Дисклеймер.

Автор не несет ответственности за любой ущерб, причиненный Вам при использовании данного документа. Автор напоминает, что данный документ может содержать ошибки и опечатки, недостоверную и/или непроверенную информацию. Если Вы желаете помочь в развитии проекта или сообщить об ошибке/опечатке/неточности:

GitHub проекта

Автор в ВК

# Содержание

# Список литературы

[1] Колмогоров, Фомин «Элементы теории функций и функционального анализа»

[2] Канторович, Акилов «Функциональный анализ нормированных пространств»

[3] Вулих «Основы теории функций вещественной переменной»

[4] Халмош «Теория меры»

[5] Данфорд, Шварц «Линейные операторы. Общая теория»

[6] Очан «Сборник задач по теории функций вещественной переменной»

# 1 pass

## 1.1 Понятие множества. Отображение

**Определение 1.1.** Множеством называется совокупность элементов какой-либо природы.

**Определение 1.2.** Множества $A$ и $B$ дизъюнктны, если они не пересекаются.

Система множеств также называется дизъюнктной, если множества попарно не пересекаются: $A_i \cap A_j = \varnothing,\ \forall i \neq j$

**Определение 1.3.** Множество называется упорядоченным, если для его элементов введены операции отношения $<, >, \leq, \geq$.

Если множество упорядочено, то для него можно ввести понятие ограниченности, супремума, инфимума и так далее.

**Определение 1.4.** Пусть заданы $M, N$ — произвольные множества. И пусть задано правило $f$, согласно которому $\forall x \in M\ \exists! y = f(x) \in N$. Тогда говорят, что задано отображение $f : M \to N$.

Соответственно $x$ — прообраз, $y$ — образ.

**Пример 1.1.** Пусть $M$ и $N$ — числовые. Тогда $f$ называется функцией.

**Пример 1.2.** Пусть $M = C[a, b]$ — непрерывные функции из $[a, b]$ и $N = \mathbb{R}$. Тогда отображение — функционал. $y = \int_a^b x(t)dt$ — элементарный функционал.

**Пример 1.3.** $M = \mathbb{R}^3$, а $N = Oxy$ и каждому вектору сопоставляется его проекция. Тогда отображение будет называться оператором.

**Пример 1.4.** $M$ — множество фигур в $\mathbb{R}^2$ и каждой фигуре ставится в соответствие ее площадь. Тогда отображение называется мерой. Или, в теории вероятности, отображение события в значение его вероятности.

**Определение 1.5.** Два множества $A$ и $B$ называются эквивалентными или равномощными, если между их элементами можно установить взаимно однозначное соответствие.

**Определение 1.6.** Пусть $A, B$ — множества, и при этом $\exists D \subset B :\ A \sim D$ и $\nexists C \subset A : B \sim C$. Тогда говорят, что $B$ мощнее $A$.

**Пример 1.5.** Самыми маломощными являются конечные множества. Следующие по мощности — счетные. Следующие — множества мощности континуума (мощность множества вещественных чисел на любом отрезке). Есть ли еще мощнее?

**Теорема 1.1.** *Пусть $A$ — множество, а $B$ — множество всех подмножеств множетсва $A$. Тогда $B$ мощнее $A$.*

*Замечание* 1.1. Если $A$ имеет мощность континуума, то $B$ будет иметь мощность гиперконтинуума. Из теоремы следует, что мощность можно увеличивать до бесконечности.

## 1.2 Метрические и нормированные пространства

**Определение 1.7.** Пространство $X$ называется метрическим, если $\forall x, y \in X\ \exists! \rho(x, y) \in \mathbb{R}$, такое, что:

1) $\rho(x, y) \geq 0$, при этом $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;
3) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(y, z)$

$\forall x, y, z \in X$.

**Пример 1.6.**

$X = \mathbb{R}$, тогда $\rho(x, y) = |x - y|$.

$X = \mathbb{R}^n$, тогда: $\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$ (сферическая метрика) или $\rho(x, y) = \max_{i=\overline{1,n}} |x_i - y_i|$ (параллелепипедальная) и любые другие, на какие может хватить фантазии. Вообще говоря, близость в одной метрике не значит близости в другой.

**Пример 1.7.** Пусть $X = C[a, b]$. $\rho(f(x), g(x)) = \max_{[a,b]} |f(x) - g(x)|$

Или $\rho(x, y) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$.

