Optimal aktieportefølje og offentlig regulering

Studieretningsprojekt i Samfundsfag A & Matematik A

Viggo Ottar Edvard Kjelfred-Schjerning, 3.e

Espergærde Gymnasium & HF

Afleveringsdato: 8. april 2022.

Resume

I dette studieretningsprojekt redegøres for en række kriterier til at bestemme optimale aktieporteføljer med udgangspunkt i teori fra Markovitz' "Efficient frontier" og John Larry Kellys "Kelly-kriterie". Der opstilles en matematisk model, som i et vist omfang løses analytisk og ellers illustreres numerisk ved hjælp af numeriske algoritmer og simulationer. Modellen afprøves på empiriske data og anvendes til at kunne beregne effekten af finansiel regulering af finansiel gearing samt beskatning af afkast. Herefter diskuteres og vurderes regeringens reformudspil, der involverer en øget aktiebeskatning. Ikke overraskende leder deregulering af krav til egenkapital og gearing til mere risikofyldte investeringer. En anden central indsigt i denne analyse er, at aktiebeskatning har en forsikrende effekt på investorerne, som derfor er villige til at påtage sig mere risiko.

Vejledere: Lars Høyer Holmqvist & Kenneth Niemann Rasmussen

Antal anslag: 47.989

Indledning

Regulering af investorerne og deres adfærd har vidtrækkende samfundsøkonomiske konsekvenser; herunder adgang til kapital i økonomien, finansiering af boliger, afkast til pensioner og afværgelse af potentielle finansielle kriser. Regulering af finansielle markeder, såsom beskatning af afkast eller regler for gearing af investeringer, påvirker investorernes optimale afvejning mellem risiko og forventet afkast. Det er derfor vigtigt at forstå, hvordan den optimale portefølje påvirkes af markedsforhold, investorernes risikovillighed, finansiel regulering og beskatning.

Vi starter med at redegøre for, hvordan man sammensætter en optimal aktieportefølje baseret på klassisk porteføljeteori. Der opstilles en matematisk model, som beskriver aktiers stokastiske kursudvikling over tid, og formaliserer kriterier for, hvordan man sammensætter en optimal portefølje bestående at mere eller mindre risikofyldte aktiver. Modellen implementeres, løses Python og anvendes til en række illustrative numeriske simulationer.[1] Med afsæt i modellen undersøges samspillet mellem flere faktorer, såsom aktiebeskatning, regulering af gearing, investorernes risikoaversion og mulighed for risikodiversificering af porteføljer bestående af mere eller mindre korrelerede aktiver. Dette gøres med henblik på at vurdere de økonomiske konsekvenser af regeringens reformudspil ”Danmark kan mere 1”, som blandt andet involverer en stigning i aktieskatten fra 42 til 45 procent.

Modellen tager udgangspunkt i moderne porteføljeteori, der kan dateres tilbage til det banebrydende arbejde af økonom og nobelprismodtager Harry Markowitz. I hans artikel (Markowitz, 1952) formulerede han en matematisk modelramme, som formaliserer hvordan risikoaverse investorer optimalt bør sammensætte en portefølje, således at investoren maksimerer det forventede afkast af sin portefølje for et givet risikoniveau. Den centrale indsigt i (Markowitz, 1952) er, at et enkelt aktivs risiko og afkast ikke kan vurderes isoleret, men skal vurderes på hvordan det bidrager til en porteføljens samlede risiko og afkast. I den henseende er det afgørende om afkastet mellem forskellige aktiver er korreleret med hinanden, da dette har indflydelse på investorens mulighed for at diversificere sin portefølje.

[1] Python koden til *alle* beregninger er vedhæftet som bilag i både HTML format og som Jupyter Notebook. Koden er også tilgængeligt på min GitHub: https://github.com/Vschjerning/srp. Med mindre eksplicit kildeangivelse er angivet, er alle tabeller og figurer baseret på egne beregninger ved brug at Python koden.

Markowitz arbejde er tæt relateret til samtidigt arbejde af John Larry Kelly, som bedst kendt for at lægge navn til ”Kelly-kriteriet”. I (Kelly, 1956) formuleres metoden til at *maksimere den forventede værdi af vækstraten på afkastet* i et række lotterier. Kelly-kriteriet opnås som et specialtilfælde af nyttemaksimeringsproblemet i (Markowitz, 1952). Dermed giver Kelly, Markowitz’ arbejde en særlig betydning, idet han viser at det er er optimalt at maksimere den forventede vækst, hvis investoren har et særligt trade-off mellem risiko og forventet afkast. Tilsammen har dette arbejde været med til at danne grundlaget for moderne porteføljeteori, som også i dag er et udgangspunkt for, hvordan man sammensætter en portefølje af investeringer i mere eller mindre usikre aktiver såsom obligationer og aktier.

Ved brug finansielle data fra Yahoo Finance og udgangspunkt i den matematiske model, foretages en teoretisk funderet empirisk analyse af, hvordan beskatning og finansiel regulering påvirker det optimale porteføljevalg. Der tages udgangspunkt i data for aktiekurser for et udvalg af centrale danske virksomheder.

Optimalt porteføljevalg: Teori og Metode

Vi starter med en enkel model for udviklingen af værdien af en aktieportefølje først introduceret i (Kelly, 1956). Fremstillingen nedenfor tager udgangspunkt i en nyere artikel publiceret af (Carta & Conversano, 2020), der opskriver en modelramme for anvendelsen af Kelly-kriteriet på aktiemarkedsdata og dermed til porteføljeoptimering. Forfatterne tager udgangspunkt i en simpel stokastisk model med et risikofrit aktiv, som altid bevare sin værdi, og et enkelt risikofyldt aktiv med en binær fordeling af afkast. I denne model kan den optimale portefølje analyseres analytisk. Herefter, introducerer (Carta & Conversano, 2020) en stokastisk model, hvor afkastet på det risikofyldte aktiv følger en kontinuert fordeling såsom normalfordelingen. Denne model relaterer jeg til nyttemaksimeringsproblemet i (Markowitz, 1952) og den såkaldte ”efficient frontier”. I forhold til fremstillingen i (Carta & Conversano, 2020) generaliseres modellen på en række punkter; blandt andet med henblik på at kunne undersøge effekten af finansiel regulering og kreditbegrænsninger, og mulighed for at kunne analysere skattesystemets effekt på den optimale portefølje for investorer med forskellige niveauer af risikoaversion.

Kelly kriteriet og værdien af en portefølje med binær fordeling af afkast.

Vi betragter først et marked med et sikkert aktiv med et risikofrit afkast, $R_0 = 1 + r_0$ og et risikofyldt aktiv, som med sandsynlighed p har et højt afkastet $R_h = (1 + r_h) > R_0$ og med sandsynlighed $1 - p$ har et lavt afkast $R_l = (1 + r_l) > R_0$, hvor $R_h > R_0 > R_l$. I (Carta & Conversano, 2020) er $\mathrm{R}_0 = 1$, $R_l = 0$ og $\mathrm{R}_\mathrm{h} = 2$, således at det risikofrie aktiv altid bevare sin værdi, mens det risikofyldte aktivs værdi i hver periode enten fordobles eller mistes. Denne model er identisk med stokastiske model i (Sørensen, 2008).

Antag nu, at en investor med initial formue, W_0, allokerer en fast andel, α, af sin formue i det risikofyldte aktiv, og den resterende andel, $1 - \alpha$, i det sikre aktiv. Porteføljens værdi efter n perioder er da:

$$\begin{aligned} W_n &= W_0[(1 - \alpha)R_0 + \alpha\, R_h]^m[(1 - \alpha)R_0 + \alpha\, R_l]^{\{n-m\}} \\ &= W_0[R_0 \ + \alpha\,(R_h - R_0)]^m[R_0 \ + \alpha\,(R_l - R_0)]^{\{n-m\}} \end{aligned} \tag{1}$$

hvor m er antallet af gange, hvor aktivet giver et højt afkast. I eksemplet med $R_0 = 1, R_l = 0$ & $R_h = 2$, har vi altså:

$$W_n = W_0(1 + \alpha)^m(1 - \alpha)^{n-m} \tag{2}$$

Kelly-kriteriet forslår, at den optimale portefølje skal findes ved at maksimere den gennemsnitlige vækstrate efter n perioder, således at den samlede vækst W_n/W_0 efter n perioder kan skrives som:

$$(1 + G_n)^n = \frac{W_n}{W_0} = \big(R_0 \ + \alpha(R_h - R_0)\big)^m\big(R_0 \ + \alpha(R_l - R_0)\big)^{n-m} \tag{3}$$

Vi har da $(1 + G_n) = \left(\frac{W_n}{W_0}\right)^{\frac{1}{n}}$, da $\ln(1 + G_n) \approx G_n$ for små værdier af G_n. Vi kan dermed udtrykke den gennemsnitlige vækstrate som:

$$G_n(\alpha) = ln\left[\left(\frac{W_n}{W_0}\right)^{\frac{1}{n}}\right] = \frac{m}{n}\ln[R_0 + \alpha(R_h - R_0)] + \frac{n-m}{n} \ln[R_0 + \alpha(R_l - R_0)] \tag{4}$$

Den forventede værdi af vækstraten bliver da:

$$g_n(\alpha) = \mathbb{E}[G_n(\alpha)] = p \ \ln[R_0 \ + \alpha\ (R_h - R_0)] + \ (1-p)\ln\ [R_0 + \alpha(R_l - R_0)] \tag{5}$$

hvor det sidste lighedstegn følger af, at den forventede værdi af andelen af perioder med højt afkast er lig sandsynligheden for højt afkast $\mathbb{E}\left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{n}}\right) = \mathrm{p}$. Tilsvarende har vi $\mathbb{E}\left(\frac{\mathrm{n-m}}{\mathrm{n}}\right) = 1 - \mathrm{p}$ for lavt afkast.

Den optimale portefølje findes ved at maksimere den forventede værdi af vækstraten, $g_n(\alpha)$ med hensyn til porteføljevægten, α. Da logaritmefunktionen er strengt konkav, er $g(\alpha)$ også strengt konkav. Dermed er førsteordens betingelserne, $g_n'(\alpha *) = 0$, nødvendige og tilstrækkelige for en indre løsning.

