Дисклеймер Автор не несет ответственности за любой ущерб, причиненный Вам при использовании данного документа. Автор напоминает, что данный документ может содержать ошибки и опечатки, недостоверную и/или непроверенную информацию.

Если Вы желаете помочь в развитии проекта или сообщить об ошибке/опечатке/неточности:

GitHub проекта

Автор в ВК

Внимание: данный документ не поддерживается и поддерживаться не будет! Сообщения об ошибках НЕ рассматриваются, пулл реквесты НЕ принимаются! Если Вы хотите поддерживать этот документ - форкните проект на Github. Спасибо за понимание

## Теорема об отсутствии рационального числа, квадрат которого равен двум.

**Теорема**: не существует рационального числа, квадрат которого равен 2

$$1^2 + 1^2 = \left(\frac{m}{n}\right)^2 \tag{1}$$

Допустим, что есть

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2 \Leftrightarrow \frac{m^2}{n^2} = 2; \tag{2}$$

$m$ и $n$ общих делителей не имеют, иначе, на них можно было бы сократить, значит, $(m, n) = 1$ — взаимно простые.

Выразим $m^2$ как $m^2 = 2n^2$. Следовательно, $m^2$ — четное, тогда и $m$ — четное. Представим $m = 2k$

$(2k)^2 = 4k^2 \Leftrightarrow n^2 = 2k^2$

Значит, $n^2$ — четное, а значит, m и n имеют общий делитель. Приходим к противоречию.

## Аксиома Архимеда. Теорема о плотности рациональных чисел.

**Аксиома** Архимеда (3 век до н. э.):

$$x, y > 0 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : y < nx < (n+1)x \tag{3}$$

«Если даны $x$ и $y$ и одно из них больше другого, то отложив достаточное ($n$) количество раз меньшее число, можно покрыть большее».

**Теорема** о плотности рациональных чисел:

Для любых рациональных $a$ и $b$ найдется рациональное $r$, которое лежит между ними.

Если $a, b, \in \mathbb{Q}, a < b$, то $\exists r \in \mathbb{Q} : a < r < b$ — Это называется плотностью рациональных чисел.

Т.е. множество рациональных чисел плотно на вещественной прямой.

Доказательство:

Если $a > 0$ и $b > a$, то $c = b - a$, где $c > 0$. $\exists n$, такое, что $1 < nc$ (по аксиоме Архимеда). Отсюда $\frac{1}{n} < c$

$m \in \mathbb{N}$ наибольшее из тех, что $\frac{m}{n} \leq a$. Значит, следующее $\frac{m+1}{n}$ будет $> a$

$r = \frac{m+1}{n}$, где $r < b$

Теперь докажем, что $r \in (a, b)$

$b - r = b - \frac{m}{n} - \frac{1}{n} \geq b - a - \frac{1}{n} = c - \frac{1}{n} > 0$

Теорема доказана для положительных а.

Если $a = 0$, $0 < b$, то $c = b - a = b$

$0 < \frac{1}{n} < b$ (т.к. $b = c$)

Если $a < 0 < b$, то мы можем взять $r = 0$;

Если $a < b < 0$:

Рассмотрим $b' = -b$ и $a' = -a$: $b' < a' < 0$.

$c' = b' - a'$, $c < 0$.

$\exists n > 0 : nc < -1 \Rightarrow c < -\frac{1}{n}$

$\exists \frac{m'}{n} \geq a'$, такое, что $\frac{m'}{n}$ — наименьшее из тех, что $\frac{m'}{n} \geq a'$. Следовательно:

$\frac{m'-1}{n} < a$. $r' = \frac{m'-1}{n}$

$b' - r' = b' - \frac{m'}{n} + \frac{1}{n} \leq b' - a' + \frac{1}{n} = c' + \frac{1}{n} < 0$

Аксиома полноты. Существование корня квадратного из положительного числа.

$X, Y \subset \mathbb{R}$, где $X, Y$ не пусты

Определение: $X$ левее $Y$, если $\forall x \in X, \forall y \in Y : x \leq y$

**Аксиома:** Если X левее $Y$, то $\exists$ c $\in \mathbb{R}$ для которого:

$\forall x \in X, y \in Y$ выполняется $x \leq c \leq y$.

Докажем, что всякое положительное число имеет квадратный корень:

Пусть $a > 0$ то $\exists c > 0$, $c^2 = a$

$X = \{x \in \mathbb{R} | x > 0$ и $x^2 < a\}$

$Y = \{y \in \mathbb{R} | y > 0$ и $y^2 > a\}$

Рассмотрим $a > 1$:

(Если $a < 1$ то найдется $\frac{1}{a} = b^2 \Leftrightarrow \frac{1}{b^2} = a$, тогда $\frac{1}{b}$ — искомое число).

$1 \in X \Rightarrow 1^2 < a \Leftrightarrow a < a^2 \Rightarrow a \in Y$;

$x^2 < a < y^2 \Rightarrow x^2 < y^2$;

$0 < y^2 - x^2 = (y - x)(x + y)$, т.к. $(x + y)$ — всяко положительное (сумма положительных чисел), то $0 < (y - x)$ т.е. $x < y$;

$\exists c : \forall x \in X, \forall y \in Y \ x \leq c \leq y$ по аксиоме Дедекинда.

(Докажем единственность $c$: Предположим, существует $c' \neq c$, такое, что $c'^2 = a$. Тогда, по вышесказанному, $x \leq c' \leq y \ \forall x \in X, y \in Y$, следовательно, $c' = c$).

Докажем, что $c^2 = a$:

Доказательство от противного:

Допустим, что

$c^2 < a$. Значит, существует $(c + \frac{1}{n})^2 \geq a$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$a \leq (c + \frac{1}{n})^2 = c^2 + \frac{2c}{n} + \frac{1}{n^2} \leq c^2 + \frac{2c+1}{n}$

$a - c^2 \leq \frac{2c+1}{n} \ \forall n$. Приходим к противоречию, т.к. по аксиоме Архимеда не существует бесконечно малых отрезков. Следовательно, $c^2 \geq a$.

Допустим, что
$c^2 > a$. Значит, существует $(c - \frac{1}{n})^2 \leq a$, $\forall n \in \mathbb{N}$
$a \geq (c - \frac{1}{n})^2 = c^2 - \frac{2c}{n} + \frac{1}{n^2}$
$a - c^2 \geq -\frac{2c}{n} + \frac{1}{n^2} \Leftrightarrow a - c^2 \geq -\frac{2c}{n} - \frac{1}{n}$
$c^2 - a \leq \frac{2c-1}{n}$ $\forall n$. Приходим к аналогичному противоречию.
Следовательно, $c^2 = a$.

## Границы числовых множеств. Существование точной верхней и точной нижней границы.

Рассматриваем $x \subset \mathbb{R}$

$c$ — верхняя граница $X$, если $\forall x \in X$ $x \leq c$. $c$ — нижняя граница $X$, если $\forall x \in X$ $x \geq c$.

Множество называется ограниченным сверху, если существует верхняя граница. Или ограниченным снизу, если существует нижняя граница. Если существуют и верхняя, и нижняя границы, то множество называется ограниченным.

Определение:

$X \subset \mathbb{R}$. Предположим, что X ограничено сверху. Тогда точная верхняя граница (верхняя грань) X есть наименьшая из верхних границ. (supremum). Обозначение: «$\sup X$»

Аналогично определяется точная нижняя граница - наибольшая из нижних границ (нижняя грань) (infinum). Обозначение: «$\inf X$».

**Теорема**: Если множество ограничено сверху, то супремум всегда существует.

$X \subset \mathbb{R}$, $X \neq \varnothing$, $X$ - ограничено сверху.

Доказательство:

Пусть $Y$ — множество верхних границ для $X$.

$\forall x \in X, \forall y \in Y x \leq y$ и $y$ — верхняя граница.

Значит, $X$ левее $Y$. И мы попадаем в условие аксиомы полноты. Значит, $\exists$с : $\forall x \in X$ $x \leq$ с; по определению с — верхняя граница. $\forall y \in Y$ с $\leq y$ — с наименьшее.

Следовательно, с — $\sup X$, ч.т.д.

Для инфимума:

**Теорема**: Если множество ограничено снизу, то инфимум всегда существует.

$X \subset \mathbb{R}$, $X \neq \varnothing$, $X$ - ограничено снизу.

Доказательство:

Пусть $Y$ — множество нижних границ для $X$.

$\forall x \in X, \forall y \in Y x \geq y$ и $y$ — нижняя граница.

Значит, $Y$ левее $X$. И мы попадаем в условие аксиомы полноты. Значит, $\exists$с : $\forall x \in X$ $x \geq$ с; по определению с — нижняя граница. $\forall y \in Y$ с $\geq y$ — с наибольшее.

