

interfaces-bookmark

interfaces-marksinterfaces-bookmark

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ ФЕДЕРАЛЬНОЕ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «КАЗАНСКИЙ
(ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ ИМ. Н.И.
ЛОБАЧЕВСКОГО КАФЕДРА АЭРОГИДРОМЕХАНИКИ

Направление подготовки (специальность): 01.04.03 - Механика и математическое моделирование

Профиль (специализация, магистерская программа): Механика жидкости газа и плазмы

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

ГЕНЕРАЦИЯ ТУРБУЛЕНТНОГО ПОЛЯ СКОРОСТИ ДЛЯ ВХОДНЫХ
ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

На правах рукописи
УДК *xxx.xxx*

Фамилия Имя Отчество автора

НАЗВАНИЕ ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ

Специальность *XX.XX.XX* —

«*Название специальности*»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
уч. степень, уч. звание
Фамилия Имя Отчество

Город — 20XX

Оглавление

	Стр.
Введение	4
Глава 1. Метод стохастического Гауссова моделирования	7
1.1 Обзор метода стохастического Гауссова моделирования	7
1.2 Математическая модель метода стохастического Гауссова моделирования	9
1.3 Метод кокригинга для генерации флуктуаций скоростей	12
Глава 2. Спектральный метод генерации синтетической турбулентности	17
2.1 Метод Крайхнана	20
2.2 Метод Смирнова генерации синтетической турбулентности	22
2.3 Метод Хуанга генерации синтетической турбулентности	26
2.4 Метод Шура генерации синтетической турбулентности	31
Глава 3. Валидация спектрального метода генерации синтетической турбулентности	35
Глава 4. Валидация стохастического метода генерации синтетической турбулентности	43
Заключение	63

Введение

Одной из актуальных задач вычислительной аэрогидромеханики в части моделирования движения флюидов является генерация турбулентных флуктуаций для входных потоков на уровне граничных условий. Не менее актуально и применение генерации турбулентных флуктуаций на поверхностях (интерфейсах) раздела или границах областей математических и вычислительных моделей, отличающихся методом моделирования.

Применение методов генерации турбулентных флуктуаций позволяет компенсировать недоставки широко применяемого метода набегающего ламинарного потока в части прогнозирования значений интегральных параметров и минимизации вычислительных и временных затрат. Развитие и оптимизация алгоритмов генерации турбулентных флуктуаций позволит (обеспечит) в перспективе не только снизить расчетные и временные затраты на моделирование, но и повысить точность предсказания интегральных характеристик потоков. В частности, реальный поток флюида, будь то движение смесей в трубах, или обтекание профилей, имеет турбулентный характер. Поэтому генерация турбулентных флуктуаций может сократить разрыв между модельным экспериментом и исследуемой физической системой.

Таким образом, целью научно-исследовательской работы является разработка алгоритма для генерации турбулентных флуктуаций.

В соответствии с целью НИР предполагается решить следующие задачи:

1. Разработка математического базиса, для наиболее четкого задания турбулентных флуктуаций, от чего зависит область адаптации турбулентности
2. Программирование алгоритма. Данная задача подразумевает, выбор языка программирования, разработку архитектуры программы, интеграция с существующими коммерческими и открытыми пакетами вычислительной гидродинамики.
3. Валидация алгоритма на удовлетворение задаваемым условиям

Среди известных подходов для генерации турбулентного потока имеется: использование более простых характерных течений, рециркуляция турбулентности, генерация синтетической турбулентности, искусственное форсирование

или введение объемных источников, введение генераторов вихрей. Каждый из данных подходов имеет свои достоинства и недостатки, но среди всех, особенно отличается подход генерации синтетической турбулентности STG (synthetic turbulence generation). Данный подход уже сейчас активно используется в решении современных комплексных задач моделирования сложных течений. По сравнению с остальными имеет такие привлекательные характеристики как: малая зона адаптации, возможность контроля паразитных шумов. С физической стороны, данный алгоритм позволяет удовлетворить наперед заданным спектрам и характеристикам турбулентности.

В основе метода генерации синтетической турбулентности лежит представление флуктуаций компонент скоростей течения в виде конечных рядов Фурье. Большое число параметров таких как: амплитуды гармоник, волновые числа, частоты – позволит более точно удовлетворять требуемому спектру и характеристикам турбулентности, от чего зависит качество турбулентности. Помимо этого, данный метод не требует дискретизации по конечно-элементной сетке, так как флуктуации заданы в виде пространственно-временного ряда, вычисляемого в любой точке пространства и любой момент времени.

Также помимо метода генерации синтетической турбулентности можно использовать метод стохастического Гауссова моделирования. С помощью данного метода можно также получить поле скоростей удовлетворяющее заданному энергетическому спектру. В отличии от методов генерации синтетической турбулентности, где есть возможность генерировать флуктуации в любой точке, метод стохастического моделирования требует решения сеточного уравнения, в конечном этоге решение задачи на собственные числа и векторы матрицы. Для генерации с использованием данного подхода требуется больше вычислительных ресурсов, но этап генерации более быстр. Также результатирующее поле лучше удовлетворяет заданным критериям.

В конечном итоге, необходимо провести сравнение методов, как по вычислительной сложности и требованию ресурсов вычислительной машины, так и на удовлетворение поставленной задаче. Метод генерации синтетической турбулентности используется для сравнения предлагаемого стохастического метода, в следствии его большей распространённости в литературе и в современных пакетах вычислительной гидродинамики.

Проведение сравнения двух описанных ранее методов позволит наметить направление на улучшение методов, возможно их объединение, либо выборе одного более предпочтительного для дальнейшего исследования, а также валидации на примере некоторых реальных течений, что в будущем позволит существенно изменить подход к моделированию турбулентных потоков.

Глава 1. Метод стохастического Гауссова моделирования

1.1 Обзор метода стохастического Гауссова моделирования

Наиболее часто применения метода стохастического Гауссова моделирования можно найти в геофизических задачах для проведения интерполяции некоторых величин в меж скважном пространстве[[chung2019supplement](#)]. Практика применения данного метода исходит из того факта, что большинство физических величин, которые наиболее простым или доступным способом могут быть измерены, не могут дать вполне четкой картины о распределении косвенно зависящих параметров. Поводом для этого может служить например небольшой набор исходных данных, сильная пространственная разреженность измерений. Интерполяция измеренных данных на протяжении интересующей области, в следствии выше сказанного, играет важную роль в процессе освоения нефтяных пластов, если касаться одного из возможных применений рассматриваемого метода.

В общем случае, имеется достаточно большой набор методов, с помощью которых можно провести интерполяцию данных, помимо упомянутого метода стохастического моделирования, это, например, методы линейной интерполяции, полиномиальная интерполяция (Лагранжевы многочлены). Близко к полиномиальным методам интерполяции можно отнести сплайн-функции и их частный случай, довольно распространённые кубические сплайны. Примерами, относящимися к многомерной интерполяции могут служить: билинейная интерполяция, бикубическая интерполяция.

Имеется достаточно большой выбор разнородных методов интерполяции, но из них выделяется рассматриваемый в данной главе метод интерполяции — метод стохастического моделирования — одним из названий которого также является кригинг, а также метод Винера-Колмогорова. Основная идея данного метода состоит в использовании некоторого Гауссова процесса для интерполяции известных значений по критерию минимизации среднеквадратичного отклонения на основе матрицы ковариации, и также для оптимизации гладкости интерполируемых значений

Часто выделяют тот факт, что метод кригинга удовлетворяет условию наилучшего линейного несмешённого предсказания (BLUP - best linear unbiased prediction). Данный термин был введён для оценки случайных величин в линейных смешанных моделях. Есть близкий, практически эквивалентный термин - "лучшая линейная несмешенная оценка" (BLUE - best linear unbiased estimation) для заданных случайных величин, возникающий как часть известной теоремы Гаусса-Маркова [Rasmussen]. Данная теорема гласит, что обыкновенная оценка наименьших квадратов (OLS - ordinary least squares) имеет наименьшую дисперсию выборки в классе несмешённых оценок, если ошибки линейной регрессионной модели некоррелированы, имеют нулевое математическое ожидание и равные дисперсии. Различие BLUP и BLUE заключается в том, что в случае BLUP подразумевается оценка прогнозирования случайных величин, в случае BLUE, говорят об оценке случайной величины. Данный критерий (BLUP) может не выполняться для других методов описанных выше, например для метода сплайнов. Так как определение флюктуации компонент скоростей, из её физического смысла, подразумевает то, что её математическое ожидание равно 0, подразумевая осреднение как по времени, так и по пространству, автоматически удовлетворяется одно из условий теоремы. Удовлетворение другим условиям теоремы будет рассмотрено далее.

Метод кригинга, как и спектральный метод, относится к классу недетерминистических методов, то-есть стохастических методов. Оба метода не используют в основе какую-то жесткую модель, в большей своей степени, вводя зависимость от некоторого случайного процесса, в предположении, характеризующего некоторый реальный процесс распределения физической величины. Метод кригинга имеет больший упор на удовлетворение пространственной ковариации, так как генерируемая случайная переменная Z описывает разброс вокруг неизвестного неизмеренного значения z .

1.2 Математическая модель метода стохастического Гауссова моделирования

В данной части рассмотрим основы метода кригинга. Как говорилось ранее метод кригинга является интерполяционным методом. Это означает, что перед нами стоит задача интерполировать некоторую функцию $f_i = f(\vec{r}_i)$, где f_i — известный набор значений интерполируемой функции в точках \vec{r}_i . Проведение интерполяции подразумевает под собой нахождение функции F по определению:

$$\bar{f}(\vec{r}) = F(\vec{r}, \{f_i\}, \{\vec{r}_i\}) \quad (1.1)$$

, где $\bar{f}(\vec{r})$ — проинтерполированной функции в точке пространства с радиус-вектором \vec{r} , F - функция интерполятор, определяющая правило интерполяции известных значений, f_i - набор известных значений, \vec{r}_i - точки в которых определены эти значения. Как видно из вводимого определения интерполятор F зависит от $2N + 1$ значений, где N — число известных значений. На F накладывается естественное условие точного совпадения значений в известных точках, или

$$\bar{f}_j = F(\vec{r}_j, \{f_i\}, \{\vec{r}_i\}) \quad (1.2)$$

В формуле (1.2): $\bar{f}_j = \bar{f}(\vec{r}_j)$ и $j = \overline{1..N}$, что представляет собой N условий налагаемых на функцию F .

В общем случае, вид функции F не известен, поэтому необходимо применить упрощения. Например, на порядок членов входящих в эту функцию. Наиболее часто встречаемый вид — это линейная зависимость. Как упоминалось выше, кригинг — линейный метод, поэтому применительно к нашему случаю мы будем строить интерполятор вида:

$$\bar{f} = \sum_i f_i w_i(\vec{r}) \quad (1.3)$$

, где $f_i = f(\vec{r}_i)$ — уже ранее упомянутые известные значения функции, $w_i(\vec{r})$ - веса привязанные к значениям f_i .

Стоит отметить, что в более общей формулировке мы имеем:

$$\bar{f}(\vec{r}) - E(\bar{f}(\vec{r})) = \sum_i w_i(\vec{r})(f(\vec{r}_i) - E(f(\vec{r}_i))) \quad (1.4)$$

Введём общепринятое обозначения для средней величины: $m(\vec{r}) = E(\bar{f}(\vec{r}))$ и $m(\vec{r}_i) = E(f(\vec{r}_i))$, тогда:

$$\bar{f}(\vec{r}) - m(\vec{r}) = \sum_i w_i(\vec{r})(f(\vec{r}_i) - m(\vec{r}_i)) \quad (1.5)$$

Здесь $\bar{f}(\vec{r})$ — оценка значения неизвестной функции $f(\vec{r})$. По сравнению с (1.3) учитывается, что математическое ожидание для $\bar{f}(\vec{r})$ и для f_i могут быть не равны нулю. Но даже в таком случае обычно представляют функцию в виде $g(\vec{r}) = m(\vec{r}) + \xi(\vec{r})$, где $m(\vec{r})$ — среднее трендовое значение, $\xi(\vec{r})$ — случайная составляющая, таким образом приходя к уравнению (1.3). Здесь предполагается что $\xi(\vec{r})$ такая, что $E(\xi(\vec{r})) \equiv 0$, также стоит отметить что в таком случае: $E(g(\vec{r})) = m(\vec{r})$, то-есть среднее искомой функции есть трендовое значение.

Рассмотрим значение ошибки получаемое в случае использования (1.4):

$$R(\vec{r}) = \bar{f}(\vec{r}) - f(\vec{r}) \quad (1.6)$$

Как говорилось ранее метод удовлетворяет условию BLUE — условие не смещённости оценки, то-есть $E(r) = 0$. Это можно показать прямой подстановкой:

$$\begin{aligned} E(R(\vec{r})) &= E(\bar{f}(\vec{r}) - f(\vec{r})) = E(\bar{f}(\vec{r})) - E(f(\vec{r})) \\ &= E(m(\vec{r}) + \sum_i w_i(\vec{r})(f(\vec{r}_i) - m(\vec{r}_i))) - m(\vec{r}) = 0 \end{aligned} \quad (1.7)$$

Слагаемые отвечающие за математическое ожидание взаимоуничтожаются по определениям введённым выше, слагаемые внутри суммы также взаимоуничтожаются, что в конечном итоге приводит к нулевому математическому ожиданию оценки ошибки. Таким образом мы удовлетворили одному из пунктов теоремы Гаусса-Маркова строго. Далее приведём доказательство удовлетворению остальным пунктам теоремы.

Необходимо доказать, что построенный таким образом метод имеет наименьшую дисперсию в классе несмешённых оценок

Далее введём в рассмотрение функцию пространственной ковариации:

$$Cov(\xi(\vec{r}), \xi(\vec{r} + \vec{h})) = C_\xi(\vec{h}) = E((\xi(\vec{r}) - E(\xi(\vec{r}))) \cdot (\xi(\vec{r} + \vec{h}) - E(\xi(\vec{r} + \vec{h})))) \quad (1.8)$$

Данная функция нужна нам для внесения самосогласованности в метод. При рассмотрении формулы (1.3) можно заметить, что нет зависимости между соседними точками. Из-за этого возникает сильное изменение решения при появлении дополнительных точек. Но, если до этого момента не было необходимости рассматривать решение систем алгебраических уравнений, так как не присутствовало связности между соседними узлами, то теперь внесём её за счёт учета некоторого расстояния между точками.

$$\bar{f}(\vec{r}) = \sum_i \lambda_i \Omega(\vec{r} - \vec{r}_i) \quad (1.9)$$

здесь λ_i – некоторый весовые коэффициенты, которые необходимо будет подобрать в ходе решения, $\Omega(\vec{r} - \vec{r}_i)$ – базисная функция монотонно убывающая с увеличением расстояния между точками. Как и ранее для известных значений мы должны получать тождество.

$$\bar{f}_k = \sum_i \lambda_i \Omega(\vec{r}_k - \vec{r}_i) \quad (1.10)$$

В итоге имеется система линейных уравнений для вычисления весовых коэффициентов λ . В матричном виде:

$$\bar{F} = \Omega \cdot \Lambda \quad (1.11)$$

Решением будет являться:

$$\Lambda = \Omega^{-1} \bar{F} \quad (1.12)$$

Если подставить (1.12) в (1.10) можно избавиться от параметра λ .

$$\bar{f}(\vec{r}) = \sum_i f_i \cdot \sum_n [\Omega_{in}^{-1} \cdot \omega(\vec{r}_n - \vec{r})] \quad (1.13)$$

Требование к выполнению условия, что в известных точках получаются точные известные значения, также выполняется.

$$\bar{f}(\vec{r}_i) = \sum_i f_i \cdot \sum_n [\Omega_{in}^{-1} \cdot \omega(\vec{r}_n - \vec{r}_i)] = f_i \quad (1.14)$$

1.3 Метод кокригинга для генерации флюктуаций скоростей

Метод кригинга изначально не учитывает возможные дополнительные корреляции с другими величинами. Это может сыграть роль для уточнения данных, так как зачастую при проведении физических экспериментов или измерений, измеряют сразу несколько величин. Так как кригинг наиболее часто используется в геологическом моделировании наиболее простым примером является измерение пористости и проницаемости или какого-нибудь другого набора параметров. Так мы можем дополнить модель используя ковариации между измеряемыми величинами, до этого момента мы рассматривали лишь корреляцию случайной величины сама с собой. Корреляция двух случайных величин представляется в виде:

$$cov(\xi, \zeta) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (\xi_n - \bar{\xi}) * (\zeta_n - \bar{\zeta}) \quad (1.15)$$

По аналогии с обычным методом кригинга, дополним модель дополнительным учётом зависимости между переменными. Оценим функцию z в окрестности точки \vec{r}_0 .

$$\overline{z_{\alpha_0}}(\vec{r}_0) = \sum_{\alpha=1}^K \sum_{i=1}^{n_{\alpha}} \lambda_i^{\alpha} z_{\alpha}(\vec{r}_i) \quad (1.16)$$

, здесь $\overline{z_{\alpha_0}}(\vec{r}_0)$ – оценка в виде линейной комбинации различных переменных в окрестности точки \vec{r}_0 , λ_i^{α} – весовые коэффициенты. Как и обычный кригинг, кокригинг также должен удовлетворять условию несмещённости для построенной оценки (1.16).

$$\begin{aligned}
E \{ \overline{z_{\alpha_0}}(\vec{r}_0) - z_{\alpha_0}(\vec{r}_0) \} &= E \left\{ \sum_{\alpha=1, \alpha \neq \alpha_0}^K \sum_{i=1}^{n_\alpha} \lambda_i^\alpha z_\alpha(\vec{r}_i) + \sum_{i=1}^{n_{\alpha_0}} \lambda_i^{\alpha_0} z_{\alpha_0}(\vec{r}_i) - z_{\alpha_0}(\vec{r}_0) \right\} \\
&= \sum_{\alpha=1, \alpha \neq \alpha_0}^K \left(m_\alpha \sum_{i=1}^{n_{\alpha_0}} \lambda_i^\alpha \right) + m_{\alpha_0} \left(\sum_{i=1}^{n_{\alpha_0}} \lambda_i^{\alpha_0} - 1 \right) = 0
\end{aligned} \tag{1.17}$$

Также дополним условие (1.2), веса должны быть подобраны таким образом, чтобы при основной переменной с индексом α_0 были равны 1, при любых других переменных, не соответствующих основной, коэффициенты должны быть равны нулю, то есть:

$$\sum_{i=1}^{n_\alpha} \lambda_i^\alpha = \delta_{\alpha\alpha_0} \tag{1.18}$$

При учёте ограничивающих выражений (1.3), получаем следующую систему уравнений для *обычного* кокригинга:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{\beta=1}^K \sum_{j=1}^{n_{\beta i}} \lambda_j^\beta \gamma_{\alpha\beta}(\vec{r}_i - \vec{r}_j) + \mu_i = \gamma_{\alpha\alpha_0}(\vec{r}_i - \vec{r}_{i0}), \alpha = 1, \dots, K, i = 1, \dots, n_\alpha \\ \sum_{i=1}^{n_\alpha} \lambda_i^\alpha = \delta_{\alpha\alpha_0}, \alpha = 1, \dots, K, i = 1, \dots, n_\alpha \end{array} \right.$$

Таким образом используя систему 1.3 мы можем построить поле случайной величины удовлетворяющей некоторой заданной функции ковариаций. В качестве опорных точек для генерации можно взять, например, последовательность нормально распределённых чисел. Это не будет противоречить постановке задачи кригинга из-за в целом построения случайного процесса и в то же время внесёт дополнительную либо случайную составляющую, либо мы можем взять значения с некоторого поля и решить задачу аппроксимации кригингом для неё.

Задача кригинга и кокригинга требует в качестве входных данных либо аналитически заданную функцию ковариаций, либо её сеточную аппроксимацию. Основная проблема в том, чтобы каким-то образом перейти от энергетического спектра к ковариационной функции. Следуя из определения для энергетического спектра [popе2000turbulent] можно обратными преобразованиями перейти от энергетического спектра к ковариационной функции:

$$\Phi_{ij}(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint_{-\infty}^{\infty} R_{ij}(\vec{r}) \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{r}) d\vec{r} \quad (1.19)$$

$$R_{ij}(\vec{r}) = \iiint_{-\infty}^{\infty} \Phi_{ij}(\vec{k}) \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r}) d\vec{k} \quad (1.20)$$

Функция ковариаций и тензор спектра скоростей связаны через преобразование Фурье. В связи с этим на функцию Φ накладываются некоторые ограничения связанные с определением функций ковариации. Так компоненты этого тензора с $i = j$ должны быть вещественными, то-есть $\Phi_{ii}(\vec{k}) == \Phi_{ii}^*(\vec{k})$. Также помимо этого в силу определения преобразования Фурье, компоненты тензора должны быть симметричными, то-есть $\Phi_{ij}(\vec{k}) = \Phi_{ji}^*(\vec{k}) = \Phi_{ji}(-\vec{k})$. Это также требует точной симметрии функции компонент тензора ковариаций, дабы удовлетворить сказанному выше условия вещественности его значений.

