

# Обезразмеривание релятивистского осциллятора

Сальников Дмитрий

17 января 2024 г.

Я считаю, что лучше сразу работать в естественной системе  $\hbar = c = 1$ , так будет удобнее. Так же в технической реализации, на мой взгляд, стоит сразу вычесть массу из полной энергии, чтобы в нерелятивистском пределе получался стандартный гамильтониан без большой постоянной массовой добавки. Сева утверждал, что с этим могут возникнуть проблемы, которые возникают с гамильтонианом Дирака, но я думаю, что здесь их быть не должно, поскольку дисперсионное соотношение для такого гамильтониана явно не включают отрицательные энергии, как это происходит в теории с гамильтонианом Дирака.

В таком случае гамильтониан и коммутационные соотношения в произвольном числе измерений ( $p \equiv |\mathbf{p}|$ ,  $q \equiv |\mathbf{q}|$ ) имеют вид :

$$H = \sqrt{p^2 + m^2} - m + \frac{m\omega^2 q^2}{2}, \quad (1)$$

$$[q_i, p_j] = i\delta_{ij}. \quad (2)$$

Если обезразмеривать величины единым образом для любых масс и частот, могут быть проблемы в одном из предельных случаев. Поэтому разумно будет применить два разных варианта для случаев  $m < \omega$  и  $m > \omega$ .

В случае  $m > \omega$  в нерелятивистском пределе гамильтониан (1) будет иметь стандартный вид:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2}. \quad (3)$$

Переход к безразмерным переменным происходит стандартным образом:

$$p \rightarrow \sqrt{m\omega} p, \quad q \rightarrow \frac{q}{\sqrt{m\omega}}, \quad H \rightarrow \omega H. \quad (4)$$

Таким образом, безразмерный гамильтониан будет иметь вид:

$$H = \frac{p^2}{2} + \frac{q^2}{2}. \quad (5)$$

В случае  $m > \omega$  перейдём к безразмерным переменным в гамильтониан (1) точно так же

$$\omega H = \sqrt{m\omega p^2 + m^2} - m + \frac{\omega q^2}{2}, \quad (6)$$

$$H = \sqrt{\left(\frac{m}{\omega}\right) p^2 + \left(\frac{m}{\omega}\right)^2} - \frac{m}{\omega} + \frac{q^2}{2}. \quad (7)$$

Дальше воспользуемся стандартным приёмом:

$$H = \left[ \sqrt{\left(\frac{m}{\omega}\right) p^2 + \left(\frac{m}{\omega}\right)^2} - \frac{m}{\omega} \right] \times \frac{\left[ \sqrt{\left(\frac{m}{\omega}\right) p^2 + \left(\frac{m}{\omega}\right)^2} + \frac{m}{\omega} \right]}{\left[ \sqrt{\left(\frac{m}{\omega}\right) p^2 + \left(\frac{m}{\omega}\right)^2} + \frac{m}{\omega} \right]} + \frac{q^2}{2}, \quad (8)$$

$$H = \frac{\left(\frac{m}{\omega}\right) p^2}{\left[ \sqrt{\left(\frac{m}{\omega}\right) p^2 + \left(\frac{m}{\omega}\right)^2} + \frac{m}{\omega} \right]} + \frac{q^2}{2}, \quad (9)$$

$$H = \frac{p^2}{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{m}\right) p^2}} + \frac{q^2}{2}. \quad (10)$$

Таким образом, при  $m > \omega$  безразмерный параметр  $\frac{\omega}{m}$  всегда меньше единицы, и при  $m \gg \omega$  гамильтониан переходит в (5).

Теперь рассмотрим ультрарелятивистский случай:

$$H = p - m + \frac{m\omega^2 q^2}{2}. \quad (11)$$

Обезразмеривание в таком пределе имеет вид:

$$p \rightarrow (m\omega^2)^{1/3} p, \quad q \rightarrow \frac{q}{(m\omega^2)^{1/3}}, \quad H \rightarrow (m\omega^2)^{1/3} H, \quad (12)$$

$$(m\omega^2)^{1/3} H = (m\omega^2)^{1/3} p - m + \frac{m\omega^2 q^2}{2(m\omega^2)^{2/3}}, \quad (13)$$

$$H = p - \left(\frac{m}{\omega}\right)^{2/3} + \frac{q^2}{2}. \quad (14)$$

Поэтому в случае  $m < \omega$  имеет смысл обезразмеривать гамильтониан (1) так же:

$$(m\omega^2)^{1/3} H = \sqrt{(m\omega^2)^{2/3} p^2 + m^2} - m + \frac{m\omega^2 q^2}{2(m\omega^2)^{2/3}}, \quad (15)$$

$$H = \sqrt{p^2 + \left(\frac{m}{\omega}\right)^{4/3}} - \left(\frac{m}{\omega}\right)^{2/3} + \frac{q^2}{2}, \quad (16)$$

Таким образом, при  $m < \omega$  безразмерный параметр  $\frac{m}{\omega}$  всегда меньше единицы, и при  $m \ll \omega$  гамильтониан переходит в (14).

Итого:

1.  $m > \omega$

$$p \rightarrow \sqrt{m\omega} p, \quad q \rightarrow \frac{q}{\sqrt{m\omega}}, \quad H \rightarrow \omega H. \quad (17)$$

$$H = \frac{p^2}{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{m}\right) p^2}} + \frac{q^2}{2} \quad (18)$$

если не вычитать из исходного гамильтониана массу:

$$H = \frac{p^2}{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{m}\right) p^2}} + \frac{q^2}{2} + \frac{m}{\omega} \quad (19)$$

2.  $m < \omega$

$$p \rightarrow (m\omega^2)^{1/3} p, \quad q \rightarrow \frac{q}{(m\omega^2)^{1/3}}, \quad H \rightarrow (m\omega^2)^{1/3} H, \quad (20)$$

$$H = \sqrt{p^2 + \left(\frac{m}{\omega}\right)^{4/3}} - \left(\frac{m}{\omega}\right)^{2/3} + \frac{q^2}{2}, \quad (21)$$

если не вычитать из исходного гамильтониана массу:

$$H = \sqrt{p^2 + \left(\frac{m}{\omega}\right)^{4/3}} + \frac{q^2}{2}, \quad (22)$$

3.  $m = \omega$ , оба варианта дадут

$$H = \sqrt{p^2 + 1} - 1 + \frac{q^2}{2}, \quad (23)$$

если не вычитать из исходного гамильтониана массу:

$$H = \sqrt{p^2 + 1} + \frac{q^2}{2}, \quad (24)$$