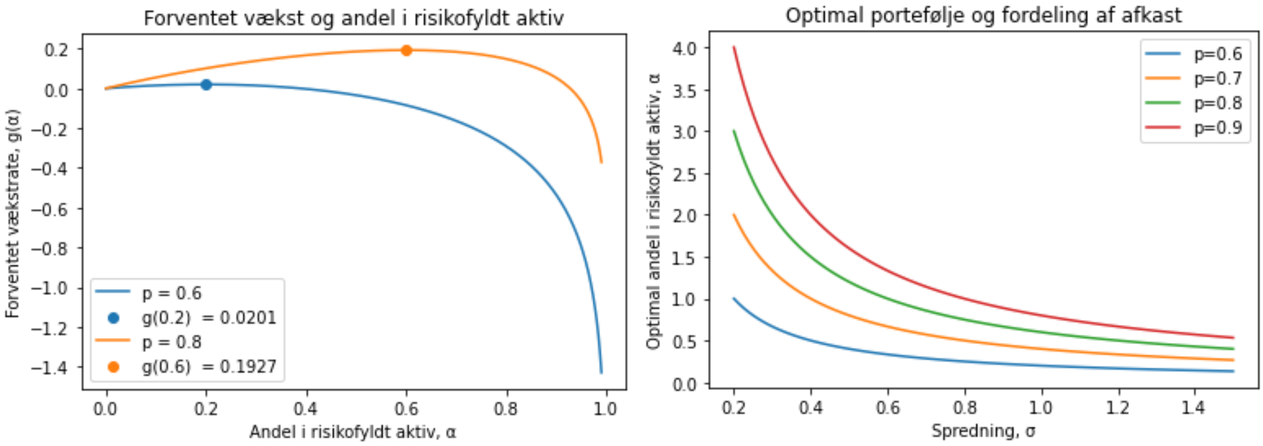
$$g_n'(\alpha^*) = \frac{p(R_h - R_0)}{R_0 \ + \alpha(R_h - R_0)} + \frac{(1-p)(R_l - R_0)}{R_0 + \alpha(R_l - R_0)} = 0 \tag{6}$$

Vi løser $g_n'(\alpha *) = 0$ for den optimale porteføljeandel, $\alpha*$

$$\alpha^* = (1-p)\frac{R_0}{(R_0 - R_h)} + p\frac{R_0}{(R_0 - R_l)} = \frac{(1-p)}{1 - \frac{R_h}{R_0}} + \frac{p}{1 - \frac{R_l}{R_0}} \tag{7}$$

Vi ser at den optimale andel i det risikofyldte aktiv i følge Kelly kriteriet er en vægtet sum af forholdet mellem afkastet på det risikofrie aktiv og henholdsvis merafkastet $(R_h - R) > 0$ eller tabet $(R_l - R) < 0$. Vi ser også at portefølje andelen i det risikofyldte aktiv, α er voksende i merafkastet $(R_h - R) > 0$ og sandsynligheden for et højt afkast, p, mens det aftager i størrelsen af tabet $(\mathrm{R_l - R}) > 0$.

FIGUR 1: OPTIMAL PORTEFØLJE IFØLGE KELLY-KRITERIET



I venstre del af Figur 1 ses den forventede vækstrate, $g(\alpha)$, som funktion af andelen i det risikofyldte aktiv, α. Vi ser, at der er en ikke-monoton sammenhæng mellem vækstrate og andelen, der investeres i det usikre aktiv. Når andelen i det risikofyldte aktiv, α, stiger, er vækstraten voksende indtil Kelly-kriteriet er opfyldt ved g'(α^*)=0, hvorefter funktionen er aftagende. Ved sandsynlighed p=0.6 ser vi at, den optimale vækstrate fås ved en porteføljeandel $\alpha^* = 0.2$ og tilhørende vækstrate på 2,01%. For sandsynlighed p=0.8, findes den optimale vækstrate ved en højere porteføljeandel $\alpha^* = 0.6$, hvilket som forventet også medfører en højere vækstrate på 19,3%.

I højre del af Figur 1 betragtes nu en symmetrisk fordeling af de usikre afkast med $R_h = R + \sigma$ og $R_l = R - \sigma$. Vi beregner herefter den optimale andel i det usikre aktiv som funktion af spredningen for forskellige værdier af p. Konsistent med ligning (7) ser vi, at villigheden til at investere større andele af sin portefølje, α^*, er stigende i sandsynlighed for et højt afkast og aftagende i risikoen, som her måles ved spredningen, σ.

Kelly kriteriet og værdien af en portefølje med kontinuert fordeling af afkast

Vi betragter nu en investor, som skal fordele sin initiale formue W_0 mellem k forskellige usikre aktiver og 1 sikkert. Det første aktiv, i=0, har et risikofrit afkast, R_0, mens afkastet på aktiv $i = 1, \dots, k$, er stokastisk. Lad $R_{i,t}$ være afkastet for aktiv i på tidspunkt t, og lad α_i angive andelen som investeres i aktiv i, således at andelen der investeres i det sikre aktiv er $\alpha_0 = 1 - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i$ da andelene per definition summer til 1. Når aktivernes afkast er realiseret i slutningen af en periode $t = 1$ er porteføljens værdi:

$$W_1(\alpha) = W_0 \sum_{i=0}^{k} \alpha_i R_i = W_0 \left[R_0 + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i (R_i - R_0)\right] \tag{8}$$

hvor $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)'$ er en vektor af porteføljevægte for hver af de usikre aktiver. Efter n perioder er porteføljens værdi W_n

$$W_n(\alpha) = W_0 \prod_{t=1}^{n} \left[R_0 + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \left(R_{i,t} - R_0\right)\right]$$

Vi kan skrive forventede værdi af vækstraten som

$$\mathbf{g_n}(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbb{E}\left[\mathbf{ln}\left(\frac{\mathbf{W_n}(\boldsymbol{\alpha})}{\mathbf{W_0}}\right)\right] = \mathbb{E}\left[\mathbf{ln} \prod_{t=1}^{n} \left[R_0 + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i (R_i - R_0)\right]\right] + \ln(W_0). \tag{9}$$

For at finde den optimale portefølje, α^*, dikterer Kelly kriteriet at investoren maksimerer den forventede vækst i porteføljen. Dette svarer også til at maksimere den forventede værdi af logaritmen til formuen på tidspunkt n, da $\mathbb{E}[\ln(\mathrm{W_n})]$ netop er lig den forventede vækstrate forskudt med en konstant, $\mathbb{E}[\ln(\mathrm{W_n})] = \mathbb{E}[\ln(\mathrm{W_n}/W_0)] + \ln(W_0)$. Dette giver samme optimale portefølje, da konstanten $\ln(W_0)$ ikke afhænger at porteføljevægtene og derfor forsvinder når man differentierer. Det er derfor ækvivalent at maksimere.

$$\mathbb{E}\left[\mathbf{ln}\left(\mathbf{W_n}(\boldsymbol{\alpha})\right)\right] = \mathbb{E}\left[\ln \prod_{t=1}^{n} \left[R_0 + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i (R_i - R_0)\right]\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{t=1}^{n} \ln \left[R_0 + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i (R_i - R_0)\right]\right]$$

hvor det sidste lighedstegn følger af, at logaritmen til et produkt er lig summen af logaritmerne. Vi kan herefter udnytte, at den forventede værdi af en sum af stokastiske variable er lig summen af de forventede værdier. Hvis vi endvidere antager, at den stokastiske variabel $\mathrm{R_{i,t}}$ er uafhængig over tid med en konstant middelværdi, får vi

$$\mathbb{E}\left[\mathbf{ln}\left(\mathbf{W_n}(\boldsymbol{\alpha})\right)\right] = \sum_{t=1}^{n} \mathbb{E}\ln \left[R_0 + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i (R_i - R_0)\right] = n\mathbb{E}\left[\ln \left[R_0 + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i (R_i - R_0)\right]\right] \tag{10}$$

Carta og Conversano (2020) viser at når $n \rightarrow \infty$, og fordelingen af afkast er symmetrisk omkring middelværdien $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_k)$ og har varians-kovarians matrix Ω, kan den optimale portefølje for en agent med uendelig tidshorisont findes som løsning til maksimeringsproblemet

$$\max_{\alpha} g_{\infty}(\alpha) = \max_{\alpha} R_0 + \alpha'(\mu - R_0) - \frac{1}{2}\alpha'\Omega\alpha \tag{11}$$

Dette svarer netop til Kelly-kriteriet. Carta og Conversano (2020) opskriver ovenstående ligning på "matrix form" for at opnå en analytisk løsning til vektoren af optimale porteføljevægte:

$$\alpha = \Omega^{-1}(\mu - R_0) \tag{12}$$

hvor Ω^{-1} er den inverse af varians-kovarians matricen[2]. Bemærk at den analytiske løsning i ligning **(12**) ikke lægger nogen begrænsninger på α. Hvis vi ikke ønsker at tillade at investoren kan låne (eller "shorte") et aktiv, skal optimeringsproblemet i ligning **(11**) pålægges bibetingelsen: [3]

$$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i = 1 \; og \; 0 \leq \alpha_i \leq 1 \tag{13}$$

Jeg er ikke så bekendt med matrix algebra, så jeg finder det mere intuitivt at skrive maksimerings-problemet på flg. ækvivalente måde[4]

$$\max_{\alpha} g_{\infty}(\alpha) = \max_{\alpha} \mathbb{E}\left(R_p(\alpha)\right) - \frac{1}{2} Var\left(R_p(\alpha)\right) \tag{14}$$

hvor $\mathbb{E}\left(R_p(\alpha)\right) = R_0 + \alpha'(\mu - R_0) = R_0 + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i(\mu_i - R_0)$ er det forventede afkast (efter en periode) af porteføljen vægte $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)'$ og $Var\left(R_p(\alpha)\right) = \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \alpha_j \sigma_{i,j}$ er variansen på afkastet af porteføljen, hvor $\sigma_{i,j} = cov(R_{i,t}, R_{j,t})$ er kovariansen mellem afkastet på aktiv i og j, og $\sigma_{i,i} = \sigma_i^2 = Var(R_{i,t})$ er variansen på afkastet op aktiv i.

[2] Den "inverse matrix" svarer (meget løst sagt) til at dividere med en matrix. Dette implementeres i Python ved hjælp af funktionen numpy.linalg.inv
[3] Se ligning (13) Carta and Conversano (2020, s. 6)
[4] Se Wiki-siden om "Modern portfolio theory": https://en.wikipedia.org/wiki/Modern_portfolio_theory

Ifølge Kelly-Kriteriet skal investoren altså at maksimere den forventede værdi af afkastet – minus en ½ gange variansen på afkastet. Bemærk at variansen af porteføljen $Var\left(R_p(\alpha)\right) = \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\alpha_j\sigma_{i,j}$ vokser når kovariansen mellem to aktiver vokser. Med andre ord er det ikke i samme grad muligt at risiko diversificere en portefølje, hvis afkastet er positiv korreleret.

