

Дисклеймер.

Автор не несет ответственности за любой ущерб, причиненный Вам при использовании данного документа. Автор напоминает, что данный документ может содержать ошибки и опечатки, недостоверную и/или непроверенную информацию. Если Вы желаете помочь в развитии проекта или сообщить об ошибке/опечатке/неточности:

[GitHub проекта](#)

[Автор в ВК](#)

Содержание

1	pass	3
1.1	Понятие множества. Отображение	3
1.2	Метрические и нормированные пространства	4
1.3	Неподвижные точки отображения	6
1.3.1	Приложение принципа сжимающих отображений к решению алгебраических уравнений	7
1.3.2	Приложение принципа сжимаемых отображений к решению системы алгебраических уравнений	7
1.3.3	Применение принципа сжимаемых отображений к решению дифференциальных уравнений	8
1.3.4	Применение принципа сжимаемых отображений к решению интегральных уравнений	9
1.3.5	Теорема о неподвижной точки Шаудера	11

Список литературы

- [1] Колмогоров, Фомин «Элементы теории функций и функционального анализа»
- [2] Канторович, Акилов «Функциональный анализ нормированных пространств»
- [3] Вулих «Основы теории функций вещественной переменной»
- [4] Халмош «Теория меры»
- [5] Данфорд, Шварц «Линейные операторы. Общая теория»
- [6] Очан «Сборник задач по теории функций вещественной переменной»

1 pass

1.1 Понятие множества. Отображение

Определение 1.1. Множеством называется совокупность элементов какой-либо природы.

Определение 1.2. Множества A и B дизъюнкты, если они не пересекаются.

Система множеств также называется дизъюнктивной, если множества попарно не пересекаются: $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j$

Определение 1.3. Множество называется упорядоченным, если для его элементов введены операции отношения $<, >, \leq, \geq$.

Если множество упорядочено, то для него можно ввести понятие ограниченности, супремума, инфимума и так далее.

Определение 1.4. Пусть заданы M, N — произвольные множества. И пусть задано правило f , согласно которому $\forall x \in M \exists! y = f(x) \in N$. Тогда говорят, что задано отображение $f : M \rightarrow N$.

Соответственно x — прообраз, y — образ.

Пример 1.1. Пусть M и N — числовые. Тогда f называется функцией.

Пример 1.2. Пусть $M = C[a, b]$ — непрерывные функции из $[a, b]$ и $N = \mathbb{R}$. Тогда отображение — функционал. $y = \int_a^b x(t)dt$ — элементарный функционал.

Пример 1.3. $M = \mathbb{R}^3$, а $N = Oxy$ и каждому вектору сопоставляется его проекция. Тогда отображение будет называться оператором.

Пример 1.4. M — множество фигур в \mathbb{R}^2 и каждой фигуре ставится в соответствие ее площадь. Тогда отображение называется мерой. Или, в теории вероятности, отображение события в значение его вероятности.

Определение 1.5. Два множества A и B называются эквивалентными или равномошными, если между их элементами можно установить взаимно однозначное соответствие.

Определение 1.6. Пусть A, B — множества, и при этом $\exists D \subset B : A \sim D$ и $\exists C \subset A : B \sim C$. Тогда говорят, что B мощнее A .

Пример 1.5. Самыми маломощными являются конечные множества. Следующие по мощности — счетные. Следующие — множества мощности континуума (мощность множества вещественных чисел на любом отрезке). Есть ли еще мощнее?

Теорема 1.1. Пусть A — множество, а B — множество всех подмножеств множества A . Тогда B мощнее A .

Замечание 1.1. Если A имеет мощность континуума, то B будет иметь мощность гиперконтинуума. Из теоремы следует, что мощность можно увеличивать до бесконечности.

1.2 Метрические и нормированные пространства

Определение 1.7. Пространство X называется метрическим, если $\forall x, y \in X \exists! \rho(x, y) \in \mathbb{R}$, такое, что:

- 1) $\rho(x, y) \geq 0$, при этом $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
 - 2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;
 - 3) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(y, z)$
- $\forall x, y, z \in X$.

Пример 1.6.