Энергетический спектр турбулентности выражается через диагональные компоненты тензора спектра скоростей следующей зависимостью:

$$E(k) = \oint \frac{1}{2} \Phi_{ii}(\vec{k}) d\Omega(k) \quad (1.21)$$

В данном случае переход от энергетического спектра к тензору не является явным и требует дополнительных предположений и условий. Переход от $\Phi_{ij}(\vec{k})$ можно осуществить численным интегрированием, либо при наличии функции $E(k) = F(\Phi_{ij}(\vec{k}))$ осуществив обратное разрешение относительно компонент тензора.

В конечном итоге, имеем алгоритм основными этапами которого является:

1. Построить тензор Φ_{ij} по заданной функции $E(k)$;
2. Перейти от тензора Φ_{ij} к тензору ковариаций R_{ij} ;
3. Построить матрицу ковариаций на основе полученного тензора спектра скоростей Φ_{ij} ;
4. Найти собственные значения и собственные вектора полученной матрицы ковариаций;
5. Построить поле скоростей базируясь на сгенерированной последовательности чисел и на полученных собственных значениях и векторах.

Наиболее длительным и затратным по вычислительным ресурсам и времени является процесс нахождения собственных чисел и векторов матрицы ковариаций. В среднем вычислительная сложность алгоритмов как итерационных,

так и точных составляет $O(N^2)$. Если не использовать приемы для разряжения этой матрицы понадобится хранить $3 \cdot N^3$, где N – число узлов в сетке вычислительной области, не считая данных для сборки это глобальной матрицы. Но стоит отметить, что сама процедура генерации является очень простой и происходит быстро, так как нам необходимо всего лишь просуммировать полученные значения. Если решить задачу один раз и сохранить полученные собственные вектора и числа можно достаточно эффективно генерировать турбулентные поля скоростей.

Для осуществления матричных преобразований используется библиотека "Armadillo" предоставляющая C++ API для работы с различными типами матриц, а также алгоритмов связанных с ними, например нахождение собственных чисел и значений для матриц [sanderson2016armadillo; sanderson2018user]. Помимо этого, библиотека также имеет функционал для генерации не только обычных последовательной случайных чисел, но также и коррелированных например по многомерному нормальному распределению.

Можно значительно ускорить описанный выше метод если использовать метод последовательного моделирования Гаусса. В общем, можно охарактеризовать метод последовательного моделирования, как разбиения рассматриваемой области на подобласти и проведение в ней стохастического моделирования. Основной сложностью является возникающие поверхности разделения на подобласти, необходимо учесть это, что бы не получать разрывы функций на этих поверхностях.

Как и в рассматриваемых не последовательных процедурах, в случае последовательного моделирования так же рассматривается набор точек \vec{p}_i , для которых известны значения v_i . Требуется рассчитать значение в некоторой точке \vec{q}_i при задаваемой пространственной ковариации $C(\vec{h})$ и среднем значении $\langle v \rangle$, в нашем случае, из физического смысла флюктуаций, задача упрощается, так как $\langle v' \rangle = 0$. Так же используя процедуру кригинга приходим к задаче:

$$\hat{A}\vec{x} = \vec{b} \quad (1.22)$$

$$A_{ij} = C(\vec{p}_i - \vec{q}_i) \quad (1.23)$$

$$b_i = C(\vec{p}_i - \vec{q}) \quad (1.24)$$

Как и в обычном подходе, СЛАУ также учитывает точное совпадение значений v_i в точках p_i . Из постановки выше следует что $E(u) = \sum_i x_i \cdot v_i + < v >$, причём $< v >$ - заданный параметр, и $Cov(v) = \sum_i x_i \cdot b_i + C(0)$, где $C(0)$ – также известный задаваемый параметр.

Как говорилось выше, вычислительная область подразделяется на подобласти. Так как расчёт ведётся на сетке, мы можем рассматривать не подобласть, а набор ближайших соседей узлов на сетке, тем самым, вводя новый параметр N – число ближайших соседей к рассматриваемой точке.

Так процедура последовательного моделирования может быть представлена в виде следующих шагов:

1. Выбирается случайная точка на сетке;
2. Ищется N ближайших к ней соседей с уже посчитанными значениями среднего и ковариации;
3. Строим матрицу $N \times N$ и решаем СЛАУ по методу описанному ранее методу, рассчитываем среднее и ковариацию в этой точке;
4. Зная среднее и ковариацию генерируем случайное число из Гауссова распределения $N(E(v), Cov(u))$;
5. Добавляем значение в массив известных.

Процедура может несколько отличаться для случаев если v – является вектором. В данном случае мы можем рассматривать два пути решения этой проблемы. Первый из них, не видоизменять алгоритм, работать с векторными и матричными величинами, в итоге среднее и ковариация являются вектором и матрицей соответственно. Окончательное значение для этих параметров находится из стохастического моделирования. Второй подход заключается в учёте каждой точки столько раз, сколько значений в векторе v , так например для поля флюктуаций у которого в каждой точке по 3 компоненты имеется по 3 одинаковые точки с различными значениями.

Глава 2. Спектральный метод генерации синтетической турбулентности

На сегодняшний момент существует достаточно много методов задания турбулентных флюктуаций на входных границах или на границах раздела между двумя подобластями вычислительной области с различными моделями. Их можно подразделить, например, по необходимости в сторонних сопутствующих моделирования, по способу генерации и так далее. Например, в [shur2014synthetic] методы генерации разделяют на 5 групп: методы использующие сторонние вычислительные эксперименты, методы переноса турбулентности, методы генерации «синтетической» турбулентности, метод введения объемных источников, метод введения генератора вихрей. Методы относящиеся к каждой из этих групп имеют различные недостатки и достоинства, некоторые из которых будут описаны далее. В первую очередь необходимо обратить внимание на такие аспекты как: область адаптации – то есть область, необходимая для перехода от сгенерированного турбулентного поля к полю, удовлетворяющему уравнениям движения, число вводимых (используемых) параметров. Так же необходимо уделить внимание к программному «дизайну»; вычислительная сложность алгоритма, требуемая память, возможность к распараллеливанию, общая гибкость алгоритма.

К методам, использующим сторонние вычислительные эксперименты, относят те методы, для которых необходимо проводить стороннее моделирование, не связанное с основным. Идея состоит в том, чтобы использовать флюктуации компонент скоростей (нормализованные/перемасштабирование) из стороннего моделирования с целью переноса их на основное моделирование. Стороннее моделирование может проводиться на более простом, характерном, случае. Например, при моделировании потоков в трубах с обтеканием препятствий можно использовать данные из потока в трубе без обтекания препятствий. Обычно такие сторонние моделирования проводят методами DNS или хорошо разрешённым LES. В данном случае достоинствами данного метода является достаточно реалистичная турбулентность, вследствие чего обеспечивается достаточно высокая точность моделирования. С другой стороны, существенным минусом является необходимость в стороннем моделировании, что ведёт за собой дополнительные

временные и вычислительные затраты. Большинство моделей используемых в данном методе имеют небольшие вычислительные области, в то время как многие другие геометрии потоков будут много больше имеющихся вычислительных областей. Это поведет за собой использование периодичности замощения всей необходимой вычислительной области, что поведет за собой разрывы, увеличивающие область адаптации.

Впервые метод переноса турбулентности (рециркуляции) был использован в 1998 [**lund1998generation**]. Идея метода достаточно проста: перенос турбулентного поля потока ниже по течению на входную границу. Перенос поля скоростей осуществляется с соответствующими изменениями масштабов, что может быть достаточно сложной задачей. Создаваемая турбулентность высокого качества приводит к очень малой толщине зоны адаптации, в несколько раз превышающей толщину пограничного слоя. Данный подход получил достаточно большое развитие, в частности построения модели масштабирования и адаптации к полностью связанным методам RANS-LES [**araya2011dynamic; shur2011rapid; spalart2006direct**]. Тем самым данный подход является более предпочтительным по сравнению с предыдущим. Однако данный подход не обошелся без недостатков. Сложность построения модели масштабирования при больших градиентах давлений. Также важной проблемой является инициализация начального поля скоростей для быстрого установления развитой турбулентности для использования данного метода, так что нельзя сказать, что данный метод самодостаточен. Также из-за вводимой рециркуляции в спектре, при моделировании задач аэроакустики, присутствуют паразитные вторичные пики на частоте рециркуляции $f_{recycl} \approx U_{conv}/L_{recycl}$ (U_{conv} - является характеристической скоростью конвекции).

Один из подходов метода введения объемных источников (Объемных Источников Турбулентных Пульсаций ОИТП) изначально базировался как улучшение метода вихрей (Vortex Method VM) [**gritskevich2012embedded**]. Метод основан на введении в управляемые уравнение специально сконструированных членов, отражающих объемный источник. Расположение этих источников влияет на создание турбулентных пульсаций ниже по течению. Основным преимуществом данного подхода является свобода выбора в расположении такого источника, а также независимость от способа разбиения вычислительной области. Помимо этого, данный метод имеет потенциал для использования в задачах аэро-

акустики для уменьшения паразитного шума, возникающего в следствии внезапного возникновения турбулентности, за счет увеличения мощности такого источника в направлении по потоку. Данный метод пока не так популярен, вследствие чего имеется не так много работ, по которым можно оценить перспективы данного метода. Второй подход (STG-DCF) базировался на методах «синтетической» генерации (STG, synthetic turbulence generation) в купе с техникой динамического управления (DCF, dynamic control forcing)[**spille2001generation**]. Идея состоит в том, чтобы размесить источники в наборе управляющих плоскостей. Мощность источников пропорциональна разности между текущими значениями целевых величин с величинами, известными из эксперимента или другого моделирования. Это позволяет проводить быструю и точную настройку метода. Достоинством данного метода является малая зона адаптации, при небольших градиентах давления. Основной сложностью является реализация алгоритма в программный код и значительное усложнение алгоритма в целом.

Метод генерации вихрей имеет схожую идею с предыдущим методом, а именно помещение в вычислительную область не объемного источника, а источника вихрей[**lin1999control**]. Такие источники имеют схожесть с теми, что используются экспериментально для нивелирования эффектов, связанных с пограничными слоями. Данный метод имеет небольшие вычислительные затраты, а также малые вносимые шумы в результирующий спектр. Основным недостатком является высокая длина зоны адаптации. Помимо этого, сложно подобрать оптимальную форму таких источников.

Метод генерации синтетической турбулентности на данный момент является наиболее подходящим для моделирования сложных потоков как в задачах промышленности, так и для научных исследований. Идея метода была заложена ещё в 1970 году Крайхнаном[**Kraichnan70**]. Основная идея метода заключается в генерации турбулентных пульсаций извне. Например, как в работе Крайхнана, от которой данный метод берет начала, генерация пульсаций ведется на базе представления пульсаций в форме конечного ряда гармонических функций. Метод имеет множество ответвлений, затрагивающих различные аспекты алгоритма[**adamian2011efficient; huang2010general; shur2011rapid; shur2014synthetic**]. Метод может представлять собой простое использование белого шума для генерации турбулентных пульсаций или может содержать в себе сложный математический аппа-

рат создающий более реалистичный характер турбулентности. Такой подход к STG может иметь толщину зоны адаптации в несколько толщин пограничного слоя. Существует ещё один класс генераторов подобного типа, основанный на создании когерентных турбулентных структур с заданными размерами и формами[5–7, 11, 18][**jarrin2006synthetic**; **klein2003digital**; **kornev2007method**; **di2006synthetic**; **veloudis2007novel**], но в этом случае наблюдается более большой размер области адаптации. Первый тип из подобных генераторов является наиболее предпочтительным по следующим причинам:

1. Устойчивость алгоритма к топологии сетки;
2. Нет необходимости в имплементации алгоритма в сам решатель уравнений движения – генерируемые флюктуации создаются вне основного решения;
3. Возможности к параллельной реализации алгоритма;
4. Возможности к вариации параметров и изменению алгоритма для получения большей точности;
5. Гибкость алгоритма между затратами процессорного времени и требуемой памятью;
6. Достаточно простая реализация алгоритма в программном коде.

Из недостатков можно отметить зависимость алгоритма от данных, получаемых из эксперимента либо стороннего решения для получения максимальной точности. Алгоритму необходимые такие параметры как: тензор напряжений Рейнольдса, пространственный масштаб турбулентности, временной масштаб турбулентности, энергетический спектр. В целом, данные параметры могут задаваться не из эксперимента, задаваясь вручную для достижения тех или иных характеристик. Также могут понадобиться некоторые эмпирические константы для более сложных имплементаций алгоритма.

2.1 Метод Крайхнана

Начало методу генерации синтетической турбулентности было дано в работе Крайхнана в 1970 году [**Kraichnan70**], рассматривая непрерывное, статистически стационарное, однородное, изотропное, многомерное нормально рас-

пределённое поле скоростей $\vec{u}(\vec{x}, t)$. Изначально алгоритм базируется на моделировании случайного блуждания частицы на основе описания эволюции такой статистической системы на основе функций Грина. Необходимая часть постановки это полученные аналитические функции спектров, которые будут показаны в дальнейшем. Представление функции в виде ряда Фурье, в свою очередь, часто используют для решения уравнений мат физики, в частности, например, уравнение Навье-Стокса, с помощью перехода в пространство Фурье. Основной идеей метода является представление флуктуаций скоростей в виде конечного ряда Фурье с использованием полученных спектров.

$$\vec{u}(\vec{x}, t) = \sum_{n=1}^N \left(\vec{p} \cos(\vec{k}_n \cdot \vec{x} + \omega_n t) + \vec{q} \sin(\vec{k}_n \cdot \vec{x} + \omega_n t) \right) \quad (2.1)$$

, где $\vec{u}(\vec{x}, t)$ — генерируемый вектор флуктуации скорости в точке \vec{x} в момент времени t , N число мод Фурье, \vec{k}_n и ω_n - волновые вектора и частоты, которые, в свою очередь, генерируются так, чтобы удовлетворять желаемому спектру $E(\vec{k}_n)$. Амплитуды каждой из мод задаются по следующим правилам: $\vec{p}_n = \vec{k}_n \times \vec{\xi}_n$ и $\vec{q}_n = \vec{k}_n \times \vec{\zeta}_n$. В этом определении вектора \vec{x}_n и $\vec{\zeta}_n$ задаются независимо из двумерного или трёхмерного распределения Гаусса вида:

$$f_X(x_1, \dots, x_k) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^k |\Sigma|}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\vec{x} - \vec{\mu})(\Sigma)^{-1}(\vec{x} - \vec{\mu})\right) \quad (2.2)$$

, где k - размерность (2 или 3), \vec{x} - вектор-столбец размерности k , $\vec{\mu}$ - среднее значение случайного вектора \vec{x} , Σ - матрица ковариации (обобщенная матрица ковариации), $|\Sigma| \equiv \det(\Sigma)$ - определитель матрицы ковариации. Все случайные величины входящие в данное выражение имеют гауссово распределение. Авторы отмечают что в пределе $N \rightarrow \infty$ конечные компоненты флуктуаций также должны иметь нормальное распределение.

Частоты ω_n , в свою очередь, выбираются из одномерного Гауссова распределения со среднеквадратичным отклонением равным ω_0 .

В работе Крайхнана волновые вектора \vec{k}_n выбираются из статистически изотропного распределения так, что в пределе $N \rightarrow \inf$ достигается желаемый спектр $E(\vec{k}_n)$. В статье предлагается следующие аналитические выражения для

спектра $E(\vec{k}_n)$.

$$\begin{aligned}
 E_1(k) &= \frac{3}{2}v_0^2\delta(k - k_0) \\
 E_2(k) &= 16 \cdot \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}v_0^2k_0^{-5} \exp(-2 \cdot k^2/k_0^2) \\
 E_3(k) &= v_0^2\delta(k - k_0) \\
 E_4(k) &= 4.5 \cdot k_0^{-4}k^3 \exp\left(-\frac{3}{2} \cdot k^2/k_0^2\right)
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

, где v_0 - среднеквадратичное отклонение флюктуации скорости в любом направлении. Так для случая E_1 и E_3 векторы \vec{k}_n изотропно распределены по сфере радиусом k_0 (трёхмерный случай), двумерному случаю соответствуют спектры E_2 и E_4 для которых волновые векторы \vec{k}_n распределены по окружности радиуса k_0 . В случае спектров E_1 и E_3 значение k_0 определяет положение всплеска дельта-функции. Для спектра E_2 значение k_0 используется в генерации волновых векторов \vec{k}_n для вычисления среднеквадратичного отклонения равное $\frac{k_0}{2}$. Для спектра E_4 значение k_0 играет ту же самую роль, что и для спектра E_2 , но среднеквадратичное отклонение берется равным $\frac{k_0}{\sqrt{3}}$. Каждый из рассматриваемых спектров имеет пик при значении $k = k_0$. Форма спектров отвечает за степень возбужденности спектра в пространстве волновых векторов.

Отметим важное свойство следующие определения амплитуд мод Фурье для выражения 2.1. По правилу векторного умножения имеем что: $\vec{k}_n \cdot \vec{p}_n = \vec{k}_n \cdot \vec{q}_n = 0$.

Основным этапом является реализация метода Крайхнана, так как данный метод лежит в основе последующих методов модифицирующих его. Также стоит отметить, что последующие модификации данного метода достаточно отдаляются от оригинальной постановки опирающейся на физическую задачу моделирования движения частиц.

2.2 Метод Смирнова генерации синтетической турбулентности

Метод Смирнова [Smirnov2001] является усовершенствованной версией метода Крайхнана. В основном, в литературе, за базис для модификации бе-

рут именно данный метод, а не метод Крайхнана в силу того, что метод уже не требует генерации многомерной случайной величины. Другое важное усовершенствование, влияющее на выбор данного подхода как базисного, это возможность генерации неоднородного анизотропного поля флюктуаций за счёт введения дополнительных преобразований. Но эти дополнительные преобразования требуют знание тензора напряжений Рейнольдса, как отмечают авторы его можно получить либо из моделирования методом DNS, либо из экспериментальных данных. На разложении тензора Рейнольдса основаны преобразование позволяющие получить анизотропное и неоднородное поле скоростей.

Дадим описание метода, как в оригинальной работе в виде шагов.

Пусть задан анизотропный тензор корреляций скоростей (например из эксперимента или моделирования)

$$r_{ij} \equiv \overline{\tilde{u}_i \tilde{u}_j} \quad (2.4)$$

здесь r_{ij} — значение элемента тензора корреляции, $\tilde{u}_i = \tilde{u}_i(x_j, t)$ - компонента турбулентного поля скоростей (волна обозначает величину флюктуации), x_j - некоторая точка пространства, t - время, $i, j = 1..3$, линия сверху обозначает осреднение по времени. Необходимо найти такое ортогональное преобразование - тензор a_{ij} такой, что он диагонализует заданный тензор корреляций r_{ij} . То есть:

$$a_{mi} a_{nj} r_{ij} = \delta_{mn} c_{(n)}^2 \quad (2.5)$$

$c_{(n)}$ - диагональные значения (индекс, взятый в скобки, не подразумевая правило суммирования Эйнштейна). Более просто в матричном виде:

$$R = A \cdot C \cdot A^{-1} \quad (2.6)$$

A - матрица ортогонального преобразования, C - диагональная матрица. Авторы не конкретизируют способ нахождения этих матриц. Данному правилу построения этих матриц будет соответствовать разложение по базису собственных векторов тензора R . A - будет представлять собой тензор построенный из собственных векторов тензора R , C - диагональный тензор, на диагонали которого будут стоять собственные значения тензора R .

В данном разложении элементы $c_{(n)}$ имеют смысл компонент турбулентных флюктуаций в базе построенном на собственных векторах тензора R .

