Дисклеймер.

Автор не несет ответственности за любой ущерб, причиненный Вам при использовании данного документа. Автор напоминает, что данный документ может содержать ошибки и опечатки, недостоверную и/или непроверенную информацию. Если Вы желаете помочь в развитии проекта или сообщить об ошибке/опечатке/неточности:

GitHub проекта

Автор в ВК

Содержание

1 Метрические пространства. Определение, примеры

Определение 1.1. Пространство X называется метрическим, если $\forall x, y \in X \ \exists! \rho(x, y) \in \mathbb{R}$, такое, что:

1) $\rho(x, y) \geq 0$, при этом $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (симметричность);
3) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(y, z)$ (неравенство треугольника);
$\forall x, y, z \in X$.

Пример 1.1.

$X = \mathbb{R}$, тогда $\rho(x, y) = |x - y|$.
$X = \mathbb{R}^n$, тогда:
1) $\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}$ (сферическая метрика);
2) $\rho(x, y) = \max_{i=\overline{1,n}} |x_i - y_i|$ (параллелепипедальная);
3) $\rho(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$;
4) $\rho(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p\right)^{1/p}$.

Пример 1.2. Пусть $X = C[a, b]$.
1) $\rho(f(x), g(x)) = \max_{[a,b]} |f(x) - g(x)|$
2) $\rho(f(x), g(x)) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$.

2 Сходимость в метрическом пространстве. Фундаментальные последовательности. Полнота метрического пространства

Определение 2.1. Пусть $\{x^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность элементов в X. И пусть $x^* \in X$. Тогда $x^{(k)} \to x^*$, если $\rho(x^{(k)}, x^*) \to_{k\to\infty} 0$.

Определение 2.2. Последовательность $\{x^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ фундаментальна, если для нее выполнен критерий Коши: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N > 0 : \ \forall k, n \geq N$ выполняется $\rho(x^{(k)}, x^{(n)}) < \varepsilon$.

Теорема 2.1. *Если последовательность сходится, то она фундаментальна.*

Доказательство. Рассмотрим $0 \leq \rho(x^{(k)}, x^{(n)}) \leq \rho(x^{(k)}, x^*) + \rho(x^*, x^{(n)}) \to_{\{k,n\}\to\infty} 0$. Теорема о двух милиционерах. $\square$

Определение 2.3. Пространство X — полное, если любая фундаментальная последовательность в нем сходится к элементу этого пространства: $\forall$ фундаментальной последовательности $\{x^{(k)}\} \in X \ \exists x^* \in X$, такое, что $x^{(k)} \to_{k\to\infty} x^*$.

Пример 2.1. $X = \mathbb{R}$ — полное. $X = \mathbb{Q}$ — не полное, так как $x^{(k)} = (1 + \frac{1}{k})^k \in \mathbb{Q}$ сходится к e, но $e \notin Q$.

Замечание 2.1. Полнота пространства зависит, вообще говоря, от введенной метрики.

Пример 2.2. $X = C[a, b]$, $\rho_1(f(x), g(x)) = \max_{[a,b]} |f(x) - g(x)|$ и $\rho_2(f(x), g(x)) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$. Если рассматривать $\rho_1(f_k(x), g(x)) \to_{k\to\infty} 0 \Rightarrow f_k(x) \rightrightarrows_{k\to 0}^{[a,b]} f(x) \Rightarrow f(x) \in X$, но $\rho_2(f_k(x), g(x)) \to_{k\to\infty} 0 \not\Rightarrow f(x) \in X$.

Определение 2.4. Всюду плотное множенство — подмножество пространства, точками которого можно сколь угодно хорошо приблизить любую точку объемлющего пространства. Формально говоря, A плотно в X, если всякая окрестность любой точки $x \in X$ содержит элемент из A.

Определение 2.5. X^* называется пополнением пространства X, если:
1) $X \subset X^*$;
2) X — всюду плотно в X^*.
3) X^* — полное.

3 Открытые и замкнутые множества. Предельные и внутренние точки множества. Замыкание множества

Определение 3.1. ε-окрестность точки x: $V_\varepsilon(x) = \{y \in X : \rho(x, y) < \varepsilon\}$ — шар с центром в точке x и радиусом ε. Также ε-окрестность эквивалентна открытому шару $B_\varepsilon(x_0)$.

Определение 3.2. Закрытый шар $\overline{B}_\varepsilon(x_0)$: $x : \rho(x, x_0) \leq \varepsilon$.

Определение 3.3. $E \subset X$. x_0 — внутренняя точка, если $B_\varepsilon(x_0) \in E$.

Определение 3.4. Открытое множество — множество, состоящее только из внутренних точек.

Определение 3.5. $E \subset X$. x_0 — предельная точка для E, если $\forall \varepsilon > 0$ выполняется $B_\varepsilon(x_0) \cap E \neq \varnothing$.

Определение 3.6. Замыкание множества — процесс присоединения к нему всех его предельных точек: $\overline{E} = E \cup \{$предельные точки$\}$.

4 Принцип сжимающих отображений. Неподвижная точка оператора

Пусть X, Y — два метрических пространства. Пусть ρ_1, ρ_2 — метрики в пространствах X и Y соответственно. И пусть задано отображение $\mathcal{A} : X \to Y$ $(\forall x \in X \ \exists y = \mathcal{A}x \in Y)$.

Определение 4.1. Отображение $\mathcal{A}$ называется непрерывным в точке $x_0 \in X$, если $\forall \{x_k\} \in X :\ x_k \to_{k\to\infty} x_0 \Rightarrow \mathcal{A}x_k \to_{k\to\infty} \mathcal{A}x_0$.