Следовательно, с — $\inf X$, ч.т.д.

## Лемма о вложенных промежутках

**Лемма** о вложенных промежутках:

Рассмотрим промежуток $[a_n, b_n]$, где $a_n < b_n$;

Если $[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}]$ $\forall n \in \mathbb{N}$, то $\exists c \in \mathbb{R}$ $c \in [a_n, b_n] \forall n$.

т.е. $c$ принадлежит всем промежуткам.

Требуется доказать, что $\forall a \in A, b \in B$ выполняется $a_n \leq b_n$, тогда по аксиоме полноты $\exists c : a_n \leq c \leq b_n$. Для этого докажем, что $a_n < b_k$ $\forall n, k \in \mathbb{N}$

Доказательство:

$A = \{a_n | n = 1, 2, ...\}$;

$B = \{b_n | n = 1, 2, ...\}$;

$\forall n, \forall k$; $a_n \leq b_k$;

Промежутки вложенные, значит, $a_n \leq a_{n+1}$, а $b_n \geq b_{n+1}$;

Ведь если: $x \in [a_n, b_n]$

*Левые концы промежутков возрастают, а правые - убывают.*

Пусть $n < k$;

Тогда $a_n \leq a_{n+1} \leq a_k < b_k$. Следовательно, $a_n < b_k$.

Пусть $n > k$;

Тогда $a_n \leq b_n \leq b_k$. Следовательно, $a_n < b_k$;

Следовательно, $a_n < b_n \ \forall n \in \mathbb{N}$;

**Уточнение для стягивающихся промежутков**

Если длина отрезков стремится к 0:

$\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$, то $c$ — единственная точка всех отрезков.

$\{[a_n; b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ — стягивающаяся.

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \in N_\varepsilon, n \in \mathbb{N}$

Уточнение: $|b_n - a_n| < \varepsilon$

$\exists! c : a_n \leq c \leq b_n \ \forall n.$

Доказательство:

Пусть $\exists c_1, c_2 : c_1 < c_2$.

$X = \{a_n | n \in \mathbb{N}\}, Y = \{b_n | n \in \mathbb{N}\}$

$a_n \leq c_1 < c_2 \leq b_n \Rightarrow b_n - a_n > c_2 - c_1$.

Противоречие, т.к. $\forall \varepsilon > 0, \ b_n - a_n < \varepsilon$.

## Неравенство Бернулли. Монотонность последовательности. Определение числа $e$.

Неравенство Бернулли.

**Лемма:**

При $x \geq -1$ выполняется неравенство $\forall n \in N \ (1+x)^n \geq 1 + nx$

Доказательство:

Доказательство производится с помощью индукционного перехода:

$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x)) \geq (1+nx)(1+x) = 1+nx+x+x^2+nx^2 = 1+(n+1)x+nx^2 > 1+(n+1)x$

Отсюда: $(1+x)^{n+1} > 1+(n+1)x$. Ч.т.д.

Даны последовательности: $x_n = (1+\frac{1}{n})^n$; $y_n = (1+\frac{1}{n})^{n+1}$; $n = 1, 2, 3...$

Предположим, что $x_n < x_{n+1}$, $y_n > y_{n+1}, 2 < x_n < 3$, $n > 1$.

Последовательность $x_n = (1+\frac{1}{n})^n$ монотонна, если $x_n < x_{n+1}$ или $x_n > x_{n+1} \Leftrightarrow \frac{x_{n+1}}{x_n} > 1$ или $\frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$. Проверим последовательность на монотонность:

$$\frac{(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}}{(1+\frac{1}{n})^n} = \Big(1+\frac{1}{n+1}\Big)\Big(\frac{1+\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{n}}\Big)^n = \frac{n+2}{n+1}\Big(\frac{1+\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{n}}\Big)^n =$$
$$= \frac{n+2}{n+1}\Big(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\Big)^n = \frac{n+2}{n+1}\Big(\frac{n^2+2n+1-1}{(n+1)^2}\Big)^n = \frac{n+2}{n+1}\Big(1-\frac{1}{(n+1)^2}\Big)^n \tag{4}$$

Применим к последнему неравенство Бернулли:

$$\frac{n+2}{n+1}\Big(1-\frac{1}{(n+1)^2}\Big)^n > \frac{n+2}{n+1}\Big(1+\frac{-n}{(n+1)^2}\Big) = \frac{n+1+1}{n+1}\Big(1-\frac{n}{(n+1)^2}\Big) =$$
$$= \Big(1+\frac{1}{n+1}\Big)\Big(1-\frac{n}{(n+1)^2}\Big) = 1-\frac{n}{(n+1)^2}+\frac{1}{n+1}-\frac{n}{(n+1)^3} =$$
$$= 1+\frac{-n+n+1}{(n+1)^2}-\frac{n}{(n+1)^3} = 1+\frac{1}{(n+1)^2}-\frac{1}{(n+1)^3}$$
$$= 1+\frac{n+1}{(n+1)^3}-\frac{n}{(n+1)^3} = 1+\frac{1}{(n+1)^3} > 1. \tag{5}$$

Следовательно, последовательность $x_n = (1+\frac{1}{n})^n$ монотонна.

Последовательность $y_n = (1+\frac{1}{n})^{n+1}$ монотонна, если $y_n < y_{n+1}$ или $y_n > y_{n+1} \Leftrightarrow \frac{y_{n+1}}{y_n} > 1$ или $\frac{y_{n+1}}{y_n} < 1$. Проверим последовательность на монотонность:

$$\frac{(1+\frac{1}{n})^{n+1}}{(1+\frac{1}{n+1})^{n+2}} = \frac{n+1}{n+2}\Big(\frac{\frac{n+1}{n}}{\frac{n+2}{n+1}}\Big)^{n+1} = \frac{n+1}{n+2}\Big(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\Big) = \frac{n+1}{n+2}\Big(\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}\Big)^{n+1}$$
$$= \frac{n+1}{n+2}\Big(1+\frac{1}{n(n+2)}\Big)^{n+1} \geq \frac{n+1}{n+2}\Big(1+\frac{n+1}{n(n+2)}\Big) = \Big(1-\frac{1}{n+2}\Big)\Big(1+\frac{n}{n(n+2)}+\dots$$
$$= \Big(1-\frac{1}{n+2}\Big)\Big(1+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n(n+2)}\Big) = 1+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n(n+2)}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{(n+2)^2}-\dots$$
$$= 1+\frac{n+2-1}{n(n+2)^2}-\frac{1}{(n+2)^2} = 1+\frac{n+1-n}{n(n+2)^2} = 1+\frac{1}{n(n+2)^2} > 1 \qquad (6)$$

Следовательно, последовательность $y_n = (1+\frac{1}{n})^{n+1}$ монотонна.

$y_1 = 4,\ 2 < x_n < y_n < 4,\ y_5 < 3 \Rightarrow 2 < x_n < y_n < 3.$

$e = \sup x = \inf y.$

## Отображения и основные понятия

Отображение — математическое понятие, отражающее однозначную парную связь элементов одного множества с элементами другого множества.

Если $x \in X$ сопоставляется по правилу T, то точка $y = T(x)$, при этом каждому x сопоставляется только одна, единственная точка $y$.

(X, T, Y), где: X — область определения (задания), Y — множество прибытия

Для отображения $f : X \to Y$:

$f(x)$ называется образом точки $x$ на множестве $Y$.

$f^{-1}(y)$ называется прообразом точки $y$ на множестве $X$.

Отображение $g : M \subset X \to Y$, принимающее на $M$ те же значения, что и $f$ называется сужением отображения $f$ на множество $M$.

Композиция отображения - конструкция, которая по двум отображениям позволяет построить новое отображение.

$T : X \to Y$

$S : Y \to Z$

$R(x) = S(T(x))$ где $T(x) \in Y$

обозначение: $R = S \circ T = ST$

$R = S \circ T$ и $R = T \circ S$ не обязательно равны!

Естественная область определения:

Рассмотрим $f : X \to Y$ и $g : Y' \to X$. Для того, чтобы была возможной композиция $h = f \circ g$, требуется, чтобы точка принадлежала множеству $Y \cap Y'$, следовательно, естественная область определения — $X = \{x | f(x) \in Y' \cap Y\}$

Арифметические действия:

$f$, $g$ определены на $X$: $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

$g(x) \neq 0 \ \forall x : \frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

Если $f$ определено на $X_1$, $g$ определено на $X_2$, то $x_0 = \{x \in X_1 \cap X_2 | g(x) \neq 0\}$

Декартово произведение:

Для множеств $X, Y$ можно рассмотреть множество пар точек $(x, y)$, где $x \in X, y \in Y$

$(x, y)$ и $(y, x)$ - различны.