$X = \mathbb{R}$, тогда $\rho(x, y) = |x - y|$.

$X = \mathbb{R}^n$, тогда: $\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$ (сферическая метрика) или $\rho(x, y) = \max_{i=1, \dots, n} |x_i - y_i|$ (параллелепипедальная) и любые другие, на какие может хватить фантазии. Вообще говоря, близость в одной метрике не значит близости в другой.

Пример 1.7. Пусть $X = C[a, b]$. $\rho(f(x), g(x)) = \max_{[a, b]} |f(x) - g(x)|$

Или $\rho(x, y) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$.

Определение 1.8. ε -окрестность точки x : $V_\varepsilon(x) = \{y \in X : \rho(x, y) < \varepsilon\}$ — шар с центром в точке x и радиусом ε .

Используя понятие окрестности, можно ввести понятия предельной точки, внутренней точки, открытого и замкнутого множества и так далее.

Определение 1.9. Пусть $A \subset B$. A всюду плотно в B , если $\forall \varepsilon > 0, \forall x \in B \exists y \in A : \rho(x, y) < \varepsilon$.

Определение 1.10. Множество X называется сепарабельным, если у него есть счетное всюду плотное подмножество.

Пример 1.8. \mathbb{R} — сепарабельное $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Аналогично $C[a, b]$ — сепарабельное, поскольку содержит множество полиномов.

Определение 1.11. $A \subset B$. A нигде не плотно в B , если оно не плотно ни в одном шаре из B .

Пример 1.9. $B = \mathbb{R}$. $A = \mathbb{N}$.

Определение 1.12. Пусть $\{x^{(k)}\}_{k=1}^\infty$ — последовательность элементов в X . И пусть $x^* \in X$. Тогда $x^{(k)} \rightarrow x^* : \rho(x^{(k)}, x^*) \rightarrow_{k \rightarrow \infty} 0$.

Определение 1.13. Последовательность $\{x^{(k)}\}_{k=1}^\infty$ фундаментальна, если для нее выполнен критерий Коши: $\forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 : \forall k, n \geq N$ выполняется $\rho(x^{(k)}, x^{(n)}) < \varepsilon$.

Теорема 1.2. Если последовательность сходится, то она фундаментальна.

Доказательство. Рассмотрим $0 \leq \rho(x^{(k)}, x^{(n)}) \leq \rho(x^{(k)}, x^*) + \rho(x^*, x^{(n)}) \rightarrow_{k \rightarrow \infty} 0$. Теорема о двух милиционерах. \square

Определение 1.14. Пространство X — полное, если любая фундаментальная последовательность в нем сходится к элементу этого пространства: \forall фундаментальной $\{x^{(k)}\} \in X \exists x^* \in X$, такое, что $x^{(k)} \rightarrow_{k \rightarrow \infty} x^*$.

Пример 1.10. $X = \mathbb{R}$ — полное. $X = \mathbb{Q}$ — не полное, $x^{(k)} = (1 + \frac{1}{k})^k \in \mathbb{Q}$ сходится к e , но $e \notin \mathbb{Q}$.

Замечание 1.2. Полнота пространства зависит, вообще говоря, от введенной метрики.

Пример 1.11. $X = C[a, b]$, $\rho_1(f(x), g(x)) = \max_{[a, b]} |f(x) - g(x)|$ и $\rho_2(f(x), g(x)) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$. Если рассматривать $\rho_1(f_k(x), g(x)) \rightarrow_{k \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow f_k(x) \xrightarrow[k \rightarrow 0]{[a, b]} f(x) \Rightarrow f(x) \in X$, но $\rho_2(f_k(x), g(x)) \rightarrow_{k \rightarrow \infty} 0 \not\Rightarrow f(x) \in X$.

Теорема 1.3. Для того, чтобы X было полным, необходимо и достаточно, чтобы любая последовательность вложенных друг в друга замкнутых шаров имела непустое пересечение.

Доказательство. Аналогично лемме Коши-Кантора для вложенных отрезков. \square

Теорема 1.4. (Бэра) Полное пространство не может быть представлено в виде счетного объединения нигде не плотных множеств.