Следующим шагом идёт генерация поля скоростей $v_i(x_i, t)$ в заданной для генерации области используя следующие выражения модифицированного метода Крайхнана:

$$v_i(\vec{x}, t) = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{n=1}^N \left[p_i^n \cos(\tilde{k}_j^n \cdot \tilde{x}_j + \omega_n \tilde{t}) + q_i^n \cos(\tilde{k}_j^n \cdot \tilde{x}_j + \omega_n \tilde{t}) \right] \quad (2.7)$$

Волна над переменной обозначает обезразмеренную переменную, обезразмеренное происходит по следующим правилам:

$$\tilde{x}_j = \frac{x_j}{l}, \tilde{t} = \frac{t}{\tau}, \tilde{c} = \frac{l}{\tau}, \tilde{k}_j^n = \frac{c}{c_{(j)}} \quad (2.8)$$

l - Пространственный масштаб турбулентности, τ - временной масштаб турбулентности. Как и в методе Крайхнана, амплитуды мод Фурье также задаются путем векторного произведения случайного вектора и соответствующего волнового вектора.

$$p_i^n = \epsilon_{ijm} \zeta_j^n k_m^n, q_i^n = \epsilon_{ijm} \xi_j^n k_m^n, \quad (2.9)$$

ϵ_{ijm} - тензор перестановок Леви-Чивиты, ζ_j^n и ξ_j^n - компоненты случайных векторов $\vec{\xi}^n$ и $\vec{\zeta}^n$. Первое отличие от метода Крайхнана это правило генерации случайных величин, а именно $\zeta_j^n, \xi_j^n, \omega_n \in N(0, 1)$, то-есть случайные величины имеют обычное нормальное распределение, когда в методе Крайхнана используется многомерное нормальное распределение. Компоненты волновых векторов имеют также нормальное распределение, но с другими параметрами $k_j^n \in N(0, \frac{1}{2})$.

Авторы используют следующее аналитическое выражение энергетического спектра:

$$E(k) = 16 \left(\frac{2}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} k^4 \exp(-2 \cdot k^2) \quad (2.10)$$

Третьим шагом, после генерации случайного вектора флюктуаций, необходимо произвести преобразование к реальным флюктуациям с использованием вышеприведённых ортогональных преобразований.

$$w_i = c_{(i)} \cdot v_{(i)} u_i = a_{ik} \cdot w_k \quad (2.11)$$

Для дальнейших доказательств нужно предположить что R , а также A и C слабо меняются с изменением \vec{x} . Это требование позволяет показать, что результирующее поле скоростей действительно удовлетворяет уравнению непрерывности. В общем случае, это достаточно сильное условие, которое хорошо выполняется для однородной турбулентности. Для неоднородной турбулентности, в следствии осреднения по времени, для тензора корреляции уменьшается зависимость от времени и от пространственной координаты.

$$\|c_{i,j}\| \approx \|r_{ij,k}\|^{\frac{1}{2}} \ll \|u_{i,j}\| \quad (2.12)$$

$\|\cdot\|$ - подходящая функция нормы.

Используя показанные выше свойства, а также правила задания флюктуаций можно показать, что, во-первых, результирующее поле имеет заданную корреляционную матрицу.

$$\begin{aligned} \overline{u_i u_j} &= \overline{a_{im} w_m a_{jn} w_n} \\ &= a_{im} a_{jn} \overline{w_m w_n} = a_{im} a_{jn} c_m c_n \overline{v_m v_n} \\ &= a_{im} a_{jn} c_m c_n \delta_{mn} = a_{im} a_{jn} c_n^2 = r_{ij} \end{aligned} \quad (2.13)$$

Также можно показать что результирующее поле скоростей удовлетворяет уравнению неразрывности.

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_i}{\partial x_i} &= \frac{\partial c_i}{\partial x_i} v_i + \frac{\partial v_i}{\partial x_i} c_i \approx \frac{\partial v_i}{\partial x_i} c_i \\ &= \frac{c}{l} \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_n^N \left[-p_i^n k_i^n \sin \left(\frac{c}{c_j} k_j^n \frac{x_j}{l} + \omega_n \frac{t}{\tau} \right) + q_i^n k_i^n \cos \left(\frac{c}{c_j} k_j^n \frac{x_j}{l} + \omega_n \frac{t}{\tau} \right) \right] \\ &= 0 \rightarrow \frac{\partial w_i}{\partial x_i} \approx 0 \end{aligned} \quad (2.14)$$

Равенство нулю достигается за счёт определения амплитуд мод Фурье с помощью векторного произведения: $k_i^n p_i^n = 0$. Для результирующей скорости имеем:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = a_{ij} a_{ki} \frac{\partial w_j}{\partial x_k} = \delta_{jk} \frac{\partial w_j}{\partial x_j} = 0 \quad (2.15)$$

Ниже приведены результаты генерации поля флюктуаций авторами, как опорная точка для первоначальной визуальной оценки результатов.

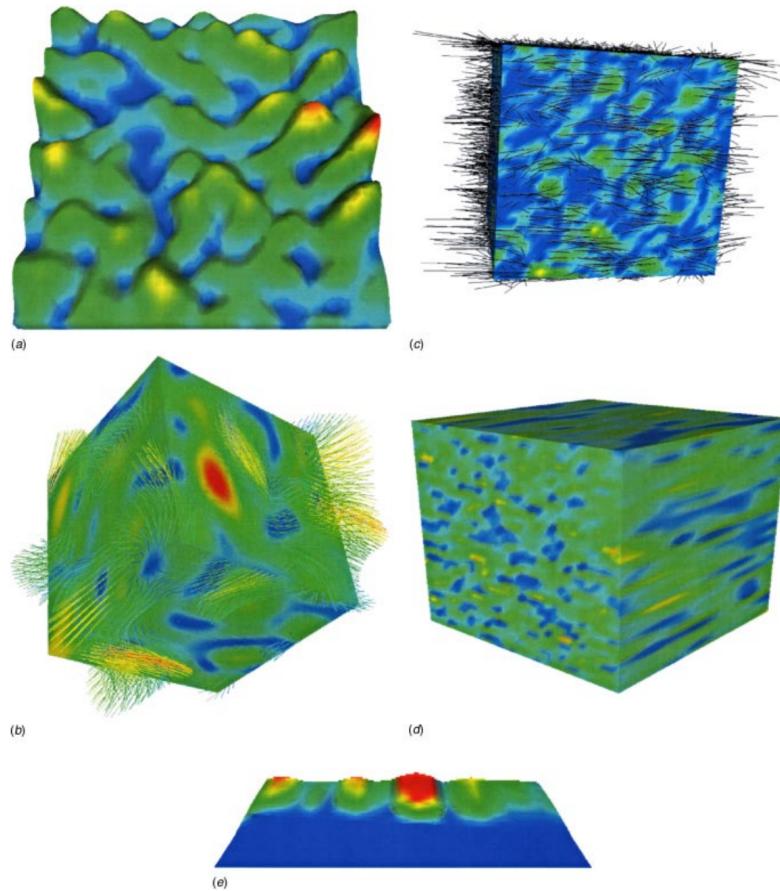


Рисунок 2.1 — Сгенерированные авторами поля скоростей для а) изотропная завихрённость, б) изотропная скорость, с) анизотропная скорость д) анизотропный пространственный масштаб е) флуктуации на границе
[huang2010general]

2.3 Метод Хуанга генерации синтетической турбулентности

Как упоминалось в секции 2.2, метод Смирнова задает базис для работы с генераций синтетической турбулентности. Как можно видеть, в методе присутствует достаточно большое число параметров. Эти параметры представляют собой, например, способ генерации случайных чисел, способ задания ряда Фурье, форма спектра, метод аппроксимации спектра, учет расстояний до стенок и тому подобное. В методе используемым в статье [huang2010general] основное отличие заключается в используемом спектре. В методе Смирнова используется "Спектр Гаусса который не так хорошо описывает реальный спектр при больших волновых числах. В работе Хуанга используется модифицированный спектр Вон-Кармана. Помимо этого используется специальный алгоритм

аппроксимации спектра за счёт разложения его по меньшим частям. Однако вносимые в алгоритм правки, налагают дополнительные предположения, связанные с интегрируемостью флуктуаций.

Ниже приведен график сравнения вида спектров используемых в работах Смирнова и Хуанга с близким к реальному спектром Вон-Кармана. Как можно видеть, в методе Смирнова спектр турбулентных флуктуаций не покрывает область больших волновых чисел.

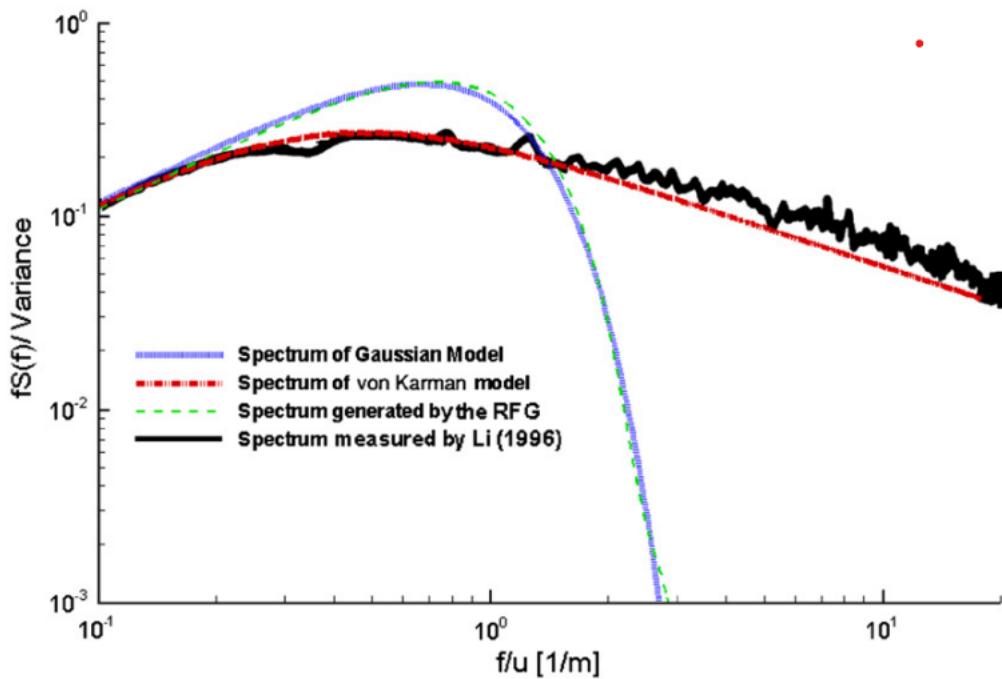


Рисунок 2.2 — Сравнение спектров для метода Смирнова со спектрами Вон-Кармана и спектром измеренным Ли[huang2010general]

На изображении 2.2 показаны измерения для продольной компоненты флуктуации скорости потока ветра для процедуры генерации Смирнова с интенсивностью продольной турбулентности $I_u = 8\%$ и интегральном масштабе турбулентности $L_u = 0.3m$. Хорошо видно, что в области инерционного интервала для метода Смирнова наблюдается сильное затухание.

Как говорилось ранее, основная идея усовершенствования спектрального метода состоит в представлении целевого спектра в виде комбинации (суммы) небольших долей. Этот шаг можно назвать дополнительной дискретизации целевого спектра. За основу этих небольших долей берутся спектры, рассматриваемые нами ранее в работе Крайхнана (2.3). Авторы предлагают использовать для дискретизации спектры E_1 и E_3 для двумерного и трёхмерного случаев

соответственно, в силу того, что они имеют ярко выраженный пик в значении $k = k_0$ и не влияют на другие "узлы" дискретизации.

$$E(k) = \sum_{m=k_0}^{k_{max}} E_m(k) = \sum_{m=k_0}^{k_{max}} E_m(k_m) \delta(k - k_m) = \sum_{m=k_0}^{k_{max}} \left(\frac{3}{2} v_m^2 \right) \delta(k - k_m) \quad (2.16)$$

Теперь генерация, происходит для каждого слагаемого из суммы. Помимо этого, вводится явная зависимость между амплитудой получаемой скорости и значением энергии, соответствующее заданному волновому числу k_m . Стоит сразу отметить, что генерация поля скоростей для дискретизованного таким образом спектра, вносит дополнительную алгоритмическую сложность, в следствии необходимости дополнительных проходов генерации для каждого значения дискретизованного спектра. В этом случае флуктуация задается в виде:

$$u_{m,i} = \sum_{n=1}^N [p_i^{m,n} \cos(k_j^{m,n} \cdot x_j + \omega_n \cdot t) + q_i^{m,n} \cos(k_j^{m,n} \cdot x_j + \omega_n \cdot t)] \quad (2.17)$$

здесь $k_i^{m,n}$ — изотропно распределенный вектор по сфере радиуса k_m , $\omega_{m,n} \in N(0, \omega_{m,n})$. Связывание амплитуд мод Фурье со значением спектра осуществляется по прямому определению значения v_0 — как среднеквадратичного отклонения скорости в любом направлении. Авторы выбирают следующее определение для нахождения связи:

$$\sigma_{m,i}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T u_{m,i}^2 dt = \frac{2}{3} E_m(k_m) = \frac{2}{3} E(k_m) \quad (2.18)$$

В итоге получаем соотношение:

$$\frac{1}{2} \sum_{n=1}^N [p_i^{m,n}]^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N [q_i^{m,n}]^2 = \frac{2}{3} E(k_m) \quad (2.19)$$

Убедиться в этом можно прямой подстановкой (2.18) в (2.17)

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{T} \int_0^T u_{m,i}^2 dt = \\
&= \frac{1}{T} \int_0^T \left\{ \sum_{n=1}^N [p_i^{m,n} \cos(k_j^{m,n} \cdot x_j + \omega_n \cdot t) + q_i^{m,n} \cos(k_j^{m,n} \cdot x_j + \omega_n \cdot t)] \right\}^2 dt \\
&= \frac{1}{T} \sum_{n=1}^N [p_i^{m,n}]^2 \frac{T}{2} + \frac{1}{T} \sum_{n=1}^N [q_i^{m,n}]^2 \frac{T}{2} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N [p_i^{m,n}]^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N [q_i^{m,n}]^2 = \frac{2}{3} E(k_m)
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Из вывода данной связи между значением энергии и мод Фурье вытекает, ранее упомянутое, требование к интегрируемости. В конечном итоге имеем в векторном виде следующие выражение:

$$\frac{1}{2} \sum_n^N |\vec{p}^{m,n}|^2 + \frac{1}{2} \sum_n^N |\vec{q}^{m,n}|^2 = 2E(k_m) \tag{2.21}$$

здесь записана система уравнений, связывающая амплитуды мод Фурье со значениями спектра для различных волновых чисел. Решать, данную систему можно различными способами. Первый наиболее очевидный способ использовать алгоритмы решения СЛАУ, но авторы поступили другим путём. Вводится дополнительная случайная величина a , через которую выражаются данные амплитуды. Это позволяет существенно сэкономить на решении СЛАУ, за счёт введения простой зависимости, а именно:

$$\begin{aligned}
|\vec{p}^{m,n}| &= \sqrt{a \frac{4E(k_m)}{N}} \\
|\vec{q}^{m,n}| &= \sqrt{(1-a) \frac{4E(k_m)}{N}}
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Легко убедиться в том что данное выражение удовлетворяет уравнению (2.21), используя прямую подстановку:

$$\frac{1}{2} \sum_n^N |\vec{p}^{m,n}|^2 + \frac{1}{2} \sum_n^N |\vec{q}^{m,n}|^2 = \frac{1}{2} \frac{4E(k_m)}{N} \left[\sum_n^N a + \sum_n^N (1-a) \right] = 2E(k_m) \tag{2.23}$$

Таким образом амплитуды мод Фурье, выражаются в виде:

$$|p^{\vec{m},n}| = \frac{\zeta \times \vec{k}^{\vec{m},n}}{|\zeta \times \vec{k}^{\vec{m},n}|} \sqrt{a \frac{4E(k_m)}{N}} \quad (2.24)$$

$$|q^{\vec{m},n}| = \frac{\zeta \times \vec{k}^{\vec{m},n}}{|\zeta \times \vec{k}^{\vec{m},n}|} \sqrt{(1-a) \frac{4E(k_m)}{N}} \quad (2.25)$$

Авторы отмечают, что подход также требует корректировки значения пространственного масштаба турбулентности. Так как на самом деле оператор пространственной корреляции имеет зависимость от данного параметра:

$$R(\vec{x}, \vec{x}') = \int_0^T \vec{u}(\vec{x}, t) \cdot \vec{u}(\vec{x}', t) dt = \sum_{m=k_0}^{k_{max}} \left\{ \frac{2TE(k_m)}{N} \sum_{n=1}^N \cos \left(\tilde{\vec{k}}^{\vec{m},n} \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{L_s} \right) \right\} \quad (2.26)$$

Авторы предлагают, также, несколько иной подход к генерации анизотропной турбулентности, за счёт того, что имеется возможность разделить спектр на составляющие не только пространственно по-волновому вектора, но также и по компонентно. Разделим (2.21) по компонентно в следующем виде:

$$\frac{1}{2} \sum_n^N |p^{\vec{m},n}|^2 + \frac{1}{2} \sum_n^N |q^{\vec{m},n}|^2 = \frac{4}{3N} E(k_m) = \frac{4}{N} E_i(k_m) \quad (2.27)$$

Как и до этого, введение случайного параметра по типу a , можно найти аналитическое выражение для задания амплитуд мод Фурье.

$$p_i^{m,n} = \text{sign}(r_i^{m,n}) \sqrt{\frac{4}{N} E_i(k_m) \frac{(r_i^{m,n})^2}{1 + (r_i^{m,n})^2}} \quad (2.28)$$

$$q_i^{m,n} = \text{sign}(r_i^{m,n}) \sqrt{\frac{4}{N} E_i(k_m) \frac{1}{1 + (r_i^{m,n})^2}} \quad (2.29)$$

Эта же процедура может использоваться и для генерации однородного поля скоростей путем задания одинакового спектра по всем пространственным направлениям. Стоит отметить, что с использованием матричных преобразований в методе Смирнова необходимо было, чтобы коэффициенты плавно менялись в пространстве для пренебрежения членами с их пространственными производными для удовлетворения уравнению неразрывности для случая генерации

неоднородной и анизотропной турбулентности. В данном же случае, никаких подобных допущений не требуется, в результате чего уравнение неразрывности выполняется в точности.

На валидации, авторам алгоритма удалось получить достаточно хорошее совпадение с целевым спектром. На рисунке ниже приведены результаты полученные авторами для трёх компонент флюктуаций скорости в сравнении со спектром Вон-Кармана. Параметры генерации те же, что использовались для сравнения для случая 2.2.

