

Задание:

1. $\vdash 0 + x \approx x$
2. $s(x) + y \approx s(x + y)$

Решение:

(1)

Воспользуемся аксиомой индукции.

Базис. $\vdash 0 + 0 \approx 0$ свободная конкретизация.

Инд. шаг.

$0 + x \approx x \vdash 0 + s(x) \approx s(x)$

$\vdash 0 + s(x) \approx s(0 + x)$ замена равных

$\vdash 0 + s(x) \approx s(x)$

$$\frac{0 + x \approx x \vdash 0 + x \approx x \quad \frac{\frac{\vdash y + s(x) \approx s(y + x)}{\vdash 0 + s(x) \approx s(0 + x)}}{0 + x \approx x \vdash 0 + s(x) \approx s(0 + x)}}{0 + x \approx x \vdash 0 + s(x) \approx s(x)}$$

(2)

Воспользуемся аксиомой индукции (индукция по y).

Базис. $\vdash s(x) + y \approx s(x + y)$

$\vdash x + 0 \approx x$

Инд. шаг.

$s(x) + y \approx s(x + y) \vdash s(x) + s(y) \approx s(x + s(y))$

$\vdash s(x) + s(y) \approx s(s(x) + y)$

$\vdash s(x) + s(y) \approx s(s(x + y))$

$\vdash x + s(y) \approx s(x + y)$

$\vdash s(x + y) \approx x + s(y)$

$\vdash s(x) + s(y) \approx s(x + s(y))$