Дисклеймер.

Автор не несет ответственности за любой ущерб, причиненный Вам при использовании данного документа. Автор напоминает, что данный документ может содержать ошибки и опечатки, недостоверную и/или непроверенную информацию. Если Вы желаете помочь в развитии проекта или сообщить об ошибке/опечатке/неточности:

GitHub проекта

Автор в ВК

Содержание

1 Матрицы и все дела

$(v_1, ..., v_n)\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ ... \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} v_i\alpha_i$. Если $A \in M_{n,m}(F)$, то определим $(v_1, ..., v_n)A = (va_{*1}, ...va_{*m})$, где a_{*i} — i-ый столбец, соответственно a_{i*} — i-ая строка.

Набор $v = (v_1, ..., v_n)$ линейно независим $\Leftrightarrow$ $(va = vb \Leftrightarrow a = b)$, так как $v(a - b) = 0 \Leftrightarrow a - b = 0 \Leftrightarrow a = b$.

Произведение матриц ассоциативно (конкретная): $(v{\cdot}A){\cdot}b = v(Ab)$, где $v = (v_1, ..., v_n) \in V \times ... \times V$ (n раз).

Проверка этого факта очевидна, учитывая, что $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}$.

Теорема. *Возьмем множество квадратных матриц $M_n(F)$. $M_n(F)$ — кольцо с единицей.*

Доказательство. Все аксиомы кольца проверяются непосредственно. Единственное, что нужно проверить — наличие нейтрального по умножению. Им, т.е. единицей кольца является единичная матрица $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. □

$M_n(F)^* = GL_n(F)$ — полная линейная группа степени n над F.

Всё это было предисловием к следующему наблюдению: если мы умножим кортеж векторов на обратимую матрицу то снова получим базис.

Лемма. *(1) $v = (v_1, ..., v_n) \in \underbrace{V \times ... \times V}_{n}$, $A \in GL_n(F)$.*

1. Линейно независимые v и vA эквивалентны.
2. v — система образующих $\Leftrightarrow$ vA — система образующих.
3. v — базис $\Leftrightarrow$ vA — базис.

Доказательство.

1) Пусть v — линейно независим, тогда пусть $(vA)b = 0 \Leftrightarrow v(Ab) = 0 \Leftrightarrow Ab = 0 \Leftrightarrow A^{-1}Ab = 0 \Leftrightarrow b = 0$, то есть vA линейно независимо.

2) Пусть v — система образующих, тогда $\forall x \in V$ $\exists b \in F^n$, такое, что $x = vb = (vA)(A^{-1}b) \in < vA >$, то есть vA — система образующих.

3) Очевидно следует из первых двух.

Для доказательства обратных импликаций заметим, что $v = (vA)A^{-1}$ и сведем задачу к предыдущей.

□

Мы доказали этим, что наше отображение инъективно. Теперь нужно доказать сюръекцию, то есть то, что любой базис можно представить в виде базиса, умноженного на обратимую матрицу.

Лемма. *(2) Если v и w — базисы конечномерного пространства V, то существует обратимая матрица $C \in GL_n(F)$, такая, что $w = vC$.*

Доказательство. $w_1 = v \cdot (w_1)_v$, где $(w_1)_v$ — столбец координат w в базисе v. Точно так же можно представить $w_2, ..., w_n$, после чего сложить:

$(w_1, ..., w_n) = v((w_1)_v, ..., (w_n)_v) = vC$, где $C \in M_n(F)$. Теперь докажем, что она обратимая. Аналогично, $\exists C' \in M_n(F):\ v = wC'$. Теперь сделаем так ($E$ — единичная матрица): $wE = w = vC = wC'C \Rightarrow E = C'C$. Аналогично $vE = v = wC' = vC'C \Rightarrow E = C'C$, то есть $C' = C^{-1}$ и $C \in GL_n(F)$.

□

Определение. Матрица $C \in GL_n(F)$, такая что $w = vC$ называется матрицей перехода от v к w и обозначается $C_{v\to w}$.

Следствие из доказательства леммы 2: $C_{v\to w} = ((w_1)_v, ..., (w_n)_v)$. Необходимо помнить, что умножение матриц некоммутативно, и записывать нужно именно так:

$$w = vC_{v\to w}$$

Кроме того, в алгебре есть строчки векторов и столбцы координат и только так.

Теорема. *(следствие лемм 1 и 2).*

Пусть $v = (v_1, ..., v_n)$ — базис пространства V. Набор $w = (w_1, ..., w_n)$ является базисом тогда и только тогда когда $\exists C \in GL_n(F)$, такое, что $w = vC$.

Предложение. $L : V \to V$, $L(x) = w \cdot x_v$. *Тогда* $L_v = C_{v\to w}$.

Доказательство. $L : V \to V$, и $v = (v_1, ..., v_n)$ — базис V. Тогда $L_v = (L(v_1)_v, ..., L(v_n)_v) = ? = C_{v\to w} = ((w_1)_v, ..., (w_n)_v)$.

Положим $L(v_i) = w_i\ \forall i = 1, ..., n$, тогда $L(\sum_{i=1}^n v_i\alpha_i) = \sum_{i=1}^n L(v_i)\alpha_i = \sum_{i=1}^n w_i\alpha_i$, то есть $L(x) = w \cdot x_v$. □

Теорема. *(замена базиса).*

$v = (v_1, ..., v_n)$ и $w = (w_1, ..., w_n)$ — базисы пространства V, $x \in V$, $L : V \to V$ — линейный оператор. Тогда $C_{v\to w}x_w = x_v$ и $L_v = C_{v\to w}L_wC_{w\to v}$.

Доказательство. $x = wx_w = vx_v$. Также $w = vC_{v\to w}$, откуда $x = wx_w = vx_v = vC_{v\to w} \cdot x_w$. Так как v — линейно независимый набор, то $x_v = C_{v\to w}x_w$.

$L(x)_v = L_vx_v = L_vC_{v\to w}x_w$, а также $L(x)_v = C_{v\to w}L(x)_w = C_{v\to w} = C_{v\to w}L_wx_w$, зная, что $L(x)_w = L_wx_w$.

Отсюда $(L_vC_{v\to w} - C_{v\to w}L_w)x_w = 0\ \forall x_w \in F^n \Rightarrow L_vC_{v\to w} = C_{w\to v}L_w \Rightarrow L_v = C_{v\to w}L_wC_{v\to w}^{-1} = C_{v\to w}L_wC_{w\to v}$.

□

В доказательстве использовалась

Лемма. $A, B \in M_{m,n}(F)$. *Если* $\forall x \in F^n\ Ax = Bx$, *то* $A = B$.

Доказательство. Пусть $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (Единица на i-том месте). Тогда $A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = a_{*i} = B \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = b_{*i}$ $\forall i$. Следовательно, $A = B$. □

Сегодня мы хотим доказать 2 утверждения про размерности. Одно называется «формула Грассмана»

Теорема. *(формула Грассмана): $U, V \leq W$, то тогда*
$\dim(U + V) + \dim(U \cap V) = \dim U + \dim V$

Доказательство. Напомним, что $U + V =< U \cup V >= \{u + v|\ u \in U,\ v \in V\}$

Пусть $w_1, ..., w_k$ — базис $U \cap V$. Так как это линейно независимая система, то его можно дополнить до базиса U и до базиса V:

$(w_1, ..., w_k, u_1, ..., u_m)$ — базис U.

$(w_1, ..., w_k, v_1, ..., v_m)$ — базис V.

$\dim U \cap V = k$, $\dim U = k + m$, $\dim V = k + n$.

Следовательно, требуется доказать, что $\dim(U + V) = k + m + n$.

Для этого докажем, что $w \cup u \cup v$ — базис $U + V$, где $u = (u_1, ..., u_m)$, $v = (v_1, ..., v_m)$, где объединение базисов — на самом деле их конкатенация. Так как $x \in U,\ y \in V$, то $x + y$ — любой элемент $U + V$. Теперь $x + y = (wa + ub) + (wc + vd) = w(a + b) + ub + vd \in < w, u, v >$, (где $a, c \in F^k,\ b \in F^m,\ d \in F^n$. То есть это система образующих.

Докажем линейную независимость. Пусть для некоторых $f \in F^k,\ g \in F^m,\ h \in F^n$ $wf + ug + vh = 0 \Leftrightarrow \underbrace{vh}_{\in V} = \underbrace{-wf - ug}_{\in U} \Rightarrow vh \in U \cap V \Rightarrow \exists l \in F^k$, такой, что $vh = wl \Leftrightarrow wl - vh = 0$, где $w \cup v$ — базис пространства V. То есть $h = 0,\ l = 0$. следовательно, $wf + ug = 0 \Rightarrow$, так как $w \cup u$ — базис, $\Rightarrow f = 0,\ g = 0$. □

Упражнение. бонус.

1) $U, V \subseteq W$. Если $U \cup V$ подпространство, то либо $U \subseteq V$, либо наоборот.

2) Усложнение: $|F| > 2$, $U_1, U_2, U_3 \leq W$. Доказать, что если $U_1 \cup U_2 \cup U_3$ — подпространство, то $U_1 \cup U_2 \cup U_3 = U_i$ (для некоторого i).

3) Над F_2 привести пример $U_1 \cup U_2 \cup U_3 = W$, где $U \subsetneqq W$.

Поговорим про ядро и образ.

Пусть $L : U \to V$ — линейное отображение. $\ker L = \{x \in U|\ L(x) = 0\} = L^{-1}(0)$ — подпространство.

Если $L(z) = v \in V$, то $L^{-1}(v) = z + \ker L$ — смежный класс по ядру, прям как во втором билете.

Теорема. *о гомоморфизме.*
$U/\ker L \cong ImL$

Теорема. *(размерность ядра и образа):* $L : U \to V$.
$\dim\ker L + \dim ImL = \dim U$

$Ax = 0$, тогда $x = \alpha_1 \begin{pmatrix} . \\ . \\ . \\ . \\ . \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} . \\ . \\ . \\ . \\ . \end{pmatrix} + ...$, число параметров — размерность ядра. Приведя матрицу к единично-диагональному виду, получим, что квадратный кусок матрицы с единицами равен размерности образа, а ширина всей матрицы — размерности самого U.

Доказательство. $w = (u_1, ..., u_k)$ — базис ядра, а $u = (u_1, ..., u_k, u_{k+1}, ..., u_n)$ — базис U. Нужно доказать, что $\dim ImL = n - k$. Докажем, что $L(u_{k+1}), ..., L(u_n)$ — базис образа.
$x \in ImL \Rightarrow \exists y \in U$. Тогда

$$x = L(y) = L(\sum_{i=1}^{n} u_i\alpha_i) = \sum_{i=1}^{n} L(u_i)\alpha_i = \sum_{i=1}^{n} L(u_i)\alpha_i \Rightarrow$$

$L(u_{k+1}), ..., L(u_n)$ — система образующих.
Докажем линейную независимость:

$$\sum_{i=k+1}^{n} L(u_i)\beta_i = 0 \Leftrightarrow L(\sum_{i=k+1}^{n} u_i\beta_i) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=k+1}^{n} u_i\beta \in \ker L \Leftrightarrow \exists\gamma_i \in F : \sum_{i=k+1}^{n} u_i\beta_i - \sum_{j=1}^{k} u_j\gamma_j = 0 \Rightarrow \beta_i = \gamma_j =$$

$\square$

Посмотрим на $U \bigoplus V = \{(u, v) | u \in U,\ v \in V\}$. $(u_1, v_1) + (u_2, v_2) = (u_1 + u_2, v_1 + v_2)$, $\alpha(u, v) = (\alpha u, \alpha v)$.
Если $(u_1, ..., u_k)$ — базис U, $(v_1, ..., v_m)$ — базис V, то базисом $U \bigoplus V$ будут вектора вида $(u_i, 0)$ и $(0, v_j)$. Это верно, так как $x \in U, \quad x = \sum u_i\alpha_i$, $y \in V, \quad y = \sum v_j\beta_j$, $(x, y) = \sum(u_i, 0)\alpha_i + \sum(0, v_j)\beta_j$.