$\{1, 2\} \to^{\varphi} X \cup Y : \varphi(1) \in X, \varphi(2) \in Y$

Упорядоченная пара: $(\varphi(1), \varphi(2))$ — пара точек, из которой выделена одна точка, которая названа первой.

Множество всех упорядоченных пар точек называется Декартовым произведением множества $X, Y$ и обозначается $X \times Y$

Графиком функции называется $\Gamma_T = \{(x, y) \in X \times Y | x \in DOM\ T, y = T(x)\}$

Определения и свойства обратного отображения

$T : X \to Y, Y = ImT$

Определение: $S : Y \to X$ называется обратным к T, если $S(T(x)) = x\ \forall x \in X$

Взаимно однозначные отображения и отображения "НА"

Если $T(X) = Y$, то T - «Отображение НА» (сюръекция)

Отображение T называется взаимно однозначным, если оно разные точки переводит в разные.

$\forall x \in X\ (x \neq x') \Rightarrow (T(x) \neq T(x'))$ — инъекция.

Если $T : X \to Y$ взаимно однозначно и является отображением НА (т.е. является инъекцией и сюръекцией), то оно является биекцией (взаимно однозначным соответствием).

**Теорема** об условии существования обратного отображения:

$T : X \to Y$. T - обратимо тогда и только тогда, когда T взаимно однозначно.

Доказательство:

Допустим, что отображение T две точки переводит в одну.

1) $\exists S = T^{-1}$

$\exists x_0, x_0' \in X$ т.ч. $T(x_0) = T(x_0') = y_0$, при этом $x_0 \neq x_0'$

$S(y_0) = S(T(x_0)) = x_0;$

$S(y_0) = S(T(x_0')) = x_0' \neq x_0$

$T : X \to Y > Y_0 = T(x)$ — взаимно однозначное.

$y_0 \in Y_0\ \exists x_0 \in X : T(x_0) = y_0$. Такая точка — единственная.

Определение обратного отображения $S : Y_0 \to X$:

$\forall y \in Y_0\ S(y)$ — та единственная точка, для которой $x \in X : y = T(x)$

$S(T(x)) = x$, значит, $S(y)$ — действительно обратная. Теорема доказана.

## Биекция. Теорема об условиях биективности отображения

**Теорема** о характеристике биекции:

$T : X \to Y$, $T$ - биекция, $\Leftrightarrow\ \exists S : Y \to X$:

1) $S(T(x)) = x, \forall x \in X$; $S^{-1} = T$;

2) $T(S(y)) = y, \forall y \in Y$; $Y_0 = T(x) = Y$

При этом $S = T^{-1}$.

Предположим, что выполняются условия 1 и 2 выше. Убедимся, что $T$ — отображение НА.

$T(x) = Y$

$y \in Y,\ x = S(y)$, тогда в силу условия (2) получаем:

$T(x) = T(S(y)) = y$.

## Монотонные функции. Теорема о существовании и характере монотонной обратной функции

Определение: $f$ возрастает, если $x, x' \in < a, b >, x < x' \Rightarrow f(x) \leq f(x')$ и строго возрастает, если $f(x) < f(x')$

**Теорема**:

Если $f :< a, b >\to \mathbb{R}$ строго монотонна, то существует обратная функция, которая так же строго монотонна (при этом характер монотонности при переходе к обратной функции не меняется (обратная к строго убывающей функции функция так же будет строго убывающей))

Докажем это:

Пусть $f$ — возрастающая. $y, y' \in Y = f(< a, b >), y < y'$.

$f^{-1}(y) < f^{-1}(y')$ — доказать.

Докажем от противного:

Предположим, что $x = f^{-1}(y) \geq x' = f^{-1}(y')$.

Следовательно, $f(x) \geq f(x')$.

$f(x) = f(f^{-1}(y)) = y$

$f(x') = f(f^{-1}(y')) = y'$

$y \geq y'$ — противоречие. Теорема доказана.

## Окрестности и проколотые окрестности. Определение точки сгущения числового множества

Определение: $a \in \mathbb{R}$. Окрестностью точки $a$ называется любой интервал $(p, q)$, которому принадлежит точка $a$. ($V(a), U(a)$ — обозначение)

Допустим, мы можем сказать, что $a \in (0, +\infty)$

Свойства окрестности:

1) Отделимость: если $a \neq b$, то тогда у них есть окрестности, которые не пересекаются.

2) Пересечение двух окрестностей одной точки — снова окрестность.

3) Симметричная окрестность — $(a - \delta, a + \delta)$, где $\delta > 0$. $V_\delta(a)$ — дельта-окрестность.

4) $x \in V_\delta(a) \Leftrightarrow |x - a| < \delta$.

5) Всякая окрестность точки $a$ содержит в себе дельта-окрестность.

$U(a)$ — окрестность точки $a$.
$U(a) \setminus \{a\} = \dot{U}(a)$ — проколотая окрестность.
$x \in \dot{U}_\delta(a) \Leftrightarrow 0 < |x-a| < \delta$

Предельные точки или точки сгущения.

$X \subset \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$.

Определение: $a$ — предельная точка множества X или точка сгущения, если справедливо следующее: $\forall V(a)\ \exists x \in \mathbb{R}$ со свойствами:

1) $x \in V$,
2) $x \neq a$,
3) $x \in X \Leftrightarrow X \cap \dot{V}(a) \neq \varnothing$

## Определение предела функции.

$X \subset \mathbb{R}$, $a$ — точка сгущения $X$, $f : X \to \mathbb{R}$

Определение (на языке неравенств):

$L$ — предел функции $f$ в точку $a$, если

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in X$ из условия $0 < |x-a| < \delta$ вытекает неравенство $|f(x) - L| < \varepsilon$, т.е.:

$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

Обозначение: $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ или $f(x) \to_{x \to a} L$

Переформулировка на языке окрестностей:

$L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$, значит, $f(x) \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon) = V_\varepsilon(L)$.

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ \forall x \in \dot{V}_\delta(a) \cap X \Rightarrow f(x) \in V_\varepsilon(L)$

$\forall \varepsilon$ — окрестности точки L $\exists \delta$ — окрестность точки $a$, такая, что $\forall x \in \dot{V}_\delta(a) \cap X \Rightarrow f(x) \in V_\varepsilon(L)$.

Поэтому можно сказать, что:

$\forall U(L)$ — дельта-окрестность, $\exists \delta > 0\ \forall x \in \dot{V}_\delta(a) \cap X$

$f(x) \in U(L)$.

Окончательная формулировка:

$\forall$ окрестности $L$ $U(L)$ $\exists$ окрестность $V(a)$ в точке $a$ $\forall x \in \dot{V}(a) \cup X \Rightarrow f(x) \in U(L)$

Предел сужения:

$X_0 \subset X, a$ — точка сгущения $X_0$. Пусть $f_0 = f|_{x_0}$. Если $f(x) \to_{x \to a} C$, то $f_0(x) \to_{x \to a} C$

## Теорема о стабилизации знака. Локальная ограниченность функции

**Теорема** о стабилизации знаков: $X \subset \mathbb{R}$, $a$ — точка сгущения, $f : X \to \mathbb{R}$

$f(x) \to_{x \to a} L$.

1) Если $\forall A,\ A < L$, то $\exists \delta > 0$: $\forall x \in \dot{V}_\delta(a) \cap X \Rightarrow f(x) > A$

2) Если $\forall A,\ A > L$, то $\exists \delta > 0$: $\forall x \in \dot{V}_\delta(a) \cap X \Rightarrow f(x) < A$

Доказательство:

$\varepsilon = L - A > 0$. Тогда по определению предела $\exists \delta > 0\ \forall x \in \dot{V}_\delta(a) \cap X$, $|f(x) - L| < \varepsilon \Leftrightarrow L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$.

Пусть $\varepsilon = L - A$. Тогда $L - \varepsilon < f(x) \Rightarrow L - \varepsilon = L - (L - A) = A < f(x)$.

Пусть $\varepsilon = A - L$. Тогда $f(x) < L + \varepsilon \Rightarrow L + \varepsilon = L + (A - L) = A > f(x)$.

Следствие (стабилизация знака):

$L > 0 \Rightarrow \exists V(a) :\ \forall x \in \dot{V}(a) \cap X : f(x) > 0$.

Если $L < 0$, $\exists U(a) :\ \forall x \in \dot{U}(a) \cap X : f(x) < 0$ (существует окрестность точки $a$, где значения функции имеют тот же знак, что и предел).

Следствие (локальная ограниченность):

$|f(x)-L| < \varepsilon$ (предел по Коши). Возьмем $\varepsilon = 1$. Перепишем как $-1 < f(x)-L < 1 \Leftrightarrow L-1 < f(x) < L+1$. Легко увидеть, что это и есть ограниченность.

