

Глава 6. Кригинг и базовые модели геостатистики

М.Ф. Каневский, В.В. Демьянов, Е.А. Савельева, С.Ю. Чернов, В.А. Тимонин

Обратимся собственно к проблеме оценивания значения непрерывной переменной V в произвольной точке x пространства S . Основанием для этого будет служить набор из n измерений, сделанных в точках x_1, x_2, \dots, x_n пространства. Базовой моделью оценивания в геостатистике является кригинг. Термин кригинг был взят на вооружение для обозначения семейства алгоритмов пространственной регрессии. Само слово кригинг происходит от имени ученого Д. Крига (D. Krige), в честь которого Г. Матерон и назвал базовые геостатистические модели.

Все модели семейства кригинга так или иначе сводятся к линейной регрессионной оценке:

$$V^*(x) - m(x) = \sum_{i=1}^n w_i(x) [V(x_i) - m(x_i)] \quad (1)$$

где $w_i(x)$ – веса, присваиваемые данным $V(x_i)$, которые в свою очередь являются реализациями пространственной переменной V . Значения $m(x)$ и $m(x_i)$ являются математическими ожиданиями (средними) пространственных переменных $V(x)$ и $V(x_i)$. Количество данных n , используемых для оценивания, как и их веса могут меняться в зависимости от точки оценивания x .

Как было предложено в главе 3, будем считать, что модель поведения пространственных данных строится в виде неизвестной случайной функции V , которая является функцией случайных переменных $\{V(x), V(x_1), \dots, V(x_n)\}$. При этом значения $V(x_1), \dots, V(x_n)$ заданы в виде исходных данных и представляют из себя единственную реализацию случайных переменных в соответствующих точках пространства, а значение $V(x)$ неизвестно.

Случайная функция $V(x)$ обычно раскладывается на две компоненты – детерминистический тренд $m(x)$ и случайную невязку $R(x)$:

$$V(x) = R(x) + m(x) \quad (2)$$

Компонента невязки $R(x)$ моделируется как стационарная случайная функция с нулевым математическим ожиданием $m_R(x)$ и ковариацией $C_R(h)$:

$$m_R(x) = E\{R(x)\} = 0 \quad (3)$$

$$Cov\{R(x), R(x+h)\} = E\{R(x)R(x+h)\} = C_R(h) \quad (4)$$

Математическое ожидание пространственной переменной V в точке x , таким образом, будет равно значению тренда:

$$E\{V(x)\} = m(x). \quad (5)$$

Первое условие, которому удовлетворяют все модели кригинга – это несмещенность оценки (1) в точке x (среднее значение ошибки оценивания равно нулю):

$$R^*(x) = V^*(x) - V(x) \quad (6)$$

$$E\{R^*(x)\} = 0 \quad (7)$$

Напомним, что здесь $V^*(x)$ – это оценка значения $V(x)$, которое неизвестно.

Следующим условием, которое используется для получения уравнений кригинга, является условие минимизации вариации ошибки, что дает «наилучшую» в статистическом смысле оценку:

$$\sigma_R^2(x) = E \{ (R^*(x) - m_R(x))^2 \} \quad (8)$$

Различают три типа кригинга в зависимости от модели тренда $m(x)$.

1. Простой кригинг (Simple Kriging, SK) предполагает среднее $m(x)$ постоянным и известным в области исследования S :

$$m(x) = m = \text{const}, \text{ известно } \forall x \in S \quad (9)$$

2. Обычный кригинг (Ordinary Kriging, OK) Значение среднего в области неизвестно, но постоянно:

$$m(x) = m = \text{const}, \text{ неизвестно } \forall x \in A(x) \quad (10)$$

3. Универсальный кригинг (Universal kriging, UK) предполагает, что неизвестное среднее значение $m(x)$ гладко меняется во всей области исследования S . Компонента тренда моделируется как линейная комбинация известных функций $f_k(x)$:

$$m(x) = \sum_{k=0}^K a_k(x) f_k(x) \quad (11)$$

где коэффициенты $a_k(x)$ определяются из системы уравнений универсального кригинга.

Обычный кригинг

Обычный кригинг (Ordinary kriging) – это один из наиболее часто используемых в геостатистике методов интерполяции. Этот метод имеет свойство “наилучшего линейного несмещенного оценщика” (B.L.U.E. – best linear unbiased estimator). Как следует из (1) – метод является линейным. Несмещенность обеспечивается условием (7). Термин “наилучший” означает, что веса w_i в (1) выбираются так, чтобы минимизировать вариацию ошибки σ_R^2 (8).

Условие (10) позволяет переписать выражение (1) в другом виде:

$$V^*(x) = \sum_{i=1}^n w_i \cdot V(x_i) + \left[1 - \sum_{i=1}^n w_i \right] \cdot m \quad (12)$$

Если подставить (12) в условие несмещенности (7), то получим:

$$E\{V^*(x) - V(x)\} = E\left\{\sum_{i=1}^n w_i \cdot V(x_i)\right\} - E\{V(x)\} - \left[1 - \sum_{i=1}^n w_i\right] \cdot m \equiv 0 \quad (13)$$

То есть условие несмещенности для уравнения (12) выполнено автоматически, если сумма весов равняется единице:.

$$1 - \sum_{i=1}^n w_i = 0 \quad (14)$$

Таким образом, оценка обычного кригинга вычисляется по формуле:

$$V^*(x) = \sum_{i=1}^n w_i \cdot V(x_i) \quad (15)$$

Веса w_i должны быть вычислены при ограничении (14).

