Дисклеймер.

Автор не несет ответственности за любой ущерб, причиненный Вам при использовании данного документа. Автор напоминает, что данный документ может содержать ошибки и опечатки, недостоверную и/или непроверенную информацию. Если Вы желаете помочь в развитии проекта или сообщить об ошибке/опечатке/неточности:

GitHub проекта

Автор в ВК

Содержание

1 Формула Валлиса. Связность в $\mathbb{R}^m$

1.1 Вычисление $\int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$. Формула Валлиса

Пример. $n \in \mathbb{N}$. $I_0 = \frac{\pi}{2}, \quad I_1 = 1$

$n \geq 2$:

$$I_n = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x d(\cos x) = \sin^{n-1} x \cos x|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x(n-1)\sin^{n-2} x \cos x dx =$$

$$(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cos^2 x dx = (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x(1-\sin^2 x)dx = (n-1)(I_{n-2} - I_n)$$

откуда:

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

Разберем по отдельности случай четности и нечетности. $n = 2k$

$$I_{2k} = \frac{2k-1}{2k} I_{2(k-1)} = \frac{2k-1}{2k}\frac{2k-3}{2k-2} I_{2(k-2)} = ... = \frac{(2k-1)(2k-3)...3\cdot 1}{(2k)(2k-2)...4\cdot 2} I_0 = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\cdot\frac{\pi}{2}$$

Для $n = 2k+1$:

$$I_{2k+1} = \frac{2k}{2k+1} I_{2k-1} = ... = \frac{2k(2k-2)...2}{(2k+1)(2k-1)...3} I_1 = \frac{2k!!}{(2k+1)!!}$$

Отсюда ответ:

$$I_n = \frac{(n-1)!!}{n!!}\varepsilon_n, \quad \varepsilon_n = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & n - \text{четное} \\ 1 & n - \text{нечетное} \end{cases}$$

$I_{2k-1} < I_{2k} < I_{2k+1}$, откуда

$$\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!} \leq \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\cdot\frac{\pi}{2} \leq \frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2k+1}\left[\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}\right]^2 \leq \frac{\pi}{2} \leq \frac{1}{2k}\underbrace{\left[\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}\right]}_{Ak}^2$$

$$\frac{1}{2k}A_k^2 - \frac{1}{2k+1}A_k^2 = \frac{1}{2k(2k+1)}A_k^2 \leq \frac{1}{2k}\cdot\frac{\pi}{2} \to_{k\to\infty} 0$$

Следовательно, промежутки стягиваются, следовательно,

Отсюда $\pi/2 = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2k}\left[\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}\right]$ — формула Валлиса.

1.2 Связность в $\mathbb{R}^m$.

$X \subset \mathbb{R}^m$.

Определение.

$X \cap G$ — относительно открыт в X, если G — открыто в $\mathbb{R}^m$.

$X \cap G$ — относительно замкнут в X, если G — замкнуто в $\mathbb{R}^m$.

Определение. X — несвязно, если $X = A \cup B$, таких, что:

1) $A, B \neq \varnothing$;

2) $A \cap B = \varnothing$;

3) A, B относительно открыты.

Определение. Связное множество — не несвязное множество

Определение. Если $A = X \cap G$ $F = \mathbb{R}^m \backslash G$, то $B = X \backslash A = X \cap F$. $\Rightarrow B$ — дополнение A.

Теорема. *Пусть $X \subset \mathbb{R}^m$ — связно. Докажем, что это промежуток: пусть $a = \inf X$, $b = \sup X$. (прокатит и для бесконечных a, b). Если $a < c < b \Rightarrow c \in X$.*

Доказательство. От противного, пусть $a < c_0 < b$, $c_0 \notin X$. $A = X \cap (-\infty, c_0)$, $B = X \cap (c_0, +\infty)$. Так как $c_0 \notin X$, то $A \cup B = X$.

Таким образом, всякое связное множество — промежуток. Промежуток связен по теореме Больцано-Коши. □

Теорема. *Если $T : X \to Y$ непрерывно, X — связно, тогда Y тоже связно.*

Доказательство. Пусть $Y = T(X)$ несвязно. Тогда $\exists f : X \to \{-1, 1\}$. Рассмотрим $g = f \circ T$. Она непрерывна и принимает два значения. Значит, X несвязно. Противоречие. □

2 Свойства интегралов на равенства. Теорема о повторном пределе

2.1 Свойства интегралов, выражаемые равенствами

Лемма. *1) f, g — непрерывна на $[a, b]$. Тогда $\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$.*

Доказательство. F, G — первообразные для f, g. Тогда $h = f + g$, $H = F + G$, значит, $H'(x) = h(x)$. Значит, $\int_a^b (f(x) + g(x))dx = H(b) - H(a) = (F(b) + G(b)) - (F(a) + G(a)) = F(b) - F(a) + G(b) - G(a) = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$. □

Лемма. *2) $(f, [a, b]) \in D$, $\alpha \in \mathbb{R}$. $\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$.*

Доказательство. F — первообразная для f. Тогда по Ньютону-Лейбницу, $\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha F(b) - \alpha F(a) = \alpha \int_a^b f(x)dx$. □

Лемма. *3) $\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$.*

Доказательство. Очевидно следует из предыдущих пунктов. □

Лемма. *4) $\int_a^b \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k f_k(x)\right) dx = \sum_{k=1}^n \alpha_k \int_a^b f_k(x)dx$*

Доказательство. Очевидно по индукции. □

Лемма. *5) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ из формулы Ньютона-Лейбница. Пусть $a, b, c \in \mathbb{R}$, f непрерывна на любом промежутке с концами a, b, c, тогда $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.*

Доказательство. При $a < c < b$ верно по определению. Рассмотрим при $b < a < c$: $\int_b^c f(x)dx = \int_b^a f(x)dx + \int_a^c f(x)dx \Leftrightarrow \int_a^b = \int_a^c + \int_c^b$. □

2.2 Теорема о повторном пределе

Теорема. *$X \subset \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, a — точка сгущения, f_n определены на X, $\exists$ конечные пределы $\lim_{x \to a} f_n(x) = L_n$ $\forall n = 1, 2, \ldots$. Если $f_n \rightrightarrows f$ на X, то:*

1) $\exists$ конечный $\lim_{n\to\infty} L_n = L$

2) $f(x) \to_{x \to a} L$

Что можно переписать как $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{n\to\infty} L_n$:

$$\lim_{x\to a}(\lim_{n\to\infty} f_n(x)) = \lim_{n\to\infty}(\lim_{x\to a} f_n(x)) = L$$

Доказательство.

1) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — фундаментальна, тогда и только тогда, когда $\forall \varepsilon > 0\ \exists N :\ \forall n > N, m > N :\ |x_n - x_m| < \varepsilon$.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ Найдем N, начиная с которого $|L_n - L_m| <\varepsilon$.

$f_n \rightrightarrows f$ на X, откуда $\exists N :\ \forall n > N\ |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}\ \forall x \in X$ и $\forall m > M\ |f_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}\ \forall x \in X$. Отсюда, $|f_n(x) - f_m(x)| = |(f_n(x) - f(x)) + (f(x) - f_m(x))| < |...| + |...| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Таким образом, $|L_n - L_m| \leq \varepsilon$.

2) Заменим f на f_n с малой погрешностью и перейдем от L к L_n. Тогда $f(x) - L = f_n(x) - L_n +$ малое. Теперь зафиксируем произвольное (но очень большое) N, так, чтобы погрешность не превышала $\frac{\varepsilon}{3}$. Фиксируем $\varepsilon > 0$.

$\exists N_1 :\ \forall n > N_1$ верно $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}\ \forall x \in X$; $\exists N_2 :\ \forall n > N_2$ верно $|L_n - L| < \frac{\varepsilon}{3}\ \forall x \in X$. Примем $N > N_1 + N_2$, тогда справедливы оба неравенства.

$|f(x) - L| = |(f(x) - f_n(x)) + (f_n(x) - L_n) + (L_n - L)| < |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - L_n| + |L_n - L| < \frac{2\varepsilon}{3} + |f_n(x) - L_n|$.

$\exists V(a)\ \forall x \in X \cap \dot{V}(a) :\ |f_n(x) - L_n| < \frac{\varepsilon}{3}$. Отсюда $|f(x) - L| < \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3}$ при $x \in X \cap \dot{V}(a)$. □

3 Определение интеграла, умножение рядов

3.1 Определение определенного интеграла, теорема о среднем

Определение. Пусть f определена на X. F — первообразная для f на X, если $\forall x \in X\ \exists F'(x)$ и $F'(x) = f(x)$.

Определение. Неопределенный интеграл — любая первообразная для функции на данном промежутке.

Определение. Пусть $[a, b]$ — невырожденный промежуток, f определена и непрерывна на $[a, b]$, то есть $(f, [a, b])$ является допустимой парой. Пусть D — множество таких пар. Определенный интеграл — функция, заданная на D: $J : D \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая свойствам:

1) $(f, [a, b])$ — допустимая пара, если $a < c < b$, то $J(f, [a, b]) = J(f, [a, c]) + J(f, [c, b])$.

2) Если для $(f, [a, b])$ верно, что $A \leq f(x) \leq B$, $\forall x \in [a, b]$, то $A(b - a) \leq J(f, [a, b]) \leq B(b - a)$.

Теорема. *(о среднем). Если пара $(f, [a, b])$ — допустимая, то $\exists c \in [a, b]$, такое, что $J(f, [a, b]) = f(c)(b - a)$.*

Доказательство. Пусть $M = \max f(x)$, $m = \min f(x)$ на $[a, b]$. Тогда $m \leq f(x) \leq M$ $\forall x \in [a, b]$. Тогда $m(b - a) \leq J(f, [a, b]) \leq M(b - a)$, разделим на $b - a$, получим $m \leq \frac{1}{b-a} J(f, [a, b]) = C \leq M$. Тогда по теореме Больцано-Коши $\exists c \in [a, b] : \ f(c) = C = \frac{1}{b-a} J(f, [a, b])$, остается лишь домножить на $(b - a)$. □

3.2 Умножение рядов

Определение. $(A) \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ и $(B) \sum_{k=1}^{\infty} b_k$. Произведение рядов (A) и (B) — $(C) \sum_{k=0}^{\infty} c_k$, где $c_k = (a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + ... a_{k-1} b_1 + a_k b_0)$.

Теорема. *Если $(A) \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ и $(B) \sum_{k=1}^{\infty} b_k$ абсолютно сходятся, то ряд $(C) \sum_{k=0}^{\infty} c_k$ абсолютно сходится и его сумма $C = A \cdot B$*

Доказательство.

$$C_n = \sum_{k=0}^{n} c_k = \sum_{k=0}^{n} \sum_{i+j=k} a_i b_j = \sum_{i+j \leq n} a_i b_j$$

— частичная сумма ряда (C).

Разобьем дальнейшее доказательство на 2 части:

1) **Ряды** (A) **и** (B) **положительные.**

$$C_n = \sum_{i+j \leq n} a_i b_j \leq \sum_{i \leq n,\ j \leq n} a_i b_j = A_n B_n$$

где $A_n = a_0 + ... + a_n,\ B_n = b_0 + ... + b_n$. Таким образом, $C_n \leq A_n B_n \to AB$. $(A) > 0,\ (B) > 0 \Rightarrow (C) > 0$. Значит, последовательность C_n ограничена (так как ограничены (A) и (B)). Ограничим произведение: $C_n \leq A_n B_n \leq C_{2n}$:

$$C_{2n} = \sum_{i+j \leq 2n} a_i b_j \geq \sum_{i \leq n,\ j \leq n} a_i b_j = A_n B_n$$

Ряд $C_n \to C$ и $C_{2n} \to C$, следовательно, по теореме о двух милиционерах, $A_n B_n \to C$ и, одновременно, $A_n B_n \to AB$, следовательно, $C = AB$.

