Дисклеймер.

Автор не несет ответственности за любой ущерб, причиненный Вам при использовании данного документа. Автор напоминает, что данный документ может содержать ошибки и опечатки, недостоверную и/или непроверенную информацию. Если Вы желаете помочь в развитии проекта или сообщить об ошибке/опечатке/неточности:

GitHub проекта

Автор в ВК

Содержание

1 Системы координат

Система координат — опорная система для определения положения в пространстве относительно выбранных осей.

1) Одномерные.

2) Двумерные:

2.1) Прямоугольные;

2.2) Косоугольные;

2.3) Полярные. Задаются длиной радиус-вектора и угла, образуемого им с осью x.

Перевод в обычные:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

3) Пространственные

3.1) Прямоугольные;

3.2) Косоугольные;

3.3) Цилиндрические. Задаются длиной радиус-вектора проекции точки на xy, углом и высотой от плоскости xy до точки.

Перевод в обычные:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$$

3.4) Сферические. Задаются длиной радиус-вектора к точке, углом Θ между радиус-вектором и плоскостью xy и углом между проекцией радиус-вектора на плоскость xy и осью абсцисс.

Перевод в обычные:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\cos\Theta \\ y = r\sin\varphi\cos\Theta \\ z = r\sin\Theta \end{cases}$$

2 Преобразование декартовых координат

1) Сдвиг:

$M(x, y) = M(\bar{x} + a, \bar{y} + b)$, где (a, b) — координаты начала новой системы координат в старой системе.

2) Отражение:

$\begin{cases} x = ч \\ y = -y \end{cases}$

3) Поворот:

Воспользуемся полярной системой координат:

$x = r\cos(\bar{\varphi} + \alpha) = r\cos\bar{\varphi}\cos\alpha - r\sin\bar{\varphi}\sin\alpha = \bar{x}\cos\alpha - \bar{y}\sin\alpha;$

$y = r\sin(\bar{\varphi} + \alpha) = r\cos\bar{\varphi}\sin\alpha + r\sin\bar{\varphi}\cos\alpha = \bar{x}\sin\alpha + \bar{y}\cos\alpha;$

Отсюда

$\begin{cases} x = \bar{x}\cos\alpha - \bar{y}\sin\alpha \\ y = \bar{x}\sin\alpha + \bar{y}\cos\alpha \end{cases}$

3 Кривые и их уравнения II порядка

Кривая второго порядка:
$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$.
При этом a_{11}, a_{12}, a_{22} не могут одновременно обращаться в ноль.
Если уравнение не имеет линейной части, то кривая называется центрально-симметричной.

Кривая второго порядка инвариантна относительно выбранной системы координат. Доказательство: общая форма изменения координат не повышает и не понижает степень, следовательно, КВП остается КВП.

Инварианты:
$I_1 = a_{11} + a_{22}$;
$I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$
$I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$

4 Избавление от $2a_{12}xy$

Отбрасываем линейную часть, рассматриваем только $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$. «Поворачиваем» КВП при помощи уравнений выше. Множители, которые содержат одновременно x и y выписываем снизу и приравниваем к нулю. Выносим общие множители за скобки, получаем $2xy\cos\alpha\sin\alpha(a_{11} - a_{13}) - 2\cos 2\alpha xya_{12} = 0$. Т.к. $xy \neq 0$, то $\sin 2\alpha(a_{22} - a_{11}) - \cos 2\alpha = 0$, откуда $A\sin 2\alpha - B\cos 2\alpha = 0$, откуда $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{B}{A}$. Подобрать такое α возможно, следовательно, можно избавиться от $2a_{12}xy$.

5 Приведение КВП к каноническому виду

Представляем уравнение КВП в виде $a_{11}(x+\frac{a_{13}}{a_{11}})^2+a_{22}(y+\frac{a_{23}}{a_{22}})^2+a_{33}-(\frac{a_{13}}{a_{11}})^2-(\frac{a_{23}}{a_{22}})^2=0$.

