Дисклеймер.

Автор не несет ответственности за любой ущерб, причиненный Вам при использовании данного документа. Автор напоминает, что данный документ может содержать ошибки и опечатки, недостоверную и/или непроверенную информацию. Если Вы желаете помочь в развитии проекта или сообщить об ошибке/опечатке/неточности:

GitHub проекта

Автор в ВК

Содержание

Часть I
Интеграл и интегрирование

1 Неопределенный интеграл

Как и в прошлом семестре мы считаем, что наши функции заданы на числовых множествах, являющихся объединением промежутков.

Определение. f определена на X. F называется первообразной для f на X, если $\forall x \in X\ \exists F'(x)$ и $F'(x) = f(x)$.

Например, если $f(x) = \sin x$, то $F = -\cos x + C$.

При этом первообразная не всегда существует (например, может не существовать у разрывных функций).

Теорема. *(Достаточное условие существования первообразной). Непрерывная функция имеет первообразную.*

Доказательство. Без доказательства (немного позже будет переформулирована и доказана полностью на следующий год). $\square$

Теорема. *F — первообразная для f на $< a, b >$. Тогда*

1) $\bar{F}(x) = F(x) + C$, то $\bar{F}(x)$ — тоже первообразная.

2) Если H — первообразная для f на $< a, b >$, то $\exists C_0 : H(x) = F(x) + C_0\ \forall x \in < a, b >$

Доказательство.

1) Очевидно.

2) $(H(x) - F(x))' = (H(x))' - (F(x))' = f(x) - f(x) = 0$. По критерию постоянства $H(x) - F(x) \equiv const$. $\exists C_0 : H(x) - F(x) = C_0$ всюду на $< a, b >$. $\square$

Определение. Неопределенный интеграл — любая первообразная для функции на данном промежутке.

Обозначение: $\int f(x)dx$, где f называется подынтегральной функцией. $\int f(x)dx = F(x) + C$ (2) $\Leftrightarrow f(x) = F'(x)\ \forall x \in < a, b >$

Таблица интегралов:

1. $\int 0dx = C$

2. $\int 1dx = x + C$

3. $n \in \mathbb{N} \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

4. $n \in \mathbb{Z}, n < 0, n = -k, k > 0, k \neq 1; \int x^n dx = \int \frac{dx}{x^k} = \frac{x^{-k+1}}{-k+1} + C = \frac{x^{n+1}}{n+1}$

5. $p \in \mathbb{R},\ p \neq -1,\ X = (0, +\infty)\ \int x^p dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + C$ на $(0, +\infty)$

6. $\int e^x dx = e^x + C$

7. $a > 0,\ a \neq 1,\ \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

8. $(0, +\infty)\ \int \frac{dx}{x} = \ln x + C$

9. $(-\infty, 0),\ \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

10. $\int \sin x dx = -\cos x + C$

11. $\int \cos x dx = \sin x + C$

12. $\int \frac{dx}{cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$ на $(k\pi + \frac{\pi}{2}, (k+1)\pi + \frac{\pi}{2})$

13. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$ на $(k\pi, (k+1)\pi)$

14. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$

15. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$ на $(-1, 1)$

16. $\alpha \in \mathbb{R},\ \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}} = \ln|x + \sqrt{x^2+\alpha}| + C$ на $\mathbb{R}$, если $\alpha > 0$ и на $|x| > \sqrt{|\alpha|}$, если $\alpha < 0$

17. $a > 0,\ \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln|\frac{x-a}{x+a}| + C$ на каждом из интервалов $(-\infty, -a), (-a, a), (a, +\infty)$

Теорема. *f, g непрерывны на промежутке. Тогда:*
1)$\int (f(x) + g(x)) = \int f(x)dx + \int g(x)dx$
2)$a \in \mathbb{R}\ \int af(x)dx = a \int f(x)dx$

Доказательство.
1) F — первообразная f и G — первообразная g, тогда $F + G$ — первообразная для $f + g \Rightarrow \int (f(x) + g(x))dx = F(x) + G(x) + C = \int f(x)dx + \int g(x)dx$
2) Доказательство самостоятельно. □

Теорема. *f непрерывна на Δ, F — первообразная. Тогда*
1) $a \in \mathbb{R}$. $\int f(x-a)dx = F(x-a) + C$ на Δ'
2) $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$. $\int f(ax)dx = \frac{1}{a}F(ax) + C$ на Δ', то есть $\int \cos 10x dx = \frac{1}{10} \sin 10x + C$

Теорема. *u, v — непрерывно дифференцируемы на Δ. Тогда $\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx \quad (3)$ на Δ'*
Или, можно переписать формулу (3) как $\int udv = uv - \int vdu$

Доказательство. Найдем производную произведения: $(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$. По теореме 3 $\int (uv)'dx = \int u'vdx + \int uv'dx \ \Leftrightarrow \int uv'dx = uv + C - \int u'vdx$ □

Пример.
1) $\int xe^x dx = xe^x - \int 1 \cdot e^x = xe^x - e^x + C$
2) $\int \ln x dx = \int 1 \cdot \ln x dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x - \int 1 dx = x \ln x - x + C$
3) $\int \sin x \cdot e^x dx = \sin x \cdot e^x - \int \cos x \cdot e^x dx = \sin x \cdot e^x - (\cos x \cdot e^x + \int \sin x \cdot e^x dx) = (\sin x - \cos x) \cdot e^x - \int \sin x \cdot e^x dx \Leftrightarrow 2 \int \sin x \cdot e^x dx = (\sin x - \cos x) \cdot e^x + C \Leftrightarrow \int \sin x \cdot e^x dx = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x)$.

Теорема. *f непрерывна на $< a, b >$, F — первообразная, φ непрерывна и дифференцируема на Δ. $\varphi(x) \in < a, b > \forall x \in \Delta$. Тогда $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = F(\varphi(x)) + C$.*

Доказательство. $H(x) = F(\varphi(x))$

$H'(x) = F'(\varphi(x))\varphi'(x) = f(\varphi(x))\varphi'(x)$

$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(y)dy$

Пусть H — первообразная для $f(\varphi(x))\varphi'(x)$. Тогда $H(x) = F(\varphi'(x))$. Пусть φ строго монотонна. Тогда $\exists \varphi^{-1}(y)$. $x = \varphi^{-1}(y)$, $H(\varphi^{-1}(y)) = F(y)$

□

Пример.

1) $\int \sin^{10} x \cos x dx = \int \sin^x d \sin x = \int y^{10} dy = \frac{y^{11}}{11} + C = \frac{\sin^{11} x}{11} + C$

2) $\int x \cdot e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int e^{x^2} d(x^2) = \int e^y dy = \frac{1}{2}(e^y + C) = \frac{1}{2} e^{x^2} + C$

3) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = \int \frac{2tdt}{1+t} = 2 \int \frac{t+1-1}{1+t} dt = 2 \int (1 - \frac{1}{1+t}) dt = 2t - 2 \int \frac{dt}{1+t} = 2t - 2\ln(1+t) + C = 2\sqrt{x} - 2\ln(1+\sqrt{x}) + C$ (замена $x = t^2 = \varphi(t)$)

4) $\int \arctan x dx = x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} dx = x \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + C$

5) $\int \frac{x^n dx}{(1+x^2)^m}$. Если $n = 2k+1$, то

$$\int \frac{x^{2k+1}}{(1+x^2)^m} dx = \frac{1}{2} \frac{(x^2)^k d(x^2+1)}{(1+x^2)^m} = \frac{1}{2} \int \frac{y^t}{y^m} dx$$

Если $n = 2k$, то

$$\int \frac{x^{2k}}{(1+x^2)^m} dx = \frac{1}{2} \int \frac{x^{2k-1} d(x^2+1)}{(x^2+1)^m} = \frac{1}{2}(-\frac{1}{m-1} \frac{x^{2k-1}}{(x^2+1)^{(m-1)}} + \frac{2k+1}{m-1} \int \frac{x^{2k-2} dx}{(1+x^2)^{m-1}})$$

А если $k = 0$? Разберем на частном примере: $\int \frac{dx}{(1+x^2)^2}$. Замена $x = \frac{1}{t}$.

$$\int \frac{-\frac{dt}{t^2}}{(1+\frac{1}{t^2})^2} = -\int \frac{t^2 dt}{(1+\frac{1}{t^2})^2} = -\int \frac{td(t^2+1)}{(1+t^2)^2} = \frac{1}{2} \frac{t}{1+t^2} - \frac{1}{2} \int \frac{dt}{1+t^2}$$

Если интегральная функция представлена в виде полинома $\frac{P(x)}{Q(x)}$, то её можно представить в виде $\frac{A}{(x-a)^k}$ и $\frac{Bx+C}{(ax^2+bx+c)}$ (второе в случае комплексных корней).

Есть методы, позволяющие вычислять полиномы вида

$$\int \frac{P(x)dx}{Q(x)\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

Однако есть проблемы. Мы можем продифференцировать любую элементарную функцию. А вот что касается первообразных, то не факт, что у функции есть первообразная в виде элементарной функции. Например, у $\int \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}$ первообразная представлена не элементарной функцией. И таких интегралов немало. К примеру, $\int \frac{\sin x}{x} dx$, $\int \frac{x}{\ln x} dx$, $\int e^{\pm x^2} dx$ и так далее. Это не означает, что первообразной не существует (первообразная функции существует всегда, это гарантирует теорема), это значит, что первообразную невозможно представить с помощью элементарной функции.

2 Интеграл от непрерывной функции по промежутку (определенный интеграл)

Определение. Определенный интеграл — интеграл для функции, определенной на каком-либо промежутке.

Если у нас есть замкнутый невырожденный промежуток $[a,b]$, f непрерывна на нём. $(f,[a,b])$ — допустимая пара. D — множество таких допустимых пар. Интегралом называется функция, заданная на множестве допустимых пар: $J : D \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая свойствам:

1. $f,[a,b]$ — допустимая пара, т.е. $a < c < b$, $J(f,[a,b]) = J(f,[a,c]) + J(f,[c,b])$.
2. $(f,[a,b])$, $A \le f(x) \le B$ $\forall x \in [a,b]$ $A(b-a) \le J(f,[a,b]) \le B(b-a)$. Из него вытекает свойство: если $f \equiv C$, то $J(C,[a,b]) = C(b-a)$.

Оказывается, что для интеграла справедлива

Теорема. *(о среднем). Если пара $(f,[a,b])$ — допустимая, то $\exists c \in [a,b]$, такое, что $J(f,[a,b]) = f(c)(b-a)$*

Доказательство. Пусть $M = \max f(x)$, $m = \min f(x)$ на $[a,b]$. Тогда $m \le f(x) \le M$ $\forall x \in [a,b]$. Тогда $m(b-a) \le J(f,[a,b]) \le M(b-a)$, разделим на $b-a$, получим $m \le \frac{1}{b-a}J(f,[a,b]) = C \le M$, где m и M — по теореме Вейерштрасса минимум и максимум. Тогда по теореме Больцано-Коши $\exists c \in [a,b]$: $f(c) = C = \frac{1}{b-a}J(f,[a,b])$, остается лишь домножить на $(b-a)$. □

Возьмем допустимую пару $(f,[a,b])$, возьмем x такое что $a < x \le b$. Возьмем $\phi(x) = J(f,[a,x])$, и положим $\phi(a) = 0$.

Теорема. *(О дифференцировании интеграла по переменному промежутку). Пусть $(f,[a,b])$ — допустимая. Тогда $\forall x \in [a,b]$ $\exists \phi(x)$ и $\phi'(x) = f(x)$, откуда сразу вытекает, что ϕ — первообразная f на $[a,b]$.*

Доказательство. Докажем, что в каждой точке у функции есть производные справа и слева, равные f. Будем считать, что $a \le x < b$ для производной справа и $a < x \le b$ для производной слева.

Возьмем $h > 0$, будем изучать приращения: $\Delta\phi(x+h) = \phi(x+h) - \phi(x)$, где $\phi(x+h) = J(f,[a,b]) = J(f,[a,x]) + J(f,[x,b])$, подставив в исходное равенство, получим, что $\Delta\phi(x,h) = J(f,[x,x+h]) = f(\bar{x})h$ по теореме о среднем. Разделим это равенство:

$$\frac{\Delta\phi(x,h)}{h} = f(\bar{x}) \to_{h\to+0} f(x)$$

по определению это означает, что $\exists\phi'_+(x) = f(x)$. Для доказательства производной слева воспользоваться разделением промежутка и $x-h$. □

Замечание. Формула Ньютона-Лейбница. Пусть f непрерывна на $[a,b]$, а F — первообразная для f. Тогда $J(f,[a,b]) = F(b) - F(a)$ (*).

Доказательство. $\exists c: \ F(x) = \phi(x) + C$. То есть $F(b) - F(a) = (\phi(b) + C) - (\phi(a) + C) = \phi(b) = J(f, [a, b])$, так как $\phi(a) = 0$. $\square$

Эта формула дает нам важнейшую информацию об интеграле. Интеграл аксиомами 1 и 2 определяется однозначно. И вот теперь, зная, что он только один, мы можем перейти на традиционные обозначения:

$$J(f, [a, b]) = \int_a^b f(x)dx$$

Причем a и b называются пределы интегрирования.

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Правая часть этой формулы называется двойной подстановкой и обозначается $F(x)|_a^b \equiv F(x)|_{x=a}^{x=b}$

Геометрический смысл интеграла — это площадь фигуры, ограниченной $[a, b]$ и графиком сверху.

Примеры применения формулы Ньютона-Лейбница:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}|a = \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

Замечание: $\phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ — формула *(чего-то, уточнить)*. Можно рассматривать также $\psi(x) = \int_x^b f(t)dt$, откуда $\phi(x) + \psi(x) = \int_a^b f(x)dx$.

2.1 Свойства интегралов

Свойства, выражаемые равенствами:

1. f, g — непрерывны на $[a, b]$. Тогда $\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b (f(x)dx + \int_a^b g(x))dx$. Доказательство: F, G — первообразные для. Тогда $h = f + g$, $H = F + G$, значит, $H'(x) = h(x)$. Значит, $\int_a^b (f(x)+g(x))dx = H(b)-H(a) = (F(b)+G(b))-(F(a)+G(a)) = F(b) - F(a) + G(b) - G(a) = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$.

2. f— непрерывна на $[a, b]$, α — число. Тогда $\int_a^b (\alpha g(x))dx = \alpha \int g(x))dx$. Доказательство самостоятельно.

3. $\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$. Доказательство очевидно.

4. $\int_a^b (\sum_{k=1}^n \alpha_k f_k(x))dx = \sum_{k=1}^n \alpha_k \int_a^b f_k(x)$. Доказательство очевидно по индукции.

5. Введем соглашение: $a < b$, то $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$.

6. a, b, c — любые числа, f непрерывна на любом промежутке с концами a, b, c. Тогда $\int_a^b = \int_a^c + \int_c^b$ для любых случаев расположения a, b, c. Доказательство: $a < c < b$. Тогда $\int_b^c = \int_b^a + \int_a^b$ ...

Свойства, выражаемые неравенствами: (здесь всегда считаем $a < b$)

1. Монотонность: f, g непрерывны на $[a, b]$, если $f \leq g$ $\forall x \in [a, b]$, то $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$. Доказательство: $\int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx = \int_a^b (g(x) - f(x))dx \geq 0$. Добавление: если $f \leq g$, но f не тождественна g, тогда $\int_a^b f(x)dx < \int_a^b g(x)dx$. Доказательство: $a \leq c \leq b$. Пусть $c < b$. В точке c $f(c) < g(c)$. Возьмем такое $\varepsilon < \frac{g(c)-f(c)}{2}$, чтобы $f(c) + \varepsilon < g(x) - \varepsilon$. Рассмотрим $x \in [c, c+h]$, тогда $f(x) \leq f(c) + \varepsilon$, $g(x) > g(c) - \varepsilon$. Тогда $\int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx = \int_a^b (g(x) - f(x))dx = \int_a^c + \int_c^{c+h} + \int_{c+h}^b = \int_c^{c+h} g(x)dx - \int_c^{c+h} f(x)dx$. Если мы увеличим один из этих интегралов, то разность только увеличится. $\int_c^{c+h} g(x)dx - \int_c^{c+h} f(x)dx \geq (g(c) - \varepsilon)h - (f(c) + \varepsilon)h$.

2. Оценка: f непрерывна на $[a, b]$, тогда модуль интеграла не превосходит интеграла модуля функции. $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$, следовательно, $-\int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx$.

Теорема. *Обобщенная о среднем. Пусть f, g непрерывны на $[a, b]$, $g \geq 0$. Тогда $\exists c \in [a, b]$, такая, что $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx$.*

Доказательство. Пусть $m = \min f(x)$, $M = \max f(x)$ на $[a, b]$. Тогда $m \leq f(x) \leq M$ $\forall x \in [a, b]$. Умножим все на $g(x)$: $mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$. Теперь мы можем проинтегрировать это неравенство, так как g монотонна: $m\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M\int_a^b g(x)dx$. Исключим тривиальный случай $g(x) = 0$. В таком случае равенство очевидно. Теперь будем считать, что $g(x) \neq 0$. Тогда, по свойству монотонности $\int_a^b g(x)dx > 0$. Тогда на него можно разделить:

$$m \leq \frac{1}{\int_a^b g(x)dx}\int_a^b f(x)g(x)dx = C \leq M$$

Можно считать, что $f(x_1) = m$ и $f(x_2) = M$. Тогда, по теореме Больцано-Коши $\exists c \in [a, b]$, такая, что $f(c) = C$, то есть

$$f(c) = \frac{1}{\int_a^b g(x)dx}\int_a^b f(x)g(x)dx$$

Остается лишь домножить на интеграл $\int_a^b g(x)dx$. Теорема доказана.

□

2.2 Два приема вычисления определенного интеграла.

1) Интегрирование по частям:

Теорема. *$U, V \in C^1([a,b])$. Тогда $\int_a^b U(x)V'(x)dx = UV|_a^b - \int_a^b U'(x)V(x)dx$, что можно переписать как $\int_a^b U(x)dV = UV|_a^b - \int_a^b VdU$.*

Доказательство. $(UV)' = U'V + V'U$. $\int_a^b (UV)'(x)dx = \int_a^b U(x)V'(x)dx + \int_a^b U'(x)V(x)dx$. На основании формулы Ньютона-Лейбница, $UV|_a^b = \int_a^b U(x)V'(x)dx + \int_a^b U'(x)V(x)dx$.

□

2) Замена переменной:

Теорема. *f непрерывна на $[a,b]$, а ϕ непрерывно дифференцируема на Δ с концами p, q. При этом выполняются условия:*

1) $\varphi(p) = a,\ \varphi(q) = b$;

2) $\varphi'(t) \in [a,b]\ \forall t \in \Delta$.

Тогда $\int_a^b f(x)dx = \int_p^q f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.

Доказательство. Пусть $F(x)$ — первообразная для $f(x)$. И пусть $H(t) = F(\varphi(t)),\ t \in \Delta$. Эта композиция имеет смысл (понять, почему), тогда $H'(t) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$. Тогда, по формуле Ньютона-Лейбница, $\int_p^q f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = H|_p^q = F(\varphi(q)) - F(\varphi(p)) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$. Нам неизвестно, что больше, p или q, но формула Ньютона-Лейбница верна всегда.

□

Пример.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x dx = -\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x||_0^{\frac{\pi}{4}} = -\ln\cos\frac{\pi}{4} + \ln 1 = \frac{1}{2}\ln 2$$

$$\int_0^1 \arctan x dx = x\arctan x|_0^1 - \int \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)|_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2$$

$\int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}dx,\ x = R\sin t = \varphi(t),\ 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$,

$$\int_0^R \sqrt{R^2-x^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} R\cos tR\cos tdt = R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 tdt = \frac{1+\cos 2t}{2} = \frac{R}{2}(\frac{\pi}{2} + \frac{\sin 2t}{2}|_0^{\frac{\pi}{2}})\frac{R^2}{2}\frac{\pi}{2}$$

Следствие: f непрерывна на симметричном промежутке $[-a,a]$.
Если f — четное, то $\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$, а если нечетное, то $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$.

Доказательство. f непрерывна на $[-a,a]$. Тогда $\int_{-a}^a f(x)dx = \int_{-a}^0 f(t)dt + \int_0^a f(x)dx$. Сделаем замену $t = -x,\ 0 \le x \le a$. Получим $\int_a^0 f(-x)(-1)dx + \int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(-x)dx + \int_0^a f(x)dx = \int_{-a}^a (f(x) + f(-x))dx$. □

Прием приведения интеграла к самому себе можно использовать для вычисления интегралов вида $\int_\alpha^\beta e^{ax}\begin{cases}\sin bx\\ \cos bx\end{cases}$ —?

Пример. Особо важный.

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n xdx$$

Вычислим такой интеграл для $\sin^n x$

$$I_0=\frac{\pi}{2},\quad I_1=1$$

$n\geq 2$, займемся n-ым интегралом.

$$I_n=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}xd(\cos x)=\sin^{n-1}x\cos x|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x(n-1)\sin^{n-2}x\cos xdx=$$
$$(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\cos^2 xdx=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x(1-\sin^2 x)dx=(n-1)(I_{n-2}-I_n)$$

то есть результат:

$$I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}$$

Разберем по отдельности случай четности и нечетности. $n=2k$

$$I_{2k}=\frac{2k-1}{2k}I_{2(k-1)}=\frac{2k-1}{2k}\frac{2k-3}{2k-2}I_{2(k-2)}=...=\frac{(2k-1)(2k-3)...3\cdot 1}{(2k)(2k-2)...4\cdot 2}I_0=\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\cdot\frac{\pi}{2}$$

Для $n=2k+1$:

$$I_{2k+1}=\frac{2k}{2k+1}I_{2k-1}=...=\frac{2k(2k-2)...2}{(2k+1)(2k-1)...3}I_1=\frac{2k!!}{(2k+1)!!}$$

Отсюда ответ:

$$I_n=\frac{(n-1)!!}{n!!}\varepsilon_n,\quad \varepsilon_n=\begin{cases}\frac{\pi}{2} & n-\text{четное}\\ 1 & n-\text{нечетное}\end{cases}$$

Получим формулу, выражающую π как предел, с помощью выведенной формулы.

$\sin^{2k+1}x\leq\sin^{2k}x\leq\sin^{2k-1}x,\ x\in[a,b]$. При этом мы знаем, что $I_{2k-1}<I_{2k}<I_{2k+1}$, то есть

$$\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}\leq\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\cdot\frac{\pi}{2}\leq\frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!}\Leftrightarrow$$
$$\frac{1}{2k+1}\left[\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}\right]^2\leq\frac{\pi}{2}\leq\frac{1}{2k}\underbrace{\left[\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}\right]^2}_{Ak}\frac{1}{2k}A_k^2-\frac{1}{2k+1}A_k^2=$$
$$(\frac{1}{2k}-\frac{1}{2k+1})A_k^2=\frac{1}{2k(2k+1)}A_k^2\leq\frac{1}{2k}\cdot\frac{\pi}{2}\to_{k\to\infty}00<\frac{1}{2k}A_k^2-\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{4k}\to_{k\to\infty}0.$$

Отсюда $\pi = \lim_{k\to\infty}[\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}]^2$.
Формула Валлиса.

2.3 Несобственный интеграл

Определение. Пусть имеется полуоткрытый промежуток (либо $[a,b)$, либо $(-\infty,b]$ и обратные) и на них задана функция. Для определенности рассмотрим $[a,+\infty)$. Возьмем число A, и рассмотрим интеграл $\phi(A) = \int_a^A f(x)dx$. Тогда

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a\to+\infty}\int_a^A f(x)dx$$

Это и называется несобственным интегралом. Если мы рассматриваем промежуток $[a,b)$, то $A \to b$.

Пример.
1) $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$. $\int_1^A \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}|_1^A = 1 - \frac{1}{A} \to 1$
2) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$. $\int_A^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$(где A $>$0) $= 2\sqrt{x}|_A^1 = 2 - 2\sqrt{A} \to 2$
3) $\int_0^\infty \cos x dx$. $\int_0^A \cos x dx = \sin x|_0^A = \sin A \not\to$

Теперь выясним, можно ли применять для интегрирования по частям.

$U, V \in C^1([a,+\infty])$. Нас интересует интеграл $\int_a^{+\infty} U(x)V'(x)dx$. Рассмотрим $\int_a^A U(x)V'(x)dx = UV|_a^A - \int_a^A U'(x)V(x)dx$.

Предположение. *$U(A)V(A) \to_{A\to+\infty}$ конечный предел.*

Теорема. *$U, V \in C^1([a,+\infty])$, $\exists$ конечный $\lim_{A\to+\infty} U(A)V(A)$, $\int_a^\infty U(x)V'(x)dx$ и $\int_a^\infty U'(x)V'(x)dx$, то*

$$\int_a^\infty U(x)V'(x)dx = \lim U(x)V(x)|_a^A - \int_a^\infty U'(x)V(x)dx = U(x)V(x)|_a^\infty - \int_a^\infty U'(x)V(x)dx$$

Пример. $\int_0^1 \ln x dx$. $\int_\varepsilon^1 \ln x dx = x\ln x|_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 x\frac{1}{x}dx = -\varepsilon ln\varepsilon - \underbrace{\int_\varepsilon^1 dx}_{\to 1} \to -1$

Рассмотрим вопрос о замене переменной:

Теорема. *f непрерывна на $[a,+\infty)$, $\int_a^\infty f(x)dx$ — сходится, и $\varphi \in C'(\Delta)^a$ (полуоткрытый), $p \in \Delta, q \notin \Delta$, кроме того, предполагаем, что $\varphi(p) = a$, $\varphi(t) \in [a,+\infty)$, $\varphi(t) \to_{t\to q} +\infty$, то $\int_a^\infty (x)dx = \int_p^q f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$*

Доказательство. Возьмем s между p и q. Тогда, по обычной формуле замены переменной,
$\int_p^s f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_a^{\varphi(s)} f(x)dx \to \int_a^{+\infty} f(x)dx$. (Устремили $s \to q$, тогда $\varphi(s) \to +\infty$)

Если взять φ строго монотонной, то можно доказать, что оба интеграла сходятся одновременно. □

Пример.
$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^5} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(1+\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t})^5}\frac{dt}{\cos^2 t} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^8 t dt = \frac{7!!}{8!!}\frac{\pi}{2}$$
(замена $x = \operatorname{tg} t$)

2.4 Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме

$f \in C^{(n+1)}(< a, b >)$, $x, x_0 \in < a, b >$. Для нее справедлива формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано: $f(x) = T_n(f, x, x - x_0) + r_n(x)$ (1), где $T_n(f, x, x-x_0) = T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$, $r_n(x) = o((x-x_0)^n)$, при $x \to x_0$

Теорема. *При выполнении равенства (1) верно, что*
$$r_n(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt$$

Следствие: *применяя обобщенную теорему о среднем, можно сказать, что $\exists \bar{x}$ между x_0 и x, такой, что*
$$r_n(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^x f^{(n+1)}(\bar{x})(x-t)^n dt = \frac{1}{n!}f^{(n+1)}(\bar{x})\left[\frac{-(x-t)^n}{n+1}\right]|_{x_0}^x = \frac{f^{(n+1)}(\bar{x})}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

Доказательство. По индукции.

База: $n = 1$. Проверим: (применив формулу Ньютона-Лейбница)
$$f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^x f'(t)dt = -\int_{x_0}^x f'(t)d(x-t)$$
$$f(x) = f(x_0) - \left[f'(x)(x-t)|_{x_0}^x - \int_{x_0}^x f''(t)(x-t)dt\right] = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)}_{=T_1} + \int_{x_0}^x f''(t)(x-t)dt$$

Сделаем индукционный переход для n: $f(x) = T_{n-1}(x) + r_{n-1}(x)$. Согласно индукционному предположению, $r_{n-1}(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^x f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1}dt$

ИП:
$$r_{n-1}(x) = \frac{1}{(n-1)!}\left[-\frac{(x-t)^n}{n}f^{(n)}(t)|_{x_0}^x + \frac{1}{n}\int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt\right] =$$
$$\frac{1}{n!}f^n(x_0)(x-x_0)^n + \frac{1}{n!}\int_{x_0}^x (t)(x-t)^n dt$$

Подставив в формулу, получим
$$f(x) = T_{n-1}(x) + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n + \frac{1}{n!}\int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt = T_n(x) + \frac{1}{n!}\int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt$$

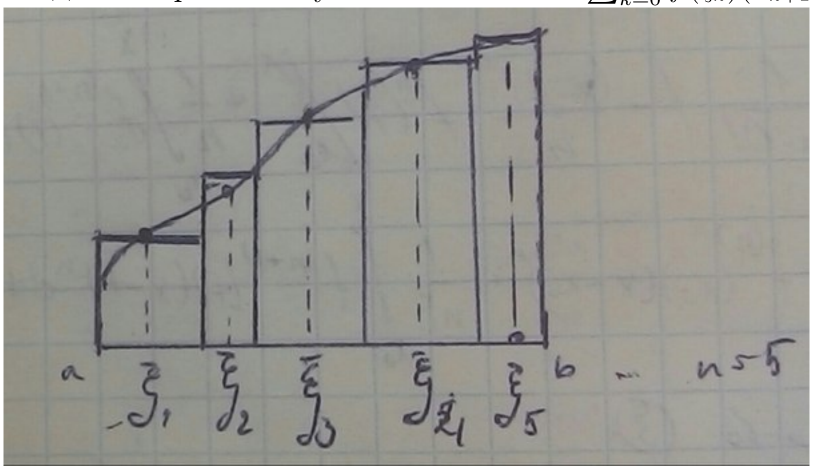
□

2.5 Интеграл как предел интегральных сумм

Рассматриваем функцию f на промежутке $[a,b]$.

Пусть есть набор точек $x_0,...,x_n$, таких, что $x_0 = a < x_1 < ... < x_n = b$. Такой набор точек мы будем называть дроблением. $\Delta_k = [x_k, x_{k+1}]$. Обозначим дробление $\tau = (x_0,...,x_n)$, а оснащение $\xi = (\xi_0, \xi_1, ..., \xi_{n-1})$ $\xi_k \in \Delta_k$. (где ξ — некая точка в промежутке Δ_k).

Тогда интегральной суммой называется $\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k) = \sigma(f,\tau,\xi)(= \sigma_\tau)$



Ранг дробления — $\max(x_{k+1} - x_k) = \lambda_\tau$.

Теорема. f — *непрерывна,*

$$\sigma(f,\tau,\xi) \to_{\lambda_\tau \to 0} I = \int_a^b f(x)dx$$

что означает, что $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$, *такое, что как только* $\lambda_\tau < \delta \Rightarrow |\sigma(f,\tau,\xi) - I| < \varepsilon\ \ \forall \xi$.