2) **Общий случай.**

Будем рассматривать $(A*) \sum_n |a_n|,\ (B*) \sum_n |b_n|,\ (C*) \sum_n |c_n|,\ (D) \sum_{n=0}^{\infty} d_n$.

$$|c_n| = |\sum_{i+j=n} a_i b_j| \leq \sum_{i+j=n} |a_i||b_i| = d_n$$

То есть $(D) = (A*)(B*)$. По доказанному, ряд (D) сходится. По неравенству $(C*)$ сходится, следовательно, (C) сходится абсолютно.

Докажем, что $C_{2n} - A_n B_n \to 0$. Если мы это докажем, то перейдем к пределу и там получим, что $C - AB = 0$.

Оценим:

$$|C_{2n} - A_n B_n| = |\sum_{i+j \leq 2n} \sum_{\max(i,j) > n} a_i b_j| \leq \sum_{i+j \leq 2n} \sum_{\max(i,j) > n} |a_i||b_j| == \underbrace{\sum_{i+j \leq 2n} |a_i||b_j|}_{D_{2n}} - \sum_{i,j \leq n} |a_i||b_j|$$

Отсюда, $|C_{2n} - A_n B_n| \leq \underbrace{D_{2n}}_{\to D} - \underbrace{A_n^* B_n^*}_{\to A^* B^*} \to_{n \to \infty} 0$. □

4 Теорема Кантора, площадь криволинейного треугольника через полярные координаты

4.1 Равномерная непрерывность. Модуль непрерывности. Теорема Кантора

Определение. T равномерно непрерывно на X, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x, x' \in X$, такое, что $||x - x'|| < \delta \Rightarrow ||T(x) - T(x')|| < \varepsilon$.

Замечание. Достаточным для равномерной непрерывности условием является условие Липшица: $\exists C :\ ||T(x) - T(x')|| \leq C||x - x'||\ \forall x, x' \in X$.

Определение. Модуль непрерывности $T : \omega_T^{(\delta)} = \sup_{\delta > 0,\ x, x' \in X,\ ||x - x'|| < \delta} ||T(x) - T(x')||$.

1) Если $\delta < \delta$, то $\omega_T(\delta) \leq \omega_T(\delta')$;

2) $u, v \in X \Rightarrow ||T(u) - T(v)|| \leq \omega_T(||u - v||)$.

Теорема. *(Кантора)*

X — компактное подмножество в $\mathbb{R}^m$, а $T : X \to \mathbb{R}^l$. Если T непрерывно на X, то T равномерно непрерывно на X.

Доказательство. Согласно замечанию, $\forall x, x' \in X:\ ||T(x) - T(x')|| \le \omega_T(||x - x'||)$.

Если $\omega_T(\delta) \to_{\delta\to+0} 0$, то T — равномерно непрерывно (2). Проверим это: зададим произвольное $\varepsilon > 0$ $\omega_T(\delta) \to_{\delta\to0+} 0$ $\exists\delta_0 > 0$, такая, что $\omega_T(\delta) < \varepsilon$ при $\delta < \delta_0$. Тогда $\forall x, x' \in X,\ ||x - x'|| < \delta_0$ и $||T(x) - T(x')|| \le \omega_T(||x - x'||) < \varepsilon$.

От противного, пусть (2) неверно: пусть $\omega_T(\delta) \not\to_{\delta\to0+} 0$. Напомним, что ω_T возрастает. Тогда $\exists \lim_{\delta\to0+}\omega_T(\delta) > 0$ и $\exists \lim_{\delta\to0+}\omega_T(\delta) = \inf\omega_T(\delta) = C > 0$.

$\forall\delta > 0$ $\omega_T(\delta) \ge C > 0$, $\forall n$ $\omega_T(\frac{1}{n}) \ge C > 0$, то есть $\sup||T(x) - T(x')|| \ge C > 0$. Тогда $\exists x_n, x'_n \in X$ такое, что одновременно $||x_n - x'_n|| \le \frac{1}{n}$ и $||T(x_n) - T(x'_n)|| \ge \frac{C}{2}$. Теперь, когда у нас есть последовательность, используем компактность:

$\exists x_{n_k} \to x_0 \in X$. Тогда $||x'_{n_k} - x_0|| \le ||x'_{n_k} - x_{n_k}|| + ||x_{n_k} - x_0|| \le \frac{1}{n_k} + ||x_{n_k} - x_0|| \to_{n_k\to\infty} 0$.

Таким образом, $x'_{n_k} \to x_0$. Отсюда $||T(x_{n_k}) - T(x'_{n_k})|| \ge \frac{C}{2}$. Перейдем к пределу: $||T(x_0) - T(x_0)|| \ge \frac{C}{2} > 0$, противоречие. Следовательно, (2) верно, из него вытекает равномерная непрерывность, теорема доказана. □

4.2 Площадь криволинейного треугольника через полярные координаты

Определение. ρ — непрерывна, определена на $[-\pi, \pi]$, $\Delta \in [-\pi, \pi]$. Криволинейный треугольник — $T_{\rho(\Delta)} = \{x, y | \varphi \in \Delta,\ 0 \le r \le \rho(\varphi)\}$, где $\varphi = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Теорема. *$S(T_{\rho(\Delta)}) = \frac{1}{2}\int_\rho^q \rho^2(\varphi)d\varphi$, где $[p, q] = \Delta$.*

Доказательство. Пусть $\Phi(\Delta) = S(T_{\rho(\Delta)})$.

$\Delta', \Delta'' \in \Delta$, $\Delta' + \Delta'' = \Delta$, $\Delta' \cap \Delta'' =$прямая, то $\Phi(\Delta) = \Phi(\Delta') + \Phi(\Delta'')$, то есть Φ — аддитивна.

Пусть $m_\Delta = \min\rho(\varphi)$, $M_\Delta = \max\rho(\varphi)$. Ясно, что $m_\Delta \le \rho(\varphi) \le M_\Delta$.

$\frac{1}{2}m^2_\Delta\text{дл}(\Delta) \le S(T_{\rho(\Delta)}) \le \frac{1}{2}M^2_\Delta\text{дл}(\Delta)$, $M_\Delta - m_\Delta \to_{\text{дл}(\Delta)\to0} 0$.

