Дисклеймер.

Автор не несет ответственности за любой ущерб, причиненный Вам при использовании данного документа. Автор напоминает, что данный документ может содержать ошибки и опечатки, недостоверную и/или непроверенную информацию. Если Вы желаете помочь в развитии проекта или сообщить об ошибке/опечатке/неточности:

GitHub проекта

Автор в ВК

Содержание

Алексей Сергеевич Еремин

1 Погрешности

1.1 Погрешности приближенных вычислений

1) Погрешность начальных данных (задачи, измерений).
2) Методическая погрешность.
3) Вычислительная погрешность.

Определение 1.1. Если a — приближенное значение, A — точное, тогда $\Delta a = |A - a|$ — абсолютная погрешность.

Определение 1.2. $\delta a = \frac{\Delta a}{|a|}$ — относительная погрешность. Она показывает, сколько верных знаков в записи числа.

Рассмотрим, как погрешности ведут себя при вычислениях.

1.1.1 Погрешности арифметических действий

$x_1 \pm \Delta x_1$ и $x_2 \pm \Delta x_2$ — неточные числа.
Тогда:
1) $(x_1 + x_2) + \Delta(x_1 + x_2) = x_1 + \Delta x_1 + x_2 + \Delta x_2 \Rightarrow \Delta_+ = x_1 + x_2$.
Таким образом, $|\Delta_\pm| \leq |\Delta x_1| \pm |\Delta x_2|$.
Отсюда абсолютная: $\frac{\Delta(x_1+x_2)}{x_1+x_2} = \frac{\Delta x_1}{x_1+x_2} + \frac{\Delta x_2}{x_1+x_2} \leq \delta x_1 + \delta x_2$.
Если $x_1, x_2 > 0$, то $\delta_+ \leq \max \delta x_i$.
А вот для вычитания $\frac{\Delta(x_1-x_2)}{(x_1-x_2)}$ и возникает большая проблема для относительной погрешности.
2) $(x_1 x_2) + \Delta(x_1 x_2) = x_1 x_2 + x_1 \Delta x_2 + x_2 \Delta x_1 + \Delta x_1 \Delta x_2 \Rightarrow \Delta_+ \approx x_1 \Delta x_2 + x_2 \Delta x_1$.
Отсюда абсолютная: $\frac{\Delta(x_1,x_2)}{x_1 x_2} \approx \frac{\Delta x_2}{x_2} + \frac{\Delta x_1}{x_1} \Rightarrow |\delta| \leq |\delta x_1| + |\delta x_2|$.
Пусть $f(\overline{x_1}, ..., \overline{x_n})$, где $\overline{x_1} = x_1 + \Delta x_1, ..., \overline{x_n} = x_n + \Delta x_n$.
Посчитаем

$$\Delta f = f(x_1, ..., x_n) - f(\overline{x_1}, ..., \overline{x_n}) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, ..., x_n)\Delta x_1 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, ..., x_n)\Delta x_n\right] + o\left((\Delta x)^2\right)$$

откуда абсолютная погрешность:

$$|\Delta f| \leq \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right| |\Delta x_i|$$

Рассмотрим относительную:

$$\frac{\Delta f}{f} = \delta f = \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{1}{f}\right| |\Delta x_i| = \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial \ln f}{\partial x_i} \Delta x_i\right|$$

где $\frac{\partial \ln f}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{f \partial x_i}$.
Отсюда $\ln(x_1 \cdot ... \cdot x_n) = \ln x_1 + ... + \ln x_n \Rightarrow \frac{\partial \ln(x_1 ... x_n)}{\partial x_i} = \frac{1}{x_i}$.
То есть для деления $|\delta_\div| \leq |\delta x_1| + |\delta x_2|$.

1.1.2 Обратная задача погрешности

Проблема. По требуемой на Δf (δf) найти допустимые Δx (δx).

Пример 1.1.