Risikovilighed, Markowitz's efficient frontier, og Kelly kriteriet

Kelly kriteriet er et kriterie for optimalitet, som foretager en bestemt afvejning mellem risiko og forventet afkast som resulterer i at den opnår den højest mulige forventede vækst. I (Markowitz, 1952) antages de mere generelt, at investoren maksimerer den forventede nytte, $\mathbb{E}[\mathrm{u}(\mathrm{W_n})]$. Nyttefunktionen, u, har betydning for investorens afvejning er mellem forventet afkast og risiko, som typisk måles ved spredningen af porteføljens afkast $\sigma_p = \sqrt{Var(R_p)}$. Vælges nyttefunktionen $u(W_n) = \ln(W_n)$, svarer dette til netop Kelly kriteriet, hvor investoren ønsker at maksimere den forventede vækst i porteføljen.[5]

I Markowitz model specificeres den forventede nytte $\mathbb{E}[\mathrm{u}(\mathrm{W_n})]$ direkte som en funktion, der er proportionalt voksende i forventede afkast af porteføljen og aftagende i variansen, således at den optimal portefølje findes som løsning til maksimeringsproblemet

$$\max_{\alpha} g_\infty(\alpha) = \max_{\alpha} \theta\mathbb{E}\left(R_p(\alpha)\right) - \frac{1}{2}Var\left(R_p(\alpha)\right)$$

Igen fås Kelly kriteriet som et specialtilfælde, hvor $\theta = 1$. Hvis vi lader $\theta \in [0, \infty]$ betegne investorens risikotolerance, formaliseres dette ved at risikovillig investor lægger en høj vægt θ på det forventet

[5] Den logaritmiske nytte funktion er også et specialtilfælde at den mere generelle nyttefunktioner, som tillader forskellige grader af risiko aversion. Eksempelvis opnås logaritmen som et specialtilfælde at den såkaldte "constant relative risk aversion" CRRA nytte funktion

$$\mathrm{u(c)} = \begin{cases} \dfrac{c^{1-\eta} - 1}{1 - \eta}, & \text{hvis } \eta \neq 1 \\ \ln(c), & \text{hvis } \eta = 1 \end{cases}$$

hvor $\eta \geq 0$ måler graden af risikoaversion.

afkast, således at på variansen af porteføljen på porteføljen betyder mindre. Betragter man et kontinuum af værdier at θ, er det muligt at opstille den såkaldte "efficient frontier", som beskriver det maksimalt opnåelige forventede afkast ved et givet risikoniveau. Fordelen ved denne specifikation, er at det kun afhænger at det forventede afkast og variansen, som kan estimeres i data. Denne model er grundlaget for den empirisk funderede portefølje analyse senere i opgaven.

Numerisk illustration af optimal portefølje i henhold til Kelly kriteriet

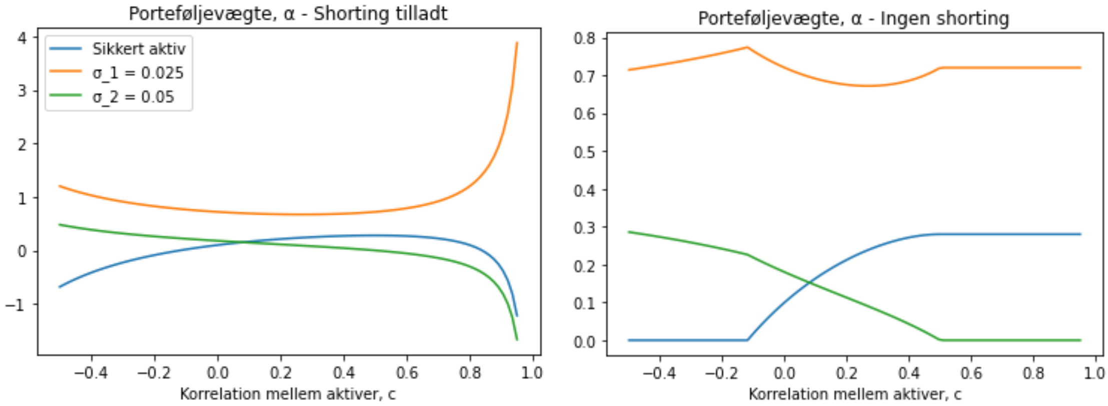
I dette afsnit analyseres mekanismerne ovenstående model for optimalt porteføljevalg. Der fokuseres primært på Kelly kriteriet og vi holder dermed parameteren for investorens risikotolerance konstant, $\theta = 1$. Vi vender tilbage til mere generel risikoadfærd og the efficient frontier i det empiriske afsnit.

Vi betragter et marked med et sikkert aktiv og to usikre aktiver med korrelerede afkast. Afkastet på det sikre aktiv er $R_0 = 1 + r_0 = 1.00005$. Med 252 handelsdage på et kalenderår, svarer dette ca. svarer til et årligt afkast på $\left((1.00005^{252}) - 1\right) * 100\% = 1.27\%$. Det forventede daglige netto afkast for de to usikre aktiver er er 10 gange større end r_0. Vi har altså $R_0 = 1.00005$ og $\mu = (\mu_1, \mu_2)' = (1 + 10r_0, 1 + 10r_0)' = (1.0005, 1.0005)'$. Afkastet på de to usikre aktiver er potentielt korreleret, og har varians-kovarians matricen:

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{1,2} \\ \sigma_{2,1} & \sigma_2^2 \end{bmatrix} \tag{15}$$

hvor vi antager $\sigma_1 = 0.025$ og $\sigma_2 = 2\sigma_1$, således at spredningen for aktiv 2 er dobbelt så stor som spredningen for aktiv 1. Da vi ønsker at analysere sammenligne hvordan porteføljens sammensætning påvirkes af korrelationen mellem forskellige aktiver, bregner vi kovarianserne mellem aktiverne $\sigma_{1,2} = \sigma_{2,1}$ som funktion af korrelationen, $c \in [-1,1]$. Vi har altså $\sigma_{1,2} = \sigma_{2,1} = \sigma_1 \sigma_2 c$. I Figur 2 beregnes sammensætningen af Kelly-porteføljen nedenfor for forskellige værdier af c.

FIGUR 2: RISIKO DIVERSIFIKATION OG KORRELATION MELLEM AFKAST PÅ AKTIVER



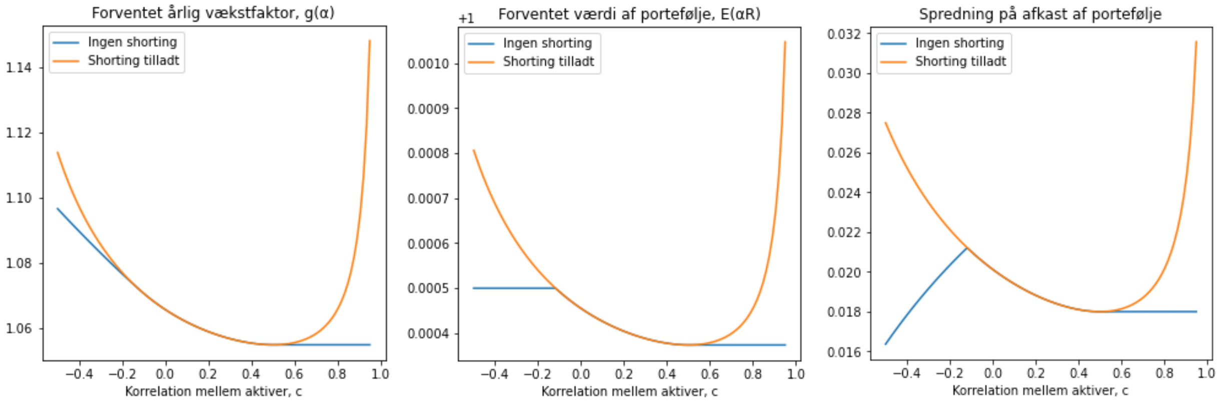
I Figur 2 vises den procentvise andel som investoren ifølge Kelly-kriteriet skal placere i aktiverne $i = 0,1,2$, som funktion af korrelationen, c. I den venstre del af figuren, ses et scenarie, hvor det er muligt at geare sine investeringer, ved at shorte aktiverne, dvs. at låne penge i eksempelvis det sikre aktiv for at investere yderligere i et usikkert aktiv. Hvis vi ikke ønsker at tillade at investoren kan låne (eller "shorte") et aktiv, skal optimeringsproblemet i ligning (11) løses under bibetingelsen (13). I højre del af figuren har vi pålagt denne bibetingelse i så det ikke længere er muligt at "gå kort" i et aktiv. Således er ingen af porteføljeandelene negative.[6]

Bemærk, at der i begge scenarier altid investeres i mindst et af de to usikre aktiver. Investoren begynder først at investere i det sikre aktiv, når korrelationen mellem de usikre aktiver er større end ca. -0.1. For lave værdier af c får vi $\alpha_0 < 0$ når der er mulighed for at gå kort i det sikre aktiv, og ellers er $\alpha_0 = 0$. Dette skyldes den attraktive mulighed for at risikodiversificere sin portefølje, når afkastet på de usikre aktiver ikke er perfekt korrelerede med hinanden. Populært sagt kan man tjene ind på gyngerne, hvad man har mistet på karrusellen[7].

I takt med at korrelationen stiger, bortfalder muligheden for at risikodiversificere. Derfor bliver det usikre aktiv med den laveste spredning ($\sigma_1 = 0.025$) bliver mere attraktivt i forhold til det usikre aktiv med den høje spredning, $\sigma_1 = 0.05$. Ved en positiv korrelation på ca. 0.5 er det ikke længere optimalt at investere i det mest usikre aktiv. Når der er mulighed for at gå kort i aktive er $\alpha_2 < 0$ og ellers er $\alpha_2 = 0$

[6] Vi kan ikke løse for den optimale portefølje analytisk i dette tilfælde, og det er derfor nødvendigt at løse modellen numerisk med en algoritme, der kan maksimere funktioner under bibetingelser. Vi bruger Python's indbyggede optimeringsrutine scipy.minimize
[7] Den danske ordbog

FIGUR 3: FORVENTET VÆKSTFAKTOR, FORVENTET VÆRDI OG SPREDNING PÅ AFKAST



Muligheden for at geare investeringerne har en stor effekt på væksten, den forventede værdi, og risikoen/spredningen i porteføljen, når aktivernes afkast er korrelerede – enten negativt eller positivt. Dette er illustreret i **Error! Reference source not found.**. Aktiver med negativ korrelation udligner hinanden, hvilket medfører at de to usikre aktiver isoleret set har en mindre aggregeret usikkerked og gør det mere attraktivt at investere i disse aktiver. Dette får derfor den samlede position i de sikre aktiver til at falde, når korrelationens værdi falder. Lad os kalde dette substitutionseffekten. Disse to effekter er modsatrettede, men tilsammen øges spredningen på afkastet i den samlede portefølje i takt med at korrelationen falder til meget lave værdier. Dette er kun muligt, såfremt shorting af aktiver tillades. Når det ikke er muligt at låne i det sikre aktiv, neutraliseres substitutions-effekten. Derfor stiger vil den samlede risiko på porteføljen vokse i c for små værdier af c, ind til det punkt hvor $\alpha_0 > 0$

Der er altså markante forskelle på forventede vækstfaktorer, værdi og spredningen på porteføljeafkastet i de to scenarier. I et samfund uden finansiel regulering, får vi højere vækstrater, højere forventede porteføljeværdier, men også markant højere risiko, hvilket kan lede til konkurser og finansielle kriser.