Вывод 1.1. Полное пространство не может быть счетным.

Если пространство не полное, то его можно пополнить.

Определение 1.15. X^* называется пополнением пространства X , если:

- 1) $X \subset X^*$;
- 2) X — всюду плотно в X^* .
- 3) X^* — полное.

Операция пополнения эквивалентна операции замыкания, но замыкают чем-то известным, а пополняют чем-то новым.

Пример 1.12. \mathbb{Q} — неполное. Дополним его иррациональными числами и получим полное пространство \mathbb{R} .

Определение 1.16. Пространство X линейно, если для элементов этого пространства введены операции сложения и умножения на константу.

Определение 1.17. Линейные пространства X, Y изоморфны, если $X \sim Y$ и $\forall x_1, x_2 \in X, \forall y_1, y_2 \in Y$ и $x_1 \sim y_1, x_2 \sim y_2 \Rightarrow x_1 + x_2 \sim y_1 + y_2, \lambda x_1 \sim \lambda y_1$.

Пример 1.13. X — множество полиномов степени $\leq (n - 1)$. $Y = \mathbb{R}^n$. Тогда $X \sim Y$,

$$x(t) = a_1 t^{n-1} + \dots + a_n \sim y = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Для линейных пространств можно ввести понятие линейной зависимости и независимости элементов, размерности, базиса, подпространства и так далее.

Определение 1.18. Линейное пространство X называется нормированным, если $\forall x \in X : \exists ! r \in \mathbb{R}$, которое называется нормой ($\|x\|$) и удовлетворяет следующим аксиомам:

- 1) $\|x\| \geq 0, \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
- 2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$;
- 3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$;

Если пространство нормированно, то его всегда можно метризовать.

Стандартной считается метрика, согласованная с нормой: $\rho(x, y) = \|x - y\|$.

Определение 1.19. Полное нормированное пространство называется Банаховым пространством.

Замечание 1.3. Все основные определения и свойства метрического пространства вытекали из определения метрики.

Можно пойти другим путем: не вводя метрику непосредственно определить с помощью аксиом что считать открытым множеством, замкнутым и так далее. В результате приходим к так называемым топологическим пространствам.

1.3 Неподвижные точки отображения

Пусть X, Y — два метрических пространства. Пусть ρ_1, ρ_2 — метрики в пространствах X и Y соответственно. И пусть задано отображение $\mathcal{A} : X \rightarrow Y$ ($\forall x \in X \exists y = \mathcal{A}x \in Y$).

Определение 1.20. Отображение \mathcal{A} называется непрерывным в точке $x_0 \in X$, если $\forall \{x_k\} \in X : x_k \rightarrow_{k \rightarrow \infty} x_0 \Rightarrow \mathcal{A}x_k \rightarrow_{k \rightarrow \infty} \mathcal{A}x_0$.

Или, что то же самое: $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$, такое, что если $\rho_1(x, x_0) < \delta$, то $\rho_2(\mathcal{A}x, \mathcal{A}x_0) < \varepsilon$.

Предположим далее, что $X = Y$, то есть $\mathcal{A} : X \rightarrow X$ и $\rho_1 = \rho_2 = \rho$.

Определение 1.21. Точка $x^* \in X$ — неподвижная точка отображения \mathcal{A} , если $\mathcal{A}x^* = x^*$.

Определение 1.22. Отображение $\mathcal{A} : X \rightarrow X$ называется сжимающим, если $\exists \alpha \in [0, 1)$, такая, что $\forall x, y \in X$ верно $\rho(\mathcal{A}x, \mathcal{A}y) \leq \alpha \rho(x, y)$.

Лемма 1.1. \mathcal{A} сжимающее $\Rightarrow \mathcal{A}$ непрерывное на X .

Доказательство. $\forall x_0 \in X, \forall \{x_k\} \in X : x_k \rightarrow_{k \rightarrow \infty} x_0 \Rightarrow 0 \leq \rho(\mathcal{A}x_k, \mathcal{A}x_0) \leq \alpha \rho(x_k, x_0) \rightarrow_{k \rightarrow \infty} 0$ □

Теорема 1.5. (о неподвижной точке, она же Каччаполи-Банаха, она же принцип сжимающих отображений)

Пусть X — полное метрическое пространство, $\mathcal{A} : X \rightarrow X$. Тогда у отображения \mathcal{A} $\exists!$ неподвижная точка.