1) Принцип равных влияний: считаем, что вклад всех слагаемых в погрешность одинаков:

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right| \cdot \Delta x_1 = \left|\frac{\partial f}{\partial x_2}\right| \cdot \Delta x_2 = ... = \mathrm{const}$$

Откуда

$$\Delta x_i \leq \frac{|\Delta f|}{n\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|}$$

2) Принцип равных погрешностей: требуем одинаковых Δx_i:

$$\Delta x_1 = \Delta x_2 = ... = \mathrm{const} = \Delta x$$

Откуда

$$|\Delta x| \leq \frac{|\Delta f|}{\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|}$$

1.1.3 Статистический подход

$\Delta S_n \div \sqrt{n}$, где S_n — сумма n слагаемых $(n > 10)$.
Тогда $\Delta S_n \approx \sqrt{3n} \cdot 0.5 \cdot 10^{-m}$ если $\Delta x_i \leq 0.5 \cdot 10^{-m}$.
Таким образом, при статистическом подходе погрешность $\frac{\Delta S_n}{n} \to 0$ $n \to \infty$.

1.1.4 Примеры неустойчивых задач и методов

1) Требуется решить $(x-a)^n = \varepsilon$, где a, n, ε — заданные числа, при этом $n >> 1$, $n \in \mathbb{N}$, $0 < \varepsilon < 1$

$x = a$ — приближенное.
$\Delta x = \sqrt[n]{\varepsilon}$ если $\varepsilon \approx 10^{-16}$, $n \approx 10$, $\Delta x \approx 10^{-2}$.

2) $(x-1)(x-2)...(x-20)$ — полином. Раскроем: $x^{20} - 210x^{19} + ... + 20!$. А вот если мы получили погрешность округления вида $210 + 10^{-7}$. Тогда корни этого полинома не просто изменятся, но будут иметь вид:

$$\begin{aligned}
x &= 1.000\\
&\vdots\\
x_7 &= 7.000\\
x_8 &= 8.007\\
x_9 &= 8.897\\
x_{\overline{10,19}} &\in \mathbb{C}\\
x_{20} &= 20.847
\end{aligned}$$

3) Линейная система:

$$\begin{cases} x + 10y = 11\\ 100x + 1001y = 1101 \end{cases}$$

Решение очевидно: $x = 1, y = 1$.
Добавим погрешность:

$\begin{cases} x + 10y = 11.01 \\ 100x + 1001y = 1101 \end{cases}$

Решение получилось: $x = 11.01, y = 0$.

4) Вычислить набор интегралов

$$\frac{1}{e}\int_0^1 x^n e^x dx$$

где $n = 0, 1, ...$

Пусть I_n — этот интеграл. Тогда запишем рекуррентную формулу:

$$I_n = 1 - nI_{n-1},\ I_0 = 1 - \frac{1}{e}$$

На старых машинах при $n = 14$ уже получались неверные ответы.

Альтернатива: перевернуть формулу и записать ее в виде

$$I_{n-1} = \frac{1}{n}(1 - I_n)$$

2 Линейные уравнения

2.1 Решение систем линейных уравнений

Определение 2.1. Норма: $\|.\|$;

1) $||x|| \geq 0$, $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

2) $||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||$;

3) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$;

Пример 2.1. Нормы векторов

$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}$ — долгая и неблагодарная норма;

$\|x\|_1 = |x_1| + ... + |x_n|$ — более простая норма;

$\|x\|_p = (|X_1|^p + ... + |x_n|^p)^{1/p}$ — строгая математическая норма;

$\|x\|_\infty = \max_{i=\overline{1,n}} |x_i|$ — наиболее частоиспользуемая норма.

Все эти нормы эквивалентны, то есть $\|.\|_\alpha, \|.\|_\beta$ эквивалентны, если $\exists c_1, c_2$: $\forall x$ выполняется $c_1 \|x\|_\beta \leq \|x\|_\alpha \leq c_2 \|x\|_\beta$.

Определение 2.2. Рассмотрим линейный оператор A; здесь $\|Ax\| \leq C$. Тогда $\min_x C = \|A\|$ — норма матрицы, согласованная с нормой вектора, если $\|Ax\| \leq \|A\| \|x\|$.

Определение 2.3. Норма матрицы, подчиненная норме вектора:

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

Пример 2.2.

1) $\|A\|_1 = \max_{j=\overline{1,n}} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$;

2) $\|A\|_2 = \sqrt{\max_{i=\overline{1,n}} \lambda(A^T A)}$;

3) $\|A\|_\infty = \max_{i=\overline{1,n}} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$.