Доказательство. будет проводиться для функции непрерывно дифференцируемой ($f \in C^1[a,b]$). Запасемся неравенством: $|f'(x)| \leq M\ \forall x$, так как функция ограничена.

Берем дробление τ, у него ранг λ_τ.

$$|\sigma(f,\tau,\xi) - \int_a^b f(x)dx| = |\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k) - \sum_{k=0}^{n-1} \int f(x)dx| =$$

Применив теорему о среднем,

$$= \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k) - \sum_{k=0}^{n-1} f(c_k)(x_{k+1} - x_k) = \sum_{k=0}^{n-1} |f(\xi_k) - f(c_k)|(x_{k+1} - x_k)$$

При этом, так как $\xi_k \in \Delta_k$ и $c_k \in \Delta_k$, то $|\xi_k - c_k| \leq \lambda_\tau$. Отсюда

$$|f(\xi_k) - f(c_k)| = |f'(\bar{x})| \cdot |\xi_k - c_k| \leq M\lambda_\tau$$

откуда

$$|\sigma(f,\tau,\xi) - I| \leq \sum_{k=1}^{n-1} M\lambda_\tau(x_{k+1} - x_k) = M\lambda_\tau(b-a)$$

то есть

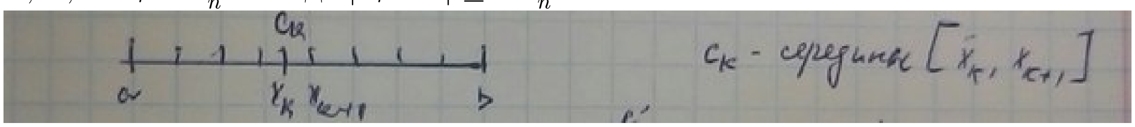
$$|\sigma(f,\tau,\xi) - I| \le M(b-a)\lambda_\tau \qquad (3)$$

Теперь $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$, такое, что $\lambda_\tau < \delta \Rightarrow |\sigma_\tau - I| < \varepsilon$. Положив $\delta = \frac{\varepsilon}{M(b-a)}$, получим $|\sigma_\tau - I| \le M(b-a)\lambda_\tau$. □

Теорема, которую мы доказали, очень важна. Я хз, почему, потому что пропускал Диму, когда Макаров это рассказывал. Гремяченский Дмитрий вину не признаёт.

Упражнение. Если на промежутке функция имеет конечное число точек разрыва, то число её интегральных сумм имеет предел.

Представим, что промежуток $[a,b]$ разбиваем на n равных частей: $x_k = a + k\frac{b-a}{n}$, где $k = 0,...,n$. $\lambda_\tau = \frac{b-a}{n}$. Тогда $|\sigma_\tau - I| \le \frac{M(b-a)^2}{n}$.



Тогда интегральная сумма будет иметь вид

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(c_k)\frac{b-a}{n} \to \int_a^b f(x)dx$$

Разделив на $b-a$, получим:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(c_k) \to \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

что есть интегральная сумма.

Если аппроксимировать нашу функцию не прямоугольниками, а трапециями:
$x_k = a + k\underbrace{\frac{b-a}{n}}_{=h}$, $f(x_k) = y_k$. Тогда площадь нашей трапеции равна $\frac{y_k+y_{k+1}}{2}h$, а их сумма

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{y_k+y_{k+1}}{2}h = \frac{y_0+y_n}{2}h + h\sum_{k=1}^{n-1} y_k = S_n$$

Тогда формула трапеции $J = S_n + \rho_n$, где ρ_n — погрешность в формуле трапеции.

Лемма. $f \in C^2([a,b])$ *(дважды дифференцируема и непрерывна). Тогда*

$$\int_a^b dx = \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a) + \frac{1}{2}\int_a^b f''(x)(x-a)(x-b)dx$$

Доказательство. $P(x) = (x-a)(x-b) = x^2 - (a+b)x + ab$, $P'(x) = 2x - (a+b) = 2(x-c)$, где $c = \frac{a+b}{2}$.

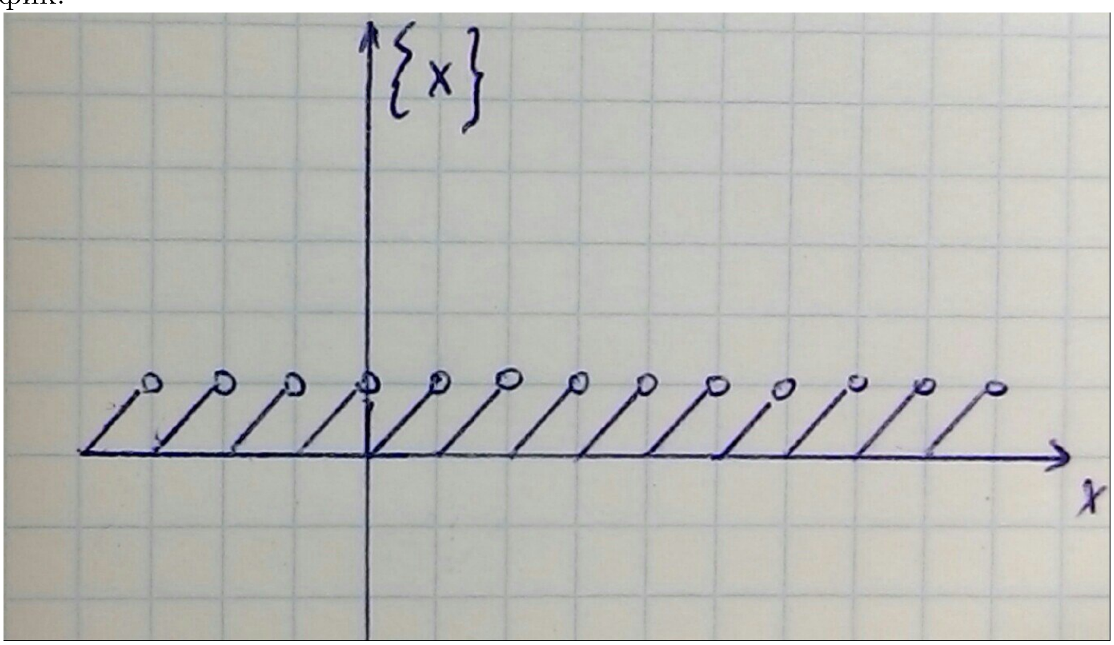
Интегрируем! :D

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{2}\int_a^b f(x)dP'(x) = \frac{1}{2}\left[f(x)2(x-c)|_a^b - \int_a^b f'(x)P'(x)dx\right] =$$
$$\frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a) - \frac{1}{2}\int_a^b f'(x)P'(x)dx = \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a) - \frac{1}{2}\left[f'(x)P(x)|_a^b - \int_a^b f''(x)P(x)dx\right]$$
$$= \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a) + \frac{1}{2}\int_a^b f''(x)P(x)dx$$

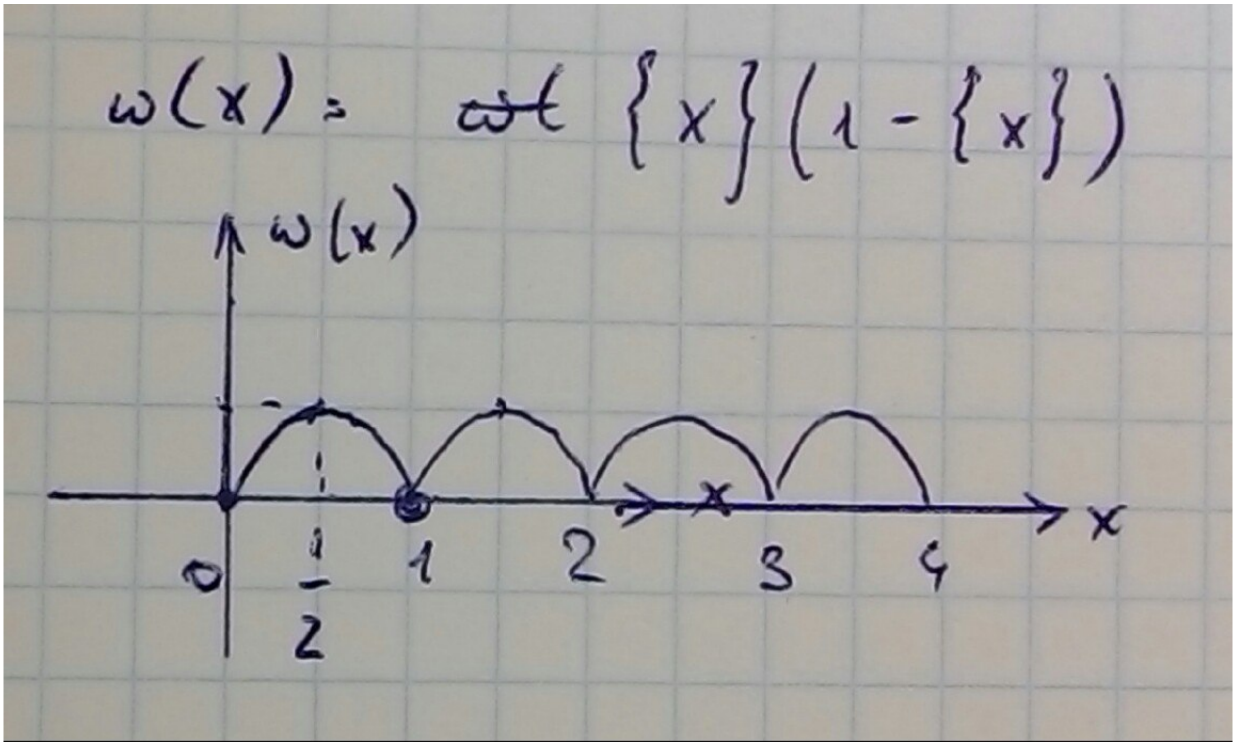
Так как мы взяли под $P(x)$ специальное выражение, которое даст обратные двойные подстановки при интегрировании. □

Введем новое обозначение:

Известно, что у каждого $x \in \mathbb{R}$ существует $[x] \in \mathbb{N}$, а также $\{x\} = x - [x]$, имеющее график:



Обозначим $\omega(x) = \{x\}(1 - \{x\})$. График данной функции:



Формула трапеции (напоминание):

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{y_0 + y_n}{2}h + h\sum_{i=1}^{n-1} y_k + \rho_n \qquad (1)$$

Теорема. $f \in C^2([a, b])$. *Тогда*

$$\rho_n = -\frac{h^2}{2}\int_a^b f''(x)\left\{\frac{x-a}{h}\right\}\left(1 - \left\{\frac{x-a}{h}\right\}\right)dx \qquad (2)$$

Доказательство. Для этого применим лемму для каждого из частичных промежутков: $[x_k, x_{k+1}],\ 0 \le k < n$. Тогда:

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx = \frac{y_k + y_{k+1}}{2}h + \frac{1}{2}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f''(x)(x - x_k)(x - x_{k+1})dx$$

Преобразуем правое подынтегральное:
$x_k \le x \le x_{k+1}$. $(x - x_k)(x - x_{k+1}) = (x - (a + kh))(x - (a + kh + h)) = h^2(\frac{x-a}{h} - k)(\frac{x-a}{h} - k - 1)$
Откуда $k \le \frac{x-a}{h} \le k + 1$. Таким образом,

$$h^2(\frac{x-a}{h} - k)(\frac{x-a}{h} - k - 1) = h^2\left\{\frac{x-a}{h}\right\}(\left\{\frac{x-a}{h}\right\} - 1)$$

Подставив:

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx = \frac{y_k + y_{k+1}}{2}h - \frac{h^2}{2}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f''(x)\omega(\frac{x-a}{h})dx$$

Возьмем сумму всех таких промежутков:

$$\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{y_k+y_{k+1}}{2}h - \frac{h^2}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f''(x)\omega(\frac{x-a}{h})dx$$

что равно формуле (1). Таким образом мы получаем формулу (2), теорема доказана. □

Следствие: $\exists \bar{x} \in [a,b]$, такая, что $\rho_n = -\frac{h^2}{2}f''(x)\int_a^b \left\{\frac{x-a}{h}\right\}\left(1-\left\{\frac{x-a}{h}\right\}\right)dx$.

Доказательство. просто посчитаем:

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} \left\{\frac{x-a}{h}\right\}\left(1-\left\{\frac{x-a}{h}\right\}\right)dx =$$

$x = x_k + th, \quad 0 \le t \le 1$. Тогда

$$= \int_0^1 \left\{\frac{x_k-a}{h}+t\right\}\left(1-\left\{\frac{x_k-a}{h}\right\}+t\right)hdt =$$

Так как $\frac{x_k-a}{h} = k$, то

$$= \int_0^1 t(t-1)hdt = \frac{h}{6}$$

Если сложить промежутки, то получим

$$\int_a^b \omega(\frac{x-a}{h})dx = n\frac{h}{6} = n\frac{b-a}{n6} = \frac{b-a}{6}$$

Подставляя в формулу для ρ_n, получаем

$$\rho_n = -\frac{h^2}{2}\frac{b-a}{6}f''(x) = \frac{(b-a)^3}{12n^2}f''(\bar{x})$$

Оценим $|f''(x)| \le M \ (x \in [a,b])$. Тогда

$$|\rho_n| \le \frac{(b-a)^3 M}{12h^2}$$

□

Пример. $\int \frac{dx}{1+x^2}, \quad n = 10.$ $f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad |f''(x)| \le 2$

$$S_n = \frac{y_0+y_{10}}{2}h + h\sum_1^{n-1} y_k$$

$$|S_n - \int_0^1 f(x)dx| \le \frac{1}{6}10^{-2} \le 2\cdot 10^{-3}$$

2.6 Общая схема вычисления аддитивных функций промежутка

$\Delta = [a,b] \subset [A,B]$

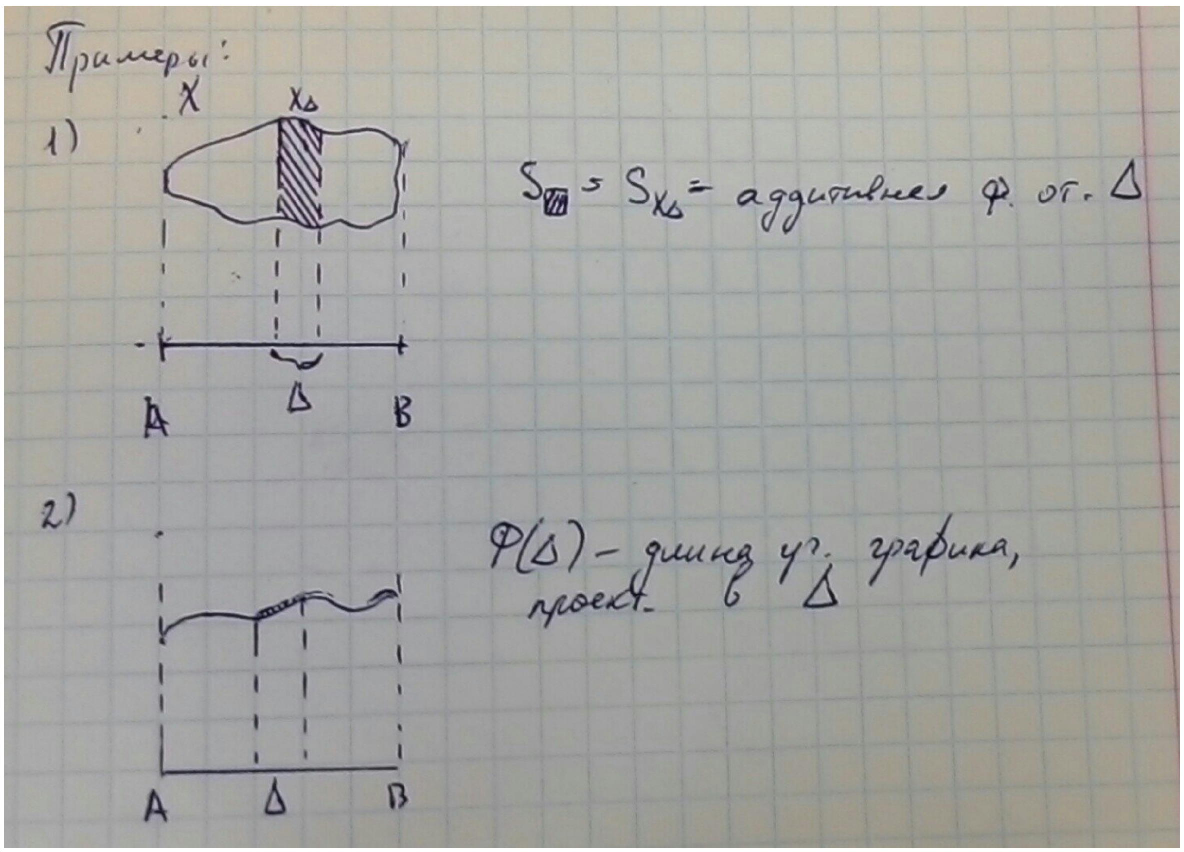
$\phi : D \to \mathbb{R}$

Аддитивная функция: если взять промежуток $[a,b]$ и точкой c разбить его на 2 части: $\Delta' = [a,c]$, $\Delta'' = [c,b]$, то такой функцией будет называться функция $\phi(\Delta) = \phi(\Delta') + \phi(\Delta'')$. Вырожденный случай: $\phi([a,a]) = 0$.

Если $a \le c \le b$, то $\phi([a,b]) = \phi([a,c]) + \phi([c,b])$.

Пример. Пусть у нас есть фигура, проектирующаяся на отрезок $[A,B]$. Возьмем промежуток $\Delta \in [A,B]$. Площадь фигуры X_Δ, ограниченной в промежутке Δ, будет аддитивной функцией.

Площадь фигуры, ограниченной функцией на промежутке Δ тоже аддитивная функция.



Выясним условия, при которых функция аддитивна:

Лемма. *f непрерывна на $[A,B]$. Для каждого замкнутого $\Delta \in [A,B]$ сосчитаем наибольшее значение функции и наименьшее: $M_\Delta = \max_{x\in\Delta} f(x)$ и $m_\Delta = \min_{x\in\Delta} f(x)$. Тогда $M_\Delta - m_\Delta \to 0$, если длина $\Delta \to 0$, что означает следующее: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$: если длина $\Delta < \delta$, то $M_\Delta - m_\Delta < \varepsilon$. (без доказательства).*

Теорема. *ϕ— аддитивная функция на $[A,B]$ и f непрерывна на $[A,B]$, то верно:*

1) $\forall \Delta \in [A,B] \quad \phi(\Delta) = \int_a^b f(x)dx$

2) $\exists A_\Delta, B_\Delta$:

a) A_Δ дл.$(\Delta) \le \phi(\Delta) \le B_\Delta$ дл.(Δ).

b) $A_\Delta \le f(x) \le B_\Delta \ \forall x \in \Delta$.
c) $B_\Delta - A_\Delta \to 0$*, если дл.*$(\Delta) \to 0$
3) $\Delta^{\pm}(x,h) =?$ *Тогда* $\phi(\Delta^{\pm}(x,h)) = f(x)h + o(h)$ *при* $h \to 0$

Доказательство. **1)⇒2)**
$A_\Delta = m_\Delta, B_\Delta = M_\Delta$ (из леммы).
Тогда 2b — очевидно.
2a — свойство интеграла $\int_a^b f(x)dx$ $(m_\Delta(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M_\Delta(b-a))$
2c — по лемме.
2)⇒3)
Зафиксируем x для $\Delta^+(x,h)$. Согласно условию 2a, $A_\Delta \cdot h \le \phi(\Delta^+(x,h)) \le B_\Delta \cdot h$. Умножим на h: $A_\Delta \cdot h \le f(x)h \le B_\Delta \cdot h$, откуда $|\phi(\Delta^+(x,h)) - f(x)h| \le (B_\Delta - A_\Delta)h$. Если сделать замену $\phi(\Delta^+(x,h)) - f(x)h = \alpha(h)$, то $|\alpha(h)| \le (B_{\Delta^+(x,h)} - A_{\Delta^+(x,h)})h = o(h)$.
3)⇒1)
$A \le x < B$ и рассмотрим $\Delta^{\pm}(x,h)(x+h < B)$
Введем $F(x) = \phi([A,x])$. Докажем, что $F'(x) = f(x) \ \ \forall x \in [A,B]$.
Докажем, что $F'(x) = f(x)$:
$F'(x+h) = \phi([A,x+h]) = \phi([A,x]) + \phi([x,x+h]) = F(x) + f(x)h + \alpha(h)$, где $\alpha(h) = o(h)$. Тогда

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x) + \frac{\alpha(h)}{h} \to_{h \to +0} f(x)$$

То есть F — первообразная. Тогда, согласно формуле Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = \phi([A,b]) - \phi([A,a]) = \phi([A,a]) + \phi([a,b]) - \phi([A,a]) = \phi([a,b])$$

□

Следствие: M_Δ, m_Δ— как в лемме.
Если m_Δдл.$(\Delta) \le \phi(\Delta) \le M_\Delta$дл.$(\Delta) \ \ \forall \Delta \subset [A,B]$, то $\phi([a,b]) = \int_a^b f(x)dx \ \ \forall \Delta = [a,b] \in D$.

2.7 Вычисление площадей

$A \subset \mathbb{R}^2$ и будем рассматривать фигуры — плоские ограниченные множества. Оказывается, площадь можно приписать любой фигуре.

Определение. Площадь — функция, заданная на множестве фигур, удовлетворяющая определенным требованиям — аксиомам площади. Одна из них связана с отображениями на плоскости, которые называются движениями:
1) Сдвиг на вектор (x_0, y_0): $(x,y) \to (x_0, y_0)$.
2) Отражение относительно прямой.
3) Поворот на угол α:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Теперь мы можем сформулировать аксиомы площади:

Определение. Площадь — функция S, определенная на всех фигурах и удовлетворяющая следующим требованиям:

1) $S \geq 0$;

2) $A \cap B = \varnothing \Rightarrow S(A \cup B) = S(A) + S(B)$;

3) Если W — движение, то $S(W(A)) = S(A)$; (фигуры, которые можно перевести друг в друга, называются конгруэнтными. Это свойство также называют инвариантностью площади относительно движения).

4) Если P — прямоугольник со сторонами a и b, то $S(P) = a \cdot b$.

4') (ослабление) Если Q — единичный квадрат $[0,1] \times [0,1]$, то $S(Q) = 1$.

Свойства площади:

1) Если $A \subset B$, то $S(A) \leq S(B)$.

Доказательство. Пусть $C = B \backslash A$. Тогда очевидно, что $A \cap C = \varnothing$ и $B = A \cup C$.

Поэтому $S(B) = S(A) + S(C) \geq S(A)$; □

2) $A_k,\ k = 1, ..., n,\ A_k \cap A_j = \varnothing$, при $k \neq j$. Тогда $S(\cup_1^k A_k) = \sum_{k=1}^n S(A_k)$. Доказать самостоятельно по индукции.

3) $A \subset B$, $C = B \backslash A$, тогда $S(C) = S(B) - S(A)$. Доказано при доказательстве монотонности.

4) $A_k,\ k = 1, ...n$, тогда $S(\cup_i^n A_k \leq \sum_{k=1}^n S(A_k))$. Свойство полуаддитивности (всегда верна оценка сверху).

Доказательство. Убедимся в верности неравенства при $n = 2$. $A = B \cup C$. $C' = C \backslash B = C \backslash (B \cap A)$.

При этом ясно, что $C' \cap B = \varnothing$. При этом $A = B \cup C = B \cup C'$. Поэтому $S(A) = S(B) + S(C') \leq S(B) + S(C)$

Дальнейшее доказательство по индукции. □

5) Для нас будут важны фигуры, имеющие площадь =0, например, отрезки. Докажем, что отрезки имеют нулевую площадь. Погрузим отрезок в прямоугольник $P(\varepsilon)$, имеющий длину l отрезка, а ширину ε. Тогда $S([0,l]) \leq S(P(\varepsilon)) = \varepsilon \cdot l$. Взяв достаточно маленькое эпсилон получаем, что площадь отрезка стремится к нулю. Значит, она равна нулю.

6) Усиленная аддитивность: $A_1, ..., A_n$ $S(A_k \cap A_j) = 0$ $\forall k \neq j$. Тогда, по прежнему, $S(\cup_i^n A_k) = \sum_{i=0}^n S(A_k)$. Отметим частный случай. Разбив фигуру A прямой на 2 части: A_1, A_2. Будем считать, что граничный отрезок входит в обе части. Несмотря на это $A = A_1 + A_2$, так как их пересечение — этот отрезок — имеет площадь 0.

Доказательство. По индукции. $n = 2$. $B = A_1 \cap A_2$, $S(B) = 0$. $C = A_1 \backslash A_2$. Тогда $S(A_1 \cup A_2) = S(C) + S(A_2)$. А $C = A_1 \backslash A_2 = A_1 \backslash (A_1 \cap A_2)$. Отсюда $S(C) = S(A_1) - S(A_1 \cap A_2) = S(A_1)$. Равенство выше доказано.

Индукционный переход: верно для n. $A_1, ..., A_{n+1}$ и их попарные пересечения имеют нулевую площадь. $S(A_k \cap A_j) = 0$ $\forall k, j = 1, ..., n+1$. Пусть $\bar{A} = \cup_{k=1}^n A_k$. Тогда $\cup_{k=1}^{n+1} A_k = \bar{A} \cup A_{n+1}$. $\bar{A} \cap A_{n+1} = (\cup_{i=1}^n A_k) \cap A_{n+1} = \cup_{k=1}^n (A_k \cap A_{n+1})$

При этом $0 \leq S(\bar{A} \cap A_{n+1}) \leq \sum_{k=1}^n S(A_k \cap A_{n+1}) = 0$, откуда $S(\cup_{k=1}^{n+1} A_k) = S(\bar{A} \cup_{n+1}) = S(\bar{A}) + S(A_{n+1}) = S(\cup_{k=1}^n A_k) + S(A_{n+1})$. Применяем базу. Доказано. □

Перейдем от свойств к вычислениям площадей. На первых порах рассмотрим подграфики.

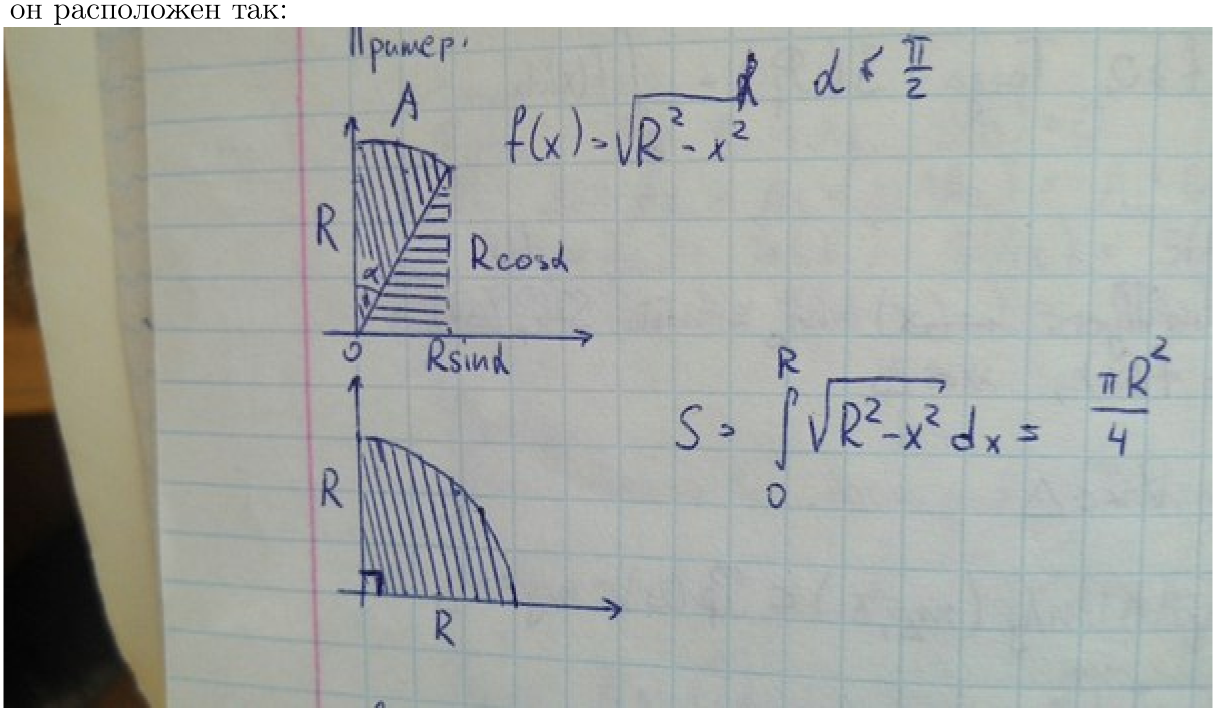
Определение. Пусть f определена на $[a, b]$, $f \geq 0$. Подграфик $P_f = \{(x, y) | a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\}$. Если мы будем брать x из $\Delta \subset [a, b]$, то мы будем говорить, что это подграфик над Δ, и писать $P_f(\Delta)$. Отсюда $P_f = P_f([a, b])$.

Теорема. *Пусть f непрерывна на $[a, b]$ и $f \geq 0$. Тогда $S(P_f) = \int_a^b f(x)dx$.*

Доказательство. Его и не нужно. Оценим $S(P_f(\Delta))$. Пусть $m(\Delta) = \min_{x\in\Delta} f(x),\ M(\Delta) = \max_{x\in\Delta} f(x). m_\Delta \leq f(x) \leq M_\Delta$.

Прямоугольник с высотой m содержится в подграфике. А сам подграфик содержится в прямоугольнике с высотой M. Если мы посчитаем площади этих прямоугольников, то площадь малого равна $m(\Delta)\cdot$дл(Δ), большого аналогично. Тогда $m(\Delta)$дл$(\Delta) \leq S(P_f(\Delta)) \leq M_\Delta$дл$(\Delta)$. С другой стороны введем $\phi(\Delta) = S(P_f(\Delta))$. Если $\Delta = [p, q]$, то подграфик на Δ разделится на две части: $P_f(\Delta) = P_f(\Delta') \cup P_f(\Delta'')$. Они пересекаются по прямой с абсциссой s: $\Delta' = [p, s],\ \Delta'' = [s, q]$. $S(P_f(\Delta)) = S(P_f(\Delta')) + S(P_f(\Delta''))$. Таким образом, ϕ — аддитивная функция промежутка и удовлетворяет оценке, которую мы вывели. Поэтому, согласно следствию из теоремы предыдущего параграфа, $\phi = \int_a^b f(x)dx$. □

Пример. Сосчитаем площадь сектора окружности с углом $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$. Мы уже считали, что $\int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}dx = \frac{\pi^2 R}{4}$. Поскольку мы можем двигать сектор как угодно, будем считать, что он расположен так:



Тогда сектор проецируется в отрезок $[0, R\sin\alpha]$. Пусть сектор $= A$, $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$. Тогда

$$A = P_f([0, R\sin\alpha])\backslash\text{хрени}$$

Тогда

$$S(A) = S(P_f([0, R\sin\alpha]) - \frac{1}{2}R^2 \sin\alpha\cos\alpha)$$

Остается сосчитать (сделаем замену $x = R\sin t$):

$$S(P_f([0,R\sin\alpha])) = \int_0^{R\sin\alpha}\sqrt{R^2-x^2}dx = \int_0^{\alpha} R\cos t\cdot R\cos t dt = R^2\int_0^{\alpha}\frac{1+\cos 2t}{2}dt = \frac{1}{2}R^2\alpha + \frac{1}{4}R^2\sin 2\alpha$$

В итоге получается, что $S(A) = \frac{1}{2}R^2\alpha$.