Теперь обратимся к анализу вариации ошибки σ_R^2 (8) для обычного кригинга. По определению $Var\{R(x)\} = E\{(R(x)-m_R(x))^2\} = E\{R^2(x)\} - m_R^2(x) = E\{R^2(x)\}$, в силу условия (7).

Тогда

$$\begin{aligned} E\{R^2(x)\} &= E\{[V^*(x)-V(x_0)]^2\} = E\{[(V^*(x)-m)-(V(x)-m)]^2\} = \\ &= Var\{V^*(x)\} - 2 \cdot Cov\{V^*(x)V(x)\} + Var\{V(x)\} \end{aligned} \quad (16)$$

Теперь потребуем от функции V , чтобы она удовлетворяла внутренней гипотезе (см. главу 3). Тогда все написанные здесь ковариации существуют. Используя (14) и (15), получим:

$$Var\{V^*(x)\} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j C_{ij}$$

Вариация неизвестной случайной переменной $V(x)$ также существует и равна априорной вариации исходных данных:

$$Var\{V(x)\} = \sigma^2 = const$$

Второе слагаемое в (16) с учетом (14) и (15) равно:

$$2Cov\{V^*(x)V(x)\} = 2 \sum_{i=1}^n w_i C_{i0}$$

В итоге получим:

$$\sigma_R^2 = \sigma^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j C_{ij} - 2 \sum_{i=1}^n C_{i0} \quad (17)$$

Где C_{ij} – ковариации случайных переменных $Cov\{V_i V_j\}$, $i, j=1, \dots, n$. Теперь, чтобы сделать простой кригинг "наилучшим" в статистическом смысле, нужно подобрать веса w_i так, чтобы они минимизировали (17) при ограничении (14). Решение такой задачи стандартно и получается образованием из (17) лагранжиана путем включения в него условия (14) с весом μ . Вес μ , как известно, называется множителем Лагранжа:

$$L = \sigma^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j C_{ij} - 2 \sum_{i=1}^n C_{i0} - 2\mu \left(\sum_{i=1}^n w_i - 1 \right) \quad (18)$$

Для минимизации лагранжиана (18) необходимо вычислить частные производные от него по всем весам w_i и по μ и приравнять их к нулю. В результате получается следующая система из $n+1$ уравнений **обычного кригинга (ordinary kriging)**:

$$\sum_{j=1}^n w_j C_{ij} + \mu = C_{i0}, \quad \forall i=1, \dots, n \quad (9)$$

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1$$

Система уравнений решается относительно w_i и μ . Далее найденные веса w_i используются для получения оценки линейной регрессии. Вариация ошибки оценки вычисляется путем умножения n уравнений на w_i и их суммирования:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j C_{ij} = \sum_{i=1}^n w_i \cdot C_{i0} - \mu$$

Подставив это в (17), получим итоговое выражение для вариации ошибки обычного кригинга:

$$\sigma_R^2 = \sigma^2 - \sum_{i=1}^n w_i C_{i0} - \mu \quad (20)$$

В главе 5 для функций, удовлетворяющих внутренней гипотезе, была введена вариограмма и показана ее связь с ковариацией. С учетом этой связи при переходе к вариограммам система уравнений для обычного кригинга запишется следующим образом:

$$\sum_{j=1}^n w_j \gamma_{ij} - \mu = \gamma_{i0}, \quad \forall i=1, \dots, n \quad (21)$$

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1$$

а вариация ошибки модели, при использовании соотношения $\gamma_{ij} = \sigma^2 - C_{ij}$, будет равна:

$$\sigma_R^2 = \sum_{i=1}^n w_i \gamma_{i0} + \mu \quad (22)$$

Для того, чтобы решить систему уравнений кригинга, необходимо знание значений ковариаций (или вариограмм) для всех пар измерений (ij) и их пар с точкой оценивания $(i0)$. Таким образом, в общем случае для вычисления оценки кригинга в произвольных точках пространства требуются знать значения ковариации $C(\mathbf{h})$ (или вариограммы $\gamma(\mathbf{h})$) для любого вектора \mathbf{h} в анализируемой области. Как было рассказано в главе 5, чтобы достичь этого, экспериментальная вариограмма, построенная по точкам измерений $V(x_1), V(x_2), \dots, V(x_n)$, аппроксимируется теоретической модельной функцией, значения которой и используются для решения системы уравнений (21) и вычисления вариации ошибки оценки (22).

