Дисклеймер.

Автор не несет ответственности за любой ущерб, причиненный Вам при использовании данного документа. Автор напоминает, что данный документ может содержать ошибки и опечатки, недостоверную и/или непроверенную информацию. Если Вы желаете помочь в развитии проекта или сообщить об ошибке/опечатке/неточности:

GitHub проекта

Автор в ВК

Содержание

Список литературы

[1] Колмогоров, Фомин «Элементы теории функций и функционального анализа»

[2] Канторович, Акилов «Функциональный анализ нормированных пространств»

[3] Вулих «Основы теории функций вещественной переменной»

[4] Халмош «Теория меры»

[5] Данфорд, Шварц «Линейные операторы. Общая теория»

[6] Очан «Сборник задач по теории функций вещественной переменной»

1 pass

1.1 Понятие множества. Отображение

Определение 1.1. Множеством называется совокупность элементов какой-либо природы.

Определение 1.2. Множества A и B дизъюнктны, если они не пересекаются.

Система множеств также называется дизъюнктной, если множества попарно не пересекаются: $A_i \cap A_j = \varnothing, \ \forall i \neq j$

Определение 1.3. Множество называется упорядоченным, если для его элементов введены операции отношения $<, >, \leq, \geq$.

Если множество упорядочено, то для него можно ввести понятие ограниченности, супремума, инфимума и так далее.

Определение 1.4. Пусть заданы M, N — произвольные множества. И пусть задано правило f, согласно которому $\forall x \in M \ \exists! y = f(x) \in N$. Тогда говорят, что задано отображение $f : M \to N$.

Соответственно x — прообраз, y — образ.

Пример 1.1. Пусть M и N — числовые. Тогда f называется функцией.

Пример 1.2. Пусть $M = C[a, b]$ — непрерывные функции из $[a, b]$ и $N = \mathbb{R}$. Тогда отображение — функционал. $y = \int_a^b x(t)dt$ — элементарный функционал.

Пример 1.3. $M = \mathbb{R}^3$, а $N = Oxy$ и каждому вектору сопоставляется его проекция. Тогда отображение будет называться оператором.

Пример 1.4. M — множество фигур в $\mathbb{R}^2$ и каждой фигуре ставится в соответствие ее площадь. Тогда отображение называется мерой. Или, в теории вероятности, отображение события в значение его вероятности.

Определение 1.5. Два множества A и B называются эквивалентными или равномощными, если между их элементами можно установить взаимно однозначное соответствие.

Определение 1.6. Пусть A, B — множества, и при этом $\exists D \subset B : \ A \sim D$ и $\nexists C \subset A : B \sim C$. Тогда говорят, что B мощнее A.

Пример 1.5. Самыми маломощными являются конечные множества. Следующие по мощности — счетные. Следующие — множества мощности континуума (мощность множества вещественных чисел на любом отрезке). Есть ли еще мощнее?

Теорема 1.1. *Пусть A — множество, а B — множество всех подмножеств множетсва A. Тогда B мощнее A.*

Замечание 1.1. Если A имеет мощность континуума, то B будет иметь мощность гиперконтинуума. Из теоремы следует, что мощность можно увеличивать до бесконечности.

1.2 Метрические и нормированные пространства

Определение 1.7. Пространство X называется метрическим, если $\forall x, y \in X \ \exists! \rho(x, y) \in \mathbb{R}$, такое, что:

1) $\rho(x, y) \geq 0$, при этом $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;
3) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(y, z)$
$\forall x, y, z \in X$.

Пример 1.6.

$X = \mathbb{R}$, тогда $\rho(x, y) = |x - y|$.

$X = \mathbb{R}^n$, тогда: $\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}$ (сферическая метрика) или $\rho(x, y) = \max_{i=\overline{1,n}} |x_i - y_i|$ (параллелепипедальная) и любые другие, на какие может хватить фантазии. Вообще говоря, близость в одной метрике не значит близости в другой.

Пример 1.7. Пусть $X = C[a, b]$. $\rho(f(x), g(x)) = \max_{[a,b]} |f(x) - g(x)|$

Или $\rho(x, y) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$.

