

Задание:

1. $\neg(\exists x)(\phi \wedge (\exists z)\psi) \vee (\forall y)\theta \vdash (\exists y)\theta \rightarrow (\forall x)((\forall z)\neg\psi \vee \neg\phi)$
2. Доказать, что введение \exists слева обратимо.
3. Доказать, что введение \exists справа необратимо.

Решение:

1. in progress...

$$2. \quad \frac{\frac{\Gamma, (\exists x)\phi \vdash \psi}{\Gamma, \phi, (\exists x)\phi \vdash \psi} \quad \frac{\frac{\phi \vdash \phi}{\Gamma, \phi \vdash \phi} \text{ (уточн.)}}{\Gamma, \phi \vdash (\exists x)\phi} \text{ (}\exists \text{ введ. справа)}}{\Gamma, \phi \vdash \psi} \text{ (сечение)}$$

3. Допустим, что

$$\frac{\Gamma \vdash (\exists x)\phi}{\Gamma \vdash (\phi)_t^x} \text{ (уточн.)}$$

тогда $\Gamma \vdash (\exists x)\phi$ - тожд. ист.

a) $\sigma(\Gamma) = 0$

b) $\sigma(\Gamma) = 1 \Rightarrow \sigma((\exists x)\psi) = 1$

\Rightarrow существует $a \in \mathfrak{A} : \sigma((\psi)_a^x) = 1$

Возьмем $b \in \mathfrak{A} (\sigma(t) = b), b \neq a$, такое что $\sigma((\psi)_b^x) = 0 \Rightarrow \Gamma \vdash (\phi)_b^x$ - не

тожд. ист. $\Rightarrow \Gamma \vdash (\phi)_t^x$ - не тожд. ист. Противоречие.

\Rightarrow введение \exists справа необратимо.