Пусть $f(x) = \frac{1}{2}\rho^2(\varphi)$, тогда $S(T_{\rho(\Delta)}) = \int_p^q \frac{1}{2}\rho^2(\varphi)d\varphi$. □

5 Почленное интегрирование ряда и оценка длины кривой

5.1 Лемма об оценке длины простой гладкой дуги

Лемма. *L — гладкая кривая в $\mathbb{R}^2$, $\gamma : [a, b] \to L$ — регулярная параметризация L.*

$m_x(\Delta) = \min_\Delta |x'|,\ m_y(\Delta) = \min_\Delta |y'|$, $M_x(\Delta) = \max_\Delta |x'|,\ M_y(\Delta) = \max_\Delta |y'|$, где $\Delta = [a, b]$. Тогда

$$\sqrt{m_x^2 + m_y^2}(b - a) \le S(L) \le \sqrt{M_x^2 + M_y^2}(b - a)$$

Доказательство. $\rho(\gamma(a), \gamma(b)) = \sqrt{(x(a) - x(b))^2 + (y(a)) - y(b))^2} = *$

$x(b) - x(a) = \int_a^b x'(t)dt = x'(\tilde{t})(b - a)$ по теореме о среднем.

Аналогично $\exists\hat{t} \in [a, b]:\ y(b) - y(a) = y'(\hat{t})(b - a)$.

Тогда $* = \sqrt{(x'(\tilde{t}))^2 + (y'(\hat{t}))^2}(b - a) = \lambda$

Пусть CD — отрезок длины $\sqrt{M_x^2 + M_y^2}(b - a)$, на концах которого $x = a, b$. AB — отрезок, соединяющий $\gamma(a)$ и $\gamma(b)$.

Пусть $\Phi : L \to CD$. Тогда $\rho(A, B) \le \rho(C, D) = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}(b - a)$ по доказанному ранее. Аналогично справедливо для Φ на любом $[p, q]$ следовательно, Φ — растяжение, тогда $S(L) \le S(CD) \le \sqrt{M_x^2 + M_y^2}(b - a)$ □

5.2 Теорема о предельном переходе под знаком интеграла и почленном интегрировании функциональных рядов

Теорема. *f_n непрерывны на $[a, b]$. Если $f_n \rightrightarrows f$ на $[a, b]$, то $\int_a^b f_n(x)dx \to \int_a^b f(x)dx$.*

Доказательство. f_n — непрерывна, следовательно, f — непрерывна. Оценим разность интегралов:

$$\left|\int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx < \int_a^b \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)|\,dx = \alpha_n(b - a) \to_{n\to\infty} 0 \Rightarrow$$

$$\int_a^b f_n(x)dx \to \int_a^b f(x)dx$$

□

Теорема. *u_n непрерывно и равномерно сходится на $[a,b]$. Тогда $\int_a^b f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)dx$.*

Доказательство. Пусть $I_n = \int_a^b S_n(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \int_a^b u_n(x)dx$. $S_n \rightrightarrows S$, по 1 теореме

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)dx \leftarrow \int_a^b S_n(x)dx \to_{n\to\infty} \int_a^b S(x)dx \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)dx = \int_a^b S(x)dx$$

□

6 Исследование сходимости обобщенного гармонического ряда, теорема о непрерывном образе компактного множества

6.1 Исследование сходимости обобщенного гармонического ряда

Теорема. *Обобщенный гармонический ряд сходится $\Leftrightarrow p > 1$.*

Доказательство. Пусть $p > 1$. Введем частичную сумму

$$S_n = 1 + \frac{1}{2^p} + ... + \frac{1}{n^p} < 1 + \frac{1}{2^p} + ... + \frac{1}{(2n-1)^p} + \frac{1}{(2n)^p} + \frac{1}{(2n+1)^p} \leq$$
$$\leq 1 + \frac{2}{2^p} + \frac{2}{4^p} + ... + \frac{2}{(2n)^p} = 1 + \frac{1}{2^p}(1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + ... + \frac{1}{n^p})$$

В скобках получилась S_n. Перепишем полученное $S_n \leq 1 + \frac{2}{2^p} S_n$. $\Theta = \frac{2}{2^p} < 1$, то есть $S_n \leq \frac{1}{1-\Theta}$. Частичные суммы ограничены, а значит, ряд сходится.

Пусть $0 < p < 1$. Тогда $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p} \geq \frac{1}{n^p} \cdot n$. $S_n \geq n^{1-p} \to +\infty$. При этом $\frac{1}{n^p} > \frac{1}{n}$, расходимость очевидна. □

6.2 Теорема о непрерывном образе компактного множества. Следствия (две теоремы Вейерштрасса)

Теорема. *$X \subset \mathbb{R}^m$, X — компактно, $T : X \to \mathbb{R}^l$, T — непрерывно, тогда $Y = T(X) \Rightarrow Y$ компактно.*

Доказательство. Характеристика компактного множества: $\forall \{y_n\} \subset Y\ \exists y_{n_k} \to y_0 \in Y$.

Возьмем последовательность точек $y_n \in Y$. Т.к. Y — образ, то это значения: $\exists x_n \in X:\ y_n = T(x_n)$. Множество X компатно, поэтому из последовательности x_n можно выделить подпоследовательность: $\exists x_{n_k} \to x_0 \in X$. В силу непрерывности, $T(x_{n_k}) \to T(x_0) = y_0 \in Y$. $T(x_{n_k}) = y_{n_k}$, $y_{n_k} \to y_0 \in Y$. Характеристика проверена, Y — компактно. □

Следствие:

Теорема. *$T : X \to \mathbb{R}^l$. T непрерывно, X компактно, следовательно, $T(X)$ ограничено и достигает наибольшего и наименьшего значений на X. (обе теоремы Вейерштрасса (что ограничено — 1) и (что достигает — 2)).*

Доказательство. $T(x)$ — компактно, следовательно, ограничено и замкнуто.

