

Дисклеймер.

Автор не несет ответственности за любой ущерб, причиненный Вам при использовании данного документа. Автор напоминает, что данный документ может содержать ошибки и опечатки, недостоверную и/или непроверенную информацию. Если Вы желаете помочь в развитии проекта или сообщить об ошибке/опечатке/неточности:

[GitHub проекта](#)

[Автор в ВК](#)

# Содержание

<b>I</b>	<b>Случайные события</b>	<b>4</b>
<b>1</b>	<b>Элементарная теория вероятности</b>	<b>4</b>
1.1	Основные понятия. Испытание (опыт, эксперимент), событие . . . . .	4
1.2	Вероятность . . . . .	5
1.2.1	Классическая формула вычисления вероятности . . . . .	5
1.2.2	Статистическое определение вероятности . . . . .	5
1.2.3	Геометрическое определение вероятности . . . . .	5
1.3	Операции над событиями . . . . .	5
1.4	Основные теоремы теории вероятностей . . . . .	6
1.4.1	Независимость событий . . . . .	6
1.5	Основные формулы комбинаторики . . . . .	7
1.5.1	Перестановки . . . . .	7
1.5.2	Правила комбинаторики . . . . .	7
1.6	Выборки . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Аксиоматика А.М. Колмогорова</b>	<b>8</b>
2.1	Аксиоматическое определение вероятности . . . . .	8
2.2	Формула полной вероятности . . . . .	8
2.3	Формула Байеса . . . . .	9
2.4	Схема Бернулли . . . . .	9
2.5	Формула Пуассона . . . . .	9
2.6	Простейший поток событий . . . . .	9
<b>II</b>	<b>Случайные величины</b>	<b>10</b>
<b>3</b>	<b>Дискретные величины</b>	<b>10</b>
3.1	Случайная величина . . . . .	10
3.2	Дискретные случайные величины . . . . .	10
3.3	Основные распределения дискретных случайных величин . . . . .	10
3.4	Числовые характеристики дискретных случайных величин . . . . .	10
3.5	Моменты порядка $k$ . . . . .	11
3.6	Числовые характеристики для основных распределений дискретной случайной величины . . . . .	11
<b>4</b>	<b>pass</b>	<b>11</b>
4.1	Функция распределения случайной величины . . . . .	11
4.2	Числовые характеристики абсолютно непрерывных случайных величин . . .	12
4.3	Основные распределения непрерывных случайных величин . . . . .	12
4.3.1	Равномерное . . . . .	12
4.3.2	Экспоненциальное . . . . .	12
4.3.3	Гауссово или нормальное . . . . .	12
4.4	Что-то непонятное . . . . .	13
4.4.1	Неравенство Чебышева . . . . .	13
4.4.2	Закон больших чисел в форме Чебышева . . . . .	13

4.4.3	Закон больших чисел в форме Бернулли . . . . .	13
4.5	Комплексные случайные величины. Характеристические функции . . . . .	13

## Часть I

# Случайные события

## 1 Элементарная теория вероятности

### 1.1 Основные понятия. Испытание (опыт, эксперимент), событие

**Определение 1.1.** Теория вероятности — наука, изучающая закономерности случайных явлений.

**Определение 1.2.** Опыт, испытание, эксперимент — некоторая воспроизводимая совокупность условий, в рамках которых может произойти то или иное явление, тот или иной факт.

**Пример 1.1.**

- 1) Подбрасывание одной монеты;
- 2) Двух;
- 3) Выстрел по мишени;
- 4) Подбрасывание игрального кубика-кости (да, берцовой);
- 5) Рождение ребенка и тому подобное.

**Определение 1.3.** Событие — любой факт, который может произойти либо не произойти в результате испытания. Обычно обозначаются заглавными латинскими буквами:  $A, B$ .

**Пример 1.2.**

- 1) Событие  $A$  — выпадение герба.  $\Omega = \{Г, Р\}$  ;
- 2) Выпали все решки;
- 3) Попали по мишени;
- 4.1) Выпало шесть точек;
- 4.2) Выпало четное число точек;
- 5) Родился мальчик.

Событие 4.2 является *составным*.

**Определение 1.4.** Элементарное событие (или исход) — событие, которое не может являться объединением более мелких событий. Неопределяемое понятие.