$U' = \{(u, 0) | u \in U\} \le U \bigoplus V$
$V' = \{(0, v) | v \in V\} \le U \bigoplus V$
$U' + V' = U \bigoplus V$
$U' \cap V' = \{(0, 0)\}$
$\dim U \bigoplus V = \dim U' + \dim V' = \dim U + \dim V$.

$W \ge U, V$, такие, что $U + V = W$, $U \cap V = \{0\}$. (Никогда не говорить, что пересечение подпространств пусто. Оно нулевое!)

Предложение. *Тогда* $W \cong U \bigoplus V$.

Доказательство. $L : U \bigoplus V \sim\to W$ — доказать.

$L((u, v)) = u + v$.

Проверка оставляется читателю. (четвертый способ доказательства теорем в АТЧ).

□

Упражнение. бонус. Доказать формулу Грассмана как следствие теоремы о размерности ядра и образа. (Без вычислений. Построить такой линейный оператор).

Определение. Ранг набора векторов $(v_1, ..., v_n) = \dim < v_1, ..., v_n >=$ наибольшему количеству линейно независимых среди этих векторов.

Если $L : U \to V$ — линейное отображение, то $\mathrm{rk}(rank)L = \dim ImL$.

Если $f_1, ..., f_n$ — базис U, то $L(f_1), ..., L(f_n)$ — система образующих в ImL, и тогда $\mathrm{rk}\, L = \mathrm{rk}(L(f_1), ..., L(f_n))$.

Столбцовый (строчный) ранг матрицы — ранг набора ее столбцов (строк).

$L : U_f \to V_g$, $L_{f,g} = (L(f_1)_g, ..., L(f_n)_g)$, тогда $\mathrm{rk}\, L = \mathrm{rk}(L(f_1), ..., L(f_n)) = \mathrm{rk}(L(f_1)_g, ..., L(f_n)_g) = \mathrm{rk}\, L_{f,g}$ (здесь столбцовый ранг).

Итак, столбцовый ранг матрицы оператора не зависит от выбора базиса.

Следствие Пусть $A \in M_{m,n}(F)$, $B \in GL_m(F)$, $C \in GL_n(F)$. Тогда $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(BAC)$ (и строчный и столбцовый).

Доказательство. Пусть $L : F^n \to F^m$, ($e^{(n)}, f$ — базисы F^n, $e^{(m)}, g$ — базисы F^m) такая, что $L(x) = Ax$. Тогда $L_{e^{(m)},e^{(n)}} = A$.

$$L_{f,g} = BAC = C_{g\to e^{(m)}} L_{e^{(n)}e^{(m)}} C_{e^{(n)}\to f}$$

Отсюда $f = e^{(n)}C \Rightarrow C_{e^{(n)}\to f} = C$. $g = e^{(m)}B^{-1} \Rightarrow B = C_{g\to e^{(m)}}$

$\mathrm{rk}\, BAC = \mathrm{rk}\, A = \mathrm{rk}\, L_{e^{(n)}e^{(m)}} = \mathrm{rk}\, L_{f,g} = \mathrm{rk}\, L$.

Любая обратимая матрица может быть матрицей перехода от некоторого базиса f к базису g.

(Это было доказательство про столбцовый ранг).

Если матрица B обратима, то и транспонированная матрица обратима: $(BB^{-1})^T = E^T \Leftrightarrow (B^{-1})^T \cdot B^T = E \Rightarrow (B^T)^{-1} = (B^{-1})^T$.

$\mathrm{crk}\, A^T = \mathrm{rrk}\, A$ (столбцовый ранг транспонированной матрицы равен строчному рангу обычной матрицы). При этом, $\mathrm{rrk}(C^T A^T B^T) = \mathrm{rrk}(BAC)$.

□

Теорема. *(PDQ-разложение).* $\forall A \in M_{m,n}(F)\ \exists P \in GL_m(F),\ Q \in GL_n(F),\ D = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{m,n}(F)$, *такие, что* $A = PDQ$. *При этом размер этой матрицы* E *равен и столбцовому, и строчному рангам матрицы* A .

Доказательство. Из столбцов $a_{*1}, ..., a_{*n}$ выберем базис их линейной оболочки (они образующие, поэтому мы можем это сделать). Вектора $a_{*i_1}, ..., a_{*i_k}$ — базис. С помощью умножения справа на матрицу-перестановку, что $a_{*1}, ..., a_{*k}$ образуют базис в $< a_{*1}, ..., a_{*n} >$.

Матрица-перестановка — единичная матрица с переставленными столбцами. Умножить матрицу на матрицу-перестановку означает поменять столбцы умножаемой матрицы местами.

Пусть $k < l \leq n$. Тогда

$$a_{*l} = \sum_{i=1}^{k} a_{*i} \cdot \alpha_i$$

Доказательство. Умножая справа на матрицу

$$\begin{array}{c}\begin{pmatrix} 1 &&&&& -\alpha_1 && \\ & 1 &&&& -\alpha_2 && \\ && 1 &&& \dots && \\ &&& 1 && -\alpha_k && \\ &&&& 1 & 0 && \\ &&&&& 1 && \\ &&&&& 0 & 1 & \end{pmatrix} \\ \text{с т о л б } \; l \; \text{ е ц}\end{array}$$

получаем 0 в l-том столбце. Таким образом, мы нашли (проблемы на свою задницу) матрицу $C \in GL_n(F): \ AC = (a_{*i_1}, ..., a_{*i_k}, 0, 0, ..., 0)$. Теперь проделаем то же самое со строчками, умножая слева. □

Поймем, сколько у нас здесь линейно независимых строк. Аналогично началу доказательства, найдем $B \in GL_m(F)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\operatorname{crk}(BAC) = \operatorname{crk} A = k$. Фактически, линейная оболочка столбцов BAC является подпространством в F^h и имеет $\dim = k \Rightarrow k \leq h$, то есть $k = h$, а линейная оболочка столбцов $X = F^h$ (X — это наша единичная матрица, которая там наверху). Другими словами, столбцы матрицы X — базис F^h. Обозначим этот базис x. Тогда $C_{e \to x} = X \in GL_h(F)$, где e — стандартный базис F^h.

Тогда

$$BAC \begin{pmatrix} X^{-1} & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^{-1} & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = D$$

$$P = B^{-1}, \ Q = \left(C \begin{pmatrix} X^{-1} & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} \right)^{-1} \Rightarrow A = PDQ$$

что и требовалось доказать. □

Чтобы понять доказательство, сделать:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix}$$

Теорема. *(разложение Гаусса).*

$\forall A \in GL_n(F)$ представляется в виде $A = PLU$, где P — матрица-перестановка, $L = \begin{pmatrix} * & 0 \\ \star & * \end{pmatrix}$ — нижнетреугольная матрица, $U = \begin{pmatrix} * & \star \\ 0 & * \end{pmatrix}$ — верхнетреугольная матрица, где A — обратимая.

Доказательство. Возьмем первые k $(1 \leq k \leq n)$ столбцов матрицы A. Они образуют подматрицу в A. Все столбцы матрицы A линейно независимые, следовательно, некоторые из них тоже линейно независимые, следовательно, ранг подматрицы равен k, следовательно, в этой подматрице найдется k линейно независимых строк (линейная оболочка её строк имеет размерность k).

Будем действовать таким образом: $L'P'A = U \Leftrightarrow A = \underbrace{P'^{-1}}_{=P}\underbrace{L'^{-1}}_{=L}U$

Упражнение: доказать, что обратная к нижнетреугольной является нижнетреугольной (по индукции).

По индукции подберем матрицу-перестановку $P^{(k)}$, такую, что в матрице $P^{(k)} \cdot A$ все диагональные подматрицы до k-ой будут обратимы.

База индукции: $k = 1$. Обратимая матрица не имеет нулевого столбца, следовательно, $\exists m : \ a_{m1} \neq 0$, $P^{(1)}$ — матрица, соответствующая перестановке $(1\ m)$. Выглядит она так:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} & & m & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ m \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

База индукции доказана. Предположим, что в матрице $P^{(k-1)}A$ все диагональные подматрицы до $(k-1)$-ой обратимы. Строки $(k-1)$-ой диагональной подматрицы линейно независимы, поэтому строки подматрицы

$$\begin{pmatrix} a_{11} & . \ . \ . & a_{1k} \\ . & . \ . \ . & . \\ . & . \ . \ . & . \\ a_{(k-1)1} & . \ . \ . & a_{(k-1)k} \end{pmatrix}$$

тоже линейно независимы. Итак, строки $(a_{11}, ..., a_{1k}), (a_{21}, ..., a_{2k}), ..., (a_{(k-1)1}, ..., a_{(k-1)k})$ линейно независимы, а $(a_{11}, ..., a_{1k}), ..., (a_{n1}, ..., a_{nk})$ являются системой образующих в своей линейной оболочке, размерности k.

Поэтому первый набор строк может быть дополнен до базиса линейной оболочки (в которой система образующих — второй набор строк) одной строкой, то есть $\exists l \geq k$: $(a_{l1}, ..., a_{lk})$ линейно независимы с этими строчками (первым набором строк).

Тогда $P^{(k)} = Q \cdot P^{(k-1)}$, где Q — матрица-перестановка, соответствующая перестановке $(l\ k)$. Таким образом, строки k-ой диагональной подматрицы в $P^{(k)}A$ линейно независимы, то есть эта подматрица обратима. Остальные матрицы мы не трогали, поэтому они тоже остались обратимыми.

Теперь положим $P' = P^{(n)}$, так что все диагональные подматрицы в $P'A$ обратимы. При помощи преобразования Гаусса с ведущими элементами на главной диагонали будем получать нули ниже главной диагонали, что соответстует умножению на нижнетреугольную матрицу.

На главной диагонали никогда не возникнет нуля, поэтому мы продолжим процесс и доведем его до ручки:

Умножая на нижнетреугольную L' получим верхнетреугольную U, такую, что $L'P'A = U \Leftrightarrow A = P'^{-1}L^{-1}U = PLU$. $\square$

Матрицы, реализующие преобразование Гаусса:

$$T_{ij}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & & 0 & & j & & 0 \\ & 1 & & & & & \\ & & 1 & & \lambda & & i \\ & & & 1 & & & \\ & & & & 1 & & 0 \\ & 0 & & & & 1 & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$A \sim_{R_i+\lambda R_j} T_{ij}(\lambda) \cdot A$
$A \sim_{C_j:=C_j+\lambda C_i} A \cdot T_{ij}(\lambda)$.
Матрица обратима, так как $T_{ij}(\lambda)^{-1} = T_{ij}(-\lambda)$. — элементарная трансвекция.

$$\varepsilon \neq 0, D_i(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & 0 & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & \varepsilon & & i \\ & 0 & & & & 1 & \\ & & & & i & & \end{pmatrix}$$

$A \sim_{R_j:=\varepsilon \cdot R_i} D_i(\varepsilon)A$, $A \sim_{C_i:=\varepsilon C_i} AD_i(\varepsilon)$.

2 Билинейные и квадратичные формы

На самом деле мы хотим изучать аналог выражений

$$Q(\begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}) = \sum_{i,j=0}^{n} a_{ij}x_ix_j = (x_1, ..., x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & . & . & a_{1n} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & . & . & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$$

для произвольного векторного пространства.

Пусть V — векторное пространство над полем F.

Определение. Характеристика поля F — наименьшее натуральное число, такое, что сумма такого числа единиц равна нулю. $\operatorname{char} F = \operatorname{ord}_{(F,+)} 1$, но вместо ∞ напишут 0.

—

Определение. **Билинейное отображение** — отображение из декартова произведения: $B : U \times V \to W$, которое удовлетворяет следующим условиям:

1. $B(u_1 + u_2, v) = B(u_1, v) + B(u_2, v)$;
2. $B(u, v_1 + v_2) = B(u, v_1) + B(u, v_2)$;
3. $B(\alpha u, v) = B(u, \alpha v) = \alpha B(u, v)$;

—

Определение. $B : V \times V \to F$ называется **билинейной формой**, если она линейна по каждому аргументу, то есть $\forall \alpha, \beta \in F,\ x, y, z \in V :\quad B(\alpha x + \beta y, z) = \alpha B(x, z) + \beta B(y, z)$ и $B(z, \alpha x + \beta y) = \alpha B(z, x) + \beta B(z, y)$. Вообще форма — отображение декартова произведения в поле.

