

Задание:

1. $\vdash 0 + x \approx x$
2. $s(x) + y \approx s(x + y)$

Решение:

(1)

Воспользуемся аксиомой индукции.

Базис. $\vdash 0 + 0 \approx 0$ свободная конкретизация.

Инд. шаг.

$$\begin{aligned} 0 + x \approx x & \quad \vdash 0 + s(x) \approx s(x) \\ \vdash 0 + s(x) \approx s(0 + x) & \text{замена равных} \\ \vdash 0 + s(x) \approx s(x) & \end{aligned}$$

$$\frac{\begin{array}{c} \vdash y + s(x) \approx s(y + x) \\ \vdash 0 + s(x) \approx s(0 + x) \end{array}}{\frac{0 + x \approx x \quad \vdash 0 + x \approx x}{0 + x \approx x \quad \vdash 0 + s(x) \approx s(0 + x)}}{0 + x \approx x \quad \vdash 0 + s(x) \approx s(x)}$$

(2)

Воспользуемся аксиомой индукции(индукция по y).

Базис. $\vdash s(x) + y \approx s(x + y)$

$\vdash x + 0 \approx x$

Инд. шаг.

$$\begin{aligned} s(x) + y \approx s(x + y) & \quad \vdash s(x) + s(y) \approx s(x + s(y)) \\ \vdash s(x) + s(y) \approx s(s(x) + y) & \\ \vdash s(x) + s(y) \approx s(s(x + y)) & \\ \vdash x + s(y) \approx s(x + y) & \\ \vdash s(x + y) \approx x + s(y) & \\ \vdash s(x) + s(y) \approx s(x + s(y)) & \end{aligned}$$