Затем замена: $x=(x+\frac{a_{13}}{a_{11}})^2$, $y=(y+\frac{a_{23}}{a_{22}})^2$, $a_{33}=a_{33}-(\frac{a_{13}}{a_{11}})^2-(\frac{a_{23}}{a_{22}})^2$.

Рассматриваем:

$a_{11}x^2+a_{22}y^2=-a_{33}$

1 случай: $a_{11}a_{22}>0$:

1) $a_{11}>0$ и $a_{22}>0$ и $a_{33}\neq 0$:

$$\frac{x^2}{\frac{a_{33}}{a_{11}}}+\frac{y^2}{\frac{a_{33}}{a_{22}}}=1\text{— эллипс} \tag{1}$$

2) $a_{11}<0$ и $a_{22}<0$ и $a_{33}\neq 0$:

$$\frac{x^2}{\frac{a_{33}}{a_{11}}}+\frac{y^2}{\frac{a_{33}}{a_{22}}}=-1\text{— мнимый эллипс} \tag{2}$$

3) $a_{33}=0$:

$$\frac{x^2}{\frac{a_{33}}{a_{11}}}+\frac{y^2}{\frac{a_{33}}{a_{22}}}=0\text{— точка} \tag{3}$$

2 случай: $a_{11}a_{22}<0$:

1) $a_{11}>0$ и $a_{22}<0$ и $a_{33}\neq 0$:

$$\frac{x^2}{\frac{a_{33}}{a_{11}}}-\frac{y^2}{\frac{a_{33}}{a_{22}}}=1\text{— гипербола} \tag{4}$$

2) $a_{11}<0$ и $a_{22}>0$ и $a_{33}\neq 0$:

$$\frac{x^2}{\frac{a_{33}}{a_{11}}}-\frac{y^2}{\frac{a_{33}}{a_{22}}}=-1\text{— мнимая гипербола} \tag{5}$$

3) $a_{33}=0$:

$$\frac{x^2}{\frac{a_{33}}{a_{11}}}-\frac{y^2}{\frac{a_{33}}{a_{22}}}=0\text{— точка} \tag{6}$$

Рассматриваем:

$a_{11}=0, a_{13}\neq 0$

$a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0;$

$2a_{13}x + a_{22}(y + \frac{a_{23}}{a_{22}})^2 + a_{33} - (\frac{a_{23}}{a_{22}})^2 = 0$
После замены:
$2a_{13}x + a_{22}y^2 + a_{33} = 0$
Откуда

$$y^2 = 2px \text{ — парабола} \tag{7}$$

Рассматриваем:
$a_{11} = 0$ и $a_{13} = 0$. Тогда $y^2 = -\frac{a_{33}}{a_{22}}$.
Если это:
больше нуля: $y^2 = a^2$ — пара параллельных прямых
меньше нуля: $y^2 = -a^2$ — пара мнимых параллельных прямых
равно нулю: $y^2 = 0$ — пара совпадающих прямых

Таким образом, поменяв систему координат, можно привести уравнение к каноническому виду.

6 Эллипс

Эллипс — геометрическое место точек, удовлетворяющее уравнению $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Теорема (фокальное свойство): $|F_1M| + |F_2M| = 2a$.

Положим, $c^2 = a^2 - b^2$, где $c = |OF|$. Тогда $r_1^2 = (x+c)^2 + y^2$, $r_2^2 = (x-c)^2 + y^2$. Выводим y^2 из уравнения эллипса, подставляем в эти уравнения, получаем $r_1 = \frac{c}{a}x + a$ и $r_2 = a - \frac{c}{a}x$. Потом их складываем и получаем $2a$.

