Дисклеймер.

Автор не несет ответственности за любой ущерб, причиненный Вам при использовании данного документа. Автор напоминает, что данный документ может содержать ошибки и опечатки, недостоверную и/или непроверенную информацию. Если Вы желаете помочь в развитии проекта или сообщить об ошибке/опечатке/неточности:

GitHub проекта

Автор в ВК

Содержание

(Екатерина Викторовна, 234 или 236 аудитория) E-mail: ekaterina.shevkoplyas@gmail.com ДОСРОКА НЕ БУДЕТ.

Часть I
Случайные события

1 Элементарная теория вероятности

1.1 Основные понятия. Испытание (опыт, эксперимент), событие

Определение 1.1. Теория вероятности — наука, изучающая закономерности случайных явлений.

Определение 1.2. Опыт, испытание, эксперимент — некоторая воспроизводиная совокупность условий, в рамках которых может произойти то или иное явление, тот или иной факт.

Пример 1.1.
1) Подбрасывание одной монеты;
2) Двух;
3) Выстрел по мишени;
4) Подбрасывание игрального кубика-кости (да, берцовой);
5) Рождение ребенка и тому подобное.

Определение 1.3. Событие — любой факт, который может произойти либо не произойти в результате испытания. Обычно обозначаются заглавными латинскими буквами: A, B.

Пример 1.2.
1) Событие A — выпадение герба. $\Omega = \{\text{Г}, \text{Р}\}$;
2) Выпали все решки;
3) Попали по мишени;
4.1) Выпало шесть точек;
4.2) Выпало четное число точек;
5) Родился мальчик.
Событие 4.2 является *составным.*

Определение 1.4. Элементарное событие (или исход) — событие, которое не может являться объединением более мелких событий. Неопределяемое понятие.

Замечание 1.1. ω_i — обозначение элементарного исхода.
$\Omega = \{\omega_i\}$ — пространство элементарных исходов.

Определение 1.5. Случайное событие $A \subseteq \Omega$. Лежит между $\varnothing$ и Ω.

Определение 1.6. Событие, которое обязательно произойдет, называется достоверным. Так как оно состоит из всех элементов пространства элементарных исходов, оно обозначается Ω.

Определение 1.7. Событие, которое никогда не произойдет в результате испытаний, называется невозможным. Оно обозначается $\varnothing$.

Определение 1.8. Вероятность события A — число, характеризующее степень возможности этого события. Обозначается $p(A)$. Данное определение не является классическим.

Вероятность невозможного события $p(\varnothing) = 0$

Вероятность достоверного события $p(\Omega) = 1$.

Таким образом, $0 \leq p(A) \leq 1$.

1.2 Вероятность

1.2.1 Классическая формула вычисления вероятности

Пусть относительно Ω выполнены условия:

1) $|\Omega| = n$.

2) «Равные шансы»: все элементарные исходы равновозможны.

Тогда

$$p(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

где $|A|$ — мощность множества элементарных исходов, составляющих множество благоприятных исходов.

1.2.2 Статистическое определение вероятности

Если не выполнено второе условие, то формула приобретает вид:

$$p(A) = \frac{m_A}{n}$$

где m_A — число появлений события A, а n — число экспериментов.

1.2.3 Геометрическое определение вероятности

Выполнено второе условие, но не выполнено первое (конечность множества). В этом случае формула приобретет вид:

$$p(A) = \frac{l}{L}$$

где l — площадь (n-мерная) области, удовлетворяющей условию, L — площадь всей области.

1.3 Операции над событиями

Теория множеств	Теория вероятности
Ω — универсальное множество	пространство элем. исходов
$A \subset \Omega$	случайное событие
$\varnothing$ — пустое множество	невозможное событие
$\overline{A} = \Omega \backslash A$ — дополнение	противоположное событие
$A \cap B$	$A \cdot B$ произведение событий
$A \cup B$	$A + B$ сумма событий

Определение 1.9. Суммой событий $A + B$ называется событие D, которое состоит в выполнении хотя бы одного события A и B.

Определение 1.10. $\{A_1, ..., A_n\}$ — полная группа событий, если $A_i \cap A_j = \varnothing \; \forall i \neq j$ и $\sum_{i=1}^{n} A_i = \Omega$.

Определение 1.11. События A и B называются несовместными, если появление одного из них исключает появление другого. Не путать с независимостью!

Замечание 1.2. $A \subset B$ — появление события A влечет появление события B.

