Дисклеймер.

Автор не несет ответственности за любой ущерб, причиненный Вам при использовании данного документа. Автор напоминает, что данный документ может содержать ошибки и опечатки, недостоверную и/или непроверенную информацию. Если Вы желаете помочь в развитии проекта или сообщить об ошибке/опечатке/неточности:

GitHub проекта

Автор в ВК

Содержание

1 Матрица перехода от одного базиса к другому. Замена координат и изменение матрицы оператора

$GL_n(M)$ — множество обратимых квадратных матриц размера n над полем F.

Теорема. *$M_n(F)$ — множество квадратных матриц является кольцом с единицей.*

Доказательство. Проверяется непосредственно. □

Лемма. $A \in GL_n(F),\ v = (v_1, ..., v_n) \in V \times ... \times V$.

1) Если линейно независимо v, то vA также линейно независимо.

2) v — система образующих $\Leftrightarrow vA$ система образующих.

3) v — базис $\Leftrightarrow vA$ — базис.

Доказательство.

1) Если v линейно независимо, то $(vA)b = 0 \Leftrightarrow v(Ab) = 0 \Leftrightarrow Ab = 0 \Leftrightarrow A^{-1}Ab = 0 \Leftrightarrow b = 0$.

2) Если v система образующих, то $\forall x \in V\ \exists b \in F^n$, такое, что $x = vb = (vA)(A^{-1}b) \in \langle vA \rangle$, то есть vA — система образующих.

3) Очевидно следует из 1-2.

Обратное доказательство строится на основании того, что $v = (vA)A^{-1}$. Переобозначив $vA = v$ и $vA = vAA^{-1}$, проделаем те же действия. □

Лемма. *Пусть v, w — базисы конечномерного пространства V, тогда существует $C \in GL_n(F)$, такое, что $w = vC$.*

Доказательство. $w_1 = v \cdot (w_1)_v$, где $(w_1)_v$ — столбец координат базисного вектора w_1 в базисе v. (Логично умножив столбец цифр на кортеж векторов получим сумму базисных векторов — вектор). Так же представим $(w_2, ..., w_n)$. Тогда

$$(w_1, ..., w_n) = v \cdot ((w_1)_v, ..., (w_n)_v) = v \cdot C$$

где $C \in M_n(F)$. Докажем, что она обратима: аналогично предыдущему существует C', такая, что $v = wC'$. Отсюда $w = wE = vC = wCC' \Rightarrow CC' = E \Rightarrow C' = C^{-1}$. Обратное аналогично. □

Определение. Матрица C из предыдущего доказательства называется матрицей перехода $C_{v \to w}$.

Теорема. *Пусть $v = (v_1, ...v_n)$ — базис V. Набор $w = (w_1, ..., w_n)$ будет базисом $\Leftrightarrow \exists C \in GL_n(F)$, такая, что $w = vC$.*

Доказательство. Если $\exists C \in GL_n(F)$, то w — базис, согласно первой лемме. Если же w — базис, то по лемме 2 $\exists C_{v \to w}$. □

Теорема. *v, w — базисы V, $x \in V,\ L : V \to V$. Тогда $C_{v \to w} x_w = x_v$ и $L_v = C_{v \to w} L_w C_{w \to v}$.*

Доказательство.

1) $x = wx_w = vx_v$. $w = vC_{v \to w} \Rightarrow x = vC_{v \to w}x_w \Rightarrow vx_v = vC_{v \to w}x_w \Rightarrow x_v = C_{v \to w}x_w$.

2) $L(x)_v = L_v x_v = L_v C_{v \to w}$, аналогично $L(x)_v = C_{v \to w} L(x)_w = C_{v \to w} L_w x_w$. Вычитаем: $(L_v C_{v \to w} - C_{v \to w} L_w)x = 0 \Rightarrow L_v C_{v \to w} = C_{v \to w} L_w \Rightarrow L_v = C_{v \to w} L_w C^{-1}_{v \to w} \Rightarrow L_v = C_{v \to w} L_w C_{w \to v}$. □

2 Теорема о размерности ядра и образа

Теорема. *$L : U \to V$, $\dim\ker L + \dim ImL = \dim U$.*

Доказательство. Пусть $w = (u_1, ..., u_k)$ — базис $\ker L$, а $u = (u_1, ..., u_k, ..., u_n)$ — базис U. Докажем, что $\dim ImL = n - k$.

Система образующих: $\forall x \in ImL\ \exists y \in U$, такой, что

$$x = L(y) = L(\sum_{i=1}^{n} u_i\alpha_i) = \sum_{i=1}^{n} L(u_i)\alpha_i = \sum_{i=k+1}^{n} L(u_i)\alpha_i \Rightarrow (L(u_{k+1}), ..., L(u_n))$$

— система образующих.

Линейная независимость:

$$\sum_{i=k+1}^{n} L(u_i)\beta_i = 0 \Leftrightarrow L\left(\sum_{i=k+1}^{n} u_i\beta_i\right) = \sum_{i=k+1}^{n} u_i\beta_i \in \ker L \Leftrightarrow \exists\gamma_j \in F :\ \sum_{i=k+1}^{n} u_i\beta_i - \sum_{j=1}^{k} u_j\gamma_j = 0 \Rightarrow \beta_i = \gamma_j = 0$$

□

3 Внешняя и внутренняя сумма пространств, изоморфизм между ними

Определение. V — прямая внутренняя сумма U и W, если $\forall v \in V\ \exists! u, w$, такой, что $v = u + w,\ u \in U,\ w \in W$.

Определение. U, V — векторные пространства. Внешняя прямая сумма этих пространств — их декартово произведение с покомпонентными операциями: $U \bigoplus V = \{(u, v) | u \in U, v \in V\}$.

Определение. $W = U \bigoplus V \Leftrightarrow U \cap V = \{0\},\ U + V = W$.

Лемма. *$\forall U \le W\ \exists V \le W$, такое, что $W = U \bigoplus V$.*

Доказательство. f — базис U, дополним его набором векторов g до базиса W. Примем $V = \langle g\rangle$. Тогда $U \cap V = \{0\}$ и $U + V = W$, что эквивалентно $W = U \bigoplus V$. □

Теорема. *Пусть $U \le W$ и $V \le W$, при этом верно, что $U \cap V = \{0\}$ и $U + V = W$. Тогда $W \cong U + V$.*

Доказательство. Строим изоморфизм $(u, v) \longmapsto u + v$. Лучше забыть об этой теореме. □

4 Теорема о размерности суммы и пересечения

Теорема. *$U, V \le W$, тогда $\dim(U + V) + \dim(U \cap V) = \dim(U) + \dim(V)$.*

Доказательство. $w = (w_1, ..., w_k)$ — базис $U \cap V$. Дополняем его до:

$w + u = (w_1, ..., w_k, u_1, ..., u_m)$ — базис U.

$w + v = (w_1, ..., w_k, v_1, ..., v_n)$ — базис V.

Докажем, что $\dim(U + V) = k + m + n$.

Для этого докажем, что $w \cup v \cup u$ — базис $U + V$. Пусть $x \in U,\ y \in V$, тогда $x + y \in U + V$. Тогда $\exists a, c \in F^k, b \in F^m, d \in F^n$, такие, что $x + y = (wa + ub) + (wc + vd) = w(a + c) + ub + vd \Rightarrow w \cup v \cup u$ — система образующих.

Пусть $\exists f \in F^k, g \in F^m, h \in F^n$, такие, что $wf + ug + vh = 0$, тогда $\underbrace{vh}_{\in V} = \underbrace{-(ug + wf)}_{\in U}$, то есть $v \in V \cap U$, тогда $\exists l \in F^k$, такой, что $vh = lw \Rightarrow l = 0, h = 0$, все остальное тоже 0. □

5 PDQ-разложение. Равенство строчного и столбцового ранга

Определение. Ранг набора векторов $(v_1, ..., v_n) = \dim \langle v_1, ..., v_n \rangle$.

Определение. Ранг линейного оператора — $L = \dim(ImL)$.

Определение. Столбцовый/строчный ранг матрицы — ранг набора её строк/столбцов.

Замечание. Столбцовый ранг оператора не зависит от выбора базиса.

Доказательство. $L : V_f \to V_g$. $L_{f,g} = (L(f_1)_g, ..., L(f_n)_g)$, тогда $\operatorname{rk} L = \operatorname{rk}(L(f_1), ..., L(f_n)) = \operatorname{rk}(L(f_1)_g, ..., L(f_n)_g$
$L_{f,g}$ (по определению). □

Лемма. $A \in M_{m,n}(F),\ B \in GL_m(F),\ C \in GL_n(F)$. *Тогда* $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk}(BAC)$.

Доказательство. $L : F^n \to F^m$, такие, что $L_{e^{(n)},e^{(m)}} = A$, где $e^{(n)}, e^{(m)}$ — стандартные базисы.

$$L_{f,g} = BAC = C_{g \to e^{(m)}} L_{e^{(n)} e^{(m)}} C_{e^{(n)} \to f}$$

где f, g — другие базисы F^n, F^m соответственно. Отсюда $f = e^{(n)} C \Rightarrow C_{e^{(n)} \to f} = C$. $g = e^{(m)} B^{-1} \Rightarrow B = C_{g \to e^{(m)}}$

$\operatorname{rk} BAC = \operatorname{rk} A = \operatorname{rk} L_{e^{(n)} e^{(m)}} = \operatorname{rk} L_{f,g} = \operatorname{rk} L$.

Если матрица B обратима, то и транспонированная матрица обратима: $(BB^{-1})^T = E^T \Leftrightarrow (B^{-1})^T \cdot B^T = E \Rightarrow (B^T)^{-1} = (B^{-1})^T$.

$\operatorname{crk} A^T = \operatorname{rrk} A$ (столбцовый ранг транспонированной матрицы равен строчному рангу обычной матрицы). При этом, $\operatorname{rrk}(C^T A^T B^T) = \operatorname{rrk}(BAC)$. □

Теорема. *(PDQ-разложение).* $\forall A \in M_{m,n}(F)\ \ \exists P \in GL_m(F),\ Q \in GL_n(F),\ D = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{m,n}(F)$, *такие, что* $A = PDQ$. *При этом размер этой матрицы* E *равен и столбцовому, и строчному рангам матрицы* A .