$f, g,\ f(x) \le g(x)$ при $x \in [a,b]$. Функции могут принимать значения любых знаков. Речь идет о фигуре, которая ограничена графиками сверху и снизу. Эту фигуру называют криволинейной трапецией. Мы будем обозначать её $T_{f,g} = \{(x,y) | x \in [a,b],\ f(x) \le y \le g(x)\}$.

Лемма. *f непрерывна на $[a,b]$, тогда $S(\Gamma_f) = 0$.*

Доказательство. $A \le f(x) \le B$. $A \le f + 1 \le B + 1 = B_1$. Введем прямоугольник $P = [a,b] \times [A, B_1]$. Введем $f_1 = f + 1$. Чтобы из графика f получить график f_1, нужно сдвинуть график f на вектор $(0,1)$. А если сдвинуть на $(0, \frac{1}{n})$, то сдвиг произойдет на $\frac{1}{n}$ вверх.

1) $\Gamma_{f+\frac{1}{n}} \subset P$.

2) $\Gamma_{f+\frac{1}{n}}$ конгруэнтны Γ_f.

3) Все они попарно не пересекаются (проверить самостоятельно).

Если рассмотреть

$$S(\cup_{n=1}^{N}\Gamma_{f+\frac{1}{n}} = \sum_{n=1}^{N} S(\Gamma_{f+\frac{1}{n}})) = N\cdot S(\Gamma_f) \le S(P) = C$$

То есть $N \cdot S(\Gamma_f) \le C$. Согласно принципу Архимеда площадь графика равна нулю. □

Теорема. *(площадь криволинейной трапеции) f, g — непрерывны на $[a,b]$, $f(x) \le g(x)\ \forall x \in [a,b]$*

Тогда

$$S(T_{f,g}) = \int_a^b (g(x) - f(x))dx$$

1598-1647 Кавальери: если две фигуры таковы, что при пересечении их параллельными прямыми получаются отрезки одинаковой длины, то площади этих фигур равны.

Доказательство. Введем $h(x) = g(x) - f(x)$. $-C \le f \le g \le C$. Теперь можем сдвинуть обе функции на вектор $(0, C)$ и считать, что функции неотрицательны, так как $f + C\ g + C$ будет конгруэнтна исходной криволинейной трапеции.

Очевидно, что $P_g = P_f \cup T_{f,g}$. $P_f \cap T_{f,g} = \Gamma_f$. График по лемме имеет площадь $=0$. Поэтому площадь объединения равна сумме площадей: $S(P_g) = S(P_f \cup T_{f,g}) = S(P_f) + S(T_{f,g})$. Отсюда $S(T_{f,g}) = S(P_g) - S(P_f) = \int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx = \int_a^b (g(x) - f(x))dx$. □

Теперь мы займемся вычислением площадей с помощью несколько иных средств: вычисление площади с помощью полярных координат.

Немного скажем про полярные координаты: положение точки в них можно задать с помощью длины отрезка, соединяющего точку и выбранный **полюс** (произвольная точка), и угла, образуемого **осью** и этим отрезком.

Вспомним теорему:

Теорема. $|a| \leq 1$, *то уравнение* $\sin\varphi = a$ *имеет решения, распадающиеся на два множества:* $\varphi_k = \arcsin a + 2k\pi$ *и* $\varphi'_k\pi - \arcsin + 2k\pi$. *Если следить еще и за косинусом, то мы увидим, что* $\cos(\varphi_k) = -\cos(\varphi'_k)$. *Если* $x^2 + y^2 = 1$, *то*

$$x = \begin{cases} \sin\varphi_k, \\ \sin\varphi'_k \end{cases}$$

а $y = \pm\cos x$. *При этом в каждом промежутке* $[\alpha, \alpha + 2\pi)$ $\exists$*единственная* φ, *такая, что* $\begin{cases} \sin\varphi = x \\ \cos\varphi = y \end{cases}$.

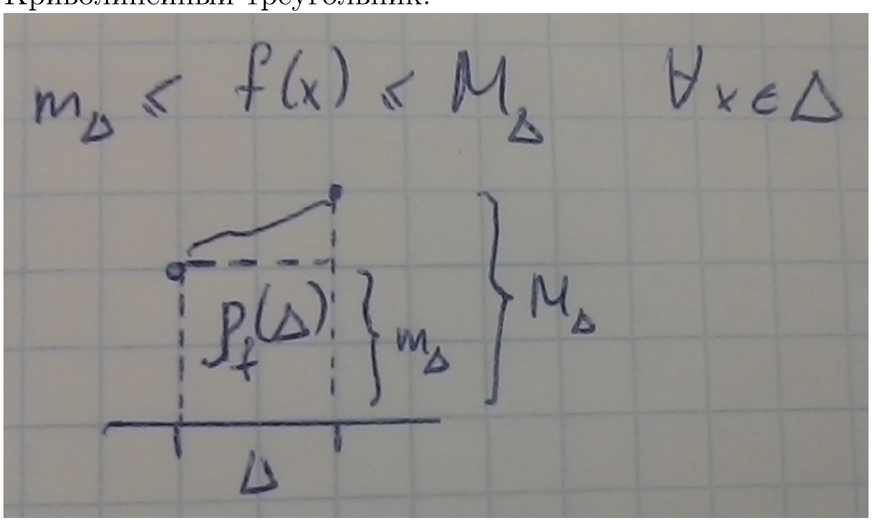
Теперь будем считать, что у нас есть декартовы координаты, в качестве оси берем положительную часть оси абсцисс. Расстояние $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, угол $\varphi \in [\alpha, \alpha + 2\pi)$, таков, что $\cos\varphi = \frac{x}{r}$, $\sin\varphi = \frac{y}{r}$. По определению полярок, получаем связь:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

С помощью полярных координат можно описывать многие фигуры. И если есть полярки, то почему бы не воспользоваться ими для вычисления площадей фигур?

Представим, что $[\alpha, \alpha + 2\pi) \supset \Delta$, $\rho \geq 0$, где ρ — непрерывная функция.

Криволинейный треугольник:



$T_\rho(\Delta) = \{x, y | \varphi \in \Delta,\ 0 \leq r \leq \rho(\varphi)\}$.

Подсчитаем площадь криволинейного треугольника:

$\phi(\Delta) = S(T_\rho(\Delta))$

Если $\Delta = [p, q] = [p, s] \cup [s, q]$, то $T_p(\Delta) = T_\rho(\Delta') \cup T_\rho(\Delta'')$. Поэтому площадь криволинейного треугольника — сумма площадей $S(T_\rho(\Delta)) = S(T_\rho(\Delta')) + S(T_\rho(\Delta''))$. Тогда $\phi(\Delta) = S(T_\rho(\Delta))$. Как оценить площадь криволинейного треугольника?

Приведем некоторые наводящие соображения: введем узкий уголок раствора α: $\rho \leq \varphi \leq \rho + \alpha$ Какова может быть его площадь? ρ постоянна, а, так как на маленьких промежутках она почти ..., то мы получаем круговой сектор с площадью $\frac{1}{2}\rho^2(\alpha)\alpha$.

Вернемся к оценке нашей аддитивной функции. Пусть $m(\Delta) = \min\frac{1}{2}\rho^2(\varphi)$, $M_\Delta = \max\frac{1}{2}\rho^2(\varphi)$

Тогда $m(\Delta) \leq \frac{1}{2}\rho^2(\varphi) \leq M_\Delta$.
Пусть $u_\Delta = \min \rho(\varphi)$, $U_\Delta = \max \rho(\varphi)$.
m_Δдл$(\Delta) \leq S(T_\rho(\Delta)) \leq \frac{1}{2}U_\Delta^2$дл$(\Delta) \leq M_\Delta$дл$(\Delta)$.
Согласно написанному выше, $S(T_\rho([p,q])) = \int_p^q \frac{1}{2}\rho^2(\varphi)d\varphi$.

2.8 Длина кривой

Определение. $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2(\mathbb{R}^3)$, γ непрерывна на $[a,b]$. Тогда γ — **путь** в $\mathbb{R}^2$.

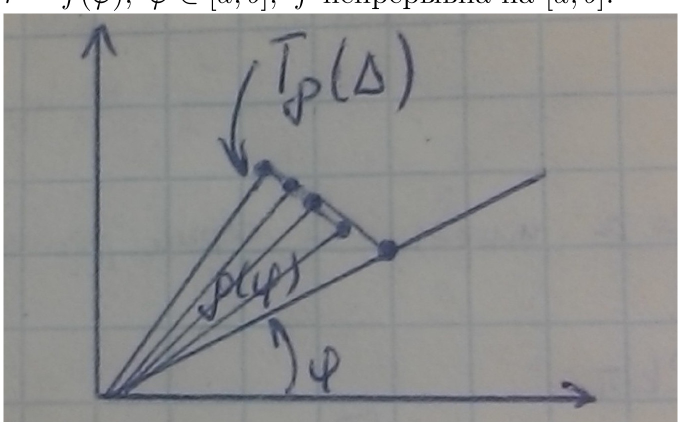
$\gamma([a,b])$ — носитель пути. Пусть $\gamma : t \longmapsto (x(t), y(t))$. Таким образом, получаем непрерывные на $[a,b]$ функции x, y. Они называются координатными функциями пути.

Пусть γ взаимно однозначна на $[a,b]$. Тогда $\gamma([a,b])$ называется **простой кривой (жордановой кривой)**, а γ — **параметризацией** жордановой кривой.

Пример.
1) $\gamma(t) = (t,t),\ t \in [0,1]$ — отрезок под 45 градусов
2) $\gamma(t) = (t^2,t^2),\ t \in [0,1]$ — тот же самый отрезок
3) $\gamma(t) = (t^2,t^2),\ t \in [-1,1]$ — не параметризация, поскольку параметризация должна быть биективна.
4) $\gamma(t) = (t^3,t^2)\ t \in [-1,1]$ — параметризация, имеющая график $y = x^{\frac{2}{3}},\ x \in [-1,1]$.

Пример. Стандартные кривые, часто встречающиеся на практике:

1) График непрерывной функции:
$f \in C[a,b],\ L$ — график f. Параметризуем его:
$\gamma(t) = (t, f(t)),\ t \in [a,b]$ — каноническая параметризация L.
2) График функции в полярных координатах:
$r = f(\varphi),\ \varphi \in [a,b],\ f$ непрерывна на $[a,b]$.



Параметризуем:
$\gamma(\varphi) = (f(\varphi)\cos\varphi, f(\varphi)\sin\varphi)$ — каноническая параметризация в полярных координатах.

Теперь обобщим наши кривые:

Определение. $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$, возьмем $t_0 \in [a,b]$. Отображение γ дифференцируема в t_0, если дифференцируемы x, y в точке t_0.

$\bar{r}(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0))$ называется **касательным** вектором к γ в точке t_0.

$$\bar{r}(t_0) = \lim_{t\to t_0} \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0}$$

Пусть теперь $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ и $x, y \in C^1([a, b])$, то есть эта функция непрерывно дифференцируема. Тогда γ называется гладким путем.

Замечание. γ — гладкий путь, $t_0 \in [a, b]$, $x'(t_0) \neq 0$. Для определенности, $x'(t_0) > 0$. Воспользуемся принципом стабилизации знака: $\exists \delta > 0 : \ \forall t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \cap [a, b], \ x'(t) > 0$. Обозначим $[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \cap [a, b] = [\alpha, \beta]$ Это говорит о том, что x строго возрастает на $[\alpha, \beta]$, $\exists x^{-1} \in C^1[x(\alpha), x(\beta)]$.

$\gamma|_{[a,b]}$ — график функции $y \circ x^{-1}$ на $[x(\alpha), x(\beta)]$.

Определение. Если $\gamma'(t_0) \neq 0$, то γ называется регулярным в t_0.

γ регулярна на $[a, b]$, если γ регулярна в любой точке данного отрезка.

Определение. L — простая кривая в $\mathbb{R}^2$.

1) $\exists \gamma : [a, b] \to L$ — путь класса C^1 (сюръекция), регулярный на отрезке $[a, b]$. Тогда L называется гладкой кривой, а γ называется регулярной параметризацией L.

2) $\exists L_1, ..., L_n$ — гладкие кривые в $\mathbb{R}^2$ со свойствами:

a) $L = \cup_{k=1}^{n} L_k$;

b) $L_k \cap L_j$ — конечное множество $\forall k, j \in \{1, ..., n\}, \ k \neq n$.

Тогда L называется **кусочно-гладкой** кривой в $\mathbb{R}^2$.

Пример.

1) Треугольник, так как каждый отрезок, являющийся стороной, будет гладкой кривой, так как каждую сторону можно параметризовать как $[a, b] = \{ta - (1 - t)b : t \in [0, 1]\}$

2) L — кривая с параметризацией $\gamma(t) = (t^3, t^2), \ t \in [-1, 1]$. В качестве упражнения доказать, что L — гладкая кривая. (придумать другую параметризацию).

Определение. $E \subset \mathbb{R}^2, \ \phi : E \to \mathbb{R}^2$, непрерывна на E.

1) ϕ называется сближением или сжатием, если выполняется $\forall z, w \in E : \rho(\phi(z), \phi(w)) \leq \rho(z, w)$.

2) ϕ называется растяжением, если выполняется $\forall z, w \in E : \rho(\phi(z), \phi(w)) \geq \rho(z, w)$.

3) $B > 0$. ϕ называется Липшицовым с константой B, если верно, что $\forall z, w \in E : \rho(\phi(z), \phi(w)) \leq B \cdot \rho(z, w)$.

Пример.

1) $\phi(x, y) = x$ — сжатие на $\mathbb{R}^2$.

Определение. (длина кривой)

Ω — множество кусочно-гладких кривых в $\mathbb{R}^2$.

Пусть S — функция на Ω, удовлетворяющая условиям:

1) $S(L) \geq 0 \ \forall L \in \Omega$;

2) Если $L_1, L_2 \in \Omega, \ L_1 \cap L_2$ — конечное множество, то $S(L_1 \cup L_2) = S(L_1) + S(L_2)$ (аддитивность);

3) Если $L_1, L_2 \in \Omega, \ L_2 = \phi(L_1)$, где ϕ — сжатие, то $S(L_2) \leq S(L_1)$;

4) Если $a, b \in \mathbb{R}^2, \ \Delta = [a, b]$, то $S(\Delta) = \rho(a, b)$;

То S называется длиной кривой.

Замечание.

1) Если $L_2 = \phi(L_1)$, где ϕ — растяжение, то $S(L_2) \geq S(L_1)$. Если ϕ взаимно однозначно, то и ϕ^{-1} взаимно однозначно. Отсюда $L_1 = \phi^{-1}(L_2) \Rightarrow S(L_1) \leq S(L_2)$.

2) Пусть ϕ — движение (отображение, сохраняющее расстояние) в $\mathbb{R}^2$. Если $L \in \Omega$, то $S(\phi(L)) = S(L)$, так как ϕ — одновременно растяжение и сжатие: $\begin{cases} S(\phi(L)) \geq S(L) \\ S(\phi(L)) \leq S(L) \end{cases}$.

3) L — гладкая кривая, $\gamma : [a, b] \to L$ — регулярная параметризация L, то $S(L_1) \geq \rho(\gamma(a), \gamma(b))$.

Направляемся к вычислению длины кривой:

Лемма. *Пусть $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ гладкое регулярное отображение, $B > 0$, γ — липшицова с константой B; $L = \gamma([a, b])$. Тогда:*

1) $\exists\bar{\gamma}$ — регулярная параметризация L. $\bar{\gamma}$ — сжатие.

2) $S(L) \leq B(b - a)$.

Доказательство.

1) $\bar{\gamma}(t) = \gamma(\frac{t}{B}),\ t \in [Ba, Bb]$. Пусть $p, q \in [Ba, Bb]$. Тогда

$$\rho(\bar{\gamma}(p), \bar{\gamma}(q)) = \rho(\gamma(\frac{p}{B}), \gamma(\frac{q}{B})) \leq B|\frac{p}{B} - \frac{q}{B}| = |p - q|$$

2) $S(\bar{\gamma}([Ba, Bb])) \leq S([Ba, Bb])$ по аксиоме 3. Отсюда $S([Ba, Bb]) = B(b - a)$. □

Введем некоторые обозначения:

Пусть $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ — гладкий путь.

Пусть $\Delta \subset [a, b]$

$m_x(\Delta) = \min_\Delta |x'|,\ m_y(\Delta) = \min_\Delta |y'|$

$M_x(\Delta) = \max_\Delta |x'|,\ M_y(\Delta) = \max_\Delta |y'|$.

Если $\Delta = [a, b]$, то $m_x([a, b]) = m_x$ и аналогично для всех вышеперечисленных.

Лемма. *Пусть L — гладкая кривая в $\mathbb{R}^2$, $\gamma : [a, b] \to L$ — регулярная параметризация L. Тогда верно, что*

$$\sqrt{m_x^2 + m_y^2}(b - a) \leq S(L) \leq \sqrt{M_x^2 + M_y^2}(b - a)$$

Доказательство. Пусть $\Delta = [p, q] \subset [a, b]$

$\rho(\gamma(q), \gamma(p)) = \sqrt{(x(q) - x(p))^2 + (y(q)) - y(p))^2} = *$

Пусть $\bar{t} \in (p, q) :\ x(q) - x(p) = x'(\bar{t})(q - p)$

$\tilde{t} \in (p, q) :\ y(q) - y(p) = y'(\tilde{t})(q - p)$.

Тогда $* = \sqrt{(x'(\bar{t}))^2 + (y'(\tilde{t}))^2}(q - p) = \lambda$

Оценим: $\sqrt{m_x^2(\Delta) + m_y^2(\Delta)} \leq \lambda \leq \sqrt{M_x^2(\Delta) + M_y^2(\Delta)}$

Докажем левое неравенство: $S(L) \geq \rho(\gamma(q), \gamma(p)) \geq \sqrt{m_x^2 + m_y^2}(b - a)$

Докажем правое неравенство: $\rho(\gamma(q), \gamma(p)) \leq \sqrt{M_x^2 + M_y^2}(p - q)\ \forall[p, q] \in [a, b]$

Следовательно, γ — лившицово с константой $\sqrt{M_x^2 + M_y^2} \Rightarrow S(L) \leq \sqrt{M_x^2 + M_y^2}(b - a)$ □

Теорема. *Пусть L — гладкая кривая, $\gamma : [a,b] \to L$ — регулярная параметризация кривой L. Тогда верно, что:*

$$S(L) = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

Лемма. *L — гладкая простая дуга, а γ — её параметризация на $[a,b]$. $\gamma(t) = (x(t), y(t))$. Параметризация гладкая, таким образом, x, y непрерывно дифференцируемы. Тогда справедливо, что $A(b-a) \leq S(L) \leq B(b-a)$ $(*)$. Здесь $A = \sqrt{m_x^2 + m_y^2}$, $B = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$, где $m_x = \min_{x \in [a,b]} |x'(t)|$, $M_x = \max_{x \in [a,b]} |x'(t)|$.*

Доказательство. Было доказано выше. □

Теорема.

$$S(L) = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

Замечание. Пусть имеется гладкая кривая. Рассмотрим малый участок этой прямой между $\gamma(t)$ и $\gamma(t+h)$. Тогда можно построить криволинейный треугольник с вершинами C, $\gamma(t)$ и $\gamma(t+h)$. Горизонтальная сторона треугольника Δx, вертикальная — Δy. Гипотенуза Δs. Тогда $(\Delta s)^2 \approx (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$. При $h \to 0$ получается $(\Delta s)^2 \sim (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$. Если перейти к пределу, то $(s'(t))^2 = (x'(t))^2 + (y'(t))^2$.

Замечание. L — график гладкой функции f. То есть он имеет каноническую параметризацию $\gamma(x) = (x, f(x))$. И тогда формула в теореме превращается в (тыкву!) $S(\Gamma_f) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$.

Замечание. Мы все время рассматриваем плоские кривые, но аналогично можно рассматривать кривые, лежащие в 3D и IMAX 3D (©Дмитрий) и иметь параметризацию $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Там также можно доказать аналогичные формулы.

Доказательство. (теоремы).

Пусть $\Delta = [p,q] \subset [a,b]$. $L_\Delta = \{\gamma(t) |\ t \in \Delta\}$. Мы возьмем гомеоморфизм Δ на L_Δ: $\phi(\Delta) = s(L_\Delta)$.

Разобьем Δ на 2 части: $\Delta' = [p,r]$, $\Delta'' = [r,q]$, где $p < r < q$. Тогда $L_\Delta = L' \cup L''$ и они имеют всего одну общую точку. Тогда $S(L_\Delta) = S(L') + S(L'')$. Значит, функция ϕ аддитивна. Скажем «фас» общей схеме:

Распишем промежуток Δ по общей схеме, применив лемму: $A_\Delta(q-p) \leq S(L_\Delta) \leq B_\Delta(q-p)$ (неравенство α), где

$A_\Delta = \sqrt{m_x^2(\Delta) + m_y^2(\Delta)}$, где $m_x = \min_{x \in \Delta} |x'(t)|$.

$B_\Delta = \sqrt{M_x^2(\Delta) + M_y^2(\Delta)}$, где $M_x = \max_{x \in \Delta} |x'(t)|$.

Теперь $A_\Delta \leq \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} = g(t) \leq B_\Delta$ $\forall t \in \Delta$ (неравенство β).

И наконец, $B_\Delta - A_\Delta \to_{\text{дл}(\Delta) \to 0} 0$ (δ).

Тогда получается следующее:

$$0 \leq B_\Delta - A_\Delta = \frac{M_x^2(\Delta) + M_y^2(\Delta) - m_x^2(\Delta) - m_y^2(\Delta)}{A_\Delta + B_\Delta}$$

Раскроем квадраты и получим:

$$\frac{M_x(\Delta)+m_x(\Delta)}{A_\Delta+B_\Delta}(M_x(\Delta)-m_x(\Delta))+...(M_y(\Delta)-m_y(\Delta))$$

Тогда $M_x(\Delta)-m_x(\Delta)+(M_y(\Delta)-m_y(\Delta)) \to_{\text{дл}(\Delta)\to 0} 0$. Таким образом, ϕ удовлетворяет всем трем неравенствам (α,β,δ)

Тогда, по доказанной теореме, $\phi=\int g(t)dt$. □

Пример. Длина дуги окружности.

$\gamma(t)=(R\cos t, R\sin t)$, где $t\in[a,b]\subset(0,2\pi)$

$x'(t)=-R\sin t$;

$y'(t)=R\cos t$;

$\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}=R$, и тогда длина дуги окружности $s(L)=R(\beta-\alpha)$, где β — угол от начального радиуса до конца дуги, а α — до начала дуги.

Пример. Длина дуги параболы.

$2py=x^2$. Посчитаем до $x=l$. Получаем

$$S(L)=\int_0^l\sqrt{1+(\frac{x}{p})^2}dx=p\int_0^{\frac{l}{p}}\sqrt{1+u^2}du=p(u\sqrt{1+y^2}|_0^{\frac{l}{p}}-\int\frac{n^2}{\sqrt{1+u^2}}du)=$$
$$\frac{l}{p}\sqrt{1+\frac{l^2}{p^2}}-\int_0^{\frac{l}{p}}\frac{u^2+1-1}{\sqrt{1+u^2}}du$$

Пример. Рассмотрим кривую $|x|^{2/3}+|y|^{2/3}=a^{2/3}$. (астроиду). Будем считать длину четверти астроиды, расположенную в 1 четверти. Параметризуем:

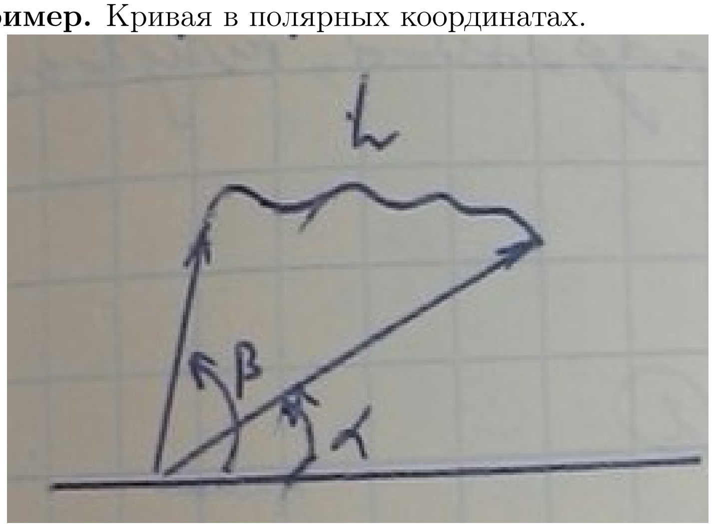
$x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$ при $t\in[0,\frac{\pi}{2}]$.

$x'(t)=-3a\cos^2 t\sin t$, $y'(a)=3a\sin^2 t\cos t$

$(x'(t))^2+(y'(t))^2=9a^2\sin^2 t\cos^2 t(\cos^2 t+\sin^2 t)$. Отсюда

$$S(L)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}3a\sin t\cos t dt=\frac{3a}{2}$$

Пример. Кривая в полярных координатах.



$r=\rho(\varphi),\quad \varphi\in[\alpha,\beta]$.

Рассмотрим очень маленький раствор угла. Кривая на нем почти прямая. Через точку, ближайшую к полюсу, проведем окружность. Получается криволинейный треугольник, одна из которых — длина дуги окружности, вторая — кривая, а третий — отрезок луча. Приближенно — это прямоугольный треугольник, где гипотенуза Δs — участок нашей кривой. Вычислим длины катетов: длина дуги окружности: $\rho(\varphi)h$, а другой $\Delta\rho = \rho' h$. Откуда $\Delta s^2 \approx \rho^2(\varphi)h^2 + (\rho'(\varphi))^2 h^2$. Откуда $(ds)^2 = (\rho^2 + (\rho'(\varphi))^2)d\varphi^2$ и формула примет вид

$$S(L) = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2(\varphi) + (\rho'(\varphi))^2}d\varphi$$

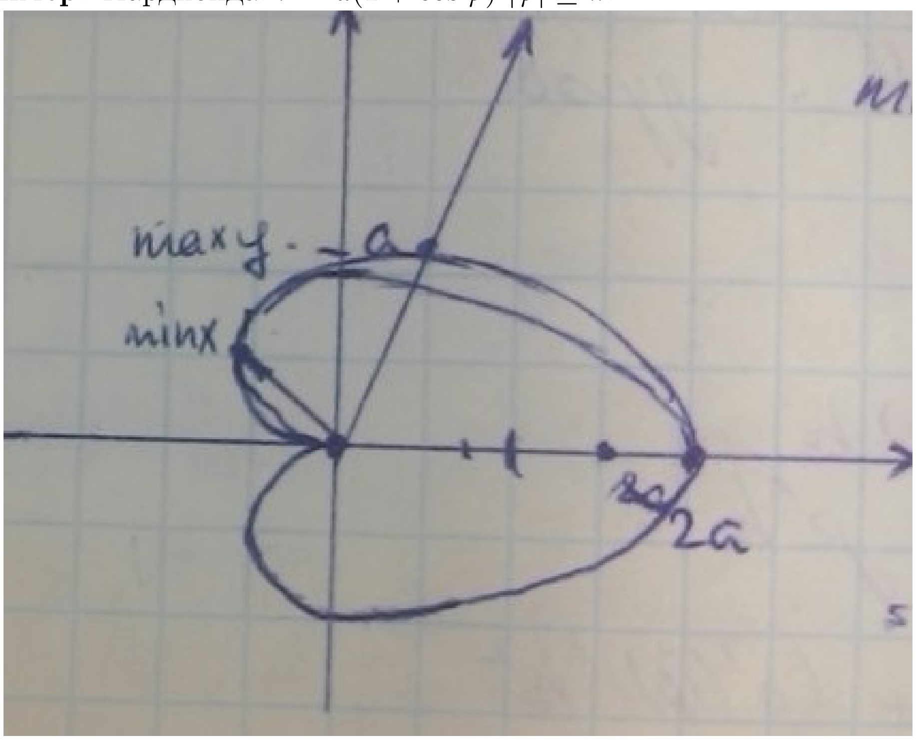
Доказательство. $x = \rho(\varphi)\cos\varphi$, $y = \rho(\varphi)\sin\varphi$, параметризовав, получим,

$x'(\varphi) = \rho'(\varphi)\cos\varphi - \rho(\varphi)\sin\varphi$

$y'(\varphi) = \rho'(\varphi)\sin\varphi + \rho(\varphi)\cos\varphi$

Откуда $(x'(\varphi))^2 + (y'(\varphi))^2 = (\rho'(\varphi))^2 + \rho^2(\varphi)$. $\square$

Пример. Кардиоида: $r = a(1+\cos\varphi)$ $|\varphi| \leq \pi$.

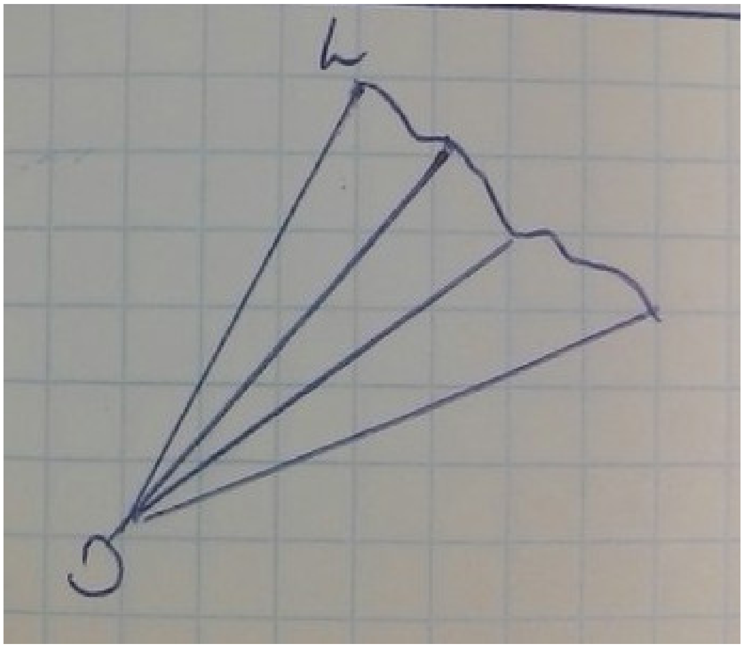


$x = r\cos\varphi$, $r'(\varphi) = -a\sin\varphi$

$a^2(1 + 2\cos\varphi + \cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = 2a^2(1+\cos\varphi) = 4a^2\cos\frac{\varphi}{2}$

$$S(L) = \int_{-\pi}^{\pi} 2a\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi = 4a\sin\frac{\varphi}{2}|_{-\pi}^{\pi} = 8a$$

2.9 Использование длины кривой для вычисления площади



Предположим, что на каждом луче, исходящем из начала координат, лежит не более одной точки, чтобы однозначно определить наш треугольник.