Простой кригинг

Оценка *Простого кригинга* (*Simple kriging*) при известном стационарном среднем значении $m(x)=m=const$ дается уравнением (12). Веса простого кригинга w_i^{SK} вычисляются из системы n уравнений простого кригинга:

$$\sum_{j=1}^n w_j^{SK} C_{ij} = C_{i0}, \quad \forall i=1, \dots, n$$

Ошибка оценки простого кригинга дается формулой:

$$\sigma_{SK}^2 = \sigma^2 - \sum_{i=1}^n w_i^{SK} C_{i0}$$

Напомним, что условие несмещенности оценки в этом случае выполняется автоматически и никаких дополнительных ограничений на веса не накладывается. Следует отметить, что в отличие от обычного кригинга, простой кригинг дает более сглаженную оценку, сильно привязанную к среднему значению, которое известно. Простой кригинг следует применять особенно осторожно если среднее точно не известно и в случае высокой кластерности данных, когда статистические параметры распределения (в том числе и среднее) могут быть сильно искажены.

Различают точечный и блочный кригинг.

Точечный кригинг (point kriging) – это оценка точечного значения функции $V(\mathbf{x})$ в одной отдельно взятой точке пространства. При совпадении оцениваемой точки с одной из точек измерений значение, даваемое кригингом, в точности совпадает с измеренным значением.

Блочный кригинг (block kriging). Используется, когда требуется оценить интегральное значение функции в области, например, оценка запаса природных ископаемых в области, оценка загрязняющего вещества на определенной площади и т.п. Для более представительной оценки можно выполнить усреднение нескольких точечных оценок, полученных в окрестности заданной точки. Так, вся рассматриваемая область разбивается на блоки. В каждом блоке производится несколько точечных оценок в разных точках блока. Например, в прямоугольном блоке можно взять точки равноудаленные от центра и от углов прямоугольника. Затем берется среднее значение по блоку. В итоге получается предсказанное локальное значение. Этот метод называется блочным кригингом.

Пример обычного кригинга

Для примера расчета пространственных оценок при помощи кригинга были использованы данные по загрязнению изотопом ^{137}Cs в западной части Брянской обл. Полученные в главе 5 модели вариограмм для этих данных были использованы в вычислениях обычного кригинга. Результаты расчетов приведены на Рис.4-6.

Кросс-валидация

Во многих случаях необходимо оценить качество результатов интерполяции, полученных тем или иным методом, и выбрать наилучший вариант. Такой анализ методов может быть проведен путем сравнения оцененных значений с действительными известными значениями в соответствующих точках. Этот процесс называется *валидация* метода. Проблема в том, что во многих случаях в наличии нет данных для проведения независимой валидации и мы располагаем только теми данными, на основании которых строилась модель. *Кросс-валидация* (cross-validation) позволяет проводить анализ качества модели, используя только такие данные. Подробно о методе кросс-валидации рассказано в главе 2. Кросс-валидационные невязки несут в себе важную пространственную информацию. Однако, это не всегда дает четкий ответ на вопрос о том, какая же модель лучше.

Кросс-валидация является полезной ступенью перед проведением конечных оценок. Следует подчеркнуть, однако, что кросс-валидация не является методом проверки гипотез. Это метод не может подтвердить правильность какой-то отдельно взятой модели. При этом,

поскольку процедура кросс-валидации инвариантна относительно тестируемой модели, то с помощью нее можно эффективно подбирать наиболее оптимальные ее (модели) параметры. Следует заметить, что если модель хорошо работает с каким-либо одним набором данных, то это, вообще говоря, еще не означает, что она будет работать лучше других с любыми допустимыми данными.

По корреляции между кросс-валидационной оценкой и действительным значением можно сравнивать качество моделей при различных параметрах. Полезным инструментом для анализа результатов кросс-валидации является диаграмма зависимости невязок от оцененных значений. По этой диаграмме можно судить о наличии (или отсутствии) трендов в невязках.

В заключении следует отметить, что было бы ошибкой автоматически использовать невязки кросс-валидации для улучшения построенной модели. Иногда улучшение модели по результатам кросс-валидации может привести к реальному ухудшению оценки на валидационных данных. Если модель требует дополнительной коррекции, то это следует делать с привлечением качественной информации о структуре данных. При проведении кросс-валидации методов кригинга, построенных для анализа данных по загрязнению Брянской области изотопами ^{137}Cs и ^{90}Sr , удалось выбрать наиболее подходящие параметры для моделей вариограмм и для области поиска соседей в оценке (1). Кросс-валидация наглядно подтвердила улучшение качества оценки при использовании анизотропной модели вариограмм. Отметим еще, что по отношению к кригингу кросс-валидация оказывается достаточно дорогой процедурой с точки зрения затрат времени на вычисления.

Пример представления результатов кросс-валидации для моделей кригинга приведен на рисунках 1-3. Модели и простого и обычного кригинга дают в целом неплохие результаты с высокой корреляцией между оценками и измерениями (см. Рис. 1). Однако, в областях высоких значений наблюдается их значительное занижение – оценка кригинга сглаживает выбросы (см. Рис. 2). Из результатов, представленных в виде полигонов Вороного (см. Рис.3), видно, что наибольшие расхождения между истинными значениями и моделью обычного кригинга наблюдаются в областях пятен высокого загрязнения, вокруг которых имеется много низких значений. Такие зоны обладают высокой вариабельностью и традиционно вызывают трудности у всех линейных интерполяторов.