Simulation af udvikling i aktieafkast af Kelly-portefølje

I Figur 4 til venstre ses grafen for en simulation af kursen på to usikre aktiver. Vi simulerer dagligt afkast for $n = 1000$ perioder ved at trække n gange fra en normalfordeling for to variable $R_t = (R_{1,t}, R_2, t)$

$$R_t = (R_{1,t}, R_2, t) \sim \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix}\mu_1\\ \mu_2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\sigma_1^2 & \sigma_{1,2}\\ \sigma_{2,1} & \sigma_2^2\end{bmatrix}\right)$$

hvor middelværdien er givet ved, $\mu = (1.0005, 1.0005)$ og varians-kovarians matrix er

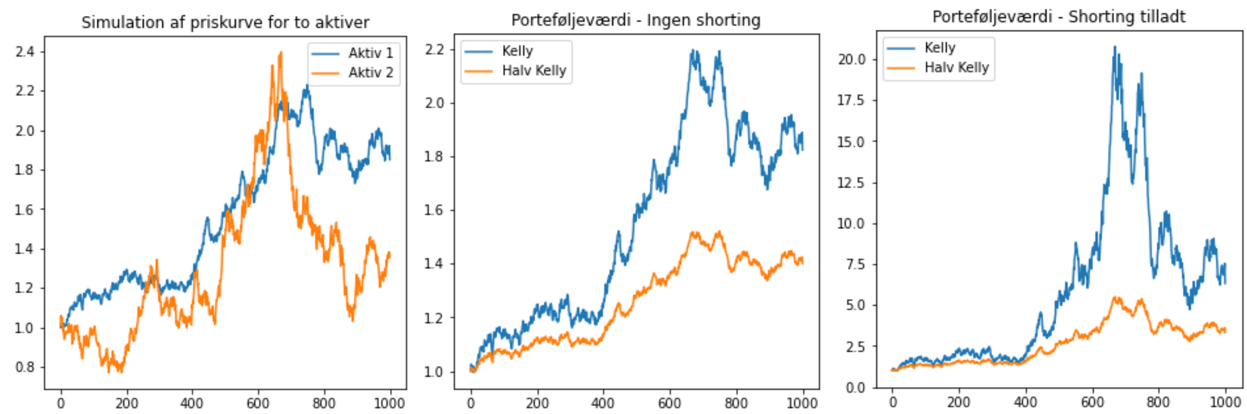
$$\Omega = \begin{bmatrix}\sigma_1^2 & \sigma_{1,2}\\ \sigma_{2,1} & \sigma_2^2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0.0001 & 0.00005\\ 0.00005 & 0.0004\end{bmatrix}$$

Dette svarer til spredning på aktiv 1 på $\sigma_1 = \sqrt{0.0001} = 0.01$, og en spredning på aktiv 2 på $\sigma_2 = \sqrt{0.0004} = 0.02 = 2\sigma_1$. Spredningen på aktiv 2 er således dobbelt så stor for aktiv 1. Her har vi antaget at korrelation mellem de to aktiver er $c = 0{,}3$, således at kovariansen mellem de to aktiver bliver $\sigma_{1,2} = \sigma_{2,1} = c\sigma_1\sigma_1 = 0.00005$. Kursen på aktiverne på tidspunkt n, beregnes herefter som det kumulerede produkt af daglige afkast, $R_{i,t}$, med udgangspunkt i aktiens værdi på tidspunkt 0, som normaliseres til $V_{i0} = 1$ for begge aktiver $i = 1{,}2$

$$V_{in} = V_{i0}\, R_{i,1}\, R_{i,2} \dots R_{i,n} = V_{i,0} \prod_{t=1}^{n} R_{i,t}$$

(16)

FIGUR 4: SIMULATION AF UDVIKLING I AKTIEAFKAST AF KELLY-PORTEFØLJE



På grafen til venstre i Figur 4 ser vi altså kursen for hhv. aktiv 1 og 2. Begge aktiver har en gennemsnitlig vækst hver periode på $\mu = 1.0005$. Afkastet per periode for Aktiv 2 har en spredning 0.02, hver periode, hvilket er det dobbelte af aktiv 1. Denne forøgede spredning medfører større udsving i de kumulerede ændringer i kursen, således at aktiv 2 er et mere risikabelt aktiv at investere i. Dette ses også på figuren, hvor udsvingene fra periode til periode i højere grad afviger fra μ for aktiv 2 i, hvorimod aktiv 1 i højere grad har en mere forudsigelig og lineær vækst.

Investorer, der forsøger at opnå "the efficient frontier" ved at maksimere værdien af deres portefølje med mindst mulig risiko, vil derfor foretrække at investere mere i aktiv 1, da den har det samme forventede afkast men med en lavere volatilitet end aktiv 2.

I Figur 4 i midten, ser vi grafen for værdien af to aktieporteføljer, der følger Kelly-kriteriet med henholdsvis 100 procent og 50 procent i et scenarie hvor *gearing af aktiver ikke er en mulighed*. Investorens maksimale porteføljevægt er derfor $\alpha = 1$. For at opnå den optimale portefølje ifølge det fulde Kelly-kriterie uden finansiel gearing af aktiver bliver porteføljevægtene i Kelly-porteføljen $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) = (0.8947, 0.1053)$ således at der investeres 89,47% procent i aktiv 1, 10,53 procent i aktiv 2, og slet ikke investeres i det sikre aktiv, $\alpha_0 = 0$.

I grafen, hvor Kelly-kriteriet følges til punkt og prikke, ser vi at investoren opnår en væsentlig højere vækst, da investoren lægger færre penge i aktivet. Vi ser også at investoren, der følger Kelly-kriteriet 100%, løber en større risiko, da volatiliteten er større.

At følge Kelly-kriteriet er mere profitabelt i et voksende marked, da man vil se større afkast end fra sikre aktiver. I virkeligheden er det dog ikke muligt at forudsige markedet. I et "rødt marked" vil investoren tabe mere end investoren, der følger Halv-Kelly strategien. I simulationen i Figur 4 stiger værdien af aktiverne, hvilket medfører at investoren, der følger Kelly-kriteriet, efter ca. 650 perioder har mere end fordoblet sin initiale investering, $W_0 = 1$. Til sammenligning, har investoren, der følger Halv-Kelly, kun har opnået fortjeneste på ca. 50%; altså 70 procentpoint lavere end investoren, der fulgte Kelly-kriteriet til punkt og prikke.

I Figur 4 til højre, ser vi grafer for to aktieporteføljers værdi over 1000 perioder, der hhv. følger Kelly-kriteriet og Halv-Kelly. Modsat Figur 4 er shorting tilladt, hvilket betyder at investorens maksimale porteføljevægt gerne må være $\alpha > 1$. Vi ser derfor, at porteføljeværdierne i et marked uden finansiel regulering af eksempelvis gearing resulterer i meget større positioner i de usikre aktiver. Porteføljevægtene for Kelly, hvor shorting er tilladt, er hhv. α_1 = 420.33% og α_2 =49.45%.

Det ses at allokeringen af porteføljen mellem de to aktiver ikke afhænger af, hvor meget der investeres i det sikre aktiv. Når muligheden for shorting forekommer geares porteføljen så porteføljevægtene for både aktiv 1 og 2 bliver 4,7 gange større end i porteføljen uden shorting. Aktivernes procentvise andel ift. hinanden er dog stadig det samme, idet $\frac{89.47}{10,53} = \frac{420.33}{49.45} \approx 8,5$.

Mulighed for shorting giver en klart højere forventet vækst i porteføljen. På tidspunkt 650 oplever vi eksempelvis, at porteføljeværdien for Kelly er ca. 10 gange større end Kelly i et marked, hvor shorting ikke er tilladt. Omvendt, udsætter investoren sig også for en meget større risiko, som potentielt kan miste de penge de har lånt i det sikre aktiv. Kelly-kriteriet maksimerer den forventede vækst over en uendelig tidshorisont, men i virkelighedens verden vil investoren ikke have en uendelig tidshorisont, og i realiteten være kreditbegrænset. Hvis lån i det sikre aktiv ikke er ubegrænsede, kan investorer med en meget volatil portefølje risikere at gå konkurs, hvis de ikke kan betale når långiver opkræver sine penge. Dette kan resultere i finansielle kriser.

Empirisk analyse af aktiemarkedet

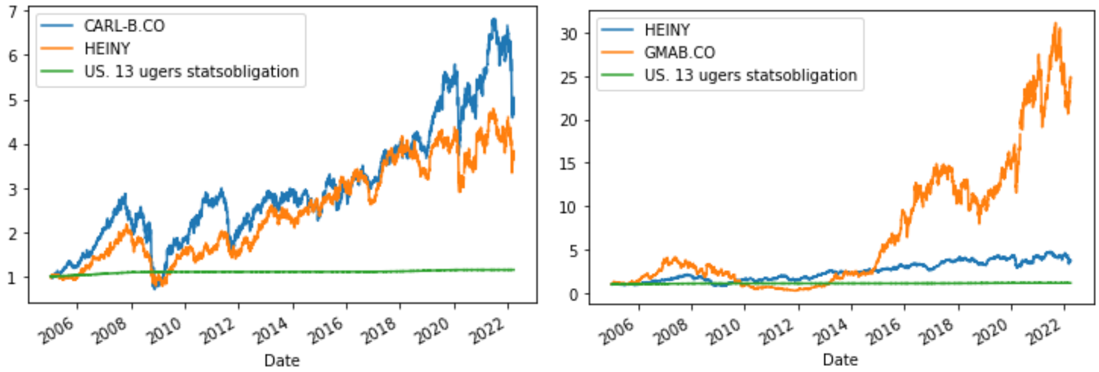
Data

Til den empiriske analyse anvendes data, som er hentet fra den Yahoo Finance's[8] API[9]. Undersøgelsen vil så vidt muligt tage udgangspunkt i danske aktier og obligationer, da det hovedsageligt er danske firmaer, børsnoterede firmaer, der vil opleve de største økonomiske omvæltninger ved potentielle ændringer fra den danske stat i form af offentlig regulering såsom restriktionsændringer mht. gearing eller øget/sænket kapitalbeskatning. Da Yahoo kun indsamler data om firmaer, der er børsnoterede på det amerikanske finansielle marked, har udvalget at danske aktier og obligationer været begrænset. De danske aktiver, der tages udgangspunkt i, er derfor hovedsageligt store firmaer fra det danske OMX C25 indeks, såsom Novo Nordisk, Vestas, Carlsberg og Genmab.

[9] API er en forkortelse for Application Programming Interface. Yahoo Finance's API fungerer som en server, der eksempelvis kan tilgås via Python med henblik på at foretagere anmodninger on download af aktiedata fra bestemte tidsperioder. Data er dokumentere på https://finance.yahoo.com, og det konkrete dataudtræk og alle empiriske resultater kan genskabes ved hjælp af til Python koden på min GitHub: https://github.com/Vschjerning/srp.