Норма Фробениуса: $\|A\|_F = \sqrt{\sum_{ij} a_{ij}^2}$.

2.1.1 Число обусловленности

Рассмотрим систему $Ax = b$ и пусть $b + \Delta b$. Как Δb повлияет на Δx?
$A(x + \Delta x) = b + \Delta b$; $A\Delta x = \Delta b$.
$\|A\Delta x\| = \|\Delta b\|$, раскрыв скобки, $\|A\| \, \|\Delta x\| \geq \|\Delta b\|$;
Откуда $\|\Delta x\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|\Delta b\|$. Но это абсолютная погрешность. Что с относительной?

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A^{-1}\| \, \|A\| \, \|\Delta b\|}{\|b\|}$$

и тогда $\nu(A) = \|A^{-1}\| \, \|A\|$ — число обусловленности системы.
И если $\nu(A) >> 1$, то система плохо обусловлена.
Есть способы т.н. предобусловлевания систем, однако мы их смотреть пока не будем.
Пример плохо обусловленной системы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 100 & 1001 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 11.01 \end{pmatrix}$$

2.1.2 Метод Гаусса

Обычный метод Гаусса.

2.1.3 LU-разложение

$A = LU$, где L — нижнетреугольная матрица, а U — верхнетреугольная. Потребуем, чтобы на главной диагонали L стояли единицы для однозначного разложения.

U — матрица, получающаяся в ходе прямого разложения Гаусса. L получается, как матрица, в которой запомнены коэффициенты, на которые мы домножали: $\frac{a_{21}}{a_{11}}$, к примеру. Но если наше разложение наткнется на нуль на диагонали, будет больно.

Поэтому используют $A = P^{-1}LU$, где P —матрица перестановка с аналогичными желаемым перестановками.

Для решения уравнения будем использовать $PAx = Pb$. Затем $Ly = Pb$.

Как ее построить? Если мы переставляли строки в исходной матрице, то аналогично должны переставить в матрице P. Затем воспользуемся тем, что P ортогональна: $P^{-1} = P^T$.

2.1.4 QR-разложение

Метод вращений Гивенса:

Строим $QR = A$, где R — верхнетреугольная матрица, а Q — ортонормированная.

Повернем A_1 на какой-то угол, чтобы получилось $\begin{pmatrix} a_{11}^{(0)} \\ 0 \\ a_{31}^{(0)} \\ \vdots \\ a_{n1}^{(0)} \end{pmatrix}$. Матрицы поворота выглядят так: $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$. Матрица обратного поворота, аналогично, $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

Теперь, если мы домножим на матрицу $Q_{21} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Тогда обнулится элемент a_{21}. Аналогично, далее используем матрицу $Q_{31} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ и так далее. Таким образом, $Q_{n,n-1}Q_{n,n-2}, ..., Q_{21}$.

Это разложение нам понадобится для решения уравнения вида $Ax = b$ решая уравнение $Rx = Qb$.

Как найти α? У нас есть a_{11} и a_{21} и мы именно этот вектор хотим домножить на матрицу вращения. Уравнение:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Легко выводится, что $\begin{cases} \sin\alpha a_{11} + \cos\alpha a_{21} = 0 \\ \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \end{cases}$, $\sin\alpha = -\frac{\cos\alpha a_{21}}{a_{11}}$, $\cos^2\alpha + \cos^2\alpha(\frac{a_{21}}{a_{11}}) = 1$, откуда $\cos^2\alpha = \frac{a_{11}}{a_{11}^2 + a_{21}^2}$, отсюда $\cos\alpha = \frac{a_{11}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{21}^2}}$, $\sin\alpha = -\frac{a_{21}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{21}^2}}$.

Плюсы в сравнении с методом Гаусса: не нужно выбирать ведущий элемент и не растет вычислительная погрешность. Из минусов: работает в 4 раза медленнее.

Метод отражений Хаусхольдера:

Рассмотрим вспомогательный вектор ω — вектор единичной длины. $\omega^T\omega = 1$.

Рассмотрим $U = E - 2\omega\omega^T$, $U^TU = E - 4\omega\omega^T + 4\omega\underbrace{\omega^T\omega}_{1}\omega^T = E \Rightarrow U^{-1} = U^T$.