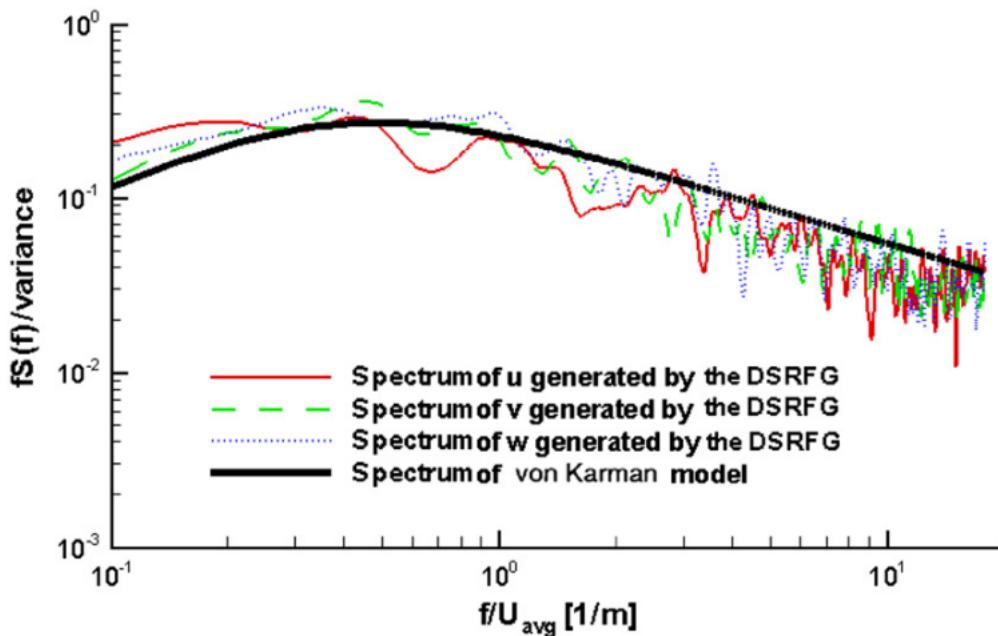


Рисунок 2.3 — Сравнение результирующих спектров для сгенерированных компонент флюктуаций u, v, w со спектром Вон-Кармана [huang2010general]

2.4 Метод Шура генерации синтетической турбулентности

Как упоминалось ранее, возможностей для изменения и корректировки метода открыто множество параметров. Один из них, внесение правок в сам алгоритм. Так в работе [shur2014synthetic] вместо предложенным Смирновым ортогональных преобразований, используется разложение Холецкого для тензора напряжений Рейнольдса. Суть разложения Холецкого состоит в том, чтобы представить матрицу в виде произведения нижне треугольных матриц:

$\hat{R} = \hat{A}^T \cdot \hat{A}$. Для прикладного случая - разложения тензора напряжений Рейнольдса, матрица \hat{A} имеет вид:

$$\hat{A} = a_{ij} = \begin{pmatrix} \sqrt{R_{11}} & 0 & 0 \\ R_{21}/a_{11} & \sqrt{R_{22} - a_{21}^2} & 0 \\ R_{31}/a_{11} & \frac{R_{32} - a_{21} \cdot a_{31}}{a_{22}} & \sqrt{R_{33} - a_{31}^2 - a_{32}^2} \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

Искомые флюктуации имеют вид:

$$u_i(\vec{r}, t) = a_{ij} v_j(\vec{r}, t) \quad (2.31)$$

, где v_j - компоненты генерируемых по принципу (2.1), но также налагая требование $\langle v_i v_j \rangle = \delta_{ij}$. В общем случае, разложение $\hat{R} = \hat{A}^T \cdot \hat{A}$ не является однозадачным, например можно также использовать разложение на собственные числа и значения $\hat{R} = \hat{A}^T \cdot \hat{C} \cdot \hat{A} = \hat{A}^T \cdot \hat{C}^{\frac{1}{2}} \cdot \hat{C}^{\frac{1}{2}} \cdot \hat{A} = \hat{B}^T \cdot \hat{B}$, но для данного случая, необходимо чтобы собственные значения были больше 0, или в более общем смысле, изначальная матрица положительно определена. Основная проблема в том что, в общем случае, матрица корреляций не отрицательно определена, и вполне могут быть встречены отрицательные собственные числа.

Докажем то, что приводимое разложение действительно задает корреляцию наперед, пусть целевая матрица корреляций R , и случайная величина $\zeta \in N(0, 1)$. Результирующая случайная величина $\xi = \hat{A} \cdot \zeta$.

$$\mathbb{E} (\xi \xi^T) = \mathbb{E} ((\hat{A} \zeta)(\hat{A} \zeta)^T) = \mathbb{E} (\hat{A} \zeta \zeta^T \hat{A}^T) = \hat{A} \mathbb{E} (\zeta \zeta^T) \hat{A}^T = \hat{A} \hat{A}^T = R \quad (2.32)$$

Помимо использования другого метода получения анизотропной турбулентности, авторы также используют несколько изменённое определение для генерации флюктуаций.

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = 2 \sqrt{\frac{3}{2}} \sum_{n=1}^N \sqrt{q_n} \left[\sigma^n \cos(k^n \vec{d}^n \cdot \vec{r} + \phi^n) \right] \quad (2.33)$$

здесь N - число мод Фурье, q^n - нормированная амплитуда моды Фурье, k^n - амплитуда волнового вектора, d^n - случайно распределённый на единичной сфере вектор, $k^n = k^n \vec{d}^n (\vec{\sigma}^n \cdot \vec{d}^n)$.

Принцип остается тот же, за исключением того, что зависимость от времени явно исключается из алгоритма. Таким образом авторы определяют все случайные величины всего один раз, так они не включают зависимость от времени, а также существенно упрощают алгоритм. При исключении явного рассмотрения времени из формул, необходимо каким-либо образом учесть нестационарность турбулентности. Чтобы учесть временную зависимость, авторы используют волновую конвекцию, вводится учёт волновой конвекции через компоненты псевдовектора положения r' .

$$\vec{r}' = \left\{ \frac{2\pi}{k^n \max(l_e(\vec{r}))} (x - U_0 t), y', z' \right\} \quad (2.34)$$

здесь U_0 -макромаштабная величина скорости, l_e -локальный пространственный масштаб вихрей.

Авторы также используют свою связь между амплитудами дискретизованного спектра и амплитудами мод Фурье.

$$q^n = \frac{E(k_n) \Delta k^n}{\sum_{n=1}^N E(k_n) \Delta k^n} \quad (2.35)$$

Это выражение удовлетворяют требованию нормированность амплитуд мод Фурье, а также в сравнении с 2.3 имеет более простую форму, без введения дополнительных случайных параметров.

Как отмечалось ранее, в работе также используется спектр Вон-Кармана.

$$E(k) = \frac{\left(\frac{k}{k_e}\right)^4}{(1 + 2.4\frac{k}{k_e})^2)^{\frac{17}{6}}} f_\eta f_{cut} \quad (2.36)$$

$$f_\eta = \exp\left(-\left(\frac{12k}{k_\eta}\right)^2\right) \quad (2.37)$$

$$f_{cut} = \exp\left(-\left[\frac{4 \max(k - 0.9k_{cut}), 0}{k_{cut}}\right]^3\right), k_{cut} = \frac{2\pi}{l_{cut}} \quad (2.38)$$

здесь $k_e = \frac{2\pi}{l_e}$ - волновое число отвечающее за наиболее энергосодержащую моду. За счёт введения зависимости от локальных масштабов требуется высокая точность его определения для получения физической турбулентности на более маленьких длинах её развития. Авторы предполагают, что определяется как: $l_e = \min 2d_w, C_l l_t$, d_w - расстояние от точки до ближайшей

стенки, $C_l = 3,0$ - эмпирическая константа, l_t - масштаб фоновой модели RANS ($l_t = \frac{k_t^{\frac{1}{2}}}{C_\mu \omega_t}$ для $k - \omega$ модели). Для фильтрующих функций выбираются следующие параметры: $l_\mu = (\frac{\nu^3}{\epsilon})^{\frac{1}{4}}$. В демпфирующей функции: $l_{cut} = 2 \min(\max(h_y, h_z, 0.3h_{max}) + 0.1d_w, h_{max})$, h_y, h_z - это локальные шаги сетки на интерфейсе RANS-LES, а $h_{max} = \max(h_x, h_y, h_z)$.

Так как распределение волновых чисел фиксируется, авторы используют геометрический ряд, для уменьшения количества волновых чисел: $k^n = k^{min}(1 + \alpha)^{n-1}$, $0.01 \leq \alpha \leq 0.05$. Здесь $k^{min} = \beta k_e^{min}$ - минимальное волновое число в наборе, $\beta = 0.5$ - эмпирическая константа, k_e^{min} - волновое число, соответствующее максимальному значению l_e на интерфейсе, $l_e^{max} = \max(l_e(\vec{r}))$, N - минимальное целое число для которого $k^N \geq k^{max} = 1.5 \max k_{cut}(\vec{r})$.

Суммируя алгоритм приведённый выше, используется фиксированный набор волновых чисел, также фиксированный по времени, и варьируется от значения соответствующего наибольшей длине волны в рассматриваемой задаче, до предела Нейквиста. Также спектра определяющий нормированные амплитуды в каждой точке имеет максимум при локально определённых волновых числах $k_e(\vec{r}) = \frac{2\pi}{l_e(\vec{r})}$, то-есть движется по фиксированному набору волновых чисел так, что моды с наибольшей длиной волны масштабируются малыми амплитудами вблизи стен, с наименьшей длиной волны масштабируются на малые амплитуды вдали от стен. Комбинация этих свойств STG обеспечивает образование сильно анизотропных (удлиненных) вихрей вблизи стенок и почти изотропных вихрей вдали от стенок.

Также все случайные величины входящие в (2.33) определяются всего один раз, нивелируя высокочастотные флюктуации способствующее затуханию или ламинаризации ниже по потоку.

Глава 3. Валидация спектрального метода генерации синтетической турбулентности

Одним из важных аспектов данной работы является программирование приведенных в главах 1 и 2. Помимо того, что для достижения основной цели работы необходимо провести множество вычислений, необходимо также провести оптимизации алгоритмов, как для дальнейшего использования, так и для возможной конкуренции на рынке вычислительных пакетов и алгоритмов. Поэтому нужно уделить большее внимание данному аспекту. Помимо программирования основных методов, необходимо также реализовать сопутствующий функционал для валидации алгоритмов, а также удобного предоставления данных. Процесс можно разбить на несколько этапов. Первоначально, необходимо выбрать язык программирования для реализации алгоритмов. Следующим этапом проработать архитектуру приложения. В конечном итоге проводить вычислительные эксперименты.

Для выбора языка программирования, на котором будет вестись разработка, будут играть ключевую роль скорость, а также более простая интеграция с другими программами или сервисами. По первому признаку лучше всего подходят компилируемые языки программирования, дающие возможность получить наибольшую производительность. Наиболее популярным открытым пакетом для вычислительной гидродинамики является пакет "OpenFOAM". Для интеграции с "OpenFOAM" и различными библиотеками, например, линейной алгебры, наиболее лучшим вариантом становится выбор языка C или C++. Первый является подмножеством второго, выбор падает на C++ в силу предоставляемых языком программирования и его библиотекой стандартных примитивов, а также возможность интеграции с приведёнными выше пакетами.

Помимо реализации алгоритмов, необходимо реализовать также функционал связанный с расчётами статистических параметров, а также функционала для работы с сетками и вычислительными областями. Также необходимо реализовать функционал связанный с сохранением полученных данных для их дальнейшей обработки, таким образом можно сэкономить на памяти при выполнении дампов текущих параметров и полей.

На данном, начальном этапе, пока будем реализовать функционал без интеграции с другими CFD пакетами, так как эта интеграция пока не требуется для валидации алгоритмов.

Также решено было реализовать варианты генерации синтетической турбулентности в виде библиотек для простоты дальнейшего использования, представляя программный интерфейс для генерации синтетической турбулентности для будущего пользователя.

Задачей является сгенерировать поле флюктуаций. Для турбулентного поля скоростей можно вычислить большое количество характеризующих его параметров, на данный момент нас в большей степени интересует спектр турбулентных флюктуаций. Спектр является главным входным параметром генерации, вследствие чего, вычисление его для результирующего поля, полученного в результате генерации, является основным критерием для оценки того или иного метода насколько он хорош для использования в качестве генератора турбулентных флюктуаций. С самим же спектром, в свою очередь, связано также достаточно много параметров. Например, как было описано ранее в главах 1 и 2, спектр имеет связь как с тензором спектра скоростей, так и с тензором ковариаций. Последний является важной статистической величиной для оценки пространственной зависимости (корреляции) величин. Таким образом мы добавляем ещё один критерий валидации к поставленной задаче.

Основное сравнение для спектрального метода будем проводить в сравнении с целевым спектром, так как в отличие от стохастического метода, мы отходим от энергетического спектра турбулентности. Как говорилось ранее, проводилась реализация метода Крайхнана, так как он является базисом для построения модификаций и других методов. Помимо этого сразу есть возможность выявить недостатки или преимущества данного метода по сравнению с модификациями вносимыми другими авторами.

Так как метод сразу нацелен на генерацию трёхмерного поля скоростей будем рассматривать сразу все компоненты флюктуаций и результирующего спектра.

Для генерации турбулентных флюктуаций на основе спектральных методов необходимо выделить основные физические параметры для дальнейшего их переноса в программный код. Таким образом мы выделяем структуры данных, необходимые для реализации алгоритма. Основные соотношения и формулы

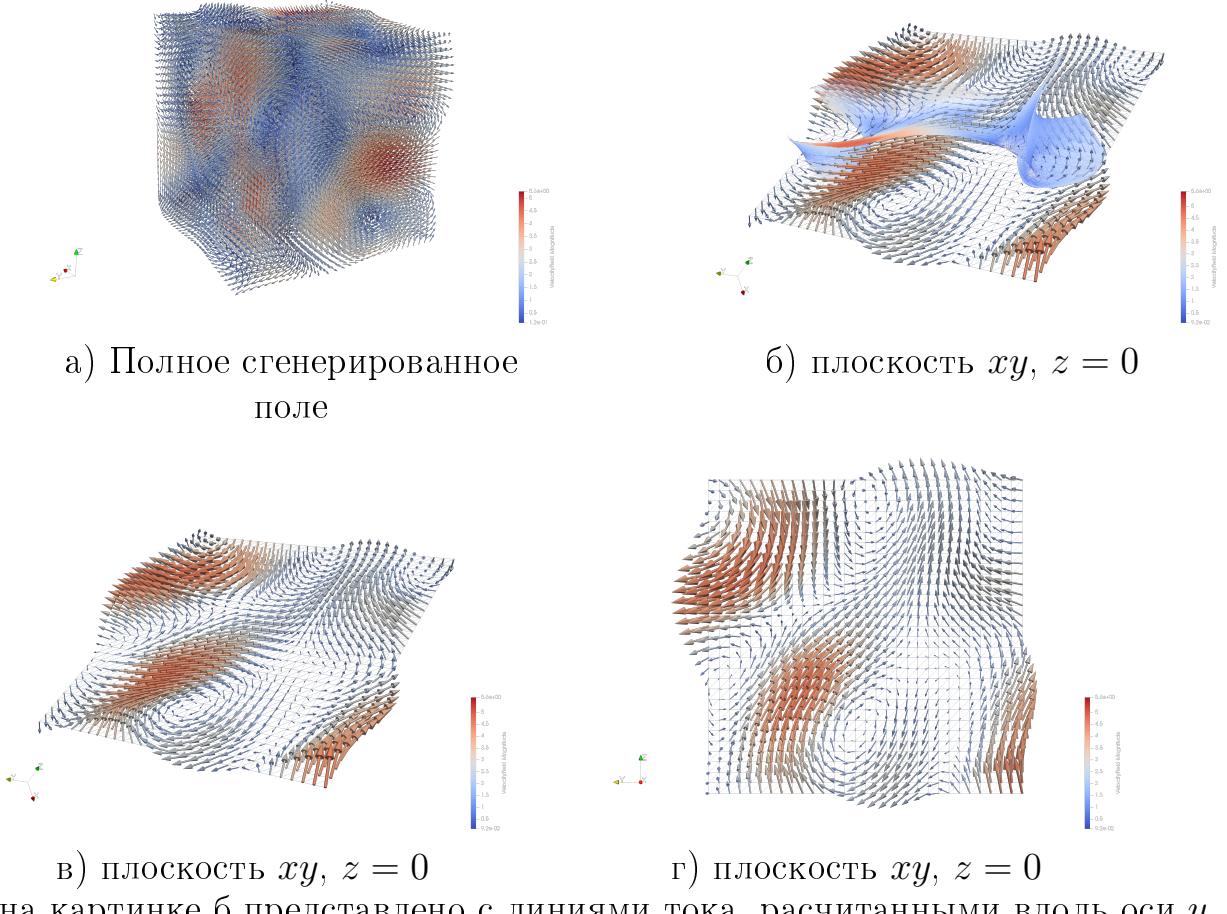
позволяют выделить алгоритмы над упомянутыми ранее структурами данных как образами над физическими величинами. В отличие от метода стохастического Гауссова моделирования здесь имеется больше пространства как в плане количества рассматриваемых величин, так и в плане объема требуемых алгоритмов. По примеру Хуанга мы можем разбить целевой спектр в ряд, также будем рассматривать генерацию поля скоростей для случаев 2.4 дельта функции и Гауссова спектра. Первый случай позволяет использовать нам генератор на основе метода Крайхнана для генерации во всём интересующем диапазоне волновых чисел, второй в свою очередь для простого использования генератора в интервалах генерации и инерционном. Мы хотим использовать данные спектры чтобы не уходить от оригинальной постановки задачи и как можно более близко оставаться в рамках изначальных условий. Для одного экземпляра генератора нам необходимо сгенерировать последовательность волновых векторов в соответствии с процедурой генерации для каждого из спектров, для случая спектра дельта функции волновые вектора генерируются статистически изотропно на сфере заданного радиуса k_0 , для случая гауссова спектра используется нормальное распределение со среднеквадратичным отклонением $\frac{k}{2}$. Дальше необходимо задаться некоторым значением среднеквадратичного отклонения для частоты ω_0 . Основное влияние эта частота оказывает на временную зависимость генерации синтетической турбулентности. В целом, способов задаться этой частотой достаточно много, авторы предлагают использовать $\omega_0 = k_0 v_0$, v_0 – среднеквадратичное отклонение в любом направлении. Как можно легко убедиться комплекс $k_0 v_0$ имеет размерность частоты, а также может использоваться для перехода к безразмерному времени. Остается сгенерировать лишь амплитуды мод Фурье, в оригинальной работе авторы не специфицируют алгоритм генерации, а точнее параметры генерации, данной последовательности случайных векторов. Но важно, что вектора амплитуд мод Фурье генерируются из трёхмерного нормального распределения. В данной работе мы использовали вариант со средним равным 0 и матрицей ковариации заданной единичной матрицей. Набор этих случайных величин генерируется всего один раз на этапе инициализации генератора и никак не привязан в топологии сетки. Важно отметить, что мы будем использовать разные экземпляры генератора для проведения одной реализации поля скоростей в начальный момент времени для оценки спектральных и статистических характеристик. Для оценки временных

характеристик используется один экземпляр генератора с заранее заданным шагом генерации по времени. Всё это дает нам возможность использовать подход Хуанга для генерации синтетического поля скоростей с идеей дискретизации спектра, а также в будущем заложить другую информацию, например о тензоре Рейнольдса в матрицу ковариаций генератора.

Для удобства дальнейшей обработки данных будем генерировать поля флюктуаций на кубической сетке. Длину куба в параметрах будет обозначать l и, как для рассматриваемого в данной главе метода, так и для стохастического метода, будем брать $l = 10$, пока без введения конкретной размерности. Также сетка характеризуется числом разбиений по каждой из осей, будем использовать одинаковое число разбиений для каждой из осей $n_x = n_y = n_z = n$. Число разбиений будем использовать максимально доступное для вычислений на машине с объемом оперативной памяти в 32 Гб. Данный метод имеет хорошую устойчивость к топологии сетки, то-есть не зависит от расположения соседних узлов, её формы, поэтому можно с большой достоверностью считать, что использование данной сетки обосновано для проведения валидации получаемых данных. Для простоты также центр куба будет совпадать с началом координат, так будет проще оценить симметричность функций относительно точки расчёта статистических параметров, которую также примем за начало координат, в этом случае $R_{ij}(\vec{x}, \vec{r}) = \langle u_i(\vec{x})u_j(\vec{x} + \vec{r}) \rangle \rightarrow [\vec{x} = 0, 0, 0] \rightarrow R_{ij}(\vec{r}) = \langle u_i(\vec{0})u_j(\vec{0} + \vec{r}) \rangle$. Важность оценки симметричности функции играет важную роль при переходе от тензора ковариаций к тензору спектра скоростей, так как это необходимое условие для проведения преобразования Фурье

Далее будут представлены сгенерированные поля в момент времени $t = 0$ для $k_0 = \frac{\pi}{3}$, $n = 31$, $v_0 = 1$, $\omega_0 = v_0 k_0 = 2\pi$, для спектра в виде дельта-функции. Для проведения статистического анализа, а также дальнейшего вычисления тензора спектра скоростей и энергетического спектра генерируется $N_{samples} = 10000$, в 10 раз больше взятого числа мод Фурье, которое составляет $N = 1000$.

В отличие от стохастического метода, данный метод имеет явную зависимость вектора флюктуации от времени. Как говорилось выше, в данном случае распределение определяется сгенерированными частотами ω_0 . Мы можем выделить некоторый характерный период как $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{k_0 v_0}$. Обычно при рассмотрении временных процессов берут период времени $100T$, где $T = T_0$ – характерный для задачи период (масштаб) времени. Шаг по времени выберем



Поле на картинке б представлено с линиями тока, расчетанными вдоль оси y

Рисунок 3.1 — Поле флюктуаций сгенерированных трёхмерным стохастическим методом, цветом обозначена амплитуда флюктуаций

как $\Delta t = \frac{100T_0}{N_{samples}}$ — так мы можем трактовать поля сгенерированные во времени как одну реализацию поля флюктуаций. Ниже представлены сгенерированные поля для некоторых моментов времени. В общем случае, при данном шаге по времени наблюдается как плавный переход от одного поля к другому, так и достаточно резкий. Можно варьировать этот параметр путём задания среднеквадратичного отклонения для генерируемых частот — ω_0 . Так для больших частот проявляется более частая смена ориентации векторов в пространстве.