## Теорема о единственности предела

**Теорема** о единственности предела:

$X \subset \mathbb{R}$, $a$ —точка сгущения, $f : X \to \mathbb{R}$

Если $f(x) \to_{x\to a} L_1$ и $f(x) \to_{x\to a} L_2$, то $L_1 = L_2$

Доказательство:

Пусть $L_1 \neq L_2$; не умаляя общности $L_1 < L_2$.

$L_1 < A < L_2$, А — число.

Воспользуемся второй частью теоремы о стабилизации знаков:

$L_1 < A\ \exists\delta_1 > 0\ \forall x \in \dot{V}_{\delta(a)_1} \cap X : f(x) < A$; (a)

$L_2 > A\ \exists\delta_2 > 0\ \forall x \in \dot{V}_{\delta(a)_2} \cap X : f(x) > A$; (b)

Не умаляя общности $\delta_1 < \delta_2$

$x \in V_{\delta_1} \Rightarrow x \in V_{\delta_2}$

$x \in \dot{V}_{\delta_1}(a) \Rightarrow x \in \dot{V}_{\delta_2}(a)$

$W = \dot{V}_{\delta_1}(a) \cap \dot{V}_{\delta_2}(a) \cap X \neq 0$

Тогда для любого $x \in W$ выполняется $A < f(x) < A$ — противоречие. Теорема доказана.

## Теорема о предельном переходе в неравенстве

**Теорема** (о предельном переходе в неравенстве):

$X \subset \mathbb{R}$, $a$ —точка сгущения, $f, g : X \to \mathbb{R}$

$f(x) \to_{x\to a} A$ и $g(x) \to_{x\to a} B$

Если $f(x) \leq g(x)\ \forall x \in X$, то $A \leq B$

Доказательство:

Пусть $A > B$, тогда существует $C:\ A > C > B$

$f(x) \to A > C$

$\exists V_{\delta_1}(a)\ \forall x \in \dot{V}_{\delta_1}(a) : f(x) > C$

$g(x) \to B < C$

$\exists V_{\delta_2}(a)\ \forall x \in \dot{V}_{\delta_2}(a) : g(x) < C$

Возьмем $x_0 \in V_{\delta_1} \cap V_{\delta_2} \cap X, x_0 \neq a$ (одна из этих окрестностей содержится в другой)

$f(x_0) > C > g(x_0) \Rightarrow f(x_0) > g(x_0)$ — противоречие.

## Теорема о сжатой переменной

**Теорема** о сжатой переменной (теорема о двух милиционерах):

$f, g, h : X \to \mathbb{R}\ (X \subset \mathbb{R})$, $a$ — точка сгущения

Если

1) $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$
$forall x \in X$,

2) $f(x) \to_{x \to a} L, h(x) \to_{x \to a} L$,

то $g(x) \to_{x \to a} L$.

Убедимся, что существует предел.

Доказательство:

$\forall \varepsilon > 0$:

Т.к. $f \to L$, то существует окрестность $a : V_1(a)$, такая, что $\forall x \in \dot{V_1} \cap X\ |f(x) - L| < \varepsilon$.

$L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$

$L - \varepsilon < f(x)$ (*)

$\exists V_2(a) : \forall x \in \dot{V_2} \cap X$ выполняется $|h(x) - L| < \varepsilon$.

$L - \varepsilon < h(x) < L + \varepsilon$

$h(x) < L + \varepsilon$ (**)

$L - \varepsilon < f(x) \le g(x) \le h(x) < L + \varepsilon$

Положим $V = V_1(a) \cap V_2(a)$, и возьмем $x \in \dot{V} \cap X \subset (\dot{V_1} \cap X, \dot{V_2} \cap X)$ — для такого неравенства выполняются оба неравенства (*) и (**)

$L - \varepsilon < f(x) \le g(x) \le h(x) < L + \varepsilon$ — выбросим $f(x)$ и $h(x)$

$L - \varepsilon < g(x) < L + \varepsilon \Leftrightarrow |g(x) - L| < \varepsilon$.

Теорема доказана.

## Теорема о характеристике предела с помощью бесконечно малых.

$X \subset \mathbb{R}$, $a$ — точка сгущения, $f : X \to \mathbb{R}$

Определение: $f(x)$ называется бесконечно малой величиной при $x \to a$ (в точку $a$) если $f(x) \to_{x \to a} 0$. То есть предел в точке $a$ равен 0. Фактически, если $f(x)$ — бесконечно малое, то $f(x) \equiv 0$.

**Теорема:**

$X \subset \mathbb{R}$, $a$ — точка сгущения, $f : X \to \mathbb{R}$

$f(x) \to_{x \to a} L \Leftrightarrow \alpha(x) = f(x) - L \to_{x \to a} 0$, т.е. $\alpha$ — бесконечно малое.

$\Leftrightarrow f(x) = L + \alpha$

Доказательство:

1) Необходимость:

Предположим, что L — предел.

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists V(a) : \forall x \in \dot{V} \cap X$ выполняется:

$|f(x) - L| < \varepsilon \Leftrightarrow |\alpha(x)| < \varepsilon \Leftrightarrow |\alpha(x) - 0| < \varepsilon$, значит, 0 — предел $\alpha(x)$ при $x \to a$ ($\alpha(x) \to_{x \to \alpha} 0$)

Достаточность:

$\forall\varepsilon\ \exists V(a) : \forall x \in \dot{V}(a) \cap X : |\alpha(x)| < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon \Rightarrow L$ — предел $f(x)$ при $x \to a$ ($f(x) \to_{x\to a} L$).

Свойства бесконечно малых:

1) $\alpha, -\alpha, |\alpha|$ — бесконечно малые одновременно.

$\varphi$ —любая из этих величин. $\varphi \to_{x\to a} 0$

$\forall\varepsilon > 0\ \exists V(a), \forall x \in \dot{V}(a) \cap X$

$|\varphi(x)| < \varepsilon$

2) $\alpha, \beta, |\beta(x)| \leq |\alpha(x)|\ \forall x$

$-|\alpha(x)| \leq \beta(x) \leq |\alpha(x)|$

3) $\alpha(x), \beta(x)$ — бесконечно малые при $x \to a$.

Тогда $\alpha(x) \pm \beta(x)$ — бесконечно малое при $x \to a$.

Доказательство:

$\delta(x) = \alpha(x) + \beta(x);$

$\forall\varepsilon > 0 :$

$\exists V_1(a)\ \forall x \in \dot{V}_1(a) \cap X : |\alpha(x)| < \varepsilon;$

$\exists V_2(a)\ \forall x \in \dot{V}_2(a) \cap X : |\beta(x)| < \varepsilon.$

Возьмем $V = V_1 \cap V_2$, $x \in \dot{V} \cap X$:

$|\delta(x)| = |\alpha(x) + \beta(x)| \leq |\alpha(x)| + |\beta(x)|$

$|\delta(x)| = |\alpha(x) + \beta(x)| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$

$|\delta(x)| < 2\varepsilon$

4) $\alpha(x)$ — бесконечно малое при $x \to a$, $\beta(x)$ — локально ограничена в т. $a$, тогда $\alpha \cdot \beta = \delta$ — бесконечно малое при $x \to a$.

Свойства:

a) $\beta(x) \equiv Const$

$C \cdot \alpha(x) =$ бесконечно малое.

b) $\beta$ — ограничено на X.

$\alpha(x)\cdot$ любое число = бесконечно малое.

c) $f \to_{x\to a} L, \alpha(x)$ — бесконечно малое, то $\alpha(x)f(x) =$ бесконечно малое.

c′) Произведение бесконечно малых бесконечно мало.

—

Доказательство:

$\exists U(a), \exists C : |\beta(x)| \leq C \ \forall x \in U \cap X$ (1)

$\varepsilon > 0$

$\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{C} > 0.$

$\exists V(a) \ \forall x \in \dot{V} \cap X, |\alpha| < \varepsilon' = \frac{\varepsilon}{C}$ (2)

$W = U \cap V,\ \forall x \in \dot{W} \cap X$ выполняются одновременно неравенства (1) и (2)

$\forall x \in \dot{W} \cap X,\ |\alpha(x) \cdot \beta(x)| = |\alpha(x)| \cdot |\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{C} \cdot C = \varepsilon.$

Локальная ограниченность функции:

**Лемма:** $f \to_{x \to a} L$, тогда $f$ — локально ограничена в точке $a$.

Доказательство: $|f(x)| \to_{x \to a} |L| < |L| + 1$. По теореме о стабилизации знака $\exists V(a)$, такая, что $\forall x \in \dot{V}(a) \cap X$ выполняется $|f(x)| < |L| + 1$.