Доказательство. $A = PDQ \Leftrightarrow P^{-1} A Q^{-1} = D$.

Пусть $\operatorname{crk} A = k,\ \operatorname{rrk} A = h$. Столбцы A — система образующих в своей линейной оболочке, следовательно, существует базис из k столбцов матрицы A. Переставляя столбцы, что соответствует умножению на обратимую матрицу-перестановку, передвинем эти k столбцов на первые места. Так как остальные столбцы A линейно зависимы, мы можем получить на их месте нули, используя преобразование Гаусса. Проделав те же преобразования со строками, получим матрицу вида

$$A = \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

где $X \in M_{n,k}(F)$, причем её строки и столбцы линейно независимы.

Заметим, что h — размерность подпространства строк длины k меньше, либо равна k, k — размерность подпространства столбцов высоты h меньше либо равна h, таким образом, $k = h$.

Набор столбцов является базисом, следовательно, X — матрица перехода от стандартного базиса к базису пространства F^k, следовательно, X обратима.

Умножая A слева на $P^{-1} = \begin{pmatrix} X^{-1} & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} \in GL_m(F)$, а справа на Q^{-1} = произведению всех матриц преобразований, получим $A = PDQ$. □

6 Разложение Гаусса

Теорема. *Любая матрица $A \in GL_n(F)$ может быть представлена в виде $A = PLU$, где P — матрица-перестановка, L — нижнетреугольная и U — верхнетреугольная.*

Доказательство. Первые k столбцов матрицы A линейно независимы и образуют подматрицу в A. rk подматрицы $= k$.

По индукции подберем такую матрицу-перестановку, что в $P^{(k)}A$ первые k диагональных подматриц будут обратимы.

База: $k = 1$: $A \in GL_n(F)$, тогда в A нет нулевого столбца, следовательно, $\exists a_{m1} \neq 0$. Тогда $P^{(1)} = (1\ m)$. ИП: Пусть в матрице $P^{(k-1)}A$ все диагональные матрицы до $k-1$ обратимы. Тогда мы можем дополнить линейно независимые строки этой матрицы еще одной строкой l, которая не лежит в их линейной оболочке. Тогда $P^{(k)} = QP^{(k-1)}$, где Q — матрица-перестановка, соответствующая перестановке (l, k).

Теперь положим $P^{(n)} = P'$. При помощи преобразования Гаусса, которое соответствует умножению на нижнетреугольную матрицу, получим нули под главной диагональю.

Умножая на нижнетреугольную L' получим верхнетреугольную U, такую, что $L'P'A = U$, отсюда $A = P'^{-1}L'^{-1}U = PLU$. □

7 Билинейные формы и их матрицы. Изменение матрицы при замене координат.

Определение. Билинейное отображение — отображение декартова произведения $B : V \times V \to W$, которое удовлетворяет условиям:

1) $B(u_1 + u_2, v) = B(u_1, v) + B(u_2, v)$
2) $B(u, v_1 + v_2) = B(u, v_1) + B(u, v_2)$
3) $B(\alpha u, v) = B(u, \alpha v) = \alpha B(u, v)$.

Определение. $B : V \times V \to F$ — билинейная форма, если она линейна по каждому аргументу.

Теорема. *$\forall B \in BL(V)$ и базиса v пространства V существует матрица B_f, такая, что $\forall x, y \in V$ верно $B(x, y) = x_f^T B_f y_f$. При этом $B_g = C^T_{f\to g} B_f C_{f\to g}$.*

Доказательство.

$$B(x,y) = B\left(\sum_i f_i\alpha_i, \sum_j f_j\beta_j\right) = \sum_i \sum_j \alpha_i B(f_i, f_j)\beta_j =$$

$$= (\alpha_1, ..., \alpha_n) \begin{pmatrix} B(f_1, f_1) & ... & B(f_1, f_n) \\ \vdots & & \vdots \\ B(f_n, f_1) & ... & B(f_n, f_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = x_f^T B_f y_f$$

Откуда по лемме из 1 билета $x_f = C_{f\to g}x_g,\ y_f = C_{f\to g}y_g$. Откуда

$$B(x, y) = x^T C^T_{f\to g} B_f C_{f\to g} y_g = x_g^T B_g y_g$$

□

8 Симметричные и антисимметричные билинейные формы, симметризация. Квадратичные формы, поляризация

Определение. Форма $B : V \times V \to F$ называется симметричной, если $B(x, y) = B(y, x)$ и антисимметричной, если $B(x, y) = -B(y, x)$.

Лемма. *Симметризация:*

1) Множество билинейных форм — векторное пространство с поточечными операциями, обозначим его $BL(V)$.

2) Множество симметричных и антисимметричных форм — подпространства, обозначим $BL^s(V)$, BL

3) $\operatorname{char} F \neq 2$. Тогда $BL(V) = BL^s(V) \bigoplus BL^a(V)$.

Доказательство. 1,2 — очевидно.

3) Проверим, пересекаются ли они: $B(x, y) = B(y, x) = -B(y, x) \Rightarrow 2B(y, x) = 0 \Rightarrow B(y, x) = 0 \Rightarrow B = 0$.

Обозначим $B^s(x, y) = \frac{1}{2}(B(x, y)+B(y, x))$, $B^a(x, y) = \frac{1}{2}(B(x, y)-B(y, x))$, тогда $B^s+B^a = \frac{1}{2}(2B(x, y)) = B(x, y)$. □

Определение. $B^s = \frac{1}{2}(B(x, y) + B(y, x))$ — симметризация билинейной формы.

Определение. $Q : V \to F$ называется квадратичной формой, если $\exists B \in BL(V) :\ Q(x) = B(x, x)$.

Теорема. *Поляризация:*

$\operatorname{char} F \neq 2$.

$Q(x) = B(x, x)$, *тогда* $B^s(x, y) = \frac{1}{2}(Q(x + y) + Q(x) + Q(y))$ *и* $Q(x) = B^s(x, x)$.

Доказательство.

$$Q(x + y) - Q(x) - Q(y) = B(x + y, x + y) - B(x, x) - B(y, y) = B(x, y) + B(y, x) = B^s(x, y) + B^a(x, y) + B^s(y, x) + B^a(y, x) = 2B^s(x, y)$$

Откуда

$$B^s(x, x) = \frac{1}{2}(Q(2x) - 2Q(x)) = \frac{1}{2}(B^s(x, y)) = Q(x)$$

□

Определение. Матрица квадратичной формы — матрица ассоциированной с ней симметричной билинейной формы.

$$Q_f = B_f = \begin{pmatrix} . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & B(f_i, f_j) & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & 1/2(Q(f_i, f_j) - Q(f_i) - Q(f_j)) & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \end{pmatrix}$$

9 Невырожденные формы. Разложение пространства в прямую сумму

Определение. $x \perp_B y$, если $B(x, y) = 0$

Определение. Ортогональное дополнение $V_0 = \{x \in V | B(x, y) = 0\ \forall y \in V\}$.

Определение. Квадратичная или билинейная форма невырождена, если $V_0 = \{0\}$.

Лемма. *$V = V_0 \bigoplus U$. B — симметричная билинейная форма. Тогда U невырождено относительно B.*

Доказательство. Пусть $u \in U$ и $\exists w \in U$, такое, что $B(u, w) = 0$. Любой вектор из V: $v = x + w,\ x \in V_0,\ w \in U$. Тогда $B(u, v) = B(u, x) + B(u, w) = 0 + 0 = 0$, откуда $u = 0$, а $u \in V_0 \cap U = \{0\}$, то есть U невырождено. □

Факт. *$(f_1, ..., f_n)$ — базис V. Если $(f_1..., f_k)$ — базис V_0, то $(f_{k+1}, ..., f_n)$ — базис U. Матрица билинейной формы имеет вид*

$$B = \begin{pmatrix} B(f_1, f_1) & & \\ & ... & \\ & & B(f_n, f_n) \end{pmatrix}$$

и матрица сужения примет вид

$$B_f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & / & / \\ 0 & 0 & / & / \\ 0 & 0 & / & / \end{pmatrix}$$

10 Диагонализация матрицы квадратичной формы

Лемма. *Q — невырожденная квадратичная форма на V. Тогда $\exists v \in V :\ Q(v) \neq 0$.*

Доказательство. Берем произвольный вектор u, $Q(u) = 0$, тогда берем v, чтобы $B(u, v) \neq 0$, если $Q(v) = 0$, то положим $x = u + v$ и $Q(x) = Q(u + v) = B(v, v) + 2B^s(v, u) + B(u, u)$, где $B^s(v, u) \neq 0 \Rightarrow Q(x) \neq 0$. □

Теорема. *Для любой квадратичной формы существует базис, в котором она диагональна.*

Доказательство. Найдём базис, ортогональный относительно B, в нем матрица квадратичной формы будет диагональна.

Так как $V = V_0 \bigoplus U$ по лемме из предыдущего билета, то требуется найти B-ортогональный базис U.

Индукцией по $n = \dim U$. $n = 1$ — все очевидно.

$n > 1 \Rightarrow \exists g_1 \neq 0$ по предыдущей лемме. Тогда дополним его до базиса U: $g = (g_1, ..., g_n)$. Примем

$$h_k = g_k - \frac{B(g_k, g_1)}{Q(g_1)} g_1$$

Тогда $B(h_k, g_1) = B(g_k - \frac{B(g_k,g_1)}{B(g_1,g_1)} g_1, g_1) = B(g_k, g_1) - \frac{B(g_k,g_1)}{B(g_1,g_1)}(g_1, g_1) = 0$, то есть g_1 ортогонален любому h_k, а значит, и всему пространству $W = \langle h_2, ..., h_n \rangle$, в котором по ИП существует ортогональный базис. Положим $f_1 = g_1$ и в U существует ортогональный базис. □

11 Четность перестановки

Определение. $\sigma \in S_m$, где S_m — множество перестановок из m элементов.