Доказываем в обратную сторону: говорим, что верно $r_1 + r_2 = 2a$, то есть $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a \Leftrightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$, дважды возводим в квадрат, выносим a^2, сокращаем. Получается $x^2 + c^2 + y^2 = a^2 + \frac{x^2c^2}{a^2} \Leftrightarrow x^2 - \frac{x^2c^2}{a^2} + y^2 = a^2 - c^2 \Leftrightarrow x^2(1 - \frac{c^2}{a^2}) + y^2 = a^2 - c^2$, раскрываем $c^2 = a^2 - b^2$, получаем $x^2(\frac{b^2}{a^2}) + y^2 = b^2$, делим все на b^2.

Эксцентриситет — отношение $\frac{c}{a}$, которое отвечает за кривизну эллипса. У окружности эксцентриситет равен нулю, у эллипса - меньше нуля.

Директриса — прямые $x = \pm\frac{a}{e}$.

Теорема: Эллипс — ГМТ, отношение расстояний которых до фокуса и директрисы есть величина постоянная, равная эксцентриситету.

$\frac{r_1}{d} = e \Rightarrow r_1 = ed = e(\frac{a}{e} - x) = a - ex$. Аналогично для $\frac{r_2}{d}$.

7 Гипербола

Гипербола — геометрическое место точек, удовлетворяющее уравнению $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Теорема (фокальное свойство): $|F_1M| - |F_2M| = 2a$.

Положим, $c^2 = a^2 + b^2$, где $c = |OF|$. Тогда $r_1 = (x+c)^2 + y^2$, $r_2 = (x-c)^2 + y^2$. Выводим y^2 из уравнения эллипса, подставляем в эти уравнения, получаем $r_1 = \frac{c}{a}x + a$ и $r_2 = \frac{c}{a}x - a$. Потом их вычитаем и получаем $2a$.

Доказываем в обратную сторону: говорим, что верно $r_1 - r_2 = 2a$, то есть $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a \Leftrightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$, дважды возводим в квадрат, выносим a^2, сокращаем. Получается $x^2 + c^2 + y^2 = a^2 + \frac{x^2c^2}{a^2} \Leftrightarrow x^2 - \frac{x^2c^2}{a^2} + y^2 = a^2 - c^2 \Leftrightarrow x^2(1 - \frac{c^2}{a^2}) + y^2 = a^2 - c^2$, раскрываем $c^2 = a^2 + b^2$, получаем $x^2(-\frac{b^2}{a^2}) + y^2 = -b^2$, делим все на b^2.

Эксцентриситет — отношение $\frac{c}{a}$, которое отвечает за кривизну гиперболы. У гиперболы эксцентриситет больше нуля.

Директриса — прямые $x = \pm\frac{a}{e}$.

Теорема: Эллипс — ГМТ, отношение расстояний которых до фокуса и директрисы есть величина постоянная, равная эксцентриситету.

$\frac{r_1}{d} = e \Rightarrow r_1 = ed = e(x - \frac{a}{e}) = ex - a$. Аналогично для $\frac{r_2}{d}$.

8 Асимптоты гиперболы

Асимптотами гиперболы называются прямые $y = \pm\frac{b}{a}x$

Теорема: Ветви гиперболы неограниченно приближаются к асимптоте.

Доказательство: $y = b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}$

Посчитаем предел: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{b}{a}x_0 - b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} =$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{b^2}{a^2} - b^2(\frac{x^2}{a^2} - 1)}{\frac{b}{a}x + b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{b^2}{a^2}x^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2 + b^2}{\frac{b}{a}x + b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{b^2}{\frac{b^2}{a^2}x + b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}} = 0 \tag{8}$$

9 Парабола

Парабола — ГМТ, определяющееся уравнением $y^2 = 2px$.

Директриса параболы: $x = -\frac{p}{2}$

Теорема: Парабола — ГМТ, равноудаленных от фокуса и директрисы.

