

Дамаскинский К., 3630102/70201. Вариант 7

1. Задание 1. 10 гостей путём жеребьёвки занимают места в ряду из 10 стульев. Найти вероятность того, что два конкретных лица А и В не окажутся рядом.

Вычислим общее количество способов посадки двух гостей. Оно равно $A_{10}^2 = 90$ (используется число размещений, так как нам важен порядок гостей).

Далее посчитаем, в скольких случаях гости окажутся рядом. Если гость А сидит на $\overline{2..9}$ месте, то гость В может сесть с двух сторон от него. Таким образом получает $(9 - 2 + 1) \cdot 2 = 16$ возможных случаев. Кроме того, остались неучтёнными случаи, когда гость А сидит на крайних местах. То есть нужно добавить ещё два случая. Итого в 18 случаях гости будут сидеть рядом.

Воспользовавшись классическим определением вероятности, получаем, что вероятность того, что гости не окажутся рядом, равна $\frac{90-18}{90} = 0.8$

2. Задание 2. Вероятность безотказной работы каждого элемента в течение времени T равна p . Элементы работают независимо и включены в цепь по приведённой схеме. Пусть событие A_i означает безотказную работу за время T элемента с номером i , а событие В безотказную работу цепи.

Требуется:

- (а) Написать формулу, выражающую событие В через все события A_i .

Положим $Q(A) = 1 - P(A)$ – вероятность события, обратного событию А.

На участках последовательного соединения вероятности *корректной работы* будут умножаться, так как корректная работа следующего участка цепи, по которому течёт ток, возможна лишь только при корректной работе предыдущего.

На участках параллельного соединения же вероятности *отказа* будут умножаться, так как для отказа параллельного участка цепи необходимо, чтобы отказали сразу все ветви. Тогда вероятность работы всего параллельного участка равна единице минус вероятность отказа.

Согласно схеме, имеем вероятность события В:

$$P(B) = P(A_1) \cdot (1 - Q(A_{23}) \cdot Q(A_{45}) \cdot Q(A_{67})) \cdot P(A_8) =$$

$$P(A_1) \cdot [1 - (1 - P(A_2) \cdot P(A_3)) \cdot (1 - P(A_4) \cdot P(A_5)) \cdot (1 - P(A_6) \cdot P(A_7))] \cdot P(A_8)$$

- (b) Найти вероятность события В.

$$P(B) = p^2 \cdot (1 - (1 - p)^2)^3$$

- (с) Вычислить $P(B)$ при $p = \frac{1}{2}$

$$P(B) = \frac{27}{256}$$

3. Сообщение состоит из сигналов "1" и "0". Свойства помех таковы, что искажаются в среднем 5% сигналов "0" и 3% сигналов "1". При искажении вместо сигнала "0" принимается сигнал "1" и наоборот. Известно, что среди передаваемых сигналов "0" и "1" встречаются в соотношении 3:2. Найти вероятность того, что:

- (a) Отправленный сигнал будет принят как 1.

Пусть событие А – отсыл сигнала "1".

Пусть событие В – отсыл сигнала "0".

Пусть событие С – приём сигнала "1".

Тогда $P(C) = P(A) \cdot (1 - 0.03) + P(B) \cdot 0.05 = \frac{3}{3+2} \cdot 0.97 + \frac{2}{3+2} \cdot 0.05 = 0.602$.

Вероятность события А и В - это частота посылки соответствующего сигнала. Единицу можно принять в случае, если нам послали 1 и помеха не наложилась либо если нам послали 0, но на него легла помеха. Между вероятностями этих событий стоит знак сложения, так как события независимы и, следовательно, их вероятности складываются.

- (b) Отправленный сигнал будет принят как 0.

Пусть событие D – приём сигнала "0".

Тогда по тому же принципу: $P(D) = P(A) \cdot 0.03 + P(B) \cdot (1 - 0.05) = \frac{3}{3+2} \cdot 0.03 + \frac{2}{3+2} \cdot 0.95 = 0.398$.

Примечание: можно было посчитать вероятность события D как инвертированную вероятность события С. Проведённый прямой подсчёт доказывает, что выведенная формула верна: сумма событий действительно даёт достоверное событие – то есть здравый смысл здесь не нарушен.

4. Задание 4. В партии $n = 100$ деталей. Вероятность брака детали равна $p = 0.02$.

- (a) С помощью точной формулы Бернулли найти вероятность того, что в партии не более двух бракованных деталей.

Пусть А – требуемое событие. Тогда

$$P(A) = P_{n,0}(p) + P_{n,1}(p) + P_{n,2}(p) = C_n^0(1-p)^n + C_n^1 p(1-p)^{n-1} + C_n^2 p^2(1-p)^{n-2} =$$

$$0.98^{100} + 100 \cdot 0.02 \cdot 0.98^{99} + \frac{100 \cdot 99}{2} \cdot 0.02^2 \cdot 0.98^{98} \approx 0.676685$$

- (b) Вычислить то же с помощью приближённой формулы Пуассона

$$P(A) = P_{n,0}(p) + P_{n,1}(p) + P_{n,2}(p) \approx \left(\frac{(np)^0}{0!} + \frac{(np)^1}{1!} + \frac{(np)^2}{2!} \right) \cdot e^{-np} = (1+2+2) \cdot e^{-2} \approx 0.676676$$

- (c) Вычислить абсолютную Δ и относительную δ погрешность приближённых вычислений

$$\Delta \approx 9 \cdot 10^{-6}$$

$$\delta \approx 13 \cdot 10^{-6}$$

5. Задание 5. Число полупроводниковых элементов прибора, отказавших за время T , распределено по закону Пуассона. При этом за время T в среднем отказывает один элемент ($m_X = 1$). Часть элементов зарезервирована, поэтому отказ одного элемента необязательно влечёт отказ всей схемы. Установлено, что при отказе одного элемента прибор отказывает с вероятностью 0.05, двух - с вероятностью 0.1, трёх и более - с вероятностью 0.5. Найти вероятность отказа прибора за время T .

Распределение Пуассона имеет вид:

$$P(X = k) = \frac{a^k}{k!} e^{-a}$$

Известно, что средняя величина равна a : $m_X = a = 1$.

Тогда вероятность отказа к элементов прибора равна $\frac{e^{-1}}{k!}$.

Обозначим отказ к элементов за событие A_k . Тогда вероятность отказа всего прибора равна:

$$\begin{aligned} &0.05 \cdot P(A_1) + 0.1 \cdot P(A_2) + 0.5 \cdot (1 - P(A_1) - P(A_2)) = \\ &0.05 \frac{e^{-1}}{1!} + 0.1 \frac{e^{-1}}{2!} + 0.5 \left[1 - e^{-1} \left(\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} \right) \right] \approx 0.26 \end{aligned}$$