Определение. Инверсия в σ — пара $(i\ j)$, такая, что $i < j,\ \sigma(i) > \sigma(j)$

Лемма. *Любая перестановка раскладывается в произведение транспозиций вида $(i\ i + 1)$.*

Доказательство. Индукция по числу инверсий n.

При $n = 0$ доказывать нечего.

При $n > 0$: $\exists i : \sigma(i) > \sigma(i + 1)$. Тогда количество инверсий в $\tau = \sigma(i\ i + 1)$ на 1 меньше, чем в σ. Отсюда $\sigma = \tau(i\ i + 1)$, а в τ выполняется ИП. □

Лемма. *При умножении перестановки на транспозицию $(i\ i+1)$ четность перестановки меняется.*

Доказательство. Очевидно. $\square$

Теорема. *$\varepsilon : S_m \to \mathbb{Z}_2$ — гомоморфизм групп.*

Доказательство. $\varepsilon(\sigma) = k \mod 2$, $\varepsilon(\tau) = l \mod 2$, где k, l — число транспозиций. Тогда $\varepsilon(\sigma \cdot \tau) = k \mod 2 + l \mod 2$. $\square$

12 Формула для полилинейной формы в координатах. Формы объема

Определение. $f : V \times ... \times V \to F$ — полилинейная форма, если она линейна по каждому аргументу.

Определение. $f : X \times X \to F$, f — антисимметричная, если $\forall x, y \in F$:
1) $f(x, y) = -f(y, x)$
2) $f(x, x) = 0$

Лемма. *Если* $\operatorname{char} F \neq 2$, *то*
$f(x, y) = -f(y, x) \Rightarrow f(x, x) = 0.$
f — билинейная форма, V — векторное пространство, тогда $f(x, x) = 0 \Rightarrow f(x, y) = -f(y, x)$.

Доказательство. $f(x, x) = -f(x, x) \Rightarrow 2f(x, x) = 0 \Rightarrow f(x, x) = 0.$
Обратно: $0 = f(x + y, x + y) = f(x, y) + f(y, x) \Rightarrow f(x, y) = -f(y, x).$ $\square$

Лемма. *Если f полилинейна и антисимметрична, то*
1) $f(..., v, ..., u, ...) = -f(..., u, ..., v, ...)$;
2) $f(..., v, ..., u, ...) = f(..., v, ..., u + \lambda v, ...)$.

Доказательство. $f(..., v, ..., u, ...) + f(..., u, ..., v, ...) = f(..., v + u, ..., u + v, ...).$
$f(..., v, ..., u + \lambda v, ...) = f(..., v, ..., u, ...) + \underbrace{\lambda f(..., v, ..., v, ...)}_{=0} = f(..., v, ..., u, ...)$ $\square$

Лемма. *$f : V \times ... \times V \to F$ — полилинейная антисимметричная форма, $(v_1, ..., v_n)$ — базис пространства V, $x_1, ..., x_n \in V \times ... \times V$, $A = ((x_1)_v, ..., (x_n)_v)$. Тогда*

$$f(x_1, ..., x_n) = f(v_1, ..., v_n) \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\varepsilon(\sigma)} \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i)i}$$

Доказательство.

$$f(x_1, ..., x_n) = \left(\sum_{i_1=1}^{n} v_{i_1} a_{i_1 1}, ..., \sum_{i_n=1} v_{i_n} a_{i_n n} \right) = \sum_{i_1=1}^{n} ... \sum_{i_n=1}^{n} f(v_{i_1}, ..., v_{i_n}) a_{i_1 1} \cdot ... \cdot a_{i_m m}$$

Так как f антисимметрична, то все слагаемые, у которых $i_r = i_s$ равны нулю. Ведем суммирование по всем наборам различных индексов. $\sigma(k) = i_k$, отсюда σ — перестановка. Тогда

$$f(x_1, ..., x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} f(v_{\sigma(1)}, ..., v_{\sigma(n)}) a_{\sigma(1)1} \cdot ... \cdot a_{\sigma(n)n} = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\varepsilon(\sigma)} f(v_1, ..., v_n) a_{\sigma(1)1} \cdot ... \cdot a_{\sigma(n)n}$$

$$= f(v_1, ..., v_n) \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\varepsilon(\sigma)} \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i)i}$$

$\square$

Определение. Ненулевая антисимметричная n-линейная форма на n-мерном векторном пространстве называется формой объема.

13 Определитель матрицы — форма объема

Определение. Если $A \in M_n(R)$, где R — коммутативное кольцо, то

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\varepsilon(\sigma)} \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i)i}$$

Лемма. $\det$ — *полилинейная антисимметричная форма объема столбцов матрицы.*

Доказательство. Полилинейность:

$a_{*k} = b + c,\ b, c \in F^n$

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\varepsilon(\sigma)} \prod_{i \neq k}^{n} a_{\sigma(i)i} \cdot (b_{\sigma(k)k} + c_{\sigma(k)k}) =$$
$$\sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\varepsilon(\sigma)} \prod_{i \neq k}^{n} a_{\sigma(i)i} \cdot b_{\sigma(k)k} + \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\varepsilon(\sigma)} \prod_{i \neq k}^{n} a_{\sigma(i)i} \cdot c_{\sigma(k)k} = \det(a_{*1}, ..., a_{*k-1}, b, a_{*k+1}, ..., a_{*n}) +$$
$$\det(a_{*1}, ..., a_{*k-1}, c, a_{*k+1}, ..., a_{*n})$$

Антисимметричность:

A — множество четных перестановок. Фиксируем $i \neq j$ и цикл. перестановку $\tau = (i\ j)$. Тогда $S_n = A_n \bigsqcup \tau A_n$. Пусть $a_{*i} = a_{*j}$, тогда

$$\det A = \sum_{\sigma \in A_n} \prod_{k=1}^{n} a_{\sigma(i)i} + (-1)^1 \sum_{\sigma \in A_n \tau} \prod_{k=1}^{n} a_{\sigma\tau(i)} = \sum_{\sigma \in A_n} \left(\prod_{k=1}^{n} a_{\sigma(k)k} - \underbrace{\prod_{k \neq i,j}^{n} a_{\sigma(k)k} \cdot \underbrace{a_{\sigma(j)i}}_{=a_{\sigma(i)i}} \underbrace{a_{\sigma(i)j}}_{=a_{\sigma(j)j}}}_{=\prod_{k=1}^{n} a_{\sigma(k)k}} \right) = 0$$

□

14 Определитель линейного оператора

Лемма. $f(x_1, .., x_n) = f(v_1, ..., v_n) \det A,\ x_1, ..., x_n \in V \times ... \times V,\ A = ((x_1)_v, ..., (x_n)_v)$.

Доказательство. Следует из предыдущих двух билетов. □

Лемма. f — *форма объема на* V.

1) Набор векторов $v = (v_1, ..., v_n)$ *— базис, тогда и только тогда, когда* $f(v_1, ..., v_n) \det A \neq 0$.

2) Если u *и* v *— базисы пространства* V*, то* $f(u) = f(v) C_{v \to u}$.

3) $\det A \neq 0 \Leftrightarrow \operatorname{rk} A = n$.

Доказательство.

1) Если v — базис, то $\exists x_1, ..., x_n \in V \times ... \times V$, такое, что $f(x_1, ..., x_n) \neq 0$. Тогда $f(x_1, ..., x_n) = f(v_1, ..., v_n) \det A \neq 0$, $\det A \neq 0 \Rightarrow f(v_1, ..., v_n) \neq 0$. Обратно: пусть v не базис, тогда $v_j = \sum_{i \neq j}^{n} \alpha_i v_i$, тогда в $f(..., v, ..., u, ...) = f(..., v, ..., u + \lambda v, ...)$ заменим v_j на $v_j - \sum_{i \neq j}^{n} \alpha_i v_i = 0$, тогда $f(v_1, ..., v_n) = f(..., 0, ...,) = 0$, противоречие.

2) $f(u) = f(v) \det((u_1)_v, ..., (u_n)_v) \Leftrightarrow f(u) = f(v) \det C_{v \to u}$.

3) $\operatorname{rk} A = n$, т.к. её столбцы — базис в F^n, $\det$ — полилинейная форма столбцов, по 1 пункту $\det A \neq 0$. Обратно: $\det A \neq 0 \Rightarrow$ её столбцы — базис, следовательно, $\operatorname{rk} A = n$. □

Лемма. *$L: V \to V$ — линейный оператор, f — форма объема на V, v — базис.*

1) $f_L : V \times ... \times V \to F$, $f_L(x_1, ..., x_n) = f(L(x_1), ..., L(x_n))$ является формой объема или тождественно равна нулю.

2) $\frac{f_L(v_1,...,v_n)}{f(v_1,...,v_n)} = \det L$ и не зависит от f и v.

Доказательство. 1)

Полилинейность: $f_L(\alpha a + b, ...) = f(L(\alpha a + b), ...) = f(L(\alpha a) + L(b), ...) = \alpha f(L(a), ...) + f(L(b), ...)$;

Антисимметричность: $f_L(v, ..., v, ...) = f(L(v), ..., L(v), ...) = 0$.