Рассмотрим точку $(x, \sqrt{2px})$, которая лежит на параболе. Расстояние от точки до директрисы равно $c = x + \frac{p}{2}$, расстояние от точки до фокуса — $x - \frac{p}{2}$. Длина r определяется как $r = \sqrt{(x - \frac{p}{2})^2 + y^2}$, где $y^2 = 2px$, отсюда $r = \sqrt{(x + \frac{p}{2})^2 + 2px}$. Сравниваем это с $x + \frac{p}{2}$, получаем равенство, бинго!

10 Уравнения КВП в полярных координатах

Возьмем полярные координаты с началом в фокусе кривой, а начальный луч направим перпендикулярно ближайшей директрисе. По свойству директрисы и фокуса $r = ed$, где d — расстояние от точки до директрисы.

q — расстояние от фокуса до директрисы, x — координата точки. $x = r\cos\varphi$, откуда $r = ed = e(q - x) = eq - er\cos\varphi$. Преобразовав выражение, получим $r = \frac{eq}{e\cos\varphi+1}$, что и является уравнением кривой в полярных координатах.

eq — расстояние от фокуса до кривой по перпендикуляру, фокальный параметр, обозначается p.

Уравнение кривой примет вид: $r = \frac{p}{e\cos\varphi+1}$.

Для другой ветви гиперболы $r = \frac{p}{e\cos\varphi-1}$.

Однако чаще всего начальный луч направляют в противоположную сторону, отчего уравнение приобретает вид $r = \frac{p}{1-e\cos\varphi}$ и $r = \frac{p}{1+e\cos\varphi}$.

11 Оптические свойства КВП

Оптическое свойство эллипса:

Фокальные радиусы произвольной точки M образуют с касательной в точке M равные углы.

Переформулировка: луч, выпущенный из одного фокуса, отразившись от стенки эллипса, пройдет через другой фокус.

Доказательство: от противного. Пусть это не так. Тогда точка F^* — зеркальное отражение фокуса F_1 относительно касательной. Соединим F_2 и F^*. Так как углы не равны, то точка пересечения касательной и прямой, соединяющей F_2 и F^* будет M^*, не совпадающая с M. Откуда $|F_1M^*| + |F_2M^*| = |F_2F^*| < |F_1M| + |F_2M| = 2a$ (меньше по предположению). Теперь будем перемещать M^* по касательной от M. Сумма $|F_1M^*|+|F_2M^*|$ будет расти и в какой-то момент превысит константу $2a$.

Оптическое свойство гиперболы:

Фокальные радиусы гиперболы составляют равные углы с касательной в точке M.

Переформулировка: луч, выпущенный из одного фокуса гиперболы, отражается от неё так, что его продолжение пройдет через другой фокус.

Оптическое свойство параболы:

Фокальные радиусы параболы образуют с касательной такой же угол, какой она образует с осью параболы.

Переформулировка: луч, выпущенный из фокуса параболы, отразившись от неё, будет параллелен оси параболы.

12 КВП как конические сечения конуса

Конус — фигура, образуемая прямыми, проходящими через одну точку — вершину конуса.

Теорема: невырожденные КВП можно получить сечениями этого конуса.

Получим эллипс:

Имеем конус и секущую его плоскость. Плоскость не проходит через вершину и пересекает только одну плоскость конуса. Впишем в конус по разные стороны этой плоскости яйца Дандалена. Точки касания есть фокусы. Проводим прямую OM, которая соединяет произвольную точку на эллипсе и вершину конуса. Тогда она будет касаться шаров в точках M_1 и M_2. Тогда $|MF_1| = |MM_1|$, $|MF_2| = |MM_2|$, отсюда $|MF_1|+|MF_2| = |MM_1| + |MM_2| = |M_1M_2| = const$.

Для гиперболы то же самое, только шары в разных полостях конуса и разность вместо суммы.

13 Векторное пространство. Примеры

Вектора — класс направленных отрезков.

Определим сложение векторов $V \times V \to V$ со свойствами:

Свойства абелевой группы в векторах.