**Определение 1.8.** $\varepsilon$-окрестность точки $x$: $V_\varepsilon(x) = \{y \in X : \rho(x, y) < \varepsilon\}$ — шар с центром в точке $x$ и радиусом $\varepsilon$.

Используя понятие окрестности, можно ввести понятия предельной точки, внутренней точки, открытого и замкнутого множества и так далее.

**Определение 1.9.** Пусть $A \subset B$. $A$ всюду плотно в $B$, если $\forall \varepsilon > 0,\ \forall x \in B\ \exists y \in A :$ $\rho(x, y) < \varepsilon$.

**Определение 1.10.** Множество $X$ называется сепарабельным, если у него есть счетное всюду плотное подмножество.

**Пример 1.8.** $\mathbb{R}$ — сепарабельное $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Аналогично $C[a, b]$ — сепарабельное, поскольку содержит множество полиномов.

**Определение 1.11.** $A \subset B$. $A$ нигде не плотно в $B$, если оно не плотно ни в одном шаре из $B$.

**Пример 1.9.** $B = \mathbb{R}$. $A = \mathbb{N}$.

**Определение 1.12.** Пусть $\{x^{(k)}\}_{k=1}^\infty$ — последовательность элементов в $X$. И пусть $x^* \in X$. Тогда $x^{(k)} \to x^* :\ \rho(x^{(k)}, x^*) \to_{k \to \infty} 0$.

**Определение 1.13.** Последовательность $\{x^{(k)}\}_{k=1}^\infty$ фундаментальна, если для нее выполнен критерий Коши: $\forall \varepsilon > 0\ \exists N > 0 :\ \forall k, n \geq N$ выполняется $\rho(x^{(k)}, x^{(n)}) < \varepsilon$.

**Теорема 1.2.** *Если последовательность сходится, то она фундаментальна.*

*Доказательство.* Рассмотрим $0 \le \rho(x^{(k)}, x^{(n)}) \le \rho(x^{(k)}, x^*) + \rho(x^*, x^{(n)}) \to_{k\to\infty} 0$. Теорема о двух милиционерах. □

**Определение 1.14.** Пространство $X$ — полное, если любая фундаментальная последовательность в нем сходится к элементу этого пространства: $\forall$ фундаментальной $\{x^{(k)}\} \in X$ $\exists x^* \in X$, такое, что $x^{(k)} \to_{k\to\infty} x^*$.

**Пример 1.10.** $X = \mathbb{R}$ — полное. $X = \mathbb{Q}$ — не полное, $x^{(k)} = (1 + \frac{1}{k})^k \in \mathbb{Q}$ сходится к $e$, но $e \notin Q$.

*Замечание* 1.2. Полнота пространства зависит, вообще говоря, от введенной метрики.

**Пример 1.11.** $X = C[a, b]$, $\rho_1(f(x), g(x)) = \max_{[a,b]} |f(x)-g(x)|$ и $\rho_2(f(x), g(x)) = \int_a^b |f(x)-g(x)|dx$. Если рассматривать $\rho_1(f_k(x), g(x)) \to_{k\to\infty} 0 \Rightarrow f_k(x) \rightrightarrows^{[a,b]}_{k\to 0} f(x) \Rightarrow f(x) \in X$, но $\rho_2(f_k(x), g(x)) \to_{k\to\infty} 0 \not\Rightarrow f(x) \in X$.

**Теорема 1.3.** *Для того, чтобы $X$ было полным, необходимо и достаточно, чтобы любая последовательность вложенных друг в друга замкнутых шаров имела непустое пересечение.*

*Доказательство.* Аналогично лемме Коши-Кантора для вложенных отрезков. □

**Теорема 1.4.** *(Бэра) Полное пространство не может быть представлено в виде счетного объединения нигде не плотных множеств.*

**Вывод 1.1.** *Полное пространство не может быть счетным.*

*Если пространство не полное, то его можно пополнить.*

**Определение 1.15.** $X^*$ называется пополнением пространства $X$, если:

1) $X \subset X^*$;
2) $X$ — всюду плотно в $X^*$.
3) $X^*$ — полное.

Операция пополнения эквивалентна опрерации замыкания, но замыкают чем-то известным, а пополняют чем-то новым.

**Пример 1.12.** $\mathbb{Q}$ — неполное. Дополним его иррациональными числами и получим полное пространство $\mathbb{R}$.

**Определение 1.16.** Пространство $X$ линейно, если для элементов этого пространства введены операции сложения и умножения на константу.