2) $f(v_1, ..., v_n) \neq 0$, то есть частное всегда имеет смысл. Если $(u_1, ..., u_n)$ — другой базис V, то по второй лемме:

$$\frac{f_L(u_1, ..., u_n)}{f(u_1, ..., u_n)} = \frac{f_L(v_1, ..., v_n)C_{v\to u}}{f(v_1, ..., v_n)C_{v\to u}} = \frac{f_L(v_1, ..., v_n)}{f(v_1, ..., v_n)}$$

Если g — другая форма объема, то $g_L(v_1, ..., v_n) = g(L(v_1), ..., L(v_n)) = g(v_1, ..., v_n) \det L_v$. □

15 Определитель транспонированной матрицы. Определитель произведения

Лемма. *L_1, L_2 — линейный оператор на V. $\det(L_1 \circ L_2)_v = \det(L_1)_v \cdot \det(L_2)_v$.*

Доказательство.

$$\det L_1 = \frac{f(L_1(v_1), ..., L_1(v_n))}{f(v_1, ..., v_n)};$$

$$\det L_2 = \frac{f_{L_1}(L_2(v_1), ..., L_2(v_n))}{f_{L_1}(v_1, ..., v_n)} = \frac{f(L_1 \circ L_2(v_1), ..., L_1 \circ L_2(v_n))}{f(L_1(v_1), ..., L_1(v_n))} = \frac{f_{L_1 \circ L_2}(v_1, ..., v_n)}{f(v_1, ..., v_n)} \cdot \frac{f(v_1, ..., v_n)}{f_{L_1}(v_1, ..., v_n)} = \det L_1 \circ L_2 \cdot \frac{\quad}{\det}$$

□

Теорема. $\det A = \det A^T$.

Доказательство.

$$\det A^T = \sum_{\sigma\in S_n} (-1)^{\varepsilon(\sigma)} \prod_{k=1}^{n} (A^T)_{\sigma(k)k} = \sum_{\sigma\in S_n} (-1)^{\varepsilon(\sigma)} \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma^{-1}(i)i} = \sum_{\sigma\in S_n} (-1)^{\varepsilon(\sigma^{-1})} \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma^{-1}(i)i} =$$
$$= \sum_{\tau\in S_n} (-1)^{\varepsilon(\tau)} \prod_{i=1}^{n} a_{\tau(i)i} = \det A$$

где $i = \sigma(k) \Leftrightarrow k = \sigma^{-1}(i)$.

$\varepsilon(\sigma^{-1}) = \varepsilon(\sigma) \in \mathbb{Z}_2$. □

16 Определитель блочно-диагональной матрицы

Теорема. *$A \in M_n(F)$, $B \in M_m(F)$, $C \in M_{n,m}(F)$. Тогда*

$$\det \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det A \cdot \det B$$

Доказательство. $f : M_n(F) \to F$. $f(A) = \det \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$, (B, C) — фиксированы. f — антисимметричная полилинейная форма столбцов матрицы A. Тогда $f(A) = f(E)\det(A) = \det \begin{pmatrix} E & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \det A$. $\det \begin{pmatrix} E & 0 \\ C^T & B^T \end{pmatrix} =$ (аналогично) $= \det B^T \cdot \det \begin{pmatrix} E & 0 \\ C^T & E \end{pmatrix}$. Ясно, что при помощи преобразования Гаусса $\begin{pmatrix} E & 0 \\ C^T & E \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} \Rightarrow \det \begin{pmatrix} E & 0 \\ C^T & E \end{pmatrix} = 1$. Таким образом, $\det \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det A \cdot \det \begin{pmatrix} E & C \\ 0 & E \end{pmatrix} \cdot \det B = \det A \cdot \det B$. $\square$

17 Разложение определителя по строке/столбцу. Произведение элементов строки на алгебраические дополнения другой строки

Определение. $C \in M_n(F)$. Минором $n-1$-го порядка в позиции (i, j) называется $M_{ij}(C) = M_{ij} = \det M^{(i,j)}$ определитель матрицы, полученной вычеркиванием i-той строки и j-того столбца.

Определение. Алгебраическое дополнение позиции (i, j) — число $A = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Теорема. $\det A = \sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ij} = \sum_{i=1}^n a_{ji} A_{ji}$

Доказательство. Докажем для столбцов, для строк вытекает из $\det B = \det B^T$.

$$b_{*j} = \sum_{j=1}^n \begin{pmatrix} 0 \\ b_{ij} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Так как det — полилинейная форма, то

$$\det B = \sum_{j=1}^n \det \begin{pmatrix} / & 0 & / \\ / & b_{ij} & / \\ / & 0 & / \end{pmatrix}$$

Переставим i столбец и j строку наверх за $i - 1 + j - 1 = i + j - 2$ транспозиций. Получим матрицу B_i.

$\det B_i = b_{ij} M_{ij}$, так как B — блочно-верхне-треугольная матрица. det антисимметрична, следовательно, $\det B_i = (-1)^{i+j-2} \det B_i = (-1)^{i+j} b_{ij} M_{ij} = b_{ij} A_{ij}$, таким образом, $\det B = \sum_{i=1}^n b_{ij} A_{ij}$. $\square$

Лемма. $B \in M_n(F),\ k \neq j,\ \sum_{i=1}^n b_{ik} A_{ij} = \sum_{i=1}^n b_{ki} A_{ji} = 0$

Доказательство. Пусть $B' = (b_{*1}, ..., b_{*i-1}, b_{*k}, ..., b_{*k}, ...)$. Тогда $\det B' = \sum_{i=1}^n b_{il} A_{ij}(B') = \sum_{i=1}^n b_{ik} A_{ij} = 0$. $\square$

18 Формула для обратной матрицы, формула Крамера

Определение. $B \in M_n(F)$. Если $\det B \neq 0$, то B — невырождена.

Лемма. *Если B обратима, то она невырождена.*

Доказательство. $BB^{-1} = E,\ \det E = \det B \cdot \det B^{-1}$. $\square$

Определение. Присоединенной к A называется матрица $A^{adj} :\ (A^{adj})_{ij} = A_{ji}(A)$.

Теорема. *Если $A \in M_n(F)$, то $AA^{adj} = A^{adj}A = E \det A$. В частности, если $A \in GL_n(F)$, то $A^{-1} = \frac{1}{\det A}A^{adj}$.*

Доказательство. Пусть $B = AA^{adj}$. Тогда $b_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk}$. Если $i = j$, то $b_{ij} = \det A$, иначе по лемме о том, что сумма произведений элементов столбца на алгебраические дополнения другого столбца равна нулю $b_{ij} = 0$. Таким образом, $B = E \det A$.

$A^{adj}A = E \det A \Rightarrow A^{adj}A = A^{-1}A \det A \Rightarrow A^{adj} = A^{-1} \det A \Rightarrow A^{-1} = \frac{A^{adj}}{\det A}$. □

Теорема. *$A \in M_n(F)$, $b \in F^n$. Обозначим Δ — определитель матрицы A, Δ_k — определитель матрицы A, у которой на место k-того столбца поставлен столбец b. Система линейных уравнений $Ax = b$ имеет одно решение тогда и только тогда, когда $\Delta \neq 0$, причем $x_k = \frac{\Delta_k}{\Delta}$.*

Доказательство. $\Delta_k = \sum_{i=1}^{n} b_i A_{ik}$.

Матрица, определитель которой равен Δ_k отличается от A только в k-ом столбце, поэтому $A_{ik} = A_{ik}(A)$. С другой стороны, $Ax = b \Leftrightarrow x = A^{-1}b = \frac{1}{\det A}A^{adj}b$. $x_k = \frac{1}{\Delta}(A_{1k}, ..., A_{nk})b = \frac{1}{\Delta}\sum_{i=1}^{n} b_i A_{ik} = \frac{\Delta_k}{\Delta}$. □

19 Минорный ранг матрицы

Определение. Минорный ранг матрицы $A \in M_n(F)$ — наибольший размер квадратной подматрицы, определитель которой не равен нулю.

Теорема. *Минорный ранг матрицы равен её строчному/столбцовому рангу.*

Доказательство. Пусть k — минорный ранг A, r — строчный. По определению минорного ранга $\exists$ матрица $k \times k$, такая, что её определитель не равен нулю, следовательно, строки этой подматрицы линейно независимы, $k \leq r$.

Обратно: Возьмем подматрицу $r \times n$, по доказанному ранее, строчный ранг равен столбцовому, следовательно, существует подматрица $k \times k$, строки и столбцы которой линейно независимы. Тогда она имеет ненулевой определитель и $k \geq r$. □

20 Собственные числа и векторы. Характеристический многочлен. Линейная независимость собственных векторов.

$L : V \to V$, V конечномерно.

Определение. Ненулевой вектор $v \in V$ называется собственным вектором, соответствующим собственному числу λ, если $L(v) = \lambda v$.

Определение. Характеристический многочлен оператора имеет вид $\chi_L(t) = \det(L - \lambda I)$.

Лемма. *Для любых базисов f, g пространства V характеристические многочлены χ_{L_f} и χ_{L_g} совпадают.*

Доказательство. Пусть $C = C_{f \to g}$, тогда $L_g = C^{-1}L_f C$.

$\det(L_g - tE) = \det(C^{-1}L_f C - tE) = \det(C^{-1}(L_f - tE)C) = (\det C)^{-1}(\det(L_f - tE))(\det C) = \det(L_f - tE)$. □

Теорема. *Собственные вектора, соответствующие различным собственным числам, линейно независимы.*

Доказательство. $\lambda_1, ..., \lambda_k$ — различные собственные числа, $x_1, ..., x_k$ — соответсвующие собственные вектора.

Индукция по $n = \dim V$. $n = 1$, очевидно. Пусть верно для $n-1$:

Пусть $\sum_{i=1}^k x_i\alpha_i = 0$, тогда $\sum_{i=1}^k L(x_i)\alpha_i = \sum_{i=1}^k x_i\lambda_i\alpha_i = 0$

Домножим первое уравнение на λ_k и из обоих уравнений получим

$$\sum_{i=1}^{k} x_i\alpha_i(\lambda_k - \lambda_i) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{k-1} x_i\alpha_i(\lambda_k - \lambda_i) = 0$$

По индукционному предположению набор из $n-1$ собственных векторов линейно независим, следовательно, $\alpha_i \underbrace{(\lambda_k - \lambda_i)}_{\neq 0} = 0\ \forall i = 1, ...k-1$. Так как $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$, то $\alpha_i = 0$. □

21 Критерий диагонализуемости оператора

Определение. $V_\lambda = \ker(L - \lambda I)$ называется собственным подпространством, соответствующим λ.

Определение. Кратность λ в многочлене χ_A — алгебраическая кратность λ.

$\dim V_\lambda$ — геометрическая кратность λ.