Доказательство. $\forall x_0 \in X$:

$$\begin{aligned} x_1 &= \mathcal{A}x_0; \\ x_2 &= \mathcal{A}x_1 = \mathcal{A}(\mathcal{A}x_0) = \mathcal{A}^2 x_0; \\ &\dots \\ x_k &= \mathcal{A}^k x_0; \end{aligned}$$

Докажем, что эта последовательность является фундаментальной:

$$\forall n \geq m \geq 1$$

$$\begin{aligned} \rho(x_n, x_m) &= \rho(\mathcal{A}^n x_0, \mathcal{A}^m x_0) \leq \alpha \rho(\mathcal{A}^{n-1} x_0, \mathcal{A}^{m-1} x_0) \leq \dots \leq \alpha^m \rho(\mathcal{A}^{n-m} x_0, x_0) \leq \\ &\leq \alpha^m (\rho(\mathcal{A}^{n-m} x_0, \mathcal{A}^{n-m-1} x_0) + \dots + \rho(\mathcal{A}^{n-m-1} x_0, \mathcal{A}^{n-m-2} x_0) + \dots + \rho(\mathcal{A} x_0, x_0)) \leq \\ &\leq \alpha^m (\alpha^{n-m-1} \rho(\mathcal{A} x_0, x_0) + \alpha^{n-m-2} \rho(\mathcal{A} x_0, x_0) + \dots + \rho(\mathcal{A} x_0, x_0)) \leq \\ &\leq \alpha^m \rho(x_0, x_1) (1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{n-m-1} + \dots) = \frac{\alpha^m \rho(x_0, x_1)}{1 - \alpha} \rightarrow_{m \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

следовательно, последовательность является фундаментальной.

X полное, следовательно, $\exists x^* \in X : x_k \rightarrow_{k \rightarrow \infty} x^*$. Покажем, что x^* будет неподвижной точкой:

$$\mathcal{A}x^* = \mathcal{A} \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = (\mathcal{A} \text{ сжим, негр}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{A}x_k = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{k+1} = x^*$$

Докажем, что точка единственная. От противного:

x^*, y^* — неподвижные точки \mathcal{A} . Тогда:

$$0 \leq \rho(x^*, y^*) = \rho(\mathcal{A}x^*, \mathcal{A}y^*) \leq \underbrace{\alpha}_{<1} \rho(x^*, y^*)$$

То есть $\rho(x^*, y^*) = 0$. □

Замечание 1.4. В доказательстве содержится алгоритм поиска неподвижной точки. Выберем любую точку, применим к ней несколько раз отображение и предел данной последовательности будет неподвижной точкой.

1.3.1 Приложение принципа сжимающих отображений к решению алгебраических уравнений

Проблема. Пусть требуется решить уравнение $x = \varphi(x)$, где c — корень, причем $c \in [a, b]$.

Решение. Возьмем конкретное пространство $X = \mathbb{R}$. Метризуем: $\rho(x, y) = |x - y|$. Пространство полное. Введем отображение $\mathcal{A}x = \varphi(x)$. Тогда уравнение сведется к виду $\mathcal{A}x = x$, а c — неподвижная точка. Нам осталось лишь доказать сжимаемость данного отображения.

Пусть $\varphi(x)$ — удовлетворяет условию Липшица на $[a, b]$: $\exists \alpha > 0 : \forall x, y \in [a, b] \Rightarrow \underbrace{|\varphi(x) - \varphi(y)|}_{\rho(\mathcal{A}x, \mathcal{A}y)} \leq \alpha \underbrace{|x - y|}_{\rho(x, y)}$. Таким образом, оно сжимающее.

И тогда мы можем найти $\{x_k\} \rightarrow_{k \rightarrow \infty} c$.