—

Определение. Форма $B : V \times V \to F$ называется симметричной, если $B(x, y) = B(y, x)$ и антисимметричной, если $B(x, y) = -B(y, x)$.

Лемма.

1) Множество билинейных форм является векторным пространством (с поточечными операциями). Обозначим его через $BL(V)$ (вообще обозначается $Hom(V \otimes V, F)$).

2) Множество симметричных, так же, как и множество антисимметричных форм являются подпространствами. Обозначим $BL^s(V),\ BL^a(V)$.

3) $\operatorname{char} F \neq 2$. *Тогда $BL(V) = BL^s(V) \bigoplus BL^a(V)$.*

Доказательство.

3) $B(x, y) = B(y, x) = -B(y, x) \quad \forall B \in BL^s(V) \cap BL^a(V)$, что равно $2B(y, x) = 0 \Leftrightarrow B(y, x) = 0\ \forall x, y \Leftrightarrow B = 0$.

Обозначим $B^s(x, y) = \frac{1}{2}(B(x, y) + B(y, x))$, $B^s \in BL^s(V)$, а $B^a(x, y) = \frac{1}{2}(B(x, y) - B(y, x))$, $B^a \in BL^a(V)$. Ну и совсем легко проверить, что $B = B^s + B^a$. □

Определение. B^s — симметризация билинейной формы B.

Теорема. *(поляризация квадратичной формы)*

$\operatorname{char} F \neq 2$. *$Q(x) = B(x, x)$ для некоторой билинейной формы B. Тогда $B^s(x, y) = \frac{1}{2}(Q(x + y) - Q(x) - Q(y))$ и $B^s(x, x) = Q(x)$.*

Доказательство. $Q(x + y) = B(x + y, x + y) = B(x, x) + B(x, y) + B(y, x) + B(y, y)$

$Q(x + y) - Q(x) - Q(y) = B(x + y, x + y) - B(x, x) - B(y, y) = B(x, y) + B(y, x)$ □

Определение. $Q : V \to F$ называется **квадратичной формой**, если $\exists B \in BL(V)$ — билинейная форма, такая, что $Q(x) = B(x, x)$.

—

А вот $B : V \times V \to F$, где F — поле, то такое отображение называется **билинейной формой**.

e — базис V. $u, v \in V$, тогда $B(u,v) = u_e^T B_e v_e$.

Квадратичной формой называется отображение $Q : V \to F$, для которой $\exists B$ — билинейная форма, такая, что $Q(x) = B(x,x)$.

Теорема. *$\forall B \in BL(V)$ и базиса f пространства V существует матрица B_f, такая, что $\forall x, y \in V$ верно $B(x,y) = x_f^T B_f y_f$.*

При этом $B_g = C_{f\to g}^T B_f C_{f\to g}$, где g — базис V.

$B_f = B_f^T \Leftrightarrow B$ — симметричная. Если $B_f = -B_f^T \Leftrightarrow B$ — антисимметричная.

Доказательство. $x = \sum_i f_i\alpha_i,\ y = \sum_j f_j\beta_j$ и считаем $B(x,y) = B(\sum_i f_i\alpha_i,\ \sum_j f_j\beta_j) = \sum_i\sum_j B(f_i,f_j)\alpha_i\beta_j =$

$$(\alpha_1, ..., \alpha_n)\begin{pmatrix} B(f_1,f_1) & & & \\ & B(f_2,f_2) & & \\ & & & \\ & & & B(f_n,f_n)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta_1\\ .\\ .\\ .\\ .\\ \beta_n\end{pmatrix} = x_f^T B_f y_f$$

Откуда $x_f = C_{f\to g}x_g,\ y_f = C_{f\to g}y_g$.

Теперь $B(x,y) = x_g^T C_{f\to g}^T \cdot B_f \cdot C_{f\to g} y_g = x_g^T B_g y_g$.

$\forall x_g, y_g \in F^n \Rightarrow B_g = C_{f\to g}^T \cdot B_f \cdot C_{f\to g}$.

Докажем симметричность: $B(y,x) = \underbrace{y_f^T B_f x_f}_{\text{матрица}1x1} = (y_f^T B_f x_f)^T = x_f^T B_f^T y_f =? = x_f^T B_f y_f = B(x,y)$. Равенство выполняется тогда и только тогда, когда $B_f^T = B_f$. □

Определение. Матрица квадратичной формы — матрица ассоциированной с ней симметричной билинейной формы.

$$Q_f = B_f = \begin{pmatrix} . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & B(f_i,f_j) & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & 1/2(Q(f_i,f_j) - Q(f_i) - Q(f_j)) & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \end{pmatrix}$$

Пусть $V = F^n$. e — стандартный базис $x = x_e$. Тогда $Q(x) = B(x,x) = x^T Q_e x = (*)$.

Обозначим
$$Q_e = \begin{pmatrix} a_{11} & . & . & a_{1n} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & . & . & a_{nn}\end{pmatrix}$$

Тогда
$$(*) = (x_1, ..., x_n)\begin{pmatrix}\sum_{j=1}^n a_{1j}x_j \\ . \\ . \\ \sum_{j=1}^n a_{nj}x_j\end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n\sum_{i=1}^n x_i a_{ij} x_j$$

Так как матрицы квадратичных форм симметричны, то

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + \sum_{i<j}(a_{ij}+a_{ji})x_ix_j$$

Например, $Q\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2+2y^2+6xy$, тогда $Q_e = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

$x \perp_B y \Leftrightarrow B(x,y)=0$ по определению. Тогда $S \subseteq V$, $S^{\perp_B} = \{v \in V |\ B(v,s)=0\ \forall s \in S\}$.

B — симметричная билинейная форма на V, $\dim V = n < \infty$, $Q(x)=B(x,x)$, $\operatorname{char} F \neq 2$.

$V^{\perp_B} = V_0 = \{x \in V |\ B(x,y)=0\ \forall y \in V\}$.

Определение. Квадратичная или билинейная форма называется невырожденной, если $V_0 = \{0\}$

Пусть $V = V_0 \bigoplus U$.

Лемма. *Тогда U не вырождено относительно B, то есть сужение B на $U \times U$ невырождено.*

Доказательство. $u \in U^{\perp_B} \cap U =?= \{0\}$. Тогда $\forall v \in V\ \exists x \in V_0, y \in U : v = x+y$.

$B(u,v) = B(u,x)+B(u,y) = B(x,u)+B(y,u) = 0+0 = 0$. Получили, что $B(u,v) = 0\ \forall v \in V$, то есть $u \in V_0$. $u \in U \cap V_0 = \{0\}$, то есть $u = 0$. □

Если $f_1, ..., f_k$ — базис в V_0, а $f_{k+1}, ..., f_n$ — базис U, то $f = (f_1, ..., f_n)$ — базис V.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \text{м} & \text{а} & \text{т} & \text{р} & \text{и} \\ 0 & 0 & \text{ц} & \text{а} & & \text{с} & \text{у} \\ 0 & 0 & \text{ж} & \text{е} & \text{н} & \text{и} & \text{я} \\ 0 & 0 & B & \text{н} & \text{а} & * & * \\ 0 & 0 & * & * & U & \times & U \end{pmatrix}$$

В дальнейшем считаем, что B — невырождена.

Упражнение. (ББ) Доказать, что B невырождена $\Leftrightarrow B_f$ — обратима.

Теорема. *$\forall$ квадратичной формы (=симметричной билинейной формы) U на пространстве V существует базис f, такой, что Q_f — диагональная матрица.*

Доказательство. B — ассоциированная с Q билинейная форма, невырожденная.

1 шаг) В пространстве V существует вектор x, такой, что $Q(x) \neq 0$.

Возьмем произвольный вектор $u \neq 0$. Если $Q(u) = 0$, то возьмем $v \in V :\ B(u,v) \neq 0$. Если $Q(v) \neq 0$, то все доказано, иначе положим $x = u+v$ и докажем, что $Q(u+v) = B(u+v,u+v) = B(u,u)+B(u,v)+B(v,u)+B(v,v) = \underbrace{Q(u)}_{=0} + 2\underbrace{B(u,v)}_{\neq 0 (def)} + \underbrace{Q(v)}_{=0} \neq 0$.

2 fucking шаг) Индукция по $n = \dim V$. При $n = 1$ утверждение верно: матрица 1×1 диагональна. Выберем в качестве базисного вектора f_1, так, чтобы $Q(f_1) = B(f_1, f_1) \neq 0$.

Пусть $f_1, g_2, ..., g_n$ — базис нашего пространства V (линейно независимый набор из одного вектора можно дополнить до базиса (как и любой другой независимый набор)).

Процесс ортогонализации: положим $f_i = g_i - \frac{B(g_i,f_1)}{B(f_1,f_1)} f_1$. Тогда вычисление показывает, что $B(f_i, f_1) = 0 \ \forall i = 2, ..., n$.

Пусть $W =< f_2, ..., f_n >$. Докажем, что оно невырождено относительно B.

Возьмем $w \in W \cap W^{\perp_B} =? = \{0\}$.

$\forall x \in V: \ x = \sum_{i=1}^n f_i \alpha_i = f_i \alpha_i + y (\in W)$. Тогда $B(w, x) = B(w, f_1)\alpha_1 + \underbrace{B(w, y)}_{=0} = \sum_{i=2}^n B(f_i, f_1)\beta_i \alpha_i + 0 = 0 \Rightarrow w \in V^{\perp_B} = \{0\}$.

По индукционному предположению, $\exists$ базис $h = (h_2, ..., h_n)$ в W, такой, что $(B|_W)_h$ будет диагональной. То есть $B(h_i, h_j) = 0 \ \forall i \neq j \geq 2$. Положим $h_1 = f_1$. $B(h_1, h_i) = B(f_1, \sum_{j=2}^n f_j \gamma_j) = 0$.

Мы доказали, что $B(h_i, ..., h_j) = 0 \ \forall i \neq j$ от 1 до n, т.е. матрица B в базисе $(h_1, ..., h_n)$ диагональна. $\square$

3 Определитель и его свойства

Определение. Имеем отображение $X \times X \to F$ — поле. Тогда антисимметричность: $f(x, y) = -f(y, x) \Rightarrow f(x, x) = -f(x, x) \Rightarrow f(x, x) = 0$.

Лемма. *Если* $\mathrm{char}\, F \neq 2$, *то* $f(x, y) = -f(y, x) \Rightarrow f(x, x) = 0$.

Пусть X — векторное пространство над F, а f линейна по каждому аргументу. Пусть $f(x, x) = 0 \ \forall x \in X$. $0 = f(x + y, x + y) = f(x, x) + f(y, y) + f(x, y) + f(y, x) = f(x, y) + f(y, x) \Rightarrow f(x, y) = -f(y, x) \ \forall x, y \in X$.

Определение. Пусть $f : \underbrace{V \times ... \times V}_{m} \to F$ является полилинейной, то есть она линейна по каждому аргументу. Тогда она называется антисимметричной, если она равна нулю как только два её аргумента совпадают.

Лемма. *Если f — полилинейна и антисимметрична, то $f(..., u, ..., v, ...) = -f(..., v, ..., u, ...)$. (на месте многоточий стоит одно и то же).*

$\sigma \in S_m$.

$f(v_1, ..., v_m) = (-1)^{\varepsilon(\sigma)} f(v_{\sigma(1)}, ..., v_{\sigma(m)})$.

Четность перестановки:

Инверсия в перестановке σ — пара индексов i, j, таких, что $i < j, \ \sigma(i) > \sigma(j)$.

Например, если мы запишем перестановку в форме:

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 2 & 5 & 1 & 6 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} i \\ \sigma(i) \end{array} \end{array}$$

(рисунок)

Дужками обозначены инверсии: $(1\ 2), (1\ 3), (1\ 5), (2\ 3), (2\ 5), (3\ 5), (4\ 5)$.

Четность $\sigma =$ (число инверсий) $\mod 2$.