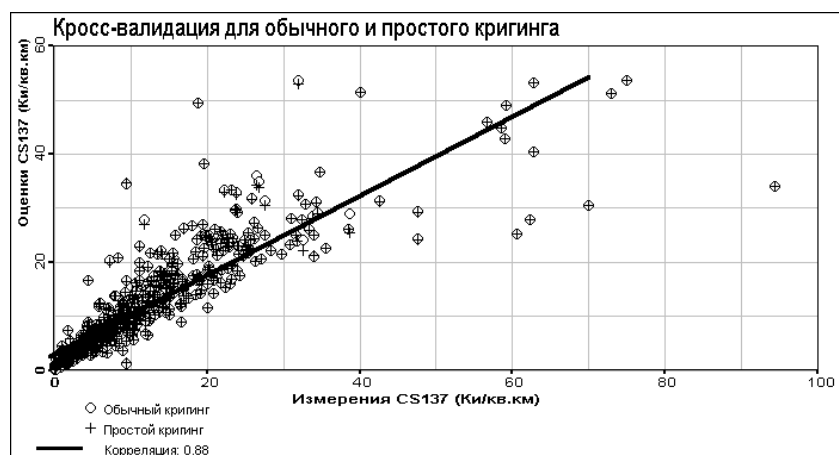


Рисунок 1. Зависимость оценок кросс-валидации от истинных значений измерений ^{137}Cs для обычного и простого кригинга и корреляционная прямая.

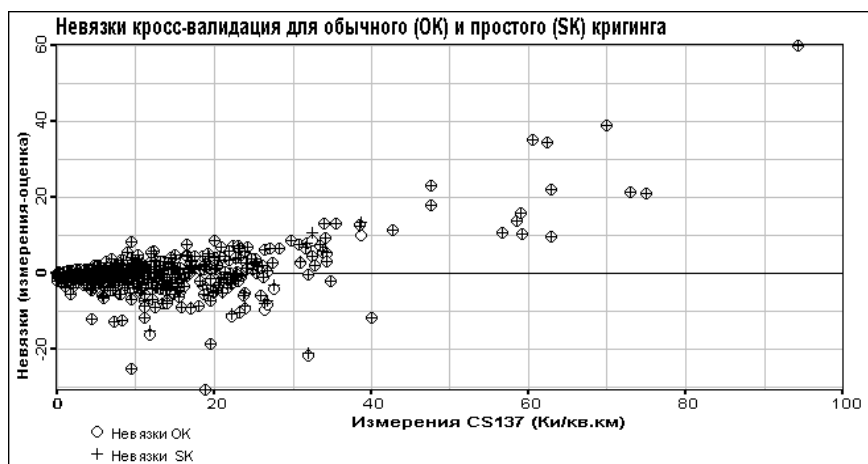


Рисунок 2. Зависимость невязок кросс-валидации от истинных значений измерений ^{137}Cs для обычного и простого кригинга.

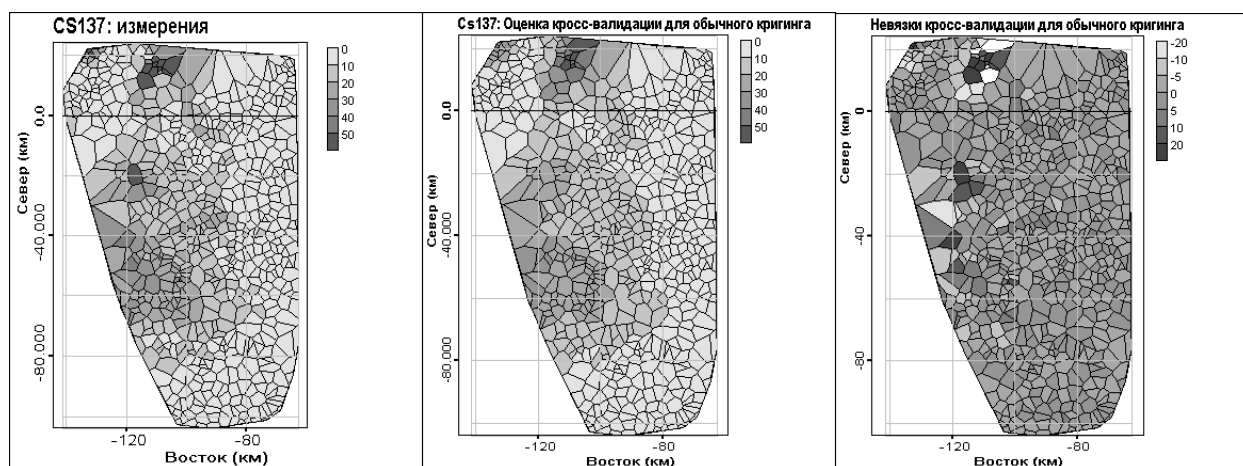


Рисунок 3. Результаты кросс-валидации ^{137}Cs (Ки/кв.км) для обычного кригинга в виде полигонов Вороного: измерения (слева), оценки (в середине) и невязки (справа).