1.4 Основные теоремы теории вероятностей

Теорема 1.1. *Пусть A, B — несовместные события, то есть $(A \cdot B = \varnothing)$. Тогда $p(A + B) = p(A) + p(B)$.*

Вывод 1.1. $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$.

Теорема 1.2. *(о сложении)*
$p(A + B) = p(A) + p(B) - p(A \cdot B)$.

Определение 1.12. $p(^A/_B) = p_B(A)$ (читается «пэ от А при условии В») вводится как

$$\frac{p(A \cdot B)}{p(B)}$$

— условная вероятность события A при условии, что событие B произошло.

Теорема 1.3. *(умножения)*
Вероятность того, что произошло событие A и событие B равна $p(A \cdot B) = p(A) \cdot p(B) = p(B) \cdot p(^A/_B)$.

Вывод 1.2. $p(A \cdot B \cdot C) = p(A) \cdot p(^B/_A) \cdot p(^C/_{A \cdot B})$ *и аналогично для большего числа событий.*

1.4.1 Независимость событий

Определение 1.13. A и B независимы, если $p(A \cdot B) = p(A) \cdot p(B)$.

Определение 1.14. $A_1, ..., A_n$ независимы в совокупности, если $\forall A_{i_1}, ..., A_{i_k}$ выполнено $p(A_{i_1}, ..., A_{i_k}) = \prod_{l=1}^{k} p(A_{i_l})$

Определение 1.15. $A_1, ..., A_n$ попарно независимы, если $\forall A_i, A_j$ верно $p(A_i \cdot A_j) = p(A_i) \cdot p(A_j) \; \forall i \neq j$. Очевидно, что из независимости в совокупности следует попарная независимость.

Пример 1.3. (Контрпример. Пирамида Бернштейна)
Кидаем тетраэдр, грани которого раскрашены в красный, зеленый и синий цвета, а основание — во все три. Мы ее бросаем и смотрим, какой цвет выпал. Пусть A — выпадение красного, B — синего и C — зеленого цвета. Тогда $p(A \cdot B) = ^1/_4 = p(A) \cdot p(B) = ^2/_4 \cdot ^2/_4$. Аналогично для других цветов. То есть эти события попарно независимы. Но $p(A \cdot B \cdot C) = ^1/_4 = p(A)p(B)p(C) = ^1/_2 \cdot ^1/_2 \cdot ^1/_2 \Rightarrow$ нет независимости в совокупности.

1.5 Основные формулы комбинаторики

1.5.1 Перестановки

Определение 1.16. Перестановки — комбинации из n элементов, отличающихся порядком их расположения.

Множество всех перестановок множества из n элементов равно $n!$. $P_n = n!$.

Определение 1.17. Размещения — комбинации из n элементов по m элементов, отличающихся либо порядком, либо составом элементов.

Число всевозможных размещений $A_n^m = n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-m+1)$.

Определение 1.18. Сочетания — комбинации из n элементов по m элементов, отличающихся только составом элементов.

Число всевозможных сочетаний $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$.

Запомним: $C_n^{n-m} = C_n^m$, $C_n^0 = 1$.

1.5.2 Правила комбинаторики

Определение 1.19. Правило произведения: $(a_1, ..., a_n)$ и $(b_1, ..., b_m)$. Тогда выбрать пару (a_i, b_j) можно $n \cdot m$ способами.

Определение 1.20. Правило суммы: $(a_1, ..., a_n)$ и $(b_1, ..., b_m)$. Тогда выбрать либо a_i, либо b_j можно $m + n$ способами.

1.6 Выборки

Определение 1.21. $(a_1, ..., a_n)$ — некоторая генеральная совокупность однородных объектов. Вынем из них $\langle a_{i_1}, ..., a_{i_m} \rangle$ — выборка объема m. Выборка может быть с возвращением и без возвращения элементов в генеральную совокупность, а так же упорядоченная или неупорядоченная.

1) Упорядоченная выборка с возвращением: $\langle a_{i_1}, ..., a_{i_n} \rangle$, тогда $|\Omega| = n^m$.

2) Упорядоченная выборка без возвращения: $[a_{i_1}, ..., a_{i_n}]$, тогда $|\Omega| = A_n^m$.

3) Неупорядоченная выборка без возвращения: $[a_{i_1}, ..., a_{i_n}]$, при этом порядок не важен, важен состав $|\Omega| = C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$.

4) Неупорядоченная выборка с возвращением, $|\Omega| = C_{n+m-1}^m$.