Beskrivende statistik og markedsanalyse

FIGUR 5: NORMALISEREDE KURSER FOR UDVALGTE AKTIER



I venstre del af Figur 5 ser vi aktiekurserne for de to usikre aktiver Carlsberg (CARL-B.CO) og Heineken (HEINY). I samme Figur vises det kumulerede afkast for sikre aktiv: amerikanske 13-ugers statsobligationer (^IRX). Kursen aktiver vises for tidsperioden 01/01/2005 – 30/03-2022, og er normaliseret til en i periodens start. Vi har valgt tidsperioden 2005-2022, for bedre at kunne understrege de 2 usikre aktivers parvise korrelation og manglen af samme fra det sikre aktiv.

Korrelationen mellem de to usikre aktiver, kommer især til udtryk ved finanskrisens ”red october” i 2008, COVID-19's indtrædelse i starten af 2020 og Rusland-Ukraine-konflikten. Både Carlsberg og Heineken var nemlig grundet politisk pres, nødsaget til at trække sig fra det russiske marked, hvor begge bryggerier omsætter for flere milliarder kroner hvert år.[10] Kurserne for disse to usikre aktiver har en korrelationskoefficient lig 0,371. Da både Heineken og Carlsberg, er hhv. verdens 2. og 3. største fremstillere i øl-branchen, rammes begge parter ofte af de samme positive og negative efterspørgsels- og udbuds-chok.

Den amerikanske 13-ugers statsobligation (^IRX) har i et gennemsnitligt årligt afkast på $\mu_{\wedge\mathrm{IRX}}=0.0069$, hvilket medregnet renters rente giver et afkast på ca. 14% over hele periode. Som forventet er afkastet er lavt og risikoen meget lav. Dette kan ses i Figur 6 og Figur 8, hvor det er tydeligt at grafen for de amerikanske statsobligationer ikke har nogle reelle udsving modsat de usikre aktiver. Det er derfor naturligt at lade denne obligation indgå i porteføljen som et sikkert aktiv.

[10] Bendtsen, S., Schaumann N., Berlingske, Carlsberg trækker stikket i Rusland efter hård kritik, 28. marts 2022

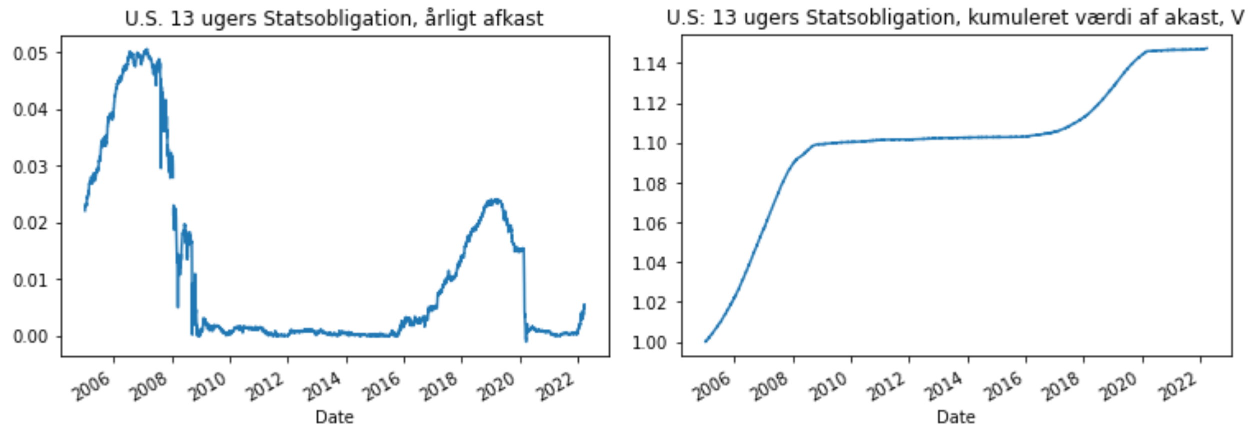
I højre del af Figur 5, ser vi de normaliserede aktiekurser for Genmab (GMAB.CO) og Heineken (HEINY) med det kumulerede afkast for det sikre aktiv plottet over samme tidsperiode som ovenfor. Da Genmabs aktie har oplevet op imod en 30-dobling af sin markedskapacitet since 2005, ser vi at Heineken og Genmabs generelt er mindre korrelerede. Genmabs aktie toppede 03/09/2021, hvor aktien omtrent havde 30-doblet i værdi siden 1. januar 2005 til en værdi af 31.9 mia.[11] dollars. Den store vækst Genmab sammenlignet med Heineken, skyldes at Genmab blev dannet i 1999 og derfor er en relativt ung virksomhed. Det kræver altså ikke de samme milliardbeløb for at opnå den samme procentvise vækst som Heineken.

Heineken, der blev grundlagt i 1864, er et mindre volatile aktiv. For at opnå den samme vækst over samme periode som Genmab, skulle Heineken have opnået en stigning på $13.29\, mia. * 30 = 398{,}7\, mia.$ dollars[12]. I dette scenarie ville Heineken have en større market cap end eksempelvis MasterCard og Walmart, der i 2021 havde en market cap på hhv. 383,6 og 396,1 mia. dollars[13], hvilken ikke er plausibelt for en øl-producent. Grunden til, at investorer stadig investerer i Heineken og ikke bare placerer deres formuer i firmaer, der har mulighed for vækste ligesom Genmab er manglen på risikovilighed, θ. Heineken var i 2005 allerede en veletableret koncern, der gennem 140 år havde opbygget et renommé som et respekteret og professionelt foretagende. Derudover producerer og sælger Heineken sine produkter i hele verden, hvilket fungerer som risikodiversificering. Heineken, er altså et mere sikkert aktiv, som risikoaverse investorer potentielt er mere tilbøjelige til at investere i sammenlignet med volatile aktier som Genmab. For kurserne over de 3 aktiver ses det at Genmab (GMAB.CO), der er det mest volatile aktiv og i perioder ligger under det sikre.

---

[11] Market Capitalization of Genmab (GMAB), Companiesmarketcap.com
[12] Market Capitalization of Heineken (HEINY), Companiesmarketcap.com
[13] The 100 largest companies by market capitalization in 2021, Statista.com

FIGUR 6: RENTE OG KUMULERET AF KAST AF 13 UGERS AMERIKANSK STATSOBLIGATION

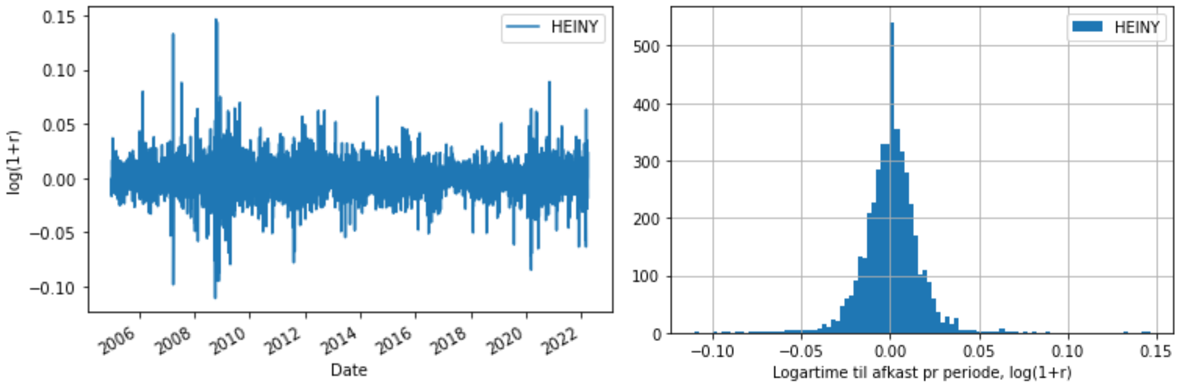


I Figur 6 ses henholdsvis det årlige afkast og det kumulerede daglige afkast for amerikanske statsobligationer med en løbetid på 13 uger. Renten stiger op til finanskrisen i 2008 blandt andet fordi der var en stor efterspørgsel på likviditet og øget usikkerhed i markedet. Renterne afspejler ligevægten mellem udbud og efterspørgsel efter kapital. Når der er høj volatilitet og usikkerhed på aktiemarkedet, stiger efterspørgslen i sikre aktiver, hvilket presser kursen op, således at renten falder. Renten på obligationer har siden finanskrisen, været historisk lave. I Danmark har der sågar været negativ rente på statsobligationer. Denne globale udvikling skyldes blandt andet store udbud af kapital i form af pensionsopsparinger fra en globalt aldrende befolkning, der nu skal have deres pensionsopsparing forrentet. Den lave rente skabt af den høje likviditet medfører at der er rigelighed af kapital til virksomheder, hvilket alt andet lige stimulerer økonomisk vækst.

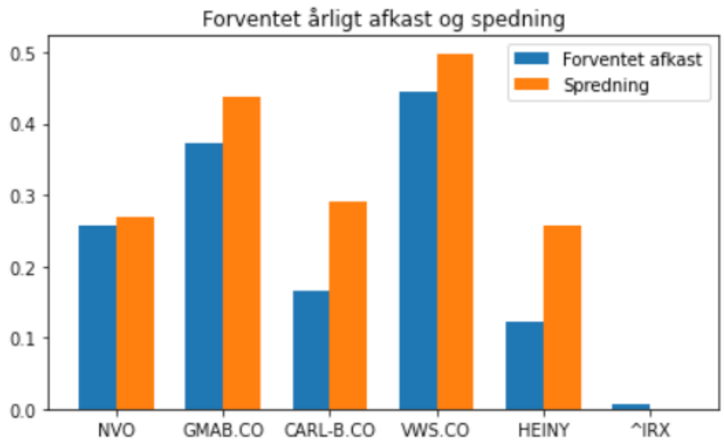
Forventet afkast, korrelation og spredning for udvalgte aktier

I Figur 7 ses fordelingen af afkast for Heineken. I venstre del af figuren ser vi, at afkastet for Heineken aktien er uafhængigt over tid med en tilnærmelsesvis konstant spredning. Aktiens kursændringer er altså svære at forudsige på baggrund af den seneste historik. I højre del af Figur 7 ses det, at afkastet er symmetrisk fordelt omkring det gennemsnitlige afkast per periode. På grund af den tilnærmelsesværdige symmetriske fordeling omkring middelværdi og tidsafhængigheden, er det altså svært at forudsige markedet ud fra aktiens seneste udsving. Dette er i overensstemmelse med modellens antagelser.