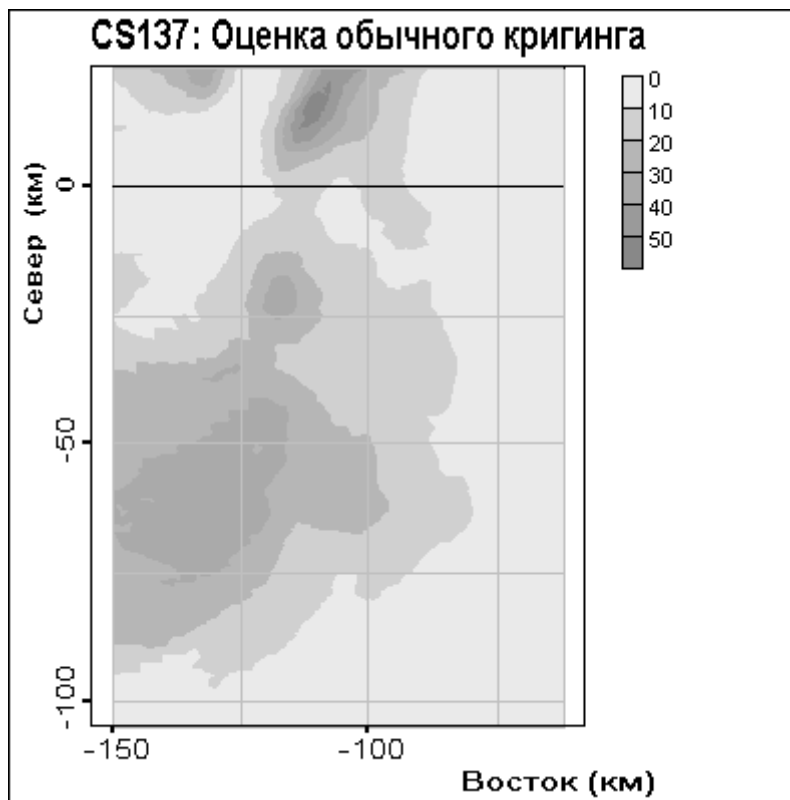


Рисунок 4. Оценка обычного кригинга загрязнения ^{137}Cs (Ки/кв.км) в западной части Брянской области.

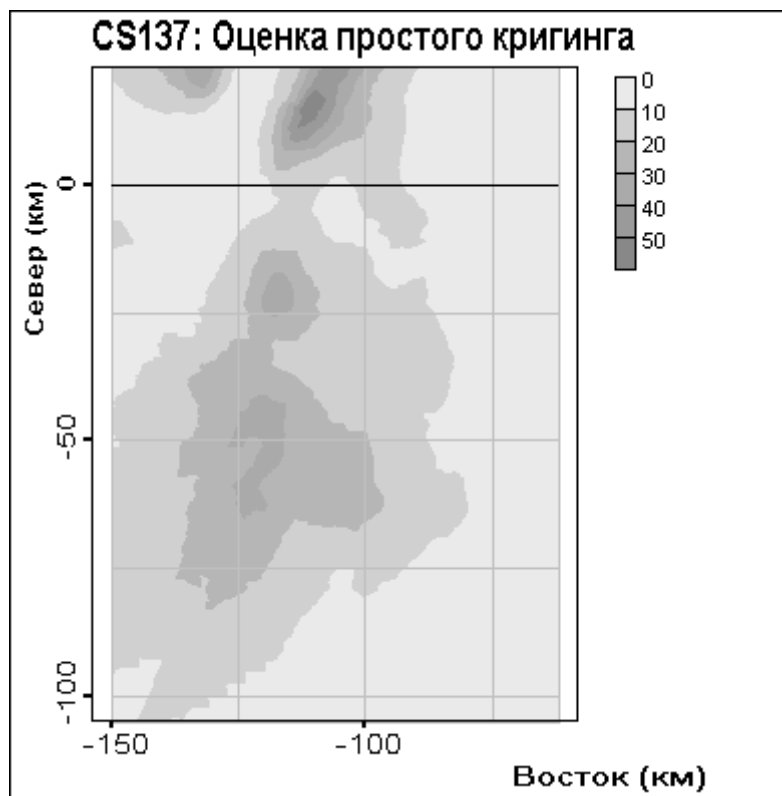


Рисунок 5. Оценка простого кригинга загрязнения ^{137}Cs (Ки/кв.км) в западной части Брянской области.

Модель кригинга, настроенная методами кросс-валидации, была использована в дальнейшем для вычисления собственно оценок загрязнения на плотной регулярной прямоугольной сетке. Карты оценок обычного и простого кригинга представлены на рисунках 4,5. Оценка обычного кригинга, в отличие от простого кригинга, лучше воспроизводит основные пятна высокого загрязнения и не привязана к среднему значению. Карта ошибок оценки обычного кригинга приведена на рисунке 6. Учет анизотропии в пространственной структуре данных приводит к уменьшению ошибки оценки. Ошибка обычного кригинга является безусловной, т.е. не зависит явно от полученных оценок и значений измерений. Но из формулы для вариации ошибки (20) видно, что она зависит от сети мониторинга – чем плотнее сеть мониторинга, тем меньше ошибка оценки (таковы свойства вариограммы). Если вспомнить также о поведении вариограммы в нуле, то становится понятно, что при использовании модели Нэггет (Nugget) с конечным ненулевым значением вариация ошибки обычного кригинга ограничена снизу (от нуля) этим значением.