Определим операцию умножения на скаляр со свойствами:

Свойства умножения на скаляр $\mathbb{R} \times V \to V$ для векторных пространств.

Определение: множество векторов с определенными на нем операциями сложения и умножения на скаляр называется векторным пространством.

Примеры:

1) Классы направленных отрезков;

2) R^n — n-мерное арифметическое пространство, где векторы — упорядоченные наборы из n вещественных чисел.

3) $M[a, b]$ — множество функций, заданных на отрезке $[a, b]$;

4) $C(a, b)$ — непрерывные функции;

5) Пространство многочленов.

14 Базисы на плоскости и в пространстве

Базис — минимальный набор векторов, такой, что любой вектор из векторного пространства может быть представлен в виде линейной комбинации данных векторов.

Размерность пространства — число векторов, составляющих базис. Обозначение: $\dim(V)$. Если есть базис, то пространство конечномерно.

Два вектора коллинеарны, если отличаются на конечный множитель.

Три вектора компланарны, если, будучи отложенными от одной точки, лежат в одной плоскости.

Теорема: Два неколлинеарных вектора на плоскости представляют собой базис.

Доказательство: Раскладываем любой вектор в линейную комбинацию этих векторов, затем предполагаем, что такое представление не единственное, получаем $OA = \frac{\lambda_2' - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_1'} OB$, противоречие.

Теорема: Три некомпланарных вектора в пространстве образуют базис.

Доказательство: аналогично предыдущему, только после разложения в линейную комбинацию мы предполагаем, что существует другая линейная комбинация и выражаем один вектор через остальные, получаем противоречие.

15 Скалярное произведение

Скалярное произведение — бинарная операция $V \times V \to \mathbb{R}$, заданная на векторном пространстве.

Свойства:
1) $a \cdot b = b \cdot a$;
2) $(\lambda a)b = \lambda(ab)$;
3) $a(b + c) = ab + ac$;
4) $a \cdot a > 0$ — положительная определенность. $a \cdot a = 0 \Leftrightarrow a = 0$.

Алгебраический смысл:
1) $a \cdot b = |a| \cdot |b| \cdot \cos\alpha$, где α — угол между векторами.
2) В $R^n: \ (x_1, ..., x_n) \cdot (y_1, ..., y_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$.

Векторы называются ортогональными (перпендикулярными), если $a \cdot b = 0$.

Теорема:

Если V — конечномерное пространство с определенным на нем скалярным произведением, то существует базис из единичных взаимно перпендикулярных векторов: $\exists a_1, ..., a_n \in V$, такие, что:
1) $a_i^2 = 1$;
2) $i \neq j \Rightarrow a_i \cdot a_j = 0$.

Доказательство: Берем два вектора, скалярно перемножаем. В результате линейная комбинация векторов базиса.

Неравенство Коши-Буняковского-Шварца:
$(a \cdot b)^2 \leq a^2 \cdot b^2$.
Доказательство: Считаем, что оба вектора не равны нулю:
$x \in \mathbb{R}$:
$(a + xb)^2 = a^2 + 2(ab)x + b^2x^2 > 0$.
$D = 4(ab)^2 - 4a^2b^2 \leq 0 \Rightarrow (ab)^2 \leq a^2b^2$

16 Векторное произведение

Под ориентацией векторного пространства понимается разбиение всех его базисов на 2 класса (правые и левые).

Считаем пространство ориентированным.

Векторным произведением называется вектор $\bar{a} \times \bar{b}$, который удовлетворяет требованиям:

1) $|a \times b| = |a| \cdot |b| \cdot \sin\varphi$.

2) Векторное произведение всегда перпендикулярно плоскости, в которой лежат перемножаемые вектора.

3) a, b не коллинеарны $\Rightarrow (a, b, a \times b)$ — правая тройка.