*Замечание 1.1.*  $\omega_i$  — обозначение элементарного исхода.

$\Omega = \{\omega_i\}$  — пространство элементарных исходов.

**Определение 1.5.** Случайное событие  $A \subseteq \Omega$ . Лежит между  $\emptyset$  и  $\Omega$ .

**Определение 1.6.** Событие, которое обязательно произойдет, называется достоверным. Так как оно состоит из всех элементов пространства элементарных исходов, оно обозначается  $\Omega$ .

**Определение 1.7.** Событие, которое никогда не произойдет в результате испытаний, называется невозможным. Оно обозначается  $\emptyset$ .

**Определение 1.8.** Вероятность события  $A$  — число, характеризующее степень возможности этого события. Обозначается  $p(A)$ . Данное определение не является классическим.

Вероятность невозможного события  $p(\emptyset) = 0$

Вероятность достоверного события  $p(\Omega) = 1$ .

Таким образом,  $0 \leq p(A) \leq 1$ .

## 1.2 Вероятность

### 1.2.1 Классическая формула вычисления вероятности

Пусть относительно  $\Omega$  выполнены условия:

1)  $|\Omega| = n$ .

2) «Равные шансы»: все элементарные исходы равновозможны.

Тогда

$$p(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

где  $|A|$  — мощность множества элементарных исходов, составляющих множество благоприятных исходов.

### 1.2.2 Статистическое определение вероятности

Если не выполнено второе условие, то формула приобретает вид:

$$p(A) = \frac{m_A}{n}$$

где  $m_A$  — число появлений события  $A$ , а  $n$  — число экспериментов.

### 1.2.3 Геометрическое определение вероятности

Выполнено второе условие, но не выполнено первое (конечность множества). В этом случае формула приобретет вид:

$$p(A) = \frac{l}{L}$$

где  $l$  — площадь ( $n$ -мерная) области, удовлетворяющей условию,  $L$  — площадь всей области.

## 1.3 Операции над событиями

Теория множеств	Теория вероятности
$\Omega$ — универсальное множество	пространство элем. исходов
$A \subset \Omega$	случайное событие
$\emptyset$ — пустое множество	невозможное событие
$\bar{A} = \Omega \setminus A$ — дополнение	противоположное событие
$A \cap B$	$A \cdot B$ произведение событий
$A \cup B$	$A + B$ сумма событий

**Определение 1.9.** Суммой событий  $A + B$  называется событие  $D$ , которое состоит в выполнении хотя бы одного события  $A$  и  $B$ .

**Определение 1.10.**  $\{A_1, \dots, A_n\}$  — полная группа событий, если  $A_i \cap A_j = \emptyset \forall i \neq j$  и  $\sum_{i=1}^n A_i = \Omega$ .

**Определение 1.11.** События  $A$  и  $B$  называются несовместными, если появление одного из них исключает появление другого. Не путать с независимостью!

*Замечание 1.2.*  $A \subset B$  — появление события  $A$  влечет появление события  $B$ .

## 1.4 Основные теоремы теории вероятностей

**Теорема 1.1.** Пусть  $A, B$  — несовместные события, то есть  $(A \cdot B = \emptyset)$ . Тогда  $p(A + B) = p(A) + p(B)$ .

**Вывод 1.1.**  $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$ .

**Теорема 1.2.** (о сложении)

$$p(A + B) = p(A) + p(B) - p(A \cdot B).$$

**Определение 1.12.**  $p(A/B) = p_B(A)$  (читается «пэ от  $A$  при условии  $B$ ») вводится как

$$\frac{p(A \cdot B)}{p(B)}$$

— условная вероятность события  $A$  при условии, что событие  $B$  произошло.

**Теорема 1.3.** (умножения)

Вероятность того, что произошло событие  $A$  и событие  $B$  равна  $p(A \cdot B) = p(A) \cdot p(B) = p(B) \cdot p(A/B)$ .

**Вывод 1.2.**  $p(A \cdot B \cdot C) = p(A) \cdot p(B/A) \cdot p(C/A \cdot B)$  и аналогично для большего числа событий.