Лемма. *Геометрическая кратность $\leq$ алгебраической кратности.*

Доказательство. Пусть $k = \dim\ker(L - \lambda I)$. Выберем базис $(u_1, ..., u_k)$ этого подпространства и дополним его до базиса $(u_1, ..., u_n)$ всего пространства. Так как $L(u_i) = \lambda_i$ при всех $i = 1, ..., k$, то первые k столбцов матрицы L_u совпадают с соответсвующими столбцами матрицы λE. Тогда $\chi_L = \det(L - tE) = (\lambda - t)^k$, то есть алгебраическая кратность λ не меньше k. □

Определение. Оператор называется диагонализуемым, если существует базис, в котором матрица оператора имеет диагональный вид.

Теорема. *$L : V \to V$ на n-мерном V.*

Оператор диагонализуем,

1) $\Leftrightarrow$существует базис, состоящий из его собственных векторов.

2) $\Leftrightarrow V$ равно прямой сумме собственных подпространств.

3) если существует n различных собственных чисел. (Не необходимое условие)

4) $\Leftrightarrow$ геометрическая кратность каждого собственного числа = алгебраической кратности этого собственного числа (При этом F алгебраически замкнуто).

5) χ_L не имеет кратных корней, а F — алгебраически замкнуто.

Доказательство. (везде сначала слева направо, затем справа налево)

1) L диагонализуем, если существует базис, в котором L диагональна.

Обратно: $u = (u_1, ..., u_n)$ — базис V. u_i — собственные вектора $\forall i$, следовательно, L диагональна.

2) L диагонализуем, следовательно, существует базис из собственных векторов, каждый собственный вектор соответствует только одному собственному числу, $u = \cup u_i$, где u_i — базисы $\ker(L - \lambda_i I) \Rightarrow \langle u\rangle = \bigoplus\langle u_i\rangle$.

3) Если есть n различных собственных чисел, то $\exists n$ собственных векторов, они линейно независимы, следовательно, существует базис, состоящий из собственных векторов.

4) L диагонализуем, $\Rightarrow V = \bigoplus\ker(L - \lambda I) \Rightarrow \sum\dim(\ker(L - \lambda I)) = \dim V = n$, так как геометрическая кратность не больше алгебраической, они равны, так как алгебраическая кратность равна n, так как поле алгебраически замкнуто.

Обратно: F алгебраически замкнуто, следовательно χ_L имеет n корней, следовательно, алгебраическая кратность равна геометрической кратности, следовательно, $\sum\dim(\ker(L - \lambda I))$. $\ker(L - \lambda_i I) \cap \ker(L - \lambda_j I) = \{0\}$ $i \neq j \Rightarrow V = \bigoplus\ker(L - \lambda_i I)$, по второму пункту.

5) χ_L не имеет кратных корней, следовательно, он имеет n разных корней, следовательно, по пункту 3 L диагонализуем. □

22 Жорданова форма. Теорема Гамильтона-Кэли

Определение. Жорданов блок — матрица, в которой на диагонали стоит одно и то же собственное число λ, а над диагональю — единицы, все остальное нули.

Определение. Жорданова форма — блочно-диагональная матрица, на диагонали которой стоят жордановы блоки.

Теорема. $\dim V = n$, *F — алгебраически замкнуто,* $\forall A : V \to V$, *то* $\exists$ *базис* u *пространства* V, *такой, что* A_u *имеет жорданову форму.*

Доказательство. без доказательства. □

Теорема. $\chi_L(L) = 0$, *где* $L : V \to V$ *— линейный оператор в конечномерном пространстве* V.

Доказательство. Будем считать, что F замкнуто. По предыдущей теореме существует базис u, в котором

$$L_u = \begin{pmatrix} J_{k_1\lambda_1} & & \\ & ... & \\ & & J_{k_n\lambda_n} \end{pmatrix}$$

где k_i — размерность жордановой клетки и λ_i — её собственное число.

Пусть $p(t) = t^n$ — многочлен. Докажем по индукции (индукция по $n = \dim V$), что $p(L_u) = p(L)_u$. Если $n = 1$, все понятно. В иных случаях, $p(L_u) = p(L_u) = L_u^n$. $p(L)_u = (L^{(n)})_u = L(L(...)) = L_u \cdot L_u^{(n-1)}$, по линейности пространств, $p(L_u) = 0 \Rightarrow p(L)_u = 0$.

То есть достаточно доказать, что $\chi_L(L_u) = 0 = \chi_{L_u}(L_u)$.

$$\chi_{L_u}(t) = \det \begin{pmatrix} (J_{k_1,\lambda_1} - tE) & \\ & (J_{k_n,\lambda_n} - tE) \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^{n} \det(J_{k_i,\lambda_i} - tE) = \prod_{i=1}^{n} (\lambda_i - t)^{k_i}$$

Теперь,

$$p\begin{pmatrix} A_1 & & \\ & ... & \\ & & A_n \end{pmatrix} = p\left(\begin{pmatrix} A_1 & & \\ & ... & \\ & & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & & \\ & A_i & \\ & & 0 \end{pmatrix} + ... + \begin{pmatrix} 0 & & \\ & ... & \\ & & A_n \end{pmatrix}\right) =$$
$$p\begin{pmatrix} A_1 & & \\ & ... & \\ & & 0 \end{pmatrix} + ... + p\begin{pmatrix} 0 & & \\ & ... & \\ & & A_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p(A_1) & & \\ & ... & \\ & & p(A_n) \end{pmatrix}$$

откуда

$$\chi_{L_u}(L_u) = \begin{pmatrix} \chi_{L_u}(J_{k_1\lambda_1}) & & \\ & ... & \\ & & \chi_{L_u}(J_{k_n\lambda_n}) \end{pmatrix}$$

$$\chi_{L_u}(J_{k_1\lambda_1}) = (\lambda_i E_i - J_{k_i\lambda_i})^{k_i} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ & .. & 1 \\ & & 0 \end{pmatrix}^{k_i} = 0 \Rightarrow \chi_{L_u}(L_u) = 0 \Rightarrow \chi_L(L) = 0.$$ □

23 Универсальное свойство многочленов. Минимальный многочлен

F — поле.

Определение. R — F-алгебра, если

1) R — кольцо с 1.
2) R — векторное пространство над F с той же операцией сложения.
3) $\forall \alpha \in F,\ r, s \in R$ верно, что $\alpha(rs) = (\alpha r)s = r(\alpha s)$.

Лемма. *(Универсальное свойство кольца многочленов)*
R — F-алгебра, $\forall r \in R\ \exists! \varepsilon_r : F[t] \to R$ — гомоморфизм алгебр, для которого $\varepsilon_r(t) = r$.

Доказательство. Положим $\varepsilon_r(\alpha_n t^n + ... + \alpha_0) = \alpha_n r^n + ... + \alpha_1 r + \alpha \cdot 1_R$. Гомоморфизм проверяется непосредственно.

Докажем единственность: Индукцией докажем, что ε_r' совпадает с ε_r. База: $\varepsilon_r'(1_F) = 1_R$ по свойству гомоморфизма.

ИП: $\varepsilon_r'(t^n) = \varepsilon_r'(t \cdot t^{n-1}) = r \cdot \varepsilon_r'(t^{n-1}) = r \cdot r^{n-1} = r^n$, то есть ε_r' и ε_r совпадают. □

Определение. Минимальным многочленом элемента r называется $p:\ \ker \varepsilon_r = p \cdot F[t]$. То есть минимальный многочлен определен с точностью до умножения на константу.

Определение. Минимальный многочлен оператора L (φ_L) — многочлен минимальной степени, которая аннулирует оператор L.

Лемма. *$\chi_L(t) \vdots \varphi_L(t)$.*

Доказательство. $\chi_L(t) = a(t)\varphi_L(t) + b(t)$, причем $\deg b(t) < \deg \varphi(t)$.

$\chi_L(L) = 0 \Rightarrow a(L)\varphi_L(L) + b(L) = 0 \Rightarrow b(L) = 0$.

Так как многочлен φ_L — наименьшей степени, такой, что $\varphi_L(L) = 0$, а $\deg b < \deg \varphi_L \Rightarrow b \equiv 0 \Rightarrow \chi_L \vdots \varphi_L$. □

24 Корневые подпространства, жордановы цепочки

Определение. $\chi_L = \prod_{i=1}^m (t - \lambda_i)^{k_i}$ $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$. Корневым подпространством собственного числа называется $\ker(L - \lambda_i I)^{k_i} = R_\lambda$.

Определение. $A^k = 0$. Тогда жордановой цепочкой называется $x, Ax, A^2x, ..., A^m x$, где $A^{m+1} = 0$.

Также доказать линейную независимость этой фигни. Упомянуть, зачем нужны жордановы цепочки.

Теорема. *$L : V \to V$, $\lambda_1, ..., \lambda_m$ — собственные числа L. Тогда $V = \bigoplus_i R_{\lambda_i}$.*

Доказательство. $u = (u_1, ..., u_n)$ — жорданов базис V.

Заметим, что $\mathcal{L}(u_1) = \lambda_1 u_1$; $(\mathcal{L}-\lambda_1 I)u_1 = 0$,
$\mathcal{L}(u_2) = u_1 + \lambda_1 u_2 \Leftrightarrow (\mathcal{L}-\lambda_1 I) u_2 = u_1$

$$\begin{cases} A_1 u_1 = 0 \\ A_1 u_2 = u_1 \\ \vdots \\ A_1 u_{k_1} = u_{k_1-1} \end{cases}$$

То есть $\forall u_i,\ i \in 1, \dots, k_1$
$A_1^i u_i = 0 \Rightarrow$ HEX
(Цикл. подгруппы)

$\Rightarrow$ Все базисные векторы, образующие 1-ую жорданову клетку, лежат в R_{λ_1}.

Аналогично для остальных клеток $\Rightarrow$
$\forall u_i \ \exists \lambda_j : u_i \in R_{\lambda_j} \Rightarrow V = R_{\lambda_1} + \dots + R_{\lambda_m}$

Докажем, что эта сумма — прямая, т.е.
$R_{\lambda_i} \cap R_{\lambda_j} = \{0\} \ \forall i, j,\ i \neq j$.