Свойства векторного произведения:

1) $(\alpha a) \times b = \alpha(a \times b)$;

2) $(a + b) \times c = a \times c + b \times c$.

Формула для вычисления векторного произведения в декартовых координатах:

$|i| = |j| = |k| = 1$ — базис, (i, j, k) — правая тройка (вспоминаем руль мерседеса).

Пусть есть 2 вектора, раскладываем их в линейную комбинацию, векторно умножаем, пользуясь свойствами того, что $i \times i = 0$, получаем $(a_2b_3 - a_3b_2)i + (a_3b_1 - a_1b_3)j + (a_1b_2 - a_2b_1)k = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ i & j & k \end{vmatrix}$

17 Дистрибутивность векторного произведения

Лемма: $a \times b = a \times pr\ b$ ($pr\ b$ — проекция b на плоскость, перпендикулярную a).

Доказательство: показываем на пальцах, ёпта! a и b лежат в одной плоскости, поэтому вектор их векторного произведения совпадает с вектором векторного произведения проекции и a. А равны они потому что равны площади параллелограммов, построенных на них, равны.

Лемма: $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$.

Доказательство: пусть $|a| = 1$. По предыдущей теореме проекция суммы равна сумме проекций: $(b + c)_{pr} = b_{pr} + c_{pr}$. Умножим всё на $|a|$: $|a| \times (b+c)_{pr} = |a|b_{pr} + |a|c_{pr}$. Так как при повороте взаимное расположение векторов не меняется, то сумма переходит в сумму, следовательно, получаем, что лемма верна.

18 Смешанное произведение

Зададим бинарную операцию: $V \times V \times V \to \mathbb{R}$.

Смешанным произведением векторов a, b, c называется число (a, b, c), которое равно $(a \times b) \cdot c$.

Свойства:

1) $(\alpha a, b, c) = (a, \alpha b, c) = (a, b, \alpha c) = \alpha(a, b, c)$.

2) $(a_1 + a_2, b, c) = (a_1, b, c) + (a_2, b, c)$

Доказательство: воспользовавшись дистрибутивностью векторного произведения: $(a_1 + a_2, b, c) = (a_1 + a_2) \times b \cdot c = (a_1 \times b + a_2 \times b) \cdot c = (a_1 \times b) \cdot c + a_2 \times b \cdot c = (a_1, b, c) + (a_2, b, c)$.

3) Кососимметричность:

Если поменять местами все три вектора, то знак сохранится, если поменять только два из трёх, то изменится.

Доказательство: Андрюха, ты умный, придумай что-нибудь :)

Модуль смешанного произведения:

$(a, b, c) = (a \times b) \cdot c = |a \times b| \cdot |c| \cdot \cos\varphi$.

Модуль смешанного произведения правой тройки (a, b, c) равен объему параллелепипеда, построенного на векторах a, b, c, а модуль смешанного произведения левой тройки — минус объему.

Смешанное произведение можно получить, вычислив определитель матрицы $|(a, b, c)| = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

19 Прямая на плоскости

Прямая на плоскости может быть очевидным образом задана какой-либо точкой A, лежащей на прямой и вектором нормали к прямой.

Теорема: Прямая на плоскости представляется линейным уравнением $ax + by + c = 0$, где a, b — координаты вектора нормали, а $c = OA \cdot N$.

Доказательство: вводим точку $M(x, y)$ на прямой, отличную от A. Тогда вектор $AM \cdot N = 0$. Так как любая другая точка, не лежащая на прямой, не образует с A прямую, ортогональную N, то формула выше является уравнением прямой. Записываем координаты точки M и вектора N, записываем их радиус-вектора как линейные комбинации элементов базиса. Вычисляем $AM = OM - OA = (xi - yj) - OA$, откуда $AM \cdot N = (xi_y j)(ai + bj) - OA \cdot N$. Получаем $ax + by + OA \cdot N = 0$.