1.3.2 Приложение принципа сжимаемых отображений к решению системы алгебраических уравнений

Проблема. Требуется решить следующую систему уравнений: $x = Ax + b$ (1). A, b заданы, x — неизвестен. $X = \mathbb{R}^n$.

Решение. Введем отображение $\mathcal{A}x = Ax + b$. Тогда уравнение (1) сводится к поиску c — неподвижной точки отображения \mathcal{A} . 4

Если отображение сжимающее, то берем произвольный вектор, применяем к нему отображение и так далее. Тогда последовательность векторов будет сходиться к нужному нам корню.

Выпишем далее достаточные условия сжимаемости отображения \mathcal{A} . Сжимаемость, вообще говоря, зависит от введенной метрики. Для того, чтобы можно было применить принцип, достаточно, чтобы сжимаемость была хотя бы в одной метрике.

1) Пусть метрика введена следующим образом: x, y — вектора и $\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$. Рассмотрим расстояния между образами:

$$\rho^2(\mathcal{A}x, \mathcal{A}y) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}(x_j - y_j) \right)^2 \leq \dots$$

Применяем неравенство Коши-Буняковского-Шварца:

$$\dots \leq \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right) = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \right) \rho^2(x, y)$$

Тогда \mathcal{A} — сжимающее, если $\left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \right) < 1$.

2) Или так: $\rho(x, y) = \max_{i=\overline{1, n}} |x_i - y_i|$.

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n \quad \rho(\mathcal{A}x, \mathcal{A}y) = \max_{i=\overline{1, n}} \left| \sum_{j=1}^n a_{ij}(x_j - y_j) \right|$$

Оценим сие сверху:

$$\rho(\mathcal{A}x, \mathcal{A}y) = \max_{i=\overline{1, n}} \left| \sum_{j=1}^n a_{ij}(x_j - y_j) \right| \leq \left(\max_{i=\overline{1, n}} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right) \cdot \underbrace{\left(\max_{j=\overline{1, n}} |x_j - y_j| \right)}_{=\rho(x, y)}$$

Для сжимаемости достаточно выполнения условия $\sum_{j=1}^n |a_{ij}| < 1$, $i = \overline{1, n}$.

1.3.3 Применение принципа сжимаемых отображений к решению дифференциальных уравнений

Пусть записан диффур в стандартном виде: $y' = f(x, y)$. Поставим задачу Коши: $y(x_0) = y_0$.

Данную задачу Коши можно переписать в следующей интегральной форме:

$$y = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y(x)) dx$$

Тогда $X = C^1$ — множество непрерывно дифференцируемых функций. Теперь нужно найти отображение $\mathcal{A} : X \rightarrow X$:

$$\mathcal{A}y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y(x)) dx$$

Откуда отображение запишется в форме

$$y(x) = \mathcal{A}y(x)$$

Пусть G — некоторая область, содержащая точку (x_0, y_0) . Будем считать, что $f(x, y)$ — непрерывна в G и удовлетворяет условию Липшица, то есть $\forall y_1, y_2, \forall x : (x, y_1), (x, y_2) \in G$

$G \Rightarrow |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L |y_1 - y_2|$. Пусть без потери общности G замкнута, тогда $K = \max_G |f(x, y)|$.

Рассмотрим область D следующего вида: $\begin{cases} |x - x_0| \leq d \\ |y - y_0| \leq Kd \end{cases}$, где $d = \text{const}$. Положим,

$D \subset G$ и $Ld < 1$.

$\forall y(x) : |y(x) - y_0| \leq Kd$ при $x \in [x_0 - d, x_0 + d]$, следовательно, $|\mathcal{A}y(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^x f(x, y(x)) dx \right| \leq Kd$, то есть применение отображения \mathcal{A} за пределы области D не выводит.

Теперь нам нужна метрика и мозги. В качестве метрики примем: $\rho(y_1(x), y_2(x)) = \max_{[x_0-d, x_0+d]} |y_1(x) - y_2(x)|$. Проверим, что в этой метрике отображение будет сжимающим.