На полученных реализациях мы можем оценить ковариационную функцию и последующими преобразованиями получить из неё и энергетический спектр. Ниже представлен рассчитанный на полученных реализациях тензор ковариаций относительно центра куба, совпадающего с началом координат, для различных направлений: по диагонали куба, по оси x , по оси y , по оси z , прохо-

дящие через начало координат. Различными цветами представлены компоненты тензора ковариаций.

В случае однородной и изотропной турбулентности и несжимаемой жидкости есть возможность получить аналитическое выражение как для тензора ковариаций от функции энергетического спектра, так и для тензора спектра скорости от функции энергетического спектра [Kraichnan70; pope2000turbulent].

$$\langle \vec{u}(\vec{x}, t') \vec{u}(\vec{x} + \vec{r}, t) \rangle = 2D(t - t') \int_0^\infty E(k) \frac{\sin(kr)}{kr} dk \quad (3.1)$$

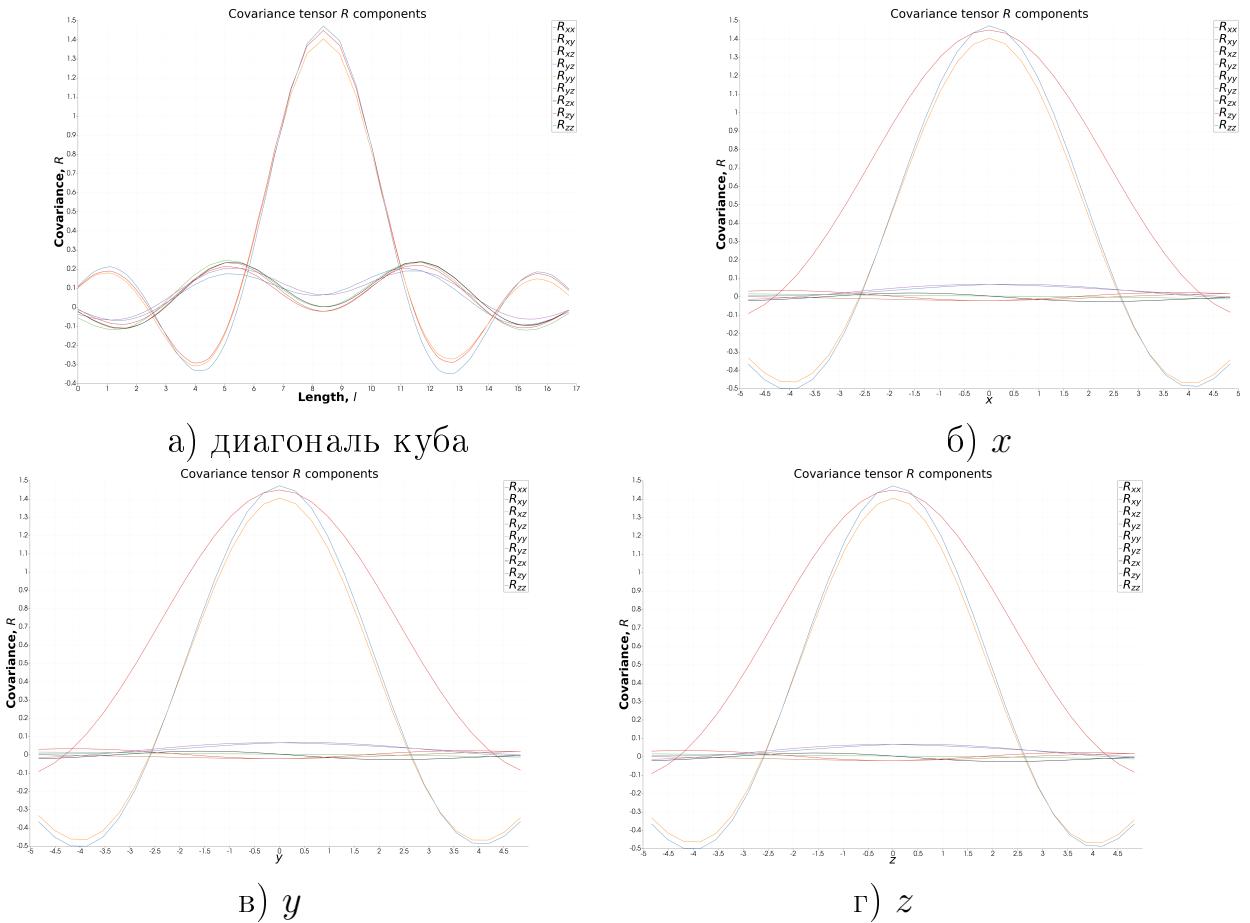
$$\Phi_{ij}(\vec{k}) = \frac{E(k)}{4\pi k^2} \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \quad (3.2)$$

здесь k – модуль волнового вектора, k_i – компонента волнового вектора. Для обоих рассматриваемых методов генерация осуществляется в рамках однородной и изотропной турбулентности для несжимаемой жидкости, тем самым мы можем сравнить не только, например, спектральные характеристики, но и также провести сравнение других характеристик, таких как тензор ковариаций и тензор скоростей.

Рассмотрим полученные ковариационные функции на рассчитанные на 10000 реализаций поля флюктуаций с параметрами описанными выше.

По аналогии с методом Хуанга, мы можем генерировать поле флюктуаций как суперпозицию полей построенных для различных волновых чисел, а соответственно и для различных значений энергии. В этом случае $\vec{u} = \sum_{k_i} \vec{u}_i$, где \vec{u}_i – флюктуация, сгенерированная для определённого волнового числа k_i . Как и ранее, остается сложностью оценить наперед среднеквадратичное отклонение для проведения нормировки высоты спектральных линий для аппроксимации целевого спектра. Но мы можем сделать следующее, энергетический спектр турбулентности связан с кинетической энергией турбулентности $\kappa = \int_0^\infty E(k) dk$, отсюда мы можем взять, что $\kappa(k_m) = E(k_m)\Delta k$, и получаемую величину флюктуации скорости нормировать на значение $\sqrt{E(k_m)\Delta k}$.

Одним из других подходов состоит в нормировке не результирующего значения флюктуации, а в нормировке амплитуд мод Фурье. В отличие от нормировки результирующего вектора флюктуаций, в данном подходе на выходе также получаются различные амплитуды флюктуаций с сохранением зависимости от амплитуды спектра. Для ускорения процесса генерации можно использовать



Поле на картинке б представлено с линиями тока, рассчитанными вдоль оси y

Рисунок 3.2 — Поле флюктуаций сгенерированных трёхмерным стохастическим методом, цветом обозначена амплитуда флюктуаций

разложение лишь по одной тригонометрической функции, например лишь по функции косинуса. В итоге можно использовать разложение представленное в виде:

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = \alpha \sum_{n=1}^N \vec{p}_n \cos(\vec{k}_n \cdot \vec{r} + \omega_n \cdot t + \psi) \quad (3.3)$$

здесь, \vec{p}_n – амплитуды мод Фурье, генерируемые изначально на единичной сфере так, чтобы $\vec{p}_n \cdot \vec{k}_n = 0$, для сохранения удовлетворению уравнению неразрывности, с последующим привидением к длине равной $\sqrt{E(k_n)\Delta k}$, ψ_n – случайная фаза, добавленная для компенсации исключения нечетных мод, генерируемая например из равномерного распределения в пределах $-\pi$ до π , α – нормировочный коэффициент, который можно взять, например $\sqrt{\frac{2}{N}}$, как в методе Смирнова (2.2), либо провести нормировки на кинетическую энергию по аналогии с методом Шура (2.4): $\sqrt{\frac{1}{\sum_{n=1}^N E(k_n)\Delta k_n}}$. По построению амплитуд Фурье лучше

всего использовать последнее определение для нормировочного коэффициента $\alpha = \sqrt{\frac{\beta}{\sum_{n=1}^N E(k_n) \Delta k_n}}$, после проведения тестовых расчётов мы получили что оптимальным значение для коэффициента $\beta \approx 2$. Связано это с тем, чтобы в формуле (1.21) компенсировать коэффициент $\frac{1}{2}$

ВОТ ТУТ ДОПИСЫВАЮ

Глава 4. Валидация стохастического метода генерации синтетической турбулентности

Перед использованием метода стохастического моделирования необходимо оценить влияние параметров данного метода. В отличие от спектральных методов, смысл проверки параметров можно назвать в данном случае другим. От таких параметров как допуск по величине ковариации и количеству собственных значений, зависит не столько конечный результат, сколько требуемая вычислительная мощность. На примере одномерного моделирования рассмотрим влияние параметров числа находимых собственных значений и выбираемых значениям амплитуд ковариации. Число собственных чисел входит в конечную формулу для генерации случайных чисел с заданной корреляцией, в силу того, что используется в итоге конечное число случайных чисел, необходимо проследить как влияет на решение их число. Также при нахождении собственных чисел появлялись отрицательные собственные числа, что является нежелательным эффектом. Связано это может быть с упомянутым в главе 2 свойством неотрицательной определённости матрицы ковариаций. Из этого не следует возможность в появлении отрицательных собственных чисел, но из-за машинного шума компоненты матрицы ковариации могут быть меньше 0, когда они равны в точности 0 и побудить появление отрицательных собственных чисел. Также необходимо учесть, что метод нахождения собственных чисел построен на итерационном процессе, в котором также может накапливаться ошибка.

При рассмотрении допуска по величине ковариаций можно достаточно сильно сэкономить на заполненности матрица ковариаций, тем самым увеличив, например разбиение по сетке, либо увеличив хранимое число собственных чисел. Но это также влияет на коррелированность пар значений при случаях когда ковариация между ними равна 0. Также есть другая цена у допуска, больше значений матрицы ковариаций нулевые, хоть они и не хранятся в разреженной матрице, что как отмечалось выше, может спровоцировать появление отрицательных собственных чисел. В целом, можно использовать допуск одновременно исключая отрицательные собственные числа.

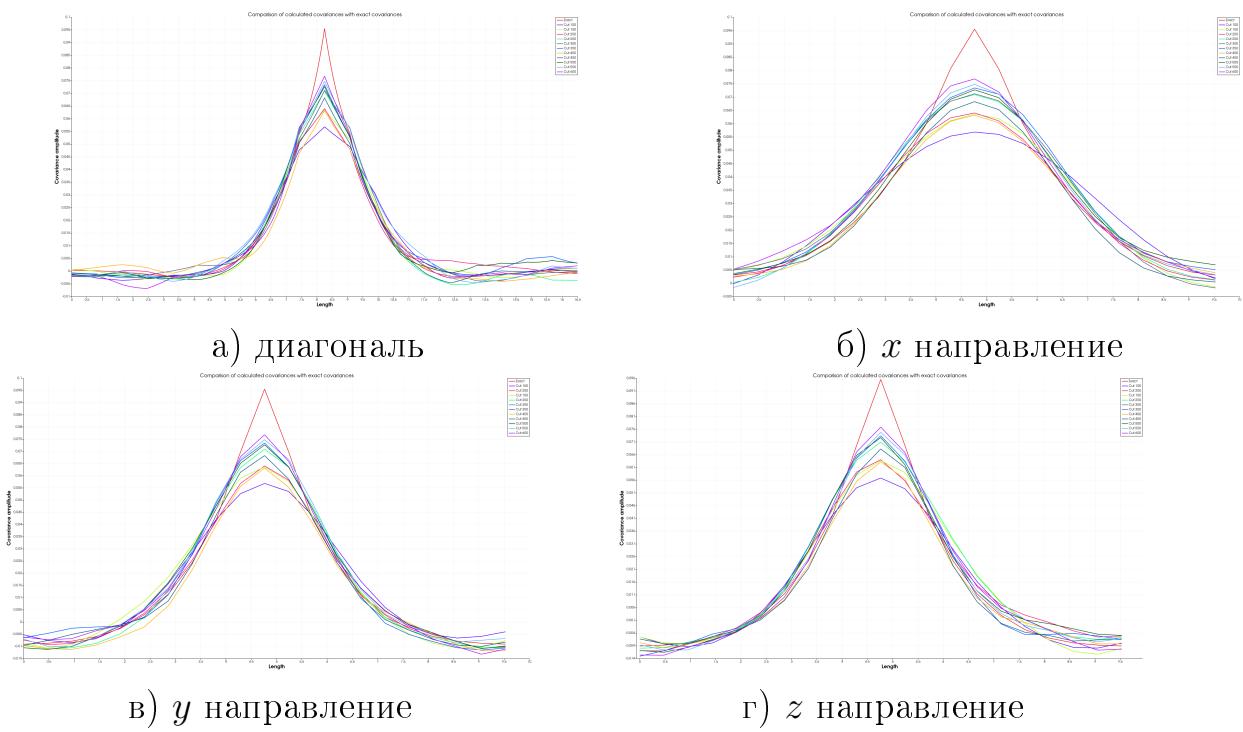
Как говорилось выше, для оценки влияния рассматриваемых параметров нужно было провести несколько вычислительных экспериментов. Число соб-

ственных чисел варьировалось от 100 до 600 с шагом 50, допуск по амплитудам ковариации варьировался от 0% до 5% с шагов в 1%. Критерием удовлетворения заданным параметрам является близость ковариационной функции построенного поля к задаваемой. Задаваемая ковариационная функция является по определению Фурье образом от функции турбулентного спектра, задаваемого аналитически.

Рассмотрим сравнение между полученными данными для всех случаев в срезах по осям x, y, z (линия проходит через центр куба, совпадающий с началом координат) и диагонали между точками $\{-5, -5, -5\}$ и $\{5, 5, 5\}$ внутри куба со стороной равной 10, и числом разбиений 21 как для пространства Фурье и ковариационной функции, так и для разбиения реального пространства. Пространственная ковариация рассчиталась с использованием набора из 1000 генераций для одного набора собственных значений. Все рассматриваемые сечения проходят через центр, так как вид ковариационной функции близок к виду Гауссовой кривой либо кривой Лоренца с пиками в центре координат.

Как упоминалось ранее, в общем случае, метод может иметь в наборе собственных значений также отрицательные собственные числа. Их число зависит не только от собираемой матрицы ковариаций, но также и от параметров обрачивания этой матрицы. Без ограничений по числу итераций, а также с алгоритмом прохода по наибольшим собственным значениям среди 9200 собственных чисел (совпадает с размерностью матрицы ковариаций) около 200 являются отрицательными, это около 2% от общего числа собственных чисел. Хоть это число и мало, необходимо оценить, сколько собственных чисел стоит брать для хорошего удовлетворения ковариационной функции. Число отрицательных собственных чисел также может расти/уменьшаться с изменением как параметров сетки, так и в целом параметров спектра, итерационного метода и самого базиса метода стохастического моделирования (например при использовании кокригинга). Хоть 2% сама по себе достаточно малая величина, может оказаться так, что необходимо брать полный набор собственных значений и векторов для генерации поля турбулентности.

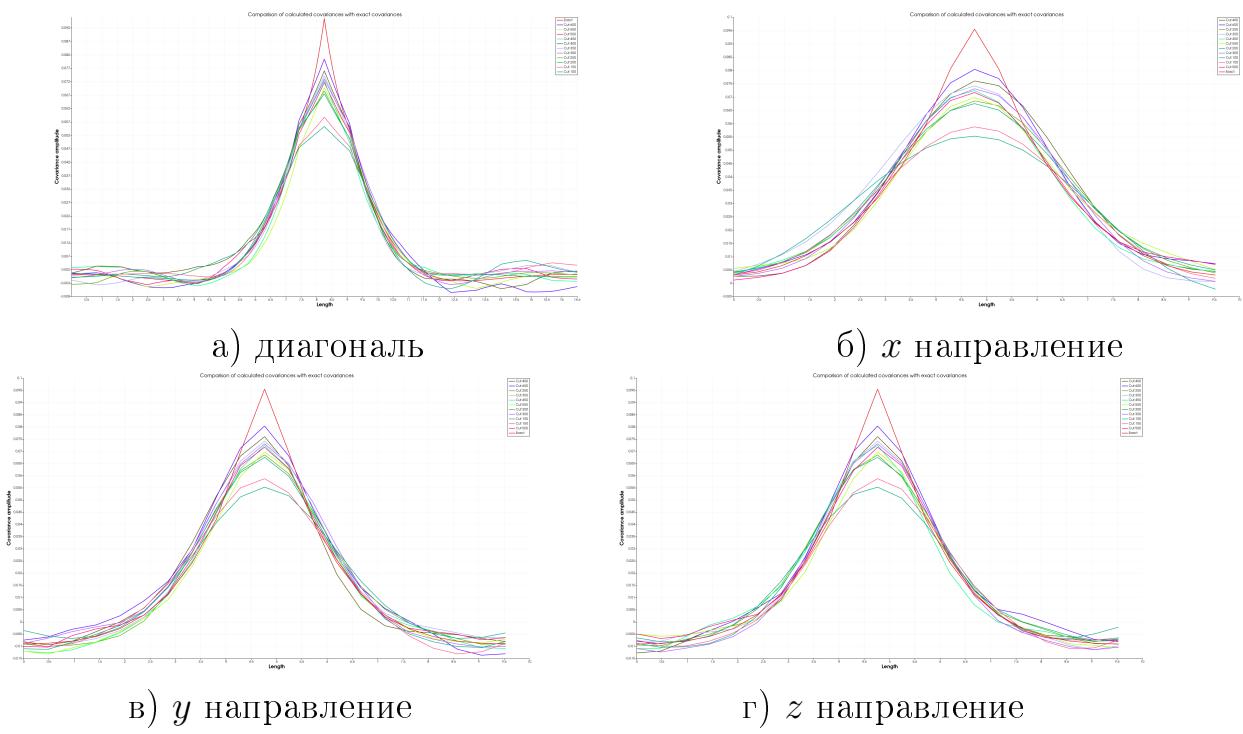
Так как расчёт статистических параметров, например ковариационной функции, требует какого-то набора реализаций полей скорости, необходимо также проверить, как влияет число генерируемых полей для подсчёта статистических характеристик. Это важный критерий в силу того, что основными



Сравнение ковариационной функции, допуск 0%, для направлений а) вдоль диагонали, б) вдоль оси x , в) вдоль оси y , г) вдоль оси z

Рисунок 4.1 — Сравнение ковариационной функции для допуска по амплитуде ковариаций в 0% для различных направлений в рассматриваемой области

параметрами валидации являются статистические величины. Естественно, наиболее точный случай это бесконечное число реализаций, но это также несёт в себе дополнительные временные затраты. Например, если необходимо для случая генерации поля на некоторой сетке оценить то, как хорошо метод подходит для использования на данной топологии сетки, или, например, какое число собственных значений и векторов стоит брать для последующей генерации флюктуации необходимо провести статистическое исследование, дабы не увеличивать требуемое время, стоит провести оценку некоторого оптимального числа реализаций, на котором можно проводить последующие валидации. На рисунке ?? ниже представлены сравнение ковариационных функций, полученных в результате использования n реализаций поля скоростей для подсчёта. В целом, для числа реализаций равного 1000, уже наблюдается хорошее совпадение с целевым спектром вблизи его пика, чем дальше мы отдаляемся от центра куба, тем сильнее начинает играть роль число взятых сгенерированных полей. С ростом числа взятых для расчёта реализаций также уменьшается разница между целевой ковариационной функцией и рассчитанной.