Лемма. *Любая перестановка раскладывается в произведение транспозиций $(i, \ i + 1)$. Например, для той штуки (рисунок) $\sigma \cdot (4\ 5) =$*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Доказательство. Индукция по числу инверсий:

Если инверсий нет, то $\sigma(i) < \sigma(j)\ \forall i < j$. Тогда σ — тождественная. Более того, если $\sigma = e \Leftrightarrow \sigma(i) < \sigma(i+1)\ \forall i = 1, ..., m-1$.

Если количество инверсий не равно нулю, то $\exists i:\ \sigma(i) > \sigma(i+1)$. Тогда количество инверсий в $\tau = \sigma \cdot (i\ i+1)$ на 1 меньше, чем в σ. Действительно, $\tau(k) = \sigma(k)\ \forall k \neq i,\ i+1$. Таким образом, $\tau(i) = \sigma(i+1),\ \tau(i+1) = \sigma(i)$.

По индукционному предположению $\tau = (j_1\ j_1+1) \cdot ... \cdot (j_k\ j_k+1)$, $\sigma = \tau \cdot (i\ i+1)$ (если мы домножим на транспозицию слева, то у σ она пропадет, а у τ — появится) — произведение транспозиций нужного вида. □

Лемма. *При умножении на $(i\ i+1)$ четность перестановки меняется.*

Доказательство. очевидно (не было инверсии — появилась инверсия и наоборот). □

Теорема. *Пусть $\varepsilon(\sigma)$ — четность перестановки в σ.*

$\varepsilon : S_n \to \mathbb{Z}_2$ — гомоморфизм групп.

Доказательство. $\sigma, \tau \in S_n$.

$\sigma = (i\ i+1) \cdot ... \cdot (i_k\ i_k+1)$, $\tau = (j\ j+1) \cdot ... \cdot (j_l\ j_l+1)$.

$\varepsilon(\sigma) = k \mod 2,\ \varepsilon(\tau) = l \mod 2$

$\varepsilon(\sigma\tau) = (k+l) \mod 2$. □

Определение. Ядро этого гомоморфизма называется **знакопеременной группой:** $\ker \varepsilon = A_n$.

Теорема. *При $n \geq \sigma$ группа A_n простая.*

$\varepsilon(\sigma \cdot (i\ j)) = \varepsilon(\sigma) +_2 \varepsilon(i\ j) = \varepsilon(\sigma) + 1 \mod 2$.

Пусть $f : \underbrace{V \times ... \times V}_{m} \to F$

$v = (v_1, ..., v_n)$ — базис V.

f — полилинейная. Пусть A — матрица, в которой m столбцов и n строк: $A \in M_{n\times m}(F)$.

$x^{(1)}, ..., x^{(m)} \in V$, $x_v^{(i)} = a_{*i}$.

$$f(x^{(1)}, ..., x^{(m)}) = f(\sum_{j_1=1}^{n} v_{j_1} a_{j_1 1}, ..., \sum_{j_m=1}^{n} v_{j_m} a_{j_m m}) = \sum_{j_1=1}^{n} ... \sum_{j_m=1}^{n} f(v_{j_1}, ..., v_{j_m}) a_{j_1 1} \cdot ... \cdot a_{j_m m}$$

Набор чисел (m-мерный массив) $f(v_{j_1}, ..., v_{j_m})$, где $j_1, ..., j_m \in \{1, ..., m\}$ называется **тензором**. — не совсем правильное определение.

Пусть $m = n$, а f — антисимметрична. Тогда все слагаемые, у которых $j_r = j_s$ при $r \neq s$ равны нулю. Поэтому можно считать, что

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & ... & n \\ j_1 & ... & j_n \end{pmatrix} \in S_n$$

Тогда

$$f(x^{(1)},...,x^{(m)}) = \sum_{\sigma\in S_n} f(v_{\sigma(1)},...,v_{\sigma(n)})a_{\sigma(1)1}\cdot ... \cdot a_{\sigma(n)n} =$$

$$\sum_{\sigma\in S_n}(-1)^{\varepsilon(\sigma)} f(v_1,...,v_n)a_{\sigma(1)1}\cdot ... \cdot a_{\sigma(n)n} = \left(\sum_{\sigma\in S_n}(-1)^{\varepsilon(\sigma)}\prod_{i=1}^n a_{\sigma(i)i}\right) f(v_1,...,v_n)$$

Обратно, $\forall c \in F$ форма $f : V\times ... \times V \to F$ ($\dim V = n$), заданная формулой $f(x^{(1)},...,x^{(n)}) = \left(\sum_{\sigma\in S_n}(-1)^{\varepsilon(\sigma)}\prod_{i=1}^n a_{\sigma(i)i}\right)\cdot c$ является линейной антисимметричной формой.

Значение n-линейной формы на n-мерном пространстве полностью определяется её значением на наборе базисных векторов.

$f : V\times ... \times V \to F$ — полилинейная антисимметричная форма и размерность пространства n, то есть базис $v = (v_1,...,v_n)$, тогда

$$f(x_1,...,x_n) = f(v_1,...,v_n)\sum_{\sigma\in S_n}(-1)^{\varepsilon(\sigma)}\prod_{i=1}^n a_{\sigma(i)i}$$

где $a_{\sigma(i)i}$ — координата вектора x_i в v с номером $\sigma(i)$, или, что то же самое, $A = ((x_1)_v,...,(x_n)_v)$

Определение. Если $A\in M_n(R)$, где R — коммутативное кольцо, то

$$\det A = \sum_{\sigma\in S_n}(-1)^{\varepsilon(\sigma)}\prod_{i=1}^n a_{\sigma(i)i}$$

Лемма. *Любая полилинейная форма* $f : F^n\times ... \times F^n \to F$, *где* $F^n\times ... \times F^n \longleftrightarrow M_n(F)$, $f(A) = f(E)\cdot\det A$

Лемма. $\det$ — *полилинейная антисимметричная форма столбцов матрицы.*

Доказательство. $a_{*k} = b + c$, где $b, c\in F^n$,

$$\det A = \sum_{\sigma\in S_n}(-1)^{\varepsilon(\sigma)}\prod_{i\neq k}^n a_{\sigma(i)i}\cdot(b_{\sigma(k)}+c_{\sigma(k)}) = \sum_{\sigma\in S_n}(-1)^{\varepsilon(\sigma)}\prod_{i\neq k}^n a_{\sigma(i)i}b_{\sigma(k)}+\sum_{\sigma\in S_n}(-1)^{\varepsilon(\sigma)}\prod_{i\neq k}^n a_{\sigma(i)i}c_{\sigma(k)}$$
$$= \det(a_{*1}...a_{*k-1}ba_{*k+1}...a_{*n}) + \det(a_{*1}...a_{*k-1}ca_{*k+1}...a_{*n})$$

С $a_{*k} = \alpha\beta$ аналогично.

Докажем антисимметричность:

A_n — множество четных перестановок $\leq S_n$. Зафиксируем $i\neq j\in\{1,...,n\}$, циклическую перестановку $\tau = (i\ j)$ и возьмем смежный класс $S_n = A_n\tau\sqcup A_n$

Пусть $a_{*i} = a_{*j}$, тогда

$$\det A = \sum_{\sigma\in A_n}\prod_{k=1}^n a_{\sigma(k)k}+(-1)^1\sum_{\sigma\in A_n}\prod_{k=1}^n a_{\sigma\tau(k)k} = \sum_{\sigma\in A_n}(\prod_{k=1}^n a_{\sigma(k)k}-\prod_{k\neq i,j}^n a_{\sigma(k)k}\cdot\underbrace{a_{\sigma(j)i}}_{=a_{\sigma(j)j}}\cdot\underbrace{a_{\sigma(i)j}}_{=a_{\sigma(i)i}}) = 0$$

□

$\dim V = n$, $f : \underbrace{V \times ... \times V}_{n} \to F$ полилинейная, антисимметричная, $f \neq 0$, то f называется формой объема.

f — форма объема на V, а L — линейный оператор, то $f_L(x_1, ..., x_n) = f(L(x_1), ..., L(x_n))$ также является формой объема.

Определим

$$\det L = \frac{f_L(v_1, ..., v_n)}{f(v_1, ..., v_n)}$$

где $v = (v_1, ..., v_n)$ — базис.

Доказательство. (корректности). Так как $f \neq 0$, то существует набор векторов $x_1, ..., x_n$, таких, что $f(x_1, ..., x_n) \neq 0$.

$f(x_1, ..., x_n) = f(v_1, ..., v_n) \det A$, где $A = ((x_1)_v, ..., (x_n)_v)$. Следовательно, $f(v_1, ..., v_n) \neq 0$, то есть знаменатель не ноль.

$f_L(x_1, ..., x_n) = f_L(v_1, ..., v_n) \det A$, откуда

$$\frac{f_L(x_1, ..., x_n)}{f(x_1, ..., x_n)} = \frac{f_L(v_1, ..., v_n)}{f(v_1, ..., v_n)}$$

То есть определитель не зависит от выбора базиса.

Покажем, что он равен определителю матрицы оператора: □

Лемма. $v = (v_1, ..., v_n)$ — *базис, то* $\det L = \det L_v$

Доказательство.

$$\det L = \frac{f_L(v_1, ..., v_n)}{f(v_1, ..., v_n)} = \frac{f(L(v_1), ..., L(v_n))}{f(v_1, ..., v_n)} = \frac{f(v_1, ..., v_n) \det A}{f(v_1, ..., v_n)}$$

где $A = (L(v_1)_v, ..., L(v_n)_v)$. □

Теорема. $\det L_1 \circ L_2 = \det L_1 \cdot \det L_2$, $\det(A_1 \cdot A_2) = \det A_1 \cdot \det A_2$, *где* $L_1, L_2 : V \to V$ — *линейные операторы, а* $A_1, A_2 \in M_n(F)$.

Доказательство.

$$\det L_1 = \frac{f(L_1(v_1), ..., L_1(v_n))}{f(v_1, ..., v_n)};$$

$$\det L_2 = \frac{f_{L_1}(L_2(v_1), ..., L_2(v_n))}{f_{L_1}(v_1, ..., v_n)} = \frac{f(L_1 \circ L_2(v_1), ..., L_1 \circ L_2(v_n))}{f(L_1(v_1), ..., L_1(v_n))} = \frac{f_{L_1 \circ L_2}(v_1, ..., v_n)}{f(v_1, ..., v_n)} \cdot \frac{f(v_1, ..., v_n)}{f_{L_1}(v_1, ..., v_n)} = \det L$$

Второе утверждение непосредственно следует из первого (Принять A_1 за матрицу линейного отображения L_1) □

Задание на дом: найти в доказательстве косяк, выкурить, рассказать Степанову ощущения.

Лемма. f — *полилинейная антисимметричная форма. Тогда* $f(v_1, ..., v_i, ..., v_j, ..., v_n) = f(v_1, ..., v_i + \lambda v_j, ..., v_j, ..., v_n)$, *где* $\lambda \in F$.

Доказательство. $f(v_1,...,v_i+\lambda v_j,...,v_j,...,v_n) = f(v_1,...,v_i,...,v_j,...,v_n)+\lambda f(v_1,...,v_j,...,v_j,...,v_n) = f(v_1,...,v_i,...,v_j,...,v_n)+0 = f(v_1,...,v_i,...,v_j,...,v_n)$ □

Следствие (из доказательства корректности определения определителя)
f — форма объема на V, то $f(v_1,...,v_n) \neq 0 \Leftrightarrow (v_1,...,v_n)$ — базис.

Доказательство. $\Leftarrow$): $(v_1,...,v_n)$ — базис. $f \neq 0 \Rightarrow \exists x_1,...,x_n \in V : \ 0 \neq f(x_1,...,x_n) = \underbrace{f(v_1,...,v_n)}_{\neq 0} \det A$

Обратно: Если $(v_1,...,v_n)$ — не базис, то $\exists \alpha_1,...,\alpha_n$, не все из них равны 0, такие, что $\sum_{i=1}^n v_i\alpha_i = 0$.
Пусть, для определенности, $\alpha_1 \neq 0$.

$$v_1 + \sum_{i=2}^n v_i(+\frac{\alpha_i}{\alpha_1}) = 0$$

$f(v_1,...,v_n) = f(v_1 + \sum_{i=2}^n v_i\frac{\alpha_i}{\alpha_1},...,v_2,...,v_n)$. □

Следствие: $A \in M_n(F)$, $A \in GL_n(F) \Leftrightarrow \det A \neq 0$.

