

Задание:

$\vdash (\forall y)(x + y \approx y + x \rightarrow x + s(y) \approx s(y) + x)$, т.е. индукционный шаг для $x \approx y \vdash y \approx x$

Решение:

Отметим, что будет использоваться:

1. $\vdash s(x) + y \approx s(x + y)$
2. $t \approx s \vdash s \approx t$, где t и s - термы.

Первое доказывалось в прошлом домашнем задании. Второе же легко доказывается, и это достаточно сделать для переменных.

$$\frac{\vdash x \approx x \quad \frac{x \approx x, x \approx y \vdash y \approx x}{x \approx y, x \approx x \vdash y \approx x}}{x \approx y \vdash x \approx x} \quad \frac{x \approx y, x \approx x \vdash y \approx x}{x \approx y \vdash x \approx x \rightarrow y \approx x}$$

$$x \approx y \vdash y \approx x$$

$$\frac{\text{(уточн.)} \quad \frac{\vdash x + s(y) \approx s(x + y)}{x + y \approx y + x \vdash x + s(y) \approx s(x + y)}}{\frac{x + y \approx y + x \vdash s(x + y) \approx x + s(y)}{x + y \approx y + x \vdash s(x + y) \approx x + s(y)}} \quad \frac{\text{(уточн.)} \quad \frac{\vdash s(y) + x \approx s(x + y)}{x + y \approx y + x \vdash s(y) + x \approx s(x + y)}}{\frac{x + y \approx y + x \vdash s(x + y) \approx s(y) + x}{\vdash x + y \approx y + x \rightarrow x + s(y) \approx s(y) + x}} \quad \frac{\vdash s(x + y) \approx s(x + y)}{x + y \approx y + x \vdash s(x + y) \approx s(x + y)} \quad \frac{\text{(уточн.)} \quad \frac{\vdash s(x + y) \approx s(x + y)}{x + y \approx y + x \vdash s(x + y) \approx s(x + y)}}{\frac{}{\vdash (\forall y)(x + y \approx y + x \rightarrow x + s(y) \approx s(y) + x)}} \quad \text{(\forall введ.)}$$