$U_\omega = \left(E \cdot 2\omega\omega^T\right)\omega = \omega - 2\omega = -\omega \Rightarrow \omega$ — собственный вектор с собственным числом -1.

$v \perp \omega$, то есть $v^T\omega = 0$ или $\omega^Tv = 0$, $U_v = \left(E - 2\omega\omega^T\right)v = v - 2\omega\omega^Tv = v \Rightarrow v$ — собственный вектор с собственным числом 1.

Таким образом, $y = v + \alpha\omega \Rightarrow Uy = v - \alpha\omega$, то есть матрица U отражает вектор.

Пусть y, z — ... векторы. Нам нужно найти U, такую, что $Uy = \alpha z$. Смотрим:

$$\|Uy\| = \|y\| = \|\alpha z\| \Rightarrow \alpha = \frac{\|y\|}{\|z\|}$$

$$\omega = \frac{y - \alpha z}{\|y - \alpha z\|}$$

Теперь, используя A_1 как y, e_1 как z, строим $U_1 = E - 2\omega\omega^T$. Тогда U_1A будет иметь нулевой первый столбец (исключая элемент $a_{11}^{(1)}$).

Тогда $Q = U_{n-1} \cdot ... \cdot U_1$.

Тогда решением $Ax = b$ будет являться $Rx = Q^Tb$.

Симметричная матрица — метод квадратного корня.

$A = S^TS$, где S — верхнетреугольная. Такое разложение возможно и единственно только для симметричной матрицы.

Рассмотрим A — положительно определенная матрица, следовательно, $s_{ij} \in \mathbb{R}$. Просто расписав матрицы, получим $s_{11}^2 = a_{11}$, $s_{11}s_{12} = a_{12}, ..., s_{11}s_{1n} = a_{1n}$. Теперь посмотрим на вторую строку: $s_{22}^2 + s_{12}^2 = a_{22}$, $s_{23}s_{22} + s_{12}s_{13} = a_{23}$ и так далее.

Метод квадратного корня требует в 2 раза меньше операций, чем в методе Гаусса + $n\sqrt{}$.

2.1.5 Итерационные методы решения СЛАУ

Это методы, в которых мы находим начальное приближение к решению и, итерируя, уточняем его.

Рассматриваемая нами система $Ax = b$ путем неких изменений может быть приведена к форме $x = Bx + c$. И задача нахождения x становится задачей нахождения неподвижной точки.

Допустим, мы преобразовали наше уравнение ко второму виду. Теперь мы строим итератор:

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c$$

Интуитивно понятно, что $\|B\| > 1$ влечет $\|x_k\| \to \infty$.

Лемма 2.1. *Все собственные числа матрицы B по модулю меньше единицы тогда и только тогда, когда*

1) $B^k \to_{k\to\infty} 0$;

2) $\exists (I - B)^{-1} = (I + B + B^2 + ... + B^k + ...)$;

Лемма 2.2. *Если $\|B\| \le q < 1$, то $(I - B)^{-1}$ существует, равна $\sum_{i=1}^{\infty} B^i$ и $\|(I - B)^{-1}\| \le \frac{1}{1-q}$.*

Доказательство. $\|B\| \le q < 1 \Rightarrow \left\|i + B + ... + B^k + ...\right\| \le \|I\| + \|B\| + ... + \left\|B^k\right\| + ... \le \|I\| + \|B\| + ... + \|B\|^k + ... \le 1 + q + ... + q^k + ... = \frac{1}{1-q}$, следовательно, существует $V = \sum_{k=0}^{\infty} B^i$, такое, что $\|V\| \le \frac{1}{1-q}$.

Тогда $(I - B)V = IV - BV = I + B + B^2 + ... + B^k + ... - B - B^2 - ... - B^k - ... = I$, следовательно $\|(I - B)^{-1}\| \le \frac{1}{1-q}$. □

Теорема 2.1. *Необходимым и достаточным условием сходимости метода простой итерации с любым начальным приближением $x^{(0)}$ к $x^* : x^* = Bx^* + c$ является ограниченность собственных чисел матрицы B числом, меньшим единицы.*

Доказательство.