Теорема. $\det A = \det A^T$.

Доказательство.

$$\det A^T = \sum_{\sigma\in S_n}(-1)^{\varepsilon(\sigma)}\prod_{k=1}^n (A^T)_{\sigma(k)k} = \sum_{\sigma\in S_n}(-1)^{\varepsilon(\sigma)}\prod_{i=1}^n a_{\sigma^{-1}(i)i} = \sum_{\sigma\in S_n}(-1)^{\varepsilon(\sigma^{-1})}\prod_{i=1}^n a_{\sigma^{-1}(i)i} =$$
$$= \sum_{\tau\in S_n}(-1)^{\varepsilon(\tau)}\prod_{i=1}^n a_{\tau(i)i} = \det A$$

где $i = \sigma(k) \Leftrightarrow k = \sigma^{-1}(i)$.
$\varepsilon(\sigma^{-1}) = -\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\sigma) \in \mathbb{Z}_2$. □

Теорема. $A \in M_n(F),\ B \in M_m(F),\ C \in M_{n,m}(F)$. *Тогда*

$$\det\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det A \cdot \det B$$

Доказательство. $f : M_n(F) \to F$. $f(A) = \det\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$, (B,C) — фиксированы. Эта штука является полилинейной формой. Очевидно, что f — антисимметричная полилинейная форма столбцов матрицы A. Тогда $f(A) = f(E)\det(A) = \det\begin{pmatrix} E & C \\ 0 & B \end{pmatrix}\det A$. $\det\begin{pmatrix} E & 0 \\ C^T & B^T \end{pmatrix} = $ (аналогично) $= \det B^T \cdot \det\begin{pmatrix} E & 0 \\ C^T & E \end{pmatrix}$. Ясно, что при помощи преобразования Гаусса $\begin{pmatrix} E & 0 \\ C^T & E \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} \Rightarrow \det\begin{pmatrix} E & 0 \\ C^T & E \end{pmatrix} = 1$. Таким образом, $\det\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det A \cdot \det\begin{pmatrix} E & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det A \cdot \det B$. □

Из теоремы следует, что матрица вида

$$\det\begin{pmatrix} \alpha & * & * & * & * \\ 0 & | & - & - & | \\ 0 & | & B & & | \\ 0 & | & & & | \\ 0 & | & - & - & | \end{pmatrix} = \alpha\cdot\det B$$

Имеем матрицу:

$$\det\left(\begin{array}{cccccc|c} & & & j & & & \\ / & / & / & 0 & / & / & \\ / & / & / & .. & / & / & \\ / & / & / & \alpha & / & / & i \\ / & / & / & 0 & / & / & \\ / & / & / & .. & / & / & \\ / & / & / & 0 & / & / & \end{array}\right) = (-1)^{j-1}\det\left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & / & / & / & / & / & \\ .. & / & / & / & / & / & \\ \alpha & / & / & / & / & / & i \\ 0 & / & / & / & / & / & \\ .. & / & / & / & / & / & \\ 0 & / & / & / & / & / & \end{array}\right) =$$

$$= (-1)^{i+j-2}\det\begin{pmatrix} \alpha & / & / & / & / & / \\ 0 & / & / & / & / & / \\ 0 & / & / & / & / & / \\ 0 & / & / & / & / & / \\ 0 & / & / & / & / & / \\ 0 & / & / & / & / & / \end{pmatrix}$$

Определение. $C\in M_n(F)$. Минором $n-1$-го порядка в позиции (i,j) называется $M_{ij}(C) = M_{ij}$ = определитель матрицы, полученной из исходной вычеркиванием i-той строки и j-того столбца.

Определение. $A_{ij}(C) = A_{ij} = (-1)^{i+j}\cdot M_{ij}$ — алгебраическое дополнение позиции (i,j).

Следствие:

$$\det\begin{pmatrix} / & / & 0 & / & / \\ / & / & .. & / & / \\ / & / & \alpha & / & / \\ / & / & .. & / & / \\ / & / & 0 & / & / \end{pmatrix} = \alpha\cdot A_{ij}$$

Теорема.

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ji}A_{ji}$$

(для любого фиксированного j).

Доказательство. Заметим, что

$$a_{*j} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ 0 \\ .. \\ .. \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ a_{2j} \\ 0 \\ .. \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_{3j} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + ... + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ .. \\ .. \\ a_{nj} \end{pmatrix}$$

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} \det \begin{pmatrix} \text{с} & \text{т} & 0 & \text{о} & \text{л} \\ \text{б} & \text{ц} & 0 & \text{ы} & \\ \text{м} & \text{а} & a_{ij} & \text{т} & \text{р} \\ \text{и} & \text{ц} & 0 & \text{ы} & \\ & & 0 & & A \end{pmatrix}$$

□

Следствие: $j, k \in \{1, ..., n\}, \; A \in M_n(F)$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ik} = \begin{cases} \det A, & j = k \\ 0, & j \neq k \end{cases}$$

Доказательство. Для $j = k$ уже доказано. Если $j \neq k$, заменим k-ый столбец на j-ый, получим $B = (a_{*1}, ..., a_{*j}, ..., a_{*j}, ..., A_{*n})$. С одной стороны, определитель данной матрицы равен нулю. С другой, разложим по k-ому столбцу:

$$0 = \det B = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \underbrace{A_{ik}(B)}_{A_{ik}(A)} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ik}$$

□

Определение. Присоединенной к A называется матрица A^{adj}: $(A^{adj})_{ij} = A_{ji}(A)$

Например,

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}^{adj} = \begin{pmatrix} \delta & -\gamma \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}^{T} = \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}$$

теперь

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\delta - \beta\gamma & 0 \\ 0 & \alpha\delta - \beta\gamma \end{pmatrix} = (\alpha\delta - \beta\gamma)E = \det A \cdot E$$

Теорема. $A \cdot A^{adj} = A^{adj} \cdot A = \det A \cdot E$

Если $\det A \neq 0$*, то* $A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^{adj}$.

Доказательство. очевидно, ёпта! □

3.1 Решение систем линейных уравнений при помощи определителя.

Теорема. *(Формулы Крамера)*

$A \in GL_n(F), \; b \in F^n,$ *Пусть* $\Delta = \det A$. Δ_k *— определитель матрицы, полученной из* A *заменой* k*-ого столбца на столбец* b*. Тогда*

$$Ax = b \Leftrightarrow x = \begin{pmatrix} \Delta_1/\Delta \\ ... \\ \Delta_n/\Delta \end{pmatrix}$$

Доказательство. $\Delta_k = \sum_{i=1}^n b_i \cdot A_{ik}$. Матрица, определитель которой равен Δ_k отличается от A только в k-ом столбце, поэтому её алгебраическое дополнение $A_{ik} = A_{ik}(A)$. С другой стороны $Ax = b \Leftrightarrow x = A^{-1}b = \frac{1}{\det A}A^{adj}b$. $x_k = \frac{1}{\Delta}(A_{1k}, ..., A_{nk})b = \frac{1}{\Delta}\sum_{i=1}^n b_i A_{ik} = \frac{\Delta_k}{\Delta}$ ☐

Определение. Минорный ранг матрицы A размера $m \times n$ называется наибольший размер квадрата подматрицы в A, определитель которой $\neq 0$.

Теорема. *Минорный ранг A равен* $\operatorname{rk} A$.

Доказательство. Если минорный ранг $= k \Rightarrow \exists$ подматрица $k \times k$, у которой строки линейно независимы, т.е. $\det \neq 0 \Rightarrow$ в матрице $\exists$ k штук линейно независимых строк, а следовательно, $\operatorname{rk} A \geq k$.

Обратно: Пусть ранг матрицы $A = k$, то там есть k линейно независимых строк. Возьмем (не квадратную!) подматрицу, состоящую из k линейно независимых строк. Так как строчный ранг равен столбцовому, то матрица должна содержать и k линейно независимых столбцов. Возьмем подматрицу на пересечении этих линейно независимых строк и столбцов. Она квадратная, у нее все столбцы линейно независимы, следовательно, её ранг$\neq 0$.

Доказали, что минорный ранг $A \geq \operatorname{rk} A$. ☐

4 Собственные числа и вектора

Идея такова:

$L : V \to V$, $\dim V < \infty$.

Проблема. Выбрать базис $u = (u_1, ..., u_n)$ пространства V, такой, что L_u — диагональная.

Если $L_u = \begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & ... & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}$, то $L(u_i) = \lambda_i u_i$.

Определение. Ненулевой вектор $x \in V \backslash \{0\}$ называется собственным вектором оператора L, если $L(x) = \lambda x$ для некоторого $\lambda \in F$, при этом λ называется собственным числом.

f — базис V, $L_f x_f = \lambda x_f$

Определение. Собственный вектор матрицы, A если $Av = \lambda v$, $\lambda \in F$, $v \in F^n \backslash \{0\}$.

$Av = \lambda v \Leftrightarrow (A - \lambda E)v = 0$.

$\exists v \neq 0$, удовлетворяющее этому равенству $\Leftrightarrow$ столбцы $(A - \lambda E)$ линейно зависима $\Leftrightarrow \det(A - \lambda E) = 0$.

Определение. Если $A \in M_n(F)$, то характеристический многочлен A — $\chi_A(t) = \det(A - tE)$.

$L : V \to V$, f — базис V, $\chi_L(t) = \det(L_f - tE)$.

Лемма. *Характеристический многочлен оператора не зависит от* f

Доказательство. g, f — базисы V, $L_g = C^{-1}L_f C$.

$\det(L_g - tE) = \det(C^{-1}L_f C - tE) = \det(C^{-1}(L_f - tE)C) = (\det C)^{-1}(\det(L_f - tE))(\det C) = \det(L_f - tE)$ ☐

Предложение. *Собственные числа матрицы A (оператора A) — корни характеристического многочлена χ_A.*

Определение. $\ker(A - \lambda I) = V_\lambda$ — собственное подпространство соответствующее λ, где I — тождественный оператор.

Определение. Кратность λ в многочлене χ_A называется алгебраической кратностью λ.
$\dim V_\lambda$ — геометрическая кратность λ.

Заметим, что $\deg \chi_A = n$, где A — матрица $n \times n$ или оператор в n-мерном пространстве.

Теорема. *(о линейной независимости собственных векторов)*
Собственные вектора, соответствующие различным собственным числам, линейно независимы.

Доказательство.
$\lambda_1, ..., \lambda_k$ — различные собственные числа.
$x_1, ..., x_k$ — соответсвующие собственные вектора, т.е.
$Ax_i = \lambda_i x_i$ или $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$.
$A(\sum_{i=1}^k x_i \alpha_i) = 0$.
$\sum_{i=1}^k Ax_i\alpha_i = \sum_{i=1}^k x_i\lambda_i\alpha_i = 0$
Домножим первое уравнение на λ_k и из обоих уравнений получим

$$\sum_{i=1}^{k} x_i\alpha_i(\lambda_k - \lambda_i) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{k-1} x_i\alpha_i(\lambda_k - \lambda_i)$$

Введем индукцию по k, предполагая, что вектора линейно независимы. База: $k = 1$: $x_1\alpha_1 = 0$ и так как $x_1 \neq 0$ (собственный вектор не равен нулю), то $\alpha_1 = 0$. По индукционному предположению $\alpha_i \underbrace{(\lambda_k - \lambda_i)}_{\neq 0} = 0 \ \forall i = 1, ...k - 1 \Rightarrow \alpha_i = 0 \quad \forall i = 1, ..., k - 1$.
$\alpha_k \cdot \underbrace{x_k}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow \alpha_k = 0$. □

Предложение. *Оператор диагонализуем (то есть $\exists$ базис, в котором его матрица диагональна) тогда и только тогда, когда существует базис из собственных векторов.*

Следствие: (достаточное условие диагонализуемости): Если χ_A имеет n различных корней в F, то оператор A диагонализуем.