### 1.4.1 Независимость событий

**Определение 1.13.**  $A$  и  $B$  независимы, если  $p(A \cdot B) = p(A) \cdot p(B)$ .

**Определение 1.14.**  $A_1, \dots, A_n$  независимы в совокупности, если  $\forall A_{i_1}, \dots, A_{i_k}$  выполнено  $p(A_{i_1}, \dots, A_{i_k}) = \prod_{l=1}^k p(A_{i_l})$

**Определение 1.15.**  $A_1, \dots, A_n$  попарно независимы, если  $\forall A_i, A_j$  верно  $p(A_i \cdot A_j) = p(A_i) \cdot p(A_j) \forall i \neq j$ . Очевидно, что из независимости в совокупности следует попарная независимость.

**Пример 1.3.** (Контрпример. Пирамида Бернштейна)

Кидаем тетраэдр, грани которого раскрашены в красный, зеленый и синий цвета, а основание — во все три. Мы ее бросаем и смотрим, какой цвет выпал. Пусть  $A$  — выпадение красного,  $B$  — синего и  $C$  — зеленого цвета. Тогда  $p(A \cdot B) = 1/4 = p(A) \cdot p(B) = 2/4 \cdot 2/4$ . Аналогично для других цветов. То есть эти события попарно независимы. Но  $p(A \cdot B \cdot C) = 1/4 = p(A)p(B)p(C) = 1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/2 \Rightarrow$  нет независимости в совокупности.

## 1.5 Основные формулы комбинаторики

### 1.5.1 Перестановки

**Определение 1.16.** Перестановки — комбинации из  $n$  элементов, отличающихся порядком их расположения.

Множество всех перестановок множества из  $n$  элементов равно  $n!$ .  $P_n = n!$ .

**Определение 1.17.** Размещения — комбинации из  $n$  элементов по  $m$  элементов, отличающихся либо порядком, либо составом элементов.

Число всевозможных размещений  $A_n^m = n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot (n - m + 1)$ .

**Определение 1.18.** Сочетания — комбинации из  $n$  элементов по  $m$  элементов, отличающихся только составом элементов.

Число всевозможных сочетаний  $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ .

Запомним:  $C_n^{n-m} = C_n^m$ ,  $C_n^0 = 1$ .

### 1.5.2 Правила комбинаторики

**Определение 1.19.** Правило произведения:  $(a_1, \dots, a_n)$  и  $(b_1, \dots, b_m)$ . Тогда выбрать пару  $(a_i, b_j)$  можно  $n \cdot m$  способами.

**Определение 1.20.** Правило суммы:  $(a_1, \dots, a_n)$  и  $(b_1, \dots, b_m)$ . Тогда выбрать либо  $a_i$ , либо  $b_j$  можно  $m + n$  способами.

## 1.6 Выборки

**Определение 1.21.**  $(a_1, \dots, a_n)$  — некоторая генеральная совокупность однородных объектов. Вынем из них  $\langle a_{i_1}, \dots, a_{i_m} \rangle$  — выборка объема  $m$ . Выборка может быть с возвращением и без возвращения элементов в генеральную совокупность, а так же упорядоченная или неупорядоченная.

- 1) Упорядоченная выборка с возвращением:  $\langle a_{i_1}, \dots, a_{i_n} \rangle$ , тогда  $|\Omega| = n^m$ .
- 2) Упорядоченная выборка без возвращения:  $[a_{i_1}, \dots, a_{i_n}]$ , тогда  $|\Omega| = A_n^m$ .
- 3) Неупорядоченная выборка без возвращения:  $[a_{i_1}, \dots, a_{i_n}]$ , при этом порядок не важен, важен состав  $|\Omega| = C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ .
- 4) Неупорядоченная выборка с возвращением,  $|\Omega| = C_{n+m-1}^m$ .

$M$  состояний частицы есть фактически  $M$  ящиков, в которые мы кладем  $n$  частиц. Частицы могут быть различимыми, а могут быть неразличимыми.

Запрет Паули говорит о том, что в коробке может находиться одна или ноль частиц.

1) Частицы различимы, запрета Паули нет. Тогда это состояние эквивалентно упорядоченной выборке с возвращением.

2) Частицы неразличимы, есть запрет Паули. Тогда это состояние эквивалентно неупорядоченной выборке без возвращения.