Мн-ны $p(t) = (t-\lambda_i)^{k_i}$, $q(t) = \prod_{j \neq i}^{m} (t-\lambda_j)^{k_j}$
вз. простые, т.к. $\lambda_i \neq \lambda_j \Rightarrow$

$\exists\, r(t), s(t)$, т.ч. $p(t)\, r(t) + q(t)\, s(t) = e_{\text{ед. элемент}}$

В частности, $p(\mathcal{L})(x)\, r(\mathcal{L})(x) + q(\mathcal{L})(x)\, s(\mathcal{L})(x) = x$. $\exists\ x \in R_{\lambda_i} \cap \left(\bigcup_{i \neq j} R_{\lambda_j}\right)$

Тогда

$p(\mathcal{L})(x) = (\mathcal{L}-\lambda_i I)^{k_i} x = 0$ т.к. $x \in R_{\lambda_i}$

$q(\mathcal{L})(x) = \prod (\mathcal{L}-\lambda_j I)^{k_j} x = 0$, т.к. $x \in R_{\lambda_j}\ \forall j$,

$\Rightarrow \underbrace{p(\mathcal{L})(x)}_{0}\, r(\mathcal{L})(x) + \underbrace{q(\mathcal{L})(x)}_{0}\, s(\mathcal{L})(x) = 0 = x$

$\Rightarrow R_{\lambda_i} \cap R_{\lambda_j} = \{0\}$.

□

1 опр жорд. цеп,

□

25 Евклидовы и эрмитовы пространства. Матрица Грама

V — векторное пространство над $\mathbb{R}$.

Определение. Симметричная билинейная форма $B : V \times V \to \mathbb{R}$ называется скалярным произведением, если $B(x, x) > 0 \forall x \neq 0$.

Определение. Если $f = (f_1, ..., f_n)$ — базис V, то $(x, y) = x_f^T \Gamma_f y_f$, где

$$\Gamma_f = B_f = \begin{pmatrix} B(f_1, f_1) & & \\ & ... & \\ & & B(f_n, f_n) \end{pmatrix}$$

— матрица Грама.

Определение. $B : V \times V \to \mathbb{C}$ полуторалинейна, если она полулинейна по первому и линейна по второму аргументу:
1) $B(x + y, z) = B(x, z) + B(y, x)$;
2) $B(\alpha x, y) = \overline{\alpha} B(x, y)$.

Определение. $B : V \times V \to \mathbb{C}$ эрмитово-симметрична, если $B(x, y) = \overline{B(y, x)}$. В частности, $B(x, x) = \overline{B(x, x)} \Rightarrow B(x, x) \in \mathbb{R}$.

Определение. $B : V \times V \to \mathbb{C}$ — эрмитово скалярное произведение, если B полуторалинейна, эрмитово-симметрична и положительно определена.

Лемма. *f, g — базисы V, B — эрмитово скалярное произведение. Тогда $\Gamma_g = \overline{C_{f\to g}} \Gamma_f C_{f\to g}$.*

Доказательство. Если f — базис V,

$$(x, y) = (\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i, \sum_{j=1}^{n} \beta_j f_j) = \sum_{i=1}^{n} \overline{\alpha}(f_i, f_j)\beta_j = \overline{x}_f^T \cdot \Gamma_f \cdot y_f$$

Так как $x_f = C_{f\to g} x_g,\ y_f = C_{f\to g} y_g$, то

$$\overline{x_g}^T \overline{C_{f\to g}}^T \Gamma_f C_{f\to g} y_g = \overline{x_g}^T \Gamma_g y_g \Rightarrow \Gamma_g = \overline{C_{f\to g}}^T \Gamma_f C_{f\to g}$$

□

26 Неравенство КБШ и неравенство треугольника

Определение. $x \in V,\ ||x|| = \sqrt{(x, x)}$, где (x, x) — (эрмитово) скалярное произведение.

Теорема. *V — векторное пространство с евклидовым или эрмитовым скалярным произведением. Тогда $\forall x, y \in V$ верно, что:*
1) $|(x, y)|^2 \leq ||x||^2 \cdot ||y||^2$.
2) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$.

Доказательство.
1) Обозначим $\lambda = \frac{(y,x)}{(y,y)}$.

$$0 \leq (x - \lambda y, x - \lambda y) = (x, x) + |\lambda|^2 \cdot (y, y) - (\lambda(x, y) - \overline{\lambda(x, y)}) =$$
$$= (x, x) + \frac{|(y, x)|^2}{(y, y)^2}(y, y) - \left(\frac{|(y, x)|^2}{(y, y)} + \frac{|(y, x)|^2}{(y, y)}\right) = (x, x) - \frac{|(y, x)|^2}{(y, y)} \geq 0$$

Откуда $(x, x)(y, y) \geq |(y, x)|^2 \Leftrightarrow ||x||^2 \cdot ||y||^2 \geq |(x, y)|^2$.

2) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y|| \Leftrightarrow (x + y, x + y) \leq ||x||^2 + 2||x|| \cdot ||y|| + ||y||^2$, и, одновременно, $(x + y, x + y) = ||x||^2 + ||y||^2 + (x, y) + (y, x) \Leftrightarrow (x, y) + \overline{(x, y)} \leq 2||x||^2 \cdot ||y||^2$, так как $Re(x, y) \leq |(x, y)| \leq ||x|| \cdot ||y||$. □

27 Ортогонализация Грама-Шмидта

Лемма. *Набор ненулевых попарно ортогональных векторов линейно независим.*

Доказательство. Пусть $(v_1, ..., v_n) \in V \times ... \times V$, $v_i \neq 0 \forall i$, $(v_i, v_j) = 0$, если $i \neq j$. Пусть $\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = 0$, тогда $(v_j, v_j)\alpha_j = \sum_{i=1}^n (v_i, v_j)\alpha_j = \sum (v_i \alpha_i, v_j) = 0 \Leftrightarrow \alpha_i = 0$, так как $(v_j, v_j) \neq 0$. $\square$

Теорема. *V — евклидово/эрмитово пространство, $(f_1, ..., f_n) \in V \times ... \times V$. Положим $g_1 = f_1$, $g_2 = f_2 - \frac{(g_1, f_2)}{(g_1, g_1)} g_1$, $\dots$, $g_k = f_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(g_i, f_k)}{(g_i, g_i)} g_i$, где $(g_i \neq 0)$. Тогда $\forall i, j, k \in \{1, ..., n\}$, $i \neq j$ верно:*

1) $(g_i, g_j) = 0$;

2) $\langle f_1, ..., f_k \rangle = \langle g_1, ..., g_k \rangle$.

3) Если $f_1, ..., f_k$ линейно независимы, то $g_1, ..., g_k$ линейно независимы, в частности, $g_m \neq 0 \forall m = 1, ..., k$.

4) Если $f_k \in \langle f_1, ..., f_n \rangle$, то $g_k = 0$.

5) Если $(f_1, ..., f_n)$ — система образующих в V, то ненулевые из $(g_1, ..., g_n)$ образуют базис.

6) Если $(f_1, ..., f_n)$ — базис V, то $(g_1, ..., g_n)$ — ортогональный базис в V.

Доказательство.

1) Индукция по k: $k = 1$, доказывать нечего.

$$(g_k, g_j) = \left(f_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(f_k g_i)}{(g_i, g_i)} g_i, g_j \right) = (f_k, g_j) - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(f_k, g_i)}{(g_i, g_i)} (g_i, g_i) = (f_k, g_j) - \frac{(f_k, g_j)}{(g_j, g_j)} (g_j, g_j) = 0$$

2,3) Положим $\alpha_{ij} = \frac{(g_i, f_j)}{(g_i, g_i)}$. Тогда неравенства можно переписать в виде:

$$(f_1, ..., f_k) = (g_1, ... g_k) \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & . & \alpha_{ij} & \\ & & . & \\ & 0 & & . \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

то есть $f = g \cdot C$, где $C \in GL_k(F)$.

Поэтому $\langle f \rangle = \langle g \rangle$ и линейная независимость $f \Leftrightarrow$ линейная независимость g.

4) $g_k \in \langle g_1, ..., g_k \rangle = \langle f_1, ..., f_k \rangle = \langle f_1, ..., f_{k-1} \rangle = \langle g_1, ..., g_{k-1} \rangle \Rightarrow g_k \in \langle g_1, ..., g_{k-1} \rangle$. По (1) $g_k \perp g_i$ $\forall i \leq m - 1 \Rightarrow g_k \perp < g_1, ..., g_{k-1} > \Rightarrow g_k \perp g_k \Rightarrow g_k = 0$.

5) f система образующих $\Rightarrow g$ — система образующих. Линейно зависимые векторы переходят в 0, таким образом, $f \backslash$лин.завис. — линейно независимая система, тогда $g \backslash 0$ — линейно независим и система образующих.

6) Следует из (3), (5). $\square$

28 QR-разложение. Классификация евклидовых/эрмитовых пространств.

Лемма. *Если $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$, $\operatorname{rk} A = n$. Тогда $\exists R \in M_n(\mathbb{C})$ и $Q \in M_{m,n}(\mathbb{C})$, такие, что:*

1) $A = QR$

2) R — верхнетреугольная.

3) $\overline{Q}^T Q = E$. (столбцы матрицы Q ортонормированы).