Если мы каждой точке $(x(t), y(t))$ сопоставим полярный угол $\varphi(t)$, то φ монотонно зависит от t, то есть либо возрастает, либо убывает. Если $-\pi < \varphi < \pi$ и $x > 0$, то $\varphi(t) = \arctan \frac{y(t)}{x(t)}$. Если $y > 0$, то $\varphi(t) = \arccos \frac{x(t)}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Что значит монотонна? То есть производная не меняет знак. Продифференцируем:

$$\varphi'(t) = \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{y'x - x'y}{x^2} = \frac{y'x - x'y}{x^2+y^2}$$

то есть $y'x - x'y$ сохраняет знак.

Предполагаем, что это условие выполнено.

$t \in [a, b]$, φ меняется от α до β. Считаем площадь:

$$S(T) = |\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)d\varphi|$$

Сделаем замену $\varphi = \varphi(t)$. И если кривая лежит в правой полуплоскости, то это арктангенс:

$$\frac{1}{2}|\int_a^b ((x(t))^2 + (y(t))^2) \cdot \frac{y'(t)x(t) - x'(t)y(t)}{x^2(t) + y^2(t)} dt| = \frac{1}{2}|\int_a^b (y'(t)x(t) - x'(t)y(t))dt|$$

Эта формула нередко бывает удобна и может быть использована в очень важной области. Мы продемонстрируем на основании этой формулы вывод второго закона Кеплера.

Он гласит, что если мы будем следить за движением планеты по орбите и рассматривать движение радиус-вектором, начало которого находится в фокусе эллиптической орбиты. За какое-то время о «заметает» какой-то сектор. Так вот, планеты движутся так, что за равные промежутки времени радиус-вектор заметает сектора равной площади.

Перейдем к выводу.

Доказательство. Будем считать, что на каждую точку оказывает действие сила, направленная по радиус-вектору $\bar{r}$, длина которого равна $f(r)$. Таким образом, сила $F = f(r)\bar{r}$ — центральное поле силы оказывающее действие на частицу единичной массы. (При этом $f(r) = -kr$ $F = -\frac{\gamma}{r^2} \cdot \bar{r}$, где γ — гравитационная постоянная).

При этом точка движется в одной плоскости. В самом деле, в момент времени t_0 $\bar{r}(t_0)$ — вектор, а скорость $v(\bar{r}'(t))$, а ускорение $\bar{r}''(t)$. Второй закон Ньютона: $m\bar{r}'' = mF = mf(r)\bar{r}$. Сократим и получим $\bar{r}'' = f(r)\bar{r}$. Введем $\mathbb{M}(t) = \bar{r}(t) \times \bar{v}(t)$. В начальный момент $\mathbb{M}(t_0) = \bar{r}(t_0) \times \bar{v}(t_0) \neq 0$, то есть скорость не направлена коллинеарно радиус-вектору.

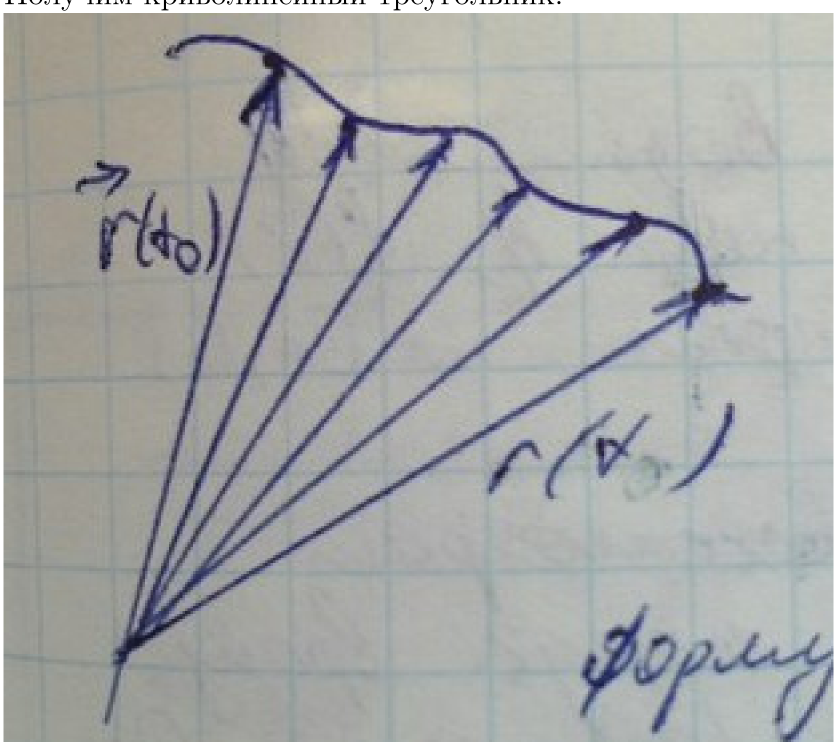
Продифференцируем вектора: $\mathbb{M}'(t) = \bar{r}' \times \bar{v} + \bar{r} \times \bar{v}' = \bar{v} \times \bar{v} + \bar{r} \times (f(r)\bar{r}) = 0 + 0 = 0$ (смотри формулы выше, Глеб сказал, что разгадка там). Это свидетельствует о том, что момент количества движения постоянен. На самом деле $\bar{r}(t) \times \bar{v}(t) = \mathbb{M}(t_0)$, причем $\bar{r} \perp \mathbb{M}(t_0)$. То есть все вектора лежат в одной плоскости, для которой $\mathbb{M}(t_0)$ — нормаль. Таким образом, движение плоское.

Параметризуем: $\bar{r}(t) = (x(t), y(t))$. Второй закон Ньютона говорит, что $r'' = f(r)\bar{r}$. Параметризовав, получим

$$\begin{cases} x''(t) = f(r)x(t) \\ y''(t) = f(r)y(t) \end{cases}$$

После какой-то магии получим $x''y - y''x = 0$. А слева стоит $\frac{d}{dt}(x'y - y'x) = 0$. Раз производная — ноль, значит, то, что дифференцируется — константа. Получаем, что $x'y - y'x = const$. То есть x пропорционален y. Будем считать, что $const = C \neq 0$.

Получим криволинейный треугольник:



$x'y - y'x = const$ при этом сохраняет знак, а это условие того, что полярный угол меняется монотонно (установлено выше). Поэтому можно применить формулу для площади криволинейного треугольника:

$$S(t) = \frac{1}{2}\left|\int_{t_0}^{t}(x'(u)y(u) - y'(u)x(y))du\right|$$

Под знаком интеграла — константа, а значит,

$$S(t) = \frac{|C|}{2}(t - t_0)$$

Откуда мы видим, что площадь сектора заметания пропорционален времени. $\square$

2.10 Дополнительные замечания

(Ооочень маленькие замечания)

Замечание. По формуле для нахождения площади можно вычислять объем. Достаточно несколько усложнить её. Но правда это можно сделать лишь на некоторых, достаточно хороших множествах. Но об этом на следующий год.

Если у нас есть достаточно хорошее тело, которое проецируется на прямую. В сечении получается плоскость T_x, где x — координата на оси абсцисс. $S(T_x) = S(x)$. Тогда $V(T) = \int_a^b S(x)dx$.

Это позволяет вычислять площади тел вращения. Допустим задан график. Тогда эта формула описывает объем тела вращения, заметаемого этим графиком. Так как в сечении круг, то $S(x) = \pi f^2(x)$, и тогда $V(T) = \int_a^b \pi f^2(x)dx$.

Если вращать полуокружность $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$, то его объем получится

$$V = \int_{-R}^{R} \pi(R^2 - x^2)dx = \frac{4\pi R^3}{3}$$

2.11 Вычисление статических моментов

Пусть имеется ось, через которую проходит плоскость. На этой плоскости (но вне оси) имеется точка m, которая соединена с осью жестким стержнем. И эта конструкция будет стремится повернуться (чтобы точка оказалась внизу).

Пусть у нас есть прямая l, делящая плоскость на 2 полуплоскости: положительную (P_+) и отрицательную P_-. Назовем плечом $h_z = \pm\operatorname{dist}(z, l)$, где z — точка. При этом будем считать, что для любой фигуры масса пропорциональна площади (плотности у всех одинаковы). Перечислим свойства статического момента относительно оси l:

1) $M_l(A)$ — аддитивна. (M_l — момент, A — фигура)

$A = B \cup C,\ B \cap C = \varnothing$.

$M_l(A) = M_l(B) + M_l(C)$.

2) $A \subset P_+$ $M_l(A) \geq 0$.

3) A — симметричны относительно l

$M_l(A) = 0$

4) $M_l = m \cdot h_z$, где m — масса точки z

5) A — прямоугольник, C — центр, то тогда $M(A) = h_C M(A) = h_C \rho S(A)$, где ρ — плотность.

Научимся вычислять (действие клея) момент.

У нас есть неотрицательная функция, заданная на $[a, b] \times P_+$, A — подграфик.

1) l — ось x, $z = (x, y)$, тогда $h_z = y$

2) l — ось y, то $h_z = x$.

Теорема. *$f \geq 0$, непрерывна на $[a, b]$. A — подграфик. Тогда:*

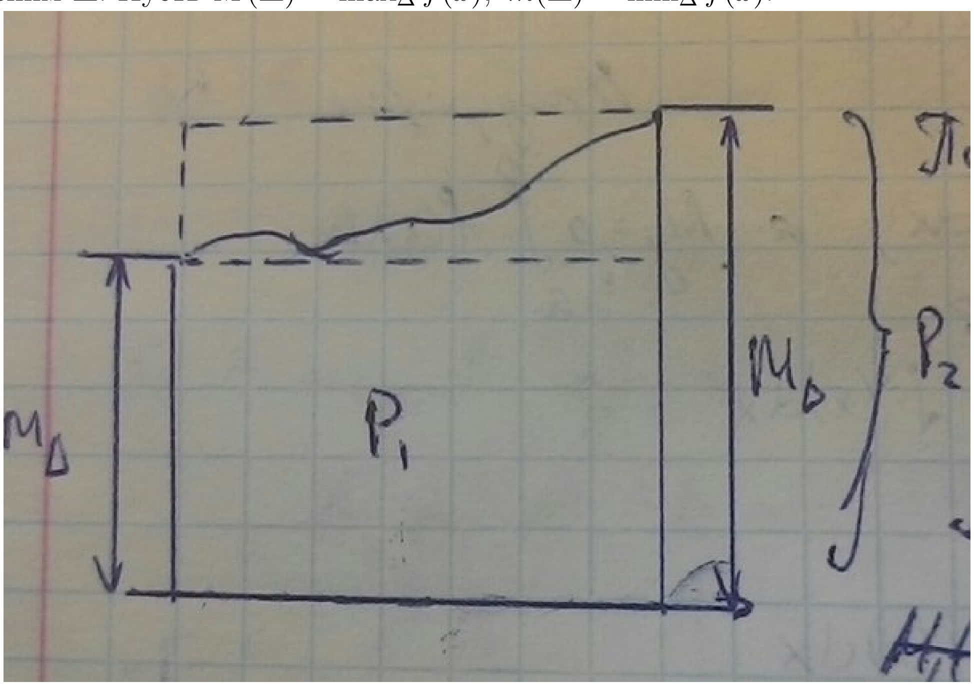
1) $M_x(A) = \frac{\rho}{2} \int_a^b f^2(x)dx$.

2) $M_y(A) = \rho \int_a^b x f(x)dx$.

Доказательство. Будем считать, что $\rho = 1$.

$\Delta \subset [a, b]$. $A(\Delta) = \{(x, y) | x \in \Delta,\ 0 \leq y \leq f(x)\}$.

Свяжем с нашим моментом функцию промежутка: $\Phi(\Delta) = M_x(A(\Delta))$. Это аддитивная функция, поскольку аддитивно $\Delta = \Delta' + \Delta''$, где Δ' и Δ'' — разбиение Δ на две части. Оценим Δ. Пусть $M(\Delta) = \max_\Delta f(x),\ m(\Delta) = \min_\Delta f(x)$.



$P_1(\Delta) \subset A(\Delta) \subset P_2(\Delta)$.

Теперь воспользуемся свойством монотонности момента: Если $A \subset B \subset P_+$, то $M_l(A) \leq M_l(B)$. Докажем: $M_l(B) = M_l(A \cup (B \backslash A)) = M_l(A) + M_l(B \backslash A) \geq M_l(A)$. Таким образом, момент монотонен в P_+. Отсюда $M_x(P_1(\Delta)) \leq M_x(A(\Delta)) \leq M_x(P_2(\Delta))$. Среднее — наша функция, а все остальное легко вычисляется. Таким образом,

$$\frac{m(\Delta)}{2} m(\Delta) \text{дл}(\Delta) \leq \Phi(\Delta) \leq \frac{M(\Delta)}{2} M(\Delta) \text{дл}(\Delta)$$

Введем функцию $g(x) = \frac{1}{2} f^2(x)$. Тогда $\frac{m^2(\Delta)}{2} \text{дл}(\Delta) = \min_\Delta g(x) \text{дл}(\Delta) \leq \Phi(\Delta) \leq \max_\Delta g(x) \text{дл}(\Delta) = \frac{M^2(\Delta)}{2} \text{дл}(\Delta)$

А по следствию из общей теоремы,

$$M_x(A) = \int_a^b g(x)dx = \frac{1}{2} \int_a^b f^2(x)dx$$

Второй пункт доказывается аналогично первому. □

Следствие $0 \le f \le g$, обе определены на $[a, b]$. $T_{f,g} = \{(x, y) | x \in [a, b],\ f(x) \le y \le g(x)\}$.

Рассмотрим A_f — подграфик f и A_g — подграфик g. Отсюда $A_g = T_{f,g} \cup A_f$.

Поэтому $M_x(T_{f,g}) = M_x(A_g) - M_x(A_f) = \frac{1}{2}\int_a^b (g^2(x) - f^2(x))dx$.

Пример. Верхняя половина круга радиуса R — график функции $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ $x \in [-R, R]$. $M_y = 0$.

$$M_x = \frac{1}{2}\int_{-R}^{R} f^2(x)dx = \int_0^R (R^2 - x^2) = R^3(1 - \frac{1}{3}) = \frac{2}{3}R^3$$

Определение. Пусть имеется фигура A массой M, масса распределена равномерно. **Центр тяжести** — это такая точка C, что $\forall$ оси l верно $M_l(A) = Mh_C$.

Научимся вычислять центр тяжести: пусть он имеет координаты $C(x_C, y_C)$, y_C — плечо относительно x, $A = T_{f,g}$. $M y_C = M_x(A)$.

$$y_C = \frac{1}{S(A)}M_x(A) = \frac{\int_a^b (g^2(x) - f^2(x))dx}{\int_a^b (g(x) - f(x))dx}$$

Аналогично вычисляется x_C:

$M x_C = M_y(A) = \int_a^b (g(x) - f(x))dx$

Получаются формулы вычисления координат центра тяжести.

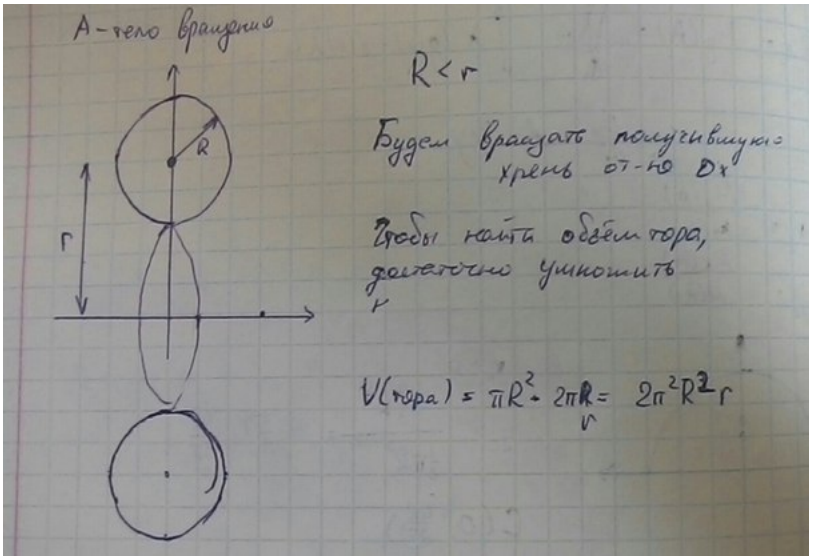
В общем виде они выглядят так:

$$x_C = \frac{M_y(A)}{M(A)},\ y_C = \frac{M_x(A)}{M(A)}$$

Пример. Если мы возьмем полукруг, то центр тяжести лежит на оси ординат, так как фигура симметрична, а ордината равна

$$y_C = \frac{\frac{2}{3}R^2}{\frac{\pi R^2}{2}} = \frac{4R}{3\pi}$$

Еще один любопытный факт. Пусть у нас есть подграфик функции f. Тогда $M_x = \frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)dx$. А $V = \pi\int_a^b f^2(x)dx$. Отсюда $M_x(A) = \frac{1}{2\pi}V = S(A) \cdot y_C$. И откуда $V = S(A)(2\pi y_C)$.



3 Несобственный интеграл

3.1 Определение и свойства несобственного интеграла

Определение. f непрерывна на промежутке одного из типов: $[a, +\infty),\ [a, b)\ (-\infty, a],\ (a, b]$.

Если f непрерывна, то она непрерывна на любом $[a, A],\ a < A < +\infty$, то можно ввести интеграл $\phi(A) = \int_a^A f(x)dx$. Тогда

$$\exists \lim_{A \to +\infty} \phi(A) = \int_a^{+\infty} f(x)dx$$

называется несобственным интегралом.

Если f непрерывна на $[a, b]$, то у нее есть интеграл $\int_a^b f(x)dx$, но она одновременно непрерывна на $[a, b)$ и тогда мы можем говорить о несобственном интеграле $\lim_{A \to b-} \int_a^A f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$. Противоречия здесь не возникает, так как интеграл $\phi(A) = \int_a^A f(x)dx$ непрерывен на $[a, b]$. И поэтому в силу непрерывности ϕ, $\phi(A) \to \phi(b) = \int_a^b f(x)dx$. Никакого противоречия между понятиями «старого» интеграла и несобственного интеграла нет.

Несобственный интеграл распространяет понятие интеграла на функции, которые не определены в точке b промежутка $[a, b)$.

Если предел конечен, то говорят, что несобственный интеграл сходится, иначе — расходится.

Несколько свойств интеграла:

1) f, g непрерывны на $[a, +\infty)$. Если $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int_a^{+\infty} g(x)dx$, то $\int_a^{+\infty}(f(x)+g(x))dx = \int_a^{+\infty} f(x)dx + \int_a^{+\infty} g(x)dx$. Доказательство:

$$\int_a^A (f(x) + g(x))dx = \int_a^A f(x)dx + \int_a^A g(x)dx$$

и перейти к пределу. (Аддитивность относительно подынтегральной функции)

2) α — постоянная, то $\int_a^{+\infty} \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^{+\infty} f(x)dx$ (однородность). Доказательство аналогично.

3) $\int_a^{+\infty}(\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^{+\infty} f(x)dx + \beta \int_a^{+\infty} g(x)dx$ (линейность). Доказательство аналогично.

3') $f_1, ..., f_n$ непрерывны на $[a, +\infty)$, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится, то

$$\int_a^{+\infty} (\sum_{k=1}^{n} \alpha_k f_k(x))dx = \sum_{k=1}^{n} \alpha \int_a^{+\infty} f(x)dx$$

4) f непрерывна на $[a, +\infty)$, $a < c < +\infty$, и $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int_c^{+\infty} f(x)dx$ сходятся (одновременно?), то $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx$.

Доказательство. Возьмем $\Phi(A) = \int_a^A f(x)dx$. Согласно свойству аддитивности, $\Phi(A) = \int_a^A f(x)dx = \int_a^C f(x)dx + \int_C^A f(x)dx = \int_a^C f(x)dx + \Phi_1(A)$. Существуют оба предела, а значит, теорема верна. □

Следствие: Если $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ — сходится, то $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_a^A f(x)dx + \int_A^{+\infty} f(x)dx$, где $\int_A^{+\infty} f(x)dx$ называют остатком по всему промежутку, а $\int_a^A f(x)dx$ — частичным интегралом.

5) Если $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ — сходится, то $\int_A^{+\infty} f(x)dx \to_{A\to+\infty} 0$. Из последнего равенства вытекает, что $\int_A^{+\infty} f(x)dx = \int_a^{+\infty} f(x)dx - \Phi(A) \to_{A\to+\infty} 0$, где $\Phi(A) \to \int_a^{+\infty} f(x)dx$.

Замечание. Свойство аддитивности позволяет обобщить понятие интеграла на тот случай, когда функция определена на открытом промежутке вида (a, b) или $(a, +\infty)$. Берем тогда $a < c < b$ и полагаем

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Благодаря свойству аддитивности определение корректно (доказать самостоятельно).

3.2 Несобственные интегралы от неотрицательных функций

f непрерывна на $[a, +\infty]$.

$\Phi(A) = \int_a^A f(x)dx,\ a \le A < +\infty$.

Теорема. *(первая сравнения)*

Пусть $f \ge 0$. $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится$\Leftrightarrow$ $\Phi(A)$ — ограничена на $[a, +\infty]$.

Доказательство. Необходимость: функция сходится. $\Phi(A) \to_{A\to+\infty} L$.

Зафиксируем $\varepsilon = 1$. $\exists A_1,\ \forall A > A_1 =,\ |\Phi(A) - L| < 1$.

$|\Phi(A)| = |\Phi(A) - L + L| \le |\Phi(A) - L| + |L| \le 1 + |L| = C$.

Тогда, по теореме Вейерштрасса, $\Phi(A) = \int_a^A f(x)dx$, $\frac{\Phi_1(A)}{A}$

$\int_a^A f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^A f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \Phi_1(A)$, откуда $|\Phi(A)| \le C' + C''$

Достаточность:

$0 \le \Phi(A) \le C,\ \forall A \in [a, +\infty)$.

Функция монотонно возрастает, то есть $A < A'$, откуда $\Phi(A') = \int_a^{A'} = \int_a^A + \int_A^{A'} \ge \int_a^A = \Phi(A)$. Предел существует в силу теоремы о пределе монотонной функции, а так как функция ограничена, то он конечен. □

Пример. $[0,+\infty)$, $f(x)=\cos x$. Тогда $\int_0^A \cos x dx = \sin A \not\to_{A\to+\infty}$ (если функция способна менять знак, то ничего у нас не получится).

$(0,1]$
$$\int_0^1 \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^2}dx$$
тоже самое. Если
$$\int_A^1 \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^2}dx = \int_1^{\frac{1}{A}} \sin t dt = \cos 1 \cdot \cos {}^1\!/_A$$

Теорема. *(вторая сравнения)*

f, g неотрицательны, непрерывны на $[a,+\infty)$.

1) Если $0 \le f(x) \le g(x)$ $\forall x \in [a,+\infty)$ и $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ сходится, то сходится и $\int_a^{+\infty} f(x)dx$.

2) Если $\exists \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l < +\infty$ и $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ сходится, то сходится и $\int_a^{+\infty} f(x)dx$

Доказательство.

1) $\int_a^A f(x)dx \le \int_a^A g(x)dx \le C$ по теореме выше. Таким образом, $\Phi(A) = \int_a^A f(x)dx$ ограничен, применив теорему выше в части достаточности, можем сказать, что $\int_a^A f(x)dx$ сходится.

Замечание: Мы знаем, что $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int_c^{+\infty} f(x)dx$ равносильны. Тогда мы можем сказать, что $f(x) \le g(x)$ при $x \ge c$, и тогда это равносильно $\int_c^{+\infty} f(x)dx$.

2) $\exists C \ge a$, такой, что $\frac{f(x)}{g(x)} < l+1$ при $x \ge C$. Домножая на $g(x)$ получим $f(x) \le g_1(x) = (1+l)g(x)$. $\int_c^{+\infty} g_1(x)dx$ сходится, согласно доказанному $\int_c^{+\infty} f(x)dx$ тоже сходится.

Добавление: Если $0 < l < +\infty$, то $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ сходятся одновременно.

Мы уже доказали, что $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ сходится $\Rightarrow$ $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится. Если же $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится и $\frac{f(x)}{g(x)} \to l > 0$, $f(x) > 0$ при $x \ge c$, перевернем дробь: $\frac{g(x)}{f(x)} \to \frac{1}{l} < +\infty$, применим вторую теорему сравнения. ☐

Пример. функции для несобственного интеграла:

1) $f(x) = e^{-\alpha x}$, $\alpha > 0$, на промежутке $[a,+\infty)$. Однако она убывает слишком быстро, а вот следующая функция является эталоном.

2) ВАЖНО!

$f(x) = \frac{1}{\alpha^p}$ на промежутке $[a,+\infty)$, $a > 0$

2.1) $p > 1$:
$$\int_a^A \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{1-p} x|_a^A = \frac{1}{p-1}\left[a^{1-p} - A^{1-p}\right] \to_{A\to+\infty} C$$

2.2) $0 < p < 1$. Тогда $\frac{1}{x^p} \ge \frac{1}{x}$ при $x \ge 1$. Докажем, что интеграл от правой части расходится:
$$\int_a^A \frac{dx}{x} = \ln\frac{A}{a} \to_{A\to+\infty} +\infty$$

А $\frac{1}{x^p}$ больше, чем эта функция, значит, по первой теореме сравнения, $\int_a^A \frac{dx}{x^p}$ расходится.

Пример. Рассмотрим для конечного промежутка $(0,a]$, $a > 0$, $p > 0$.

$f(x) = \frac{1}{x^p}$.

1) $p<1,\ 0<A<a$. Тогда

$$\int_A^a \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{1-p} x^{-p+1}|_a^A = \frac{1}{1-p}\left[a^{1-p} - A^{1-p}\right]$$

где $1-p>0$.
2) $p \geq 1$, $\frac{1}{x^p} \geq \frac{1}{x}$ при $0<x<1$.

$$\int_A^1 \frac{dx}{x^p} = -\ln A = \ln\frac{1}{A} \to_{A\to+0} +\infty$$

Значит, интеграл $\int_0^a \frac{dx}{x^p}$ сходится тогда и только тогда, когда $p<1$.

Упражнение.

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{x^p}dx,\ \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^p}dx,\ \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p(\ln x)q}$$

при каких условиях эти интегралы будут сходиться?

3.3 Абсолютно и условно сходящиеся интегралы

Теорема. *f непрерывна на $[a,+\infty)$. Если $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ сходится, то сходится и $\int_a^{+\infty} f(x)dx$.*

Доказательство строим на факте, что $t\in\mathbb{R}$, если $t_+ = \max(0,t) = \begin{cases} t & t\geq 0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$ и $t_- = \max(0,t) = \begin{cases} 0 & t\geq 0 \\ |t| & t<0 \end{cases}$. Заметим, что $t_\pm \geq 0$. При этом $t = t_+ - t_-$ и $|t| = t_+ + t_-$.

Также $t_+ = \frac{|t|+t}{2}$ и $t_- = \frac{|t|-t}{2}$.

Доказательство. Введем f_+, определяемую как $f_+(x) = max(0,f(x))$ и f_-, определяемую как $f_-(x) = max(0,-f(x))$. Заметим: $f = f_+ - f_-$, $|f| = f_+ + f_- \geq f_+, f_- \geq 0$. Заметим, что они непрерывны. Интегралы $\int_a^{+\infty}|f_\pm(x)|dx$ тоже сходится по первой теореме сравнения, следовательно, сходятся и $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_a^{+\infty} f_+(x)dx + \int_a^{+\infty} f_-(x)dx$. □

Определение. f непрерывна на $[a,+\infty)$. $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ — абсолютно сходится, если сходится $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$.

Теорема. *(2) (Признаки сравнения).*

f, g непрерывны на $[a,+\infty)$.

1) $|f(x)| \leq |g(x)|$ и $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ абсолютно сходится, то $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ тоже абсолютно сходится.

2) Если $\frac{f(x)}{g(x)} \to_{x\to+\infty} l \in \mathbb{R}$ и $\int_a^b g(x)dx$ абсолютно сходится, то $\int_a^b g(x)dx$ тоже абсолютно сходятся.

Доказательство. Очевидны для первого, для второго достаточно

$$\frac{|f(x)|}{|g(x)|} = |\frac{f(x)}{g(x)}| \to_{x \to +\infty} l < +\infty$$

$\square$

Замечание. Если $f(x) \sim g(x)$, то если абсолютно сходится интеграл от одной функции, то абсолютно сходится и интеграл от другой.

Пример.

$$\int_2^{+\infty} \frac{\sin x + 10 \sin 10x + \cos^{25} x}{(x+1)\sqrt{x-1}} dx$$

Оцениваем:

$$|f(x)| \leq \frac{12}{(x+1)\sqrt{x-1}} \sim \frac{12}{x^{3/2}}$$

По важному примеру выше, $\int \frac{dx}{x^p}$ сходится, а значит, сходится и наш интеграл.

Пример.

$$\int_1^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \cdot \frac{\sin \omega x}{x^p} dx, \quad 0 < p < 1, \quad Q(x) \neq 0 \text{ при } x \geq 1$$

Оцениваем:

$$|f(x)| \leq \frac{|P(x)|}{|Q(x)|} \frac{1}{x^p} \leq \frac{C}{x^{1+p}} = g(x)$$

Если $\deg P < \deg Q$, то $|\frac{P(x)}{Q(x)}| \leq \frac{C}{x}$, поэтому наша формула не превосходит $\frac{C}{x^{1+p}}$ и наш интеграл абсолютно сходится. Иначе не будет абсолютной сходимости и никто не гарантирует сходимость вообще.

Определение. f непрерывна на $[a, +\infty)$

Если $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится, а $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ — расходится, то такой интеграл называется условно сходящимся.

Убедимся, что такие интегралы существуют:

$$\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin \omega x}{x^p} dx \qquad \int_\pi^{+\infty} \frac{\cos \omega x}{x^p} dx$$

Рассмотрим первый интеграл. Он сходится тогда и только тогда, когда $p > 0$, а абсолютно сходится, тогда и только тогда, когда $p > 1$. А вот интеграл $\int_\pi^{+\infty} \frac{|\sin \omega x|}{\sqrt{x}} dx$ уже расходится.