3) Частицы неразличимы, нет запрета Паули. Тогда это состояние эквивалентно неупорядоченной выборке с возвращением.

4) Частицы различимы, запрет Паули существует. Тогда это состояние эквивалентно упорядоченной выборке без возвращения.

## 2 Аксиоматика А.М. Колмогорова

### 2.1 Аксиоматическое определение вероятности

**Определение 2.1.**  $\mathbb{A} \in 2^\Omega$ , где  $\Omega$  — пространство элементарных исходов, называется алгеброй, если:

- 1)  $\Omega \in \mathbb{A}$
- 2)  $\forall A, B \in \mathbb{A}, \begin{cases} A \cup B \in \mathbb{A} \\ A \cap B \in \mathbb{A} \end{cases}$
- 3)  $\forall A \in \mathbb{A}$  выполняется  $\bar{A} \in \mathbb{A}$ .

**Пример 2.1.**  $\mathbb{A}_1 = \{\emptyset, \Omega\}$

**Определение 2.2.** Числовая функция  $\mu(A)$  называется конечной аддитивной мерой на  $\mathbb{A}$ , если:

- 1)  $\mu(A) \geq 0 \forall A \in \mathbb{A}$ .
- 2)  $\forall A, B \in \mathbb{A} : A \cap B = \emptyset$  выполняется  $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ .

**Определение 2.3.** Если  $\mu(A) = 1$ , то ее говорят, что это конечная аддитивная вероятностная мера. Она обозначается  $p(A) = \mu(A)$ .

Она обладает следующими свойствами:

- 1)  $p(A) \geq 0$
- 2)  $p(\Omega) = 1$
- 3)  $\forall A, B \in \mathbb{A} : A \cap B = \emptyset$  выполняется  $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$ .

**Определение 2.4.** Система подмножеств  $\mathbb{F}$  называется сигма-алгеброй, если:

- 1) Она является алгеброй
- 2) Она замкнута относительно счетного объединения/пересечения событий.

**Определение 2.5.** Счетно-аддитивная вероятностная мера  $p(A)$  заданная  $\forall A \in \mathbb{F}$  называется вероятностью, то есть:

- 1)  $\forall A \in \Omega \ p(A) \geq 0$
- 2)  $p(\Omega) = 1$
- 3)  $\forall A_1, \dots, A_n \in \mathbb{F}, A_i \cap A_j = \emptyset \forall i \neq j$  выполняется  $p(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} p(A_n)$

**Определение 2.6.**  $(\Omega, \mathbb{F}, p)$  — вероятностное пространство.

**Определение 2.7.**  $(\Omega, \mathbb{F})$  — измерительное пространство.

### 2.2 Формула полной вероятности

Пусть у нас есть событие  $A$  и оно может произойти одновременно с одним и только одним из событий  $H_1, \dots, H_n$ , таких, что:

- 1)  $H_i \cdot H_j = \emptyset \forall i \neq j$ ;
- 2)  $H_1 + \dots + H_n = \Omega$ ;

И нам нужно найти вероятность события  $A$ .

$$\begin{aligned} p(A) &= p(A \cdot \Omega) = p(A \cdot (H_1 + \dots + H_n)) = p\left(\sum_{i=1}^n A \cdot H_i\right) = \\ &= \sum_{i=1}^n p(A \cdot H_i) = \sum_{i=1}^n p(H_i) \cdot p(A/H_i) \end{aligned}$$



## 2.3 Формула Байеса

$$p(H_i/A) = \frac{p(H_i \cdot A)}{p(A)} = \frac{p(H_i) \cdot p(A/H_i)}{\sum_{i=1}^n p(H_i) \cdot p(A/H_i)}$$

$p(H_i/A)$  — апостериорная вероятность.

## 2.4 Схема Бернулли

**Определение 2.8.** Схема Бернулли — последовательность из  $n$  независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события  $A$  одинакова и равна  $p$ .

Если событие  $A$  произошло, то говорят об успехе, иначе — о неудаче.

**Определение 2.9.** Сама формула Бернулли имеет вид

$$p_n(K) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

где  $q = 1 - p$ .