M состояний частицы есть фактически M ящиков, в которые мы кладем n частиц. Частицы могут быть различимыми, а могут быть неразличимыми.

Запрет Паули говорит о том, что в коробке может находится одна или ноль частиц.

1) Частицы различимы, запрета Паули нет. Тогда это состояние эквивалентно упорядоченной выборке с возвращением.

2) Частицы неразличимы, есть запрет Паули. Тогда это состояние состояние эквивалентно неупорядоченной выборке без возвращения.

3) Частицы неразличимы, нет запрета Паули. Тогда это состояние эквивалентно неупорядоченной выборке с возвращением.

4) Частицы различимы, запрет Паули существует. Тогда это состояние эквивалентно упорядоченной выборке без возвращения.

2 Аксиоматика А.М. Колмогорова

2.1 Аксиоматическое определение вероятности

Определение 2.1. $\mathbb{A} \in 2^{\Omega}$, где Ω — пространство элементарных исходов, называется алгеброй, если:

1) $\Omega \in \mathbb{A}$

2) $\forall A, B \in \mathbb{A}$, $\begin{cases} A \cup B \in \mathbb{A} \\ A \cap B \in \mathbb{A} \end{cases}$

3) $\forall A \in \mathbb{A}$ выполняется $\overline{A} \in \mathbb{A}$.

Пример 2.1. $\mathbb{A}_1 = \{\varnothing, \Omega\}$

Определение 2.2. Числовая функция $\mu(A)$ называется конечной аддитивной мерой на $\mathbb{A}$, если:

1) $\mu(A) \geq 0 \ \forall A \in \mathbb{A}$.

2) $\forall A, B \in \mathbb{A} : \ A \cap B = \varnothing$ выполняется $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.

Определение 2.3. Если $\mu(A) = 1$, то ее говорят, что это конечная аддитивная вероятностная мера. Она обозначается $p(A) = \mu(A)$.

Она обладает следующими свойствами:

1) $p(A) \geq 0$

2) $p(\Omega) = 1$

3) $\forall A, B \in \mathbb{A} : \ A \cap B = \varnothing$ выполняется $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.

Определение 2.4. Система подмножеств $\mathbb{F}$ называется сигма-алгеброй, если:

1) Она является алгеброй

2) Она замкнута относительно счетного объединения/пересечения событий.

Определение 2.5. Счетно-аддитивная вероятностная мера $p(A)$ заданная $\forall A \in \mathbb{F}$ называется вероятностью, то есть:

1) $\forall A \in \Omega \ p(A) \geq 0$

2) $p(\Omega) = 1$

3) $\forall A_1, ..., A_n \in \mathbb{F}, \ A_i \cap A_j = \varnothing \forall i \neq j$ выполняется $p(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} p(A_n)$

Определение 2.6. $(\Omega, \mathbb{F}, p)$ — вероятностное пространство.

Определение 2.7. $(\Omega, \mathbb{F})$ — измерительное пространство.

2.2 Формула полной вероятности

Пусть у нас есть событие A и оно может произойти одновременно с одним и только одним из событий $H_1, ..., H_n$, таких, что:

1) $H_i \cdot H_j = \varnothing \ \forall i \neq j$;

2) $H_1 + ... + H_n = \Omega$;

И нам нужно найти вероятность события A.

$$p(A) = p(A \cdot \Omega) = p(A \cdot (H_1 + ... + H_n) = p(\sum_{i=1}^{n} A \cdot H_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} p(A \cdot H_i) = \sum_{i=1}^{n} p(H_i) \cdot p(A/H_i)$$

2.3 Формула Байеса

$$p(H_i/A) = \frac{p(H_i \cdot A)}{p(A)} = \frac{p(H_i) \cdot p(A/H_i)}{\sum_{i=1}^{n} p(H_i) \cdot p(A/H_i)}$$

$p(H_i/A)$ — апостариорная вероятность.

2.4 Схема Бернулли

Определение 2.8. Схема Бернулли — последовательность из n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A одинакова и равна p.

Если событие A произошло, то говорят об успехе, иначе — о неудаче.

Определение 2.9. Сама формула Бернулли имеет вид

$$p_n(K) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

где $q = 1 - p$.

2.5 Формула Пуассона

Пусть $np = \lambda$, тогда

$$\lim_{n\to\infty} p_n(k) = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)...(n-k)\lambda^k}{n \cdot n \cdot ... \cdot n \cdot k!} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} =$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n\to\infty} 1 \cdot (1 - \frac{1}{n}) \cdot ... \cdot (1 - \frac{k-1}{n}) \cdot (1 - \frac{\lambda}{n})^n (1 - \frac{\lambda}{n})^{-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Отсюда выводится сама формула:

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

2.6 Простейший поток событий

Определение 2.10. Потоком событий называется последовательность событий, которые наступают в случайный момент времени.