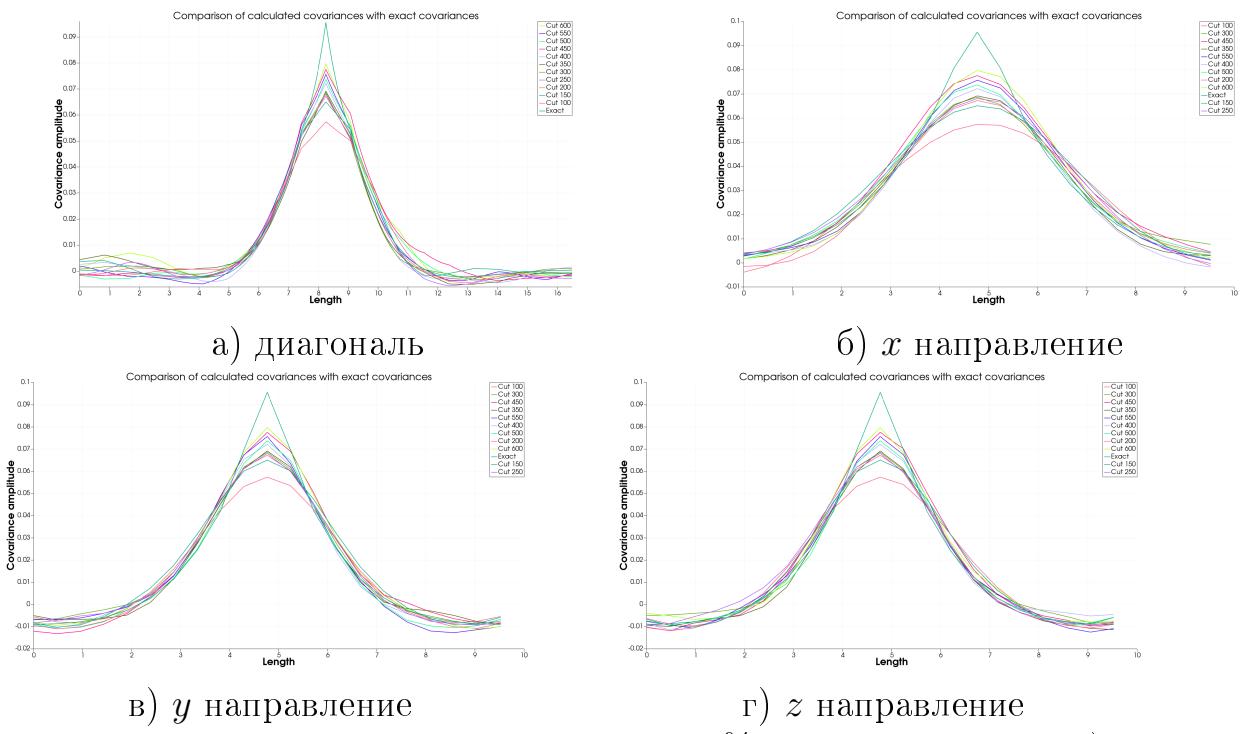


Сравнение ковариационной функции, допуск 1%, для направлений а) вдоль диагонали, б) вдоль оси x , в) вдоль оси y , г) вдоль оси z

Рисунок 4.2 — Сравнение ковариационной функции для допуска по амплитуде ковариаций в 1% для различных направлений в рассматриваемой области

В таблице ?? представлены значения разности между пиком точной функции и пиками для функций отвечающим различному числу взятых собственных чисел.

В таблице ?? представлены характеристики характеризующие близость расчётной ковариационной функции с точной. Как говорилось ранее, для 1000 реализаций уже наблюдается хорошее соответствие, таким образом для быстрой оценки, вполне может хватить взятия 1000 модельных полей. Как можно видеть разница между пиковыми значениями достаточно сильно изменяется и в данном случае не в полной мере характеризует точность расчёта статистики, это следует из того факта, что интегральное значение квадрата разности расчётной и аналитической функций уменьшается с ростом числа взятых реализаций, что является более жестким критерием близости двух функций. При числе взятых реализаций в районе 5000-6000 наблюдается наибольший баланс между обеими характеристиками. Также, примерно при этих же значениях разность между двумя функциями начинает уменьшаться более медленно. В общем для получения приемлемой оценки статистических параметров за наилучшее время стоит проводить статистический анализ на количестве реализаций в районе 5000.



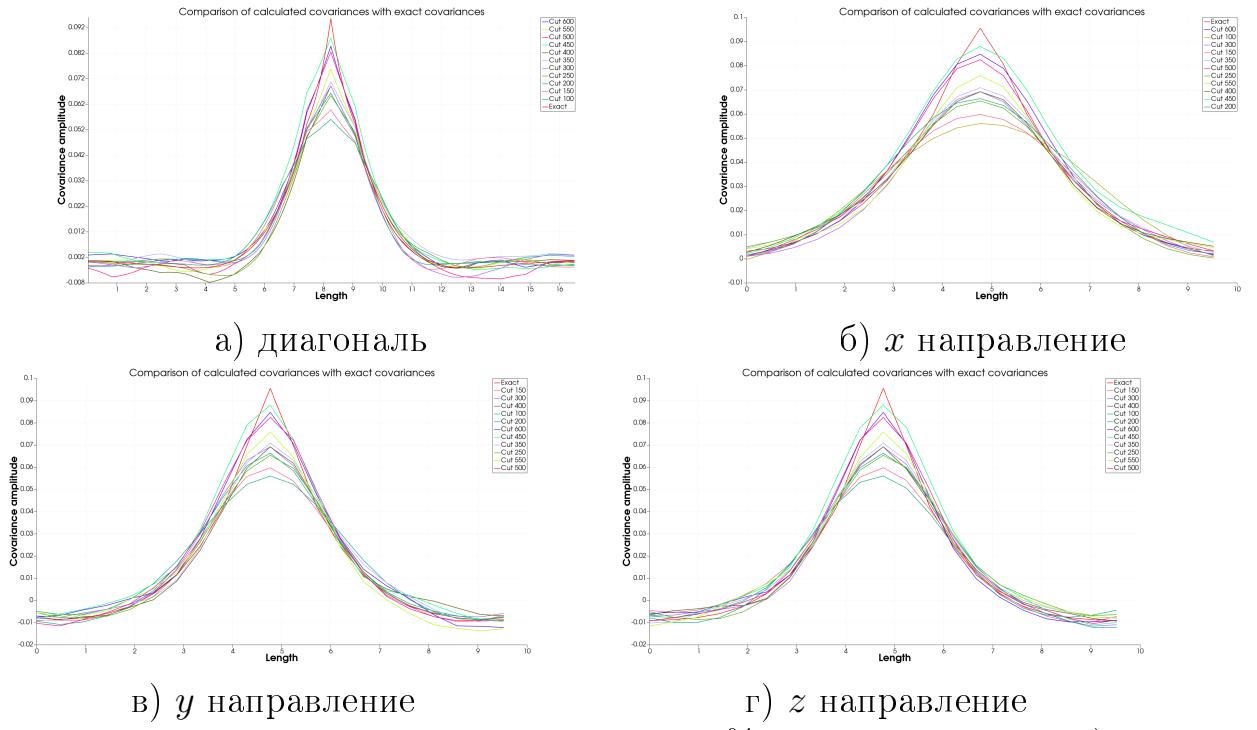
Сравнение ковариационной функции, допуск 2%, для направлений а) вдоль диагонали, б) вдоль оси x , в) вдоль оси y , г) вдоль оси z

Рисунок 4.3 — Сравнение ковариационной функции для допуска по амплитуде ковариаций в 2% для различных направлений в рассматриваемой области

Как можно видеть из таблиц 1 и 2, а также рисунков 4.1, 4.2, 4.3, 4.4, 4.5, 4.6 нет чётких значений параметров для которых наблюдается наилучшее соотношение сходимости между численным и точным графиками ковариационной функции. Также стоит отметить, что при проведении численных экспериментов наблюдались отрицательные собственные числа, которые были отброшены при дальнейших расчётах так как их число на фоне общего числа собственных чисел достаточно мало.

Перейдем к рассмотрению генерации турбулентных флюктуаций с применением кокригинга для стохастического метода. Как было описано в 1.3 и в отличие от ранее рассмотренного одномерного подхода, необходимо иметь тензоры спектра скоростей и ковариаций. Используется подход в сборке матриц ковариаций в которой отдельные элементы отвечают за отдельные компоненты скоростей.

При построении тензоров задавалась их симметричность. Связано это с текущим рассмотрение в данной работе однородной и изотропной турбулентности. В более общем случае тензор пространственной ковариации несимметричен. Также симметричность требуется из определения тензора спектра скоростей.



Сравнение ковариационной функции, допуск 3%, для направлений а) вдоль диагонали, б) вдоль оси x , в) вдоль оси y , г) вдоль оси z

Рисунок 4.4 — Сравнение ковариационной функции для допуска по амплитуде ковариаций в 3% для различных направлений в рассматриваемой области

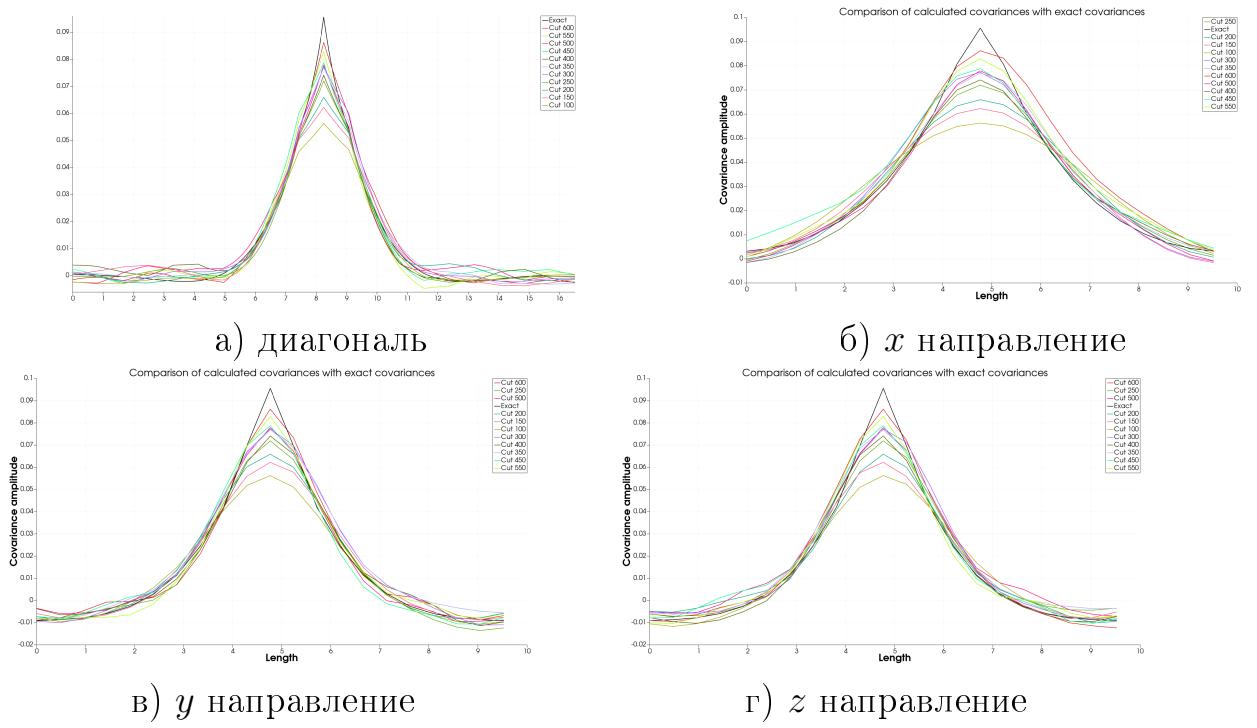
Так как метод требует построения глобальной матрицы, а также нахождения её собственных значений и собственных векторов мы немного экономим память для алгоритма, тем самым имея возможность, например, сгустить сетку, либо взять большее число собственных значений и векторов.

Целевой спектр задается в следующем виде

$$E(k) = \begin{cases} k^2, & \text{если } x \leq 0 \\ k^{\frac{5}{3}}, & \text{если } 0 < k < 3 \\ k^{-3}, & k \geq 3 \end{cases}$$

Как и при рассмотрении спектрального метода, также используется вычислительная область в виде куба, центрированного в начале координат со стороной $l = 10$, как для пространства Фурье, так и для физического пространства. Опорное волновое число в задаче $k_0 = \frac{\pi}{5}$.

Рассмотрим качественно получаемое поле флуктуаций. Ниже представлены полное сгенерированное поле скоростей, а также поле на срезе в плоскости xy при $z = 0$, под различными углами. Наблюдаются как большие вихревые



Сравнение ковариационной функции, допуск 4%, для направлений а) вдоль диагонали, б) вдоль оси x , в) вдоль оси y , г) вдоль оси z

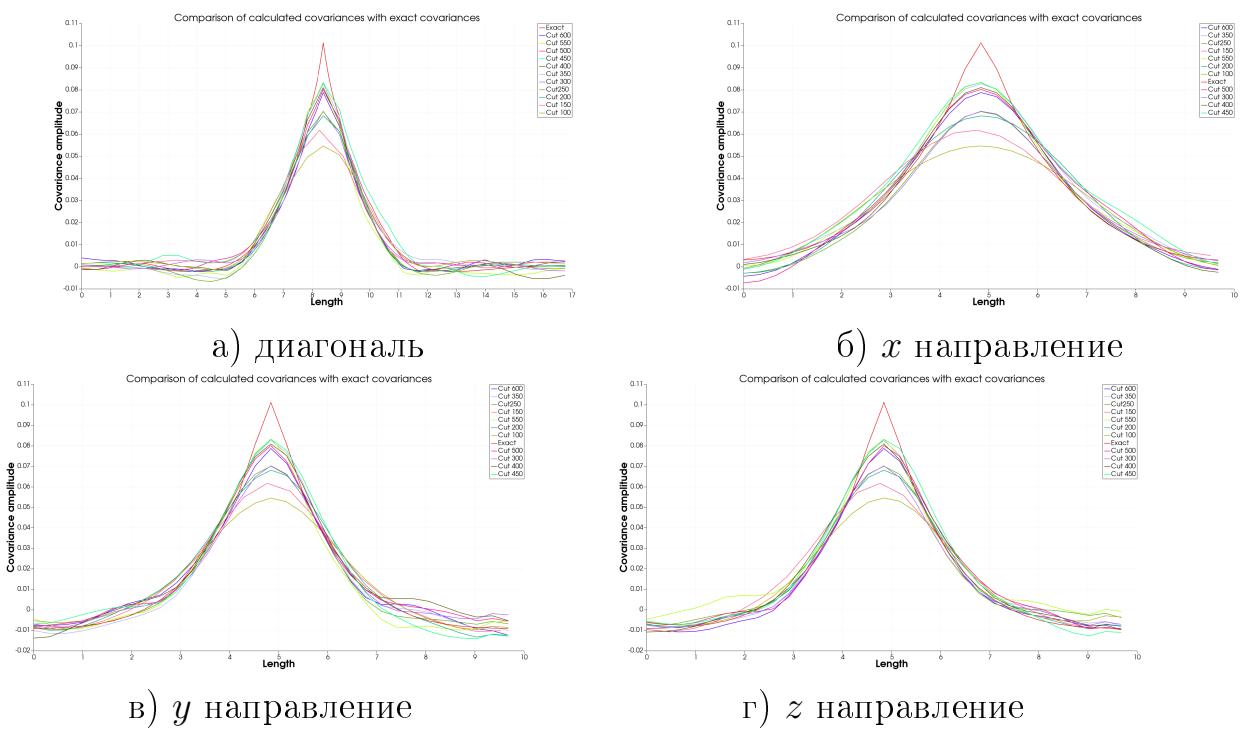
Рисунок 4.5 — Сравнение ковариационной функции для допуска по амплитуде ковариаций в 4% для различных направлений в рассматриваемой области

структурь, так и меньшие. Так как пик задаваемого спектра находится при $k \approx 1.0$ мы можем оценить средний размер генерируемых вихрей $l = \frac{2\pi}{k} \approx 2\pi$, тем самым мы можем примерно выделить преобладающие вихри. Цветом представлена амплитуда вектора флюктуации, наибольшая амплитуда флюктуаций $v_{max} = 6.25$, наименьшая $v_{min} = 0.055$.

Приведём тепловые карты тензора ковариаций полученного из целевого спектра при помощи (3.2) и (1.20).

Первое, что необходимо заметить, это пространственное вытягивание компонент тензора в смежных плоскостях, в плоскостях, нормальных к текущей компоненте наблюдается симметрия ковариационной функции. При сравнении с численно полученным результатом также учтём это. Вне диагональные компоненты не представлены, так как их значение можно считать нулевыми.

Ниже представлены графики пространственной ковариации рассчитанные на 10000 реализаций полей флюктуаций полученные в результате трёхмерного стохастического моделирования. На рисунках представлены значения вдоль диагонали куба от точки $\{-5, -5, -5\}$ до точки $\{5, 5, 5\}$ и значения вдоль осей координат.

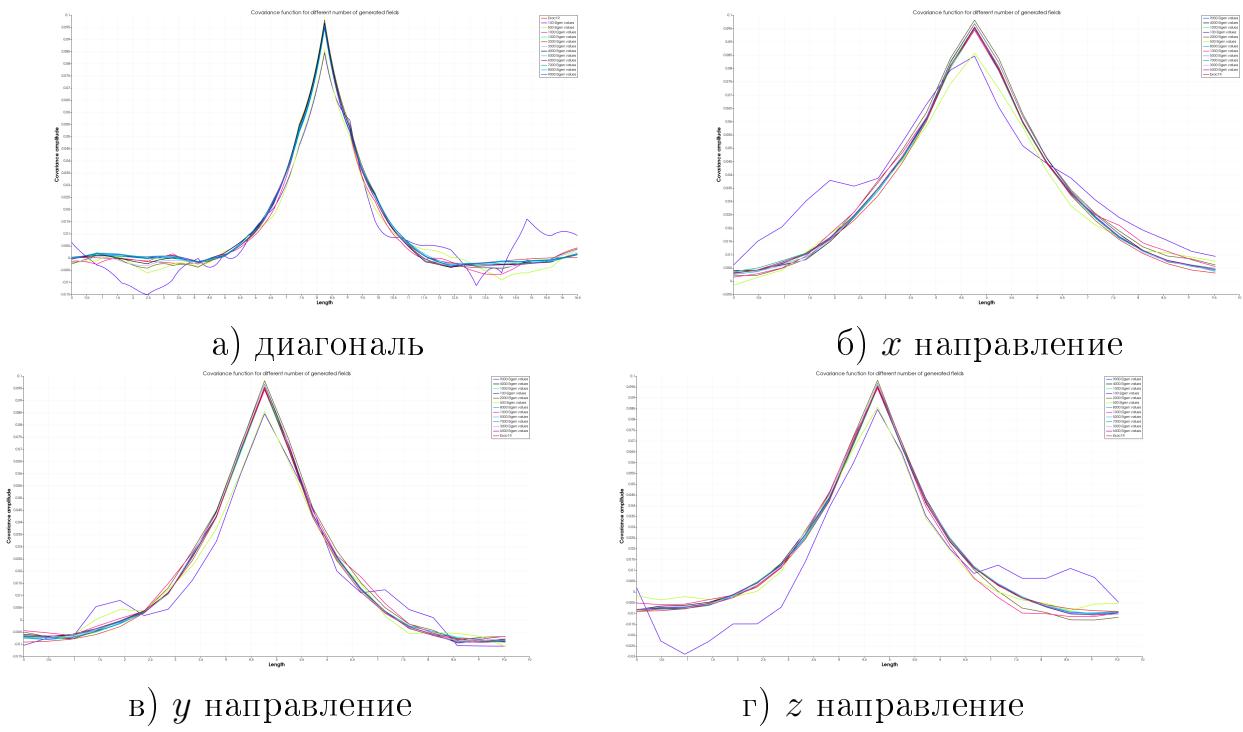


Сравнение ковариационной функции, допуск 5%, для направлений а) вдоль диагонали, б) вдоль оси x , в) вдоль оси y , г) вдоль оси z

Рисунок 4.6 — Сравнение ковариационной функции для допуска по амплитуде ковариаций в 5% для различных направлений в рассматриваемой области

Как можно видеть из приведённых выше графиков, наблюдается вытягивание вдоль соответствующих компонент. Также наблюдается достаточно высокая визуальная симметрия относительно начала координат. С ростом расстояния наблюдаются большие отклонения ковариационной функции, связанные с тем, что выборка, на которой рассчитывались ковариационные функции, конечна. Ниже представлены сравнения полученных ковариационных функций для диагональных компонент в различных направлениях с задаваемыми, а также с симметризованной относительно начала координат расчётной ковариационной функцией.

По правой части графиков можно заметить насколько расчётная ковариационная функция не симметрична. Из-за этого дальнейшие расчёты тензора спектра скоростей и энергетического спектра проводились на симметризованной ковариационной функции. Процедура симметризации спектра необходима для устранения фазового смещения будущего тензора спектра скоростей, так как в ином случае при проведении преобразования Фурье, возникает мнимая часть, связанная с фазовым сдвигом, возникающим в следствии несимметричности функции, так как использовалось быстрое преобразование Фурье, требу-



Сравнение ковариационной функции, допуск 0%, для направлений а) вдоль диагонали, б) вдоль оси x , в) вдоль оси y , г) вдоль оси z

Рисунок 4.7 — Сравнение ковариационной функции для допуска по амплитуде ковариаций в 0% для различного числа взятых реализаций полей флюктуаций для расчёта ковариационной функции в рассматриваемой области

ющее искусственного продолжения периодического сигнала. Возникающий скачок между продолженными ковариационными функциями, вносит фазовое смещение, откуда и возникает мнимая часть преобразования. Можно сказать, что мы рассматриваем не весь куб, а лишь его первый октант, данные для которого были симметрично продолжены относительно начала координат и граничащих плоскостей координат.