$T(x)$ — замкнуто, следовательно, $\exists m = \inf T(x)$, $M = \sup T(x)$. Рассмотрим последовательность $\{y^{(n)}\}$, такую, что $y^{(n)} = M - \frac{1}{n} = (M_1 - \frac{1}{n}, ..., M_l - \frac{1}{n})$, $y^{(n)} \to M \Rightarrow M \in T(x)$, так как $T(x)$ замкнуто. Аналогично с m. □

7 Формула остаточного члена ряда Тейлора и переход к пределу под знаком производной

7.1 Формула остаточного члена ряда Тейлора в интегральной форме

$f \in C^{(n+1)}(<a,b>)$, $x, x_0 \in <a,b>$. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано: $f(x) = T_n(f, x, x-x_0) + r_n(x)$.

Теорема. *При выполнении равенства выше верно, что*

$$r_n(x) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt$$

Доказательство. По индукции.

База: $n = 1$. Проверим:

$$f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^{x} f'(t)dt = -\int_{x_0}^{x} f'(t)d(x-t)$$

$$f(x) = f(x_0) - \left[f'(x)(x-t)|_{x_0}^{x} - \int_{x_0}^{x} f''(t)(x-t)dt \right] = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)}_{=T_1} + \int_{x_0}^{x} f''(t)(x-t)dt$$

Сделаем индукционный переход для n: $f(x) = T_{n-1}(x) + r_{n-1}(x)$. Согласно индукционному предположению, $r_{n-1}(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x} f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1}dt$

ИП:

$$r_{n-1}(x) = \frac{1}{(n-1)!}\left[-\frac{(x-t)^n}{n} f^{(n)}(t)|_{x_0}^{x} + \frac{1}{n}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt \right] =$$

$$\frac{1}{n!} f^n(x_0)(x-x_0)^n + \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(t)(x-t)^n dt$$

Подставив в формулу, получим

$$f(x) = T_{n-1}(x) + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n + \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt = T_n(x) + \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt$$

□

7.2 Теорема о предельном переходе под знаком производной

Теорема. *f_n непрерывно дифференцируемы на $< a, b >$ и выполняются следующие условия:*

1)$f_n \to_{n\to\infty} f(x)\ \forall x \in < a, b >$.

2) $f_n'(x) \rightrightarrows \varphi(x)$ на $< a, b >$.

Тогда f непрерывно дифференцируема на $< a, b >$ и $f'(x) = \varphi(x)$.

Доказательство. Пусть $c \in < a, b >$ и $x \in < a, b >$. $\int_c^x \varphi(t)dt = \lim_{n\to\infty}\int_c^x f_n'(t)dt$. (по второй теореме из билета 39). Тогда $\int_c^x f_n'(t)dt = f_n(x) - f_n(c) \to_{n\to\infty} f(x) - f(c) \Rightarrow f(x) - f(c) = \int_c^x \varphi(t)dt$. Правая часть дифференцируема, слева - функция минус константа, тоже дифференцируема, продифферецировав, получим $f'(x) = \varphi(x)$ и непрерывна по теореме Стокса-Зайделя. □

Теорема. *u_n непрерывно дифференцируемы на $< a, b >$, если*

1) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится $\forall x \in < a, b >$ и

2) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ равномерно сходится на $< a, b >$, $\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$,

то $S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ непрерывно дифференцируема и $S'(x) = \varphi(x)$.

Доказательство. $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x) \to_{n\to\infty} S$, $S_n' = \sum_{k=1}^{n} u_k'(x) \rightrightarrows \varphi \Rightarrow$ по 1 теореме этого билета $S'(x) = \varphi(x)$. □

8 Признак Коши и экспонента в ряд Тейлора

8.1 Интегральный признак Коши сходимости ряда

Теорема. *$f > 0$, непрерывна на $[1, +\infty)$, f монотонно убывает. Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ сходится одновременно с $\int_1^{\infty} f(x)dx$.*

Доказательство. Рассмотрим $[k, k+1]$. $\forall x \in [k, k+1]$ верно $a_{k+1} = f(k+1) \le f(x) \le f(k) = a_k$. По теореме о среднем $a_{k+1} \le \int_k^{k+1} f(x)dx \le a_k$ (т.к. длина $[k, k+1]$ равна 1), $S_{n+1} - a_1 = a_2 + ... + a_{n+1} \le \int_k^{k+1} f(x)dx \le a_1 + ... + a_n = S_n$, откуда $S_n - a_1 \le \int_1^n f(x)dx \le S_n$, переходим к пределу, $S - a_1 \le \int_1^{\infty} f(x)dx \le S$. $S - a_1 \to L$, $S \to L$, теорема о двух милиционерах. □

Замечание. $a_{m+1} + ... + a_n \le \int_m^n f(x)dx \le a_m + ... + a_n$. При $n \to \infty$ $a_{m+1} + ... + a_n = R_m$, $a_m + ... + a = R_{m-1}$ и $R_m \le \int_m^{\infty} f(x)dx \le R_{m-1}$.

8.2 Экспонента с комплексным и чисто мнимым показателем

Теорема. *$\forall z, w \in \mathbb{C}$ верно, что* $\exp(z+w) = \exp(z) \cdot \exp(w)$.

Доказательство.

$$\exp(z) \cdot \exp(w) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j!} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{w^k}{k!} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

Так как ряды сходятся абсолютно, можно применить определение произведения рядов:

$$c_n = \sum_{j+k=n}^{\infty} \frac{z^j}{j!} \frac{w^k}{k!}$$

Преобразуем c_n:

$$c_n = \frac{1}{n!} \sum_{j+k=n} \frac{n!}{j!k!} z^j w^k = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!k!} z^{n-k} w^k = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^{n-k} w^k = \frac{1}{n!}(z+w)^n$$

Отсюда

$$\exp(z) \cdot \exp(w) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(z+w)^n = \exp(z+w)$$

□

Свойства (как функции $\exp(z) \equiv f(z) \equiv e^z$):
1) $f(0) = 1, \ f(z) \neq 0 \ \forall z$.
Пусть $f(z_0) = 0$. Тогда $f(z) = f(z_0 + (z - z_0)) = f(z_0) f(z - z_0) = 0 \cdot f(z - z_0) = 0$, то есть $\forall z \ f(z) = 0$. Противоречие.
2) $\dot{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \backslash \{0\}$, то $(\mathbb{C}, +) \longrightarrow^{\exp} (\dot{\mathbb{C}}^*, \cdot)$, где экспонента — гомоморфизм.
3) $\forall z \ \forall n \in \mathbb{N}$ верно, что $\underline{f(nz) = [f(z)]^n}$.
4) $f(\overline{z})$. Мы знаем, что $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$ и $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$. Тогда $\exp(\overline{z}) = \overline{\exp}(z)$.