Достаточность:

$x^{(1)} = Bx^{(0)} + c$

$x^{(2)} = B(Bx^{(0)} + c) + c = B^2x^{(0)} + Bc + c$

....

$x^{(k)} = B^k x^{(0)} + (B^{(k-1)} + ... + I)c$

Из условий 1) $B^k \to_{k\to\infty} 0$; 2) $\exists (I - B)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} B^i$ следует, что при $k \to \infty$ выполняется $x^{(k)} \to (I - B)^{-1}c$.

Преобразуем $x = Bx + c \Leftrightarrow (I - B)x = c$, следовательно, $(E - B)^{-1}c$ является решением.

Пусть $\exists x^{**}$ — другое решение. Тогда $x^* = Bx^* + c$, $x^{**} = Bx^{**} + c$ и $x^* - x^{**} = B(x^* - x^{**})$. $x^* - x^{**} = B(x^* - x^{**})$, следовательно, $\lambda = 1$ является собственным числом B с собственным вектором $x^* - x^{**}$, а это противоречие.

Необходимость:

$x^{(k)} \to_{k\to\infty} x^* \Rightarrow I + B + ... + B^k + ... = V$, V — конечная матрица и $V = (I - B)^{-1}$. Тогда $x^* = \lim_{k\to\infty} B^k x^{(0)} + (I - B)^{-1}c$, подставив в уравнение, получим $(I - B)x^* = c$, откуда $(I - B)(I - B)^1 c + (I - B)\lim_{k\to\infty} B^k x^{(0)} = c$ следовательно, $\lim_{k\to\infty} B^k$, следовательно, собственные числе матрицы равны ??? □

Теорема 2.2. *Пусть $\|B\| \le q < 1$, тогда МПИ сходится $\forall x^{(0)}$ к $x^* : x^* = Bx^* + c$ и верны следующие оценки:*

1) $\left\|x^* - x^{(k)}\right\| \le \frac{q}{1-q}\left\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\right\|$ — апостериорная оценка;

2) $\left\|x^* - x^{(k)}\right\| \le \frac{q^k}{1-q}\left\|x^{(1)} - x^{(0)}\right\|$ — априорная оценка.

Доказательство. $x^{(k-1)} - x^{(k)} = Bx^{(k)} + c - Bx^{(k-1)} + c = B(x^{(k)} - x^{(k-1)}) \Rightarrow \left\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\right\| \le q\left\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\right\|$

$\left\|x^{(k+m)} - x^{(k)}\right\| \le \left\|x^{(k+m)} - x^{(k+m-1)} + ... + x^{(k+1)} - x^{(k)}\right\| \le \left\|x^{(k+m)} - x^{(k+m-1)}\right\| + ... + \left\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\right\| \le (q^{m-1} + q^{m-2} + ... + q + 1)\left\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\right\| = \frac{1-q^m}{1-q}\left\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\right\|$

Тогда $\left\|x^* - x^{(k)}\right\| \le \frac{1}{1-q}\left\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\right\| \le \frac{q}{1-q}\left\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\right\|$.

Применив много раз, получим $\left\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\right\| \le q^2\left\|x^{(k-1)} - x^{(k-2)}\right\|$,...,$\left\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\right\| \le q^k\left\|x^{(1)} - x^{(0)}\right\|$. Таким образом, при $k \to \infty$ последовательность сходится в себе, $\mathbb{R}^n$ полное, следовательно, существует $x^* = \lim_{k\to\infty} x^{(k)}$.

$(I - B)\left(B^k x^{(0)} + (I - B)^{-1}c\right) = c$, $B^k x^{(0)} = 0$, так как $\|B\| \le q \Rightarrow \left\|B^k\right\| \le q^k$.

И в результате $\left\|x^* - x^{(k)}\right\| \le \frac{q}{1-q}\left\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\right\|$ □

Замечание 2.1. Апостериорная оценка точнее, чем априорная.