## 2.5 Формула Пуассона

Пусть  $np = \lambda$ , тогда

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} p_n(k) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)\dots(n-k)\lambda^k}{n \cdot n \cdot \dots \cdot n \cdot k!} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} = \\ &= \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n \rightarrow \infty} 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \end{aligned}$$

Отсюда выводится сама формула:

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

## 2.6 Простейший поток событий

**Определение 2.10.** Поток событий называется последовательность событий, которые наступают в случайный момент времени.

**Определение 2.11.** Поток называется простейшим/пуассоновским, если выполнены свойства:

- 1) Стационарность: вероятность появления  $k$  событий длины  $t$   $P_t(k)$  зависит только от  $t$  и  $k$  и не зависит начала.
- 2) Отсутствие последействия: вероятность появления  $k$  событий длины  $t$   $P_t(k)$  не зависит от предыстории процесса.
- 3) Ординарность:  $\forall$  сколь угодно малого  $\Delta t$  вероятность наступления двух событий стремится к нулю.

**Теорема 2.1.** Если поток пуассоновского типа, то вероятность  $P_t(k)$  можно вычислить по формуле

$$P_t(k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

где  $\lambda$  — интенсивность потока, то есть количество наступлений событий за единицу времени.

## Часть II

# Случайные величины

## 3 Дискретные величины

### 3.1 Случайная величина

**Определение 3.1.**  $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^1$ . Функция называется измеримой, если прообраз баррельского множества изменим.

**Определение 3.2.** Неформальное определение: числовая функция, которая в результате испытания примет одно и только одно значение, неизвестное заранее.

Случайные величины делятся на 3 типа:

- 1) Дискретные
- 2) Непрерывные
- 3) Сингулярные

**Определение 3.3.** Случайная величина является дискретной, если ее возможное значение конечно или счетно.

### 3.2 Дискретные случайные величины

**Определение 3.4.** Законом распределения ДСВ  $x$  называется перечень всех ее возможных значений  $x_i$  и соответствующих им вероятностей  $p_i$ .

Записи:

$x$	$x_1$	$x_2$	$\dots$	$x_n$
$p$	$p_1$	$p_2$	$\dots$	$p_n$

События попарно несовместны, и сумма всех вероятностей равна единице.

Либо в виде многоугольника распределения.

### 3.3 Основные распределения дискретных случайных величин

1) Биномиальное. Если  $S_n$  — число успехов в схеме Бернулли, то случайная величина будет принимать целочисленные значения от 0 до  $n$ .  $p_k\{S_n = k\} = C_n^k p^k q^{n-k}$ .

2) Распределение Пуассона.

3) Геометрическое распределение.

4) Гипергеометрическое распределение.

### 3.4 Числовые характеристики дискретных случайных величин

**Определение 3.5.** Математическое ожидание случайной величины  $X$  есть среднее значение случайной величины  $X$ :

$$M(X) = \sum_i x_i p_i$$

Свойства:

- 1)  $M(c) = c$ ;
- 2)  $M(c \cdot X) = c \cdot M(X)$ ;

- 3)  $M(X + Y) = M(X) + M(Y)$ ;  
 4)  $M(XY) = M(X) \cdot M(Y)$ , если  $X, Y$  — независимы.

**Пример 3.1.** (Санкт-Петербургский парадокс — пример не существования матожидания)

Игрок играет против казино. Подбрасывают монетку. Если выпадает герб на  $i$  броске, то игрок получает  $2^i$  доллара. Посчитаем матожидание выигрыша:  $M(Y) = \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{4} \cdot 4 + \dots$ . Этот ряд расходится, следовательно, матожидания выигрыша не существует.

**Определение 3.6.** Дисперсия случайной величины  $X$ :

$$D(x) = M(X - M(X))^2$$

или, что тоже самое,

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2$$

### 3.5 Моменты порядка $k$

**Определение 3.7.** Начальный момент порядка  $k$ :  $\mu_k = M(X^k)$

**Определение 3.8.** Центральные моменты порядка  $k$ :  $\nu_k = M(X - M(X))^k$

### 3.6 Числовые характеристики для основных распределений дискретной случайной величины

- 1) Биномиальное:  $S_n$  — число успехов:

$$p_k = p\{S_n = k\} = C_n^k p^k q^{n-k}$$

## 4 pass

### 4.1 Функция распределения случайной величины

**Определение 4.1.** Функция распределения задается как

$$F(x) = p\{X < x\}$$

либо

$$F(x) = p\{X \leq x\}$$

Свойства функции распределения:

- 1) Принимает значение от 0 до 1, как вероятность;
- 2)  $F(x)$  является неубывающей функцией;
- 3)  $p\{x_1 \leq X \leq x_2\} = F(x_2) - F(x_1)$ ;
- 4)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ ;
- 5) Непрерывна слева.