FIGUR 7: FORDELING AF AFKAST, HEINEKEN



FIGUR 8



I Figur 8 ser vi det forventede årlige afkast i forhold til aktivets spredning. For de valgte aktier, er der en tendens til at det forventede afkast og risikoen følges ad. Eksempelvis har Genmab (GMAB.CO) og Vestas (VWS.CO), store forventede afkast, men også høj volatilitet i afkastet. Modsat har ældre og etablerede virksomheder såsom Novo Nordisk (NVO), Carlsberg (CARL-B.CO) og Heineken (HEINY) på den ene side lavere forventet afkast, men samtidig også lavere spredning på afkastet. De amerikanske statsobligationer, som typisk indgår i porteføljeoptimering som risikofrit alternativ, har et markant lavere forventet afkast og spredning.

For at finde ud af hvilke aktiver, der er optimale at investere i, er det ikke nok at kende spredningen, σ, og middelværdi, μ. Vi skal også kende korrelationen i afkastet mellem de forskellige aktiver, da det er vigtigt for sammensætningen af en risikodiversificeret portefølje. Korrelationsmatricen for de ovenstående aktiver findes i Tabel 1 nedenfor.

TABEL 1: KORRELATIONSMATRIX

Symbols	NVO	GMAB.CO	CARL-B.CO	VWS.CO	HEINY	^IRX
NVO	1.000	0.221	0.209	0.201	0.359	0.007
GMAB.CO	0.221	1.000	0.201	0.263	0.156	0.010
CARL-B.CO	0.209	0.201	1.000	0.278	0.371	0.014
VWS.CO	0.201	0.263	0.278	1.000	0.207	0.025
HEINY	0.359	0.156	0.371	0.207	1.000	0.010
^IRX	0.007	0.010	0.014	0.025	0.010	1.000

Som forventet er korrelationen højest mellem de to bryggerier, Carlsberg og Heineken. Dette kommer ikke som en overraskelse, da begge aktiver er udsat for de samme branchespecifikke choks (jævnfør vores diskussion i forbindelse med Figur 5). Heineken og Genmab er de aktier i undersøgelsen, som er mindst indbyrdes korrelerede.[14]

Forventet afkast og spredning for udvalgte porteføljer

Baseret på korrelationsmatricen og spredningen, σ, kan vi danne kovariansmatricen, Ω. Baseret på μ, og Ω kan vi beregne den forventede værdi og spredning af en portefølje med porteføljevægte, α. Før vi beregner den optimale portefølje i henhold til Kelly-kriteriet, eller andre punkter "the efficient frontier", illustreres beregningen af forventet afkast og spredning i Tabel 2 nedenfor for en række tilfældigt udvalgte porteføljevægte, α.

[14] Bemærk her, at korrelationen mellem to aktiver måler, om der er en lineær sammenhæng mellem *ændringerne* i kursen i den selv samme periode. Det vil sige, hvis der er en fælles trend i kursen, ligger dette i middelværdien og ikke korrelationen. Da vi her måler de daglige ændringer, forventer vi selvsagt en lavere korrelation, end hvis der aggregeres over en længere periode.

TABEL 2: FORVENTET AFKAST OG SPREDNING FOR TILFÆLDIGT UDVALGTE PORTEFØLJER

	Returns	Volatility	αNVO	αGMAB.CO	αCARL-B.CO	αVWS.CO	αHEINY	α^IRX
8	0.1824	2.7961	0.0388	0.3291	0.0448	0.0293	0.2188	0.3391
9	0.2021	3.0402	0.0064	0.0647	0.2373	0.2532	0.1824	0.2561
6	0.2217	2.9816	0.2948	0.3213	0.0754	0.0243	0.0061	0.2781
1	0.2247	3.5326	0.0558	0.0071	0.1691	0.3067	0.3447	0.1165
3	0.2270	2.8508	0.2931	0.1507	0.0004	0.1587	0.1912	0.2059
0	0.2300	3.2992	0.0217	0.1409	0.2369	0.2318	0.2306	0.1380
2	0.2437	3.0899	0.2578	0.1163	0.0382	0.2437	0.1461	0.1979
7	0.2453	3.0624	0.2425	0.1449	0.0692	0.2374	0.0827	0.2233
5	0.2504	3.1931	0.1635	0.1891	0.1271	0.2366	0.0806	0.2030
4	0.2525	3.3295	0.2354	0.1871	0.1461	0.1411	0.2873	0.0030

Porteføljevægtene er udvalgt tilfældigt mellem 0 og 1, og reskaleret med summen over alle aktiver, således at porteføljevægtene summer til 1 som i betingelsen i ligning (13). Ikke alle porteføljer i Tabel 2 er optimale. Eksempelvis ser vi, at portefølje 1 er strengt domineret af portefølje 3, som har en meget lavere varians og samtidig et sammenligneligt forventet afkast. Portefølje 7 ser også ud til at være meget tættere på ”the efficient frontier” end portefølje 1. Her opnås et væsentligt højere forventet afkast og stadig lavere spredning. Men hvordan findes den optimale portefølje?

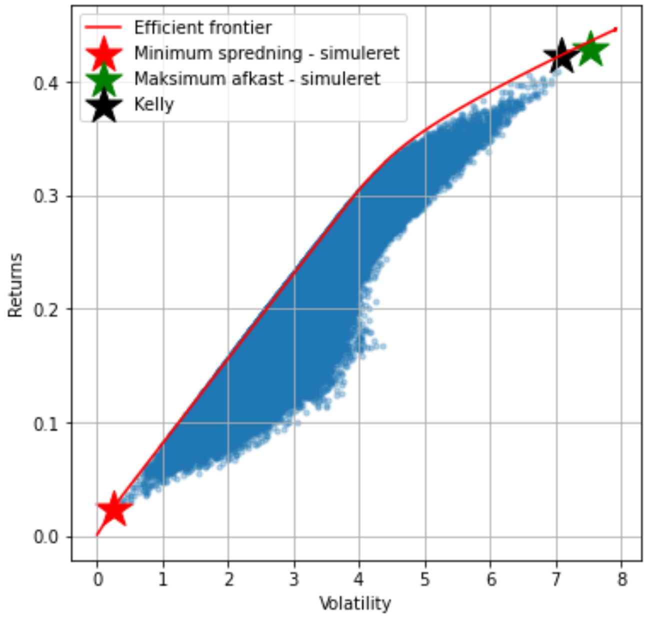
The Efficient Frontier: Kelly-kriteriet, risiko aversion og den optimale portefølje

Med udgangspunkt i teori fra forrige afsnit, sammenlignes en række porteføljer ved brug af ”efficient frontier analysis”, herunder den porteføljerisiko eller det maksimale afkast som følge af Kelly-kriteriet. Der tages i første omgang udgangspunkt i en simulationsbaseret metode, som er beskrevet i Shruti Dash opslag på bloggen ”Machine Learning +” [15] og implementeret i Python på Shruti Dash’s GitHub side[16]. Ideen er simpel: man simulerer et stort antal porteføljer, beregner porteføljens volatilitet og forventet afkast og plotter dem mod hinanden. Dette er gjort i Figur 9 nedenfor. Her ses et stort antal simulerede porteføljer vist som blå prikker i figuren. Samtidig indtegnes porteføljen med den minimale spredning af porteføljen over alle simulationer (rød stjerne). Ligeledes indtegnes

[15] Se (Dash, Portfolio Optimization with Python using Efficient Frontier with Practical Examples, 2020)
[16] Min Python kode tager udgangspunkt Shruti Dash’s kode på GitHib. Se (Dash, Investor Portfolio Optimization using Python, 2022)

porteføljen med forventet afkast og dermed som en approksimation af Kelly-porteføljen (grøn stjerne).

FIGUR 9: "THE EFFICIENT FRONTIER", KELLY OG TILFÆLDIGT GENEREDE PORTEFØLJEVÆGTE, $\boldsymbol{\alpha}$.



I samme figur har vi indtegnet "the efficient frontier" (den røde kurve), som findes ved at løse nyttemaksimeringsproblemet i (**13**) for varierende værdier af risikotolerance, $\theta \in [0,3]$. For at sikre at shorting ikke er muligt, løses (**13**) under bi-betingelse af (14). Bemærk her, at alle punkter på den røde kurve (the efficient frontier), består af de porteføljer med højest muligt afkast for et givet niveau af risiko. Derfor er det heller ikke overraskende, at alle de simulerede porteføljer ligger på eller under "the efficient frontier". Forskellige investorer med forskellige grader af risikotolerancen, θ, vil dermed placere sig forskelligt på denne kurve. Jo højere θ, jo højere risiko må accepteres. Kelly-porteføljen opnås også som et punkt på "the efficient frontier", hvor $\theta = 1$ (den sorte stjerne).

Ideen illustreret på "Machine Learning +", er at lade simulationer gå mod uendeligt for netop at kunne danne et billede af "the efficient frontier" som randen af den simulerede mængde af punkter, hvor der opnås højst muligt forventede afkast for en given værdi af spredningen. I princippet vil store tals lov sikre, at man kan finde de optimale porteføljevægte på denne måde. Men metoden er beregningsmæssigt meget tung, især når antallet af aktiver er stort. Populært sagt, prøver vi at finde et maksimum for en funktion i mange variable ved at gætte stokastisk på en høj-dimensional vektor, som har mange kombinationer. Denne "brute force" metode er numerisk inefficient i forhold til at benytte en gradient-baseret numerisk maksimeringsalgoritme til at maksimere den forventede nytte af en portefølje.[17]

TABEL 3: OPTIMALE PORTEFØLJEVÆGTE FOR FORSKELLIGE RISIKOTOLERANCE, $\boldsymbol{\theta}$.

	Risiko tolerance, θ	Afkast	Spredning	α_0	αNVO	αGMAB.CO	αCARL-B.CO	αVWS.CO	αHEINY	α^IRX
0	0	0.001	0.002	0.857	0.000	0.000	0.000	0.000	0.0	0.143
1	0.01	0.023	0.203	0.000	0.025	0.012	0.005	0.011	0.0	0.947
2	0.025	0.048	0.507	0.000	0.062	0.029	0.013	0.029	0.0	0.868
3	0.05	0.088	1.013	0.000	0.124	0.058	0.025	0.057	0.0	0.735
4	0.1	0.170	2.027	0.000	0.248	0.116	0.051	0.115	0.0	0.470
5	0.15	0.251	3.040	0.000	0.372	0.174	0.076	0.172	0.0	0.205
6	0.2	0.319	3.880	0.000	0.468	0.226	0.078	0.227	0.0	0.000
7	1 (Kelly)	0.419	6.197	0.000	0.000	0.365	0.000	0.635	0.0	0.000

I Tabel 3 ses en tabel for optimale porteføljevægte for forskellige risikotolerancer, θ. Ved en risikotolerance lig 0, afholder investoren sig stor set fra at investere i nogle af aktiverne, men beholder derimod 85.7% af sin formue i aktivet α_0, hvilket betyder at han beholder sine penge i banken. Denne investeringsstrategi medfører meget lavt afkast, men også en meget lav spredning, da man ikke risikerer noget, hvis man hverken investerer i usikre eller sågar sikre. Vi ser, at jo højere investorernes risikotolerance, θ, desto flere midler er investorerne villige til at lægge i de usikre aktiver. Investorerne bliver mere og mere villige til at investere i usikre aktiver med højere spredning. Investorerne investerer ikke i det usikre aktiv Heineken, $\alpha HEINY$, da aktien har en meget høj spredning, σ, i forhold til afkast.

