Дисклеймер.

Автор не несет ответственности за любой ущерб, причиненный Вам при использовании данного документа. Автор напоминает, что данный документ может содержать ошибки и опечатки, недостоверную и/или непроверенную информацию. Если Вы желаете помочь в развитии проекта или сообщить об ошибке/опечатке/неточности:

GitHub проекта

Автор в ВК

Содержание

1 Обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка и его решение. Поле направлений и изоклины. Задача Коши для уравнения первого порядка 5

2 Общее, частное и особое решение уравнения первого порядка 6

3 Неполные уравнения. Уравнение с разделяющимися переменными 6

4 Однородные уравнения 8

5 Линейное уравнение 9

6 Уравнение Бернулли 9

7 Уравнение Риккати 10

8 Уравнение в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель 10

9 Уравнения высших порядков, общие вопросы, геометрическое истолкование, механическое истолкование уравнений второго порядка 11

10 Системы ОДУ. Геометрическое и механическое истолкование 12

11 Задача Коши. Общее решение системы ОДУ 13

12 Первые интегралы. Общий интеграл 14

13 Системы ОДУ в симметрической форме 14

14 Ломанные Эйлера. Лемма Арцеля 15

15 Теорема Пеано 16

16 Метод последовательных приближений Пикара для уравнений первого порядка 19

17 Теорема Пикара для нормальной системы ОДУ 19

18 Голоморфные функции и мажоранты. Теорема Коши 19

19 О степени гладкости решения ДУ 19

20 Непрерывная зависимость решений от параметров 19

21 Дифференцируемость по параметрам 19

22 Линейные дифференциальные уравнения n-ого порядка. Общие свойства 19

23 Однородные линейные уравнения. Формула Остроградского-Лиувилля 19

24 Фундаментальные системы решений 19

25 Структура общего решения неоднородного линейного уравнения n-ого порядка. Метод Лагранжа 19

26 Линейные уравнения n-ого порядка с постоянными коэффициентами. Построение фундаментальной системы решений и общего решения 19

27 Нахождение частного решения неоднородного уравнения методом неопределенных коэффициентов 19

28 Линейные системы дифференциальных уравнений. Свойства решений однородной системы 19

29 Формула Остроградского-Лиувилля-Якоби 19

30 Система линейных неоднородных уравнений. Структура общего решения неоднородной системы. Метод вариации произвольных постоянных 19

31 Формула Коши для неоднородной линейной системы (в матрично-векторной форме) 19

32 Линейные системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Метод Эйлера 19

33 Матрицант 19

34 Построение матрицанта в случае Лапно-Данилевского 19

35 Построение матрицанта для линейных однородных систем с постоянным коэффициентами (построение фундаментальной матрицы с помощью интерполяционного полинома) 19

36 Построение матрицанта для линейных однородных систем с постоянными коэффициентами (построение фундаментальной матрицы с помощью Жордановой формы матрицы системы) 19

37 Линейные периодические системы. Теорема Флоке 19

38 Квазилинейные уравнения в частных производных первого порядка. Связь однородного линейного уравнения в частных производных с системой ОДУ в симметрической форме 19

39 Неоднородное линейное уравнение в частных производных первого порядка. Построение общего решения. Решение задачи Коши 19

40 Разностные уравнения первого порядка 19

41 Линейные разностные уравнения порядка n 19

42 Систмы линейных разностных уравнений 19

43 Понятие о методах решения нелинейных разностных уравнений и систем 19

1 Обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка и его решение. Поле направлений и изоклины. Задача Коши для уравнения первого порядка

Определение 1.1. Обыкновенным дифференциальным уравнением называется соотношение вида

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$$

Определение 1.2. Уравнение первого порядка имеет вид $F(x, y, y') = 0$, наряду с ним рассматриваются также $\frac{dy}{dy} = f(x, y)$ — нормальная форма Коши и $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x,y)}$ в окрестности тех точек, в которых $f(x, y)$ обращается в бесконечность.

Дифференциальная запись: $dy - f(x, y)dx = 0$. Здесь обе переменные входят в уравнение равноправно и мы можем принять за независимую любую из них.

Домножив предыдущее уравнение на $M(x, y)$ получим общий вид уравнения: $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$.

Определение 1.3. Пусть $f(x, y)$ определена на некотором подмножестве A вещественной плоскости $\mathbb{R}^2$. Функция $y = y(x)$, определенная на интервале (a, b) называется **решением дифференциального уравнения** $\frac{dy}{dy} = f(x, y)$,если:

1) $\forall x \in (a, b)\ \exists y'(x)$, то есть решение представляет собой непрерывную функцию.

2) $y = y(x)$ обращает уравнение в тождество $y'(x) \equiv f(x, y(x))$, справедливое для всех значений из (a, b).