Замечание 2.2. Другая априорная оценка: $x^* = (I - B)^{-1}c = (I + B + ... + B^k + ...)c$, соответственно, $x^{(k)} = B^k x^{(0)} + (I + ... + B^k)c$. Тогда $x^* - x^{(k)} = B^k x^{(0)} + (B^k + B^{k-1} + ...)c$. Если взять норму: $\left\|x^* - x^{(k)}\right\| \le q^k\left\|x^{(0)}\right\| + q^k\left\|(I - B)^{-1}\right\|c \le q^k\left(\left\|x^0\right\| + \frac{\|c\|}{1-q}\right)$. Кажется, так.

Замечание 2.3. Как выбрать $x^{(0)}$?

Метод Якоби:

$Ax = b$.

Берем матрицу и делим каждую из ее строк на диагональный элемент в этой строке. Мы в каждой строке получим x с соответствующим номером с единичным коэффициентом.

$x_1 = -\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 - ... - \frac{a_{1m}}{a_{11}}x_m + \frac{b_1}{a_{11}}$

$x_2 = -\frac{a_{21}}{a_{22}}x_1 - \frac{a_{23}}{a_{22}}x_3 ... - \frac{a_{2m}}{a_{22}}x_m + \frac{b_2}{a_{22}}$

и так далее. Теперь матрица B будет иметь нули на диагонали. Соответственно, метод Якоби есть МПИ в такой системе.

Теорема 2.3. *Для матрицы с диагональным преобладанием метод Якоби сходится.*

Определение 2.4. Матрица с диагональным преобладанием — матрица, такая, что

$$\forall i = \overline{1, n} : \ |a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|$$

$$\delta = \min_{i=\overline{1,n}}\left(|a_{ii}| - \sum_0 |a_{ij}|\right)$$

— величина диагонального преобладания. Чем больше, тем быстрее матрица сойдется.

Теорема 2.4. *Метод Якоби сходится тогда и только тогда, когда все корни уравнения*

$$\det\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \lambda a_{nn} \end{pmatrix}$$

Метод Зейделя:

Когда мы применяем метод простой итерации, мы строим $x_1^{(k+1)} = b_{11}x_1^{(k)} + b_{12}x^{(k)} + ... + b_{1n}x_n^{(k)} + c_1$. Остальное аналогично с другими сторками.

3 Нелинейные уравнения

$f(x) = 0$ — поиск корней нелинейной функции.

3.1 Метод половинного деления

Рассматриваем отрезок $[a, b]$, на котором есть корни, то есть $f(a)f(b) < 0$. Вычисляем $c = \frac{a+b}{2}$, $f(c)$ и сравниваем:
1) $f(a) - f(c) < 0 \Rightarrow b := c,\ f(b) := f(c)$ и рекуррентно выполняем.
2) $f(a) - f(c) > 0$. Все то же самое, но наоборот.
3) $f(a)f(c) = 0$ — вернуть c.
Делаем, пока $\frac{b-a}{2} > \varepsilon$.

3.2 Метод простой итерации

Переформулируем $f(x) = 0$ в $x = S(x)$ и выбрав x_0 будем искать неподвижную точку: $x_{k+1} = S(x_k)$.

Например, $S(x) = x - \tau(x) - f(x)$, $\tau(x) \neq 0$ в окрестности x^*. Если $\tau(x) \equiv \tau \neq 0$ $S(x) = x - \tau f(x)$.

Теорема 3.1. *Если $f(x)$ липшицова с $q \in (0, 1)$ на отрезке $V_r(a)$ и $|S(a) - a| \leq (1-q)r$, то уравнение $x = S(x)$ имеет на $V_r(a)$ единственное решение x^*, МПИ сходится $\forall x_0 \in V_r(x)$ и $|x^* - x_k| \leq q^k |x^* - x_0|$.*

Если $S(x)$ непрерывно дифференцируема на отрезке и $|S'(x)| \leq q < 1$ и выполнено условие $|S(a) - a| \leq (1 - q)r$, то решение существует и $\forall x_0$ метод простой итерации сходится.

3.3 Метод Ньютона

$f(x) = 0$.