## Теорема о пределе суммы и произведения

**Теорема** о пределе суммы:

$X \subset \mathbb{R}$, $a$ — точка сгущения, $f, g : X \to \mathbb{R}$

$f \to_{x \to a} A$, $g \to_{x \to a} B$, тогда

1) $f(x) + g(x) \to_{x \to a} A + B$, что равносильно $\lim\limits_{x \to a}(f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x \to a} f(x) + \lim\limits_{x \to a} g(x)$

2) $f(x) \cdot g(x) \to_{x \to a} AB$, что равносильно $\lim\limits_{x \to a}(f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} g(x)$

Доказательство:

По свойствам бесконечно малых,

$f(x) = A + \alpha(x), \alpha(x)$ — бесконечно малое.

$g(x) = B + \beta(x), \beta(x)$ — бесконечно малое.

$f(x) + g(x) = \underbrace{A + B}_{L(\text{предел})} + \underbrace{(\alpha(x) + \beta(x))}_{\text{бесконечно малые}}$. $(L = A + B)$

$f(x) \cdot g(x) = \underbrace{AB}_{L(\text{предел})} + \underbrace{B\alpha(x) + A\beta(x)) + \alpha(x)\beta(x)}_{\text{бесконечно малые}}$. $(L = AB)$

## Теорема о пределе частного

**Теорема** о пределе частного.

$X \subset \mathbb{R}$, $a$ — точка сгущения, $g : X \to \mathbb{R}$

$x_0 = \{x \in X | g(x) \neq 0\}$

$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

Если $f(x) \to_{x \to a} A$, $g(x) \to_{x \to a} B$, то $h(x) \to_{x \to a} \frac{A}{B}$ иными словами $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$

Доказательство:

$f(x) = A + \alpha(x), \alpha(x)$ — бесконечно малое.

$g(x) = B + \beta(x), \beta(x)$ — бесконечно малое.

$$\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{A}{B} = \frac{A + \alpha(x)}{B + \beta(x)} - \frac{A}{B} = \frac{B\alpha(x) - A\beta(x)}{B \cdot g(x)} = \frac{1}{B} \cdot \frac{1}{g(x)} \underbrace{(B \cdot \alpha(x) - A \cdot \beta(x))}_{\text{бесконечно малые}} \to_x \tag{7}$$

$\frac{1}{g(x)}$ локально ограничено по свойству.

$\frac{1}{B}$ — Константа.

Следовательно,

$$\frac{1}{B} \cdot \frac{1}{g(x)} (B \cdot \alpha(x) - A \cdot \beta(x) \to_{x \to a} 0 \tag{8}$$

Теперь воспользуемся свойством: если разность значения функции и константы бесконечно мала, то соответствующая константа есть предел. Следовательно, $\frac{A}{B}$ — предел.

## Предел сужения. Односторонние пределы

Определение:

$X, a$ — точка сгущения для $X_a^+$, $f : X \to \mathbb{R}$

($X_a^+ = (a, +\infty), X_a^- = (-\infty, a)$. По определению точки сгущения, $a$ является точкой сгущения хотя бы для одного из множеств $X_a^+, X_a^-$)

Если существует предел сужения $f$ на $X_a^+$ при $x \to a$, то он называется пределом справа функции $f$ в точку $a$. (Предел справа — движение по функции СПРАВА НАЛЕВО).

Обозначается $\lim\limits_{x \to a+} f(x)$ или $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$

По определению:

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ \forall x \in X_a^+$, найдется $0 < |x - a| < \delta$ при $f(x) \to_{x \to a+0} L$

$|f(x) - L| < \varepsilon$

$0 < |x - a| < \delta$ можно заменить $x > a$, так как $a < x < a + \delta$

Окончательная переформулировка:

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in X, a < x < a + \delta$

$|f(x) - L| < \varepsilon$

Предел слева аналогично $(a - \delta < x < a)$

**Теорема** о связи односторонних и двусторонних пределов.

$X \subset \mathbb{R}, a$ —точка сгущения для $X_a^+$ и $X_a^-$

$f : X \to \mathbb{R}$

Предел (двусторонний) в точке $a$ существует тогда и только тогда, когда существуют оба односторонних предела и они равны.

Доказательство:

$\forall \varepsilon > 0$ :

Предположим, что в точке $a$ существует двусторонний предел $f(x)$. Тогда $\exists\ \dot{V}(a)$, такая, что $\forall x \in \dot{V_\delta}(a) \cap X \cap X_a^+$ справедливо $|f(x) - L| < \varepsilon$. Следовательно, $L$ — предел $f(x)|_{X_a^+}$.

Аналогично для $\dot{V_\delta}(a) \cap X \cap X_a^-$.

Следовательно, существуют пределы $f(x) \rightarrow_{x \to a+0} L$ и $f(x) \rightarrow_{x \to a+0}$ $L$

Нам нужно доказать, что существует двусторонний предел.

Проверка:

$\forall \varepsilon > 0$:

$\exists \delta_+ > 0 : \forall x \in X,\ a < x < a + \delta_+$ (1).

Для этого же $\varepsilon$:

$\exists \delta_- > 0 : \forall x \in X,\ a - \delta_- < x < a$ (2).

Отсюда $|f(x) - L| < \varepsilon$. (3)

Положим, $\delta = min(\delta_+, \delta_-) > 0$, следовательно, для $x \in X$

$0 < |x - a| < \delta$

В любом случае выполняется либо условие (1), либо условие (2), а они оба влекут (3). Следовательно, $L$ — предел функции в $a$.

Теорема доказана.

## Расширенная числовая прямая. Определение конечного предела при $x \to \pm\infty$.

Если $\forall r \in \mathbb{R}\ r > \omega,\ \omega \in \hat{\mathbb{R}}$, то $\omega = -\infty$

Если $\forall r \in \mathbb{R}\ r < \omega',\ \omega' \in \hat{\mathbb{R}}$, то $\omega' = +\infty$

$\hat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}, -\infty < x < +\infty$

$(C, +\infty] = \{x \in \mathbb{R} | x > C\} \cup \{+\infty\}$

Аналогично $[-\infty, C)$

$(C, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} | x > C\}$

$a$ — точка сгущения $X$.

$\forall V(a)\ \dot{V}(a) \cap X \neq \varnothing$.

$X \subset \mathbb{R}$ $(+\infty)$ — точка сгущения $X$

$\forall V(+\infty) : \dot{V}(+\infty) \cap X \neq \varnothing$.

то, что $+\infty$ — точка сгущения $X$ означает, что $X$ не ограничено сверху. Аналогично для не ограничено снизу.

Определение предела:

$X \subset \mathbb{R}$, $L \in \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$.

$\forall \varepsilon > 0\ \exists C > 0 :\ \forall x \in X$ выполняется $x > C$

$|f(x) - L| < \varepsilon$.

или переформулировка:

$\exists V(+\infty)\ \forall x \in X \cap \dot{V}(+\infty)$.

$|f(x) - L| < \varepsilon$.

## 13-19 для случаев $x \to +\infty, x \to -\infty$

## Бесконечные пределы. Общее определение предела

Это когда у какой-то точки $a$ предел поднимается бесконечно вверх (ну или вниз. Да-да, поднимается вниз, бейте меня, граммар-наци)

$X \subset \mathbb{R}$, $a$ — точка сгущения. $a \in \mathbb{R}$.

$f : X \to \mathbb{R}$.

Как определить, что $f$ имеет в точке $a$ предел $+\infty$? Поблизости от $a$ значения функции будут больше, чем C.

$|f(x) - L| < \varepsilon$ — это мы требовали раньше.

А теперь мы скажем так: $\forall C > 0 \ \exists \delta > 0$, такое, что $\forall x \in \dot{V}_\delta(a) \cap X : f(x) > C$ или $f(x) < -C$

$\forall V(L) \ \exists V(a) \ \forall x \in \dot{V}(x) \cap X : f(x) \in V(L)$.

Можно переформулировать:

$\forall V(+\infty) \ \exists V(a) \ \forall x \in \dot{V}(a) \cap X : f(x) \in V(+\infty)$

Из этого немедленно следует, что $f(x) \to +\infty \Rightarrow -f(x) \to -\infty$ и обратно: $f(x) > C$ или $f(x) < -C$.

$f(x) \to_{x \to -\infty} +\infty$ для этого:

$\forall V(+\infty) \ \exists V(-\infty) \ \forall x \in X \cap \dot{V}(-\infty) : f(x) \in V(+\infty)$.

Переформулируем на языке неравенств:

$\forall C > 0 \ \exists C' > 0 \ \forall x \in X \cap (-\infty, -C') : f(x) > C$.