Докажем это:

Доказательство. $\pi < A$

$$\int_\pi^A \frac{\sin \omega x}{x^p} dx = \frac{-\cos \omega x}{\omega} \frac{1}{x^p} |_\pi^A - \frac{p}{\omega} \int_\pi^A \frac{\cos \omega x}{x^{p+1}} dx$$

Этот интеграл абсолютно сходится, так как

$$|\frac{\cos \omega x}{x^{p+1}}| \leq \frac{1}{x^{p+1}}$$

А конечная подстановка имеет конечный предел при $A \to +\infty$. Правая часть имеет конечный предел, значит, и левая часть имеет конечный предел.

Теперь нам нужно доказать, что если $0 < p \le 1$, то $\int_\pi^{+\infty} \frac{|\sin \omega x|}{x^p} dx = +\infty$

Тогда

$$\int_\pi^{+\infty} \frac{|\sin \omega x|}{x^p} dx \ge \int_\pi^{+\infty} \frac{|\sin \omega x|}{x} dx$$

Докажем, что расходится интеграл

$$\int_\pi^{+\infty} \frac{|\sin \omega x|}{x} dx$$

Сделаем замену переменной: $\omega x = z$. Не умаляя общности, будем считать, что $\omega = 1$. Тогда требуется исследовать интеграл

$$\int_\pi^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx$$

Будем исследовать частичные суммы $A = n\pi$.

$$I_n = \int_\pi^{n\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx = \int_\pi^{2\pi} + \int_{2\pi}^{3\pi} + ... + \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx \ge$$
$$\ge \sum_{k=1}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{(k+1)\pi} dx = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2}{\pi} \frac{1}{k+1} \ge \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2}{\pi} \int_{k+1}^{k+2} \frac{dx}{x} = \frac{2}{\pi} \int_2^{n+1} \frac{dx}{x} = \frac{2}{\pi} \ln \frac{n+1}{2}$$

Значит, $I_n \ge \frac{2}{\pi} \ln \frac{n+1}{2} \to_{n\to\infty} +\infty$. То есть интеграл расходится. $\square$

Возьмем $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ и $g(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} + \frac{|\sin x|}{x}$, где $\frac{|\sin x|}{x} = o(\frac{|\sin x|}{\sqrt{x}})$. Интеграл от функции f сходится, а вот g — расходится.

Поэтому теоремы о признаках сравнения работают только для абсолютно сходящихся интегралов.

Теорема. *(признак сходимости Дирихле)*

Пусть u, v непрерывны на $[a, +\infty)$, v — непрерывно дифференцируема. Предположим, что выполняются условия:

1) $\int_a^A u(x)dx$ — ограничен.

2) v монотонна.

3) $v \to_{x\to+\infty} 0$.

Тогда $\int_a^{+\infty} u(x)v(x)dx$ сходится.

Доказательство. Введем $U(t) = \int_a^t u(x)dx$. Будем рассматривать частичные интегралы $\int_a^A u(x)v(x)dx = \int_a^A v(x)d(U(x))$. Интегрируем по частям:

$$\int_a^A u(x)v(x)dx = \int_a^A v(x)d(U(x)) = v(x)U(x)|_a^A - \int_a^A U(x)v'(x)dx =$$
$$\underbrace{\underbrace{v(A)}_{\to 0}\underbrace{U(a)}_{\text{огр}} - v(a)U(A)}_{\to C} - v(a)U(A) - \int_a^A U(x)v'(x)dx$$

Докажем, что интеграл в конце ограничен: $|U(x)| \leq C$

$$\int_a^A |U(x)v'(x)|dx \leq \int_a^A C|v'(x)|dx = \int_a^A C(\pm v'(x))dx =$$
$$|C\int_a^A v'(x)dx| = |C(\underbrace{v(A)}_{\to 0} - V(a))| \to_{A\to+\infty} C$$

Получили, что $\int_a^{+\infty} |U(x)v(x)|dx$ — сходится, а значит, сходится и $\int_a^{+\infty} u(x)v(x)dx$. □

Следствие: (Признак Абеля)
1') $\int_a^A u(x)dx$ — сходится.
2') =2)
3') v ограничена.
Тогда $\int_a^{+\infty} u(x)v(x)dx$ сходится.

Доказательство. Т.к. v ограничена и монотонна, то у нее на бесконечности есть предел: $v(x) \to_{x\to+\infty} L$. Теперь $v(x) = L + v_1(x) = L + (v(x) - L)$.

$$\int_a^{+\infty} u(x)v(x)dx = \int_a^{+\infty} Lu(x)dx + \int_a^{+\infty} u(x)v_1(x)dx$$

Первый интеграл сходится по условию, а второй сходится по признаку Дирихле. Следовательно, сходится и $\int_a^{+\infty} u(x)v(x)dx$. □

Часть II
Ряды

4 Числовые ряды

4.1 Определение и простейшие свойства

$\int_a^b f(x)dx$. x_k — равноотстоящие точки на $[a, b]$.

$$\sigma_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)(x_{k+1} - x_k)$$

Возьмем функцию $f \in C^\infty(a, b),\ x_0 \in (a, b)$. Её можно аппроксимировать полиномом Тейлора:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + r_n(x)$$

Определение. $a_{1,}, ..., a_n$ — последовательность. И по ней будем строить частичные суммы:
$S_1 = a_1$
$S_2 = a_1 + a_2$

$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n = S_{n-1} + a_n$.

Числовым рядом называется пара последовательностей $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$, где S изменяется по правилу выше.

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$$

Определение. Каждое a_n называется членом ряда. Суммы S_n — частичными суммами ряда.

Определение. Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Если $\exists \lim_{n\to\infty} S_n \in \hat{\mathbb{R}}$, то он называется суммой ряда. Если он конечен, то говорят, что ряд сходится, а в противном случае говорят, что ряд расходится.

Пример. Геометрическая прогрессия: $1 + x + x^2 + ... + x^{n-1} + ...$

$a_n = x^{n-1}$

$S_n = 1 + x + .. + x^{n-1} = \frac{1-x^n}{1-x} \to \frac{1}{1-x}$, если $|x| < 1$. Если же $|x| > 1$ ряд расходится. Если $x = 1$, то $S_n = n$, а если $x = -1$, то мы получаем ряд $1 - 1 + 1 - 1 + 1 + ...$

Если при рассмотрении ряда отбросить первые m членов, то получившийся ряд $a_{m+1} + a_{m+2} + ...$ будет называться m-тым остатком.

Простейшие свойства рядов:

1) $(A) \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $(B) \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ и мы образуем $(C) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + b_n$. Если (A) и (B) сходятся, то сходится и (C) и его сумма равна $S(C) = S(A) + S(B)$.

Доказательство. $C_n = A_n + B_n \to S(A) + S(B)$ (перешли к пределам). □

Ряд обозначается $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Но этим символом обозначается и сумма ряда. (перегрузка операций, блин)

2) $(A) \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Если $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то сходится и $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

3) $m \in \mathbb{R}$. $(A) \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится $\Leftrightarrow$ сходится его m-ый остаток.

Доказательство. $S_n = a_1 + ... + a_m + ... + a_n = S_m + R_n$, где $R_n = a_m + ... + a_n$. Тогда $S(A) = S_m + \rho_m$, где ρ_m — сумма остатка. □

4) Если ряд $(A) \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $\rho_m \to_{m\to\infty} 0$, так как $\rho_m = S(A) - S_m$

5) Основной необходимый признак сходимости:

Теорема. *Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $a_n \to 0$.*

Доказательство. Рассмотрим $n - 1$-ый остаток. $\rho_{n-1} - \rho_n = a_n$. А у сходящегося ряда остатки, как мы уже доказали, стремятся к нулю. □

4.2 Положительные ряды

Определение. Если имеется ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n | \forall n \ a_n \geq 0$, то такой ряд называется положительным.

Теорема. *(1) A — положительный ряд. $A_n = a_1 + ... + a_n$. Такой ряд сходится тогда и только тогда, когда $\{A_n\}$ — ограничен, то есть $\exists C: \ A_n \leq C \ \forall n$.*

Доказательство.

Необходимость: Ряд сходится, значит, существует конечный предел частичных сумм: $\lim_{n\to\infty} A_n \Rightarrow \{A_n\}$ — ограничена.

Достаточность: $A_n \leq A_{n+1} \mid A_{n+1} = a_1 + ... + a_n + a_{n+1} \geq A_n + a_{n+1} \geq A_n$. □

Теорема. *(2) (Теоремы сравнения)*

$(A) \sum a_n$, $(B) \sum b_n$ положительны,

1) Если $a_n \leq b_n$ начиная с некоторого места и (B) — сходится, то (A) — сходится.

2) $b_n > 0 \ \forall n$, $\frac{a_n}{b_n} \to_{n\to\infty} L$. Если (B) сходится, то и (A) сходится, а если $0 < L < +\infty$, то ряды сходятся одновременно.

Замечание: мы докажем: сходимость $(B) \Rightarrow$ сходимость (A), что можно переформулировать как: расходимость $(A) \Rightarrow$ расходимость (B).

Второе условие второй части теоремы можно переформулировать как $a_n \sim Lb_n$ $0 < L < +\infty$, то ряды сходятся одновременно.

Доказательство.

1) Введем частичные суммы рядов: A_n и B_n. Неравенство $a_n \leq b_n$ выполняется начиная с некоторого места, но можно считать, что оно выполняется всегда, так как если мы увеличим первые члены ряда (B), то сходимость не исчезнет. Не умаляя общности, $a_n \leq b_n \ \forall n$. Тогда это неравенство справедливо для частичных сумм: $0 \leq A_n \leq B_n \leq C$, по теореме (1). Последовательность A_n ограничена, значит, ряд (A) сходится.

2) Так как $\frac{a_n}{b_n} \to L \Rightarrow$ НСНМ$\frac{a_n}{b_n} \leq L + 1$. Следовательно, $a_n \leq (L+1)b_n = b'_n$ начиная с некоторого места. $\sum b'_n$ сходится, а значит, сходится и ряд (A). Предположим, $L > 0$. Так как $\frac{a_n}{b_n} \to L > 0 \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} > 0 \Rightarrow a_n > 0$ начиная с некоторого места. Откуда, $\frac{b_n}{a_n} \to \frac{1}{L} < \infty$. □

Эталоны:

1) Геометрическая прогрессия: $0 < q < 1$, $1 + q + ... + q^n + ...$ — сходится. Значит, с его помощью можно доказывать сходимость некоторых рядов. Однако он работает в узком классе случаев, т.к. члены его очень быстро убывают.

2) $\sum \frac{1}{n^p}$, $p > 0$. Обобщенный гармонический ряд. Если $p = 1$, то такой ряд называется гармоническим. c — среднее гармоническое чисел a, b, если

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{2}(\frac{1}{a} + \frac{1}{b})$$

Каждый член гармонического ряда — среднее гармоническое предыдущего и последующего. $\underbrace{\frac{1}{n-1}}_{a} + \underbrace{\frac{1}{n}}_{c} + \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{b} + ...$, где $n \geq 2$. Отсюда $\frac{1}{2}((n-1) + (n+1) = n$.

Теорема. *(3) Обобщенный гармонический ряд сходится тогда и только тогда, когда $p > 1$.*

Доказательство. Пусть $p > 1$. Введем частичную сумму $S_n = 1 + \frac{1}{2^p} + ... + \frac{1}{n^p} < 1 + \frac{1}{2^p} + ... + \frac{1}{(2n-1)^p} + \frac{1}{(2n)^p} + \frac{1}{(2n+1)^p}$. Сгруппируем слагаемые попарно, начиная со второго (четная и нечетная n в знаменателе):

$$1 + \frac{2}{2^p} + \frac{2}{4^p} + ... + \frac{2}{(2n)^p} = 1 + \frac{1}{2^p}(1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + ... + \frac{1}{n^p})$$

Невооруженным взглядом видно, что в скобках получилась S_n, с которой мы и начинали. Полученное неравенство можно переписать как $S_n \le 1 + \frac{2}{2^p} S_n$. $\Theta = \frac{2}{2^p} < 1$, то есть $S_n \le \frac{1}{1-\Theta}$. Частичные суммы ограничены, а значит, ряд сходится.

Пусть $0 < p < 1$. Тогда $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p} \ge \frac{1}{n^p} \cdot n$. $S_n \ge n^{1-p} \to +\infty$. При этом $\frac{1}{n^p} > \frac{1}{n}$, расходимость очевидна. $a_1 + ... + a_n + a_{n+1} + ... + a_{2n}$. Возьмем сумму $na_{2n} \le a_{n+1} + ... + a_{2n} \le na_{n+1}$. Затем разделим на две части и тоже оценим оставшуюся сумму. □

Теорема. $\sum \frac{1}{n}$ *расходится.*

Доказательство. $S_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}$

Возьмем $n = 2^m$ и запишем

$$S_{2^m} = 1 + ... + \frac{1}{2^{m-1}} + ... + \frac{1}{2^m} \ge 1 + ... + \frac{1}{2^{m-1}} + \frac{1}{2^m} \cdot 2^{m-1}$$

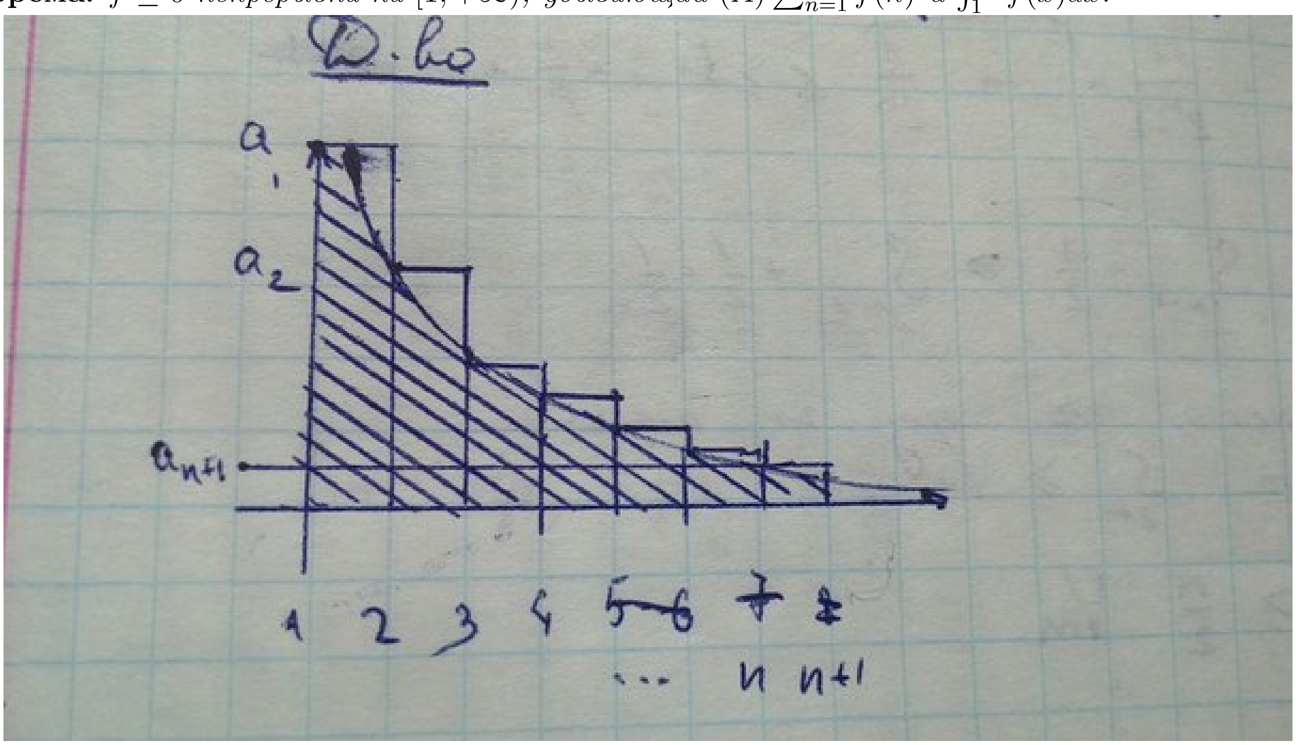
То есть $S_{2^m} \ge S_{2^{m-1}} + \frac{1}{2} \ge S_{2^{m-2}} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ge 1 + \frac{m}{2}$. То есть $S_{2^m} \ge \frac{m}{2}$. А значит, гармонический ряд расходится, ведь m сколь угодно велико.

(При доказательстве теоремы ни один океан особо не пострадал). □

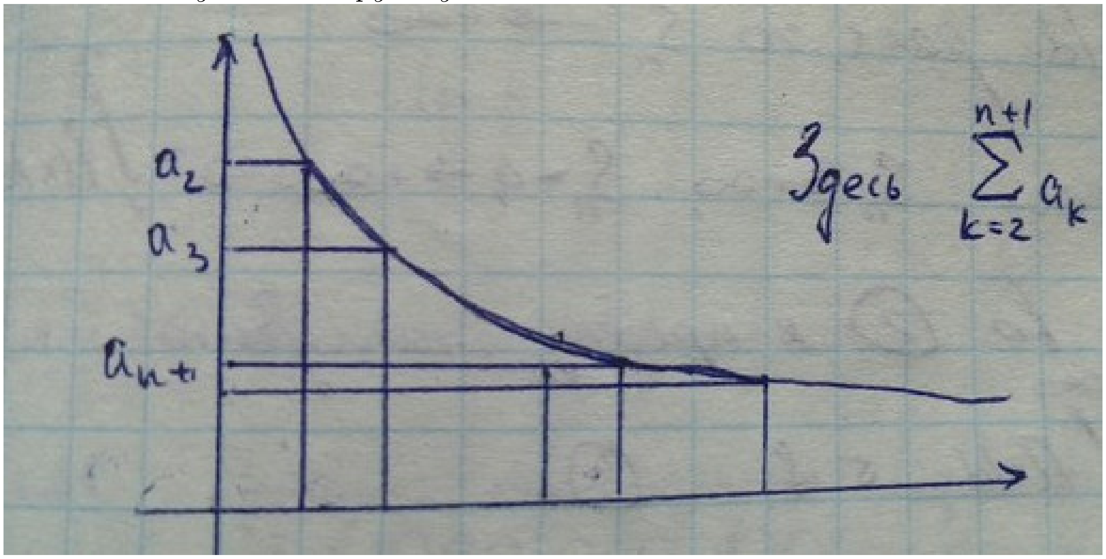
$[1, +\infty)$, f непрерывна, $f \ge 0$

$a_n = f(n)$. Тогда с одной стороны можно рассматривать $(A) \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$, а с другой $\int_1^{\infty} f(x)dx$, причем частичной сумме $S_n = a_1 + ... + a_n$ будет соответствовать $\Phi(A) = \int_1^A f(x)dx$.

Теорема. $f \ge 0$ *непрерывна на* $[1, +\infty)$, *убывающий* $(A) \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ *и* $\int_1^{\infty} f(x)dx$.



Можно поступить по другому:



Доказательство. Берем промежуток $[k, k+1]$. Тогда $\forall x \in [k, k+1]$ $f(k+1) \leq f(x) \leq f(k)$ и $a_{k+1} \leq f(x) \leq a_k$. Интегрируем это неравенство:

$$a_{k+1} \leq \int_k^{k+1} f(x)dx \leq a_k$$

Просуммируем:

$$S_{n+1} - a_1 = a_2 + ... + a_{n+1} \leq \int_k^{k+1} f(x)dx \leq a_1 + ... + a_n = S_n$$

Если заменить что-то на что-то, то получим

$$S_n - a_1 \leq \int_1^n f(x)dx \leq \int_1^{n+1} f(x)dx \leq S_n$$

Что аналогично

$$S_n - a_1 \leq \int_1^n f(x)dx \leq S_n \qquad (2)$$

Результируя, получаем:

$$S - a_1 \leq \int_1^\infty f(x)dx \leq S$$

Теорема доказана. Это интегральный признак Коши. □

Замечания: $R_m = S - a_1$. Тогда

$$R_m \leq \int_m^\infty f(x)dx \leq R_{m-1}$$

$R_m = a_{m+1} + a_{m+2} + ...$
Обратимся к обобщенному гармоническому ряду:
$f(x) = \frac{1}{x^p}$.
Как мы знаем, $\int_1^\infty \frac{dx}{x^p}$ сходится тогда и только тогда, когда $p > 1$.

А если $p = 1$, ряд расходится. Но есть информация в виде неравенства (2).

$$S_n - 1 \leq \int_1^\infty \frac{dx}{x} \leq S_n = 1 + \frac{1}{2} + ... \frac{1}{n}$$

откуда

$$\ln n \leq S_n < 1 + \ln n$$

4.3 Абсолютно сходящиеся ряды

Теорема. $(A) \sum_{n=1}^\infty a_m,\ (A*) \sum_{n=1}^\infty |a_n|$. *Если сходится ряд* $(A*)$, *то сходится и* (A).

Доказательство. $t,\ t_+ = \max(0, t) \geq 0,\ t_- = \max(0, -t) \geq 0$.

Вместе с рядом (A) рассмотрим $(A_+) \sum_{n=1}^\infty (a_n)_+,\ (A_- \sum_{n=1}^\infty (a_n)_-)$, где $0 \leq (a_n)_\pm \leq |a_n|\ \forall n$.

$a_n = (a_n)_+ - (a_n)_-$. Так как ряды $(a_n)_+,\ (a_n)_-$ сходятся, то их разность тоже сходится. □

Определение. (A) абсолютно сходится, если сходится $(A*)$.

Теорема. *(Признак Даламбера) (хочу сыра).*

$(A) \sum_{n=1}^\infty a_n,\ \forall a_n \neq 0.$

$$D_n = \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$$

1) Если $\exists q < 1$, *такое, что* $D_n \leq q$ *начиная с некоторого места, то ряд* (A) *абсолютно сходится.*

2) Если $D_n \geq 1$ *начиная с некоторого места, то ряд* (A) *расходится.*

Доказательство.

1) Не умаляя общности, $D_n \leq q\ \forall n$, иначе можно изменить первые члены ряда каким-либо образом.

Тогда

$$\frac{|a_2|}{|a_1|} \leq q,\ \frac{|a_3|}{|a_2|} \leq q,\ ...,\frac{|a_n|}{|a_{n-1}|} \leq q$$

Перемножив все эти дроби, получим

$$\frac{|a_n|}{|a_1|} \leq q^{n-1}$$

Откуда:

$$|a_n| \leq \frac{|a_1|}{q} \cdot q^n$$

2) Не умаляя общности, $D_n \leq q\ \forall n$, иначе можно изменить первые члены ряда каким-либо образом.

Тогда

$$\frac{|a_2|}{|a_1|} \geq 1,\ \frac{|a_3|}{|a_2|} \geq 1,\ ...,\frac{|a_n|}{|a_{n-1}|} \geq 1$$

Перемножив все эти дроби, получим

$$\frac{|a_n|}{|a_1|} \geq 1$$

Откуда:

$$0 \not\leftarrow |a_n| \geq |a_1| > 0$$

$\square$

Следствие (предельная форма признака Даламбера):

Пусть $D_n \to_{n\to\infty} D$. Если $D < 1$, то (A) абсолютно сходится. А если $D > 1$, то расходится. При $D = 1$ сомнительный случай и следствие результата не дает.

Доказательство. Пусть $D < 1$. Пусть $D < q < 1$. $D_n \to D < q$. По теореме о стабилизации знака, $D_n < q$ начиная с некоторого места.

Пусть $D > 1$. Тогда $D_n \to D > 1$, тогда по теореме о стабилизации знака, $D_n > 1$ начиная с некоторого места. $\square$

Пример. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. При каких x он сходится?

$$D_n = \frac{\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{|x|^n}{n!}} = \frac{|x|}{n+1} \to_{n\to\infty} 0$$

Пример. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(nx)^n}{n!}$. При каких x он сходится?

$$D_n = \frac{((n+1)|x|)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{(n|x|)^n} = \frac{(n+1)^n}{n^n}|x| = (1+\frac{1}{n})^n|x| \to e|x| = D$$

И если $|x| < \frac{1}{e}$, то ряд абсолютно сходится, при $|x| > 1$ — расходится, а для $|x| = \pm\frac{1}{e}$, то ответа нет.

Пример.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2+(-1)^n)}{4^n}$$

Ряд сильно не монотонен, так как при четном n он равен $(\frac{3}{4})^n$, а при нечетном $(\frac{1}{4})^n$. Здесь $D_n = \frac{1}{4}3^n$, поэтому признак Даламбера не работает (условие на $D_n \geq 1$ НСНМ не выполнено). Хотя очевидно, что ряд сходится.

Пример. Рассмотрим, что происходит в случае сомнительного случая (да, я мастер слова!):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

(Обобщенный гармонический ряд).

$$D_n = \frac{\frac{1}{(n+1)^n}}{\frac{1}{n^p}} = (\frac{n}{n+1})^p \to_{n\to\infty} 1$$

Теорема. *(признак сходимости Коши) (Коши сходится, если...)*

(A) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n,\ K_n = \sqrt[n]{|a_n|}$

1) Если $\exists q < 1$, *что* $K_n \leq q$ *начиная с некоторого места, то* (A) *— абсолютно сходится.*

2) Если $K_n \geq 1$ *для бесконечного числа номеров, то ряд расходится.*

Доказательство.

1)Возводим равенство в n-ную степень, $|a_n| \leq q^n$ начиная с некоторого места, $\sum q^n$ сходится, ссылаемся на первую теорему сравнения.

2) $K_n \geq 1$ для $n_1, ..., n_j \to \infty$, тогда $|a_{n_j}| \geq 1$, откуда $a_n \not\to 0$ □

Пример.

$$\sum \frac{(2+(-1)^n)^n}{4^n}$$

$$K_n = \frac{2+(-1)^n}{4} \leq \frac{3}{4} = q < 1$$

То есть ряд сходится.

Следствие (предельная форма): $K_n \to K$. Если $K < 1$, то (A) абсолютно сходится, а если $K > 1$, то (A) — расходится.

Доказательство. Выберем q, такое, что $K < q < 1$, $K_n \to K < q \Rightarrow K_n \leq q$, а если $K_n \to K > 1$, то $K_n > 1$ начиная с некоторого места. □

Пример. (обобщенный гармонический ряд):

$$\sum \frac{1}{n^p}$$

$$K_n = \sqrt[n]{\frac{1}{n^p}} = e^{-p\frac{\ln n}{n}} \to 1$$

Пример.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(nx)^n}{2^{n^2}}$$

$$K_n = \frac{n|x|}{2^n} \to 0$$

Определение. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty},\ x_n \in \mathbb{R}$. Если $x_{n_k} \to L \in \hat{\mathbb{R}}$, то L называется частичным пределом. По признаку Больцано-Вейерштрасса, если последовательность ограничена, то существует предел подпоследовательности. А если последовательность не ограничена, то существует некий частичный предел. $\mathscr{A}$ — множество частичных пределов $\{x_n\}$, при этом $\mathscr{A} \in \hat{\mathbb{R}}$. $\sup \mathscr{A} = \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \limsup_{n\to\infty} x_n$. Аналогично, $\inf \mathscr{A} = \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \liminf_{n\to\infty} x_n$

Если $\{x_n\}$ ограничен, то L конечен, если $\{x_n\} \to L$ то $\limsup x_n = \liminf x_n = L$

Теорема. $\{x_n\}$ *— ограничена.* $L = \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} a)\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n > N\ x_n < L + \varepsilon \\ b)\ \forall \varepsilon > 0\ x_n > L - \varepsilon \qquad \text{\textit{для бесконечного множества номеров}} \end{cases}$$

Доказательство.

Необходимость: Допустим, что a) неверно. Тогда $\exists\varepsilon_0 > 0$, такое, что $\forall N\ \exists n > N$, для которого $x_n > L + \varepsilon_0$.

Строим подпоследовательность: $\varepsilon_0 > 0$, $n_0 = 1 = N$. Тогда $\exists n_1 > N$, такое, что $x_{n_1} > L + \varepsilon$. Теперь возьмем $N = n_1$. Тогда $\exists n_2 > N$, такое, что $x_{n_2} > L + \varepsilon$. Получим подпоследовательность $\{n_k\}$, $n_1 < n_2 < ...$, для которых $x_{n_k} \geq L + \varepsilon$. Тогда $\exists x_{n_{k_j}} \to \tilde{L} \geq L + \varepsilon_0 > L$.

Отсюда $\tilde{L} \in \mathscr{A}$ и $\tilde{L} > L = \sup \mathscr{A}$. Противоречие.

Теперь допустим, что неверно b). То есть $\exists\varepsilon_0 > 0$, такая, что $x_n > L - \varepsilon_0$ для конечного множества номеров. Тогда $x_{n_k} \to l$, и $x_{n_k} < L - \varepsilon_0$ начиная с некоторого места. Отсюда $l \leq L - \varepsilon_0$. $L - \varepsilon_0$ — верхняя граница для $\mathscr{A}$, откуда $L = \sup \mathscr{A} \leq L - \varepsilon_0 < L$, противоречие. □

А теперь вернемся к признаку Коши и сформулируем еще одно

Следствие 2:

$(A) \sum a_n$, $K_n = \sqrt[n]{|a_n|}$ и $K = \overline{\lim} K_n$. Если $K < 1$, то ряд абсолютно сходится, а если $K > 1$, то расходится.

Доказательство. Пусть $K < 1$, $K < q = K + \varepsilon < 1$, где $\varepsilon > 0$. Тогда, согласно пункту a), $K_n < K + \varepsilon = q$ начиная с некоторого места. Остается лишь сослаться на признак Коши, где $q < 1$.

Пусть $K > 1$. $1 = K - \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$. Согласно пункту b), имеем $K_n > K - \varepsilon$ для бесконечного множества n. Но $K - \varepsilon = 1$, откуда $K_n > 1$ для бесконечного множества номеров. Согласно признаку Коши, этого достаточно, чтобы утверждать, что ряд расходится. □

4.4 Условная сходимость

Определение. $(A) \sum a_n$ условно сходится, если (A) сходится, а $(A*)$ — расходится.

Как же это сочетается?

$(A_+) \sum (a_n)_+$ и $(A_-) \sum (a_n)_-$. Напомним, что $|a_n| = (a_n)_+ + (a_n)_-$ и $a_n = (a_n)_+ - (a_n)_-$.

Предположим, что (A_+) сходится, а (A_-) расходится. Тогда частичные суммы ряда $S_n = \sum_1^n a_k = U_n - V_n$, то есть ряд расходится. Оказывается, что для того, чтобы (A) условно сходился, нужно, чтобы расходились и (A_+) и (A_-).

Рассмотрим ряды, которые чаще всего условно сходятся. Это так называемые знакопеременные ряды:

$c_n > 0$.