Из-за мало корреляции компонент скоростей на больших расстояниях, также присутствуют большие отклонения ковариационной функции относительно задаваемой, что также вносит свою небольшую ошибку. Этот эффект отражается на последующем преобразовании Фурье при переходе от функций пространственной ковариации к тензору спектра скоростей. Ниже представлено сравнение расчётных значений тензора спектра скоростей с полученными применением формулы (3.2).

Как можно заметить, основные различия между вычисленными и заданными компонентами тензора присутствуют при $\Phi \approx 0$. Далее используя формулу (3.2) перейдём от тензора спектра скоростей к энергетическому спектру.

Таблица 1 — Величина разности между пиками для смоделированных ковариационных функций с пиком полученным из аналитического спектра преобразованием Фурье

Число собственных значений	Допуск 0%	Допуск 1%	Допуск 2%	Допуск 3%	Допуск 4%	Допуск 5%
100	-0.03868	-0.04020	-0.03814	-0.03944	-0.03927	-0.0466
150	-0.03188	-0.03672	-0.03047	-0.03574	-0.03329	-0.03375
200	-0.03150	-0.02799	-0.02830	-0.02918	-0.02963	-0.03303
250	-0.02461	-0.02697	-0.02748	-0.03013	-0.02360	-0.03111
300	-0.02429	-0.02242	-0.02693	-0.02630	-0.01824	-0.03094
350	-0.02210	-0.02132	-0.02638	-0.02462	-0.01856	-0.01853
400	-0.03234	-0.01948	-0.02341	-0.02631	-0.02144	-0.02025
450	-0.02727	-0.02309	-0.01800	-0.007552	-0.01678	-0.01803
500	-0.02283	-0.02383	-0.02184	-0.01308	-0.01767	-0.02109
550	-0.02075	-0.02574	-0.01990	-0.01961	-0.01268	-0.01786
600	-0.01870	-0.01512	-0.01590	-0.01079	-0.009351	-0.02251

Примечание – значения заданы до 4 значащих цифр

Полученный спектр хорошо сходится с целевым спектром области наиболее энергонесущих мод. Есть сходство со спектром получаемым в результате метода Крайшнана, в частности резкое убывание, предположительно связанное с критерием Нейквиста.

Таблица 2 — Величина $\iiint_V (R - R_{exact})^2 dV$ смоделированных ковариационных функций с пиком полученным из аналитического спектра преобразованием Фурье

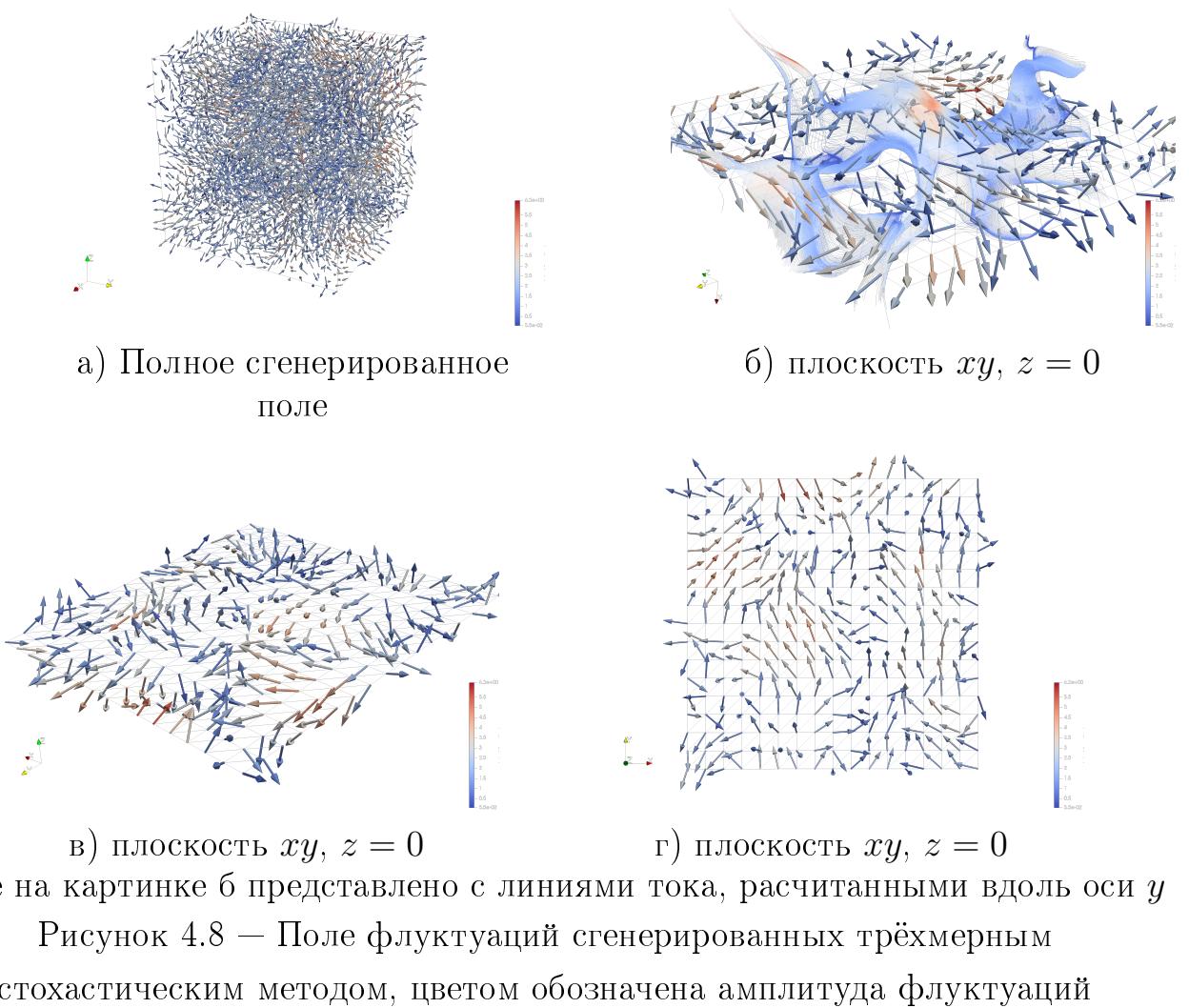
Число собственных значений	Допуск 0%	Допуск 1%	Допуск 2%	Допуск 3%	Допуск 4%	Допуск 5%
100	0.005392	0.005629	0.005147	0.005709	0.005091	0.005871
150	0.004312	0.004123	0.004802	0.004546	0.004971	0.005351
200	0.004390	0.004272	0.003796	0.005035	0.005468	0.007215
250	0.004358	0.003895	0.004723	0.004545	0.006956	0.007789
300	0.004783	0.005905	0.004314	0.005086	0.006408	0.007328
350	0.005015	0.005662	0.005505	0.005314	0.007291	0.008133
400	0.005787	0.006087	0.005244	0.004887	0.006656	0.01095
450	0.005369	0.004789	0.005936	0.007729	0.006879	0.009317
500	0.004492	0.004212	0.004497	0.006602	0.006941	0.007891
550	0.004914	0.004454	0.004986	0.005357	0.008319	0.01020
600	0.004977	0.007869	0.006807	0.007966	0.008000	0.007966

Примечание – значения заданы до 4 значащих цифр

Таблица 3 — Интегральные величины характеризующие точность рассчитываемых статистических характеристик

Число реализаций	Разница между пиками	$\iiint_V (R - R_{exact})^2 dV$
100	-0.01090	0.06227
500	-0.00985	0.01167
1000	-0.00119	0.00697
2000	0.002638	0.003698
3000	0.001430	0.002393
4000	0.001282	0.001941
5000	0.000118	0.001532
6000	-0.00052	0.001211
7000	0.000171	0.001097
8000	0.000160	0.0009520
9000	-0.00025	0.0008152
10000	-0.00104	0.0007344

Примечание – значения заданы до 4 значащих цифр



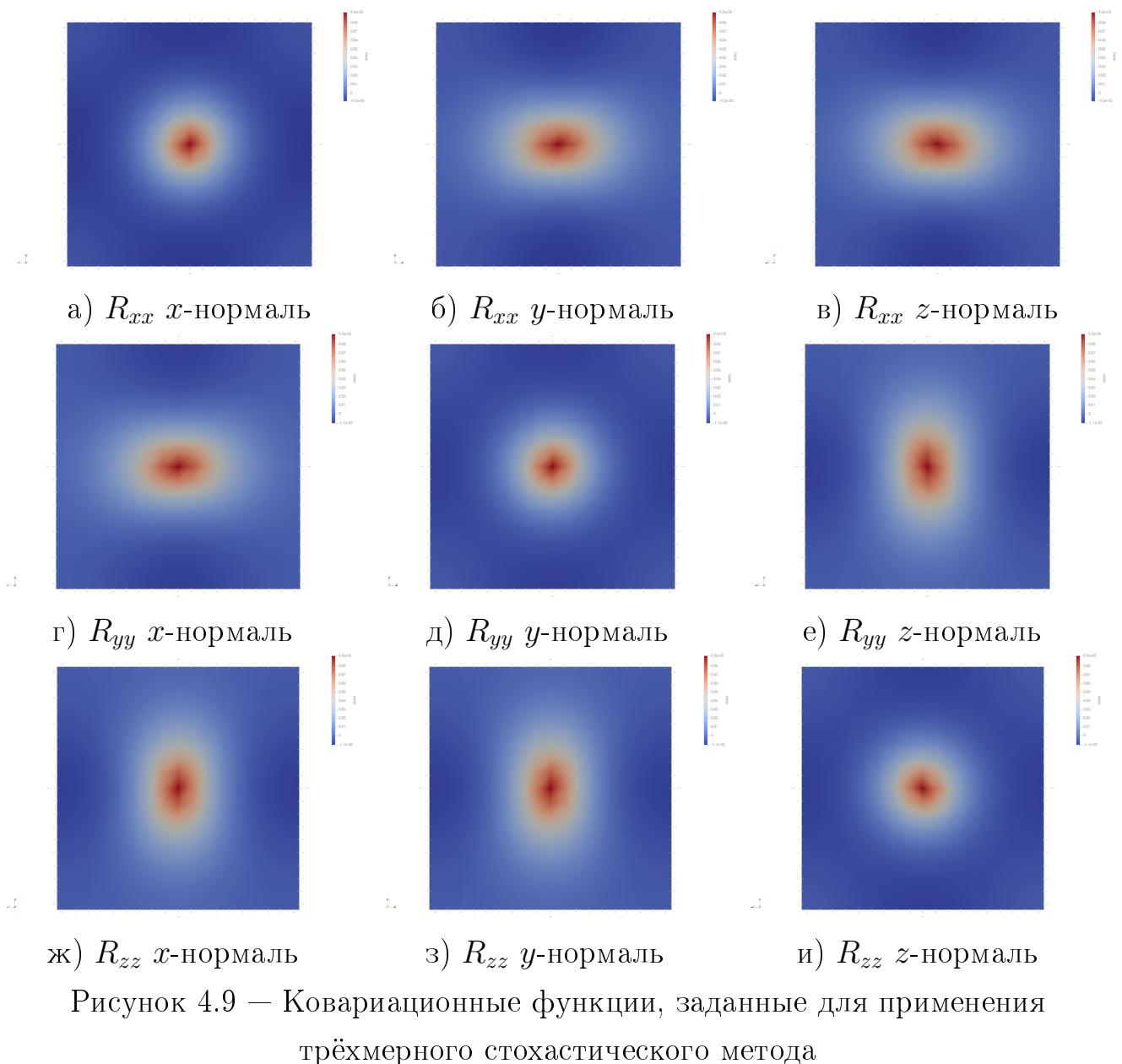


Рисунок 4.9 — Ковариационные функции, заданные для применения трёхмерного стохастического метода

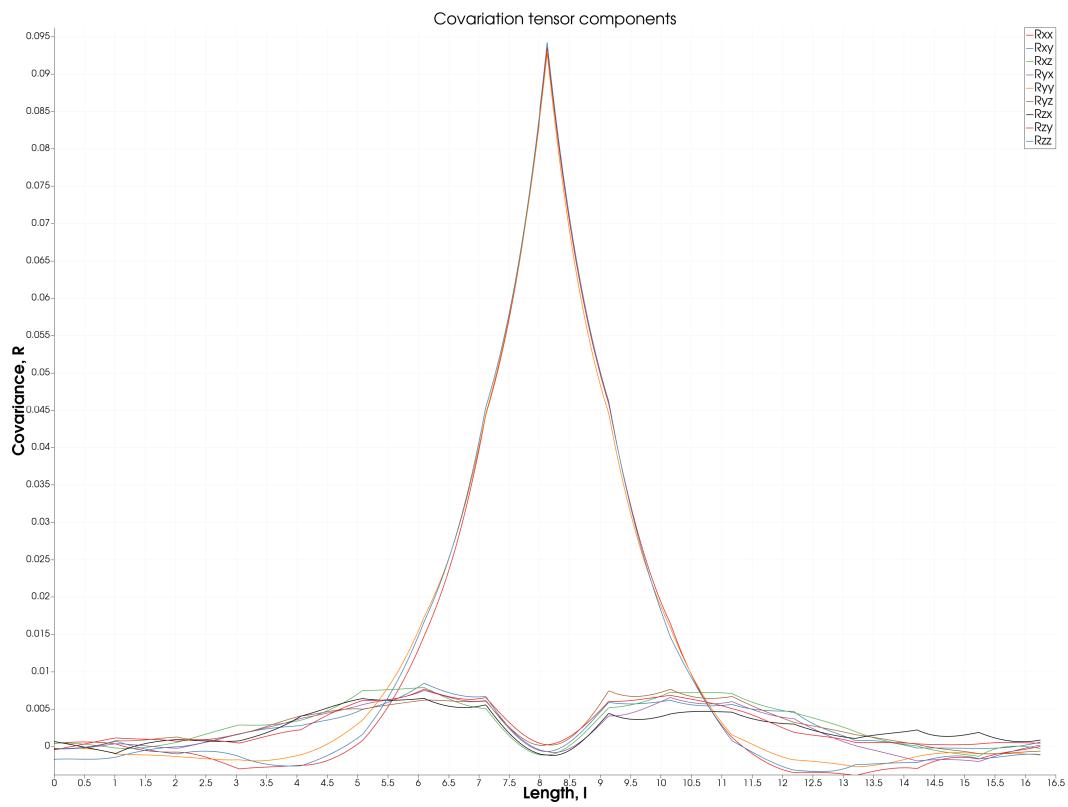


Рисунок 4.10 — Расчёчная ковариационная функция R_{ik} на основе стохастического метода вдоль диагонали области

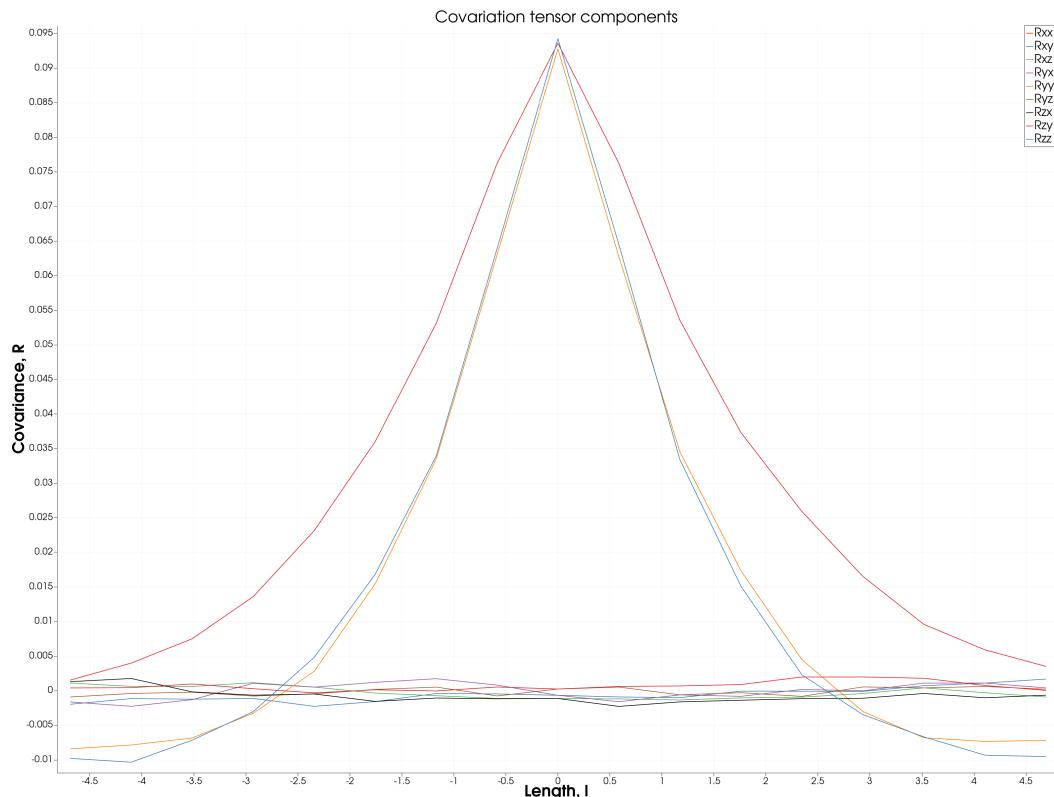


Рисунок 4.11 — Расчёчная ковариационная функция R_{ik} на основе стохастического метода вдоль оси x области

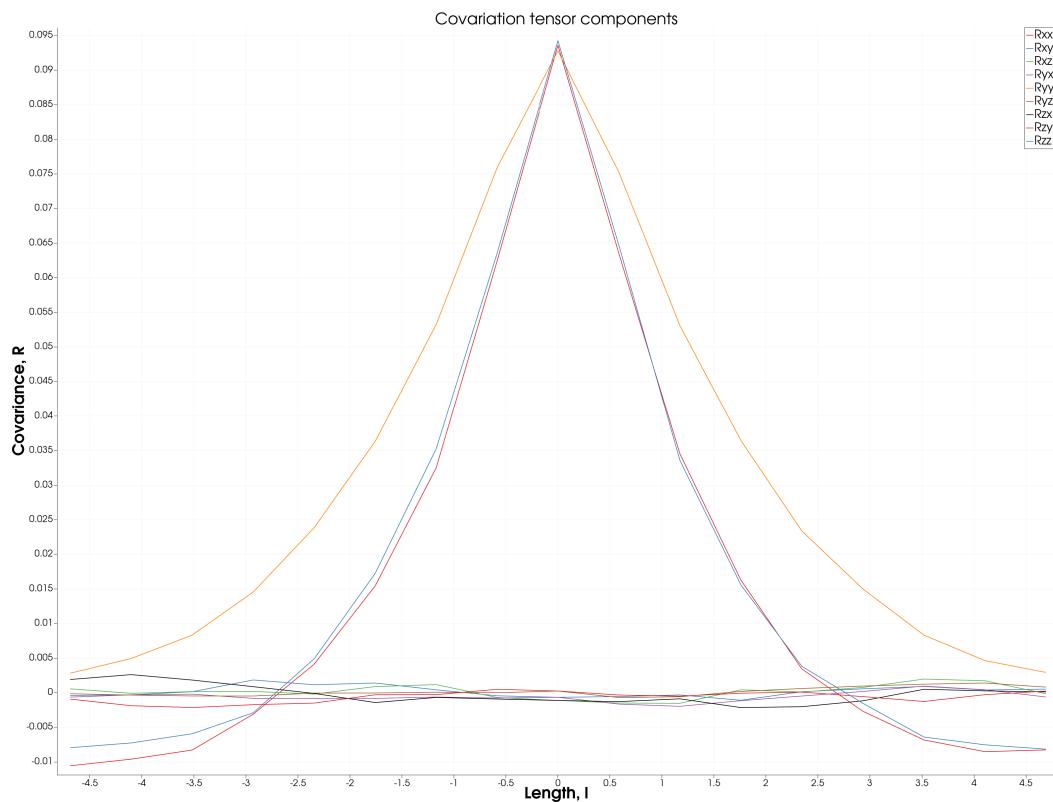


Рисунок 4.12 — Расчётная ковариационная функция R_{ik} на основе стохастического метода вдоль оси y области