## Бесконечно большие величины. Связь между бесконечно большими и бесконечно малыми величинами

Лемма:

$X \subset \mathbb{R}$, $a \in \hat{\mathbb{R}}$, $a$ —точка сгущения для $X$

$f : X \to R$.

1) $f$ — бесконечно большая $\Rightarrow \frac{1}{f}$ — бесконечно малая при $x \to a$

2) $f$ — бесконечно малая при $x \to a$, $f \neq 0$ на $X$, то $\frac{1}{f}$ —бесконечно большая.

3) $f$ — бесконечно большая при $x \to a$, $g : X \to R$, локально ограничена в точке $a$, то $f + g$ — бесконечно большая.

Доказательство 1 пункта:

$|f(x)| \to +\infty > 1$

$\exists U(a) \ \forall x \in \dot{U}(a) \cap X : \ |f(x)| > 1, \ f(x) \neq 0$.

$\varepsilon > 0$:

Положим $C = \frac{1}{\varepsilon}$; тогда $\exists V(a) : \forall x \in \dot{V}(a) \cap X, \ |f(x)| > C$

Положим $W = U \cap V$.

Тогда $\forall x \in \dot{W} \cap X \ |f(x)| > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow |\frac{1}{f(x)}| < \varepsilon$

Доказательство 2 пункта:
$f(x) \to 0 < 1$
$\exists U(a) \ \forall x \in \dot{U}(a) \cap X: \ |f(x)| < 1, f(x) \neq 0.$
$\varepsilon > 0$:
Положим $C = \frac{1}{\varepsilon}$; тогда $\exists V(a) : \forall x \in \dot{U}(a) \cap X, \ |f(x)| < C$
Положим $W = V \cap U$;
Тогда $\forall x \in \dot{W} \cap X \ |f(x)| < \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow |\frac{1}{f(x)}| > \varepsilon$.

Доказательство 3 пункта:
$\exists U(a) \ \exists M$
$\forall x \in \dot{U} \cap X : |g(x)| \leq M$
$h = f + g$. Зафиксируем $C > 0, C' = C + M$.
$\exists V(a) \ \forall x \in \dot{V} \cap X : |f(x)| > C'$
$W = U \cap V$
$\forall x \in \dot{W} \cap X$ справедливы оба неравенства:
$|g(x)| \leq M$, $|f(x)| > C + M$.
$|h(x)| = |f(x) + g(x)| \geq |f(x)| - |g(x)| > C + M - |g(x)| \geq (C + M) - M = C$

Следоветельно, $|h(x)| > C$, следовательно, $|h|$ стремится к бесконечности.

## Определение арифметических действий в $\hat{\mathbb{R}}$. Общая теорема об арифметических действиях с пределами.

**Теорема** об арифметических действиях в пределах.
Теорема: $f, g : X \to \mathbb{R}$, $a \in \hat{\mathbb{R}}$ — точка сгущения $X$.
$\exists \lim\limits_{x \to a} f(x), \ \lim\limits_{x \to a} g(x)$

1) $\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x)$

2) $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$

3) $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$

ВО ВСЕХ СЛУЧАЯХ, КОГДА ПРАВАЯ ЧАСТЬ ИМЕЕТ СМЫСЛ!!!

Доказательство:

1-е не имеет смысла при $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \mp\infty$.

Доказательство:

По свойствам бесконечно малых,

$f(x) = A + \alpha(x), \alpha(x)$ — бесконечно малое.

$g(x) = B + \beta(x), \beta(x)$ — бесконечно малое.

$f(x) + g(x) = \underbrace{A + B}_{L(\text{предел})} + \underbrace{(\alpha(x) + \beta(x))}_{\text{бесконечно малые}}$. $(L = A + B)$

2-е не имеет смысла при $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0, \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$ и наоборот.

Доказательство:

По свойствам бесконечно малых,

$f(x) = A + \alpha(x), \alpha(x)$ — бесконечно малое.

$g(x) = B + \beta(x), \beta(x)$ — бесконечно малое.

$f(x) \cdot g(x) = \underbrace{AB}_{L(\text{предел})} + \underbrace{B\alpha(x) + A\beta(x)) + \alpha(x)\beta(x)}_{\text{бесконечно малые}}$. $(L = AB)$

3-е не имеет смысла при $\frac{infty}{infty}$, $\frac{0}{0}$

Доказательство:

$f(x) = A + \alpha(x), \alpha(x)$ — бесконечно малое.

$g(x) = B + \beta(x), \beta(x)$ — бесконечно малое.

$$\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{A}{B} = \frac{A + \alpha(x)}{B + \beta(x)} - \frac{A}{B} = \frac{B\alpha(x) - A\beta(x)}{B \cdot g(x)} = \frac{1}{B} \cdot \frac{1}{g(x)} \underbrace{(B \cdot \alpha(x) - A \cdot \beta(x))}_{\text{бесконечно малые}} \to_x \tag{9}$$

$\frac{1}{g(x)}$ локально ограничено по свойству.
$\frac{1}{B}$ — Константа.
Следовательно,

$$\frac{1}{B} \cdot \frac{1}{g(x)}(B \cdot \alpha(x) - A \cdot \beta(x) \to_{x \to a} 0 \tag{10}$$

Теперь воспользуемся свойством: если разность значения функции и константы бесконечно мала, то соответствующая константа есть предел. Следовательно, $\frac{A}{B}$ — предел.

Арифметические действия в $\hat{\mathbb{R}}$:
1) $(+\infty)+(+\infty) = (+\infty)-(-\infty) = (+\infty)+x = x+(+\infty) = +\infty$
2) $(-\infty)+(-\infty) = (-\infty)-(+\infty) = (-\infty)+x = x+(-\infty) = -\infty$
3) $x > 0$
$x(\pm\infty) = (\pm\infty)x = (\pm\infty)(+\infty) = (+\infty)(\pm\infty) = \pm\infty$
4) $x < 0$
$x(\pm\infty) = (\pm\infty)x = (\pm\infty)(-\infty) = (-\infty)(\pm\infty) = (\mp\infty)$
5) $\frac{x}{\pm\infty} = 0$

Сравнение бесконечно больших и бесконечно малых

$f, g : X \to \mathbb{R}$. $f, g$ — бесконечно малые/бесконечно большие при $x \to a$.

$f(x) \sim g(x)$, если $\exists h(x) : \ f(x) = h(x)g(x)$, при этом $h(x) \to_{x \to a} 1$.

$f(x) = o(g(x))$ если при $x \to a$ $\exists h(x)$ — бесконечно малая, такая, что $f(x) = g(x) \cdot h(x)$.

$f(x) = O(g(x))$ в точке $a$, если $\exists M > 0,\ \exists \delta > 0:\ |\frac{f(x)}{g(x)}| < M$ при $x \in (a-\delta; a+\delta)$ (т.е. функция локально ограничена в окрестности точки $a$).

**Теорема:** Пусть $f \sim f^*$ и $g \sim g^*$ при $x \to a$.

1) Если $\frac{f^*(x)}{g^*(x)} \to_{x\to a} L$, то и $\frac{f(x)}{g(x)} \to_{x\to a} L$.

2) $f^*(x)g^*(x) \sim f(x)g(x)$.

3) Если $h(x) \to_{x\to a} L \neq 0,\ L \in \mathbb{R}$, то $h(x)f(x) \sim L \cdot f^*(x)$.

Доказательство:

1) $\varphi(x) \to_{x\to a} 1,\ \psi(x) \to_{x\to a} 1$.

$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} \cdot \frac{f^*(x)}{g^*(x)}$.

Если $\frac{f^*(x)}{g^*(x)} \to_{x\to a} L$, следовательно, $\frac{f(x)}{g(x)} \to_{x\to a} L$, так как $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} \to 1$.

2) $f^*(x)g^*(x) = \varphi(x)f(x) \cdot \psi(x)g(x) = \varphi(x)\psi(x)f(x)g(x) = f(x)g(x)$

3) $h(x)f(x) = h(x)\varphi(x)f^*(x) = h(x)f^*(x)$ (По пункту 2).

**Теорема:**

$f, g$ — бесконечно малое (большое), при $x \to a$ Эквивалентность:

1) $f \sim g$ при $x \to a$

2) $f - g = o(g)$ при $x \to a$

3) $f - g = o(f)$ при $x \to a$

Докажем, что 1) $\Leftrightarrow$ 2), 1) $\Leftrightarrow$ 3)

Доказательство:

Докажем, что 1) $\Rightarrow$ 2)

$f(x) = \varphi(x)g(x)\ \varphi(x) \to_{x\to a} 1$

$f(x) - g(x) = (\varphi(x) - 1)g(x) = o(g(x))$.