$\forall y_1(x), y_2(x)$

$$\begin{aligned} \rho(\mathcal{A}y_1(x), \mathcal{A}y_2(x)) &= \max_{[x_0-d, x_0+d]} \left| \int_{x_0}^x (f(x, y_1(x)) - f(x, y_2(x))) dx \right| \leq \\ &\leq \max_{[x_0-d, x_0+d]} Ld |y_1(x) - y_2(x)| = \underbrace{Ld}_{<1} \rho(y_1(x), y_2(x)) \end{aligned}$$

В результате получаем теорему Пикара.

Теорема 1.6. (Пикара) Пусть $f(x, y)$ непрерывна в G , удовлетворяет условию Липшица по y . Тогда решение задачи Коши будет существовать и будет единственным на $[x_0 - d, x_0 + d]$.

Доказательство. $\forall y^{(0)}(x) = y_0$.

Построим последовательность: □

$$y^{(1)} = \mathcal{A}y^{(0)}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y^{(0)}(x)) dx.$$

...

$$y^{(k)}(x) = \mathcal{A}y^{(k-1)}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y^{(k-1)}(x)) dx$$

Пример 1.14. $y' = y \Rightarrow y = Ce^x$. Пусть требуется найти функцию, удовлетворяющую начальному условию $y(0) = 1 \Rightarrow C = 1 : y = e^x$.

Строим последовательность:

$$y^{(0)}(x) = 1$$

$$y^{(1)}(x) = 1 + \int_0^x dx = x + 1.$$

$$y^{(2)}(x) = 1 + \int_0^x (x + 1) dx = 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

...

$$y^{(k)}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^k}{k!} + \dots$$

1.3.4 Применение принципа сжимаемых отображений к решению интегральных уравнений

Проблема. Рассмотрим уравнение вида $f(x) = \lambda \int_a^b K(x, y) f(y) dy + \varphi(x)$ — уравнение Фридгольма второго рода. Здесь $\lambda = \text{const}$, $K(x, y), \varphi(x)$ — заданы. Требуется найти $f(x)$.

Решение. $K(x, y)$ непрерывна при $x, y \in [a, b]$, $\varphi(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и мы будем искать нашу функцию, которая должна быть непрерывной на $[a, b]$.

В качестве пространства возьмем $X = C[a, b]$. Найдем отображение. Пусть

$$\mathcal{A}f(x) = \lambda \int_a^b K(x, y) f(y) dy + \varphi(x)$$

откуда $f(x) = \mathcal{A}f(x)$. Если $f^*(x)$ — неподвижная точка \mathcal{A} , то $f^*(x)$ — решение уравнения Фридгольма. Нам нужна метрика. Берем стандартную: $\forall f_1(x), f_2(x) \quad \rho(f_1(x), f_2(x)) = \max_{[a,b]} |f_1(x) - f_2(x)|$.

Пусть $M = \max_{x,y \in [a,b]} |K(x, y)| \cdot \forall f_1(x), f_2(x)$

$$\begin{aligned} \rho(\mathcal{A}f_1(x), \mathcal{A}f_2(x)) &= \max_{[a,b]} \left| \lambda \int_a^b K(x, y) (f_1(y) - f_2(y)) dy \right| \leq \\ &\leq |\lambda| M(b-a) \cdot \underbrace{\max_{[a,b]} |f_1(y) - f_2(y)|}_{=\rho(f_1(x), f_2(x))} \end{aligned}$$

Откуда условие сжимаемости: $|\lambda| M(b-a) < 1$.

Рассмотрим обобщения сжимаемых отображений:

Теорема 1.7. Пусть X — полное метрическое пространство и $\mathcal{A} : X \rightarrow X$. Пусть $\exists k \in \mathbb{N} : \mathcal{A}^k$ — сжимающее. Тогда у отображения \mathcal{A} существует ровно одна неподвижная точка.

Доказательство. Пусть $\mathcal{B} = \mathcal{A}^k : X \rightarrow X$. \mathcal{B} — сжимающее, следовательно, по теореме Каччаполи-Банаха $\exists!$ неподвижная точка x^* отображения \mathcal{B} . Тогда x^* будет и неподвижной точкой отображения \mathcal{A} .