Определение 1.4. Если рассматривать x, y как координаты на плоскости, то решению уравнения $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ будет соответствовать некая кривая, которая называется **интегральной кривой**.

Определение 1.5. Пусть $f(x, y)$ определена и конечна на открытом и связном множестве G. Проведя через каждую точку этого множества отрезок, составляющий с осью Ox угол α, такой, что $\tan \alpha = f(x, y)$, мы получим некоторое **поле направлений**.

Тогда уравнение выражает геометрически тот факт, что направление касательной в каждой точке интегральной кривой совпадает с направлением поля в этой точке.

Определение 1.6. Если правая часть уравнения $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ обращается в неопределенность $\frac{t}{0}$ в точке (x_0, y_0), то будем говорить, что в данной точке поле направлений не определено и через нее не проходит ни одна интегральная кривая. Если существует интегральная кривая вида $y(x) \to_{x \to x_0} y_0 / x(y) \to_{y \to y_0} x_0$, то она называется **примыкающей** к точке (x_0, y_0).

Определение 1.7. Кривая, в каждой точке которой наклон поля, определяемого уравнением $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$, одинаков, называется **изоклиной** этого уравнения. Уравнение изоклины имеет вид $f(x, y) = k$, где k — постоянное число.

Проблема. (Задача Коши)

Для уравнения $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ задача Коши ставится следующим образом: среди всех решений $y = y(x)$ этого уравнения найти такое, при котором функция $y(x)$ принимает заданное числовое значение y_0 при заданном числовом значении x_0, то есть $y(x_0) = y_0$.

При этом число y называется начальным значением искомой переменной, а x_0 — начальным значением независимой переменной. В целом числа называются начальными данными решения.

Геометрически задача Коши формулируется так: среди всех интегральных кривых найти ту, которая проходит через точку (x_0, y_0).

Задача Коши с начальными условиями $x = x_0, y = y_0$ имеет единственное решение, если $\exists h > 0$, такое, что в интервале $|x - x_0| \le h$ определено единственное решение $y = y(x)$, такое, что $y_0 = y(x_0)$. В противном случае единственность решения задачи Коши нарушается.

Для существования непрерывно дифференцируемого решения задачи Коши уравнения $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ достаточно предположить, что правая часть уравнения непрерывна в окрестности начальных данных.

2 Общее, частное и особое решение уравнения первого порядка

Зададим некоторую область D изменения x, y.

Определение 2.1. Функция $y = \varphi(x, C)$, определенная в некоторой области изменения переменных x, C и имеющая непрерывную частную производную по независимой переменной x называется **общим решением уравнения** $\frac{dy}{dy} = f(x, y)$ в области D, если равенство $y = \varphi(x, C)$ разрешимо относительно C в области D таким образом, что $\forall x, y \in D$ равенством определяется значение C по формуле $C = \psi(x, y)$ и если равенство является решением уравнения $\forall C$.

Иногда роль константы играет начальное значение y_0 искомой функции y при некотором значении x_0 и формула принимает вид $y = y(x, x_0, y_0)$, что называется **общим решением в форме Коши**.

Теорема 2.1. *(Пикара)*

Пусть задано уравнение $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ *и поставлено начальное условие* $y = y_0$ *при* $x = x_0$. *Пусть функция* $f(x, y)$ *определена в некоторой замкнутой ограниченной области* $R: \ |x - x_0| \le a, \ |y - y_0| \le b$ *с точкой* (x_0, y_0) *внутри и удовлетворяет в ней следующим условиям:*

1) Функция непрерывна в области и потому ограничена;

2) Функция имеет ограниченную частную производную по аргументу $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \le K$.

При сделанных предположениях уравнение имеет единственное решение $y = y(x)$ *которое удовлетворяет начальному условию. Это решение определено и непрерывно дифференцируемо в некоторой окрестности начального значения* x_0.

Определение 2.2. Решение, определяемое теоремой Пикара, называется **частным.**

Определение 2.3. Решение, в каждой точке которого нарушается единственность решения задачи Коши, называется **особым.**

3 Неполные уравнения. Уравнение с разделяющимися переменными

Определение 3.1. Уравнение $\frac{dy}{dx} = f(x)$ называется **уравнением, не содержащим искомой функции**.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на интервале (a, b). Общим решением такого уравнения будет функция

$$y = \int f(x)dx + C$$

в области $a < x < b, \; -\infty < y < \infty$.

Общее решение можно переписать в виде

$$y = \int_{x_0}^{x} f(x)dx + y_0$$

Это будет частным решением в форме Коши.

Особых решений нет.

Определение 3.2. Уравнение $\frac{dy}{dx} = f(y)$ называется **уравнением, не содержащим независимой переменной**.