Kellykriteriet findes som bekendt ved $\theta = 1$, hvilket vil sige at finde det største afkast, skal investorens risikotolerance være meget høj. Investoren, der investerer efter Kelly-kriteriet, opdeler sin portefølje i de to usikre aktiver Genmab, $\alpha_{GMAB.CO}$, og Vestas, $\alpha_{VWS.CO}$. Investoren, der følger Kelly-kriteriets porteføljevægt, er henholdsvis 36.5% i Genmab og de resterende 63.5% i Vestas, da de to usikre aktiver, har det højeste afkast. Selvom vi ser at Vestas-aktien, har det største afkast i Figur 8, ser vi også at Vestas er det aktiv med den højeste spredning. Det betyder at selvom investoren, der følger Kelly-kriteriet langt fra er risikoavers, så risikodiversificerer investoren stadig sin portefølje, for at stadig at befinde sig på "the efficient frontier".

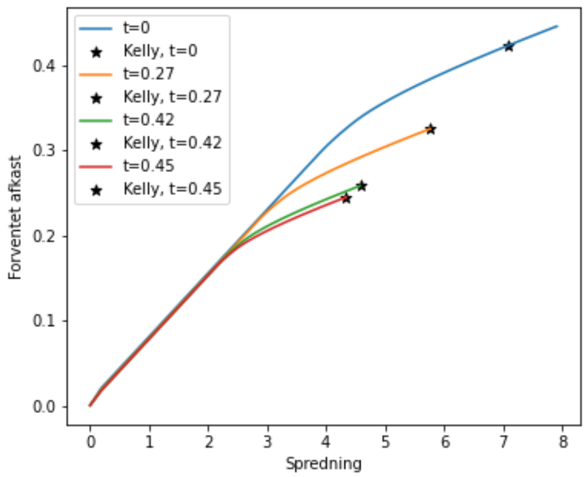
[17] Her benyttes algoritmen "scipy,minimize" i Python, som implementerer en gradient-baseret metode, der tillader for at lægge bibetingelser på optimeringsproblemet.

Beskatning af aktieafkast

Indtil videre har vi betragtet den optimale formueallokering på tværs af aktiver i fravær af beskatning. I Danmark beskattes aktieindkomster progressivt med 2 flere forskellige marginalskatte satser på henholdsvis 27 og 42 procent, afhængig af om kapitalindkomsten fra eventuelle aktiegevinster falder inden for de respektive beløbsgrænser. Der er flere beskatningsformer for aktieudbytte og kursgevinster. I dette afsnit betragter vi lagerbeskatning, hvor der svares skat af kursgevinster uanset om de realiseres eller ej, hvilket kan gøres inden for rammerne af modellen. Beskatning af realiserede kursgevinster, vil kræve en mere kompliceret model for at kunne vurdere hvornår gevinster trækkes ud til endelig beskatning. Vi ser også bort fra det progressive element i skattesystemet, men betragter i stedet indførelse af proportional skat svarende til de 2 eksisterende marginalskatter og den foreslåede stigning på den øverste marginalskat fra 42 procent til 45 procent.

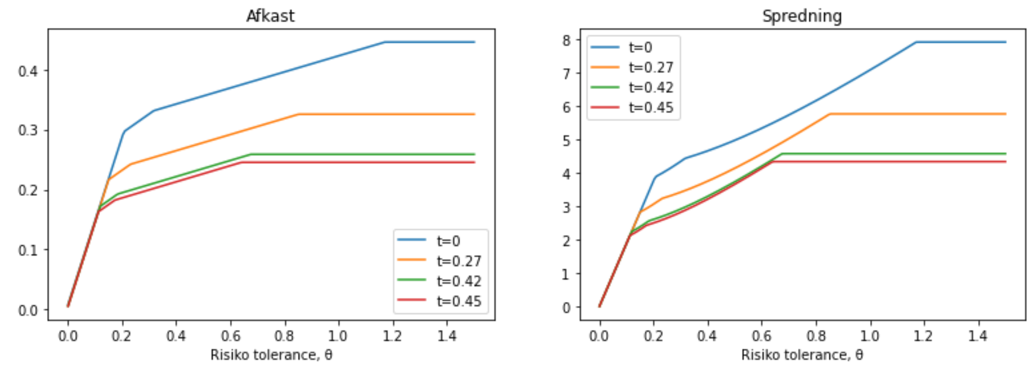
Ser vi bort fra progressions-grænser kan vi let implementere lagerbeskatning ved at beregne afkastet på de enkelte aktier efter skat, $(1-\tau)R_{i,t}$, hvor τ er marginalskatten. Herefter genestimeres μ_τ og Ω_τ baseret på data for aktiekurserne efter skat for hver af de 3 marginalskatter, $\tau \in \{0.27\ , 042\ , 0.45\}$. Baseret på dette gentages efficient frontier analyse fra ovenfor og resultatet kan ses i Figur 10, Figur 11 og Figur 12.

FIGUR 10: EFFICIENT FRONTIER OG AKTIEBESKATNING



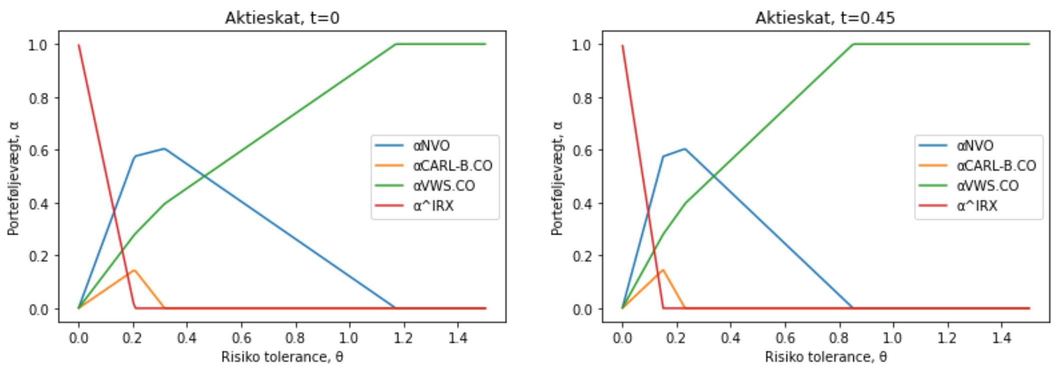
Figur 10 viser den optimale afvejning af risiko og forventet afkast for de respektive skattesatser. Vi ser klart, at en stigning i skatten sænker både den forventede værdi og spredning på afkastet for den optimale portefølge. Dette skyldes blandt andet den mekaniske effekt, hvor skatten (for fastholdte porteføljevægte) både tager toppen af tab og gevinst. Dette sænker det forventede afkast, men samtidig udsættes investoren for mindre risiko fordi man også kan tække tab fra i skat. Men der er også en adfærdsmæssig effekt fordi skatten alt andet lige reducerer investorernes risiko, og dermed ændrer på sammesætningen af den optimale portefølje.

FIGUR 11: AKTIEBESKATNING, FORVENTET AFKAST OG RISIKO FOR OPTIMAL PORTEFØLJE



Disse effekter ses tydeligt i Figur 11 og Figur 12, hvor vi sammenligner det forventede afkast og spredning på porteføljen før og efter skat (Figur 11), og skattens effekt på sammensætningen af den optimale portefølje (Figur 12). Den mekaniske effekt er størst for de mest risikovillige investorer, som vil være begrænsede af muligheden for shorting, og derfor er mindre følsomme over for ændringer i beskatningen. Omvendt vil mere riskoaverse investorer (lavere θ) foretage større omlægninger af deres portefølje, således at de bevarer samme trade-off mellem risiko og afkast efter skat. Bemærk, hvordan skatten mindsker behovet for risikodiversificering; især for investorer med lav risikotolerance.

FIGUR 12: OPTIMAL PORTEFØLJE MED OG UDEN AKTIEBESKATNING



Økonomiske konsekvenser af aktiebeskatning

Aktiebeskatning i Danmark

Den danske kapitalindkomstskat indbringer årligt ca. 100 milliarder kroner i skatteprovenu, hvoraf ca. 20 procent stammer fra aktieindkomstskatten[18]. Aktieindkomstbeskatningen har både omfordelingsmæssige effekter og adfærdsmæssige effekter på befolkningen. Da det primært er velstillede danskere, som investerer på aktiemarkedet, er det også denne gruppe, der opnår den største kapitalmæssige indtjening. Aktieindkomstskatten har derfor en stor omfordelende effekt, da beskatningen i højere grad rammer de velhavende[19]. Som nævnt ovenfor, fører Danmark en progressiv skattepolitik for kapitalindkomster; blandt andet for at imødekomme de fordelingsmæssige hensyn. Ved en positiv aktieindkomst under progressionsgrænsen 57.200 (dobbelt op for ægtepar) danske kroner er satsen for kapitalbeskatningen 27 procent. Ved en årlig positiv aktieindkomst, der overstiger progressionsgrænsen ved 57.200 kr., vil al øvrig indkomst beskattes med 42 procent[20].

Progressive skatter, bunching og udskydelse af realiserede kursgevinster

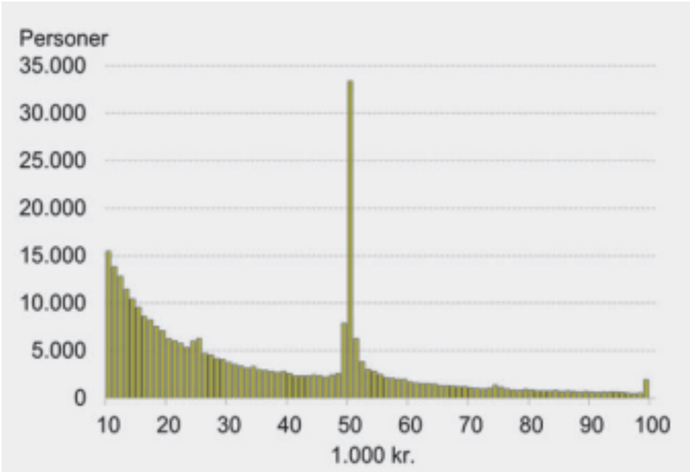
Analysens foregående afsnit ignorerede vi effekten af progressive skatter og hvordan de interagerer med investorers mulighed for selv at beslutte hvornår aktieindkomster kommer til beskatning. I (DØRS, 2019) specialkapitel om kapitalindkomstbeskatningen fremhæves det, at progressionsgrænsen medfører, at investorer geninvesterer store dele af deres afkast for at slippe for den højere kapitalbeskatning. Dette kan ses på Figur 13, som er baseret på (DØRS, 2019) beregninger på baggrund af registerdata fra 2016. Figuren viser et histogram over fordelingen af aktieindkomster for danskere med årlige aktieindkomster over 10.000 kr., men lavere end 100.000 kr.[21] I (DØRS, 2019) fremhæves det, at en stor del af investorerne undgår at overskride den daværende progressionsgrænse på 50.600 kr.