$\mathcal{A}x^* = \mathcal{A}(\mathcal{B}x^*) = \dots = \mathcal{A}(\mathcal{B}^m x^*) = \mathcal{B}^m(\mathcal{A}x^*)$. Из доказательства теоремы Каччаполи-Банаха $\underbrace{\mathcal{B}^m(\mathcal{A}x^*)}_{=x_0} \rightarrow_{m \rightarrow \infty} x^*$, откуда $\mathcal{A}x^* = x^* \Rightarrow x^*$ — неподвижная точка \mathcal{A} . \square

Пример 1.15. Рассмотрим уравнение Фридгольма, которое теперь уравнение Вольтерра:

$$f(x) = \lambda \int_a^x K(x, y) f(y) dy + \varphi(x)$$

Аналогично уравнению Фридгольма заданы λ, K, φ и функции непрерывны. Аналогично $X = C[a, b], \forall f_1(x), f_2(x) \quad \rho(f_1(x), f_2(x)) = \max_{[a,b]} |f_1(x) - f_2(x)|, M = \max_{x,y \in [a,b]} |K(x, y)|$.

Под образом функции будем понимать $\mathcal{A} = \lambda \int_a^x K(x, y) f(y) dy + \varphi(x) \Rightarrow \mathcal{A}f(x) = f(x)$. Аналогично с Фридгольмом,

$$\rho(\mathcal{A}f_1(x), \mathcal{A}f_2(x)) \leq |\lambda| M(x-a) \cdot \underbrace{\max_{[a,b]} |f_1(y) - f_2(y)|}_{=\rho(f_1(x), f_2(x))}$$

Рассмотрим двукратные образы:

$$\rho(\mathcal{A}^2 f_1(x), \mathcal{A}^2 f_2(x)) \leq \frac{|\lambda^2| M^2(x-a)^2}{2!} \rho(f_1(x), f_2(x))$$

На k -том шаге:

$$\rho(\mathcal{A}^k f_1(x), \mathcal{A}^k f_2(x)) \leq \frac{|\lambda^k| M^k(x-a)^k}{k!} \rho(f_1(x), f_2(x)) \leq \frac{|\lambda^k| M^k(b-a)^k}{k!} \rho(f_1(x), f_2(x))$$

Откуда $\exists k :$

полное дерьмо

дописать.

1.3.5 Теорема о неподвижной точки Шаудера

Определение 1.23. Пространство X компактно, если из любой последовательности элементов этого пространства можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Теорема 1.8. X — компактно, следовательно, полное.

Доказательство. Пусть $\{x_k\}$ — фундаментальная последовательность. Если X — компактно, то \exists сходящаяся подпоследовательность, которая сходится: $\{x_{m_k}\} \rightarrow_{k \rightarrow \infty} x^*$.

Рассмотрим $\rho(x_k, x^*)$:

$$0 \leq \rho(x_k, x^*) \leq \underbrace{\rho(x_k, x_{m_k})}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\rho(x_{m_k}, x^*)}_{\rightarrow 0}$$

первое из фундаментальности, второе из сходимости. □

Теорема 1.9. (критерий компактности)

X компактно $\Leftrightarrow X$ замкнуто и ограничено.

Доказательство.

Необходимость. От противного. Пусть оно не замкнуто. Тогда \exists предельная точка $x^* \notin X$. По определению предельной точки $\exists x_k \in X : x_k \rightarrow_{k \rightarrow \infty} x^*$. Тогда $\rho(x_k, x^*) \rightarrow_{k \rightarrow \infty} 0$. Тогда любая подпоследовательность $\{x_{m_k}\} \rightarrow_{k \rightarrow \infty} x^*$. Отсюда X не полное.

Пусть X не ограничено. Тогда $\exists \bar{x} \in X, \exists \{x_k\} \in X : \rho(x_k, \bar{x}) \rightarrow_{k \rightarrow \infty} \infty$. Тогда $\forall \{x_{m_k}\} \rho(x_{m_k}, \bar{x}) \rightarrow_{k \rightarrow \infty} \infty$. Следовательно, $\nexists \hat{x} \in x^* : x_{m_k} \rightarrow x$ □