Определение 2.11. Поток называется простейшим/пуассоновским, если выполнены свойства:

1) Станционарность: вероятность появления k событий длины t $P_t(k)$ зависит только от t и k и не зависит начала.

2) Отсутствие последействия: вероятность появления k событий длины t $P_t(k)$ не зависит от предыстории процесса.

3) Ординарность: $\forall$ сколь угодно малого Δt вероятность наступления двух событий стремится к нулю.

Теорема 2.1. *Если поток пуассоновского типа, то вероятность $P_t(k)$ можно вычислить по формуле*

$$P_t(k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

где λ — интенсивностть потока, то есть количество наступлений событий за единицу времени.

Часть II

Случайные величины

3 Дискретные величины

3.1 Случайная величина

Определение 3.1. $\xi : \Omega \to \mathbb{R}^1$. Функция называется измеримой, если прообраз баррельского множества изменим.

Определение 3.2. Неформальное определение: числовая функция, которая в результате испытания примет одно и только одно значение, неизвестное заранее.

Случайные величины делятся на 3 типа:
1) Дискретные
2) Непрерывные
3) Сингулярные

Определение 3.3. Случайная величина является дискретной, если ее возможное значение конечно или счетно.

3.2 Дискретные случайные величины

Определение 3.4. Законом распределения ДСВ x называется перечень всех ее возможных значений x_i и соответсвующих им вероятностей p_i.

Записи:

x	x_1	x_2	...	x_n
p	p_1	p_2	...	p_n

События попарно несовместны, и сумма всех вероятностей равна единице.
Либо в виде многоугольника распределения.

3.3 Основные распределения дискретных случайных величин

1) Биномиальное. Если S_n — число успехов в схеме Бернулли, то случайная величина будет принимать целочисленные значения от 0 до n. $p_k\{S_n = k\} = C_n^k p^k q^{n-k}$.
2) Распределение Пуассона.
3) Геометрическое распределение.
4) Гипергеометрическое распределение.

3.4 Числовые характеристики дискретных случайных величин

Определение 3.5. Математическое ожидание случайной величины X есть среднее значение случайной величины X:

$$M(X) = \sum_i x_i p_i$$

Свойства:
1) $M(c) = c$;
2) $M(c \cdot X) = c \cdot M(X)$;

3) $M(X+Y) = M(X) + M(Y)$;
4) $M(XY) = M(X) \cdot M(Y)$, если X, Y — независимы.

Пример 3.1. (Санкт-Петербургский парадокс — пример не существования матожидания)

Игрок играет против казино. Подбрасывают монетку. Если выпадает герб на i броске, то игрок получает 2^i доллара. Посчитаем матожидание выигрыша: $M(Y) = \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{4} \cdot 4 + ...$ Этот ряд расходится, следовательно, матожидания выигрыша не существует.

Определение 3.6. Дисперсия случайной величины X:

$$D(x) = M(X - M(X))^2$$

или, что тоже самое,

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2$$

3.5 Моменты порядка k

Определение 3.7. Начальный момент порядка k: $\mu_k = M(X^k)$

Определение 3.8. Центральный момент порядка k: $\nu_k = M(X - M(X))^k$

3.6 Числовые характеристики для основных распределений дискретной случайной величины

1) Биномиальное: S_n — число успехов:

$$p_k = p\{S_n = k\} = C_n^k p^k q^{n-k}$$

4 pass

4.1 Функция распределения случайной величины

Определение 4.1. Функция распределения задается как

$$F(x) = p\{X < x\}$$

либо

$$F(x) = p\{X \leq x\}$$

Свойства функции распределения:
1) Принимает значение от 0 до 1, как вероятность;
2) $F(x)$ является неубывающей функцией;
3) $p\{x_1 \leq X \leq x_2\} = F(x_2) - F(x_1)$;
4) $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$, $\lim_{x \to 0} F(x) = 0$;
5) Непрерывна слева.

Определение 4.2. Случайная величина называется абсолютно непрерывной, если $\exists f(x) \geq 0$, такая, что

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

при этом $f(x)$ называется плотностью распределения.