Доказательство. По теореме имеем n линейно независимых собственных векторов, они образуют базис в n-мерном пространстве. □

Следствие: F — алгебраически замкнуто и χ_A не имеет кратных корней, то A — диагонализуем.

Определение. Матрица, в которой по диагонали стоит одно и то же число λ, над диагональю стоят единички, а остальные нули, называется жордановым (ящиком) блоком.

Жордановой формой называется блочно-диагональная матрица, на диагонали которой стоят жордановы блоки (не обязательно с одинаковыми λ).

Теорема. *(жорданова форма)* $\dim V = n$, F *— алгебраически замкнуто,* $\forall A : V \to V$, *то* $\exists$ *базис* u *пространства* V, *такой, что* A_u *имеет жорданову форму.*

Упражнение. (на бонусные баллы)

1) $p, q \in F[t],\ \gcd(p, q) = 1,\ L : V \to V$.

Доказать, что $\ker(p(L) \cdot q(L)) = \ker(p(L)) \bigoplus \ker(q(L))$.

Определение. R называется F-алгеброй, если

1) R — кольцо с единицей.

2) R — векторное пространство над F с той же операцией сложения.

3) $\forall \alpha \in F,\ r, s \in R:\ \alpha(rs) = (\alpha r)s = r(\alpha s)$.

Примерами алгебр является, например, само поле F.

Пример.

1) F

2) $F[x_1, ..., x_n]$

3) $M_n(F)$.

4) $End(V)$.

Определение. V — векторное пространство над F

$F[t]$. $L \in End(V) = \{$лин.отобр $\ V \to V\}$ (эндоморфизм).

$(L + M)(v) = L(v) + M(v)$.

$LM(v) = L(M(v))$.

$(\alpha L)(v) = \alpha \cdot L(v)$.

Очевидно выполнена аксиома $\alpha(LM) = (\alpha L)M$.

Предложение. *(универсальное свойство кольца многочленов)*

R *—* F*-алгебра (*F *— поле) (возможно, алгебра некоммутативна).*

$\forall r \in R\ \exists!\ \varepsilon_r : F[t] \to R$ *— гомоморфизм алгебр, для которого* $\varepsilon_r(t) = r$.

Доказательство. Положим $\varepsilon_r(\alpha_n t^n + ... + \alpha_0) = \alpha_n r^n + ... + \alpha_1 r + \alpha \cdot 1_R$ (единица кольца).

Другими словами, $\varepsilon_p = p(r)$.

Легко проверить, что ε_r — гомоморфизм колец, F-линейное отображение, и $\varepsilon_r(t) = r$.

Единственность: φ — гомоморфизм алгебр, такой, что $\varphi(t) = r$, тогда $\varphi(1_F) = 1_R,\ \varphi(\alpha) = \varphi(\alpha \cdot 1_F) = \alpha \cdot \varphi(1_F) = \alpha \cdot (1_R)$.

$\varphi(t^n) = \varphi(t \cdot t^{n-1}) = r \cdot \varphi(t^{n-1})$ по индукционному предположению $= r \cdot r^{n-1} = r^n$.

$$\varphi(\sum_{k=0}^{n} \alpha_k t^k) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \varphi(t_k) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k r^k$$

где $r^0 = 1_R,\ t^0 = 1_F$.

Таким образом, $\varphi = \varepsilon_r$ □

Определение. R — F-алгебра, $r \in R$

Минимальным многочленом элемента r называется $p : \ker \varepsilon_r = p \cdot F[t]$. То есть минимальный многочлен определен с точностью до умножения на константу (элемент поля).

Упражнение. (на бонусные баллы):

2) Пусть $B : V \to V$ линейный оператор, $B^n = 0$. Доказать, что ненулевые элементы $v,\ B(v),\ B^2(v), ..., B^{n-1}(v)$ линейно независимые. ($v \in V$).

Для прикола возведем в степень такую матрицу:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & & 0 & 1 \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & & 0 \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \\ & 0 & & & 0 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

При этом единицы сдвинулись вправо на k позиций.

Докажем это:

$J = J_{n,0},\ Je_i = e_{i-1},\ i > 1$, где e_i — i-тый столбец единичной матрицы. Если итерировать данную операцию, получим

$$J^k e_i = \begin{cases} e_{i-k} & \text{при } i > k \\ 0 & \text{при } i \le k \end{cases}$$

Если пространство конечномерное, то мы рано или поздно получим ноль.

С помощью этой фигни докажем теорему

Теорема. *(Кэли-Гамильтона)*

$\chi_L(L) = 0$, где $L : V \to V$ — линейный оператор в конечномерном пространстве V.

Доказательство. Предположим, что наше поле алгебраически замкнуто. Для этого нужно знать утверждение, нужно знать, что любое поле содержится в алгебраически замкнутом поле. Как построить такое поле? Берем неприводимый многочлен, присоединяем его корень к полю: $F[t]/(p)$. (это было отвлечение).

Лемма. $\forall$ *поля F существует алгебраически замкнутое поле $\overline{F}$, содержащее F.*

Доказательство. Будет выведено из леммы Цорна и аксиомы выбора. □

Так как $M_n(F) \subseteq M_n(\overline{F})$, то можно считать, что $F = \overline{F}$ — алгебраически замкнуто.

Тогда $\exists$ базис u пространства V, такой, что существует жорданов блок

$$L_u = \begin{pmatrix} J_{k_1,\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & J_{k_m,\lambda_m} \end{pmatrix}$$

Так как $\varphi : End(V) \to M_n(F)$, где $\varphi(L) = L_u$ ($n = \dim V$) является изоморфизмом алгебр, то $p(L_u) = p(L)_u$. Поэтому достаточно доказать, что $\chi_L(L_u) = 0$, что можно перезаписать как $\chi_{L_u}(L_u) = 0$.

$$\chi_{L_u}(t) = \det \begin{pmatrix} J_{k_1,\lambda_1} - tE & & \\ & \ddots & \\ & & J_{k_m,\lambda_m} - tE \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^{m} (J_{k_i,\lambda_i} - tE) = \prod_{i=1}^{m} (\lambda_i - t)^{k_i}$$

Видимо, уже доказано, что

$$p \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p(A_1) & & \\ & \ddots & \\ & & p(A_m) \end{pmatrix}$$

где A_i — блоки.

Осталось доказать, что $\chi_L(J_{k_i,\lambda_i}) = 0$. Действительно, если мы возьмем $(\lambda_i E - J_{k_i,\lambda_i})^k =$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}^{k_i} (-1)^{k_i} = 0 \qquad \square$$

Введем обозначение: символом φ_L обозначается минимальный многочлен оператора L (многочлен наименьшей степени, которая аннулирует оператор L: $\varphi_L(L) = 0$).

Следствие: $\chi_L(t) \vdots \varphi_L(t)$.

Если λ_i — собственное число оператора L, то $\varphi_L(\lambda_i) = 0$.

Доказательство. Предположим, что F алгебраически замкнуто. $\varphi_L(t) = (t - \alpha_1) \cdot \ldots \cdot (t - \alpha_h)$, где α_i различны.

Посмотрим, как данный многочлен воздействует на жорданов блок:

$$\varphi_L(J_{k,\lambda}) = \begin{pmatrix} \lambda-\alpha_1 & 1 & & & \\ & \cdot & \cdot & & \\ & & \cdot & \cdot & \\ & & & \cdot & 1 \\ & & & & \lambda-\alpha_1 \end{pmatrix} \cdot \ldots \cdot \begin{pmatrix} \lambda-\alpha_h & 1 & & & \\ & \cdot & \cdot & & \\ & & \cdot & \cdot & \\ & & & \cdot & 1 \\ & & & & \lambda-\alpha_h \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \prod_{i=1}^n(\lambda-\alpha_i) & / & / & / & / \\ & \cdot & / & / & / \\ & & \cdot & / & / \\ & & & \cdot & / \\ & & & & \prod_{i=1}^n(\lambda-\alpha_i) \end{pmatrix} \neq 0$$

если $\lambda \neq \alpha_i \ \forall i$. Таким образом, $\varphi_L(\lambda)$... $\square$

Следствие: Если $\chi_L(t) = \prod_{i=1}^n(\lambda_i - t)^{k_i}$, то $\varphi_L = \prod_{i=1}^n(\lambda_i - t)^{l_i}$, для некоторых $1 < l_i < k_i$.

Пример.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Для неё: $\chi_A(t) = (1-t)^4, \ \varphi_A(t) = (1-t)^2$.

Определение. Если $\chi_L(t) = \prod(\lambda_i - t)^{k_i}$, то $\ker(L - \lambda_i I)^{k_i}$ называется корневым подпространством и обозначается R_{λ_i}

$(V_{\lambda_i} = \ker(L - \lambda_i I))$ — собственное подпространство.

Мы коротко заканчиваем тему жордановых формул.

$$J_{k,0}^l = \begin{pmatrix} 0 & & l - \text{позиция} & & \\ & 0 & & \ldots & \\ & & 0 & & 1 \\ & & & 0 & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$J_{k,\lambda}^l = (\lambda E + J_{k,0})^l = \sum_{i=0}^{l} C_l^i J_{k,0}^i \lambda^{l-i}$$

$$e^{J_{k,0}} := \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{i!} J_{k,0}^i$$

$$e^{J_{k,\lambda}} = e^{\lambda E + J_{k,0}} = e^{\lambda E} \cdot e^{J_{k,0}} = e^{\lambda} \cdot E \cdot \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{i!} J_{k,0}^i$$

Если у нас есть $L : V \to V$, V — векторное пространство над замкнутым полем F, то разложим характеристический многочлен в линейные множители: $\chi_L(t) = \prod_{i=1}^m(\lambda_i - t)^{k_i}, \ \ \lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$.

$R_{\lambda_i} = \ker(L - \lambda_i I)^{k_i} = \ker(L - \lambda_i I)^r \ \forall r \geq k_i$.

$V_{\lambda_i} = \ker(L - \lambda_i I)$.

Предложение.

$$V = \bigoplus_{i=1}^{m} R_{\lambda_i}$$

Доказательство. $u_1, ..., u_n$ — жорданов базис оператора L, тогда $(L - \lambda_1 I)u_1 = 0$, если $k_1 > 1$, то $(L - \lambda_1 I)u_2 = \varepsilon_2 u_1$,...,$(L - \lambda_1 I)u_{k_1} = \varepsilon_{k_1} u_{k_1 - 1}$ или 0

$$L_u = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \varepsilon & & & & & & & & & & & & \\ & \lambda_1 & \varepsilon & & & & & & & & & & & \\ & & \lambda_1 & & & & & & & & & & & \\ & & & \lambda_2 & & & & & & & & & & \\ & & & & . & & & & & & & & & \\ & & & & & . & & & & & & & & \\ & & & & & & . & & & & & & & \\ & & & & & & & . & & & & & & \\ & & & & & & & & . & & & & & \\ & & & & & & & & & . & & & & \\ & & & & & & & & & & . & & & \\ & & & & & & & & & & & . \end{pmatrix}$$

И из всего этого следует, что $(L - \lambda_1 I)^{k_1} u_j = 0 \; \forall j = 1, ..., k$, Таким образом, $u_1, ..., u_{k_1} \in R_{\lambda_1}$. Аналогично $u_{k_1+1}, ..., u_{k_1+k_2} \in R_{\lambda_2}$ и так далее. Поэтому $V = R_{\lambda_1} + ... + R_{\lambda_m}$.

Многочлен $\underbrace{(t - \lambda_i)^{k_i}}_{p(t)}$ взаимно прост с $\underbrace{\prod_{j \neq i} (t - \lambda_j)^{k_j}}_{q(t)}$. $\exists r, s : \; r(t)p(t) + q(t)s(t) = 1$, откуда $r(L)p(L) + q(L)s(L) = I$.

Пусть $x \in R_{\lambda_i} \cap \sum_{j \neq i} R_{\lambda_j}$. $p(L)(x) = (L - \lambda_i I)^{k_i}(x) = 0$.