Пусть функция $f(y)$ определена и непрерывна в интервале (c, d). Перевернем уравнение: $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(y)}$. Тогда функция

$$x = \int \frac{1}{f(y)}dy + C$$

является общим решением уравнения в области $c < y < d, \; -\infty < x < \infty$.

Аналогично предыдущему выводится форма Коши:

$$x = \int_{y_0}^{y} \frac{1}{f(y)}dy + x_0$$

Особых решений нет.

Определение 3.3. Уравнение вида

$$m(x)n(y)dx + m_1(x)n_1(y)dy = 0$$

называется **уравнением с разделяющимися переменными**.

Решение находится путем домножения на $\frac{1}{n(y)m_1(x)}$:

$$\frac{m(x)}{m_1(x)}dx + \frac{n(x)}{n_1(x)}dy = 0$$

$$\int \frac{m(x)}{m_1(x)}dx + \int \frac{n(x)}{n_1(x)}dy = C$$

или аналогично с переменным верхним пределом.

Деля на $n(y)m_1(x)$, мы могли потерять решения вида $n(y) = 0, m_1(x) = 0$. Действительно, если b — решение $n(y) = 0$, то

$$m(x)n(b)dx + m_1(x)n_1(b)db \equiv 0$$

Следовательно, $y = b$ и $x = a$ есть корни уравнения. Если их невозможно получить из общего интеграла, то эти решения являются особыми.

При этом мы должны исключить из этих решений точку $x = a, y = b$, так как в ней уравнение не определяет наклон поля y'.

Другие особых решений нет.

4 Однородные уравнения

Определение 4.1. Уравнение

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

в котором $M(x,y)$ и $N(x,y)$ — однородные функции одной и той же степени, называется **однородным**.

Чтобы проинтегрировать однородное уравнение, сделаем замену исходной функции $y = tx$, где t — новая искомая функция от x. Тогда будем иметь

$$M(x,tx)dx + N(x,tx)(tdx + xdt) = 0$$

что есть уравнение с разделяющимися переменными. Общее решение данного уравнения примет вид

$$x = Ce^{\psi(y/x)}$$

где

$$\psi\left({}^{y}\!/_{x}\right) = -\int \frac{N(1, {}^{y}\!/_{x})d({}^{y}\!/_{x})}{M(1, {}^{y}\!/_{x}) + N(1, {}^{y}\!/_{x}){}^{y}\!/_{x}}$$

При выполнении этих действий мы теряем решение вида $t = t_i$, где t_i — корень уравнения

$$M(1,t) + N(1,t)t = 0$$

Подставив эти значения в формулу $y = tx$ получим $y = t_i x,\ (x \neq 0)$ — полупрямые, примыкающие к началу координат. Эти решения могут быть как особыми, так и содержаться в формуле общего интеграла. Также особыми решениями могут быть полуоси $x = 0$ $(y \neq 0)$. Других особых решений нет.

Уравнение

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{ax + by + c}\right)$$

может быть приведено к однородному.

Если $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a & b \end{vmatrix} \neq 0$, то для приведения к однородному требуется выполнить замену со сдвигом $x = \xi + \alpha,\ y = \eta + \beta$, выбрав α, β так, чтобы $\begin{cases} a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0 \\ a\alpha + b\beta + c = 0 \end{cases}$. Получим однородное уравнение

$$\frac{d\eta}{d\xi} = f\left(\frac{a_1\xi + b_1\eta}{a\xi + b\eta}\right)$$

Если же $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a & b \end{vmatrix} = 0$, то $\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = k$, откуда $a_1 = ka,\ b_1 = kb$, откуда

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{k(ax + by) + c_1}{ax + by + c}\right) \equiv f_1(ax + by)$$

Введя функцию $z = ax + by$ получим уравнение, не содержащее независимой переменной.

5 Линейное уравнение

Определение 5.1. Уравнение вида $y'+p(x)y = q(x)$ называется **линейным** (содержащим функцию $y(x)$ только в первой степени).

Определение 5.2. Если $q(x) \equiv 0$, то уравнение примет вид $y'+p(x)y = 0$, то есть является **однородным**. В противном случае, оно является **неоднородным**.

Из теоремы Пикара следует, что при непрерывности $p(x), q(x)$ на интервале (a, b) уравнение имеет единственное решение $y = y(x)$ удовлетворяющее начальным условиям $y = y_0,\ x = x_0$.

Рассмотрим однородное уравнение $y' + p(x)y = 0$ и перепишем его в виде

$$dy + p(x)ydx = 0$$

Получим уравнение с разделяющимися переменными и решение вида

$$y = Ce^{-\int p(x)dx}$$

в котором содержатся все возможные решения уравнения, в том числе и $y = 0$ (при $C = 0$). То есть всякое решение уравнения определено во всем интервале (a, b).