Разложим функцию $f(x^*)$ в ряд по $(x_k - x^*)$. x_k — приближение к решению.

$$f(x^*) = f(x_k) + f'(x_k)(x^* - x_k) + f''(x_k)\frac{(x^* - x_k)^2}{2} + ...$$

отсюда

$$x^* \approx x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_{k+1}$$

$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$, то есть $S(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$, если $|S'(x)| \leq q \leq 1$ в некоторой окрестности, то МПИ сходится.

$$S'(x) = -\frac{(f'(x))^2 - f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} + 1$$

то есть $S'(x) = \frac{f(x)f'(x)}{(f'(x))^2}$. Таким образом,

$$\left| \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} \right| < 1$$

то есть МПИ сходится в некоторой окрестности x^*.

Оценим скорость сходимости:

$$f(x_k) + f'(x_k)(x^* - x_k) = F(x_k)$$

$$F(x) = f(x) + f'(x)(x^* - x);\ F(x^*) = 0$$

$$F(x_k) = F(x^*) + \int_{x^*}^{x_k} F'(x)dx$$

$$F'(x) = f'(x) + f''(x)(x^* - x) + f'(x)(-1) = f''(x)(x^* - x)$$

$$F(x_k) = \int_{x^*}^{x_k} f''(x)(x^* - x)dx = f''(\xi) \int_{x^*}^{x_k} (x^* - x)dx = f''(\xi)\frac{(x^* - x_k)^2}{2}$$

$$x^* - x_{k+1} = x^* - x_k + \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

$$f'(x)(x^* - x_{k+1}) = F(x_k)$$

$$|x^* - x_{k+1}| \leq \frac{M_2}{f'(x_k)} |x^* - x_k|^2$$

таким образом,

$$|x^* - x_{k+1}| \leq \frac{q^{2^{(k+1)}-1}}{1-q} |x^* - x_0|$$

Теорема 3.2. *Если на отрезке $[a, b]$ существует корень, $f'(x) \neq 0$ на $[a, b]$ и $f''(x) \neq 0$, то метод Ньютона сходится $\forall x_0$, такого, что $f(x_0)f''(x_0) > 0$.*

Метод Ньютона имеет так называемую квадратичную сходимость для простых корней.

3.4 Метод секущих

Применяется в случае, если не работает метод Ньютона.

//дописать про метод Ньютона

3.5 Модифицированный метод Ньютона

Фиксируем матрицу Якоби $J(x^{(m)})$ и далее используем ее (часто берут $m = 0$). Переназначим: $J(x^{(k)}) = J_k$, $F(x^{(k)}) = F_k$. Тогда метод Ньютона говорит, что $J_k \Delta x^{(k+1)} = -F_k$, а модифицированный метод Ньютона: $J_m \Delta x^{(k+1)} = -F_k$.

Сходимость модифицированного метода Ньютона линейная (геометрическая прогрессия), но экономия достигается на вычислении J_k и LU разложении.

Часто методу Ньютона задают ограничение на число итераций.

4 Интерполяция и приближение функций

4.1 Общие задачи интерполяции

$f(x)$ задана на $[a,b]$ и $f(x)$ — «сложная» или таблично задана в точках $\{\overline{x_1},...,\overline{x_n}\}$. Наша задача — быстро вычислять приближение к $f(x)$ или просто $f(x)$ в $x \notin \{\overline{x_1},...,\overline{x_n}\}$. Для этого f заменяется на $a_0\varphi_0 + ... + a_n\varphi_n$, где $\varphi_0,...,\varphi_n$ — «простые» функции, причем $a_0\varphi_0(x_i) + ... + a_n\varphi_n(x_i) = f(x_i)$ для некоторых $\{x_0,...,x_n\} \subset [a,b]$ или из $\{\overline{x_1},...,\overline{x_n}\}$. Такой прием называется интерполяцией.

Интерполяционный полином $a_0\varphi_0 + ... + a_n\varphi_n$ может быть построен для заданной точности, только если функции $\varphi_0,...,\varphi_n$ обладают следующими свойствами:

1) $\varphi_0,...,\varphi_n,...$ — линейно независимы, то есть любой конечный набор из них линейно независим.

2) $\varphi_0,...,\varphi_n,...$ — полная система функций в некотором рассматриваемом функциональном пространстве, то есть $\forall f\ \exists b_0,...,b_n,...$: $f = \sum_{i=0}^{\infty} b_i\varphi_i$.