Или, что то же самое: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$, такое, что если $\rho_1(x, x_0) < \delta$, то $\rho_2(\mathcal{A}x, \mathcal{A}x_0) < \varepsilon$.

Предположим далее, что $X = Y$, то есть $\mathcal{A} : X \to X$ и $\rho_1 = \rho_2 = \rho$.

Определение 4.2. Точка $x^* \in X$ — неподвижная точка отображения $\mathcal{A}$, если $\mathcal{A}x^* = x^*$.

Определение 4.3. Отображение $\mathcal{A} : X \to X$ называется сжимающим, если $\exists \alpha \in [0, 1)$, такая, что $\forall x, y \in X$ верно $\rho(\mathcal{A}x, \mathcal{A}y) \leq \alpha\rho(x, y)$.

Лемма 4.1. *$\mathcal{A}$ сжимающее $\Rightarrow$ $\mathcal{A}$ непрерывное на X.*

Доказательство. $\forall x_0 \in X, \forall \{x_k\} \in X :\ x_k \to_{k\to\infty} x_0 \Rightarrow 0 \leq \rho(\mathcal{A}x_k, \mathcal{A}x_0) \leq \alpha\rho(x_k, x_0) \to_{k\to\infty} 0$ $\square$

Теорема 4.1. *(о неподвижной точке, она же Каччапалья-Банаха, она же принцип сжимающих отображений)*

Пусть X — полное метрическое пространство, $\mathcal{A} : X \to X$. Тогда у отображения $\mathcal{A}$ $\exists!$ неподвижная точка.

Доказательство. $\forall x_0 \in X$:
$x_1 = \mathcal{A}x_0$;
$x_2 = \mathcal{A}x_1 = \mathcal{A}(\mathcal{A}x_0) = \mathcal{A}^2 x_0$;
...
$X_k = \mathcal{A}^k x_0$;
Докажем, что эта последовательность является фундаментальной:
$\forall n \geq m \geq 1$

$$\rho(x_n, x_m) = \rho(\mathcal{A}^n x_0, \mathcal{A}^m x_0) \leq \alpha\rho(\mathcal{A}^{n-1}x_0, \mathcal{A}^{m-1}x_0) \leq ... \leq \alpha^m \rho(\mathcal{A}^{n-m}x_0, x_0) \leq$$
$$\leq \alpha^m \left(\rho(\mathcal{A}^{n-m}x_0, \mathcal{A}^{n-m-1}x_0) + ... + \rho(\mathcal{A}^{n-m-1}x_0, \mathcal{A}^{n-m-2}x_0) + ... + \rho(\mathcal{A}x_0, x_0)\right) \leq$$
$$\leq \alpha^m \left(\alpha^{n-m-1}\rho(\mathcal{A}x_0, x_0) + \alpha^{n-m-2}\rho(\mathcal{A}x_0, x_0) + ... + \rho(\mathcal{A}x_0, x_0)\right) \leq$$
$$\leq \alpha^m \rho(x_0, x_1)\left(1 + \alpha + \alpha^2 + ... + \alpha^{n-m-1} + ...\right) = \frac{\alpha^m \rho(x_0, x_1)}{1-\alpha} \to_{m\to\infty} 0$$

следовательно, последовательность является фундаментальной.

X полное, следовательно, $\exists x^* \in X : \; x_k \to_{k\to\infty} x^*$. Покажем, что x^* будет неподвижной точкой:

$$\mathcal{A}x^* = \mathcal{A}\lim_{k\to\infty} x_k = (A \text{ сжим,непр}) = \lim_{k\to\infty} \mathcal{A}x^* = \lim_{k\to\infty} x_{x+1} = x^*$$

Докажем, что точка единственная. От противного:
x^*, y^* — неподвижные точки $\mathcal{A}$. Тогда:

$$0 \leq \rho(x^*, y^*) = \rho(\mathcal{A}x^*, \mathcal{A}y^*) \leq \underbrace{\alpha}_{<1} \rho(x^*, y^*)$$

То есть $\rho(x^*, y^*) = 0$. □

Замечание 4.1. В доказательстве содержится алгоритм поиска неподвижной точки. Выберем любую точку, применим к ней несколько раз отображение и предел данной последовательности будет неподвижной точкой.

5 Линейные пространства. Линейно независимая система. Размерность

6 Нормированные пространства. Банаховы пространства. Определение, примеры. Сходимость в нормированном пространстве

Определение 6.1. Норма — функция $||\cdot|| : X \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая свойствам:
1) $||x|| \geq 0$;
2) $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
3) $||\alpha x|| = \alpha\, ||x||$;

4) $||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$;
где $x \in X$.

Определение 6.2. Нормированное пространство — линейное пространство, на котором введена норма.

Определение 6.3. Банахово пространство — ...

Пример 6.1. Пусть пространство имеет вид:
1) $C[a,b]$: f непрерывна, $||f|| = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|$;
2) $C^k[a,b]$: $||f|| :\ \max_{x\in[a,b]} |f(x)| + \sum_{n=1}^{k} \max |f^{(n)}(x)|$;
3) $L_1[a,b] : f$ интегрируема по Лебегу на $[a,b]$, $||f|| = \int_a^b |f(x)|dx$;
4) $L_p[a,b] : ||f||_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{1/p}$;
5) $l_p(\mathbb{N}) :=$ {последовательности $x = \{x_n\} :\ \sum_n |x_n|^p < +\infty$}: $||x||_p = (\sum_n |x_n|^p)^{1/p} < +\infty$.

7 Линейные, непрерывные операторы. Норма оператора

8 Гильбертово пространство. Ортонормированный базис. Ряд Фурье

9 Процесс ортогонализации Грамма-Шмидта