Теорема. *$z = it$, где $t \in \mathbb{R}$, $e^{it} = \cos t + i \sin t$.*

Доказательство.

$$e^{it} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} = (*) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} i \frac{(-1)^k t^{2k+1}}{(2k+1)!} =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k+1}}{(2k+1)!} = \left(1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} - ...\right) + i \left(t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - ...\right) = \cos t + i \sin t$$

(*)Если мнимую единицу возводить в четную степень, получим -1: $(i)^{2n} = (-1)^n$, а $(i)^{2k+1} = i(i)^{2k} = i(-1)^k$. □

Замечание. $e^{it} = \cos t + i \sin t$. Заменим t на nt. Тогда $\cos nt + i \sin nt = e^{int} = \exp(nit) = (e^{it})^n = (\cos t + i \sin t)^n$ (Формула Муавра).

9 Площадь криволинейного треугольника и теорема о компактной сходимости

9.1 Вычисление площади криволинейного сектора с помощью параметризации его основания

Короче, его нету нигде :(

$$S(T) = |\frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi) d\varphi|$$

9.2 Теорема о компактной сходимости и непрерывности суммы степенного ряда

Определение. Ряд (A) компактно сходится в круге сходимости, если $\forall r: \ 0 < r < R$ ряд (A) равномерно сходится в концентрическом круге $B(a, r) = \{z | \ |z-a| \le r\}$.

Теорема. $(A) \sum a_n(z-a)^n, \ R > 0$. *Тогда:*

1) (A) компактно сходится в $B(a, R)$;

2) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ непрерывна в $B(a, R)$.

Доказательство.

1) $\exists z_0$, такая, что $|z_0 - a| = r < R$. Тогда $\sum a_n(z_0-a)^n$ абсолютно сходится. $\forall z \in B(a, r)$ $\sum |a_n||z-a|^n \le \sum |a_n| r^n < +\infty$ по признаку Вейерштрасса A равномерно сходится $B(a, r)$.

2) $z_0 \in B(a, R)$. $\delta > 0: \ \bar{B}(z_0, \delta) \subset B(a, R)$, $\exists r: \ B(z_0, \delta) \subset B(a, r) \subset B(a, R)$. Непрерывность — локальное свойство, отсюда $\forall n \ a_n|z-a|^n$ — непрерывна в $B(a, r)$. (A) равномерно сходится в $B(a, r)$, следовательно, по теореме Стокса-Зайделя $f(z) = \sum a_n|z-a|^n$ непрерывна в $B(a, r)$. □

10 Формула Эйлера-Маклорена и arcsin по Тейлору

10.1 Формула Эйлера-Маклорена

$S_t = f(1) + f(2) + ...f(t)$, где f непрерывная на $[1, +\infty)$.

Если $f \in C^2$, то формула нам известна: это просто переосмысленная формула трапеции (на промежутке от $[a, b]$):

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{f(x_0) + f(x_n)}{2} h + h \cdot \sum_{k=1}^{t-1} f(x_k) + \rho_t$$

где $\rho_n = -\frac{h^2}{2} \int_a^b f''(x) \left\{\frac{x-a}{h}\right\} \left(1 - \left\{\frac{x-a}{h}\right\}\right) dx$.

Теперь мы её переосмыслим: $a = m, \ b = n, \ h = 1, \ x_k = k$. Таким образом, $\left\{\frac{x-a}{h}\right\} = \{x - m\} = \{x\}$, т.к. m целое. Отсюда наша формула примет вид:

$$\int_m^n f(x)dx = \frac{f(m) + f(n)}{2} + \sum_{m<k<n} f(k) - \frac{1}{2}\int_m^n f''(x)\{x\}(1-\{x\})dx$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) = \int_1^n f(x)dx + \frac{f(1) + f(n)}{2} + \frac{1}{2}\int_1^n f''(x)\{x\}(1-\{x\})dx$$

Следствие:

Предположим, что $\int_1^\infty |f''(x)|dx < +\infty$. Тогда $\int_1^n = \int_1^\infty - \int_n^\infty$. Откуда

$$S_n = \int_1^n f(x)dx + \frac{f(n)}{2} + \frac{1}{2}(f(1) + \int_1^\infty f''(x)\{x\}(1-\{x\})dx) - \frac{1}{2}\int_n^\infty f''(x)\{x\}(1-\{x\})dx$$

Для этого случая формула Эйлера-Маклорена приобретает следующий вид:

$$S_n = \int_1^n f(x)dx + \frac{f(n)}{2} + C - \frac{1}{2}\int_n^\infty f''(x)\{x\}(1-\{x\})dx$$

Если обозначить $\frac{1}{2}\int_n^\infty f''(x)\{x\}(1-\{x\})dx = \sigma_n$, то $|\sigma_n| \le \frac{1}{8}\int_n^\infty |f''(x)|dx$.

Пример. Асимптотика частичных сумм гармонического ряда:

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}$$

Здесь $f(x) = \frac{1}{x}$, $f''(x) = \frac{2}{x^3}$

Воспользуемся формулой:

$$S_n = \int_1^n \frac{dx}{x} + \frac{1}{2n} + \gamma + \sigma_n$$

где $\sigma_n = -\frac{1}{2}\int_n^\infty \frac{2}{x^3}\{x\}(1-\{x\})dx \le \frac{1}{8}\int_n^\infty f''(x)dx$, таким образом, $|\sigma_n| \le \frac{1}{8n^2}$.