Докажем, что 2) $\Rightarrow$ 1)

$f(x) - g(x) = \alpha(x)g(x)\ \alpha \to_{x\to a} 0$

$f(x) = (1 + \alpha(x))g(x) = \varphi(x)g(x)$

Докажем, что 1) $\Rightarrow$ 3)

$g(x) = \varphi(x)f(x)$

$f(x) - g(x) = f(x) - \varphi(x)f(x) = f(x)(1 - \varphi(x)) = o(f(x))$. (так как $1\varphi(x) \to 0$)

### Вычисление предела $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^n}{a^x}$

**Теорема:** $a > 1, n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{a^x} \tag{11}$$

Доказательство через неравенство Бернулли ($(1+c)^n > 1+nc$) :

Пусть $m = 1 + c, c > 0$, $t > 0, m^t$.

Оценим снизу $m^t : n = [t] \leq t < [t] + 1$

$t - 1 < [t]$.

тогда $m^t \geq \underbrace{m^{[t]} > 1 + c[t] > c(t-1)}_{\text{смотри строчку выше}}$

Это во всяком случае верно, когда $t > 1$, да и в обратном случае тоже.

Теперь оценим $a^x$:

$a^x = a^{\frac{x}{2}} \cdot a^{\frac{x}{2}} = (a^{\frac{x}{2}})^2 > (c(\frac{x}{2} - 1))^2$ при $x > 2$ (по выведенной выше формуле).

$\frac{x}{a^x} < \frac{x}{(c(\frac{x}{2}-1))^2} \to_{x\to+\infty} 0$

Мы доказали нашу теорему при $t > 1$. А теперь общий случай:

Положим $b = a^{\frac{1}{n}} > 1$

$\frac{x^n}{a^x} < (\frac{x}{a^{\frac{x}{n}}})^n = (\frac{x}{b^x})^n \to_{x\to+\infty} 0$

Точная верхняя и точная нижняя границы функции. Теорема о пределе монотонной функции

$X \subset \mathbb{R}$, $C$ —верхняя граница, если $\forall x \in X : x \leq C$

$L \in \mathbb{R}$, $L = \sup f(X)$, если выполняется:

1) $\forall x \in X : f(x) \leq L$

2) $\forall C \in \mathbb{R} < L$, $\exists x_0 \in X : f(x_0) > C$.

Аналогично для бесконечности:

$\sup f(x) = +\infty$

$\forall C \in \mathbb{R}\ \exists x_0 \in X : f(x_0) > C$.

$X \subset \mathbb{R}, f : X \to R$

$f$ — возрастающая на $X$

$\forall x, x' \in X : x < x' \Rightarrow f(x) \leq f(x')$

Аналогично для убывающей функции. А возрастающая и убывающая функции определяются термином «монотонные».

**Теорема** о пределе возрастающей функции.

$X \subset \mathbb{R}, f : X \to \mathbb{R}, f$ — возрастающая.

$a = \inf X, b = \sup X$.

1) $b$ — точка сгущения $X$, при этом $b \in \hat{\mathbb{R}}$, $L = \sup\limits_{x<b, x \in X} f(x)$, $f(x) \in \hat{\mathbb{R}}$, то $\exists \lim\limits_{x \to b} f(x) = L$. Заметим, что $L$ может быть как конечным, так и бесконечным.

2) $a$ — точка сгущения $X$, при этом $a \in \hat{\mathbb{R}}$, $L = \inf\limits_{x>a, x \in X} f(x)$, $f(x) \in \hat{\mathbb{R}}$ то $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x) = L$. Заметим, что $L$ может быть как конечным, так и бесконечным.

Доказательство:

Будем предполагать, что $b \in \mathbb{R}$ — конечно.

Придется исходить из определения:

$\varepsilon > 0$

$f(x) < L + \varepsilon$ автоматически.

$L - \varepsilon$ — не верхняя граница на множестве $X \setminus \{b\}$, значит, $\exists x_0 \in X : L - \varepsilon < f(x_0)$, при этом $x_0 < b$.

Рассмотрим $\delta = b - x_0 > 0$.

$V_\delta(b) = (b - \delta, b + \delta)$.

$x \in X$, $0 < |x - b| < \delta$, что равнозначно $x \in X \cap \dot{V}_\delta(b)$

Тогда $x_0 = b - \delta < x < b$.

$L - \varepsilon < f(x_0) \leq f(x) \leq L < L + \varepsilon$, что можно переписать как $L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon \Leftrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

Следовательно, $L$ — предел.

При условии, что $f(x) \to_{x \to b} \infty$:

Фиксируем $C > 0$: $\exists x_0 \in X, x < b : f(x) > C$.

$\delta = b - x_0$. $\exists V_\delta(b), x \in \dot{V}_\delta(b) \cap X$; так как правее $b$ ничего нет, то $x_0 = b - \delta < x < \delta \Rightarrow f(x) \geq f(x_0) > C$, то есть $f(x) \to_{x \to b} \infty$.

Предел конечен, если функция ограничена.

Если функция убывает, то sup и inf меняются местами:

1) $b$ — точка сгущения для $X$; $L = \inf f(x) \in \mathbb{R}$; $b \in \mathbb{R}\ \exists \lim\limits_{x \to b}$, и он равен 0.

2) $a$ — точка сгущения. $\exists \lim \in \mathbb{R}$ и он равен $\sup f(x)$.

## Предел числовой последовательности

Определение предела последовательности:

$\forall$ окрестности $U(L)$ $\exists V(+\infty) : n \in \mathbb{N}, n \in V(+\infty) \Rightarrow x_n \in U(L)$.

Последовательности, которые имеют конечный предел, называются сходящимися, а последовательности, предела не имеющие или имеющие предел бесконечный, называются расходящимися.

**Теорема**: Сходящаяся последовательность ограничена.

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена, следовательно, $\exists C$, такое, что $|x_n| \leq C \ \forall n$ — это требуется доказать.

Доказательство:

$x_n \to L$ конечно.

Зафиксируем $\varepsilon = 1$. $\exists N: \ \forall n > N \ |x_n - L| < 1$.

$|x_n| = |x_n - L + L| \leq |x_n - L| + |L| < 1 + |L| = C'$. $C'$ — некая константа

$C'' = \max |x_1|, |x_2|, ..., |x_N|$.

Положим $C = C' + C''$, тогда $|x_n| \leq C \ \forall n$.

**Теорема** о пределе монотонной последовательности: Предел монотонной последовательности конечен тогда и только тогда, когда последовательность ограничена.

$\exists C \ |x_n| \leq C \Leftrightarrow -C \leq x_n \leq C$. Следовательно, у конечной последовательности пределы тоже конечны.

## Теорема о пределе подпоследовательности

**Теорема** о пределе подпоследовательности:

$x_n \to_{n\to\infty} L \in \hat{\mathbb{R}}$

$\{y_k\}$ — подпоследовательность $\{x_n\} \Rightarrow y_k \to_{k\to\infty} L$

Доказательство:

Заметим, что последовательность номеров $n_k$ строго возрастает.

$1 \leq n_1$, $2 \leq n_2$, по индукции легко докажем, что $k \leq n_k \ \forall k$.

Рассмотрим $U(L)$ — окрестность.

Тогда $\exists N$, такое, что $\forall n > N \ x_n \in U(L)$.

Предположим, что $k > N$, тогда $n_k \geq k > N$. Следовательно, $x_{n_k} \in U(L)$. А $y_k = x_{n_k}$, значит, $y_k \in U(L)$. Отсюда $y_k \to L$.

## Принцип Больцано-Вейерштрасса

**Теорема** (принцип выбора) Больцано-Вейерштрасса.

Формулировка: У всякой ограниченной последовательности есть сходящаяся подпоследовательность.

Доказательство:

$\{x_n\}$ — ограниченная последовательность.

$\exists [a, b]$, такой, что $\forall n \; x_n \in [a, b]$

Доказательство будет проходить методом деления промежутка пополам.

Разделим промежуток пополам точкой $c$:

$[a, c]$ $[c, b]$ — хоть один из этих двух промежутков содержит точки $x_n$ со сколь угодно большими номерами.

Возьмем этот промежуток и назовем $[a_1, b_1]$. То есть $[a_1, b_1] \subset [a, b]$.

Теперь берем $[a_1, b_1]$ и делим его пополам точкой $c_1$.

И так далее.

На шаге $k$ получим промежуток $[a_k, b_k] \subset [a_{k-1}, b_{k-1}]$, который содержит точки $x_n$ со сколь угодно большими номерами.

В итоге получается последовательность промежутков $[a_k, b_k]$ со следующими свойствами:

1) $[a_k, b_k] \supset [a_{k+1}, b_{k+1}]$;

2) Длина $[a_k, b_k]$ равна $b_k - a_k \to_{n \to \infty} 0$.