Пример 4.1. Попытка приблизить $f(x) = |x|$ на $[-1,1]$ по равноотстоящим узлам провалена, как и попытка показать нам, что это будет.

При этом существует единственный интерполяционный полином $a_0\varphi_0 + ... + a_n\varphi_n = \varphi$, удовлетворяющий условию $\varphi(x_i) = f(x_i)$, $i = \overline{0,n}$, если все x_i различны и φ_i линейно независимы, который находится решением СЛАУ с матрицей

$$\begin{pmatrix} \varphi_0(x_0) & \varphi_1(x_0) & \cdots & \varphi_n(x_0) \\ \varphi_0(x_1) & \varphi_1(x_1) & \cdots & \varphi_n(x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_0(x_n) & \varphi_0(x_n) & \cdots & \varphi_n(x_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix}$$

Определение 4.1. Интерполяционный процесс — последовательное приближение f по узлам $\begin{pmatrix} x_0^{(0)} & & & \\ x_0^{(1)} & x_1^{(1)} & & \\ x_0^{(2)} & x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$ с помощью полиномов (дописать). Говорят, что интерполяционный полином по X для $\{\varphi_i\}$ $i = \overline{0,\infty}$ сходится на $[a,b]$ если $0\forall f \exists x$: интерполяционный полином сходится и $\forall x \exists f$ не сходится (WAT).

4.2 Алгебраическое интерполирование

Основная схема: $\varphi_i = x^i,\ i = \overline{0,\infty}$.

Линейно независимы $1, x, x^2, ..., x^n, ...$ и

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix}$$

— определитель Вандермонда который не равен 0 для различных x_i. При этом $1, x, x^2, ...$ полная система функций в пространстве $C_{\mathbb{R}}$.

Рассмотрим построение интерполяционного полинома степени n по $n+1$ узлу $x_0,...,x_n$ и ... $f_0,...,f_n$, где $f_i = f(x_i)$.

4.2.1 Интерполяционный полином Лагранжа

Будем обозначать такой полином степени n как L_n.

Итак, должно выполняться $L_n(x_i) = f(x_i)$. Представим $L_n(x) = l_i(x)f(x_i)$, где $l_i(x_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$ — символ Кронекера.

Для того, чтобы построить такой полином, нам нужно, чтобы у $l_i(x)$ корнями являлись $x_0, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ...x_n$. Тогда

$$l_i(x) = \frac{(x - x_0)...(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})...(x - x_n)}{(x_i - x_0)...(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})...(x_i - x_n)}$$

Запишем более кратко:

$$l_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

откуда

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \left(\prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} \right) f(x_i)$$

Если ввести $\omega(x)$ — угловой многочлен, который равен $\omega_n(x) = (x - x_0)...(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})...(x - x_n)$, то

$$l_i(x) = \frac{\omega_n(x)}{(x - x_i)\omega_n'(x_i)}$$

и тогда

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)\omega_n(x)}{(x - x_i)\omega_n'(x_i)}$$

4.2.2 Погрешность интерполяционного полинома Лагранжа

Погрешность $r_n(x) = L_n(x) - f(x)$. Рассмотрим вспомогательную функцию $\Delta(x) = r_n(x) - K\omega_n(x)$.

Выясним, чему равна $r_n(x^*)$, где $x^* \in [a, b]$ и $x^* \neq x_i$.

Потребуем, чтобы $\Delta(x^*) = 0$, то есть

$$K = \frac{r_n(x^*)}{\omega_n(x^*)}$$

$\Delta(x)$ имеет $n + 2$ корня на $[a, b]$, следовательно, по теореме Ролля $\Delta'(x)$ имеет $n + 1$ корень между $\min(x_0, x^*)$ и $\max(x_n, x^*)$. У $\Delta^{(n+1)}(x)$ существует 1 корень и он в $[a, b]$. Пусть это некоторая точка ξ. То есть $\Delta^{(n+1)}(\xi) = r_n^{(n+1)}(\xi) - K \cdot (n+1)! = -f^{(n+1)}(\xi) - K(n+1)! = 0$, отсюда $r_n(x^*) = -\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_n(x^*)$. И теперь в силу произвольности, так как x^* — любое, то

$$\Gamma_n(x) = -\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n + 1)!}\omega_n(x)$$