Найденное решение является общим решением уравнения во всей области задания уравнения.

Переписав в виде

$$y = Ce^{\int_{x_0}^{x} p(x)dx}$$

получим общее решение в форме Коши.

Рассмотрим неоднородное уравнение $y'+p(x)y = q(x)$. Оно решается методом вариации произвольной постоянной, путем решения уравнения $y'+p(x)y = 0$. Получаем решение вида $y = e^{c_1}\varphi(x) = c\varphi(x)$.

Заменив постоянную c на функцию $c(x)$ получим $c'\varphi + c\varphi' = a(x)c\varphi + b(x)$, решением которого будет являться $c(x)$.

Наконец, решением самого неоднородного уравнения будет $y = c(x)\varphi(x)$.

6 Уравнение Бернулли

Определение 6.1. Уравнение вида $y'+p(x)y = q(x)y^m$ называется **уравнением Бернулли**. Здесь m — любое вещественное число, отличное от 0 и 1, иначе уравнение вырождается.

Уравнение Бернулли всегда может быть сведено к линейному уравнению следующим образом:

1) Разделим все на y^m: $y^{-m}y' + p(x)y^{1-m} = q(x)$;

2) Введем новую неизвестную функцию $z = y^{1-m}$, (тогда $z' = (1-m)y^{-m}y'$)

3) Умножив обе части уравнения на $(1-m)$ и выполнив подстановку получим $z'+(1-m)p(x)z = (1-m)q(x)$.

Проинтегрировав это уравнение и вернувшись к переменной y получим общее решение в виде

$$y = \left(e^{\int(m-1)p(x)dx}\left(C + \int(1-m)q(x)e^{\int(1-m)p(x)dx}dx\right)\right)^{\frac{1}{1-m}}$$

Особое решение $y = 0$ теряется при делении на y^m. Это возможно при $m > 0$. Далее, если $m > 1$, то решение $y = 0$ содержится в общем решении при $C = \infty$ и, таким образом, является частным. При $0 < m < 1$ решение является особым.

7 Уравнение Риккати

Определение 7.1. Уравнение вида $\frac{dy}{dx} = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x)$ называется **уравнением Риккати**. Считаем, что $P(x), Q(x), R(x)$ определены и непрерывны на интервале $(a, b),\ -\infty \le a,\ b \le \infty$, иначе оно вырождается в линейное.

Замечание 7.1. Уравнение Риккати путем линейных преобразований может быть приведено к каноническому виду $\frac{dy}{dx} = \pm y^2 + R(x)$.

Теорема 7.1. *Если известно одно частное решение уравнения Риккати, то его всегда можно привести к уравнению Бернулли.*

Доказательство. Пусть y_1 — частное решение. Положим $y = y_1 + z$, где z — новая искомая функция. Тогда $y_1' + z' = P(x)y_1^2 + 2P(x)y_1z + P(x)z^2 + Q(x)y_1 + Q(x)z + R(x)$. Так как $y_1' \equiv P(x)y_1^2 + Q(x)y_1 + R(x)$, получим уравнение Бернулли $z' - (2P(x)y_1 + Q(x))\, z = P(x)z^2$, которое сводится к линейному подстановкой $u = {}^1/_z$. Таким образом, уравнение Риккати, когда известно одно его частное решение, интегрируется двумя квадратурами. □

Замечание 7.2. На практике нужно делать подстановку $y = y_1 + \frac{1}{u}$, которая сразу же приводит уравнение Риккати к линейному.

Замечание 7.3. Уравнение Риккати не имеет особых решений.

8 Уравнение в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель

Определение 8.1. Уравнение вида $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ называется **уравнением в полных дифференциалах**, если выполняется условие $M(x, y)dx + N(x, y)dy = dU$.

Будем предполагать, что M, N непрерывны в некоторой односвязной области и не обращаются на ней в нуль.

Признак уравнения в полных дифференциалах: $\frac{\partial U}{\partial x} = M(x, y),\ \frac{\partial U}{\partial y} = N(x, y)$. Продифференцировав оба этих тождества еще раз, но уже по другим переменным, получим $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$, откуда $\frac{\partial M}{\partial y} \equiv \frac{\partial N}{\partial x}$. Это условие и является признаком уравнения в полных дифференциалах.