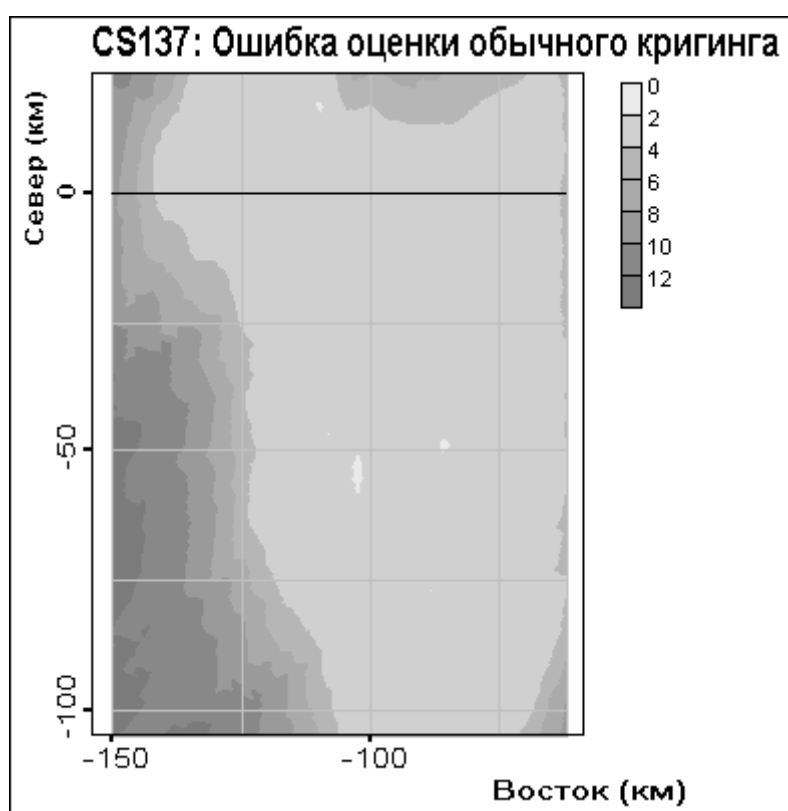


Рисунок 6. Ошибка обычного кригинга загрязнения ^{137}Cs (Ки/кв.км) в западной части Брянской области.

Неопределенность оценки

Модели кригинга позволяют получить оценки локального среднего и локальной вариации. Если принять гипотезу о мультинормальности случайных переменных, то можно оценить также доверительные интервалы, в которых лежит истинное значение. Так, действительное значение функции $V(x_0)$ в точке x_0 будет лежать с вероятностью 68 % в промежутке :

$$V(x_0) = \sum_{i=1}^n w_i \cdot V(x_i) \pm \sigma ,$$

где σ – стандартное отклонение.

Таким образом, в каждой точке оценивания при использовании моделей кригинга определены три величины: оценка, и две границы доверительных интервалов (минимальное и максимальное возможные значения оцениваемой переменной). Это факт позволяет провести изолинии для всех трех величин. При этом изолиния оценки будет всегда лежать между контурами доверительных интервалов, которые образуют “коридор”. Ширина “коридора” характеризует неопределенность изолинии оценки. Эта, так называемая, “толстая” изолиния содержит в себе с определенной вероятностью изолинию действительного распределения, истинное положение которой в точности неизвестно. В случае доверительного интервала $\pm 2\sigma$ истинное значение попадает в коридор, задаваемый толстой изолинией, с вероятностью 95%. При ненормальном (не гауссовом) распределении данных такое определение доверительного интервала становится некорректным.

Интервалы неопределенности оценки для ^{137}Cs в западной части Брянской области представлены на рисунках 7 и 8 в виде толстых изолиний уровней 5 и 15 Ки/кв.км. В качестве доверительного интервала был выбран интервал $\pm \sigma$. Для определения доли значений, попадающих в интервал использовалась методика кросс-валидации. Данный подход дает попадание около 85% действительных значений в интервал неопределенности. Оказалось, что площадь между крайними изолиниями при использовании анизотропной модели вариограммы меньше, чем для изотропной модели. Это означает, что неопределенность полученной оценки ниже в анизотропном случае.

Изолинии максимального возможного загрязнения (*Оценка + стандартное отклонение*) и изолинии минимального возможного загрязнения (*Оценка - стандартное отклонение*) сравнивались для различных вариантов кригинга. Стандартное отклонение обычного кригинга больше стандартного отклонения простого кригинга, как это было показано выше. При этом применение в обычном кригинге анизотропной модели дает меньшую неопределенность изолинии, чем применение изотропной модели. Следует, однако, заметить, что площадь области неопределенности зависит от качества модели во всех частях области. Поскольку использовалась глобальная модель вариограммы, то в областях, промоделированных лучше, предельные изолинии будут находиться ближе друг к другу. Напомним, что ошибки кригинга не зависят от абсолютных значений оценок, а зависят от плотности сети измерений. Так что ошибка оценки (толщина изолинии) меньше в областях с большей плотностью измерений, где имеется больше информации об исследуемом явлении.