**Определение 1.17.** Линейные пространства $X, Y$ изоморфны, если $X \sim Y$ и $\forall x_1, x_2 \in X$, $\forall y_1, y_2 \in Y$ и $x_1 \sim y_1, x_2 \sim y_2 \Rightarrow x_1 + x_2 \sim y_1 + y_2, \lambda x_1 \sim \lambda y_1$.

**Пример 1.13.** $X$ — множество полиномов степени $\le (n-1)$. $Y = \mathbb{R}^n$. Тогда $X \sim Y$,

$$x(t) = a_1 t^{n-1} + ... + a_n \sim y = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Для линейных пространств можно ввести понятие линейной зависимости и независимости элементов, размерности, базиса, подпространства и так далее.

**Определение 1.18.** Линейное пространство $X$ называется нормированным, если $\forall x \in X$ : $\exists! r \in \mathbb{R}$, которое называется нормой ($||x||$) и удовлетворяет следующим аксиомам:

1) $||x|| \geq 0$, $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
2) $||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||$;
3) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$;

Если пространство нормированно, то его всегда можно метризовать.

Стандартной считается метрика, согласованная с нормой: $\rho(x, y) = \|x - y\|$.

**Определение 1.19.** Полное нормированное пространство называется Банаховым пространством.

*Замечание* 1.3. Все основные определения и свойства метрического пространства вытекали из определения метрики.

Можно пойти другим путем: не вводя метрику непосредственно определить с помощью аксиом что считать открытым множеством, замкнутым и так далее. В результате приходим к так называемым топологическим пространствам.

## 1.3 Неподвижные точки отображения

Пусть $X, Y$ — два метрических пространства. Пусть $\rho_1, \rho_2$ — метрики в пространствах $X$ и $Y$ соответственно. И пусть задано отображение $\mathcal{A} : X \to Y$ ($\forall x \in X \ \exists y = \mathcal{A}x \in Y$).

**Определение 1.20.** Отображение $\mathcal{A}$ называется непрерывным в точке $x_0 \in X$, если $\forall \{x_k\} \in X :\ x_k \to_{k\to\infty} x_0 \Rightarrow \mathcal{A}x_k \to_{k\to\infty} \mathcal{A}x_0$.

Или, что то же самое: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$, такое, что если $\rho_1(x, x_0) < \delta$, то $\rho_2(\mathcal{A}x, \mathcal{A}x_0) < \varepsilon$.

Предположим далее, что $X = Y$, то есть $\mathcal{A} : X \to X$ и $\rho_1 = \rho_2 = \rho$.

**Определение 1.21.** Точка $x^* \in X$ — неподвижная точка отображения $\mathcal{A}$, если $\mathcal{A}x^* = x^*$.

**Определение 1.22.** Отображение $\mathcal{A} : X \to X$ называется сжимающим, если $\exists \alpha \in [0, 1)$, такая, что $\forall x, y \in X$ верно $\rho(\mathcal{A}x, \mathcal{A}y) \leq \alpha\rho(x, y)$.

**Лемма 1.1.** *$\mathcal{A}$ сжимающее $\Rightarrow$ $\mathcal{A}$ непрерывное на $X$.*

*Доказательство.* $\forall x_0 \in X, \forall \{x_k\} \in X :\ x_k \to_{k\to\infty} x_0 \Rightarrow 0 \leq \rho(\mathcal{A}x_k, \mathcal{A}x_0) \leq \alpha\rho(x_k, x_0) \to_{k\to\infty} 0$ □

**Теорема 1.5.** *(о неподвижной точке, она же Каччаполи-Банаха, она же принцип сжимающих отображений)*

*Пусть $X$ — полное метрическое пространство, $\mathcal{A} : X \to X$. Тогда у отображения $\mathcal{A}$ $\exists!$ неподвижная точка.*

*Доказательство.* $\forall x_0 \in X$:

$x_1 = \mathcal{A}x_0$;
$x_2 = \mathcal{A}x_1 = \mathcal{A}(\mathcal{A}x_0) = \mathcal{A}^2 x_0$;
...
$X_k = \mathcal{A}^k x_0$;

Докажем, что эта последовательность является фундаментальной:

$\forall n \geq m \geq 1$

$$\rho(x_n, x_m) = \rho(\mathcal{A}^n x_0, \mathcal{A}^m x_0) \leq \alpha\rho(\mathcal{A}^{n-1}x_0, \mathcal{A}^{m-1}x_0) \leq ... \leq \alpha^m \rho(\mathcal{A}^{n-m}x_0, x_0) \leq$$
$$\leq \alpha^m \left(\rho(\mathcal{A}^{n-m}x_0, \mathcal{A}^{n-m-1}x_0) + ... + \rho(\mathcal{A}^{n-m-1}x_0, \mathcal{A}^{n-m-2}x_0) + ... + \rho(\mathcal{A}x_0, x_0)\right) \leq$$
$$\leq \alpha^m \left(\alpha^{n-m-1}\rho(\mathcal{A}x_0, x_0) + \alpha^{n-m-2}\rho(\mathcal{A}x_0, x_0) + ... + \rho(\mathcal{A}x_0, x_0)\right) \leq$$
$$\leq \alpha^m \rho(x_0, x_1)\left(1 + \alpha + \alpha^2 + ... + \alpha^{n-m-1} + ...\right) = \frac{\alpha^m \rho(x_0, x_1)}{1-\alpha} \to_{m\to\infty} 0$$

следовательно, последовательность является фундаментальной.

$X$ полное, следовательно, $\exists x^* \in X:\ x_k \to_{k\to\infty} x^*$. Покажем, что $x^*$ будет неподвижной точкой:

$$\mathcal{A}x^* = \mathcal{A}\lim_{k\to\infty} x_k = (A \text{ сжим,непр}) = \lim_{k\to\infty} \mathcal{A}x^* = \lim_{k\to\infty} x_{x+1} = x^*$$

Докажем, что точка единственная. От противного:

$x^*, y^*$ — неподвижные точки $\mathcal{A}$. Тогда:

$$0 \leq \rho(x^*, y^*) = \rho(\mathcal{A}x^*, \mathcal{A}y^*) \leq \underbrace{\alpha}_{<1}\rho(x^*, y^*)$$

То есть $\rho(x^*, y^*) = 0$. □

*Замечание* 1.4. В доказательстве содержится алгоритм поиска неподвижной точки. Выберем любую точку, применим к ней несколько раз отображение и предел данной последовательности будет неподвижной точкой.

### 1.3.1 Приложение принципа сжимающих отображений к решению алгебраических уравнений

**Проблема.** Пусть требуется решить уравнение $x = \varphi(x)$, где $c$ — корень, причем $c \in [a, b]$.

**Решение.** Возьмем конкретное пространство $X = \mathbb{R}$. Метризуем: $\rho(x, y) = |x - y|$. Пространство полное. Введем отображение $\mathcal{A}x = \varphi(x)$. Тогда уравнение сведется к виду $\mathcal{A}x = x$, а $c$ — неподвижная точка. Нам осталось лишь доказать сжимаемость данного отображения.

Пусть $\varphi(x)$ — удовлетворяет условию Липшица на $[a, b]$: $\exists \alpha > 0 :\ \ \forall x, y \in [a, b] \Rightarrow \underbrace{|\varphi(x) - \varphi(y)|}_{\rho(\mathcal{A}x, \mathcal{A}y)} \leq \alpha \underbrace{|x - y|}_{\rho(x,y)}$. Таким образом, оно сжимающее.

И тогда мы можем найти $\{x_k\} \to_{k\to 0} c$.

### 1.3.2 Приложение принципа сжимаемых отображений к решению системы алгебраических уравнений

**Проблема.** Требуется решить следующую систему уравнений: $x = Ax + b$ (1). $A, b$ заданы, $x$ — неизвестен. $X = \mathbb{R}^n$.

**Решение.** Введем отображение $\mathcal{A}x = Ax + b$. Тогда уравнение (1) сводится к поиску $c$ — неподвижной точки отображения $\mathcal{A}$. 4

Если отображение сжимающее, то берем произвольный вектор, применяем к нему отображение и так далее. Тогда последовательность векторов будет сходится к нужному нам корню.

Выпишем далее достаточные условия сжимаемости отображения $\mathcal{A}$. Сжимаемость, вообще говоря, зависит от введенной метрики. Для того, чтобы можно было применить принцип, достаточно, чтобы сжимаемость была хотя бы в одной метрике.

Пусть метрика введена следующим образом: $x, y$ — вектора и $\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$. Рассмотрим расстояния между образами:

$$\rho^2(\mathcal{A}x, \mathcal{A}y) = \sum_{i=1}^{n} \left( \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_j - y_j) \right)^2 \leq ...$$

Применяем неравенство Коши-Буняковского-Шварца:

$$... \leq \left( \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \right) \left( \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \right) = \left( \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \right) \rho^2(x, y)$$

Тогда $\mathcal{A}$ — сжимающее, если $\left( \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \right) < 1$.