Докажем **достаточность** этого признака, одновременно выведя **ход решения:**
Если $\frac{\partial U}{\partial x} = M(x, y)$, то ему удовлетворяет функция

$$U(x, y) = \int_{x_0}^{x} M(x, y)dx + \varphi(y)$$

где $\varphi(y)$ произвольная дифференцируемая функция, выбранная так, чтобы

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\partial M}{\partial y} dx + \varphi'(y) = N(x, y)$$

Используя признак, перепишем:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\partial N}{\partial x} dx + \varphi'(y) = N(x, y)$$

Выполнив интегрирование, получаем:

$$N(x, y) - N(x_0, y) + \varphi'(y) = N(x, y)$$

Откуда $\varphi'(y) = N(x_0, y)$, следовательно,

$$\varphi(y) = \int_{y_0}^{y} N(x_0, y) dy + C'$$

где C' уже произвольная константа.
Таким образом,

$$U(x, y) = \int_{x_0}^{x} M(x, y) dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0, y) dy + C'$$

или, если брать за исходное второе равенство

$$U(x, y) = \int_{x_0}^{x} M(x, y_0) dx + \int_{y_0}^{y} N(x, y) dy + C'$$

Два этих неравенства образуют **решение задачи Коши**.

Определение 8.2. Интегрирующим множителем называется функция $\mu = \mu(x, y)$, после умножения на которую уравнение $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$, не являющееся уравнением в полных дифференциалах, становится уравнением в полных дифференциалах: $\mu M(x, y)dx + \mu N(x, y)dy = 0$.

9 Уравнения высших порядков, общие вопросы, геометрическое истолкование, механическое истолкование уравнений второго порядка

Определение 9.1. Уравнение вида $F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$ называется **уравнением n-го порядка.**

Определение 9.2. Уравнение n-го порядка, разрешенное относительно старшей производной $y^{(n)} = F(x, y, y', y'', ...y^{(n-1)})$ называется **нормальной формой уравнения n-го порядка.**

Определение 9.3. Если функция F линейна по $y, y', y'', ..., y^{(n)}$, то это уравнение можно переписать в виде

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x)$$

которое является **линейным уравнением**.

Определение 9.4. Всякая функция $y = y(x)$ определенная и n раз дифференцируемая на интервале (a, b) называется **решением уравнения**, если она обращает его в тождество.

Геометрическое истолкование аналогично уравнению первого порядка: всякому решению соответствует некая кривая на плоскости, называемая интегральной кривой.

Так, всякое уравнение второго порядка определяет связь между координатами, наклоном касательной и кривизной в каждой точке интегральной кривой.

Физическое истолкование.

Рассмотрим прямолинейное движение материальной точки M по оси Ox. Тогда x, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{d^2x}{dt^2}$ выражают соответственно положение, скорость и ускорение точки M в момент времени t. Считая, что сила, действующая на точку, есть функция $f(t, x, \frac{dx}{dt})$ и что масса точки равна единице, по второму закону Ньютона получим уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right)$$

Всякое решение этого уравнения соответствует некоторому движению.

Задача Коши для уравнения n-го порядка ставится следующим образом: среди всех решений уравнения найти решение $y = y(x)$, в котором функция $y(x)$ вместе с ее производными до $n - 1$ порядка включительно принимает заданные значения $y_0, y_0', ..., y_0^{n-1}$ при заданном значении x_0.

10 Системы ОДУ. Геометрическое и механическое истолкование

Определение 10.1. Совокупность соотношений вида

$$\begin{cases} F_1(x, y_1, y_2, ..., y_n, y_1', y_2', ..., y_n') = 0 \\ F_2(x, y_1, y_2, ..., y_n, y_1', y_2', ..., y_n') = 0 \\ ... \\ F_n(x, y_1, y_2, ..., y_n, y_1', y_2', ..., y_n') = 0 \end{cases}$$

где $y_1, ..., y_n$ — искомые функции от независимой переменной x называется **системой обыкновенных дифференциальных уравнений** первого порядка.

Определение 10.2. Система n дифференциальных уравнений первого порядка, разрешимая относительно производных

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, ..., y_n) \\ ... \\ \frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, ..., y_n) \end{cases}$$

называется **нормальной системой дифференциальных уравнений**. Число уравнений, входящих в систему, называется ее **порядком**.

Определение 10.3. Если правые части системы зависят линейно от искомых функций $y_1, ..., y_n$, то такая система называется **линейной**.

Определение 10.4. Если правые части системы на зависят от переменной x, то она называется **автономной**.

Геометрическое истолкование нормальной системы представляет собой **интегральную кривую** в $n+1$ мерном пространстве, где координаты данной кривой задаются переменными $x, y_1, ..., y_n$. Поле направлений задается аналогично. Неопределенность поля и примыкающие кривые задаются аналогично.

Механическое истолкование.

Решению уравнения

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = X_1(t, x_1, ..., x_n) \\ ... \\ \frac{dx_n}{dt} = X_n(t, x_1, ..., x_n) \end{cases}$$

соответствует **движение точки** в n-мерном пространстве $(x_1, ..., x_n)$. Данное пространство называется **фазовым**, а кривая — **траекторией движения**.