Оценим:

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{2}\int_n^\infty \frac{2}{x^3}\{x\}(1-\{x\})dx < \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$$

Таким образом, константа Эйлера γ:

$$0,5 < \gamma < 0,625$$

И имеет примерное значение $\gamma = 0,5772...$

Таким образом, $S_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n^2})$

10.2 Разложение $\arcsin x$ в ряд Тейлора

нет

11 Интегрирование по частям и формула Адамара

11.1 Интегрирование по частям и замена переменной

Теорема. *(интегрирование по частям)*

$U, V \in C^1([a, b])$. Тогда $\int_a^b U(x)V'(x)dx = UV|_a^b - \int_a^b U'(x)V(x)dx$, что можно переписать как $\int_a^b U(x)dV = UV|_a^b - \int_a^b VdU$.

Доказательство. $(UV)' = U'V + V'U$. $\int_a^b (UV)'(x)dx = \int_a^b U(x)V'(x)dx + \int_a^b U'(x)V(x)dx$. На основании формулы Ньютона-Лейбница, $UV|_a^b = \int_a^b U(x)V'(x)dx + \int_a^b U'(x)V(x)dx$. □

Теорема. *(замена переменной)*

f непрерывна на $[a, b]$, а φ непрерывно дифференцируема на Δ с концами p, q. При этом выполняются условия:
1) $\varphi(p) = a,\ \varphi(q) = b$;
2) $\varphi'(t) \in [a, b]\ \forall t \in \Delta$.
Тогда $\int_a^b f(x)dx = \int_p^q f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.

Доказательство. Пусть $F(x)$ — первообразная для $f(x)$. И пусть $H(t) = F(\varphi(t)),\ t \in \Delta$. Тогда $H'(t) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$. Тогда, по формуле Ньютона-Лейбница, $\int_p^q f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = H|_p^q = F(\varphi(q)) - F(\varphi(p)) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$. □

11.2 Формула Адамара

Теорема. $(A) \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$, *$\exists R \in [0, +\infty]$, такое, что $\forall z:\ |z-a| < R$ (A) абсолютно сходится, а $\forall z:\ |z-a| > R$ (A) — расходится.*

Доказательство. Введем$K_n = \sqrt[n]{|a_n(z-a)^n|} = |z-a|\sqrt[n]{a_n}$. Считаем, что $z \neq a$. $\overline{\lim}K_n = |z-a|\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|} = |z-a|\alpha$, где $\alpha = \overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}$. По признаку Коши, $\alpha|z-a| < 1 \Rightarrow (A)$ абсолютно сходится и $\alpha|z-a| > 1 \Rightarrow (A)$ расходится. Тогда

1) $\alpha = +\infty$, то $\nexists z$, такого, что $\alpha|z-a| < 1$.

2) $\alpha = 0 \Rightarrow \alpha|z-a| = 0|z-a| < 1$ — ряд (A) сходится всегда $\forall z$.

3) $0 < \alpha < +\infty \Rightarrow \begin{cases} |z-a| < \frac{1}{\alpha} \Rightarrow & \text{абсолютно сходится} \\ |z-a| > \frac{1}{\alpha} \Rightarrow & \text{расходится} \end{cases}$

Отсюда:

$$R = \begin{cases} \alpha = 0 & R = +\infty \\ 0 < \alpha < +\infty & R = \frac{1}{\alpha} \\ \alpha = +\infty & R = 0 \end{cases}$$

□

Утверждение. Формула Адамара — $\frac{1}{R}\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}$.

12 Положительные ряды и разложение арктангенса и логарифма

12.1 Положительные ряды

12.2 Почленное интегрирование вещественного степенного ряда. Разложение в ряд Тейлора функций $\ln(1+x)$ и $\arctan x$

$(A) \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n;\ a_i, a, x \in \mathbb{R}$.

Если R — радиус сходимости, то по теореме $\forall x \in (a-R, a+R)$ ряд A компактно сходится.

Пусть $[p,q] \subset (a-R, a+R)$. A компактно сходится на $[p,q] \Rightarrow \sum a_n \int_p^q (x-a)^n dx = \int_p^q (\sum a_n (x-a)^n) dx$.

Теорема. *(2)*

1) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + ... + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + ...$ *Ряд сходится при* $x \in (-1, 1]$.

2) $\arctan X = X - \frac{X^3}{3} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + ...$ *Ряд сходится при* $x \in [-1,1]$.

Доказательство.

1) Посчитаем R для $\sum (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$: по формуле Адамара $R = \frac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}}$. $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n} \Rightarrow R = 1$, то есть на $(-1,1)$ ряд компактно сходится. При $x=1$ сходится по Лейбницу, при $x=-1$ расходится как отрицательный гармонический, следовательно, ряд компактно сходится $(-1,1]$.

Продифференцируем ряд, а потом обратно проинтегрируем:

$(\ln(1+x))' = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + ... + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$. Проинтегрируем по отрезку $[0,t]: \int_0^t \frac{dx}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \int_0^t x^n dx = t - \frac{t^2}{2} + ... + (-1)^n \frac{t^{n+1}}{n+1} + ...$ —?

Оценим остаток: $|r_n(x)| \le \frac{x^{n+1}}{n+1}$. $r_k(x) \rightrightarrows 0$ на $[0,1]$.

Проинтегрируем по отрезку $[0,1]$:

$$\ln 2 = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k \int_0^1 x^k dx + \int_0^1 r_n(x)dx$$

Оценим: $|\int_0^1 r_n(x)dx| \le \int_0^1 |r_n(x)|dx \le \int_0^1 x^{n+1}dx = \frac{1}{n+2}$.

Таким образом, $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + ... + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + ...$ и в качестве суммы ряда мы получаем $1 - \frac{1}{2} + ... + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}$, то есть сумма отличается от логарифма двух на бесконечно малую.

2) R для $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ равен 1, следовательно, $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - ... = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$. Интегрируя почленно, получим $\arctan x = \sum (-1)^n \int_0^x t^{2n}dt = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$.

Для краев сходится, остаток стремится к нулю. $\square$

13 Несобственные интегралы и дифференцирование степенного ряда

13.1 Определение несобственного интеграла и т.д.