**Определение 4.2.** Случайная величина называется абсолютно непрерывной, если  $\exists f(x) \geq 0$ , такая, что

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

при этом  $f(x)$  называется плотностью распределения.

$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$  — интегральный закон;  
 $f(x) = F'(x)$  — дифференциальный закон.

Свойства:

- 1)  $f(x) \geq 0$
- 2)  $p\{x_1 \leq X \leq x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} f(t)dt.$
- 3) Условие нормировки:  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$

## 4.2 Числовые характеристики абсолютно непрерывных случайных величин

Матожидание:  $M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx;$

Дисперсия:  $D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(X))^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - (M(x))^2.$

$\mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)dx, \nu_k = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(X))^k \cdot f(x)dx$

## 4.3 Основные распределения непрерывных случайных величин

### 4.3.1 Равномерное

$X \sim R(a, b)$  — равномерное распределение на промежутке  $(a, b).$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{1}{b-a} & x \in [a, b) \\ 0 & x \geq b \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & x \in [a, b) \\ 1 & x \geq b \end{cases}$$

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx = \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx = \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{b-a} \Big|_a^b = \frac{b^2-a^2}{2} \cdot \frac{1}{b-a} = \frac{a+b}{2}.$$

$$D(X) = \dots = \frac{(b-a)^2}{12} \text{ (убедиться в этом).}$$

### 4.3.2 Экспоненциальное

**Определение 4.3.** Случайная величина имеет экспоненциальное распределение, если

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \lambda e^{-\lambda t} & t \geq 0 \end{cases}$$

$$F(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 - e^{-\lambda t} & t \geq 0 \end{cases}$$

$$M(T) = \int_0^{\infty} t \cdot \lambda e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}.$$

### 4.3.3 Гауссово или нормальное

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

Стандартное нормальное распределение при  $a = 0, \sigma = 1.$

## 4.4 Что-то непонятное

$$(\Omega, F, P), \xi(\omega) \geq \eta(\omega), M\xi \geq M\eta.$$
$$\Delta(\omega) = \xi(\omega) - \eta(\omega).$$

**Лемма 4.1.** Пусть  $\xi \geq 0 \forall \varepsilon > 0$ . Тогда  $p\{\xi > \varepsilon\} \leq \frac{M\xi}{\varepsilon}$ .

### 4.4.1 Неравенство Чебышева

$$p\{|\xi - M\xi| \geq \varepsilon\} \leq \frac{D\xi}{\varepsilon^2}.$$

$$p\{|\xi - M\xi| \geq \varepsilon\} = p\left\{\underbrace{(\xi - M\xi)^2}_{\eta} \geq \varepsilon^2\right\}$$
$$p\{(\xi - M\xi)^2 \geq \varepsilon^2\} \leq \frac{M[(\xi - M\xi)^2]}{\varepsilon^2} = \frac{D\xi}{\varepsilon^2}$$

### 4.4.2 Закон больших чисел в форме Чебышева

Пусть есть последовательность попарно независимых случайных величин  $x_1, \dots, x_n$  и эти числа имеют равномерно ограниченную дисперсию:  $(\exists C : \forall i D x_i \leq C)$ .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p\left(\left|\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} - \frac{M(x_1) + \dots + M(x_n)}{n}\right| \leq \varepsilon\right) = 1$$

$$p\{|\xi - M\xi| \geq \varepsilon\} \leq \frac{D\xi}{\varepsilon^2}$$

$$p\{|\overline{x_n} - M[\overline{x_n}]| < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{D\overline{x_n}}{\varepsilon^2}$$

### 4.4.3 Закон больших чисел в форме Бернулли

$n, S$  — число успехов в первых  $n$  испытаниях.  $\forall \varepsilon > 0$ .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1$$

//дописать лекцию

## 4.5 Комплексные случайные величины. Характеристические функции

//написать еще одну лекцию