Уравнения системы являются параметрическими уравнениями траектории движения, которые показывают, как происходит движение точки по траектории с течением времени.

11 Задача Коши. Общее решение системы ОДУ

Задача Коши здесь ставится следующим образом: среди решений системы

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, ..., y_n) \\ ... \\ \frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, ..., y_n) \end{cases}$$

требуется найти решение $y_1 = y_1(x), ..., y_n = y_n(x)$, в котором функции $y_1(x), ..., y_n(x)$ принимают заданные числовые значения $y_1^{(0)}, ..., y_n^{(0)}$ при заданном числовом значении x_0 независимой переменной x.

При этом числа $y_1^{(0)}, ..., y_n^{(0)}$ называются начальными данными решения, а условия $y_1(x_0) = y_1^{(0)}, ..., y_n(x_0) = y_n^{(0)}$ — начальными условиями этого решения.

Семейство решений системы, зависящее от n произвольных постоянных $C_1, ..., C_n$:

$$\begin{cases} y_1 = \varphi_1(x, C_1, ..., C_n) \\ ... \\ y_n = \varphi_n(x, C_1, ..., C_n) \end{cases}$$

называют **общим решением системы**.

Общее решение в форме Коши имеет вид

$$\begin{cases} y_1 = y_1(x, x_0, y_1^{(0)}, ..., y_n^{(0)}) \\ ... \\ y_n = y_n(x, x_0, y_1^{(0)}, ..., y_n^{(0)}) \end{cases}$$

12 Первые интегралы. Общий интеграл

Определение 12.1. Функция $\psi(x, y_1, ..., y_n)$, отличная от тождественной постоянной, непрерывно дифференцируемая в области D и такая, что $\frac{\partial\psi}{\partial y_1}, ..., \frac{\partial\psi}{\partial y_n}$ не обращаются одновременно в нуль в этой области называется **интегралом системы**

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, ..., y_n) \\ ... \\ \frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, ..., y_n) \end{cases}$$

в области D, если ее полный дифференциал

$$d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x}dx + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial\psi}{\partial y_k}dy_k$$

обращается в области D тождественно в нуль.

Определение 12.2. Равенство $\psi(x, y_1, ..., y_n) = C$, где ψ — интеграл системы, а C — произвольная постоянная, называется **первым интегралом этой системы**.

Определение 12.3. Совокупность n независимых первых интегралов $\psi_1(x, y_1, ..., y_n) = C_1, ..., \psi_n(x, y_1, ..., y_n) = C_n$ определенных в области D называется **общим интегралом этой системы** в области D.

Теорема 12.1. *Для того, чтобы n интегралов $\psi_1, ..., \psi_n$ системы, определенных в области D были независимыми в этой области, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\frac{D(\psi_1, ..., \psi_n)}{D(y_1, ..., y_n)} \not\equiv 0$$

13 Системы ОДУ в симметрической форме

Определение 13.1. Система дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx_1}{X_1(x_1, ..., x_n)} = \frac{dx_2}{X_2(x_1, ..., x_n)} = ... = \frac{dx_n}{X_n(x_1, ..., x_n)}$$

называется **системой обыкновенных дифференциальных уравнений в симметрической форме**.

Замечание 13.1. В системе

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, ..., y_n) \\ ... \\ \frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, ..., y_n) \end{cases}$$

равноправия нет, так как $y_1, ..., y_n$ рассматриваются как искомые функции, а x — как независимая переменная.

Замечание 13.2. Нормальную систему всегда можно привести к системе в симметрической форме, переписав ее в виде

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy_1}{f_1(x, y_1, ..., y_n)} = ... = \frac{dy_n}{f_n(x, y_1, ..., y_n)}$$

Пусть все функции $X_1, ..., X_n$ системы

$$\frac{dx_1}{X_1(x_1, ..., x_n)} = \frac{dx_2}{X_2(x_1, ..., x_n)} = ... = \frac{dx_n}{X_n(x_1, ..., x_n)}$$

вместе с частными производными по $x_1, ..., x_n$ определены и непрерывны в некоторой области изменения переменных $x_1, ..., x_n$ и при этом ни в одной точке этой области не обращаются одновременно в нуль. Тогда принимая за независимую переменную x_n можно переписать уравнение в виде нормальной системы из $n-1$ уравнения:

$$\frac{dx_1}{dx_n} = \frac{X_1}{X_n}, ..., \frac{dx_{n-1}}{dx_n} = \frac{X_{n-1}}{X_n}$$

Решение, интеграл, общее решение и общий интеграл этой системы соответственно являются ими же для системы в симметрической форме.