Затем $x = \sum_{j \neq i} x^{(j)}, x^{(j)} \in R_{\lambda_j}$.

$(L - \lambda_j I)^{k_j}(x^{(j)}) = 0 \Rightarrow q(L)(x^{(j)}) = 0 \; \forall j \neq i$.

$q(L)(x) = 0 : \; r(L)p(L)(x) + s(L)q(L)(x) = I(x) = x \Rightarrow x = 0$.

Доказали, что $R_{\lambda_i} \cap \sum_{j \neq i} R_{\lambda_j} = \{0\}$, следовательно, сумма R_{λ_n} прямая. □

$$A := (L - \lambda_i I)|_{R_{\lambda_i}}$$

$A^{k_i} = 0$

Если $k = k_i$, то $A^k = 0$, так как $Ax = \lambda x$, $A^2 x = A(\lambda x) = \lambda A(x) = \lambda^2 x$.

В это месте я задолбался. To be continued...

▯▯

Лемма. *Если $A^k = 0$, то $x, Ax, ..., A^m x$, не равные нулю, линейно независимы.*

Доказательство. Пусть h — наименьшее из $\mathbb{N}$, такое, что $A^h x = 0$. Возьмем сумму $\sum_{i=0}^{m} A^i x \alpha_i = 0$. Применяем A^{h-1}. Получаем $\sum_{i=0}^{m} \underbrace{A^{i+h-1}}_{=0 \;\; i \geq 1} x \cdot \alpha_i = 0 \Rightarrow A^{h-1}\alpha_0 = 0 \Rightarrow \alpha_0 = 0$, дальше по индукции. □

4.1 Пространства со скалярным произведением

Определение. Пусть V — векторное пространство, не обязательно конечномерное, над R. Симметричная билинейная форма $B : V \times V \to R$ называется евклидовым скалярным произведением, если она положительно определена, т.е. $B(x, x) > 0\ \forall x \neq 0$.

Введем обозначения: вместо $B(x, y)$ пишут (x, y) или $(x, y)_B$ или $(x, y)_1$ если их несколько.

Пример.

1) $(a, b) = |a| \cdot |b| \cdot \cos(\angle a, b)$ в геометрии
2) В $\mathbb{R}_n :\ (x, y) = x^T y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$
3) Там же $(x, y)_г = x^T г y$, где $г \in M_n(\mathbb{R})$ и все собственные числа $г > 0$.
4) Странное скалярное произведение: $V = C([a, b])$
$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)\rho(x)dx$, где $\rho(x) > 0\ \forall x \in (a, b)$.

Определение. Если $f = (f_1, ..., f_n)$ — базис V, $(x, y) = x_f^T \Gamma_f y_f$ — матрица билинейной формы в базисе f

$$\begin{pmatrix} (f_1, f_1) & & & & \\ & \cdot & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & (f_n, f_n) \end{pmatrix}$$

— матрица Грама скалярного произведения в базисе f. обозначатеся Γ_f.

Определение. $B : V \times V \to C$. B называется полуторалинейной, если она линейна по II аргументу и $B(x + y, z) = B(x, z) + B(y, z),\ B(x\alpha, z) = \bar{\alpha}B(x, z)$.

B называется эрмитово-симметричной (Степанов забыл, как эта хрень нормально называется), если $B(x, y) = \overline{B(y, x)}$. Отсюда следует, что $B(x, x) = \overline{B(x, x)} \Rightarrow B(x, x) \in \mathbb{R}$.

Эрмитово симметричная форма B называется положительно определенной, если $B(x, x) > 0\ \forall x \neq 0$.

Эрмитово скалярное произведение удовлетворяет всем условиям из предыдущего определения и определяется как:

Определение. B называется эрмитовым (унитарным) скалярным произведением, если она полуторалинейна, эрмитово симметрична и положительно определена!

Пример. Над $\mathbb{C}^n :\ (x, y) = \overline{x^T} \cdot y$

Пусть $(-, -)$ — эрмитово скалярное произведение на V.
f — базис V.

$$(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} f_i \alpha_i, \sum_{j=1}^{n} f_j \beta_j\right) = \sum_{i,j=1}^{n} \overline{\alpha_i}\,(f_i, f_j)\,\beta_j = \overline{x}_f^T \begin{pmatrix} & & \\ & (f_i, f_j) & \\ & & \end{pmatrix} y_f$$

Предложение. $(x, y) = \overline{x}_f^T \Gamma_f y_f$ *для эрмитора скалярного произведения (доказательство выше).*

Определим норму: $||x|| = \sqrt{(x, x)} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

Теорема. *(Неравенство Коши-Буняковского-Шварца)*
$(-, -)$ *— эрмитово скалярное произведение. Тогда* $|(x, y)|^2 \leq (x, x) \cdot (y, y)$*, или, что то же самое,* $|(x, y)| \leq ||x|| \cdot ||y||$.

Доказательство.

$$0 \leq (x - \lambda y, x - \lambda y) = (x, x) + |\lambda|^2 \cdot (y, y) - (\lambda(x, y) - \overline{\lambda(x, y)}) =$$
$$= (x, x) + \frac{|(y, x)|^2}{(y, y)^2}(y, y) - \left(\frac{|(y, x)|^2}{(y, y)} + \frac{|(y, x)|^2}{(y, y)}\right) = (x, x) - \frac{|(y - x)|^2}{(y, y)} \geq 0$$

(так как $\lambda\overline{\lambda} = |\lambda|^2$)
Подставим $\lambda = \frac{(y,x)}{(y,y)}$, получаем $(x, x)(y, y) \geq |(y, x)|^2$.
В вещественном случае получится, конечно же, $(y, y)\lambda^2 - 2\lambda(x, y) + (x, x)$. □

Определение. (для евклидова пространства) $\angle(a, b) = \arccos \frac{(a,b)}{||a|| \cdot ||b||}$.

Теорема. *(Неравенство треугольника)*
$||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$.

Доказательство. $||x + y|| \leq ||x|| + ||y|| \Leftrightarrow (x + y, x + y) \leq ||x||^2 + 2\underline{||x||} \cdot ||y|| + ||y||^2$, и, одновременно, $(x + y, x + y) = ||x||^2 + ||y||^2 + (x, y) + (y, x) \Leftrightarrow (x, y) + \overline{(x, y)} \leq 2||x||^2 \cdot ||y||^2$, так как $Re(x, y) \leq |(x, y)| \leq ||x|| \cdot ||y||$. □

Лемма. $v_1, ..., v_k \in V \backslash \{0\}$, $(v_i, v_j) = 0 \ \forall i \neq j$*. Тогда* $v_1, ..., v_k$ *линейно независим.*

Доказательство. $\sum_{i=1}^k v_i \alpha_i = 0$.

$$0 \neq (v_j, v_j)\alpha_j = \sum_{i=1}^k \underbrace{(v_j, v_i)}_{=0 \ i \neq j} \alpha_i = 0 \Rightarrow \alpha_j = 0 \ \forall j$$

□

Теорема. *(ортогонализация Грама-Шмидта)*
$f_1, .., f_k \in V$
$g_1 = f_1$
$g_2 = f_2 - \frac{(g_1, f_2)}{(g_1, g_1)} g_1$
....
$g_k = f_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(g_i, f_k)}{(g_i, g_i)} g_i$*, где* $(g_i \neq 0)$.
Тогда:
1) $(g_i, g_j) = 0 \ \forall i \neq j$
2) $< f_1, ..., f_m >=< g_1, ..., g_m >$
3) Если $f_1, ..., f_m$ *линейно независимы, то* $g_1, ..., g_m$ *тоже линейно независимы, в частности, ненулевые.*
4) Если $f_m \in < f_1, ..., f_{m-1} >$*, то* $g_m = 0$.
5) Если $f_1, ..., f_k$ *— система образующих для* V*, то ненулевые из* $g_1, ..., g_k$ *будут образовывать базис.*
6) Если $f_1, ..., f_k$ *— базис, то* $g_1, ..., g_k$ *— ортогональный базис.*

Доказательство.

1) Индукция по k: $k = 1$, доказывать нечего.

$$(g_k, g_j) = (f_k, g_j) - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(f_k, g_i)}{(g_i, g_i)}(g_i, g_i) = (f_k, g_j) - \frac{(f_k, g_j)}{(g_j, g_j)}(g_j, g_j) = 0$$

2,3) Положим $\alpha_{ij} = \frac{(g_i, f_j)}{(g_i, g_i)}$. Тогда неравенства можно переписать в виде:

$$(f_1, ..., f_k) = (g_1, ...g_k) \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & . & & \alpha_{ij} & \\ & & . & & \\ & 0 & & . & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}$$

то есть $f = g \cdot C$, где $C \in GL_k(F)$.

Поэтому $< f >=< g >$ и линейная независимость $f \Leftrightarrow$ линейно независимость g.

4) $g_m \in < f_1, ..., f_m >=_{\text{условие 4}} < f_1, ..., f_{m-1} >=< g_1, ..., g_{m-1} >$. По (1) $g_m \perp g_i \ \forall i \leq m - 1 \Rightarrow g_m \perp < g_1, ..., g_{m-1} > \Rightarrow g_m \perp g_m \Rightarrow g_m = 0$.

5) По (2) $< g_1, ..., g_k >=< f_1, ..., f_k >= V$, а по лемме ненулевые из g_1 линейно независимы.

6) Следует из (3), (5). □

Следствие (QR-разложение):

Если $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$, $\operatorname{rk} A = n$. Тогда $\exists R \in GL_n(\mathbb{C})$ и $Q \in M_{m,n}(\mathbb{C})$, такие, что:

1) $A = QR$

2) R — верхнетреугольная.

3) $\overline{Q}^T Q = E$. (столбцы матрицы Q ортонормированы).

Доказательство. $\mathbb{C}^n$ со стандартным скалярным произведением (т.е. $(x, y) = \overline{x}^T y$)

$b_1, ..., b_n$ (некие столбцы) получим из $a_{*1}, ..., a_{*n}$ (столбцы матрицы A) с помощью ортогонализации Грама-Шмидта.

$$a_{*i} = \frac{b_{*i}}{||b_{*i}||} \Rightarrow B = Q \begin{pmatrix} * & & & & \\ & . & & 0 & \\ & & . & & \\ & 0 & & . & \\ & & & & * \end{pmatrix}$$

$$A = B \begin{pmatrix} 1 & / & / & / & / \\ & . & / & / & / \\ & & . & / & / \\ & 0 & & . & / \\ & & & & 1 \end{pmatrix} = Q \underbrace{\begin{pmatrix} * & / & / & / & / \\ & . & / & / & / \\ & & . & / & / \\ & 0 & & . & / \\ & & & & * \end{pmatrix}}_{R}$$

$$\overline{Q}^T Q = \begin{pmatrix} \overline{q}_{*1}^T \\ . \\ . \\ . \\ \overline{q}_{*n}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{*1} & . & . & . & q_{*n} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} . & . & . & . & . \\ . & . & \overline{q}_{*i}^T \cdot q_{*j} & . & . \\ . & . & . & . & . \end{pmatrix} = E$$

Так как

$$\overline{q}_{*i}^T q_{*j} = (q_{*i}, q_{*j}) = \frac{(b_{*i}, b_{*j})}{||b_{*i}|| \cdot ||b_{*j}||} = \begin{cases} 0 & i \neq j \text{ (по 1 теореме)} \\ 1 & i = j \end{cases}$$

$\square$

Определение. Изометрия пространств со скалярным произведением — линейное отображение $L : U \to V$, такое, что $(L(x), L(y))_V = (x, y)_U$.

Теорема. *(о классификации евклидовых и эрмитовых пространств)*

Любое евклидово (эрмитово) пространство изометрично $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$) со стандартным скалярным произведением.

Доказательство. По ортогонализации Грама-Шмидта в пространстве V существует ортонормированный базис f. В этом базисе $(x, y) = \overline{x_f^T} \cdot y_f$. Здесь изометрия $\varphi_f : V \to \mathbb{C}^n$ ($\mathbb{R}^n$): $\overline{x_f^T} \cdot y_f = \varphi_f(x), \varphi_f(y)$, то есть $\varphi_f(x) = x_f$. $\square$

V — евклидово или эрмитово пространство. Пространства конечномерные. $U \leq V$ и $U^\perp = \{\underbrace{v \in V \mid (v, u) = 0 \ \forall u \in U}_{v \perp U}\}$.

