№1

$$z = \frac{1}{a^3}\left(x \cdot y^3 + x^3 y\right)$$

Переходя в полярные координаты (r, φ)

$$z = \frac{1}{a^3} \cdot r^2 \cdot r^2 \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi = \frac{1}{2 \cdot a^3} \cdot r^4 \cdot \sin(2\varphi)$$

Используя выражение для ds^2 в цилиндрических координатах:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 +$$
$$+ \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 dr^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2 \cdot d\varphi^2 = dr^2 \cdot \left(1 + \left(\frac{2}{a^3} \cdot r^3 \cdot \sin(2\varphi)\right)^2\right) +$$
$$+ d\varphi^2 \cdot \left(r^2 + \left(\frac{1}{a^3} \cdot r^4 \cdot \cos(2\varphi)\right)^2\right)$$

Т.к. $ds^2 = \sum g_{ij} \cdot dx_i dx_j$

$$g = \begin{vmatrix} 1 + \frac{4r^6 \cdot \sin^2(2\varphi)}{a^6} & 0 \\ 0 & r^2 + \frac{r^8 \cdot \cos^2(2\varphi)}{a^3} \end{vmatrix}$$

~~№2~~

~~$A_i B^i = S$~~

~~при трансформации~~

$\bar{A}_i \cdot \bar{B}^i = \bar{S}$

~~т.к.~~ $\bar{S} = S$; $\bar{B}^i = B_j \frac{\bar{x}_i}{x_j}$

№ 2

$A_i B^i = S$

При трансформации

$\bar{A}_i \bar{B}^i = \bar{S} = S$

Т.к. B^n может быть любым, возьмём B'^n, где

$B'^n = B^n + \delta_{nk}$, т.к. отличается от начального в k-ом компоненте на 1

$A_i B'^i = A_i \cdot B^i + A_k = S' = S + A_k$

$\bar{A}_i \cdot \bar{B}'^i = \bar{A}_i \cdot B'_j \cdot \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_j} = \bar{A}_i \cdot \left(\bar{B}^i + \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_k}\right) = \bar{S}' = S' = S + A_k$

$\bar{A}_i \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_k} = A_k \Rightarrow A_i$ ковариантный тензор

№ 3

$R_{ijkl} T^{kl}$

При трансформации

$\bar{R}_{ijkl} \bar{T}^{kl} = R_{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial x_\alpha}{\partial \bar{x}_i} \frac{\partial x_\beta}{\partial \bar{x}_j} \frac{\partial x_\gamma}{\partial \bar{x}_k} \frac{\partial x_\delta}{\partial \bar{x}_l} \cdot T^{\varepsilon\varsigma} \cdot \frac{\partial \bar{x}_k}{\partial x_\varepsilon} \frac{\partial \bar{x}_l}{\partial x_\varsigma} =$

$= R_{\alpha\beta\gamma\delta} \cdot T^{\varepsilon\varsigma} \cdot \delta^\gamma_\varepsilon \delta^\delta_\varsigma \cdot \frac{\partial x_\alpha}{\partial \bar{x}_i} \frac{\partial x_\beta}{\partial \bar{x}_j} = A_{\alpha\beta k l} \frac{\partial x_\alpha}{\partial \bar{x}_i} \frac{\partial x_\beta}{\partial \bar{x}_j}$

следовательно объект является тензором ранга (0,2)

п.04

после трансформации

$$\bar{A}_i \bar{A}^i = A_k \cdot \frac{\partial x_k}{\partial \bar{x}_i} \cdot A^l \cdot \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_l} = A_k \cdot A^l \cdot \frac{\partial x_k}{\partial x_l} = A_k \cdot A^l \cdot \delta^k_l = A_k A^k$$

следовательно $A_i A^i$ скаляр

$$T_{i k} = \frac{\partial A_i}{\partial x_k}$$

пра трансформации

$$\bar{T}_{ik} = \frac{\partial \bar{A}_i}{\partial \bar{x}_k} = \frac{\partial \left(A_j \cdot \frac{\partial x_j}{\partial \bar{x}_i} \right)}{\partial \bar{x}_k} = A_j \cdot \frac{\partial^2 x_j}{\partial \bar{x}_i \cdot \partial \bar{x}_k} +$$

$$+ \frac{\partial A_j}{\partial x_l} \frac{\partial x_l}{\partial \bar{x}_k} \cdot \frac{\partial x_j}{\partial \bar{x}_i}$$

из-за первого слагаемого видно, что это не тензор (0,2).

$$\bar{F}_{ik} = \frac{\partial \bar{A}_i}{\partial \bar{x}_k} - \frac{\partial \bar{A}_k}{\partial \bar{x}_i}$$

$$\bar{F}_{ik} = \frac{\partial \bar{A}_i}{\partial \bar{x}_k} - \frac{\partial \bar{A}_k}{\partial \bar{x}_i} = \left(A_j \frac{\partial^2 x_j}{\partial \bar{x}_i \cdot \partial \bar{x}_k} + \right.$$

$$+ \left. \frac{\partial A_j}{\partial x_l} \cdot \frac{\partial x_l}{\partial \bar{x}_k} \cdot \frac{\partial x_j}{\partial \bar{x}_i} \right) - \left(A_a \frac{\partial^2 x_a}{\partial \bar{x}_i \cdot \partial \bar{x}_k} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial A_a}{\partial x_p} \frac{\partial x_p}{\partial \bar{x}_i} \cdot \frac{\partial x_a}{\partial \bar{x}_k} \right)$$

Слагаемые $A_j \frac{\partial^2 x_j}{\partial \bar{x}_i \partial \bar{x}_k} - A_l \frac{\partial^2 x_l}{\partial \bar{x}_i \partial \bar{x}_k}$ сокращаются

Приравняв $j = l$, $l = j$ получаем

$$\bar{F}_{ik} = \left(\frac{\partial A_j}{\partial \bar{x}_l} - \frac{\partial A_l}{\partial \bar{x}_j} \right) \cdot \frac{\partial x_l}{\partial \bar{x}_k} \cdot \frac{\partial x_j}{\partial \bar{x}_i} \Rightarrow F_{ik} \text{ тензор } (0,2)$$

№5

Т.к. $\det A \cdot \det B = \det(A \cdot B)$:

$$gV_1 = \det \begin{pmatrix} A^i \cdot g_{i1} & A^i g_{i2} & A^i g_{i3} \\ B^i g_{i1} & B^i g_{i2} & B^i g_{i3} \\ C^i g_{i1} & C^i g_{i2} & C^i g_{i3} \end{pmatrix} =$$

$$= \det \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{pmatrix} = V$$

Из этого же правила не трудно убедиться, что, учитывая $\det(A) = \det(A^T)$:

$$VV_1 = \det \begin{pmatrix} A^i A_i & A^i B_i & A^i C_i \\ B^i A_i & B^i B_i & B^i C_i \\ C^i A_i & C^i B_i & C^i C_i \end{pmatrix}$$