Доказательство. Возьмем $b_{*i} \in \mathbb{C}^n$, $i = 1, ..., n$, полученные процессом ортогонализации Г-Ш из столбцов матрицы A.

$$a_{*i} = \frac{b_{*i}}{||b_{*i}||} \Rightarrow B = Q \begin{pmatrix} \frac{1}{||b_{*1}||} & & \\ & .. & \\ & & \frac{1}{||b_{*n}||} \end{pmatrix}$$

$\boxed{D}$ Возьмём $b_{*i} \in \mathbb{C}^n$, $i = 1, ..n$, полученные процессом ортогон. Г-Ш из столбцов a_{*i}: $a_{*i} = \frac{b_{*i}}{\|b_{*i}\|} \Rightarrow Q = B \begin{pmatrix} \frac{1}{\|b_{*1}\|} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{\|b_{*n}\|} \end{pmatrix}$; $\Rightarrow$

$$\Rightarrow B = Q \cdot \left.\begin{pmatrix} \|b_{*1}\| & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \|b_{*n}\| \end{pmatrix}\right\} R''$$

$b_i = a_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{(a_i, b_k)}{(b_k, b_k)} b_k$. Если $\alpha_{ij} = \frac{(a_j, b_i)}{(b_i, b_i)}$,

то $(a_{*1}, \dots, a_{*n}) = (b_{*1}, \dots b_{*n}) \begin{pmatrix} 1 & \dots & \alpha_{ij} \\ 0 & \ddots & 1 \end{pmatrix}$;

$$A = BR' = Q \underbrace{R''R'}_{R} = QR$$

$\boxed{O}$ Изометрия пр-в со ск. пр. — отображение $L: U \to V$, что $(L(x), L(y))_V = (x, y)_U$

$\boxed{T}$ Любое евклидово / эрмитово пр-во изометрично $\mathbb{R}^n$ / $\mathbb{C}^n$ со стандартным ск. пр. ($(x, y) = \overline{x^T_e} y_e$)

$\boxed{D}$ По ортогон. Г-Ш в V $\exists$ ортонорм. базис f. В этом базисе $(x, y) = \overline{x_f^T} \cdot y_f$. Тогда $\varphi_f : V \to \mathbb{C}^n$, т.ч. $\varphi_f(x) = x_f$

$(\varphi_f(x), \varphi_f(y))_{\mathbb{C}^n} = (x_f, y_f)_{\mathbb{C}^n} = \overline{x_f^T} y_f$ □

□

29 Ортогональное дополнение. Ортогональная проекция

$U \leq V$, $(u_1, ..., u_k)$ — базис U, $(u_1, ..., u_n)$ — базис V.

Лемма. *$U' \perp U \Leftrightarrow \underbrace{u_i'}_{\in U'} \perp \underbrace{u_i}_{\in U}$, где u_i, u_i' — базисы.*

Доказательство. Следование очевидно.

Обратно: $x \in U,\ x = \sum_{i=1}^k \alpha_i u_i$. $(u', x) = \sum_{i=1}^k \alpha_i (u_i', u_i) = 0\ \forall u' \in U'$. □

Определение. $U^\perp = \{v \in V \mid (v, u) = 0\ \forall u \in U\}$ — ортогональное дополнение.

Теорема. $V = U \bigoplus U^\perp$.

Доказательство. $x \in U \cap U^{\perp} \Rightarrow x \perp u \ \forall u \in U$; $x \in U \Rightarrow x \perp x \Leftrightarrow (x, x) = 0 \Rightarrow x = 0$, следовательно, сумма прямая.

$f = (f_1, ..., f_k)$ — базис U, дополним до базиса всего пространства $(f_1, ..., f_n)$ — базис V и ортогонализуем его, получив базис $(g_1, ..., g_n)$. $(g_1, ..., g_k)$ — базис U, $(g_1, ..., g_n)$ — ортогональный базис V. $\forall v \in V$ верно $v = \underbrace{\sum_{i=1}^{k} g_i\alpha_i}_{\in U} + \underbrace{\sum_{i=k+1}^{n} g_i\alpha_i}_{\in U^{\perp}} = u_1 + u_2$. □

Определение. $U \leq V,\ V = U \bigoplus U^{\perp}$.По теореме $\forall v \in V\ \exists! u_1 \in U, u_2 \in U^{\perp}:\ V = u_1 + u_2$. u_1 — проекция v на U, обозначается $u_1 = \mathrm{pr}_U\, v$. Формула нахождения проекции: $\mathrm{pr}_U\, v = \frac{(v,u)}{(u,u)}u$.

Доказательство. $\frac{(v,u)}{(u,u)}u \in \langle u \rangle$. $\left(v - \frac{(v,u)}{(u,u)}u, u\right) = (v, u) - \frac{(v,u)}{(u,u)}(u, u) = 0 \Rightarrow v - \frac{(v,u)}{(u,u)}u \in \langle u \rangle^{\perp} \Rightarrow \exists u' \in \langle u \rangle^{\perp}:$ $u' = v - \frac{(v,u)}{(u,u)}u \Leftrightarrow v = u' + \frac{(v,u)}{(u,u)}u$. □

30 Расстояние от точки до подпространства. Геометрическая интерпретация метода наименьших квадратов

Лемма. *$f = (f_1, ..., f_k)$ — ортогональный базис U.*

$$\mathrm{pr}_U\, v = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{pr}_{f_i}\, v = \sum_{i=1}^{k} \frac{(v, f_i)}{(f_i, f_i)} f_i$$

Доказательство. $\sum_{i=1}^{k} \frac{(v,f_i)}{(f_i,f_i)} f_i \in U$. Докажем, что $\left(v - \sum_{i=1}^{k} \frac{(v,f_i)}{(f_i,f_i)} f_i\right) \perp U$. Это верно $\Leftrightarrow \left(v - \sum_{i=1}^{k} \frac{(v,f_i)}{(f_i,f_i)} f_i\right) \perp f_j$. Проверим: $\left(v - \sum_{i=1}^{k} \frac{(v,f_i)}{(f_i,f_i)} f_i, f_j\right) = (v, f_j) - \sum_{i=1}^{k} \frac{(v,f_i)}{(f_i,f_i)}(f_i, f_j) = 0$. □

Лемма. *$U \leq V,\ b \in V$. $||b - pr_U b|| \leq ||b - u||\ \forall u \in U$.*

Доказательство. $b - u = (b - p) + (p - u)$, где $p = \mathrm{pr}_U\, b$. Тогда $||b - u||^2 = ||b - p||^2 + ||p - u||^2 \geq ||b - p||^2$. □

Утверждение. Метод наименьших квадратов.

$A \in M_{n\times m}(\mathbb{R}),\ x \in \mathbb{R}^n,\ b \in \mathbb{R}^m$.

Пусть в системе уравнений $Ax = b$ неизвестных меньше, чем уравнений, то есть $n > m$. Задача: найти такой $x^* \in \mathbb{R}^n$, что $||Ax^* - b|| \leq ||Ax - b||\ \forall x \in \mathbb{R}^n$.

Ортогонализуем наши вектора: $Ax = \mathrm{pr}_U\, b$, тогда $||Ax^* - b|| \leq ||Ax - b||$ (по лемме), то есть при $x = x^*$ сумма квадратов отклонений данных b от найденной прямой будет наименьшей. В этом вся суть метода наименьших квадратов.

31 Координаты в ортогональном базисе. Равенство Парсеваля и неравенство Бесселя

$U \leq V,\ f = (f_1, ..., f_k)$ — ортогональный базис U, $\mathrm{pr}_{f_i}\, v = \sum_{i=1}^{k} \frac{(v,f_i)}{(f_i,f_i)} f_i\ \forall v \in V$. Если $V = U$, то

$$v_f = \begin{pmatrix} \frac{(v,f_1)}{(f_1,f_1)} \\ . \\ . \\ . \\ \frac{(v,f_n)}{(f_n,f_n)} \end{pmatrix}$$

(Коэффициенты проекций на каждый базисный вектор). Таким образом, мы можем говорить о координатах вектора в пространстве.

Теорема. *(Равенство Парсеваля и неравенство Бесселя)*

$(f_1, ..., f_k)$ — ортогональный набор векторов, то $||\operatorname{pr}_{<f>} v||^2 = \sum_{i=1}^k \frac{|(v,f_i)|}{(f_i,f_i)} \leq ||v||^2$.

Доказательство. $\operatorname{pr}_{<f>} v = \sum_{i=1}^k f_i \alpha_i$. $||\operatorname{pr}_{<f>} v||^2 = (\sum_{i=1}^k f_i \alpha_i, \sum_{j=1}^k f_i \alpha_j) = \sum_{i,j=1}^k \overline{\alpha_i}(f_i, f_j)\alpha_j = \sum_{i=1}^k \overline{\alpha_i}(f_i, f$ $\sum_{i=1}^k |\alpha_i|^2 (f_i, f_i)$, подставим $\alpha_i = \frac{(v,f_i)}{(f_i,f_i)}$, получим

$$||\operatorname{pr}_U v||^2 = \sum \frac{|(v, f_i)|^2}{|(f_i, f_i)|^2}(f_i, f_i) = \sum \frac{|(v, f_i)|^2}{|(f_i, f_i)|}$$

$v = \operatorname{pr}_U v + (v - \operatorname{pr}_U v)$, откуда $||v||^2 = (u_1 + u_2, u_1 + u_2) = (u_1, u_1) + (u_2, u_2) = ||u_1||^2 + ||u_2||^2 \geq ||u_1||^2$ □

32 Закон инерции квадратичных форм. Сигнатура квадратичной формы

Определение. $\operatorname{sign}(\lambda_1, ..., \lambda_m) = (p, n)$, где p — количество положительных λ_i, q — количество отрицательных. Сигнатура матрицы — сигнатура последовательности её диагональных элементов.

Теорема. *Q — квадратичная форма на вещественном конечном пространстве V, f, g — базисы V: Q_f, Q_g — диагональны. Тогда* $\operatorname{sign} Q_f = \operatorname{sign} Q_g$.

Доказательство. НУО будем считать, что у Q_f и Q_g положительные элементы расположены выше отрицательных. $\operatorname{sign} Q_f = (p_f, n_f)$, $\operatorname{sign} Q_g = (p_g, n_g)$. Пусть $p_f > p_g$. Тогда на $U = \langle f_1, ..., f_{p_f} \rangle$ форма положительна, а на $W = \langle g_{p_g}, ..., g_m \rangle$, где $m = \dim V$. Тогда $\dim(U \cap W) = -\dim(U + W) + \dim(U) + \dim W \geq p_f + (m - p_g) - m = p_f - p_g > 0$.