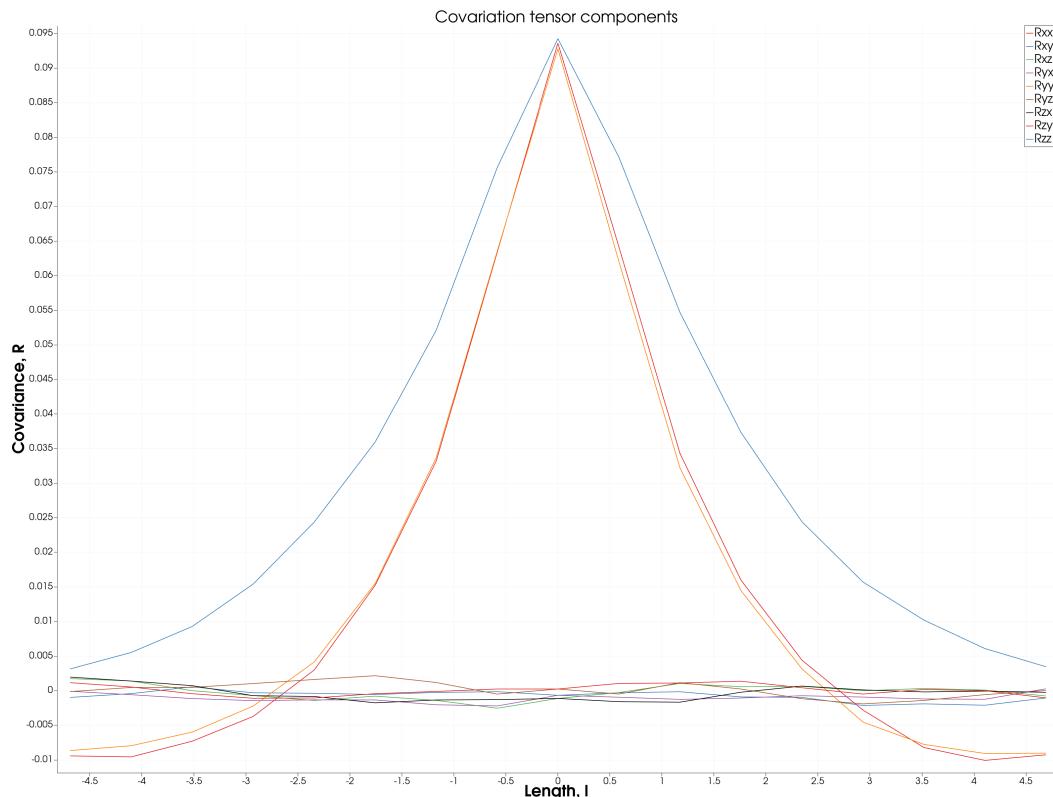


Рисунок 4.13 — Расчётная ковариационная функция R_{ik} на основе стохастического метода вдоль оси z области

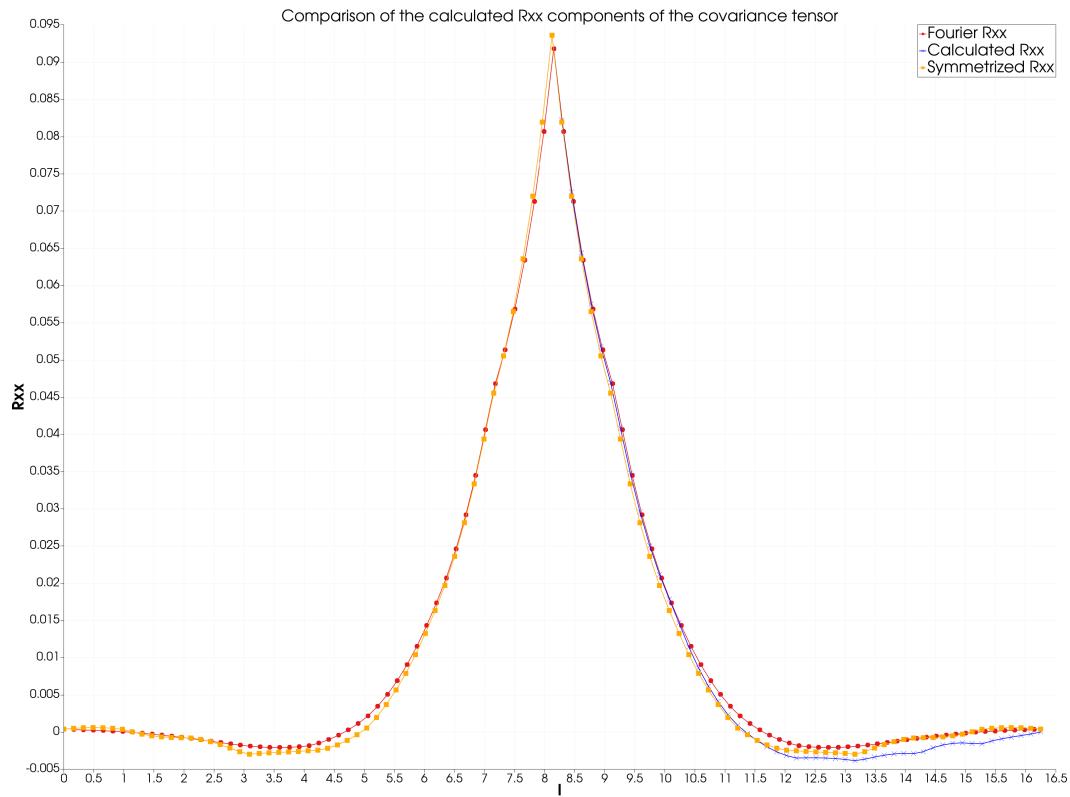


Рисунок 4.14 — Расчётная ковариационная функция R_{xx} на основе стохастического метода вдоль диагонали области

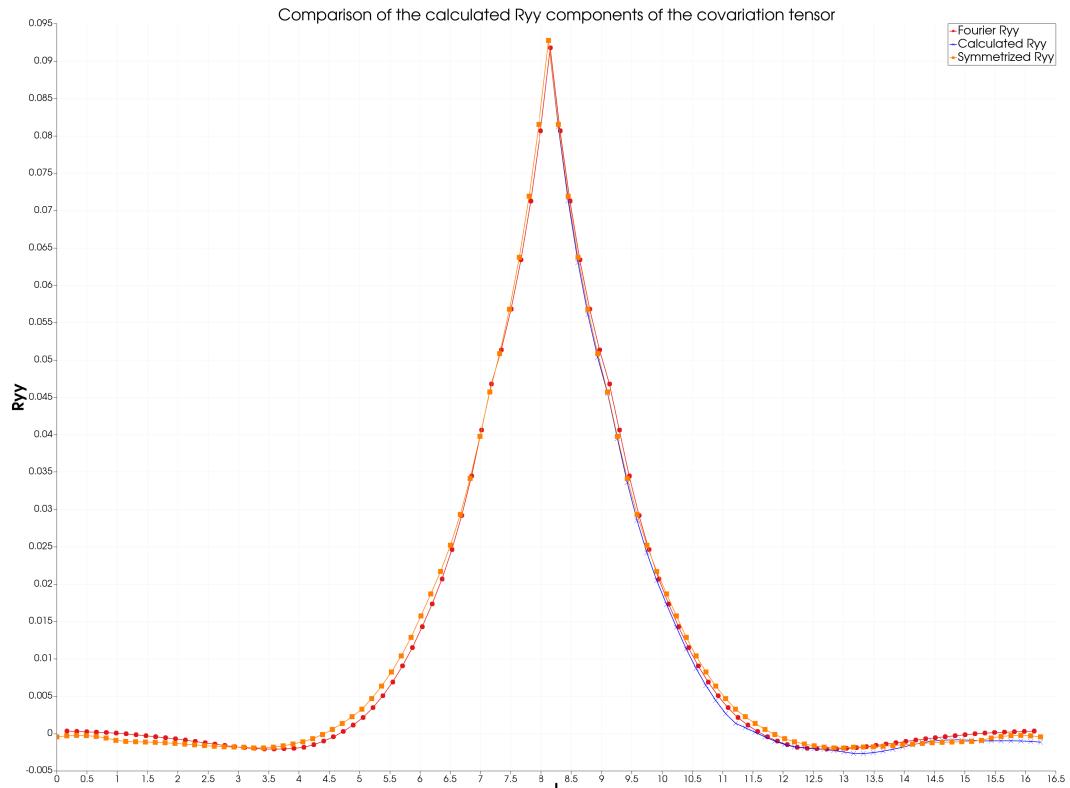


Рисунок 4.15 — Расчётная ковариационная функция R_{yy} на основе стохастического метода вдоль диагонали области

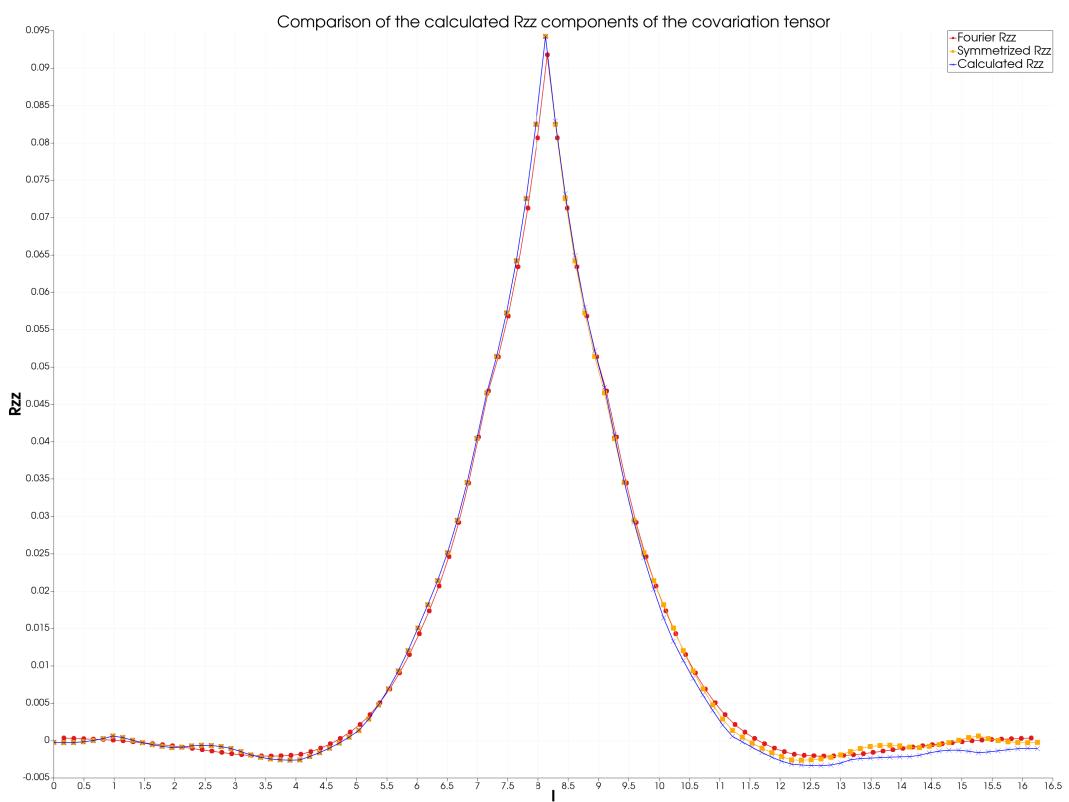
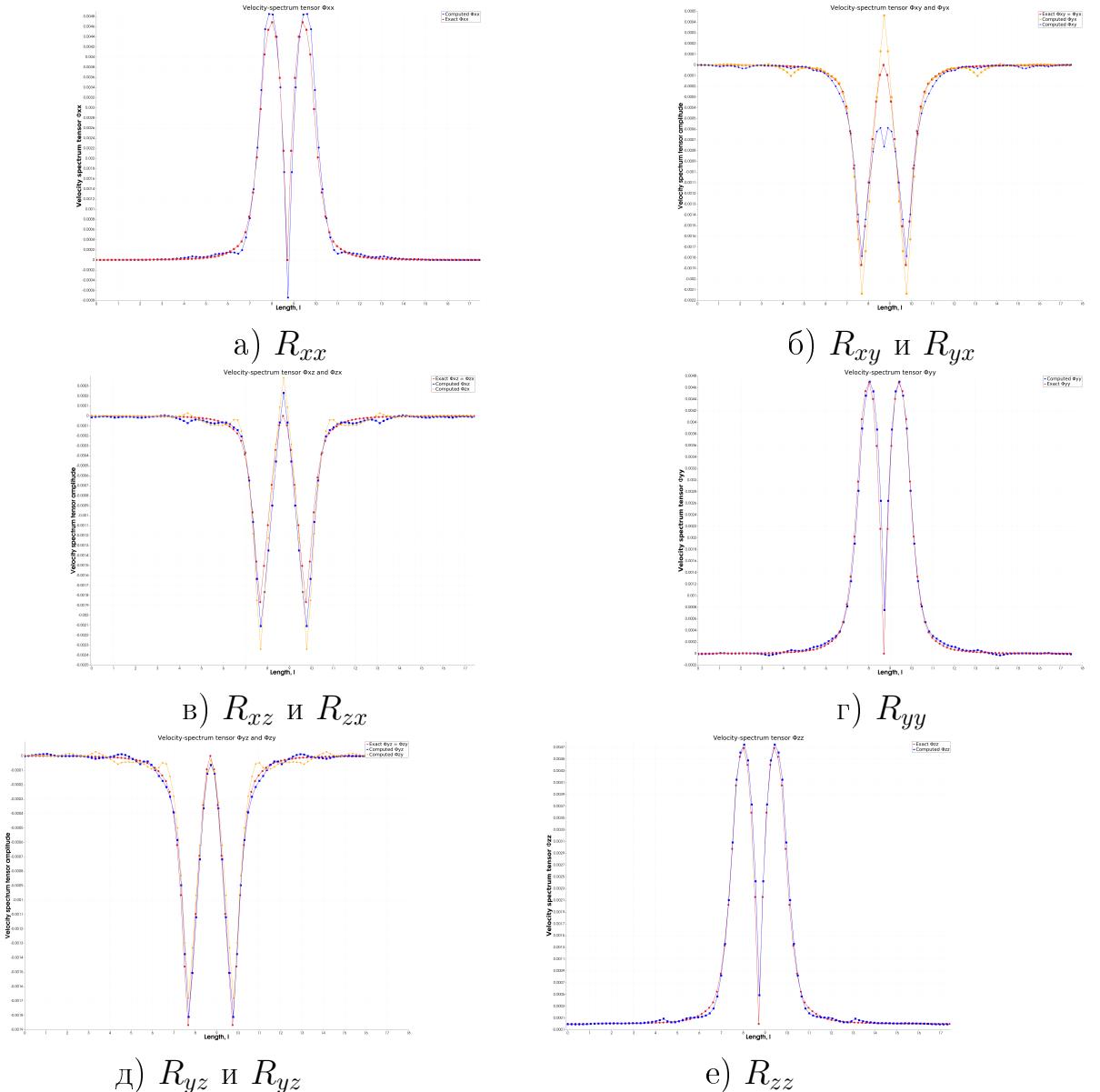


Рисунок 4.16 — Расчёчная ковариационная функция R_{zz} на основе стохастического метода вдоль диагонали области



Функции тензора спектра энергий представлены дволь диагонали куба в пространстве фурье $n = 17$, $k_l = 10$

Рисунок 4.17 — Ковариационные функции, заданные для применения трёхмерного стохастического метода

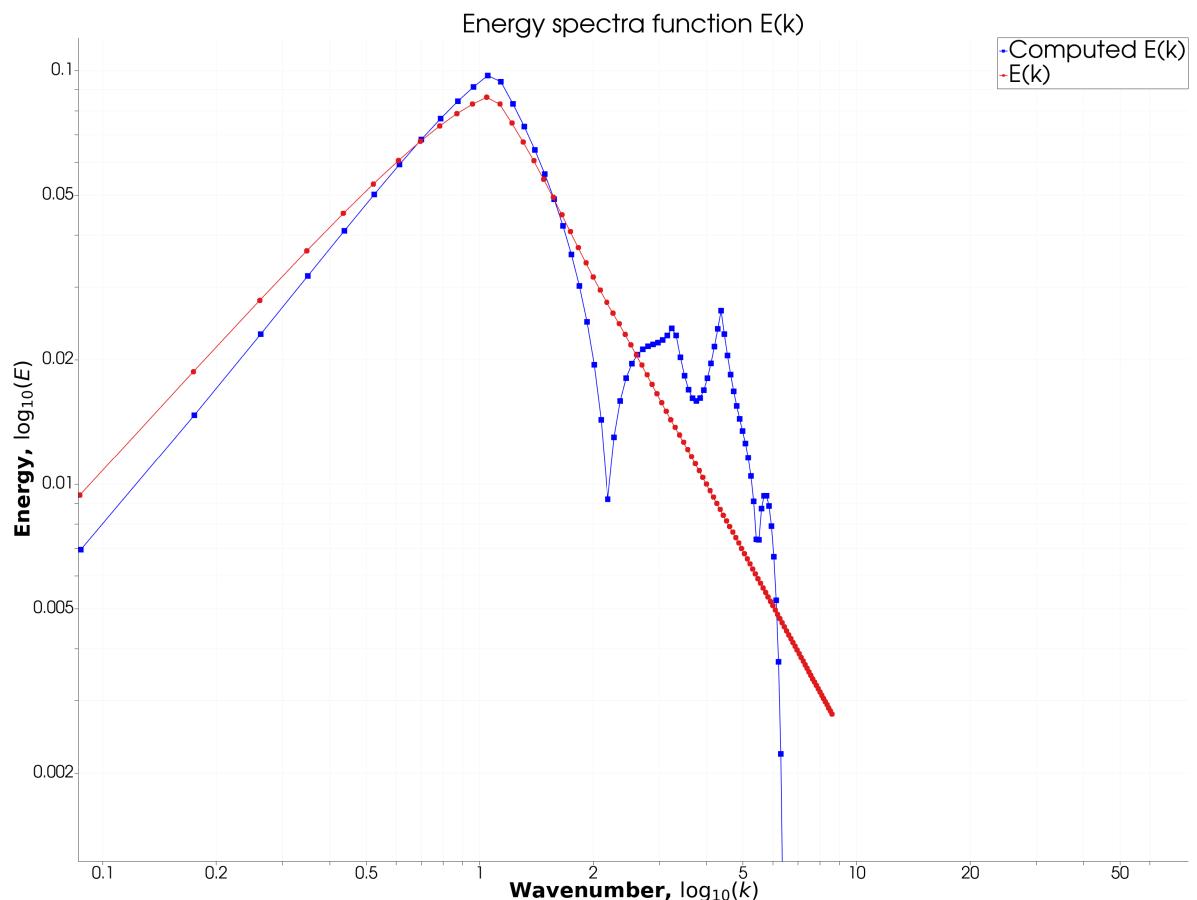


Рисунок 4.18 — Энергетический спектр поля скоростей полученный в результате стохастического моделирования в сравнении с целевым спектром в логарифмических координатах

Заключение

Первоначальное сравнение методов дало следующие преимущества и недостатки спектрального метода и стохастического метода друг с другом.

Скорость исполнения выше для спектрального метода, даже с учётом того факта, что используемая библиотека линейной алгебры проводит распараллеливание вычислений собственных векторов и значений для ковариационной матрицы. Но это касательно лишь единичной генерации. Если число необходимых сгенерированных полей существенно растёт, более выгоден с точки зрения затрачиваемого времени стохастический метод, так как решив систему один раз, любая последующая генерация ведёт за собой простейшее умножение некоторого сгенерированного вектора на собственные значения, что намного быстрее чем проведение алгоритма спектрального метода.

В плане требуемой памяти также более предпочтительным выбором может стать спектральный метод, так как для генерации флюктуации необходимо хранить лишь сгенерированные случайные числа, что сильно экономнее начального хранения матрицы (даже в разреженном виде) в методе стохастического моделирования, без учёта последующего требования памяти на хранение собственных векторов. Но также после проведения процедуры нахождения собственных чисел и векторов, при небольшом их взятом числе, стоимость по памяти может быть близка к спектральному методу.

Для оценки удовлетворения задаваемым условиям необходимо проводить больше тестов, но уже сейчас можно сказать, что оба метода занимают хорошее положение по точности удовлетворению задаваемым требованиям. С последующим изучением параметров влияющих на результаты можно добить ещё большего согласования с целевыми спектрами.