Замечание. $(u_1, ..., u_n)$ — система образующих в U. $v \perp U \Leftrightarrow v \perp u_k \forall k = 1, ..., m$.

Теорема. $V = U \bigoplus U^\perp$.

Доказательство. $x \in U \cap U^\perp \Rightarrow x \perp x \Leftrightarrow (x, x) = 0 \Rightarrow x = 0$.

Возьмем базис U: $f = (f_1, ..., f_k)$, дополним до базиса всего пространства $(f_1, ..., f_n)$ — базис V и ортогонализуем его, получив базис $(g_1, ..., g_n)$.

$(g_1, ..., g_k)$ — базис U, $(g_1, ..., g_n)$ — ортогональный базис V. Теперь любой вектор можно представить как $v = \underbrace{\sum_{i=1}^{k} g_i \alpha_i}_{\in U} + \underbrace{\sum_{i=k+1}^{n} g_i \alpha_i}_{\in U^\perp}$.

$g_i \perp U$ при $i > k$, так как $g_i \perp g_j \forall j \leq k < i$.

Доказательство требует выбора базиса, то есть не распространяется на случай бесконечномерных пространств. $\square$

Предложение. $\left(U^{\perp}\right)^{\perp} = U$ *(в Гильбертовом пространстве* $(U^{\perp})^{\perp} = Cl(U)$*).*

Доказательство. $U \perp U^{\perp} \Rightarrow U \le (U^{\perp})^{\perp}$.

С другой стороны, $U \bigoplus U^{\perp} = U^{\perp} \bigoplus (U^{\perp})^{\perp} = (U^{\perp})^{\perp} \bigoplus U^{\perp} = V \Rightarrow \dim U = \dim V - \dim U^{\perp} = \dim (U^{\perp})^{\perp}$. □

Определение. $U \le V \ni v$. По теореме $\exists! u_1, u_2$, такие, что $v = u_1 + u_2,\ u_1 \in U,\ u_2 \in U^{\perp}$. Тогда $u_1 = \operatorname{pr}_U v$ — ортогональная проекция v на U.

$\operatorname{pr}_u v := \operatorname{pr}_{<u>} v$.

Факт. $\operatorname{pr}_u v = \frac{(v,u)}{(u,u)} u$.

Доказательство.

$$\left(v - \frac{(v,u)}{(u,u)} u, u\right) = (v,u) - \frac{(v,u)}{(u,u)}(u,u) = 0$$

То есть $v - \frac{(v,u)}{(u,u)} u \in < u >^{\perp}$. □

$U \le V,\ f = (f_1, ..., f_k)$ — ортогональный базис U.

Предложение. $\operatorname{pr}_U v = \sum_{i=1}^{k} \operatorname{pr}_{f_i} v$, $\operatorname{pr}_{f_i} v = \sum_{i=1}^{k} \frac{(v,f_i)}{(f_i,f_i)} f_i$

$$(\operatorname{pr}_U v)_f = \begin{pmatrix} \frac{(v,f_1)}{(f_1,f_1)} \\ . \\ . \\ . \\ \frac{(v,f_n)}{(f_n,f_n)} \end{pmatrix}$$

Доказательство. $\sum_{i=1}^{k} \frac{(v,f_i)}{(f_i,f_i)} f_i \in U$. Осталось доказать, что $v - \sum_{i=1}^{k} \frac{(v,f_i)}{(f_i,f_i)} f_i \perp U \Leftrightarrow v - \sum_{i=1}^{k} \frac{(v,f_i)}{(f_i,f_i)} f_i \perp f_j\ \forall j$. Отсюда

$$\left(v - \sum_{i=1}^{k} \frac{(v,f_i)}{(f_i,f_i)} f_i, f_j\right) = (v, f_j) - \frac{(v,f_j)}{(f_j,f_j)}(f_j,f_j) = 0$$

так как $f_i \perp f_j$ при $i \ne j$. □

Теорема. *(Равенство Парсеваля и неравенство Бесселя)*

$(f_1, ..., f_k)$ *– ортогональный набор векторов, то* $||\operatorname{pr}_{<f>} v||^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{|(v,f_i)|}{(f_i,f_i)} \le ||v||^2$.

Если же $< f >= V$, *то* $\operatorname{pr}_{<f>} v = v$.

Доказательство. $\operatorname{pr}_{<f>} v = \sum_{i=1}^{k} f_i \alpha_i$. $||\operatorname{pr}_{<f>} v||^2 = (\sum_{i=1}^{k} f_i \alpha_i, \sum_{j=1}^{k} f_i \alpha_j) = \sum_{i,j=1}^{k} \overline{\alpha_i}(f_i, f_j)\alpha_j = \sum_{i=1}^{k} \overline{\alpha_i}(f_i,f_i)\alpha_i = \sum_{i=1}^{k} |\alpha_i|^2 (f_i, f_i)$, подставим $\alpha_i = \frac{(v,v_i)}{(f_i,f_i)}$.

$v = \operatorname{pr}_U v + (v - \operatorname{pr}_U v)$, откуда $||v||^2 = (u_1 + u_2, u_1 + u_2) = (u_1, u_1) + (u_2, u_2) = ||u_1||^2 + ||u_2||^2 \ge ||u_1||^2$. □

Предложение. $U \le V$, $b \in V$.

$||b - \operatorname{pr}_U b|| \le ||b - u||\ \forall u \in U$.

Доказательство. $b - u = (b - p) + (p - u)$, где $p = \mathrm{pr}_U\, b$.

$||b-u||^2 = ||b-p||^2 + ||p-u||^2 \geq ||b-p||^2$

$(x = y + z,\ y \perp z \Rightarrow ||x||^2 = (y+z, y+z) = (y,y) + \underbrace{(y,z)}_{0} + \underbrace{(z,y)}_{0} + (z,z))$. □

Проблема. $Ax = b$. Найти $x^* :\ ||Ax^* - b|| < ||Ax - b||\ \forall x$ (минимизируем норму относительно стандартного скалярного произведения, то есть сумму квадратов координат, откуда название метода: «Метод наименьших квадратов»):

$\{Ax \mid x \in \mathbb{R}^n\} =< a_{*1}, ..., a_{*m} >= U$.

$Ax^* = \mathrm{pr}_U\, b$.

Метод состоит в ортогонализации базиса U, затем воспользоваться формулой и решить систему.

Упражнение на бб: 1) Доказать, что $A^T A \in GL_n(\mathbb{R})$ (верно ли это $\forall$ поля F вместо $\mathbb{R}$?) 2) Доказать, что $x^* = (A^T A)^{-1} A^T b$

Классификация вещественных квадратичных форм.

$C^T Q_f C$.

Если F — крадратично замкнуто ($\exists \sqrt{x}\ \forall x \in F$), то

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} & & & \\ & . & 0 & \\ & & . & \\ & 0 & & . \\ & & & & \frac{1}{\lambda_n} \end{pmatrix}}_{C^T} \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & . & 0 & \\ & & . & \\ & 0 & & . \\ & & & & \lambda_n \end{pmatrix}}_{Q} C = E$$

Определение. $\mathrm{sign}(\lambda_1, ..., \lambda_m) = (p, n)$, где p — количество положительных λ_i, q — количество отрицательных.

$$\mathrm{sign} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & . & 0 & \\ & & . & \\ & 0 & & . \\ & & & & \lambda_n \end{pmatrix} = \mathrm{sign}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$$

Теорема. *(закон инерции квадратичных форм)*

Q — квадратичная форма на вещественном конечном пространстве V, f, g — базисы V: Q_f, Q_g — диагональны. Тогда $\mathrm{sign}\, Q_f = \mathrm{sign}\, Q_g$.

Доказательство. $\mathrm{sign}\, Q_f = (p_f, n_f)$, $\mathrm{sign}\, Q_g = (p_g, n_g)$.

Предположим, что $p_f > p_g$. Считаем, что базисные вектора занумерованы так, что первые $p_f(p_g)$ диагональных элементов матриц положительны. Рассмотрим подпространство $U =< f_1, ..., f_{p_f} >$, $W =< g_{p_g}, ..., g_m >$, где $m = \dim V$.

$\forall u \in U \backslash \{0\}\ Q(u) > 0$, так как $u = \sum_{i=1}^{p_f} f_i \alpha_i$, $Q_u = B(u,u) = B(\sum_{i=1}^{p_f} f_i \alpha_i, \sum_{j=1}^{p_f} f_j \alpha_j) = \sum_{i,j=1}^{p_f} \alpha_i \alpha_j \underbrace{B(f_i, f_j)}_{=0\ i \neq j} = \sum_{i=1}^{p_f} \alpha_i^2 Q(f_i) > 0$ при $i \neq j$.

Аналогично на W наша форма будет отрицательна.

$\dim(U \cap W) = -\dim(U+W) + \dim(U) + \dim W \geq p_f + n_g - m = p_f + (m - p_g) - m = p_f - p_g > 0.$

Противоречие. Аналогично невозможно обратное предположение. Следовательно, $\exists x \in U \cap W \backslash \{0\}$. Тогда $Q(x) > 0$ и $Q(x) < 0$ $\square$

—Еще одна лекция

Пусть существует эрмитово (конечное на $\mathbb{C}$ с унитарным скалярным произведением) пространство и $L : V \to V,\ L^* : V^* \to V^*$. L — нормальный, если $LL^* = L^*L$ (в частности, сопряженные и унитарные нормальны).

Теорема. *(доказательство ниже) Для любого нормального оператора существует ортонормированный базис, в котором матрица диагональна. Очевидно, что верно и обратное.*

Лемма. *(1) Если $A, B : V \to V$ перестановочны (то есть коммутируют, то есть $AB = BA$), то любое собственное подпространство A инвариантно относительно B.*

Доказательство. Докажем, что $V_\lambda = \ker(A - \lambda I) \Rightarrow B(V_\lambda) \leq V_\lambda$.

Возьмем $x \in V_\lambda,\ A \cdot B_x = B(A(x)) = B(\lambda x) = \lambda B(x) \Rightarrow B(x) \in V_\lambda$. $\square$

Лемма. *(2) Если $L(U) \subseteq U$, то $L^*(U^\perp) \subseteq U^\perp$.*

Доказательство. $v \in U^\perp,\ u \in U.\ (L^*(v), u) = (\underbrace{v}_{\in U^\perp}, \underbrace{L(u)}_{U}) = 0 \Rightarrow L^*(v) \perp u\ \forall u \in U \Rightarrow L^*(v) \in U^\perp.$ $\square$

Следствие из обоих лемм:

Если L — нормальный с собственным подпространством V_λ, то $V_\lambda^\perp$ — L-инвариантное пространство.

Доказательство. $LL^* = L^*L$. По лемме 1 V_λ — L^*-инвариантно, следовательно, по лемме 2, $V_\lambda^\perp$ инвариантно относительно L^{**}, то есть, инвариантно относительно L. $\square$

—

Доказательство. (теоремы выше): Индукция по размерности пространства $n = \dim V$.

L диагональна $\Leftrightarrow u$ — базис из собственных векторов.

При $n = 1$ очевидно.

Индукционный переход: $\deg \chi_L(t) = n > 0 \Rightarrow \exists \lambda : \chi_L(\lambda) = 0$.

$V_\lambda \neq 0$ — собственное подпространство L.

По следствию $V_\lambda^\perp$ — L-инвариантно.

$$V = V_\lambda \bigoplus V_\lambda^\perp \Rightarrow \dim(V_n^\perp) < n$$

Очевидно, что $L|_{V_\lambda^\perp}$ тоже нормальный оператор, следовательно, по индукционному переходу существует ортонормированный базис f пространства $V_\lambda^\perp$ из собственных векторов L. Выберем ортонормированный базис для пространства V_λ (он существует ввиду ортогонализации Грама-Шмидта) из собственных векторов L.

Таким образом, $g \cup f$ — базис V из собственных векторов L, очевидно, ортонормированный. $\square$