Параметрический вид: Имеем две точки на прямой, одну фиксированную $M_0(x_0, y_0)$, другую бегающую $M(x, y)$. Имеем направляющий вектор прямой $a(r, s)$. a является направляющим вектором тогда и только тогда, когда он коллинеарен с вектором MM_0. Отсюда $\begin{cases} x - x_0 = \lambda r \\ y - y_0 = \lambda s \end{cases} \Leftrightarrow$ $\begin{cases} x = \lambda r + x_0 \\ y = \lambda s + y_0 \end{cases}$, что является параметрическим видом уравнения прямой.

20 Плоскость в пространстве

Теорема: Плоскость в пространстве задаётся уравнением $ax + by + cz + d = 0$.

Доказательство: произвольная точка $M(x, y, z)$ лежит в плоскости α тогда и только тогда, когда $MM_0 \cdot N = 0$, где $M_0(x_0, y_0, z_0)$ — точка на плоскости, и $N = (a, b, c)$ — вектор нормали. Если r, r_0 — радиус-векторы точек M, M_0, то $M_0M = r - r_0$. Отсюда записанное уравнение принимает вид $(r - r_0) \cdot N = 0 \Leftrightarrow rN - r_0N = 0$, что можно переписать как $(xi + yj + zk)(ai + bj + ck) - r_0N = ax + by + cz - r_0N = 0$, чтд.

21 Прямая в пространстве

Прямая в пространстве очевидно задается любой лежащей на ней точкой $M(x, y, z)$ и направляющим вектором $v(a, b, c)$. Отложим от точки M_0 на прямой вектор $M_0M = \alpha v$ и проведем прямую M_0M. Если $r = OM, r_0 = OM_0$, то $r - r_0 = M_0M$, откуда $r = vt + r_0$.

Если $v = (a, b, c)$, то мы можем разложить данное уравнение как $x = at + x_0,\ y = bt + y_0,\ z = ct + z_0$. Так как t во всех трех уравнениях одно и то же, то данные уравнения равносильны $\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$.

Прямая как пересечение двух плоскостей в пространстве задается системой уравнений $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$.

22 Расстояние от точки до прямой в пространстве

Воспользуемся знанием того, что прямая в пространстве задается точкой и направляющим вектором. Тогда проведем радиус-вектора (r) к данной точке M и r к любой точке на прямой M_0. Отсюда $M_0M = r - r_0$. Зная координаты и длину (можем найти по координатам) направляющего вектора мы можем вывести формулу $\rho = \frac{(r-r_0)\times a}{|a|}$.

23 Расстояние между прямыми в пространстве

Искомая прямая — длина общего перпендикуляра к этим прямым. Пусть a_1, a_2 — направляющие вектора данных прямых (очевидно, что они неколлинеарны). v_1, v_2 — радиус-вектора точек на прямых, в которых данные прямые пересекает общий перпендикуляр. $(v_1 - v_2, a_1, a_2)$ — объем параллелепипеда, построенного на данных векторах. $a_1 \times a_2$ — площадь основания данного параллелепипеда. Таким образом, формула примет вид

$\rho = \frac{((v_1-v_2),a_1,a_2)}{a_1\times a_2}$.

24 Классификация ПВП

Поверхности второго порядка — множество точек, удовлетворяющих уравнению $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{13}xz + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a_0 = 0$

1) Эллипсоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{9}$$

2) Мнимый эллипсоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1 \tag{10}$$

3) Точка

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0 \tag{11}$$

4) Однополостный гиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{12}$$

5) Двуполостный гиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \tag{13}$$

6) Конус

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \tag{14}$$

7) Эллиптический параболоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z = 0 \tag{15}$$

8) Гиперболический параболоид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - z = 0 \tag{16}$$