Противоречие. Аналогично невозможно обратное предположение. Следовательно, $p_f = p_g$. □

Определение. Сигнатура квадратичной формы — сигнатура её матрицы в базисе, в котором она диагональна.

Определение. Векторное пространство над полем F (размерности большей двух), вместе с квадратичной формой на нем называется квадратичным пространством.

Теорема. *Квадратичные пространства (V, Q) и (V', Q') изоморфны, если существует изоморфизм $L : V \to V'$, такой, что $Q'(L(x)) = Q(x)$ $\forall x \in X$.*

Теорема. *Квадратичные пространства (V, Q) и (V', Q') изоморфны тогда и только тогда, когда существуют такие базисы f и f' пространств V и V', что $Q_f = Q'_{f'}$.*

Доказательство. Пусть $L(V, Q) = (V', Q')$ — изоморфизм квадратичных пространств, а $f = (f_1 ..., f_n)$ — базис V. Тогда $f' = (L(f_1), ..., g_n)$ — базис V'. Так как $Q'(L(x)) = Q(x)$, то из $B^s(x, y) = \frac{1}{2}(Q(x + y) - Q(x) - Q(y))$ следует, что $B'(L(x), L(y)) = B(x, y)$ для любых $x, y \in V$, где B и B' — симметричные билинейные формы, ассоциированные с Q и Q' соответственно. Отсюда $Q_f = Q'_{f'}$ (вспоминаем, как выглядит матрица гребаной квадратичной формы).

Обратно, если $Q_f = Q'_{f'}$, то отображение $L(x) = f' x_f$ является изоморфизмом квадратичных пространств. Действительно, $L(x)_{f'} = x_f$, откуда

$$Q'(L(x)) = L(x)^T_{f'} \cdot Q'_{f'} \cdot L(x)_{f'} = x_f^T Q_f x_f$$

□

33 Критерий Сильвестра

Определение. $A \in M_n(F)$. Главный минор k-ого порядка матрицы A — определитель диагональной подматрицы $k \times k$. Главный минор 0-го порядка равен 1.

Лемма. *Главные миноры матрицы не меняются при умножении слева на нижнюю унитреугольную и справа на верхнюю унитреугольную.*

Доказательство. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix}$$

где X — матрица $k \times k$.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ / & .. & \\ / & / & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B' & 0 \\ D & B'' \end{pmatrix},\ B' \in M_k(F)$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & / & / \\ & .. & / \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C' & H \\ 0 & C'' \end{pmatrix},\ C' \in M_k(F)$$

$$BAC = \begin{pmatrix} B' & 0 \\ D & B'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C' & H \\ 0 & C'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B'XC' & /// \\ /// & /// \end{pmatrix}$$

Тогда $\det(B'XC') = \underbrace{\det B'}_{=1} \cdot \det X \cdot \underbrace{\det C'}_{=1} = \det X$, то есть определитель подматрицы не изменился.

□

Теорема. *(критерий Сильвестра)*

Пусть Δ_k *— главные миноры матрицы* Q *в базисе* f*. Если* $\Delta_k \neq 0$*, то* $\operatorname{sign} Q = \operatorname{sign}\left(\frac{\Delta 1}{\Delta_0}, ..., \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}\right)$.

Доказательство. Индукция по размерности пространства m.

При $m = 1$ очевидно.

При $m > 1$: Пусть g — базис V, такой, что $g_1 = f_1$, $g_k = \frac{(f_k, f_1)}{(f_1, f_1)} f_1$, то есть ортогональный вектору f_1. $B(g_1, g_i) = B(f_1, f_i - \frac{(f_k, f_1)}{(f_1, f_1)} f_1) = B(f_1, f_i) - B(f_i, f_1) = 0$.

Матрица примет вид:

$$Q_g = B_g = \begin{pmatrix} (f_1, f_1) & 0 & 0 \\ 0 & /// & /// \\ 0 & /// & /// \end{pmatrix}$$

Пусть

$$Q_f = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & ... & a_{mm} \end{pmatrix} \Rightarrow Q_g = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & b_{2m} \\ 0 & b_{m2} & b_{mm} \end{pmatrix},\ C_{f \to g} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & -\frac{a_{1m}}{a_{11}} \\ & 1 & 0 \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

$C_{f \to g}$ — верхняя унитреугольная, $C^T_{f \to g}$ — нижняя унитреугольная, $Q_g = \overline{C_{f \to g}}^T Q_f C_{f \to g} \Rightarrow$ по лемме $\operatorname{sign} Q_f = \operatorname{sign} Q_g$.

Пусть

$$\gamma_m = \det B' = \det \begin{pmatrix} b_{22} & ... & b_{2m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m2} & ... & b_{mm} \end{pmatrix}$$

так как $B' \in M_{n-1}(F)$, то по ИП $\operatorname{sign} B = \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_0}, ..., \frac{\gamma_{m-1}}{\gamma_{m-2}}\right)$, положим $\Delta_m = a_{11}\Delta_m$, откуда $\operatorname{sign} Q = \operatorname{sign}\left(\frac{\Delta_1}{\Delta_0}, ..., \frac{\Delta_m}{\Delta_{m-1}}\right)$ □

34 Самосопряженные унитарные операторы в эрмитовом пространстве, их собственных чисел и собственных векторов

V — эрмитово пространство, e — ортогонормированный базис, $L : V \to V$ — произвольный линейный оператор.

$$\forall x, y \in V : \ (x, L(y)) = \overline{x}_e^T \underbrace{B_e}_{=E_e} L_e y_e = \overline{x}_e^T L_e y_e = \overline{x}_e^T \overline{(\overline{L_e}^T)}^T y_e = \overline{\left(\overline{L_e}^T x_e\right)}^T y_e =$$

$$\overline{\left(\overline{L_e}^T x_e\right)}^T B_e y_e = \left(\overline{L}^T(x), y\right)$$

Определение. Оператор $L^* = \overline{L}^T$ — сопряженный к L.

Если $L = L^*$, то L — самосопряженный.

Если $L^{-1} = L^*$, то L — унитарный.

Если $LL* = L^*L$, то L — нормальный.

Лемма. *L — унитарный $\Leftrightarrow (L(x), L(y)) = (x, y)\ \forall x, y \in V$.*

Доказательство. $L^{-1} = L^*$. Тогда, по равенству в начале вопроса, $(L(x), L(y)) = (L^*L(x), y) = (x, y)$.

Обратно: $(L(x), L(y)) = (x, y) \Rightarrow (L(x), L(x)) = (x, x) = 0 \Leftrightarrow x = L(x) = 0$. Тогда $\ker L = \{0\}$, по теореме о размерности ядра и образа, $\dim ImL = \dim V \Rightarrow L$ — изоморфизм $\Rightarrow \exists L^{-1}$.

$(x, y) = (L(x), L(y)) = (L^*L(x), y) \Rightarrow x - L^*L(x) = 0 \Rightarrow x = L^*L(x) \Rightarrow L^* = L^{-1}$. □

Теорема. *L — самосопряженный оператор. Тогда собственные числа $\in \mathbb{R}$, а собственные векторы попарно ортогональны.*

Доказательство. Пусть x, y — собственные вектора, а λ, μ — соответсвующие им собственные числа. Тогда

$$(L^*(x), x) = (x, L(x)) = (x, \lambda x) = \lambda(x, x)$$
$$(L^*(x), x) = (L(x), x) = (\lambda x, x) = \overline{\lambda}(x, x)$$

Откуда $\lambda \in \mathbb{R}$. По только что доказанному,

$$(L(x), y) = (x, L(y)) = (x, \mu y) = \mu(x, y)$$
$$(L(x), y) = (\lambda x, y) = \overline{\lambda}(x, y) = \lambda(x, y)$$

При этом $\lambda \neq \mu \Rightarrow (x, y) = 0\ \forall x, y \in V$. □

35 Нормальные операторы и их диагонализация

Лемма. *$A, B : V \to V$ перестановочны, то есть $A(B(x)) = B(A(x))$. Тогда собственное подпространство A инвариантно относительно B, то есть $(V_\lambda = \ker(A - \lambda I)),\ B(V_\lambda) \subset V_\lambda$.*

Доказательство. $A(B(x)) = B(A(x)) = B(\lambda x) = \lambda B(x) \Rightarrow B(x) \in V_\lambda$. □

Лемма. *Если U — L-инвариантно, то $U^\perp$ — L^*-инвариантно.*

Доказательство. Пусть $u_1 \in U,\ u_2 \in U^\perp$. Тогда $(L^*(u_1), u_2) = (u_2, L(u_1)) = 0$, следовательно, $L^*(u_2) \in U^\perp$. □

Лемма. *V_λ — собственное подпространство, L — нормальный оператор. Тогда $V_\lambda^\perp$ L-инвариантно.*

Доказательство. $L^*L = LL^*$. V_λ L^*-инвариантно по первой лемме. $V_\lambda^\perp$ $(L^*)^*$-инвариантно по второй лемме. $\square$

Теорема. *$\forall L$ — нормального оператора существует базис v, такой, что L_v — диагонализуем.*

Доказательство. L_v — диагонализуем, если u — базис, состоящий из собственных векторов. Доказательство по индукции по $n = \dim V$. При $n = 1$ — очевидно. При $n > 1$:

χ_L — характеристический многочлен степени $> 1 \Rightarrow \chi_L$ имеет хотя бы один корень. Разложим $V = V_\lambda \bigoplus V_\lambda^\perp$. $\dim V_\lambda \neq 0 \Rightarrow \dim V_\lambda^\perp < n$. $V_\lambda^\perp$ — L-инвариантно, тогда $L|_{V_\lambda^\perp}$ — нормальный оператор, тогда по индукционному переходу $\exists(u_1, ..., u_{n-1})$ — базис $V_\lambda^\perp$, состоящий из собственных векторов. Ортогонализацией Г-Ш получим ортогональный базис в V_λ, базис $V = (u_1, ..., u_n) = u$ L_u — диагональная. $\square$