3) $\forall k \; [a_k, b_k]$ содержит точки $x_n$ со сколь угодно большими номерами.

Строим последовательность:

Берем произвольно номер $n_1$, для которого $x_{n_1} \in [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2]$

Берем $n_2$, такое, что $x_{n_2} \in [a_2, b_2]$ и $n_2 > n_1$.

$n_1 < n_2 < ... < n_k$

Выбираем из промежутка $[a_k, b_k]$ точку $x_{n_k}$, $n_k > n_{k-1}$.

Так возникает подпоследовательность $y_k = x_{n_k}$

$\forall k \;\; a_k \leq x_{n_k} \leq b_k$. Т.к. промежутки вложенные, $\exists C \in [a_k, b_k] \; \forall k$, такое, что $a_k \to C$ и $b_k \to C$. Следовательно, по теореме о двух милиционерах $x_{n_k} \to C$

## Фундаментальные последовательности

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется сходящейся в себе (фундаментальной или последовательностью Коши), если обладает следующим свойством: $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N$ такое, что $\forall n, m > N$ выполняется $|x_n - x_m| < \varepsilon$.

1) **Лемма:** сходящаяся последовательность фундаментальна.

$x_n \to L \in R$. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда $\exists N \; \forall n > N \; |x_n - L| < \frac{\varepsilon}{2}$ (*).

Возьмем 2 числа: $m, n > N$. Для $|x_n - L| < \frac{\varepsilon}{2}$ и для $|x_m - L| < \frac{\varepsilon}{2}$.

$|x_n - x_m| = |(x_n - L) - (x_m - L)| \geq |(x_n - L)| + |(x_m - L)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

2) **Лемма:** фундаментальная последовательность ограничена.

Доказательство:

$\varepsilon = 1$. Тогда $\exists N \; \forall n, m > N$.

$m_0 > N \; |x_n - x_m| < 1$.

$n > N$ $|x_n| = |x_{m_0} + (x_n - x_{m_0})| \geq |x_{m_0}| + |x_n - x_{m_0}| < |x_{m_0}| + 1 = C'$

Отсюда $|x_n| \geq C'$

$C'' = \max |x_k|$ при $1 \geq k \geq N$

$C = C' + C''$

Теорема о плотности множества $\hat{\mathbb{R}}$

Последовательность сходится тогда и только тогда, когда она фундаментальна.

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна, следовательно, она ограничена, следовательно, $\exists x_{n_k}$ сходится.

$x_{n_k} \to L \in \mathbb{R}$.

Зафиксировали $\varepsilon > 0$. $\exists N : \forall m, n > N$ выполняется $|x_n - x_m| < \varepsilon$.

$|x_n - x_{n_k}| < \varepsilon \; \forall n > N, \; \forall k > N \; (n_k > k)$.

$|x_n - L| < \varepsilon < 2\varepsilon$. (Функция $x_n$ переходит к пределу от $k$).

Значит, $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N$, такое, что $\forall n > N$ выполняется $|x_n - L| < 2\varepsilon$.

## Характеристика точки сгущения на языке последовательностей

**Лемма:** $X \subset \mathbb{R}, \; a \in \hat{\mathbb{R}}$.

$a$ — точка сгущения множества $X \Leftrightarrow \exists \{x_n\}$ со свойствами:

1) $x_n \in X \; \forall n$;

2) $x_n \to a$;

3) $x_n \neq a \; \forall n$

Доказательство:

Необходимости:

$a$ — точка сгущения.

$a \in \mathbb{R} \; \forall V(a) \; \dot{V}(a) \cap X \neq \varnothing$.

$\forall \delta > 0 \ \dot{V}(a) \cap X \neq \varnothing$.
Если $a = +\infty$: $(a-\delta, a+\delta)$, $(C, +\infty]$
$\delta = \frac{1}{n}$
$\forall n \ \dot{V}_{\frac{1}{n}}(a) \cap X \neq \varnothing$.
$\exists x_n \in \dot{V}_{\frac{1}{n}}(a) \cap X : x_n \in X, 0 < |x_n - a| < \frac{1}{n}$
$|x_n - a| < \frac{1}{n} \to 0$.
Достаточность:

$V(a)$. Т.к. $x_n \to a$, то начиная с некоторого места $x_n \in V(a)$, точнее, ввиду условий (3) и (1) $x_n \in \dot{V}(a) \cap X$.

Получилось, что для любой окрестности точки $a$ пересечение окрестности с $X$ не пусто, следовательно, $a$ — точка сгущения.

Лемма доказана.

## Теорема о характеристике предела функции на языке последовательностей (необходимость)

**Теорема:** $X \subset \mathbb{R}, a \in \hat{\mathbb{R}}, a$ — точка сгущения.
$f : X \to \mathbb{R}$.
$f(x) \to_{x \to a} L, \ (L \in \hat{\mathbb{R}})$
$\forall$ последовательности $\{x_n\}$ со свойствами:
1) $x_n \in X \forall n$;
2) $x_n \to a$
3) $x_n \neq 0 \ \forall n$
$f(x) \to L$ (**)
Доказательство:
Требуется доказать, что: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, $y_n = f(x_n) \to_{n \to \infty} L$
Доказываем:
$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ со свойствами выше.
Возьмем $V(L)$

Лемма гарантирует, что $\exists U(a)$, такая, что $\forall x \in \dot{U}(a) \cap X$ выполняется $f(x) \in V(L)$.

Вспомним, что $x_n \to a$

$\exists N\ \forall n > N\ x_n \in U(a)$.

По свойству (1) и (3): $x_n \in \dot{U}(a)$ и, так как $x_n \in X\ \dot{U}(a) \cap X$

Следовательно, $f(x_n) \in V(L)$.

Получилось, что для любой окрестности $V(L)$ мы нашли такой номер $N$, что как только $n > N\ f(x_n) \in V(L)$.

*различные варианты — ?*

## Теорема о характеристике предела функции на языке последовательностей (достаточность)

$X \subset \mathbb{R}, a \in \hat{\mathbb{R}}, a$ — точка сгущения.

$L = \lim\limits_{x \to a} f(x) \Leftrightarrow$

$\forall \{x_n\}$ со свойствами:

(*) 1) $x_n \in X\ \forall n$, 2) $x_n \to_{n \to \infty} a$, 3) $x_n \neq a \forall n$. Тогда $f(x_n) \to L,\ L \in \hat{\mathbb{R}}$

Переходим к доказательству достаточности:

На языке неравенств нужно доказать, что $\forall \varepsilon\ \exists \delta > 0$.

Откуда возьмется $\delta$? Разобъем множество $X$ на 2 части, в первой выполняется условие, а во второй - нет.

1) $L \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$

$A = \{x \in X || f(x) - L| < \varepsilon\}$;

$B = \{x \in X || f(x) - L| \geq \varepsilon\}$

$A \cap B = \varnothing$, $A \cup B = X$.

Сначала берем те точки $X$, где точки графика принадлежат полосе $|f(x_n) - L| < \varepsilon$ — это $A$, а точки, которые не входят в полосу — $B$. Точки, где график «высовывается» за полосу (т.е. множество $B$), лежат достаточно далеко от $A$.

Мы и докажем, что $a$ — НЕ точка сгущения для $B$. От противного.

Доказательство:

Допустим, что $a$ — точка сгущения. Тогда по лемме о характеристике точек сгущения, найдется последовательность точек $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ которая удовлетворяет свойствам 1), 2), 3) где вместо $X$ стоит $B$. Так как $B \in X$, то $0 < \varepsilon \leq |f(x_n) - L| \to 0$. Противоречие. Теорема доказана.

Таким образом, установлено, что $a$ — НЕ точка сгущения для $B$. На языке окрестностей:

$\exists U(a) : \dot{U}(A) \cap B = \varnothing$.

Попытаемся понять, что мы доказали. Рассмотрим $\dot{U}(a) \cap X$. Данное пересечение состоит из точек множества $A$. Следовательно, $(\dot{U}(a) \cap X) \in A$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists U(a) : \ \forall x \in \dot{U}(a) \cap X \Rightarrow x \in A$. А в $A$ попадают точки, которые лежат в $|f(x) - L| < \varepsilon$. Значит, $\forall \varepsilon > 0 \ \exists U(a) : \forall x \in \dot{U}(a) \cap X \Rightarrow x \in A \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

Отсюда, по определению, $L$ — предел $x_n$.

Ну а если $L = +\infty$, то нужно доказать $f(x) > C$.

Зафиксируем $C$ и возьмем

$A = \{x \in X | f(x) > C\}$;

$B = \{x \in X | f(x) \leq C\}$