Определение. f непрерывна на промежутке одного из типов: $[a,+\infty)$, $[a,b)$, $(-\infty,a]$, $(a,b]$.

$\Phi(A) = \int_a^A f(x)dx$. Тогда $\exists \lim_{A\to+\infty}\Phi(A) = \int_a^{+\infty} f(x)dx$ называется несобственным интегралом.

Свойства интеграла:

1) f, g непрерывны на $[a,+\infty)$. Если $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ сходятся (имеют конечные пределы), то сходится и $\int_a^{+\infty}(f(x)+g(x))dx = \int_a^{+\infty} f(x)dx + \int_a^{+\infty} g(x)dx$.

Доказательство. $\int_a^A (f(x)+g(x))dx = \int_a^A f(x)dx + \int_a^A g(x)dx$ и перейти к пределу. $\square$

2) α — постоянная, то $\int_a^{+\infty}\alpha f(x)dx = \alpha\int_a^{+\infty} f(x)dx$.

Доказательство. Очевидно. $\square$

3) f непрерывна на $[a,+\infty)$, $a < c < +\infty$, и $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int_c^{+\infty} f(x)dx$ сходятся одновременно, тогда $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx$.

Доказательство. Возьмем $\Phi(A) = \int_a^A f(x)dx$. $\Phi(A) = \int_a^A f(x)dx = \int_a^C f(x)dx + \int_C^A f(x)dx = \int_a^C f(x)dx + \Phi_1(A)$. $\square$

4) Если $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ — сходится, то $\int_A^{+\infty} f(x)dx \to_{A\to+\infty} 0$.

Доказательство. $\int_A^{+\infty} f(x)dx = \int_a^{\infty} f(x)dx - \Phi(A) \to_{A\to+\infty} 0$. $\square$

5) $\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{x\to\infty} F(x) - F(a)$.

6) Интегрирование по частям: $\int_a^{\infty} udv \leftarrow \int_a^A udv = uv|_a^A - \int_a^A vdu = \lim_{A\to\infty} u(A)v(A) - u(a)v(a) - \int_a^{\infty} vdu$.

13.2 Дифференцирование степенного ряда (с леммой)

Определение. f определена на $\mathbb{C}$. $f'(z_0) = \lim \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ — производная данной функции.

Лемма. *$u, v \in \mathbb{C}$, $|u|, |v| \le r$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда $|u^n - v^n| \le nr^{n-1}|u-v|$.*

Доказательство.

$$(u-v)(u^{n-1} + u^{n-2}v + ... + ux^{n-2} + v^{n-1}) =$$
$$= u^n + u^{n-1}v + ... + u^2v^{n-2} + uv^{n-1} - vu^{n-1} - ... - uv^{n-1} - v^n = u^n - v^n$$

$$|u^n - v^n| = |u-v| \cdot |u^{n-1} + u^{n-2}v + ... + ux^{n-2} + v^{n-1}| \le |u-v| \sum_{k=0}^{n-1} |u^{n-1-k}| v^k| \le |u-v| \sum_{k=0}^{n-1} r^{n-1-k} r^k = |u-v| \cdot n \cdot r^{n-1}$$

□

Теорема. *$(A) \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$, $R > 0$, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ определена в $B(a,R)$.*
Тогда:
1) $(A') \sum_{n=1}^{\infty} na_n(z-a)^{n-1}$. (A') имеет с (A) одинаковые радиусы сходимости,
2) f — дифференцируема и $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(z-a)^{n-1}$.

Доказательство.

1) Рассмотрим $(A_*) \sum |a_n(z-a)^n|$ и $(A'_*) \sum |na_n(z-a)^{n-1}|$, при $z \ne a$. $|a_n(z-a)^n| \le |z-a||na_n(z-a)^{n-1}|$ при $n \ge 1$.

Пусть R' — радиус сходимости (A') и $|z-a| < R' \Rightarrow$ сходится (A'_*). В силу неравенства выше, сходится ряд и $(A_*) \Rightarrow$ сходится (A), а необходимое для того условие: $|z-a| \le R$. Отсюда $R' \le R$.

Пусть $R' \ne R \Rightarrow R' < R$. Тогда $R' < |z-a| < R$ и (A') — расходится. Возьмем z_0, такое, что $|z-a| < |z_0 - a| < R$. (A) — сходится в точке z_0. Тогда, по лемме Абеля, (A') — сходится в z. А этого не может быть, т.к. $R' < |z-a|$, то есть в точке z_0 ряд (A') должен расходиться. То есть $R' = R$.

2) $z, w \in B(a,R)$. $\exists r : \; |z-a| < r, \; |w-a| < r$. $f(w) = \sum a_n(w-a)^n$, $f(z) = \sum a_n(z-a)^n$. $f(w) - f(z) = \sum a_n\left[(w-a)^n - (z-a)^n\right]$, при $w \ne z$. По определению производной,

$$\left|\frac{f(w)-f(z)}{w-z}\right| = \left|\frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n((w-a)^n - (z-a)^n)}{(w-a)-(z-a)}\right| \le \frac{\sum a_n n\,|(w-a)-(z-a)|\, r^{n-1}}{|(w-a)-(z-a)|} = \sum a_n n r^{n-1}$$

Откуда $\frac{f(w)-f(z)}{w-z}$ сходится, перейдя к пределу почленно, перейдя к пределу:

$$f'(z) = \lim_{w \to z} \frac{f(w)-f(z)}{w-z} = \sum a_n \lim_{w \to z} \frac{(w-a)^n - (z-a)^n}{w-z} =$$
$$= \sum a_n n \lim_{w \to z} \frac{|(w-a)-(z-a)|\left((w-a)^{n-1} + (w-a)^{n-2}(z-a)... + (w-a)(z-a)^{n-2} + (z-a)^{n-1}\right)}{|(w-a)-(z-a)|} =$$
$$= \sum a_n n \lim_{w \to z} \left|(w-a)^{n-1} + (w-a)^{n-2}(z-a)... + (w-a)(z-a)^{n-2} + (z-a)^{n-1}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n(z-a)^{n-1}$$

— сумма A'. □