14 Ломанные Эйлера. Лемма Арцеля

Пусть дано дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ и оно задано в области G. Тогда в област G данное уравнение определяет поле направлений, которые должны иметь интегральные кривые.

Возьмем в области G точку (x_0, y_0). Ей будет соответствовать проходящая через эту точку прямая с угловым коэффициентом $f(x_0, y_0)$. На этой прямой в области G возьмем точку (x_1, y_1), через котороую проведем прямую с угловым коэффициентом $f(x_1, y_1)$, на которой отметим точку (x_2, y_2) и так далее. Пусть при этом $x_0 < x_1 < x_2 < ...$ либо наоборот. Получим ломаные линии, которые называются **ломаными Эйлера**.

Логично, что каждая из ломаных Эйлера с достаточно короткими звеньями дает представление об интегральной кривой, проходящей через точку (x_0, y_0), и что при уменьшении длин звеньев ломаные Эйлера приближаются к этой интегральной кривой; при этом предполагается, что такая кривая существует. При непрерывности $f(x, y)$ можно выбрать такую последовательность ломаных Эйлера, которая будет сходиться к интегральной кривой, однако не иметь условия единственности; то есть для одной точки могут существовать различные интегральные кривые, проходящие через нее.

Лемма 14.1. *(Арцеля)*

Пусть на конечном интервале (a, b) дано семейство $\{f(x)\}$, состоящее из бесконечного множества функций $f(x)$, равномерно ограниченных ($\exists M : \ |f(x)| < M$) и равностепенно непрерывных ($\forall \varepsilon > 0 \ \exists n(\varepsilon) > 0 : \ \forall x', x'' \in (a, b)$ выполняется $|x'' - x'| < n \Rightarrow |f(x'') - f(x')| < \varepsilon$). Тогда из этого семейства можно выбрать равномерно сходящуюся на (a, b) бесконечную последовательность функций.

Доказательство. В силу равномерной ограниченности семейства все графики принадлежащих ему функций будут расположены в прямоугольнике $ABCD$ со сторонами $2M$ (вертикаль) и $b - a$ (горизонталь).

Составим бесконечную последовательность чисел

$$\varepsilon_1 = \frac{M}{2^{\alpha+1}}, \varepsilon_2 = \frac{M}{2^{\alpha+2}}, ..., \varepsilon_k = \frac{M}{2^{\alpha+k}}, ...$$

где α — какое-нибудь целое положительное число или нуль. По определению равностепенной непрерывности каждому числу ε_k будет соответствовать $n_k = n(\varepsilon_k)$. Разобьем вертикальную сторону прямоугольника $ABCD$ на отрезки длиной ε_1, а горизонтальную — на отрезки, длина которых не превышает n_1. Через полученные точки проведем прямые, разбив прямоугольник $ABCD$ на множество меньших прямоугольников. Вертикальные полосы, составленные из таких прямоугольников будем обозначать римскими цифрами, начиная с единицы.

Так как $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon_1$ при $|x'' - x'| < n_1$, то такая функция проходит не более чем по двум соседним прямоугольникам каждой полосы, в частности, полосы I. Но таких пар прямоугольников из полосы I кончное число; следовательно, как минимум по одной такой паре проходит бесконечное число графиков функций рассматривемого семейства. Будем теперь рассматривать только эти функции семейства. В полосе II, как понятно из ее построения, их графики проходят лишь по 4 прямоугольникам полосы, график же каждой функции может проходить только по двум соседним из них.

Следовательно, существуют два таких соседних прямоугольника на полосе II, по которым проходит бесконечное количество графиков функций семейства, которые удовлетворяют этому же условию на полосе I. Рассуждая и дальше таким образом, мы найдем целую полосу, расположенную над всем интервалом (a, b), шириной $2\varepsilon_1$, по которой проходит бесконечное множество графиков семейства $\{f(x)\}$. Возьмем один из них, к примеру, $f_1^*(x)$. Семейство $\{f(x)\} \backslash f_1^*(x)$ обозначим как $\{f_1(x)\}$.