Определение 1.8. ε-окрестность точки x: $V_\varepsilon(x) = \{y \in X : \rho(x, y) < \varepsilon\}$ — шар с центром в точке x и радиусом ε.

Используя понятие окрестности, можно ввести понятия предельной точки, внутренней точки, открытого и замкнутого множества и так далее.

Определение 1.9. Пусть $A \subset B$. A всюду плотно в B, если $\forall \varepsilon > 0, \ \forall x \in B \ \exists y \in A :$ $\rho(x, y) < \varepsilon$.

Определение 1.10. Множество X называется сепарабельным, если у него есть счетное всюду плотное подмножество.

Пример 1.8. $\mathbb{R}$ — сепарабельное $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Аналогично $C[a, b]$ — сепарабельное, поскольку содержит множество полиномов.

Определение 1.11. $A \subset B$. A нигде не плотно в B, если оно не плотно ни в одном шаре из B.

Пример 1.9. $B = \mathbb{R}$. $A = \mathbb{N}$.

Определение 1.12. Пусть $\{x^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность элементов в X. И пусть $x^* \in X$. Тогда $x^{(k)} \to x^* : \ \rho(x^{(k)}, x^*) \to_{k \to \infty} 0$.

Определение 1.13. Последовательность $\{x^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ фундаментальна, если для нее выполнен критерий Коши: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N > 0 : \ \forall k, n \geq N$ выполняется $\rho(x^{(k)}, x^{(n)}) < \varepsilon$.

Теорема 1.2. *Если последовательность сходится, то она фундаментальна.*

Доказательство. Рассмотрим $0 \le \rho(x^{(k)}, x^{(n)}) \le \rho(x^{(k)}, x^*) + \rho(x^*, x^{(n)}) \to_{k\to\infty} 0$. Теорема о двух милиционерах. $\square$

Определение 1.14. Пространство X — полное, если любая фундаментальная последовательность в нем сходится к элементу этого пространства: $\forall$ фундаментальной $\{x^{(k)}\} \in X$ $\exists x^* \in X$, такое, что $x^{(k)} \to_{k\to\infty} x^*$.

Пример 1.10. $X = \mathbb{R}$ — полное. $X = \mathbb{Q}$ — не полное, $x^{(k)} = (1 + \frac{1}{k})^k \in \mathbb{Q}$ сходится к e, но $e \notin Q$.

Замечание 1.2. Полнота пространства зависит, вообще говоря, от введенной метрики.

Пример 1.11. $X = C[a, b]$, $\rho_1(f(x), g(x)) = \max_{[a,b]} |f(x) - g(x)|$ и $\rho_2(f(x), g(x)) = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx$. Если рассматривать $\rho_1(f_k(x), g(x)) \to_{k\to\infty} 0 \Rightarrow f_k(x) \rightrightarrows_{k\to 0}^{[a,b]} f(x) \Rightarrow f(x) \in X$, но $\rho_2(f_k(x), g(x)) \to_{k\to\infty} 0 \not\Rightarrow f(x) \in X$.

Теорема 1.3. *Для того, чтобы X было полным, необходимо и достаточно, чтобы любая последовательность вложенных друг в друга замкнутых шаров имела непустое пересечение.*

Доказательство. Аналогично лемме Коши-Кантора для вложенных отрезков. $\square$

Теорема 1.4. *(Бэра) Полное пространство не может быть представлено в виде счетного объединения нигде не плотных множеств.*

Вывод 1.1. *Полное пространство не может быть счетным.*

Если пространство не полное, то его можно пополнить.

Определение 1.15. X^* называется пополнением пространства X, если:

1) $X \subset X^*$;
2) X — всюду плотно в X^*.
3) X^* — полное.

Операция пополнения эквивалентна опрерации замыкания, но замыкают чем-то известным, а пополняют чем-то новым.

Пример 1.12. $\mathbb{Q}$ — неполное. Дополним его иррациональными числами и получим полное пространство $\mathbb{R}$.