Таким образом, статистическая интерпретация и использование геостатистических инструментов в процессе пространственного анализа данных позволяет в итоге не только прогнозировать значения исследуемых переменных в точках, где измерения не проводились, но и давать оценку качества прогноза в виде карт вариации оценки. В результате геостатистического анализа всегда получают минимум две карты – карта прогноза и карта вариации оценки кригинга. Последняя среди прочего может быть использована в задачах оптимизации сетей мониторинга, а также служить основой для квалифицированной поддержки принятия решений.

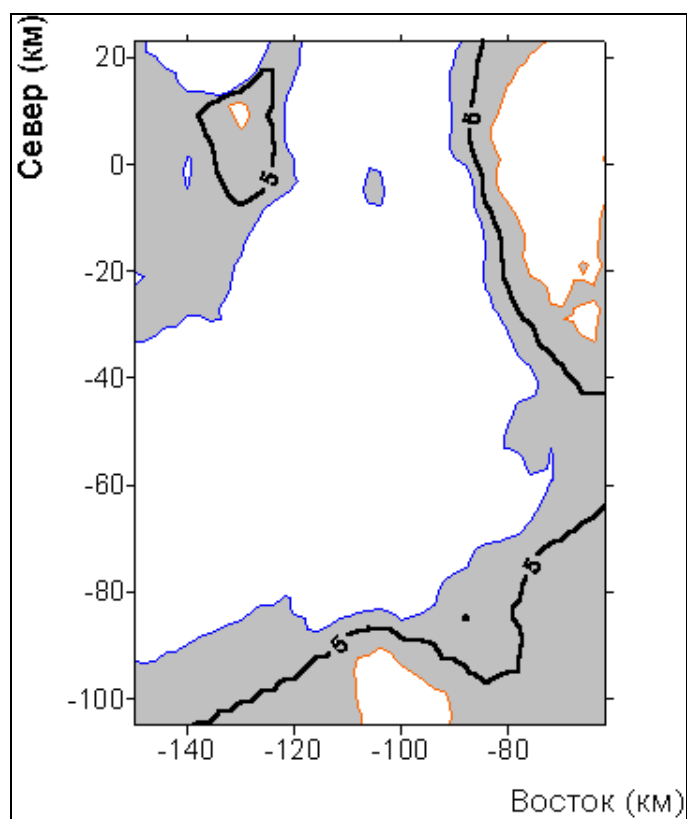


Рисунок 7. Неопределенность изолинии (5 Ки/кв.км) оценки обычного кригинга загрязнения ^{137}Cs в западной части Брянской области.

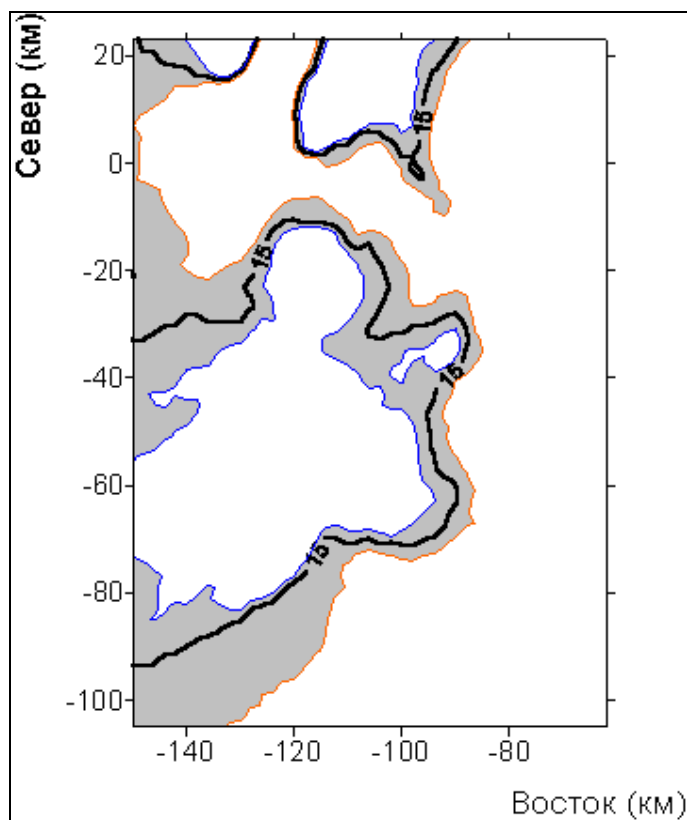


Рисунок 8. Неопределенность изолинии (15 Ки/кв.км) оценки обычного кригинга загрязнения ^{137}Cs в западной части Брянской области.