I litteraturen kaldes dette fænomen for "bunching" når en stor gruppe af mennesker bundter sig sammen omkring progressionsgrænsen. Dette skyldes, at der er en diskontinuitet i marginalskatterne ved beløbsgrænsen, hvor marginalskatten ændres fra 27 til 42 procent. Det er fristende at konkludere,

[18] "Dansk Økonomi Forår 2019", Det Økonomiske Råd, s.8, 2019
[19] Ibid. s 9.
[20] Skat, Skattesatser for gevinster og udbytte (Aktieindkomst), 2022
[21] Ibid. s. 114

at der er massive adfærdsmæssige konsekvenser af øget aktiebeskatning, således at en stor del af aktieinvestorerne helt stopper med at investere, når de beskattes med den høje marginalskat. Men dette er en fejlkonklusion. Bunching er primært et udtryk for at investorerne har kontrol over, hvornår deres aktieindkomster kommer til endelig beskatning.

FIGUR 13: AKTIEINDKOMST OMKRING BELØBSGRÆNSERNE, 2016.[22]



Kilde: Figur II.4 i "Dansk Økonomi Forår 2019", DØRS (2019, p. 114)

Denne type adfærd ses også ved topskattegrænsen for selvstændige. Fælles for aktieinvestorer og selvstændige erhvervsdrivende er, at de kan flytte deres profit eller afkast på tværs af kalenderår for dermed at minimere skattebetaling. For de selvstændiges vedkommende kan der opspares overskud i virksomhedsordningen eller kapitalafkastordningen.[23] For aktieinvestorernes vedkommende, fordi de i et vist omfang selv bestemmer hvornår evt. kursgevinster realiseres – medmindre de lagerbeskattes.

Hvis aktieafkastet er varierende over tid, således at man i nogle år ikke når progressionsgrænsen på kapitalindkomst, kan man sænke sin samlede skattebyrde over tid ved at reinvestere, dermed udskyde beskatningen og trække overskud ud i de år, hvor man har haft tab. Denne intertemporale strategiske udglatning af den skattepligtige aktieindkomst har en forvridende effekt, da det progressive skattesystem ændrer den optimale investeringsstrategi. Ifølge den optimale porteføljemodel, bør porteføljeandelene være konstante så længe forventningen til afkast og spredning ikke ændres. Dermed kan investorernes adfærdsmæssige reaktion til det progressive skattesystem medføre et lavere forventet afkast på porteføljen.

[22] Ibid.
[23] Se BOKS II.1 i "Dansk Økonomi Forår 2019", Det Økonomiske Råd (2019, s.104-105)

Derfor argumenterer (DØRS, 2019) for øget lagerbeskatning; netop for at modvirke disse forvridninger og eventuelle fastholdelseseffekter af skatteprovenuet.

Reformudspil om øget aktiebeskatning

Den socialdemokratiske regering foreslog i reformudspillet *'Danmark kan mere 1'* fra september 2021, at den højeste skattesats for aktieindkomst atter skulle stige 3 procentpoint fra 42 til 45 pct.[24] Et valg den socialdemokratiske regering tog på baggrund af den stigende ulighed i Danmark, hvilket blandt andet er motiveret af bolig- og aktiemarkedets positive udvikling[25].

Den uafhængige borgerlig-liberale tænketank CEPOS deler ikke Regeringens holdning vedrørende en potentiel øget skattesats for aktieindkomst. (Hansen & Brøns-Petersen, 2021) argumenterer for, at beskatning af aktieindkomst bør beskattes med en flad skat på 25%. De argumenterer derudover for at en asymmetrisk kapitalbeskatning modvirker dansk iværksætteri, hvor investorer vil blive beskattet med 42%, såfremt investeringer i innovative foretagender viser sig at være profitable. Alternativt kan investorer sætte penge ind på en pensionsopsparing, hvor afkastbeskatningen kun er 15,3%.

Det bør nævnes at CEPOS argumenter ikke er funderet i en konkret dybdegående analyse baseret på modelberegninger eller registerdata. Effekterne af at ændre kapitalbeskatningen er komplicerede og de adfærdsmæssige effekter er mange og modsatrettede. F.eks. vil portefølje modellens forudsige at højere aktieskat vil lede til at en større andel opsparingen vil blive allokeret i mere risikovillig kapital.

Efter en omfattende analyse peger (DØRS, 2019) også på at *"Den effektive beskatning af kapitalindkomster på personniveau er meget uensartet"* og anbefaler et lavere rentefradrag og lavere beskatning af positiv aktie- og anden kapitalindkomst for at reducere husholdningernes gældsætning og stabilisere huspriserne.

En stigning i den maksimale marginalskat på aktier fra 42% til 45%, kan have også have en stimulerende effekt på kort sigt, selv om der en potentiel negativ adfærdsmæssig effekt på længere sigt. På kort sigt, vil en stigning i aktiebeskatningen eller generel stigning beskatning kapitalindkomst øge gældsætningen og forbruget. Der kan være positive effekter på væksten på kort sigt pga. multiplikatoreffekten: Øget forbrug vil stimulere efterspørgslen, som stimulerer den indenlandske

[24] Se (Regeringen, 2021) : "Danmark kan mere 1", s. 28
[25] Ibid.

produktion, som vil stimulere beskæftigelse og indkomster, som igen vil stimulere forbruget. På langt sigt, kan effekten være negativ pga. af vigende opspring og investeringer, som vil sætte sig i produktionen, indkomster og i sidste ende forbruget**.** (Kureer, 2018)[26]

Selvom det har mange negative effekter at hæve beskatningen af aktieafkast, kan det også være negativt for den danske velfærdsstat at sænke aktiebeskatningen. I en analyse af (Juul, 2016) for fagbevægelsens tænketank, Arbejderbevægelsens Erhvervsråd, argumenteres for at en flad beskatning på 27%, vil koste staten 3.6 mia. kroner i tabt skatteprovenu. Derudover vil det medføre en stor øget økonomisk ulighed, da det er den rigeste procent, der står til en gevinst på ca. 73.000 kr., hvorimod de fattigste 90% af den danske befolkning i gennemsnit ca. får 50 kr. Dette er en fremgang i indkomsten på 5.8% for den rigeste procent, men kun en fremgang på under 0.0% for de fattigste 90% procent af befolkningen.

Efter en omfattende analyse i et specialkapitel om kapitalindkomstbeskatningen peger (DØRS, 2019) også på at "*Den effektive beskatning af kapitalindkomster på personniveau er meget uensartet"* og anbefaler et lavere rentefradrag og lavere beskatning af positiv aktie- og anden kapitalindkomst for at reducere husholdningernes gældsætning og stabilisere boligmarkedet, men fremhæver samtidigt skattens vigtige omfordelende rolle. Det Økonomiske Råd anbefaler at man i stedet overvejer at øge beskatning af arv, da forvridende effekter er mindre end for almindelig kapitalindkomstbeskatning.

Konklusion

Regulering af den finansielle sektor har store konsekvenser for økonomien. Gearing er f.eks. en risikoøgende faktor, der gør at investorer kan investere en større formue, end de selv råder over ved f.eks. at shorte andre aktiver. Selv om tilgængelighed af risikovillig kapital kan have en positiv effekt på væksten, kan det også lede til ustabilitet i den finansielle sektor, hvis f.eks. store investorer og finansielle institutioner påtager sig for meget risiko.

En anden central indsigt fra denne analyse er, at beskatning har en forsikrende effekt og er med til at mindske investorernes risikoeksponering, og derfor leder til mere risikofyldte investeringer gennem forvridning af investorernes optimale investeringsstrategi. Isoleret set øger dette udbuddet af risikovillig kapital, som kan have en positiv effekt på iværksætteri, innovation og vækst. Dette kan naturligvis ikke stå alene, men bør sammenholdes med andre effekter af aktiebeskatningen på det

[26] Kureer, Henrik, ØkonomiNU, s.43, 2018

økonomiske kredsløb; herunder eventuelle multiplikatoreffekter som når højere aktieskat påvirker opsparingen. Den mest centrale effekt, som ikke er inkluderet i modellen, er afvejningen mellem opsparing og forbrug. Når aktieskatten stiger, sænkes det forventede afkast på opsparing og den forventede vækst i formuerne, hvilket kan stimulere forbrug og efterspørgsel på kort sigt, men har en negativ effekt på væksten på langt sig.

Litteratur

Kelly, J. L. (1956). A new interpretation of the information rate. *Bell Systems Technical Journal, 35*, 917-926.

Carta, A., & Conversano, C. (2020). Practical Implementation of the Kelly Criterion: Optimal Growth Rate, Number of Trades, and Rebalancing Frequency for Equity Portfolios. *Frontiers in Applied Mathematics and Statistics, 6*.

Markowitz, H. (1952). The utility of wealth. *Journal of Political Economy, 60*(2), 151-158.

Hansen, M. L., & Brøns-Petersen, O. (2021, 11 10). Danmark har den 3. højeste skat på aktieudbytte blandt OECD-lande. *https://cepos.dk/abcepos-artikler/0018-danmark-har-den-3-hoejeste-skat-paa-aktieudbytte-blandt-oecd-lande#section2*. Danmark: CEPOS.

Juul, J. S. (2016, december 9). Lavere aktieskat forgylder de rigeste. Danmark: Arbejderns Erhvervsråd.

Dash, S. (2020). *Portfolio Optimization with Python using Efficient Frontier with Practical Examples.* Retrieved Marts 2022, from Machine Learning +: https://www.machinelearningplus.com/machine-learning/portfolio-optimization-python-example/#plotting-the-efficient-frontier

Dash, S. (2022). *Investor Portfolio Optimization using Python.* Hentet Marts 2022 fra GitHub.com: https://github.com/shruti3099/Investor-Portfolio-Optimization-using-Python

Sørensen, M. (2008). *En Introduktion til Sandsynlighedsregning.* Københavns Universitet. Retrieved from http://web.math.ku.dk/~michael/ssnoter.pdf

DØRS, D. Ø. (2019). *Dansk Økonomi, forår 2019.* København: Det Økonomiske Råd.

Saez, E. (2010). Do taxpayers bunch at kink points? *American economic Journal: economic policy, 2*(3), 180-212.

Regeringen. (2021). *Danmark kan mere I: Flere i arbejde. Danmark skal være rigere, grønnere og dygtigere.* Finansministeriet.

Kureer, H. (2018). *ØkonomiNu.* Systime.