Проделаем те же операции с семейством $\{f_1(x)\}$ на множестве прямоугольников, составленных при помощи разбиений на отрезки высотой ε_2 и шириной n_2. Получим полосу шириной $2\varepsilon_2$, в которой лежат графики бесконечного множества функций. Аналогично вычленим $f_2^*(x)$ и вновь проделаем те же операции с семейством $\{f_2(x)\}$. Продолжая до бесконечности, получим последовательность функций $f_1^*(x), f_2^*(x), ...$

Начиная с $f_k^*(x)$ графики этих функций лежат в полоске шириной $\frac{M}{2k+\alpha-1}$, что означает, что данная последовательность равномерно сходится. □

15 Теорема Пеано

Пусть задано уравнение

$$\frac{\partial y}{\partial x} = f(x, y)$$

правая часть которого определена в некоторой области G. Тогда имеет место следующая

Теорема 15.1. *Если функция $f(x, y)$ непрерывна и, следовательно, ограничена в области $G = \{x_0 \leq x \leq x_0 + h\} \times \{|y - y_0| \leq b\}$, то есть для всех точек $(x, y) \in G$ выполнено неравенство $|f(x, y)| \leq M$, где $M > 0$, то заданное уравнение имеет по крайней мере одно решение $y = \varphi(x)$, удовлетворяющее начальному условию $y = y_0$ при $x = x_0$. Это решение определено и непрерывно вместе с первой производной в интервале $|x - x_0| \leq h$, где $h = \min(a, {}^b/_M)$ и не выходит из области R, пока x изменяется в интервале $|x - x_0| \leq h$.*

Доказательство. Ограничимся доказательством для $[x_0, x_0 + h]$, для $[x_0 - h, x_0]$ доказательство аналогично.

Обозначим G_+ — область, ограниченная $x_0 \leq x \leq x_0 + h$, $|y - y_0| \leq b$. Возьмем любое положительное число n и построим ломаную Эйлера $y = \varphi_n(x)$. Для этого разделим интервал $[x_0, x_0 + h]$ на n равных частей, обозначим абсцисся точек деления через $x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = x_0 + h$ и определим $\varphi_n(x)$ следующим образом:

$$\varphi_n(x) = y_i + f(x_i, y_i)(x - x_i), \text{ при } x_i \leq x \leq x_{i+1}\}$$

где $y_i = y_{i-1} + f(x_{i-1}, y_{i-1})(x_i - x_{i-1})$.

Построенная ломаная $M_0, ..., M_n$ целиком лежит в области G_+, так как $|\varphi_n(x) - \varphi_n(x_0)| \leq M(x - x_0) \leq Mh \leq b$, то есть $|\varphi_n(x) - y_0| \leq b$.

Давая n значения $1, 2, ...$ мы можем построить последовательность ломаных Эйлера. Соответствующая ей последовательность функций $\varphi_1(x), ..., \varphi_n(x), ...$ будет удовлетворять обоим условиям леммы Арцеля.

Действительно, при $x_0 \leq x \leq x_0 + h$ мы имеем для любого n оценку $|\varphi_n(x)| = |(\varphi_n(x) - y_0) + y_0| \leq |\varphi_n(x) - y_0| + |y_0| \leq b + |y_0|$, так что функции $\varphi_n(x)$ равномерно ограничены. Далее, эти функции равностепенно непрерывны, так как $|\varphi_n(x'') - \varphi_n(x')| \leq M\,|x'' - x'|\ \forall x'', x' \in [x_0, x_0 + h]$. Следовательно, $\forall \varepsilon > 0$ будем иметь $|\varphi_n(x'') - \varphi_n(x')| < \varepsilon$ если $|x'' - x'| < \gamma_i = \frac{\varepsilon}{M}$.

По лемме Арцеля из последовательности функций $\varphi_1(x), ..., \varphi_n(x), ...$ можно вычленить подпоследовательность $\varphi_{n_1}(x), \varphi_{n_2}(x), ..., \varphi_{n_k}(x), ...$, сходящуюся равномерно в интервале $[x_0, x_0 + h]$.

Обозначим предельную функцию подпоследовательности через $\varphi(x)$. Ясно, что кривая $y = \varphi(x)$ не выходит из области G. Докажем, что эта кривая будет искомым решением уравнения.

(дописать жесть) $\square$

16 Метод последовательных приближений Пикара для уравнений первого порядка

17 Теорема Пикара для нормальной системы ОДУ

18 Голоморфные функции и мажоранты. Теорема Коши

19 О степени гладкости решения ДУ

20 Непрерывная зависимость решений от параметров

21 Дифференцируемость по параметрам

22 Линейные дифференциальные уравнения n-ого порядка. Общие свойства

23 Однородные линейные уравнения. Формула Остроградского-Лиувилля

24 Фундаментальные системы решений

25 Структура общего решения неоднородного линейного уравнения n-ого порядка. Метод Лагранжа

26 Линейные уравнения n-ого порядка с постоянными коэффициентами. Построение фундаментальной системы решений и общего решения

27 Нахождение частного решения неоднородного уравнения методом неопределенных коэффициентов

28 Линейные системы дифференциальных уравнений. Свойства решений однородной системы

29 Формула Остроградского-Лиувилля-Якоби

30 Система линейных неоднородных уравнений. Структура общего решения неоднородной системы. Метод вариации произвольных постоянных

31 Формула Коши для неоднородной линейной системы