$a_n = (-1)^{n-1} c_n$

И ряд принимает вид: $c_1 - c_2 + c_3 - c_4 + ... + (-1)^{n-1} c_n + ...$

Сходимости такое знакочередование, конечно же, не обеспечивает $(1 - 1 + 1 - 1 + ...)$.

Рассмотрим пример:

Пример.

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{4} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{6} + ... + \frac{1}{\sqrt{2k-1}} + \frac{1}{2k}$$

Сгруппируем положительное и отрицательное слагаемое:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2k-1}} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} \geq (*)$$

Все знаменатели в первой сумме заменим на $\sqrt{2n}$. То есть

$$(*) \geq \frac{n}{\sqrt{2n}} - \frac{1}{2}\sum_{1}^{n}\frac{1}{k} > \sqrt{\frac{n}{2}} - \frac{1}{2}(1+\ln n)$$

Теорема. *(признак сходимости Лейбница)*

Пусть имеется знакочередующийся ряд $c_1 - c_2 + c_3 - ...$

Если:

1) $c_n \to 0$

2) $c_1 \geq c_2 \geq c_3 \geq ...$

то (c) сходится.

Доказательство. Введем частичные суммы ряда (c): $S_n = c_1 - c_2 + ... + (-1)^{n-1}c_n$, $S_{2k} = c_1 - c_2 + ... + c_{2k-1} - c_{2k} = (c_1 - c_2) + ... + (c_{2k-1} - c_{2k})$. В силу монотонности ряда, разности неотрицательны, следовательно, сумма неотрицательна. Если мы добавим еще одну разность: $(c_1 - c_2) + ... + (c_{2k-1} - c_{2k}) + (c_{2k+1} - c_{2k-2}) = S_{2k+2}$.

Так как $0 \leq S_{2k} \leq S_{2k+2}$

Получим $S_{2k} = c_1 - (c_2 - c_3) - ... - (c_{2k-2} - c_{2k-1}) - c_{2k} \leq c_1$. То есть $0 \leq S_{2k} \leq c_1$. То есть есть конечный предел $S_{2k} \to S$, где $0 \leq S \leq c_1$. Нечетные суммы ведут себя также, так как $S_{2k+1} = S_{2k} + \underbrace{c_{2k+1}} \to S$. □

Рассмотрим остаток ряда $R_m = (-1)^m c_{m+1} + (-1)^{m+1} c_{m+2} + ... = (-1)^m \left[c_{m+1} - c_{m+2} + c_{m+3} - ...\right]$ Согласно неравенству $(0 \leq S \leq c_1)$ сумма в квадратных скобках не превосходит c_{m+1}, то есть $|R_m| \leq c_{m+1} \leq c_1$, при этом знак $R_m =$ знак c_{m+1}. То есть мы получаем оценку остатка.

Пример.

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ...$$

Признаки условной сходимости несобственного интеграла.

Теорема. ***Признак Дирихле:***

Мы рассматриваем ряд (C) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$, $A_n = a_1 + ... + a_n$. Если:

1) A_n ограничена, т.е. $|A_n| \leq C$ $\forall n$

2) $\{b_n\}$ монотонна.

3) $b_n \to_{n\to\infty} 0$.

То ряд (C) сходится.

Следствие - признак Абеля:

1') $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится

2')=2)

3') $\{b_n\}$ — ограничен,

То (C) — сходится.

Выведем признак Абеля из признака Дирихле:

$\exists \lim_{n\to\infty} b_n = L$, $b_n = L + b'_n$, $b'_n \to 0$. Отсюда $a_n b_n = La'_n + a_n b'_n$. $\sum_{n=1}^{\infty} La_n$ сходится по условию, $\sum a_n b'_n$ сходится по Дирихле.

$$(C)\sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos nx,\ \ (S)\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

Если b_n удовлетворяют 2) и 3) то ряды $(C), (S)$ сходятся.

Чтобы воспользоваться признаком Дирихле, необходимо доказать ограниченность частичных сумм $U_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \cos kx;\ V_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \sin kx$:

Умножим $U_n(x)$ на $2\sin\frac{x}{2}$:

$$U_n(x)\cdot 2\sin\frac{x}{2} = \sum_{k=1}^{n} 2\sin\frac{x}{2}\cos nx = \sum_{k=1}^{n}\left[\sin(k+\frac{1}{2})x - \sin(k-\frac{1}{2})x\right] =$$

$$\left(\sin\frac{3}{2}x - \sin\frac{x}{2}\right)+\left(\sin\frac{5x}{2} - \sin\frac{3x}{2}\right)+...+\left(\sin(n+\frac{1}{2})x - \sin(n-\frac{1}{2})x\right) = \sin(n+\frac{1}{2})x - \sin\frac{x}{2}$$

Откуда

$$|U_n(x)| \leq \frac{1}{|sin\frac{x}{2}|}$$

При условии, что $x \neq 2k\pi$

4.5 Ряды с комплексными членами

По определению комплексного числа очевидно, что $\begin{cases}|x| \\ |y|\end{cases} \leq |z| \leq |x| + |y|$.

Введем расстояние: $|z - w| = \rho(z, w)$.

$z_n = x_n + iy_n$

$\begin{cases}|x - x_n| \\ |y - y_n|\end{cases} \leq |z - z_n| \leq |x - x_n| + |y - y_n|$

$z \to z_n$, когда $\rho(z_n, z) \to 0$, $|z - z_n| \to 0$.

Отсюда $z - z_n \Leftrightarrow Re\ z_n \to Re\ z$, и $Im\ z_n \to Im\ z$

Пример. $c_n = a_n + ib_n$, $(C)\sum_{n=1}^{n} c_n$

$S_n = c_1 + ... + c_n$

$A_n = a_1 + ... + a_n\ |(A)\sum a_n$

$B_n = b_1 + ... + b_n\ |(B)\sum b_n$

$S_n = A_n + iB_n$

Пример. $(C*)\sum |c_n|$

$|a_n| \leq |c_n| \leq |a_n| + |b_n|$

Если ряд $C*$ сходится, то ряды A и B абсолютно сходится.

Если A и B сходятся, то ряд $(C*)$ абсолютно сходятся.

Абсолютная сходимость ряда (C) равна одновременной абсолютной сходимости рядов (A) и (B).

4.6 Свойства сходящихся рядов

1) Сочетательное свойство:

$(A)\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Мы хотим расставить в нем скобки и посмотреть, как он себя ведет. Формально мы выделяем некоторую последовательность номеров: $n_0 = 0 < n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$. То есть расставим скобки так: $(a_1+\ldots+a_{n_1})+(a_{n_1+1}+\ldots+a_{n_2})+\ldots$, более формально:

$$b_k = \sum_{n_{k-1}<i\leq n_k} = (a_{n_{k-1}+1}+\ldots+a_{n_k})$$

Получили ряд $(B)\sum_1^{\infty} b_k$.

Теорема. *(сочетательное свойство сходящихся рядов)*
Если (A) сходится, то (B) — сходится и имеет ту же сумму.

Доказательство. Введем частичные суммы ряда (A) : $S_n = a_1+\ldots+a_n$ и пусть $T_k = b_1+\ldots+b_k$:

$$T_k = (a_1+\ldots+a_{n_1})+(\ldots+a_{n_2})+\ldots+(\ldots+a_{n_{k-1}})+(a_{n_{k-1}+1}+\ldots+a_{n_k}) = S_{n_k}$$

Если мы уберем скобки, то мы получим сумму S_{n_k}.

Ну а если вся последовательность сходится, то и подпоследовательность сходится к какому-то пределу. $S_n \to S$. Поэтому ряд (B) сходится и имеет ту же сумму. □

Теорема доказана, скобки расставлять можно. А вот убирать НЕЛЬЗЯ! На примере $(1-1)+(1-1)+\ldots$ — ряд сходится. А если мы уберем скобки, то получим расходящийся ряд.

Упражнение. Если ряд (A) положительный, то скобки убирать можно.

Упражнение. Предположим, что выполняется $\begin{cases} n_k - n_{k-1} < C\forall k \\ a_n \to 0 \end{cases}$, то из сходимости (B) следует сходимость (A)

2)Перестановочное свойство:

$(A)\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\omega : \mathbb{N}\to\mathbb{N}$, биекция. Рассмотрим натуральный ряд. Поступаем так: берем 1, берем $\omega(1)$ и его ставим на первое место, т.е. на первом месте нового числового ряда появляется $a_{\omega(1)}$. Аналогично с 2, ..., ω. Получаем ряд $a_{\omega(1)},\ldots,a_{\omega(k)}$. То есть мы образуем ряд $(B)\sum b_k$, где $b_k = a_{\omega(k)}$ $(*)$.

Равенство (*) можно переписать как $\omega(k) = n \Leftrightarrow k = \omega^{-1}(n)$. Тогда $a_n = b_{\omega^{-1}(n)}$.

$(A)\sum_{n=1}^{\infty} a_n,\ a_n \geq 0$.

$S_n = a_1+\ldots+a_n$ возрастает. Пусть S — сумма ряда, неважно, конечная или бесконечная. А теперь предположим, что $E \in \mathbb{N}$, E — конечное. $S_E = \sum_{n\in E} a_n$. В частности, $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = S_{\{1,2,\ldots,n\}}$.

Лемма. $S = \sup\left\{ S_E | \begin{array}{c} E\subset\mathbb{N} \\ E - \textit{кон.} \end{array} \right\}$

Замечание. Правая часть этого ряда сохраняется при перестановке слагаемых.

Доказательство. $\bar S = \sup\left\{S_E \middle| \begin{matrix} E \subset \mathbb{N} \\ E - \text{кон.} \end{matrix}\right\}$. $S_n = S_{\{1,2,\dots,n\}} \le \bar S$.

$S = \lim S_n \le \bar S$. Отсюда вытекает $S \le \bar S$ (1).

Теперь докажем неравенство в другую сторону:

$E \in \mathbb{N}$, E — конечное. $E = \{n_1, \dots n_r\}$. Не умаляя общности можно считать, что $n_1 < \dots < n_r$. $S_E = a_{n_1} + \dots + a_{n_r}$. Здесь слагаемые идут не подряд. Добавим теперь сюда недостающие:

$$S_E = a_{n_1} + \dots + a_{n_r} \le a_1 + \dots + a_{n_r} = S_{n_r} \le S = \sup S_n$$

Таким образом, $S_E \le S$. Откуда $\sup\left\{S_E \middle| \begin{matrix} E \subset \mathbb{N} \\ E - \text{кон.} \end{matrix}\right\} \le S \Rightarrow \bar S \le S$, значит, $S = \bar S$. $\square$

Теорема. $(A) \sum a_n$, $\omega : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, *и ряд* $(B) \sum b_k$ *получается перестановкой. Если ряд A абсолютно сходится, то переставленный ряд тоже абсолютно сходится и имеет ту же сумму.*

Доказательство. Рассмотрим $(A^*) \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, $(B^*) \sum_{n=1}^{\infty} |b_k|$, где $|b_k| = |a_{\omega(k)}|$.

Согласно лемме,

$$S^* = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sup\left\{S_E \middle| \begin{matrix} E \subset \mathbb{N} \\ E - \text{кон.} \end{matrix}\right\},\ S_E = \sum_{n \in E} |a_n|$$

Абсолютная сходимость ряда (B) доказана (хз, как).

$(a_n)_+ = \max(0, a_n)$, $(a_n)_- = \max(0, -a_n)$

$(b_k)_+ = (a_{\omega(k)})_+$, $(b_k)_- = (a_{\omega(k)})_-$

$\sum b_k = \sum (b_k)_+ - \sum (b_k)_-$, а $\sum a_n = \sum (a_n)_+ - \sum (a_n)_-$. Разности одинаковы, следовательно, суммы тоже одинаковы. $\square$

Для условно сходящихся рядов теорема не верна!

Пример.

$$1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \dots + \underbrace{\frac{1}{k} - \frac{1}{k} + \dots + \frac{1}{k} - \frac{1}{k}}_{k \text{раз}}$$

Четная частичная сумма равна нулю, а нечетная — $\frac{1}{k}$.

Теперь переставим слагаемые так, чтобы сначала все дроби с одинаковым знаменателем шли с плюсом, а затем с минусом:

$$1 - 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \dots + \underbrace{\frac{1}{k} + \frac{1}{k} + \dots - \frac{1}{k} - \frac{1}{k}}_{k \text{раз}}$$

Расставим скобки:

$$1 - 1 + (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}) - (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}) - (\frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{4} - \dots) + \underbrace{(\frac{1}{k} + \frac{1}{k} + \dots - \frac{1}{k} - \frac{1}{k})}_{k \text{раз}}$$

что равно

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots$$

то есть данный ряд расходится.

Упражнение. Написать явно биекцию ω.

Теорема. *(Римана). $\sum_{n=1}^{\infty}$ — условно сходящийся и случайное $S \in \hat{\mathbb{R}}$. Тогда исходный ряд можно переставить так, чтобы сумма была S или ряд расходился.*

4.7 Формула Эйлера-Маклорена

$S_t = f(1) + f(2) + ...f(t)$, где f непрерывная на $[1, +\infty)$.

Если $f \in C^2$, то формула нам известна: это просто переосмысленная формула трапеции (на промежутке от $[a, b]$):

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{f(x_0) + f(x_n)}{2}h + h\sum_{k=1}^{t-1} f(x_k) + \rho_t$$

где $\rho_n = -\frac{h^2}{2}\int_a^b f''(x)\left\{\frac{x-a}{h}\right\}\left(1 - \left\{\frac{x-a}{h}\right\}\right)dx$.

Теперь мы её переосмыслим: $a = m,\ b = n,\ h = 1$. Таким образом, $\left\{\frac{x-a}{h}\right\} = \{x - m\} = \{x\}$. Отсюда наша формула примет вид:

$$\int_m^n f(x)dx = \frac{f(m) + f(n)}{2} + \sum_{m<k<n} f(k) - \frac{1}{2}\int_m^n f''(x)\{x\}(1 - \{x\})dx$$

Добавим к этому равенству $\frac{f(m)+f(n)}{2}$:

$$\sum_{k=m}^{n} f(k) = \int_m^n f(x)dx + \frac{f(m) + f(n)}{2} + \frac{1}{2}\int_m^n f''(x)\{x\}(1 - \{x\})dx$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) = \int_1^n f(x)dx + \frac{f(1) + f(n)}{2} + \frac{1}{2}\int_1^n f''(x)\{x\}(1 - \{x\})dx$$

Следствие:

Предположим, что $\int_1^\infty |f''(x)|dx < +\infty$. Тогда $\int_1^n = \int_1^\infty - \int_n^\infty$. Откуда

$$S_n = \int_1^n f(x)dx + \frac{f(n)}{2} + \frac{1}{2}(f(1) + \int_1^\infty f''(x)\{x\}(1 - \{x\})dx) - \frac{1}{2}\int_n^\infty f''(x)\{x\}(1 - \{x\})dx$$

Для этого случая формула Эйлера-Маклорена приобретает следующий вид:

$$S_n = \int_1^n f(x)dx + \frac{f(n)}{2} + C - \frac{1}{2}\int_n^\infty f''(x)\{x\}(1 - \{x\})dx$$

(#define ЭМак Формула_Эйлера-Маклорена_для_некоторого_предположения)

Если обозначить $\frac{1}{2}\int_n^\infty f''(x)\{x\}(1 - \{x\})dx = \sigma_n$, то $|\sigma_n| \le \frac{1}{8}\int_n^\infty |f''(x)|dx$.

Пример. Асимптотика частичных сумм гармонического ряда:

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}$$

Здесь $f(x) = \frac{1}{x}$, $f''(x) = \frac{2}{x^3}$

Воспользуемся формулой:

$$S_n = \int_1^n \frac{dx}{x} + \frac{1}{2n} + \gamma + \sigma_n$$

где $\sigma_n = -\frac{1}{2}\int_n^\infty \frac{2}{x^3}\{x\}(1-\{x\})dx \le \frac{1}{8}\int_n^\infty f''(x)dx$, таким образом, $|\sigma_n| \le \frac{1}{8n^2}$.
Оценим:

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{2}\int_n^\infty \frac{2}{x^3}\{x\}(1-\{x\})dx < \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$$

Таким образом, константа Эйлера γ:

$$0,5 < \gamma < 0,625$$

И имеет примерное значение $\gamma = 0,5772...$
Таким образом, $S_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n^2})$

Пример. Задача о выяснении асимптотики факториала.

Как ведет себя последовательность $n!$? Мы знаем, что $\frac{A^n}{n!} \to 0$.

Как же найти асимптотику? Здесь используется прием, который можно считать стандартным: когда речь идет о быстро изменяющейся функции, то вместо ее асимптотики стараются найти асимптотику её логарифма. Сделаем так:

$\ln n! = \ln 1 + \ln 2 + ... + \ln n$. А это наша знакомая функция $f(x) = \ln x$, а $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$.

Займемся асимптотикой логарифма:

$$S_n = \sum_{k=1}^n \ln k = \int_1^n \ln x dx + \frac{\ln n}{2} + C + \sigma_n$$

где

$$\sigma_n = -\frac{1}{2}\int_n^\infty f''(x)\{x\}(1-\{x\})dx = \frac{1}{2}\int_n^\infty$$

Лемма. *$a > 0$,*

$$\int_0^1 \frac{t(1-t)}{(a+t)^2}dt \le \frac{1}{6}\frac{1}{a(a+1)} \quad (*)$$

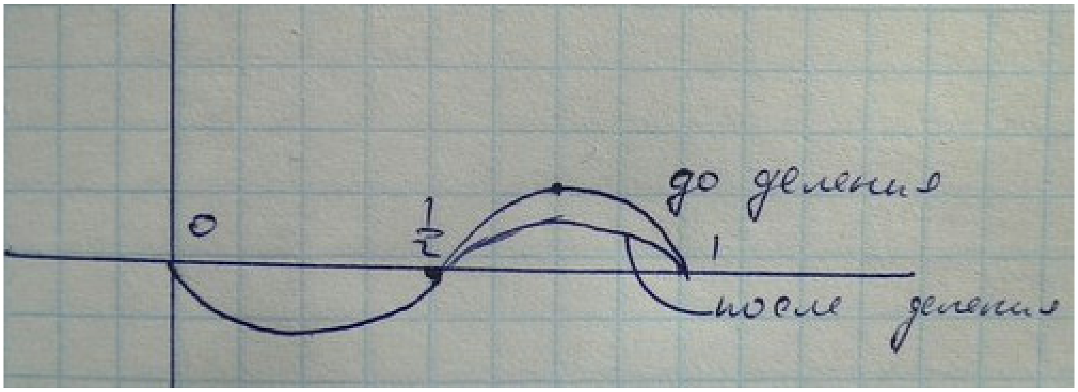
Доказательство.

$$\int_0^1 \frac{t(1-t)}{(t+a)}dt = \int_0^1 \frac{t(1-t)-\frac{1}{6}}{(t-a)^2}dt + \frac{1}{6}\int_0^1\int_0^1 \frac{dt}{(t+a)^2}$$

Наша задача - проверить, что первый интеграл отрицателен. Для этого интегрируем по частям.

Сделаем замену: $dv = (t(1-t)-\frac{1}{6})dt$. Сделав $(-\frac{1}{6})$, мы спустили график таким образом, чтобы $\int_0^1 dv = 0$.

$V(t) = \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} - \frac{t}{6}$



Отсюда

$$\int_0^1 \frac{dv}{(t+a)^2} = \frac{v(t)}{(t+a)^2}|_0^1 + 2\int_0^1 \frac{v(t)}{(t+a)^3}dt$$

Смотрим рисунок! После деления на t график опустится на правой части больше, чем на левой, так как его разделят на большее t. Таким образом, положительная часть будет меньше отрицательной и, следовательно, наше интеграл отрицателен. $\square$

Таким образом,

$$\sigma_n = \frac{1}{2}\int_n^\infty \frac{\{x\}(1-\{x\})}{x^2}dx = \frac{1}{2}\sum_{k=n}^\infty \int_k^{k+1} \frac{\{x\}(1-\{x\})}{x^2}dx$$

Сделаем замену $x = k + t$, где $0 \le t \le 1$:

$$\frac{1}{2}\sum_{k=n}^\infty \int_0^1 \frac{t(1-t)}{(k+t)^2}$$

И применим лемму к каждому интегралу:

$$\frac{1}{2}\sum_{k=n}^\infty \frac{1}{6}\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{12}\sum_{k=n}^\infty (\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}) = \frac{1}{12n}$$

Вернемся к нашей оценке: $\sigma_n \le \frac{\Theta_n}{12n}$.
Таким образом,

$$\sum_{k=1}^n \ln k = \int_1^n \ln x dx + \frac{1}{2}\ln n + C + \frac{\Theta_n}{12n}$$

Так как $\int \ln x = x\ln x - \int dx = x\ln x - x$

$$S_n = n\ln n - n + 1 + \frac{1}{2}\ln n + C + \frac{\Theta_n}{12n}$$

Пропотенцируем(поздно, шоколадку забрали):

$$n! = e^{S_n} = n^n \cdot e^{-n} \cdot e^{\frac{1}{2}\ln n} \cdot e^{1+C} \cdot e^{\frac{\Theta_n}{12n}} = (\frac{n}{e})^n \sqrt{n} K e^{\frac{\Theta_n}{12n}} \quad (+)$$

Вспомним формулу Валлиса:

$$\frac{1}{k}\left(\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}\right)^2 \to \pi$$

Если извлечь квадратный корень, то $A_k \sim \sqrt{k\pi}$.
$(2k)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot ... \cdot 2k = 2^k k!$
$(2k-1)!! = \frac{(2k)!}{(2k)!!} = \frac{(2k)!}{2^k k!}$.
Подставив в (и расписав по формуле (+)):

$$A_k\left(\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}\right) = \frac{(2^k)^2 \cdot (k!)^2}{(2k)!} = \frac{2^{2k}(\frac{k}{e})^{2k} k K^2 e^{\frac{\Theta_k}{6k}}}{(\frac{2k}{e})^{2k}\sqrt{2k}Ke^{\frac{\Theta_{2k}}{2Hk}}} = \sqrt{\frac{k}{2}}K \cdot e^{\text{б.м.}}$$

Таким образом, $A_k = \sqrt{\frac{k}{2}}K \cdot e^{\text{б.м.}} \sim \sqrt{k\pi}$.

$$\frac{\sqrt{\frac{k}{2}}Ke^{\text{б.м.}}}{\sqrt{k\pi}} \to 1$$

и перейдя к пределу, $\frac{K}{\sqrt{2\pi}} = 1 \Leftrightarrow K = \sqrt{2\pi}$.
Результируя, скажем, что

$$n! = (\frac{n}{e})^n \sqrt{2\pi n} e^{\frac{\Theta_n}{e^{12n}}}$$

Если отбросить последний множитель, который очевидно стремится к единице, получим асимптотическую формулу

$$n! \sim (\frac{n}{e})^n \sqrt{2\pi n}$$

И, наконец,

$$(\frac{n}{e})\sqrt{2\pi n}e^{\frac{1}{12n+1}} < n! = (\frac{n}{e})^n \sqrt{2\pi n}e^{\frac{\Theta_n}{e^{12n}}} < (\frac{n}{e})^n\sqrt{2\pi n}e^{\frac{1}{12n}}$$

5 Функциональные последовательности и ряды

5.1 Равномерная сходимость функциональных последовательностей

У нас есть последовательность функций $\{f_n\}_{n\geq 1}$, которые определены на (пока еще) произвольном множестве X. $X \subset Dom\ f_n,\ \forall n$. При этом $\forall x \in X\ \{f_n(x)\}_{n\geq 1}$

Определение. Если $\forall x \in X\ \exists$ конечный $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$, то $\{f_n\}$ поточечно сходится на X. Таким образом, получаем функцию $x \to \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, где $f(x)$ называется предельной функцией.

Обозначение: $f_n \to f$ (f_n поточечно сходится к f)

Расшифруем это определение на языке неравенств:
$\forall x \in X,\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N = N_x$ такое, что $\forall n > N\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.
Однако, как оказалось, такое определение неудобно.
Простейший

Пример. $f_n(x) = x^n\ X = [0,1]$

$$f(x) \to \begin{cases} 0 & \text{при } x < 1 \\ 1 & \text{при } x = 1 \end{cases} = f(x)$$

Введем еще одно определение функциональной сходимости:

Определение. Последовательность $\{f_n\}$ равномерно сходится на X к f, если $\alpha_n = \sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| \to_{n\to\infty} 0$ (1)

Равномерная сходимость будет обозначаться $f_n \rightrightarrows f$ на X

Несколько замечаний:

1) $\forall x\ |f_n(x) - f(x)| \le \alpha_n \to 0$, то есть из равномерной сходимости вытекает поточечная.

2) продолжение следует.

Расшифруем определение равномерной сходимости на языке неравенств:

Лемма. *$f_n \rightrightarrows f$ на X, тогда и только тогда, когда $\forall\varepsilon > 0\ \exists N$, такое, что $\forall n > N$ верно $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\ \forall x \in X$.*

Доказательство. Пусть $f_n \rightrightarrows f$ на X, $\alpha_n \to 0$.

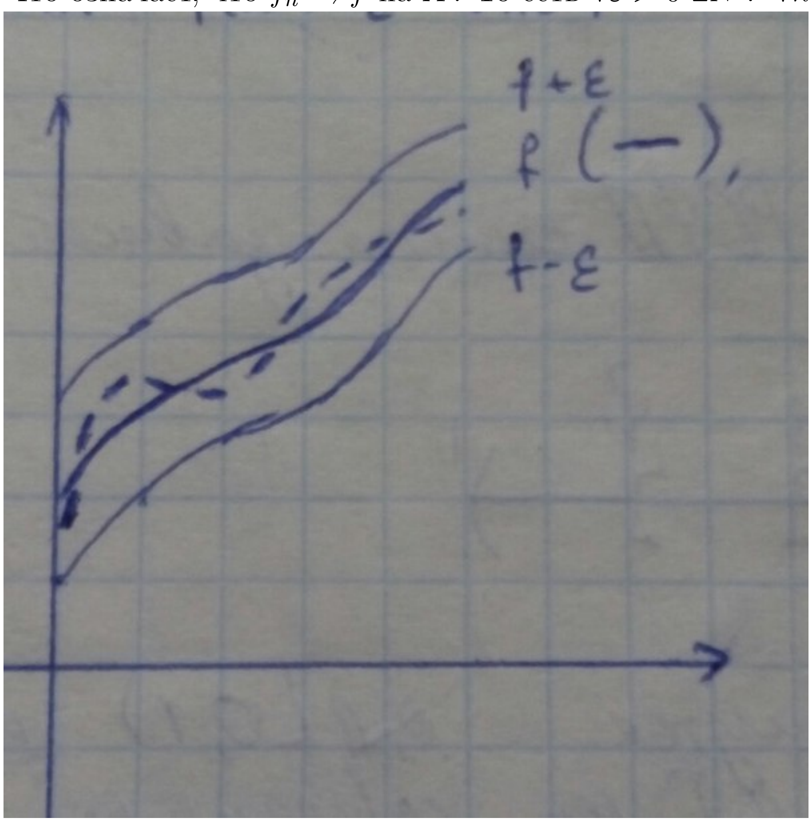
Тогда $\varepsilon > 0\ \exists N:\ \forall n > N$ верно $\alpha_n < \varepsilon$, откуда следует, что $\forall x\ |f_n(x) - f(x)| \le \alpha_n < \varepsilon$

И в обратную сторону: предположим, что $\forall x\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, откуда следует, что $\alpha_n = \sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon < 2\varepsilon$. □

Замечание. $\alpha_n = \sup |f_n(x) - f(x)|$ называется Чебышёвским уклонением.

$\sup_{x\in X} |f(x) - g(x)|$ — Чебышёвское уклонение f от g на X.

Что означает, что $f_n \rightrightarrows f$ на X? То есть $\forall\varepsilon > 0\ \exists N:\ \forall n > N\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

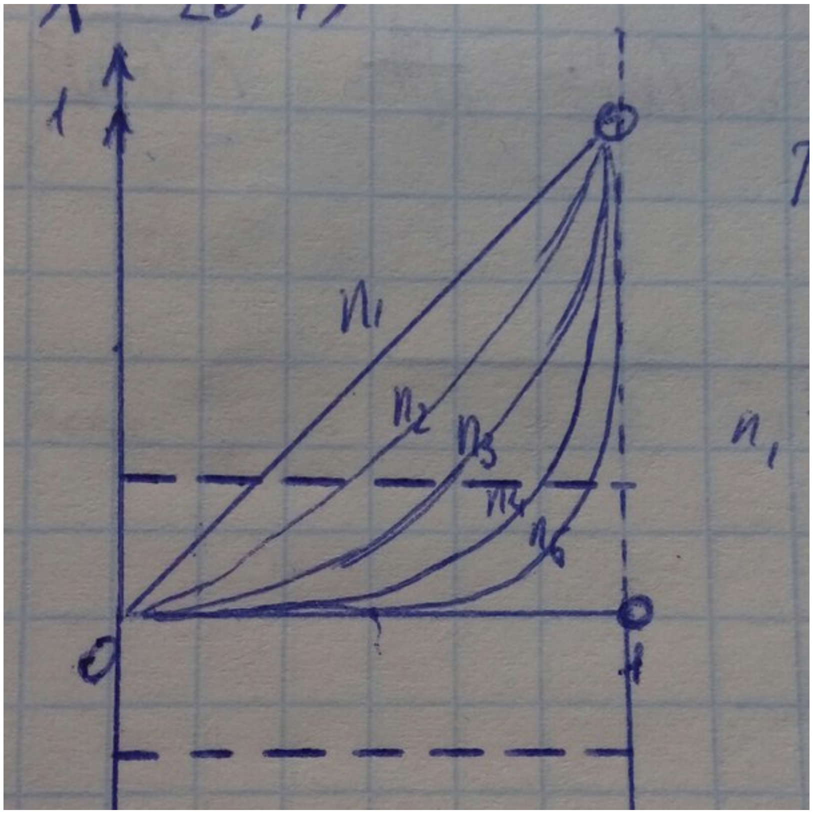


то есть $f(x) - \varepsilon < f_n(x) < f(x) + \varepsilon$.

Пример.