$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ — интегральный закон;
$f(x) = F'(x)$ — дифференциальный закон.
Свойства:
1) $f(x) \geq 0$
2) $p\{x_1 \leq X \leq x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} f(t)dt$.
3) Условие нормировки: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.

4.2 Числовые характеристики абсолютно непрерывных случайных величин

Матожидание: $M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx$;
Дисперсия: $D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(X))^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - (M(x))^2$.
$\mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)dx$, $\nu_k = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(X))^k \cdot f(x)dx$

4.3 Основные распределения непрерывных случайных величин

4.3.1 Равномерное

$X \sim R(a, b)$ — равномерное распределение на промежутке (a, b).

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{1}{b-a} & x \in [a, b) \\ 0 & x \geq b \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & x \in [a, b) \\ 1 & x \geq b \end{cases}$$

$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx = \int_{a}^{b} x \frac{1}{b-a} dx = \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{b-a}\Big|_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2} \cdot \frac{1}{b-a} = \frac{a+b}{2}$.
$D(X) = ... = \frac{(b-a)^2}{12}$ (убедиться в этом).

4.3.2 Экспоненциальное

Определение 4.3. Случайная величина имеет экспоненциальное распределение, если

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \lambda e^{-\lambda t} & t \geq 0 \end{cases}$$

$$F(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \lambda e^{-\lambda t} & t \geq 0 \end{cases}$$

$M(T) = \int_{0}^{\infty} t \cdot \lambda e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}$.

4.3.3 Гауссово или нормальное

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

Стандартное нормальное распределение при $a = 0$, $\sigma = 1$.

4.4 Что-то непонятное

(Ω, F, P), $\xi(\omega) \geq \eta(\omega)$, $M\xi \geq M\eta$.
$\Delta(\omega) = \xi(\omega) - \eta(\omega)$.

Лемма 4.1. *Пусть* $\xi \geq 0$ $\forall \varepsilon > 0$. *Тогда* $p\{\xi > \varepsilon\} \leq \frac{M\xi}{\varepsilon}$.

4.4.1 Неравенство Чебышева

$p\{|\xi - M\xi| \geq \varepsilon\} \leq \frac{D\xi}{\varepsilon^2}$.

$$p\{|\xi - M\xi| \geq \varepsilon\} = p\left\{\underbrace{(\xi - M\xi)^2}_{\eta} \geq \varepsilon^2\right\}$$

$$p\left\{(\xi - M\xi)^2 \geq \varepsilon^2\right\} \leq \frac{M\left[((\xi - M\xi)^2\right]}{\varepsilon^2} = \frac{D\xi}{\varepsilon^2}$$

4.4.2 Закон больших чисел в форме Чебышева

Пусть есть последовательность попарно независимых случайных величин $x_1, ..., x_n$ и эти числа имеют равномерно ограниченную дисперсию: $(\exists C: \ \forall i \ Dx_i \leq C)$.

$$\lim_{n\to\infty} p\left(\left|\frac{x_1 + ... + x_n}{n} - \frac{M(x_1) + ... + M(x_n)}{n}\right| \leq \varepsilon\right) = 1$$

$$p\{|\xi - M\xi| \geq \varepsilon\} \leq \frac{D\xi}{\varepsilon^2}$$

$$p\{|\overline{x_n} - M[\overline{x_n}]| < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{D\overline{x_n}}{\varepsilon^2}$$

4.4.3 Закон больших чисел в форме Бернулли

n, S —число успехов в первых n испытаниях. $\forall \varepsilon > 0$.

$$\lim_{n\to\infty} p\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1$$

//дописать лекцию

4.5 Комплексные случайные величины. Характеристические функции

//написать еще одну лекцию

4.5.1 Неравенство Йенсена

ξ - случайная величина, g(x) - выпуклая функция (смотрите лекции по матану).

$$M[g(\xi)] \geq g(M[\xi])$$

Доказательство. Т.к. g(x) - выпуклая функция, $\forall y \in \mathbb{R}\ \exists c\left(y\right):\ \forall x \in \mathbb{R}$

$$g\left(x\right) \geq g\left(y\right) + c\left(y\right)\left(x - y\right)$$

Пусть $x = \xi,\ y = M\left[\xi\right]$, тогда

$$g(\xi) \geq g(M[\xi]) + c(M[\xi](\xi - M[\xi]))$$

Возьмём мат.ожидание от обеих частей:

$$M[g(\xi)] \geq M[g(M[\xi]) + c(M[\xi])(\xi - M[\xi])$$

$$M[g(\xi)] \geq g(M[\xi])$$

$\square$