9) Эллиптический цилиндр

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{17}$$

10) Мнимый эллиптический цилиндр

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1 \tag{18}$$

11) Прямая

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0 \tag{19}$$

12) Гиперболический цилиндр

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{20}$$

13) Пара пересекающихся плоскостей

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \tag{21}$$

14) Пара параллельных плоскостей

$$x^2 = a^2 \tag{22}$$

15) Пара мнимых параллельных плоскостей

$$x^2 = -a^2 \tag{23}$$

16) Пара совпадающих плоскостей:

$$x^2 = 0 \tag{24}$$

17) Параболический цилиндр:

$$y^2 = 2px \tag{25}$$

25 Эллипсоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{26}$$

Эллипсоид вписан в параллелепипед, задаваемый неравенством $|x| < a$, $|y| < b$, $|z| < c$.

Сечение эллипсоида любой плоскостью представляет собой либо пустое множество, либо точку, либо эллипс. Например, для сечения плоскостью $x = x_0$

$$\frac{y^2}{b^2(1 - \frac{x_0^2}{a^2})} + \frac{z^2}{c^2(1 - \frac{x_0^2}{a^2})} = 1 \tag{27}$$

Если $a = b$ или $a = c$ или $b = c$, то такая фигура называется эллипсоидом вращения, имеет фокусы и директрисы-плоскости

26 Однополостный гиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{28}$$

Сечение плоскостью $z = z_0$ образуют эллипсы:

$$\frac{x^2}{a^2(1 + \frac{z_0^2}{c^2})} + \frac{y^2}{b^2(1 + \frac{z_0^2}{c^2})} = 1 \tag{29}$$

Сечения плоскостью, содержащей в себе ось z, образуют гиперболы. Если $a = b$, то гиперболоид вращения.

27 Двуполостный гиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \tag{30}$$

Сечение плоскостью $z = z_0$ образуют пустое множество ($|z_0| < c$), точку ($|z_0| = c$) либо эллипс ($|z_0| > c$)

$$\frac{x^2}{a^2(\frac{z_0^2}{c^2} - 1)} + \frac{y^2}{b^2(\frac{z_0^2}{c^2} - 1)} = 1 \tag{31}$$

Если $a = b$, то гиперболоид вращения.

28 Эллиптический параболоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z \tag{32}$$

Эллиптический параболоид — поверхность, которую заметает парабола, движущаяся по другой параболе, при этом оси парабол сонаправлены, а плоскости перпендикулярны.

Сечение плоскостью $z = z_0$ образует либо пустое множество ($z_0 < 0$), либо точку $z_0 = 0$, либо эллипс ($z_0 > 0$) :

$$\frac{x^2}{a^2 z_0} + \frac{y^2}{b^2 z_0} = 1 \tag{33}$$

Сечение по оси z представляет собой параболу.

Если $a = b$, то параболоид вращения.

29 Гиперболический параболоид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - z = 0 \tag{34}$$

Гиперболический параболоид — поверхность, которую заметает парабола, которая движется по другой параболе, причем их оси направлены противоположно, а плоскости перпендикулярны.

Сечения плоскостями yx — парабола, xz — парабола, xy — гипербола.

30 Цилиндры

Цилиндр — некоторое множество параллельных прямых. Они называются образующими. Множество точек, каждая из которых взята на образующей и лежащих в плоскости, называется направляющей.

Эллиптический цилиндр:
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.
Сечения по оси z — параллельные прямые, сечение плоскостью xy — эллипс.

Гиперболический цилиндр:
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.
Сечение по yz — $\varnothing$, по xz — две параллельные прямые, по плоскости, параллельной xy — гипербола.

Параболический цилиндр:
$y^2 = 2px$
Сечение по xy — парабола, по xz — одна прямая, по yz — одна, две прямые или пустое множество.

31 Конус

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \tag{35}$$

Конус — объединение семейства прямых, проходящих через одну точку и точку на образующей, являющейся эллипсом.

Сечения по xy — точка, по параллельной xy — эллипс. По z — пара пересекающихся прямых.