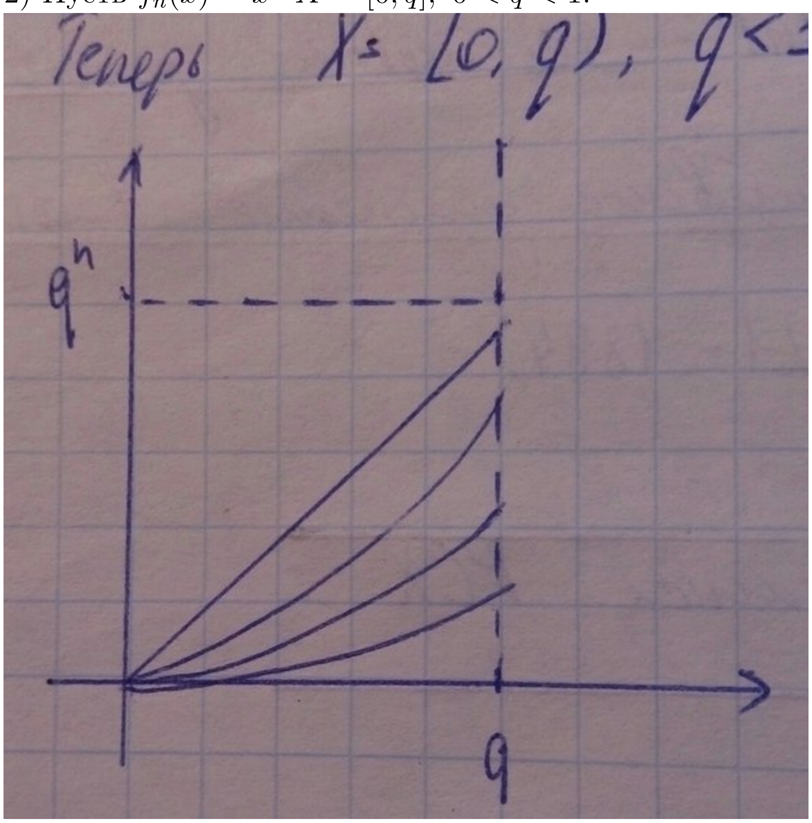
1) $f_n(x) = x^n$ $X = [0, 1)$

Если мы возьмем любое $0 \le x < 1$, то $x^n \to 0$, то есть наша последовательность функций поточечно сходится к нулю.



И если взять маленький промежуток, то ни одна из этих функций в него не войдет. Таким образом, здесь есть лишь поточечная сходимость, но нет равномерной.

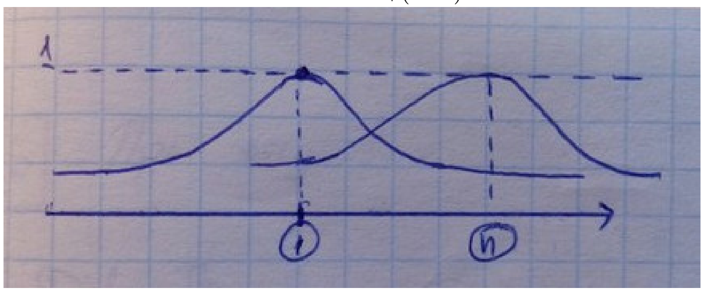
2) Пусть $f_n(x) = x^n$ $X = [0, q]$, $0 < q < 1$.



Тогда равномерная сходимость будет, так как $x^n < q^n \; \forall x \in X$, а значит, $\alpha_n = \sup_{x\in[0,q]} |x^n -$

$0| \le q^n$.

3) Теперь $X = \mathbb{R}$ $f_n(x) = \frac{1}{1+(x-n)^2}$



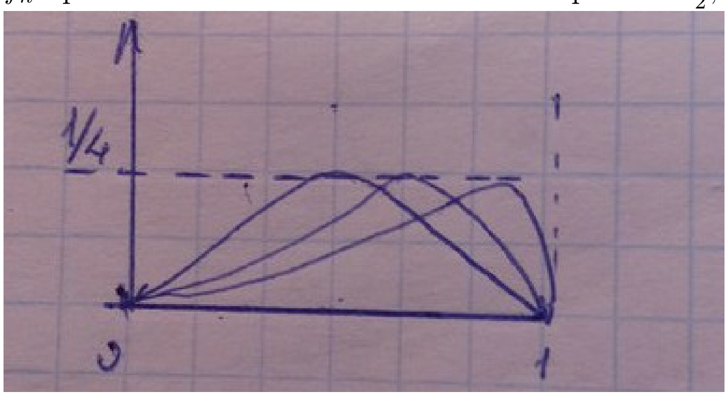
4) $f_n(x) = x^n(1-x^n)$ $X = [0,1]$

Отвлечение: если взять $t(1-t)$ на $[0,1]$, то максимум будет посередине и очевидно равен $\frac{1}{4}$

Проверим поточечную сходимость: $f_n(x) \to 0$ $\forall x \in [0,1]$.

А что можем сказать о равномерной сходимости?

f_n принимает максимальное значение при $x^n = \frac{1}{2}$, то есть $x = 2^{-\frac{1}{n}}$



$X \subset \mathbb{R}$, a — точка сгущения X, $a \in \mathbb{R}$. Пусть на X заданы $f_n(x)$, которые имеют конечные пределы $\lim_{x\to a} f_n(x) = L_n \in \mathbb{R}$. Спрашивается, если есть такой предел, то обязаны ли сходиться L_n, и куда?

Теорема. *(о равенстве повторных пределов)$X \subset \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, a — точка сгущения, f_n определены на X, $\exists$ конечный предел $\lim_{x\to a} f_n(x) = L_n$ $\forall n = 1, 2, \ldots$. Если $f_n \rightrightarrows f$ на X, то:*

1) $\exists$ конечный $\lim_{n\to\infty} L_n = L$

2) $f(x) \to_{x\to a} L$

Что можно переписать как $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{n\to\infty} L_n$:

$$\lim_{x\to a}(\lim_{n\to\infty} f_n(x)) = \lim_{n\to\infty}(\lim_{x\to a} f_n(x)) = L$$

Доказательство. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — фундаментальна, тогда и только тогда, когда $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N :$ $\forall n > N, m > N :$ $|x_n - x_m| < \varepsilon$.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и будем искать N. Нужно найти такое N, начиная с которого $|L_n - L_m| <\varepsilon$.

$f_n \rightrightarrows f$ на X, откуда:

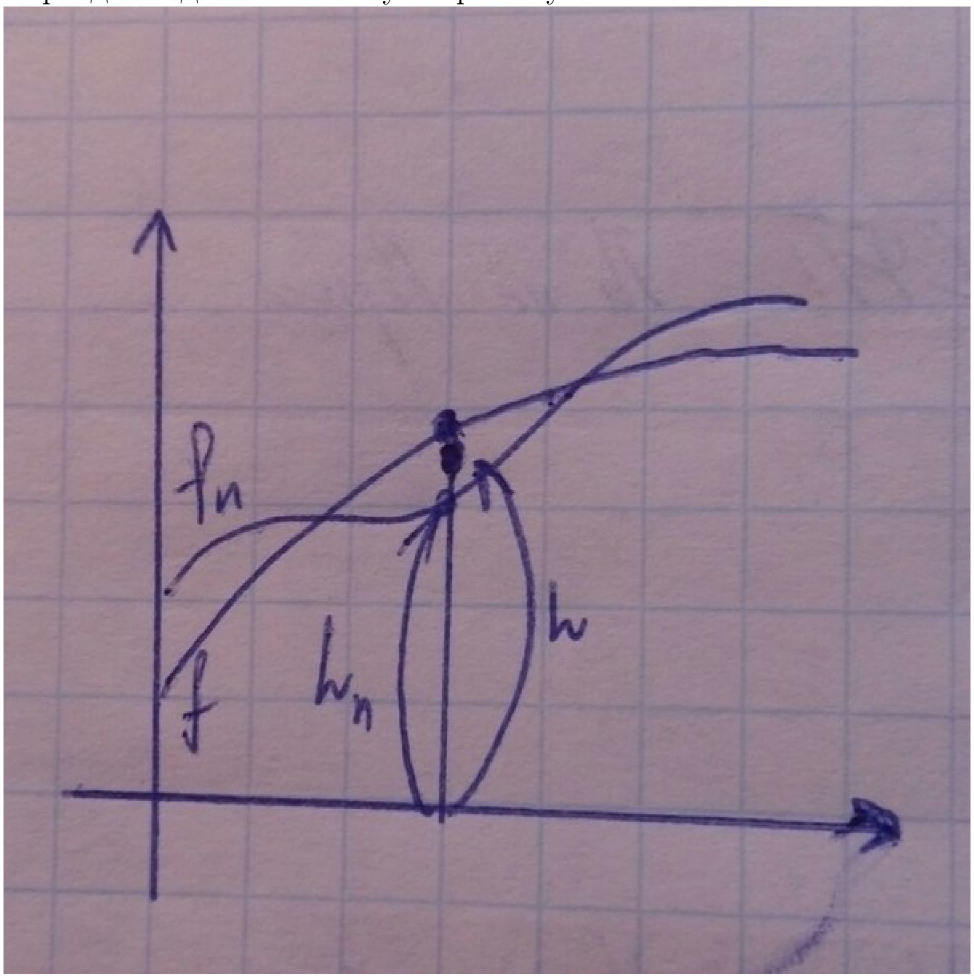
$\exists N :$ $\forall n > N$ $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ $\forall x \in X$ и $\forall m > M$ $|f_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ $\forall x \in X$. Отсюда, $|f_n(x) - f_m(x)| = |(f_n(x) - f(x)) + (f(x) - f_m(x))| < |...| + |...| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

$\forall n, m > N$ $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ $\forall x \in X$ (3)

Таким образом, $|L_n - L_m| \leq \varepsilon$.

Следовательно, последовательность L_n фундаментальна. Первый пункт теоремы доказан.

Перейдем к доказательству второго пункта:



Докажем с помощью эпсилон-на-три рассуждения.

Заменим f на f_n с малой погрешностью и перейдем от L к L_n. Тогда $f(x) - L = f_n(x) - L_n +$ малое. Теперь зафиксируем произвольное (но очень большое) n, так, чтобы погрешность не превышала $\frac{\varepsilon}{3}$. Реализуем это:

Фиксируем $\varepsilon > 0$.

$\exists N_1 : \ \forall n > N_1$ верно $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \ \forall x \in X$ (4).

$\exists N_2 : \ \forall n > N_2$ верно $|L_n - L| < \frac{\varepsilon}{3} \ \forall x \in X$ (5).

$N > N_1 + N_2$, тогда справедливы оба неравенства.

Оценим:

$|f(x) - L| = |(f(x) - f_n(x)) + (f_n(x) - L_n) + (L_n - L)| < |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - L_n| + |L_n - L)| < \frac{2\varepsilon}{3} + |f_n(x) - L_n|$ (6). Обращаем внимание, что это неравенство справедливо для любых x.

$\exists V(a) \ \forall x \in X \cap \dot{V}(a) : \ |f_n(x) - L_n| < \frac{\varepsilon}{3}$. Подставив это в (6), получим, что $|f(x) - L| < \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3}$ при $x \in X \cap \dot{V}(a)$. $\square$

Следствие:

Теорема. *(Стокса-Зайделя)*$X \in \mathbb{R}$, *f_n определены на X и непрерывны в $a \in X$. Если $f_n \rightrightarrows f$ на X, то f — непрерывна в точке a.*

Доказательство. $L_n = f_n(a)$, $f_n(x) \to_{x\to a} L_n$, $L_n(x) = f_n(a) \to_{n\to\infty} f(a) = L$. Теорема утверждает, что $f(x) \to_{x\to a} L = f(a)$. А так как f_n непрерывны в точке a, то и $f(x)$ непрерывны в a. □

Возьмем f_n определенные на $X =< a, b >$.

Определение. $f_n \to f$ сходится компактно, на $< a, b >$, если $\forall [c, d] \subset < a, b >$ $f_n \rightrightarrows f$ на $[c, d]$.

Если взять за $< a, b >$ промежуток $[0, 1)$ и $f_n(x) = x^n$, $f_n(x) \to 0$.

Пример. $f_n(x) = \frac{x^n}{n!}$, $X = [0, +\infty)$. Эта последовательность равномерно на оси не сходится, но компактно — сходится.

Теорема. *(уточненная Стокса-Зайделя): f_n определены на $< a, b >$, f_n непрерывны в $x_0 \in < a, b >$. Если $f_n \to f$ компактно на $< a, b >$, то f непрерывна в точке x_0.*

Доказательство. Будем считать, что $a < x_0 < b$. Возьмем любые c, d, такие, что $a < c < x_0 < d < b$. Теперь будем рассматривать функции только на промежутке $[c, d]$. Условиям $x_k \to x_0 \Rightarrow f_n(x_k) \to f_n(x_0)$ верны как для самих f_n так и для их сужений на $[c, d]$. То есть сужение f непрерывно в x_0, что по теореме Стокса-Зайделя дает непрерывность в x_0. □

Эти теоремы верны в любом метрическом пространстве. Доказательства их аналогичны.

Мы уже доказывали теорему о равенстве повторных пределах. Теперь докажем теорему для других случаев:

Теорема. *(о предельном переходе под знаком интеграла)*

f_n непрерывны на $[a, b]$. Если $f_n \rightrightarrows f$ на $[a, b]$, то $\int_a^b f_n(x)dx \to \int_a^b f(x)dx$, что можно переписать как

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx$$

Доказательство. f — непрерывна. Оценим разность интегралов:

$$|\int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx| \le \int_a^b |f_n(x)dx - f(x)dx|dx <$$
$$< \int_a^b \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)|dx = \alpha_n(b-a) \to_{n\to\infty} 0$$

□

Пример. $f_n(x) = nx^n(1 - x^n)$ на $[0, 1]$. $f(x) \equiv 0$.

$$\int_0^1 f_n(x)dx = \frac{n^2}{(n+1)(2n+1)} \to \frac{1}{2}$$

но при этом предел данных функций — 0. (что-то вообще непонятный пример, потому что я пропустил половину рассуждений, ну да ладно, на экзамене он примеры не спрашивает).

Теорема. *(о предельном переходе под знаком производной)*

f_n непрерывно дифференцируемы на $< a, b >$ и выполняются следующие условия:

1)$f_n \to_{n\to\infty} f(x)\ \forall x \in < a, b >$.

2) $f_n'(x) \rightrightarrows \varphi(x)$ на $< a, b >$.

Тогда f непрерывно дифференцируема на $< a, b >$ и $f'(x) = \varphi(x)$. Последнее равенство можно переписать как $(\lim_{n\to\infty} f_n(x))' = \lim_{n\to\infty} f_n'(n)$.

Доказательство. Возьмем $c \in < a, b >$ и $x \in < a, b >$ (произвольные). По предыдущей теореме функции f_n' можно переставлять интегрирование по промежутку $[c, x]$ и предельный переход: $\int_c^x \varphi(t)dt = \lim_{n\to\infty} \int_c^x f_n'(t)dt$. (здесь как $c > x$, так может быть и $x > c$). А теперь мы можем посчитать

$$\int_c^x f_n'(t)dt = f_n(x) - f_n(c) \to_{n\to\infty} f(x) - f(c)$$

Отсюда $\lim_{n\to\infty} \int_c^x f_n'(t)dt = f(x) - f(c) = \int_0^x \varphi(t)dt$. Правая часть дифференцируема, слева - функция минус константа, тоже дифференцируема, продифферецировав, получим $f'(x) = \varphi(x)$ и непрерывна по теореме Стокса-Зайделя. □

Замечание. Теорема остается верной, если равномерную сходимость заменить компактной.

Доказательство. Если $a < x < b$, то нужно взять $a < c < x < d < b$.

Если речь о $x = a \in [a, b >$, то нужно взять $[a, d],\ a < d < b$, и применить предыдущую теорему. □

5.2 Свойства равномерно сходящихся рядов

Пусть есть последовательность функций $\{u_n\}$, где все u_n определены на X.

Определение. $S_n(x) = u_1(x) + ... + u_n(x)$. Пара последовательностей $\{u_n\}\{S_n\}$ называется функциональным рядом, котороый обозначается как

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

В каждой точке x мы получаем числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, чьи частичные суммы и есть $S_n(x)$. (пока обозначим этот ряд (1)). По определению он сходится поточечно, если поточечно сходится его последовательность частичных сумм при каждом x.

$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сумма ряда (1).

Пример. $\sum_{n=1}^{\infty} x^n = x + x^2 + x^3 + ...$

Также мы будем рассматривать ряды, где члены ряда нумеруются $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$.

Определение. Ряд (1) называется равномерно сходящимся на X, если $S_n(x) \rightrightarrows_{n\to\infty} S(x)$ на X.

$S(x) = S_k(x) + r_k(x)$.

1) если ряд (1) равномерно сходится, то его остатки равномерно стремятся к нулю: $r_k(x) = S(x) - S_k(x) \rightrightarrows 0$.

$\sup |r_n(x)| \sup |S(x) - S_k(x)| \to 0$.

Отсюда вытекает необходимое условие равномерной сходимости:
$r_k = U_{k+1}(x) + ...$ равномерно сходится на X
$r_{k-1}(x) = U_k(x) + U_{k+1}(x) + ...$
$r_{k-1}(x) - r_k(x) = U_k(x) \Rightarrow U_k(x) \rightrightarrows 0$.

Теорема. *(признак Вейерштрасса равномерной сходимости)(0)*
Пусть (1) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, u_n *определены по крайней мере на* X.
Если:
1) $|U_n(x)| \leq C_n \ \forall x \in X, \ n = 1, 2, ...$
2) $\sum_{n=1}^{\infty} c_n < +\infty$
Тогда ряд (1) *равномерно сходится.*

Доказательство. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{|U_n(x)|}_{\leq C}$ сходится $\forall x$. То есть ряд (1) поточечно сходится.
Тогда мы имеем $\forall n \ S(x) = S_n(x) + r_n(x)$.
$S(x) - S_n(x) = r_n(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + ...$
Тогда $|S(x) - S_n(x)| = |r_n(x)| \leq \sum_{k>n} |u_k(x)| \leq \sum_{k>n}^{\infty} c_k = \gamma_n \to_{n\to\infty} 0$.
Отсюда $|S(x) - S_n(x)| \leq \gamma_n \to_{n\to\infty} 0$ и $\sup_x |S(x) - S_n(x)| \leq \gamma_n \to_{n\to\infty} 0$. $\square$

Подходит только для абсолютно сходящихся рядов.

Замечание. Пусть $u_n(x) > 0$, а $(1) u_1(x) - u_2(x) + ... + (-1)^{n-1} u_n(x) + ...$
a) $u_1(x) \geq u_2(x) \geq ...$
b) $u_n(x) \to_{n\to\infty} 0 \ \forall x$
$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ сходится поточечно.
Если $u_n(x) \rightrightarrows_{n\to\infty} 0$ на X, то (1) равномерно сходится на X

Доказательство. $|r_n(x)| \leq u_{n+1}(x)$ согласно замечанию после доказательства признака Лейбница.
$|S(x) - S_n(x)| \leq u_{n+1}(x)$.
$\sup |S(x) - S_n(x)| \leq \sup_X u_{n+1}(x) \to 0$.
По определению S_n равномерно стремится к S. $\square$

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = S(x), \ [a, b]$
$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x) dx = \int_a^b s(x) dx$.

Пример. $S(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + ... + (-1)^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$.
Из признака Вейерштрасса $|(-1)^n x^n| \leq t^n = c_n$, $0 \leq t < 1$.
Сумма этого ряда $S_n(x) = \frac{1 - (-1)^{n+1} x^{n+1}}{1+x} \to \frac{1}{1+x}$

$$\int_0^t \frac{dx}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^t x^n dx = \ln(1+t)$$

В прошлый раз мы обсуждали равномерную сходимость функциональных рядов и теперь будем использовать её, чтобы установить свойства таких рядов.

Теорема. *(1) U_n определены на числовом $X \in \mathbb{R}$, $a \in \hat{\mathbb{R}}$ — точка сгущения и $\exists$ конечные $\lim_{x\to a} U_n(x) = C_n$. Если (1) $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ равномерно сходится на X, S — суммы, то (2) $\sum_{n=1}^{\infty} C_n$ — сходится и $\sum_{n=1}^{\infty} C_n = \lim_{x\to a} S(x)$, или, что то же самое, $\sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to a} U_n(x) = \lim_{x\to a} \sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)$.*

Контрпример: $U_n(x) = x^n(1-x),\ 0 < x < 1,\ a = 1$. Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x) = (1-x)\frac{x}{1-x} = x \to S(x) = x \to_{x\to 1} 1$.

Доказательство. Все теоремы мы будем доказывать, сводя доказательства к последовательностям.

$S(x) \leftleftarrows S_n(x) = U_1(x)+...+U_n(x) \to_{x\to a} L_n = \sum_{k=1}^{n} C_k$. Ссылаемся на теорему о повторных пределах, которая говорит о том, что $\exists \lim_{n\to\infty} L_n = L$, такой, что $L = \lim_{x\to a} S(x)$. Отсюда $\sum_{n=1}^{\infty} C_n = \lim_{x\to a} S(x)$, что и требовалось доказать. (теорема сведена к теореме о равенстве повторных пределов). □

Совершенно аналогично:

Теорема. *(2)(Стокса-Зайделя для рядов).*

U_n определены на числовом $X \in \mathbb{R}$, непрерывны в $x_0 \in X$. Если (1) $\sum U_n$ равномерно сходится на X, S — сумма, то S непрерывна в точке x_0.

Доказательство. $S_n \rightrightarrows S$ — непрерывны в т. x_0, ссылаемся на теорему Стокса-Зайделя. □

Термин компактной сходимости сохраняется для рядов:

Определение. Если $S_n \to S$ компактно на $< a, b >$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ компактно сходятся на $[a, b]$.

Теорема. *(2') U_n непрерывны на $< a, b >$. Если $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ компактно сходятся на $< a, b >$, S — его сумма, то S непрерывна на $< a, b >$.*

Доказательство. аналогично. □

Теорема. *(3 об интегрировании).U_n непрерывны на $[a, b]$. Если (1) $\sum U_n$ равномерно сходится на $[a, b]$, то (2) $\sum \int_a^b U_n(x)dx$ сходится и $\int_a^b S(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b U_n(x)dx$, где S — сумма (1). Последнее равенство можно переписать как: $\int_a^b (\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x))dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b U_n(x)dx$.*

Доказательство. $I_n = \int_a^b S_n(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \int_a^b U_k(x)dx$. $S_n \rightrightarrows S$ на $[a, b]$. $I_n = \int_a^b S_n(x)dx \to \int_a^b S(x)dx$. Таким образом, $\lim I_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b U_n(x)dx = \int_a^b S(x)dx$. □

Теорема. *(4 о почленном дифференцировании).*

U_n непрерывно дифференцируемы на $< a, b >$, если

1) $\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)$ сходится $\forall x \in < a, b >$.

2) $(1')\sum_{n=1}^{\infty} U'_n(x)$ равномерно сходится на $< a, b >$, сумма φ, то S — сумма (1) непрерывно дифференцируема и

$$S'(x) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)\ \forall x \in < a, b >$$

Доказательство. выполнить самостоятельно. □

Пример.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{2^n}$$

$$|\frac{\cos nx}{2^n}| \le \frac{1}{2^n}\ \forall x \in \mathbb{R}$$

Продифференцируем: $\sum(-\frac{n \sin nx}{2^n})$.(дифференцируем по x) Этот ряд сходится равномерно, значит, сумма исходного ряда дифференцируема.

Но мы это можем повторить! Продифференцируем еще раз: $\sum(-\frac{n^2 \cos nx}{2^n})$ — также сходится по Даламберу, поэтому мы можем дважды дифференцировать! И мы можем это повторять и повторять. Значит, сумма исходного ряда бесконечно дифференцируема.

Пример.

$$W(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(10^n x)}{2^n}$$

Члены этого ряда имеют ту же мажоранту: $|\frac{\cos 10^n x}{2^n}| \le \frac{1}{2^n}$. Но если мы рассмотрим производную: $\sum(-\frac{10^n \sin 10^n x}{2^n})$. Поэтому дифференцируемости нет. Таким образом, ни при каком x функция W не дифференцируема!

В заключение обратимся к признаку равномерной сходимости:

(признак Дирихле)

Теорема. *(внимание! теорема запорота в хлам из-за невозможности различить U и u у Макарова. Не используйте данное доказательство)(5)U_n, V_n определены на X и $U_n = u_1 + ... + u_n$. Если:*

1) Функции U_n равномерно ограничены на X, то есть $\exists C:\ |U_n(x)| < C\ \forall x \in X,\ \forall n$.

2) $\forall x\ \{V_n(x)\}$ монотонна и

3) $V_n(x) \rightrightarrows_{n\to\infty} 0$ на X,

то $\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)V_n(x)$ (*) равномерно сходится на X.

Лемма. $a_1, ..., a_n,\ b_1, ..., b_n,\ A_k = a_1 + ... + a_k\ A_0 = 0$. *Тогда*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = A_n b_n - \sum_{k=1}^{n-1} A_k(b_{k+1} - b_k)$$

(преобразование Абеля, дискретный аналог какой-то фигни. Посмотрим, какой:

$$\sum_{k=1}^{n} b_k \Delta A_{k-1} = A_n b_n - \sum_{k=1}^{n-1} A_k \Delta b_k$$

где $\Delta A_{k-1} = A_k - A_{k-1} = a_k$. То есть оказалось, что фигня — аналог интегрирования по частям!)

Доказательство. Пусть $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)V_k(x) = U_n(x)V_n(x) - \sum_{k=1}^{n-1} u_k(x)(V_{k+1}(x) - V_k(x)) = U_n(x)V_n(x) - T_n(x)$, где $U_n(x)V_n(x) \rightrightarrows 0$.

Оценим $|T_n(x)| \le \sum_{k=1}^{n-1} |U_k(x)||V_{k+1}(x) - V_k(x)| \le \sum_{k=1}^{n-1} C|V_{k+1}(x) - V_k(x)|$.

(+) $\sum_{k=1}^{\infty} |U_k(x)||V_{k+1}(x) - V_k(x)|$. При каждом x $\{V_k(x)\}$ либо возрастает, либо убывает. То есть мы можем убрать модуль и поставить один и тот же знак. Раз знак общий, то его можно вынести за скобку:

$\sum_{k=1}^{n-1} C|V_{k+1}(x) - V_k(x)| = \pm C(\sum_{k=1}^{n-1}(V_{k+1}(x) - V_k(x))) = C|\sum_{k=1}^{n-1}(V_{k+1}(x) - V_k(x))|$

$|T_n(x)| \leq C|(v_2 - v_1) + (v_3 - v_2) + ... + (v_n - v_{n-1})|$. Частичные суммы ряда $(+) = U_n(x)V_n(x) - ... \leq C|V_1(x) - V_n(x)| \to_{n\to\infty} C|V_1(x) - V_n(x)|$.

$|T_n(x)| \leq C|V_1(x) - V_n(x)|$

$|T(x)| \leq C|V_1(x)|$

$|R_n(x)| < C|V_n(x)| \rightrightarrows_{n\to\infty} 0$ — остаток.

Таким образом, частичная сумма равномерно стремится к сумме. □

Пример. $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos nx,\ \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin nx,\ c_n \downarrow 0$.

$$U_n(x) = \begin{matrix} \cos x + ... + \cos nx \\ \sin x + ... + \sin nx \end{matrix} \leq \frac{1}{|\sin\frac{x}{2}|}$$

Теорема. *(6)(Признак Абеля равномерной сходимости рядов).*

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)V_n(x)\ (*)$$

Если:

1) $\sum_1^{\infty} u_n(x)$ *равномерно сходится.*

2) $\forall x\ \{V_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *монотонна*

3) $\exists C:\ |V_n(x)| \leq C\ \forall x \in X,\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Доказательство. аналогично предыдущей теореме. □

5.3 Степенные ряды

Определение. Степенной ряд — ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + ...$$

Мы будем рассматривать комплексные ряды, так как они наиболее важны.

Мы будем считать, что $a,\ a_n \in \mathbb{C}$ и рассматривать ряды вида $\sum a_n(z-a)^n\ z \in \mathbb{C}$.

Лемма. $(A) \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$*, сходится в* $z_0,\ z \neq a$*. Тогда* (A) *и* $(A') \sum_{n=1}^{\infty} na_n(z-a)^{n-1}$ *абсолютно сходятся* $\forall z$*, удовлетворяющему условию* $|z-a| < |z_0 - a|$.

Доказательство. $|a_n(z-a)^n| = |a_n||z-a|^n = \alpha_n$. $|na_n(z-a)^{n-1}| = n|a_n||z-a|^n = \frac{n}{|z-a|}\alpha_n \geq \alpha_n$.

Нам достаточно доказать абсолютную сходимость ряда (A').

$|na_n(z-a)^{n-1}| = \frac{n}{|z-a|}|a_n(z-a)^n| = \frac{n}{|z-a|}\left(\frac{|z-a|}{|z_0-a|}\right)^n |a_n(z_0-a)^n|\ (\star)$

$a_n(z_0-a)^n \to_{n\to\infty} 0$ по условию (работает необходимый признак сходимости). А значит, они ограничены: $|a_n(z_0-a)^n| \leq C$.

Средний множитель преобразуем как

$$\frac{|z-a|}{|z_0-a|} \equiv q < 1$$

поэтому мы можем записать как $na_n(z-a)^{n-1} \leq C_0\frac{n}{|z-a|}q^n = b_n$. Множитель n ни на что не влияет (убедимся с помощью Даламбера), и ряд b_n сходится. А значит, сходится и первый ряд. Лемма Абеля доказана. □

Сегодня мы продолжим заниматься степенными рядами. Введем обозначение:

$$(A)\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n = a_0 + a_1(z-a) + ...$$

Такой ряд всегда будет называться рядом (A).

Теорема. *(теорема о существовании радиуса сходимости)*

$\exists R \in [0, +\infty]$, *такое, что* $\forall z: \ |z-a| < R$ (A) *абсолютно сходится, а* $\forall z: \ |z-a| > R$ (A) *— расходится.*

То есть если $R = 0$, *то ряд* (A) *расходится при всех* $z \neq a$. *Если* $R = +\infty$ *ряд* (A) *сходится абсолютно для всех* z. *И если* $0 < R < +\infty$, *то условия теоремы описывают области сходимости ряда.*

Пример. $\{z| \ |z-a| < R\}$, то мы в открытом круге радиуса R — круге сходимости степенного ряда. Обозначается как $B(a, R)$.

Если взять ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{n}\right)^n$$

Из признака сходимости Коши вытекает, что этот ряд сходится всегда, то есть его радиус сходимости — бесконечность.

Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(nz)^n$$

имеет радиус сходимости $= 0$.

А радиус сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{R}\right)^n$$

равен R.

Доказательство. (их будет два).

1) Пусть $\mathscr{E} = \{z \in \mathbb{C} | (A) - \text{сходится в точке } z\}$

Постараемся найти точку из $\mathscr{E}$, которая максимально удалена от a.

