.
   Возьмем θ тожд. ист. ф-лу вида: $t \approx t$, где t - терм; а $\phi = x \approx x$ и $\psi = z \approx z$.
   Тогда $\neg(\exists x)(\phi \wedge (\exists z)\psi) \vee (\forall y)\theta$ - тожд. ист. $\Rightarrow$ правая часть секвенции так же должна быть тождественно истинной. А так как $\sigma((\exists y)\theta) = 1$, то следствие импликации должно быть тоже истиным. Но изначально мы задались такими ф-ми ϕ и ψ, что оно ложно.
   $\Rightarrow$ Правая часть тождественно ложна.
   $\Rightarrow$ Вся секвенция является тождественно ложной. А так как ИВ непротиворечиво, то данная секвенция невыводима.

2. $$\dfrac{\text{(утонч.)}\ \dfrac{\Gamma, (\exists x)\phi \ \vdash \ \psi}{\Gamma, \phi, (\exists x)\phi \ \vdash \ \psi} \qquad \dfrac{\dfrac{\phi \ \vdash \ \phi}{\Gamma, \phi \ \vdash \ \phi}\ \text{(утонч.)}}{\Gamma, \phi \ \vdash \ (\exists x)\phi}\ \text{(}\exists\text{ введ. справа)}}{\Gamma, \phi \ \vdash \ \psi}\ \text{(сечение)}$$

3. Допустим, что

$$\frac{\Gamma \ \vdash \ (\exists x)\phi}{\Gamma \ \vdash \ (\phi)^x_t}$$

тогда $\Gamma \ \vdash \ (\exists x)\phi$ - тождественно истинна.
a) $\sigma(\Gamma) = 0$
b) $\sigma(\Gamma) = 1 \Rightarrow \sigma((\exists x)\psi) = 1$
$\Rightarrow$ сушествует a$\in \mathfrak{A} : \sigma((\psi)^x_a) = 1$
Возьмем b$\in \mathfrak{A}$ $(\sigma(t) = b), b \neq a$, такое что $\sigma((\psi)^x_b) = 0 \Rightarrow \Gamma \ \vdash \ (\phi)^x_b$ - не тожд. ист. $\Rightarrow \Gamma \ \vdash \ (\phi)^x_t$ - не тожд. ист. Противоречие.
$\Rightarrow$ введение $\exists$ справа необратимо.