Литература

1. Goovaerts P. Geostatistics for Natural Resources Evaluation. Oxford University Press, 1997.
2. Deutsch C., Journel A.G. GSLIB. Geostatistical Software Library and User's Guide. Oxford University Press. 1992, 1996, 340p.
3. Isaaks E.H., Shrivastava R.M. An Introduction to Applied Geostatistics. Oxford University press, Oxford, 1989.
4. Cressie N. Statistics for spatial data. John Wiley & Sons, New-York, 900 p, 1991.
5. Journel A.G., Huijbregts Ch.J. Mining Geostatistics. London: Academic Press. 1978, 600 p.
6. Matheron G. Principles of Geostatistics. Economic Geology, V.58, 1963, pp.1246-1266.
7. Wackernagel H. Multivariate Geostatistics. Springer-Verlag, Berlin, 1995.
8. Арутюнян Р.В., Большов Л.А., Демьянов В.В., Каневский М.Ф., Киселев В.П., Линге И.И. Савельева Е.А. Современные методы анализа пространственно-распределенных данных радиоэкологического мониторинга. Всероссийская конференция "Радиоэкологические, медицинские и социально-экономические последствия аварии на Чернобыльской АЭС. Реабилитация территорий и населения". Тезисы докладов, 1995, с.220.
9. Арутюнян Р.В., Большов Л.А., Демьянов В.В., Каневский М.Ф., Киселев В.П., Линге И.И. Пример геостатистического анализа Чернобыльских выпадений. Препринт NSI-25-94. Москва 1994.
10. М.Ф. Каневский, Р.В. Арутюнян, Л.А. Большов, В.В. Демьянов, Е.А. Савельева, Т. Хаас. *Геостатистический подход к анализу чернобыльских выпадений*. Известия Академии Наук. Энергетика, номер 3, стр. 34-46, 1995.
11. Armstrong M. Problems with Universal kriging. Mathematical Geology, V.16, 1984, pp.101-108.
12. Cressie N. The Origins of Kriging. Mathematical Geology, V.22, No.3, 1990, pp.239-252.
13. David M. Handbook of Applied Advanced Geostatistical Ore Reserve Estimation. Elsevier Science Publishers, Amsterdam B.V., 1988, 216 p.
14. Davis B.M. Uses and abuses of cross-validation in geostatistics. Mathematical Geology, vol. 19, no. 3, 1987.
15. Dowd P.A. A review of Recent Developments in Geostatistics. Computers & Geosciences, V.17, No.10, 1992, pp.1481-1500.
16. Fedorov V.V. Kriging and other estimators of spatial field characteristics (with special reference to environmental studies). Atmospheric Environment, V.23, 1989, pp.175-184.
17. Goovaerts P. Accounting for local uncertainty in environmental decision-making process. Geostatistics Wollongong '96, ed. E.Y. Baafi, N.A. Schofield, Kluwer Academic Publishers, 1996, volume 2, pp. 928-940.
18. Journel A.G. The Deterministic Side of Geostatistics. Mathematical Geology, vol. 17, no. 1, 1985.
19. Journel A.G. Fundamentals of Geostatistics in Five Lessons. American Geophysical Union, Washington DC. 1989, 40 p.
20. Kanevsky M., Arutyunyan R., Bolshov L., Demyanov V., Kabalevskiy S., Kanevskaya E., Kiselev V., Koptelova N., Linge I., Martynenko E., Savelieva E., Serov A., Chernova S., Chernov S., Maignan M.. Soil Pollution: Environmental Integrated Systems and Prediction Mapping. Development and Application of Computer Techniques to Environmental Studies VI, eds. P. Zanetti, C.A. Brebbia, Computer Mechanics Publications, Southampton, 1996, pp. 45-56.
21. Kanevsky M., Arutyunyan R., Bolshov L., Demyanov V., Linge I., Savelieva E., Shershakov V., Haas T., Maignan M. Geostatistical Portrayal of the Chernobyl Fallout. In Geostatistics Wollongong '96, ed. E.Y. Baafi, N.A. Schofield, Kluwer Academic Publishers, 1996, volume 2, pp.1043-1054.

- 22.Kanevsky M., Arutyunyan R., Bolshov L., Demyanov V., Savel'eva E., Haas T.C. Enviromental Spatial Data Analysis. Case Study: Chernobyl Fallout. A report at 10th International Conference on Mathematical and Computer Modelling and Scientific Computing. July, 1995, Boston, USA.
- 23.Kanevsky M., R. Arutyunyan, L. Bolshov, S. Chernov, V. Demyanov, I. Linge, N. Koptelova, E. Savelieva, T. Haas, M. Maignan. Chernobyl Fallouts: Review of Advanced Spatial Data Analysis, in geoENV I — Geostatistics for Environmental Applications, ed. A. Soares, J. Gomez-Hernandes, R. Froidvaux, Kluwer Academic Publishers, 1997, pp. 389-400.
- 24.Kanevski M., R. Arutynyan, L. Bolshov, S. Chernov, V. Demyanov, E. Kanevskaya, N. Koptelova, S. Krylov, E. Martynenko, E. Savelieva. 3D prediction mapping of radioactively contaminated soils. IAMG'97 Proceedings of The Third Annual Conference of the International Association for Mathematical Geology. Ed. V. Pawlowsky Glan. Barcelona, Spain, CIMNE, 1997, ISBN 84-87867-97-9, vol. 1, p.256.