

Дисклеймер.

Автор не несет ответственности за любой ущерб, причиненный Вам при использовании данного документа. Автор напоминает, что данный документ может содержать ошибки и опечатки, недостоверную и/или непроверенную информацию. Если Вы желаете помочь в развитии проекта или сообщить об ошибке/опечатке/неточности:

[GitHub проекта](#)

[Автор в ВК](#)

Содержание

1	Погрешности	3
1.1	Погрешности приближенных вычислений	3
1.1.1	Погрешности арифметических действий	3
1.1.2	Обратная задача погрешности	4
1.1.3	Статистический подход	4
1.1.4	Примеры неустойчивых задач и методов	4
1.2	Решение систем линейных уравнений	5
1.2.1	Число обусловленности	6
1.2.2	Метод Гаусса	6
1.2.3	LU-разложение	6

1 Погрешности

1.1 Погрешности приближенных вычислений

- 1) Погрешность начальных данных (задачи, измерений).
- 2) Методическая погрешность.
- 3) Вычислительная погрешность.

Определение 1.1. Если a — приближенное значение, A — точное, тогда $\Delta a = |A - a|$ — абсолютная погрешность.

Определение 1.2. $\delta a = \frac{\Delta a}{|a|}$ — относительная погрешность. Она показывает, сколько верных знаков в записи числа.

Рассмотрим, как погрешности ведут себя при вычислениях.

1.1.1 Погрешности арифметических действий

$x_1 \pm \Delta x_1$ и $x_2 \pm \Delta x_2$ — неточные числа.

Тогда:

$$1) (x_1 + x_2) \pm \Delta(x_1 + x_2) = x_1 + \Delta x_1 + x_2 + \Delta x_2 \Rightarrow \Delta_+ = x_1 + x_2.$$

Таким образом, $|\Delta_{\pm}| \leq |\Delta x_1| \pm |\Delta x_2|$.

Отсюда абсолютная: $\frac{\Delta(x_1+x_2)}{x_1+x_2} = \frac{\Delta x_1}{x_1+x_2} + \frac{\Delta x_2}{x_1+x_2} \leq \delta x_1 + \delta x_2$.

Если $x_1, x_2 > 0$, то $\delta_+ \leq \max \delta x_i$.

А вот для вычитания $\frac{\Delta(x_1-x_2)}{(x_1-x_2)}$ и возникает большая проблема для относительной погрешности.

$$2) (x_1 x_2) \pm \Delta(x_1 x_2) = x_1 x_2 + x_1 \Delta x_2 + x_2 \Delta x_1 + \Delta x_1 \Delta x_2 \Rightarrow \Delta_+ \approx x_1 \Delta x_2 + x_2 \Delta x_1.$$

Отсюда абсолютная: $\frac{\Delta(x_1 x_2)}{x_1 x_2} \approx \frac{\Delta x_2}{x_2} + \frac{\Delta x_1}{x_1} \Rightarrow |\delta| \leq |\delta x_1| + |\delta x_2|$.

Пусть $f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$, где $\bar{x}_1 = x_1 + \Delta x_1, \dots, \bar{x}_n = x_n + \Delta x_n$.

Посчитаем

$$\Delta f = f(x_1, \dots, x_n) - f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_n) \Delta x_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_n) \Delta x_n \right] + o((\Delta x)^2)$$

откуда абсолютная погрешность:

$$|\Delta f| \leq \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| |\Delta x_i|$$

Рассмотрим относительную:

$$\frac{\Delta f}{f} = \delta f = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{1}{f} \right| |\Delta x_i| = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial \ln f}{\partial x_i} \Delta x_i \right|$$

где $\frac{\partial \ln f}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{f \partial x_i}$.

Отсюда $\ln(x_1 \cdot \dots \cdot x_n) = \ln x_1 + \dots + \ln x_n \Rightarrow \frac{\partial \ln(x_1 \cdot \dots \cdot x_n)}{\partial x_i} = \frac{1}{x_i}$.

То есть для деления $|\delta_{\div}| \leq |\delta x_1| + |\delta x_2|$.

1.1.2 Обратная задача погрешности

Проблема. По требуемой на Δf (δf) найти допустимые Δx (δx).

Пример 1.1.

1) Принцип равных влияний: считаем, что вклад всех слагаемых в погрешность одинаков:

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right| \cdot \Delta x_1 = \left| \frac{\partial f}{\partial x_2} \right| \cdot \Delta x_2 = \dots = \text{const}$$

Откуда

$$\Delta x_i \leq \frac{|\Delta f|}{n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|}$$

2) Принцип равных погрешностей: требуем одинаковых Δx_i :

$$\Delta x_1 = \Delta x_2 = \dots = \text{const} = \Delta x$$

Откуда

$$|\Delta x| \leq \frac{|\Delta f|}{\sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|}$$

1.1.3 Статистический подход

$\Delta S_n \div \sqrt{n}$, где S_n — сумма n слагаемых ($n > 10$).

Тогда $\Delta S_n \approx \sqrt{3n} \cdot 0.5 \cdot 10^{-m}$ если $\Delta x_i \leq 0.5 \cdot 10^{-m}$.

Таким образом, при статистическом подходе погрешность $\frac{\Delta S_n}{n} \rightarrow 0$ $n \rightarrow \infty$.

1.1.4 Примеры неустойчивых задач и методов

1) Требуется решить $(x - a)^n = \varepsilon$, где a, n, ε — заданные числа, при этом $n \gg 1$, $n \in \mathbb{N}$, $0 < \varepsilon < 1$

$x = a$ — приближенное.

$\Delta x = \sqrt[n]{\varepsilon}$ если $\varepsilon \approx 10^{-16}$, $n \approx 10$, $\Delta x \approx 10^{-2}$.

2) $(x - 1)(x - 2) \dots (x - 20)$ — полином. Раскроем: $x^{20} - 210x^{19} + \dots + 20!$. А вот если мы получили погрешность округления вида $210 + 10^{-7}$. Тогда корни этого полинома не просто изменятся, но будут иметь вид:

$$x = 1.000$$

\vdots

$$x_7 = 7.000$$

$$x_8 = 8.007$$

$$x_9 = 8.897$$

$$x_{10,19} \in \mathbb{C}$$

$$x_{20} = 20.847$$

3) Линейная система:

$$\begin{cases} x + 10y = 11 \\ 100x + 1001y = 1101 \end{cases}$$

Решение очевидно: $x = 1, y = 1$.

Добавим погрешность:

$$\begin{cases} x + 10y = 11.01 \\ 100x + 1001y = 1101 \end{cases}$$

Решение получилось: $x = 11.01, y = 0$.

4) Вычислить набор интегралов

$$\frac{1}{e} \int_0^1 x^n e^x dx$$

где $n = 0, 1, \dots$

Пусть I_n — этот интеграл. Тогда запишем рекуррентную формулу:

$$I_n = 1 - nI_{n-1}, \quad I_0 = 1 - \frac{1}{e}$$

На старых машинах при $n = 14$ уже получались неверные ответы.

Альтернатива: перевернуть формулу и записать ее в виде

$$I_{n-1} = \frac{1}{n}(1 - I_n)$$

1.2 Решение систем линейных уравнений

Определение 1.3. Норма: $\|\cdot\|$;

- 1) $\|x\| \geq 0, \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
- 2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$;
- 3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$;

Пример 1.2. Нормы векторов

$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ — долгая и неблагодарная норма;

$\|x\|_1 = |x_1| + \dots + |x_n|$ — более простая норма;

$\|x\|_p = (|x_1|^p + \dots + |x_n|^p)^{1/p}$ — строгая математическая норма;

$\|x\|_\infty = \max_{i=\overline{1,n}} |x_i|$ — наиболее частоиспользуемая норма.

Все эти нормы эквивалентны, то есть $\|\cdot\|_\alpha, \|\cdot\|_\beta$ эквивалентны, если $\exists c_1, c_2: \forall x$ выполняется $c_1 \|x\|_\beta \leq \|x\|_\alpha \leq c_2 \|x\|_\beta$.

Определение 1.4. Рассмотрим линейный оператор A ; здесь $\|Ax\| \leq C$. Тогда $\min_x C = \|A\|$ — норма матрицы, согласованная с нормой вектора, если $\|Ax\| \leq \|A\| \|x\|$.

Определение 1.5. Норма матрицы, подчиненная норме вектора:

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

Пример 1.3.

$$1) \|A\|_1 = \max_{j=\overline{1,n}} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|;$$

$$2) \|A\|_2 = \sqrt{\max_{i=\overline{1,n}} \lambda(A^T A)};$$

$$3) \|A\|_\infty = \max_{i=\overline{1,n}} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|.$$

Норма Фробениуса: $\|A\|_F = \sqrt{\sum_{ij} a_{ij}^2}$.

1.2.1 Число обусловленности

Рассмотрим систему $Ax = b$ и пусть $b + \Delta b$. Как Δb повлияет на Δx ?

$A(x + \Delta x) = b + \Delta b$; $A\Delta x = \Delta b$.

$\|A\Delta x\| = \|\Delta b\|$, раскрыв скобки, $\|A\| \|\Delta x\| \geq \|\Delta b\|$;

Откуда $\|\Delta x\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|\Delta b\|$. Но это абсолютная погрешность. Что с относительной?

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A^{-1}\| \|A\| \|\Delta b\|}{\|b\|}$$

и тогда $\nu(A) = \|A^{-1}\| \|A\|$ — число обусловленности системы.

И если $\nu(A) \gg 1$, то система плохо обусловлена.

Есть способы т.н. предобусловливания систем, однако мы их смотреть пока не будем.

Пример плохо обусловленной системы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 100 & 1001 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 11.01 \end{pmatrix}$$

1.2.2 Метод Гаусса

Обычный метод Гаусса.

1.2.3 LU-разложение

$A = LU$, где L — нижнетреугольная матрица, а U — верхнетреугольная. Потребуем, чтобы на главной диагонали L стояли единицы для однозначного разложения.

U — матрица, получающаяся в ходе прямого разложения Гаусса. L получается, как матрица, в которой запомнены коэффициенты, на которые мы домножали: $\frac{a_{21}}{a_{11}}$, к примеру. Но если наше разложение наткнется на ноль на диагонали, будет больно.

Поэтому используют $A = P^{-1}LU$, где P — матрица перестановки с аналогичными желаемым перестановками.

Для решения уравнения будем использовать $PAx = Pb$. Затем $Ly = Pb$.

Как ее построить? Если мы переставляли строки в исходной матрице, то аналогично должны переставить в матрице P . Затем воспользуемся тем, что P ортогональна: $P^{-1} = P^T$.