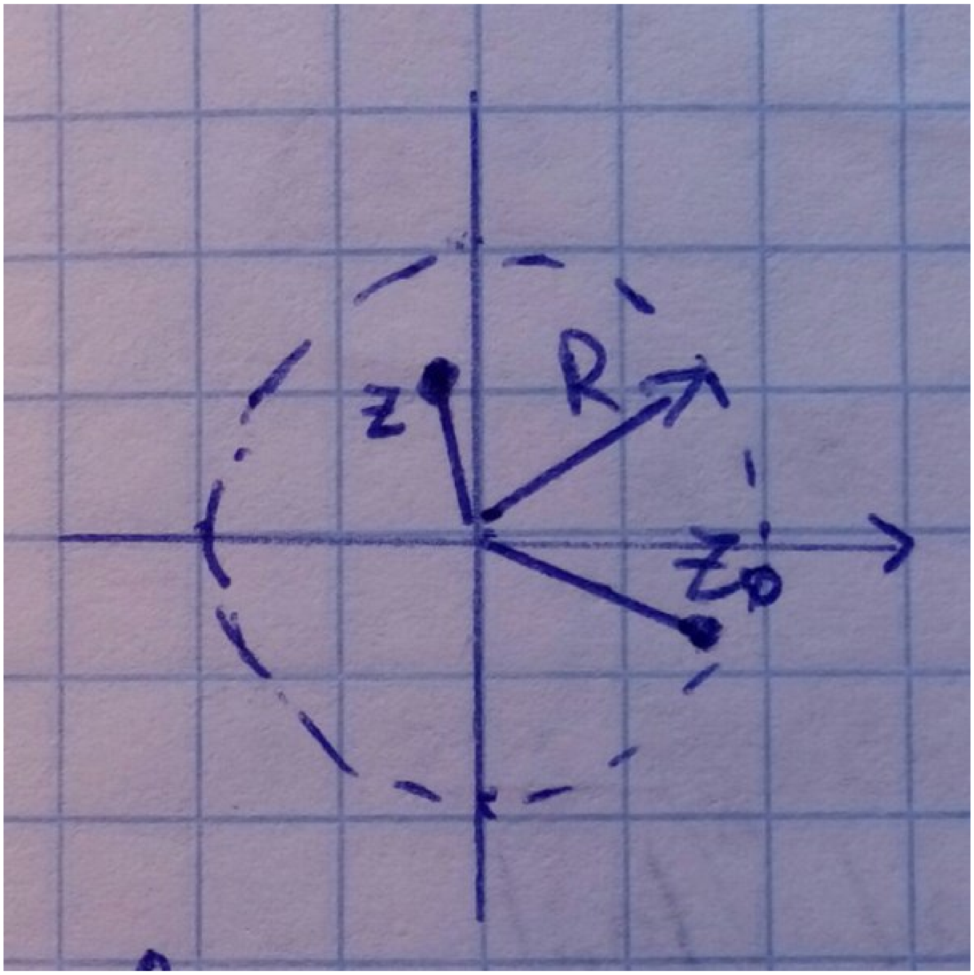
Введем величину $R = \sup\{|z-a| \mid z \in \mathscr{E}\}$.

Утверждается, что R обладает нужными свойствами.

В самом деле, $R = 0 \Leftrightarrow \mathscr{E} = \{a\}$. Соответственно, ряд будет расходиться при $|z-a| > 0$.

Если $R > 0$. Тогда при $|z-a| < R$, ряд (A) будет сходиться абсолютно. Докажем сию ересь:

$\exists z_0 \in \mathscr{E}: \ |z-a| < |z_0 - a|$.



Выполнено условие леммы Абеля, которая утверждает, что в точке z ряд (A) абсолютно сходится.

Если же $R = +\infty$, то мы доказали, что ряд (A) сходится $\forall z$.

А вот если $0 < R < +\infty$, мы доказали, что (A) сходится абсолютно.

Теперь проверим, что $|z - a| > R \Rightarrow (A)$ — расходится: допустим, что существует $\tilde{z} \in \mathscr{E} :\ |\tilde{z} - a| > R$ и в точке $\tilde{z}$ ряд (A) сходится. $R < |\tilde{z} - a| \leq R = \sup\{|z - a| \mid z \in \mathscr{E}\}$, приходим к противоречию.

2) Из определения верхнего предела вытекает, что $c > 0\ \overline{\lim}(cx_n) = c\overline{\lim}(x_n)$.

А из признака Коши $(C) \sum_{n=1}^{\infty} c_n,\ K_n = \sqrt[n]{|c_n|} \Rightarrow \begin{cases} \overline{\lim} K_n < 1 & (C)\text{сходится} \\ \overline{\lim} K_n > 1 & (C)\text{расходится} \end{cases}$

Рассмотрим ряд (A) и натравим на него призрак Коши:

$$K_n = \sqrt[n]{|a_n(z - a)^n|} = |z - a| \sqrt[n]{a_n}$$

В дальнейшем будем считать, что $z \neq a$, иначе не интересно.
$\overline{\lim} K_n = \overline{\lim} |z - a| \sqrt[n]{|a_n|} = |z - a| \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = |z - a|\alpha$, где $\alpha = \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}$.
Воспользуемся признаком Коши с верхним пределом:
$\overline{\lim} K_n < 1 \Rightarrow (A)$ абсолютно сходится. Это означает, что
$\alpha|z - a| < 1 \Rightarrow (A)$ абсолютно сходится и $\alpha|z - a| > 1 \Rightarrow (A)$ расходится.

Будем считать, что $\exists z \neq a\ :\ (A)$ — сходится. Тогда $\alpha < +\infty$. Тут возможны два подслучая:

1) $\alpha = 0 \Rightarrow \alpha|z - a| = 0|z - a| < 1$ — ряд (A) сходится всегда $\forall z$.

2) $0 < \alpha < +\infty \Rightarrow \begin{cases} |z-a| < \frac{1}{\alpha} \Rightarrow & \text{абсолютно сходится} \\ |z-a| > \frac{1}{\alpha} \Rightarrow & \text{расходится} \end{cases}$

Отсюда:

$$R = \begin{cases} \alpha = 0 & R = +\infty \\ 0 < \alpha < +\infty & R = \frac{1}{\alpha} \\ \alpha = +\infty & R = 0 \end{cases}$$

Если $\alpha > 0$, то

$$R = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

Формула Жака Адамара. □

Замечание. В теореме говорится о поведении ряда при $|z-a| \gtrless R$, а вот насчет $|z-a| = R$ теорема говорит «Я бессильна».

Пример.

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

— радиус сходимости равен 1, при $R = 1$ $|z| = 1$ и ряд расходится.

Пример.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$$

вновь радиус сходимости равен 1, а при $R = 1$ члены ряда имеют мажоранту: $|\frac{z^n}{n^2}| \leq \frac{1}{n^2}$, то есть ряд при $R = 1$ сходится.

Пример.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$$

при $R = 1$ получаем гармонический ряд.
А если $z \neq 1$, то будет сходимость по Дирихле: $U_n(z) = z^n,\ V_n = \frac{1}{n} \downarrow 0$.
$U_n(z) = z + z^2 + ... + z^n = \frac{z - z^{n+1}}{1-z}$, откуда $|U_n(z)| \leq \frac{2}{|1-z|}$ $\forall n$.

Во всем круге сходимости ряд не обязан равномерно сходиться!

Пример.

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

$\sup_{|z|<1} |z^n| = 1$. То есть радиус круга сходимости 1. А вот если мы чуть-чуть уменьшим радиус, то равномерная сходимость появится.

Теперь мы можем обобщить понятие компактной сходимости:

Определение. Ряд (A) компактно сходится в круге сходимости, если $\forall 0 < r < R$ ряд (A) равномерно сходится в концентрическом круге $\bar{B}(a, r) = \{z |\ |z-a| \leq r\}$.

Теорема. $(A)\sum a_n(z-a)^n,\ R>0$. *Тогда:*

1) (A) компактно сходится в круге сходимости;

2) $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n$ непрерывна во всем круге сходимости.

Доказательство.

1) $\bar{B}(a,r),\ 0<r<R$. Пусть $\exists z_0$, такая, что $|z_0-a|=r$. Тогда $\sum a_n(z_0-a)^n$ абсолютно сходится. Это означает, что $|a_n(z_0-a)^n|=|a_n|r^n=b_n$, таким образом, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum|a_n|r^n<+\infty$ сходится.

Пусть $z\in\bar{B}(a,r)\Rightarrow|z-a|\le r$, откуда $|a_n(z-a)^n|=|a_n||z-a|^n\le|a_n|r^n=b_n$ и работает признак Вейерштрасса.

2) $z_0\in B(a,R)$ и возьмем маленький кружок с центром z_0: возьмем $\delta>0:\ \bar{B}(z_0,\delta)\subset B(a,R)$, то есть $|z_0-a|+\delta<R\quad(+)$. Непрерывность — локальное свойство, поэтому достаточно доказать непрерывность в кружочке $\bar{B}(z_0,\delta)$. По доказанному, (A) равномерно сходится в $\bar{B}(a,r)\supset\bar{B}(z_0,\delta)$, следовательно, (A) равномерно сходится в $\bar{B}(z_0,\delta)$. □

Определение. f определена в $B(a,R)$. Тогда производная данной функции в z_0 определяется как

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=f'(z_0)$$

функция называется дифференцируемой в точке z_0, а значение предела — значением производной в точке.

Лемма. $u,v\in\mathbb{C},\ |u|,|v|\le r,\ n\in\mathbb{N}$. *Тогда* $|u^n-v^n|\le nr^{n-1}|u-v|$.

Доказательство.

$$\begin{aligned}(u-v)(u^{n-1}+u^{n-2}v+...+ux^{n-2}+v^{n-1})=\\=u^n+u^{n-1}v+...+u^2v^{n-2}+uv^{n-1}-vu^{n-1}-...-uv^{n-1}-v^n=u^n-v^n\end{aligned}$$

$$u^n-v^n=(u-v)\sum_{k=0}^{n-1}u^{n-1-k}v^k$$

Оцениваем:

Доказательство.

$$|u^n-v^n|\le|u-v|\sum_{k=0}^{n-1}|u|^{n-1-k}|v|^k\le|u-v|\sum_{k=0}^{n-1}r^{n-1-k}r^k=|u-v|\cdot n\cdot r^{n-1}$$

□

□

Замечание. $[(z-a)^n]'=n(z-a)^{n-1}$

Теорема. $(A)\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n,\ R>0,\ f$ *— сумма, определена в* $B(a,R)$. *Пусть далее* (A') *— ряд, получающийся из* (A) *почленным дифференцированием:* $(A')\sum_{n=1}^{\infty}na_n(z-a)^{n-1}$. *Тогда* (A) *и* (A') *имеют одинаковые радиусы сходимости,* f *— дифференцируема и* $f'(z)=\sum_{n=1}^{\infty}na_n(z-a)^{n-1}$.

Доказательство. Рассмотрим $(A_*)\sum|a_n(z-a)^n|$ и $(A'_*)\sum|na_n(z-a)^{n-1}|$, при $z\neq a$. $|a_n(z-a)^n|\leq|z-a||na_n(z-a)^{n-1}|$ при $n\geq 1$.

Пусть R' — радиус сходимости (A'). $|z-a|<R'\Rightarrow$ сходится (A'_*). Но тогда, в силу неравенства выше, сходится ряд и $(A_*)\Rightarrow$ сходится (A), а необходимое для того условие: $|z-a|\leq R$. Отсюда $R'\leq R$.

Пусть $R'\neq R\Rightarrow R'<R$. Тогда $R'<|z-a|<R$ и (A') — расходится.

Возьмем z_0, такое, что $|z-a|<|z_0-a|<R$. (A) — сходится в точке z_0. Тогда, по лемме Абеля, (A') — сходится. А этого не может быть, т.к. $R'<|z-a|$, то есть в точке z_0 ряд (A') должен расходиться.

$$\frac{f(w)-f(z)}{w-z}\to_{w\to z}?$$

$w\in B(a,R)$.

Возьмем r, такое, что $|z-a|<r<R$ $w\in B(a,r)$.

$f(w)=\sum a_n(w-a)^n$

$f(z)=\sum a_n(z-a)^n$

$f(w)-f(z)=\sum a_n\left[(w-a)^n-(z-a)^n\right]$, при $w\neq z$

$$\frac{f(w)-f(z)}{w-z}=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\frac{(w-a)^n-(z-a)^n}{w-z}$$

Вся шутка в том, чтобы доказать, что в ряде, стоящем справа, можно почленно перейти к пределу. По теореме о почленном переходе к пределу требуется наличие предела и равномерная сходимость ряда. Пределы есть. Докажем сходимость ряда в круге радиуса r.

$$|\frac{(\overbrace{w-a}^{u})^n-(\overbrace{z-a}^{w})^n}{\underbrace{w-z}_{u-v}}|=|\frac{u^n-v^n}{u-v}|\leq nr^{n-1}$$

$$|a_n\frac{(w-a)^n-(z-a)^n}{w-z}|\leq|a_n|nr^{n-1}=b_n\qquad(++)$$

То есть $\sum n|a_n|r^{n-1}$ сходится.

Неравенство $(++)$ справедливо $\forall w\in\bar{B}(a,r)$ и $\sum b_n<+\infty$. Отсюда по теореме Вейерштрасса ряд $(+)$ равномерно сходится, что нам и требовалось. Переходя к пределу в неравенстве $(+)$ получим

$$f'(z)=\sum a_n\lim_{w\to z}\frac{(w-a)^n-(z-a)^n}{w-z}=\sum_{n=1}^{\infty}a_nn(z-a)^{n-1}$$

□

Мы проходили теорему о фиксировании суммы степенного ряда:

$$(A)\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n,\ R>0$$

1) $(A')\sum_{n=1}^{\infty}na_n(z-a)^{n-1}$

2) $f,\ f'(z)=\sum_{n=1}^{\infty} na_n(z-a)^{n-1}\ |z-a|<R$.

Следствия из этой теоремы:

1) $f\in C^{\infty}$ в $B(a,R)$.

2) $f'(z)=a_1+2a_2(z-a)+...+na_n(z-a)^{n-1}$. $f^{(n)}(z)=na_n+(n+1)n...2a_{n+1}(z-a)+...$ при любом n.

Мы можем вычислять коэффициенты степенного ряда. Положим здесь $z=a$. Тогда $f^{(n)}(a)=na_n,\ n=1,2,...$ Таким образом,

$$a_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n} \qquad (*)$$

Это так называемые коэффициенты Тейлора и ряд, имеющие такие коэффициенты:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$$

называется рядом Тейлора функции f. Таким образом, степенной ряд — ряд Тейлора своей функции.

3) Мы взяли произвольный степенной ряд и получили, что его коэффициенты вычисляются по формуле $(*)$. Это говорит о том, что если наша функция раскладывается в ряд еще одним образом, например, таким: $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n$, то коэффициенты b_n совпадают с a_n, то есть различные степенные ряды имеют различные суммы.

Ясно, что $\frac{1}{1-z}=1+z+...+z^n+...$ при $|z|<1$. Коэффициент при n:

$$1=\frac{f^{(n)}(0)}{n}$$

Таким образом, разложение функции в степенной ряд по степеням $(z-a)$ единственно!

4) Возьмем бином $(z-a)^n$, то он производная для $\frac{(z-a)^{n+1}}{n+1}$. Так же, как и в вещественном случае, для функции комплексного аргумента существует F, такая, что $F'(z)=f(z)$.

Для комплексного мы можем составить ряд

$$(\tilde{A})C+\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{(z-a)^{n+1}}{n+1}$$

его радиус сходимости: $(\tilde{A}')=(A)\Rightarrow R_{\tilde{A}}=R_A$.

У суммы степенного ряда всегда есть первообразная.

5.4 Разложение основных элементарных функций в степенные ряды.

Мы будем рассматривать следующие ряды: $(A)\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n$, где $a,a_n\in\mathbb{R},\ x\in\mathbb{R}$.

Радиус сходимости будет бегать по диаметру и если $|x-a|<R$, то ряд сходится, а если $|x-a|>R$, то будет расходиться.

Если $f(x)=\sum a_n(x-a)^n,\ x\in\underbrace{(a-R,a+R)}_{\text{интервал сходимости}}$, то функция f на этом интервале бесконечно дифференцируема.

Вещественный степенной ряд компактно сходится в интервале сходимости.

Следствие:

Если $[p,q] \subset (a-R, a+R)$, ряд (A), f — сумма ряда.

$$\int_p^q f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_p^q (x-a)^n dx$$

Теорема. *(1)Функции* $\sin x,\ \cos x,\ e^x$ *— суммы своих рядов Тейлора при* $a = 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

Доказательство.

1) $f(x) = \sin x$. Как мы знаем, $f^{(n)}(x) = \sin(x + \frac{n\pi}{2})$.
$x = 0,\ f^{(n)}(0) = \sin\frac{n\pi}{2}$
$n = 2k \Rightarrow f^{(n)}(0) = 0$
$n = 2k+1 \Rightarrow f^{(n)}(0) = f^{2k+1}(0) = (-1)^{k-1}$
Таким образом, ряд Тейлора имеет вид

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{1}{(2k+1)!}x^{2k-1} = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \ldots \quad \forall x$$

Доказательство основано на формуле Тейлора:
$T_{2k-1}(f,0,x) = \sum_{n=1}^{k}\frac{1}{(2n-1)}x^{2n-1}$
И по формуле Тейлора с остаточным членом по Лагранжу, мы имеем, что

$$\sin(x) = T_{2k}(f,0,x) + \underbrace{\frac{f^{(2k)}(\overline{x})}{(2k)!}x^{2k}}_{r_{2k-1}(x)}$$

Оценим остаток: $|r_{2k-1}(x)| \leq \frac{x^{2k}}{(2k)!} \to_{k\to\infty} 0$.

Таким образом, верно равенство, что синус представляется в виде ряда Тейлора для любого x.

Продифференцируем это равенство и получим ряд для $\cos x$:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots$$

Мы также можем представить $\sin x - x = -\frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots \sim -\frac{x^3}{6}$, аналогично для $\sin x - (x - \frac{x^3}{6})$

$f(x) = T_n(f, x, x-a) + r_n(x)$, остаточный член стремится к нулю $\Rightarrow f$ — сумма ряда.
Теперь докажем для экспоненты:
$f(x) = e^x\ f^{(n)}(0) = 1$

$$T_n(f,0,x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

По формуле Тейлора с остаточным по Лагранжу,

$$e^x - T_n(f,0,x) = r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\overline{x})}{(n+1)!}x^{n+1}$$

$$r_n(x) = \frac{e^{\overline{x}}}{(n+1)!}x^{n+1} \quad |\overline{x}| \leq |x|$$

откуда

$$|r_n(x)| \leq \frac{e^{|x|}}{(n+1)!}|x|^{n+1} \to_{n\to\infty} 0$$

Отсюда $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n$ $\square$

Теорема. *(2)*

1) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + ... + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + ...$ *Ряд сходится при* $x \in (-1, 1]$.

2) $\arctan X = X - \frac{X^3}{3} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + ...$ *Ряд сходится при* $x \in [-1, 1]$.

Замечание. Интервал сходимости для обеих функций $(-1, 1)$, радиус — 1.

Доказательство. Разложим производные функций в ряд Тейлора и проинтегрируем:

1) $(\ln(1+x))' = \frac{1}{1+x}$

$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - ... + (-1)^n x^n + ... \quad |x| < 1$

Теперь возьмем и проинтегрируем по замкнутому промежутку:

$|t| < 1, \ [0, t] \ t > 0$ или $[t, 0] \ t < 0$.

Интегрируем!

$$\int_0^t \frac{dx}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^t x^n dx$$

Получем, что

$$\ln(1+t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{n+1}}{n+1} = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + ... + (-1)^n \frac{t^{n+1}}{n+1} + ...$$

что верно при $|t| < 1$.

Совершим обратную замену и получим $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + ... + (-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} + ...$

Это выполняется при $(-1, 1)$. Рассмотрим граничные точки:

$x = -1: \ -1 - \frac{1}{2} - ... - \frac{1}{k}$ — ряд расходится.

А вот при $x = 1$:

Воспользуемся равенством $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + ... + (-1)^n x^n + (-1)^{n+1}x^{n+1} + ...$

Отсюда $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + ... + (-1)^n x^n + \frac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{1+x} \ \forall x$

Обозначим последнее слагаемое $r_n(x)$ и будем считать, что $x \in [0, 1]$ и $|r_n(x)| \leq x^{n+1}$.

Проинтегрируем по отрезку $[0, 1]$:

$$\int \frac{dx}{1+x} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \int_0^1 x^k dx + \int_0^1 r_n(x)dx$$

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + ... + \frac{(-1)^n}{n+1} + \int_0^1 r_n(x)dx$$

Оценим: $|\int_0^1 r_n(x)dx| \leq \int_0^1 |r_n(x)|dx \leq \int_0^1 x^{n+1}dx = \frac{1}{n+2}$.

Таким образом, $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + ... + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + ...$ и в качестве суммы ряда мы получаем $1 - \frac{1}{2} + ... + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}$, то есть сумма отличается от логарифма двух на бесконечно малую.

Для арктангенса нужно произвести все те же рассуждения, получить, что он разлагается как
$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - ... + (-1)^n x^{2n} + ...$$

Сделать самостоятельно во время экзамена ;-) $\square$

Теорема. *(3) Ряд Тейлора для степенной функции.*

$f(x) = (1+x)$, $p \in \mathbb{R}$, $p \neq 0$ для исключения тождественного случая. Напомним, что $\binom{p}{k} = \frac{p(p-1)...(p-k+1)}{k!}$. Если $p \in \mathbb{N}$, то $\binom{p}{k} = C_p^k$.

Справедливо неравенство

$$(1+x)^p = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{p}{k} x^k =$$
$$= 1 + px + \frac{p(p-1)}{2}x^2 + ... + \frac{p(p-1)\cdot ... \cdot(p-k+1)}{k!}x^k + ... \qquad (+)$$

в интервале $x \in (-1, 1)$

Доказательство. (не совсем стандартное)

С помощью признака Даламбера легко проверить, что ряд (+) сходится $|x| < 1$ и расходится при $|x| > 1$.

Таким образом, интервал сходимости $(-1, 1)$, радиус 1.

Рассмотрим $\varphi(x)$ — сумма ряда (+). $\varphi(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{p}{k} x^k$ — это мы хотим проверить.

1) $(1+x)\varphi'(x) = p\varphi(x)$ $\qquad$ (++). — необходимое условие, чтобы φ могла совпадать со степенью равенства.

$$\varphi'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k\binom{p}{k} x^{k-1}$$

$$(1+x)\varphi'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k\binom{p}{k} x^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} k\binom{p}{k} x^k =$$

Объединим слагаемые, содержащие x в одинаковой степени:

$$= p + 2\frac{p(p-1)}{2}x + ... + (k+1)\binom{p}{k+1}x^k + ... + px + ...k\binom{p}{k}x^k + ... =$$
$$= p + p\cdot px + ... + \left[(k+1)\binom{p}{k+1} + k\binom{p}{k}\right]x^k + ...$$

рассмотрим квадратную скобку отдельно:

$$(k+1)\frac{p(p-1)\cdot ... \cdot(p-k)}{1\cdot 2\cdot ... \cdot k(k-1)} + k\frac{p(p-1)\cdot ... \cdot(p-k+1)}{1\cdot 2\cdot ... \cdot k} =$$
$$= \frac{p(p-1)\cdot ... \cdot(p-k+1)}{(k-1)!}\left[\frac{p-k}{k} + 1\right] = \frac{p(p-1)\cdot ... \cdot(p-k+1)}{k!}\cdot p = p\binom{p}{k}$$

Подставляем это в квадратную скобку:

$$(1+x)\varphi'(x) = p + ppx + ... + p\binom{p}{k}x^k + ... = p\left(1 + px + ... + \binom{p}{k}x^k + ...\right) = p\varphi(x)$$

Рассмотрим функцию $g(x) = \frac{\varphi(x)}{(1+x)^p}$ на интервале $(-1,1)$. Сосчитаем её производную:

$$g'(x) = \frac{\varphi'(x)(1+x)^p - p(1+x)^{p-1}\varphi(x)}{(1+x)^2p} = \frac{\varphi'(x)(1+x) - p\varphi(x)}{(1+x)^{p+1}} \equiv 0$$

по только что доказанному.

$$\frac{\varphi(x)}{(1+x)^p} \equiv 1$$

□

Несколько замечаний по доказанному:

Если $|x| = 1$, то ответ зависит от p. Если $p = -1$, то $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + ... + (-1)^n x^n + ...$

Если $p > 0$, то ряд абсолютно сходится во всем замкнутом промежутке $[-1,1]$. Если же $-1 < p < 0$, то ряд сходится на $(-1,1]$. Если же $p \leq -1$, то ряд будет расходиться, так как $\binom{p}{k}$ будет стремиться к бесконечности.

Два **следствия** из нашей теоремы:

1) Пусть $p = -\frac{1}{2}$. Тогда, вычисляя биномиальные коэффициенты, получаем

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \underbrace{\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}}_{\to 0} x^n \qquad (*)$$

Если вспомнить формулу Валлиса, то можно вывести, что $\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \sim \frac{C}{\sqrt{n}}$. Поэтому при $x = 1$, ряд сходится в силу признака Лейбница.

2) Заменим $x \sim -x^2$. Получим равенство:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}(-x^2)^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n} \qquad (**)$$

Проинтегрируем $(**)$ по промежутку $[0,t],\ |t| < 1$. Получим

$$\arcsin t = t + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{t^{2n+1}}{2n+1} \qquad (***)$$

Тогда

$$C_n = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{1}{2n+1} \sim \frac{C}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{2n} = \frac{C/2}{n^{3/2}}$$

Это обобщенный гармонический ряд, $p = \frac{3}{2} > 1$, следовательно, $\sum C_n$ сходится.

Поэтому ряд $(***)$ абсолютно сходится на всем промежутке. Также по принципу Вейерштрасса равномерно сходится.

Следовательно, его сумма на промежутке $[0,t]$ — непрерывная функция, внутри промежутка сумма и арксинус совпадают, в силу непрерывности они совпадают и на концах. Значит,

$$\arcsin t = t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{t^{2n+1}}{2n+1}$$

Если у нас есть функция, определенная на интервале $(a-\delta, a+\delta)$, то мы можем спросить, когда функция f может быть представлена в виде суммы степенного ряда по степеням $(x-a)$: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$. При этом необходимое условие: $f \in C^{\infty}(a-\delta, a+\delta)$.

Но этого недостаточно. Нужны ограничения на производные:

Теорема. $f \in C^{\infty}(a-\delta, a+\delta)$. *Если* $\exists C > 0, A > 0$, *такие, что* $|f^{(n)}(x)| < CA^n n!$ $\forall n = 1, 2, \ldots$ (1), *то* f *есть сумма степенного ряда в интервале* $(a-\delta', a+\delta')$, *где* $\delta' = \min(\delta, \frac{1}{A})$.

Доказательство. Воспользуемся полиномами Тейлора. Возьмем произвольное n, и x, такой, что $|x-a| < \delta$ и напишем формулу:

$$f(x) = T_n(f, a, x-a) + \frac{f^{(n+1)}(\overline{x})}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Оценим остаток:

$$|f(x) - T_n(f, a, x-a)| = \frac{|f^{(n+1)}(\overline{x})|}{(n+1)!}|x-a|^{n+1} \leq \frac{CA^{n+1}(n+1)!}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}$$
$$= C\left(A|x-a|\right)^{n+1}$$

Чтобы это стремилось к нулю, то нам нужно предположить, что $|x-a| < \frac{1}{A}$. Тогда ряд Тейлора будет иметь сумму, равную f. Чтобы было справедливо равенство

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

должны выполняться условия: $\begin{cases} |x-a| < \delta \\ |x-a| < \frac{1}{A} \end{cases}$, понятное дело, что оба одновременно.

Наша теорема доказана. □

5.5 Финитные бесконечно дифференцируемые функции

У нас есть промежуток $[a, b]$, вне промежутка функция равна нулю, в промежутке не равна нулю (тождественно, то есть может обращаться в ноль на некотором участке) и бесконечно дифференцируема: $f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$.

Неочевидно само существование таких функций. Прежде чем приступать к решению этой задачи, докажем 2 леммы:

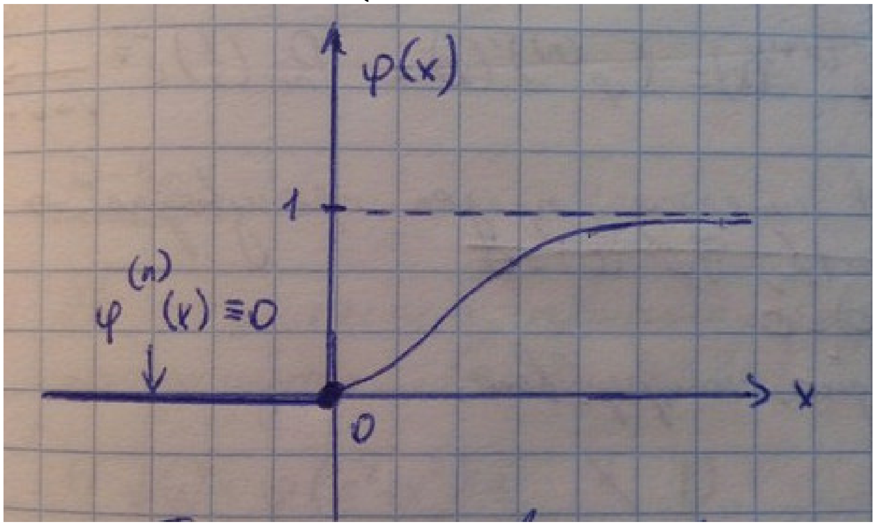
Лемма. *(1) (Лемма о пределе производной) Пусть* f *непрерывна на* $[a, b)$ $((a, b])$, $a \in [a, b)$ *и дифференцируема внутри. Если* $\exists \lim_{x \to a+} f'(x) = L \in \hat{\mathbb{R}}$, *то* $\exists f'(a)$ *и* $f'(a) = L$.

Доказательство. $a < x$. Тогда $f(x) - f(a) = f'(\bar{x})(x-a)$ где $a < \bar{x} < x$, при этом

$$\frac{f(x) - f(a)}{x-a} = f'(\bar{x}) \to_{x \to a} L$$

□

Лемма. *(2) Пусть* $\varphi(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ e^{-1/x} & x > 0 \end{cases}$. *Тогда* $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$



Любая производная функции при $x < 0$ *равна* 0*:* $(\varphi^{(n)}(x) \equiv 0)$.

Доказательство. То, что слева от нуля производные равны нулю, очевидно. Займемся производными при $x > 0$.

$$\varphi'(x) = \frac{1}{x^2} e^{-1/x}$$

Значит,

$$\varphi^{(n)}(x) = P_n(\frac{1}{x}) e^{-1/x}$$

То есть $P_1(t) = t^2$. (Доказать самостоятельно по индукции).
Мы знаем, что для любого полинома $\frac{P(t)}{e^t} \to_{t\to+\infty} 0$.
Возьмем

$$\varphi'(x) = \frac{P_1(\frac{1}{x})}{e^{1/x}} \to_{x\to 0+} 0$$

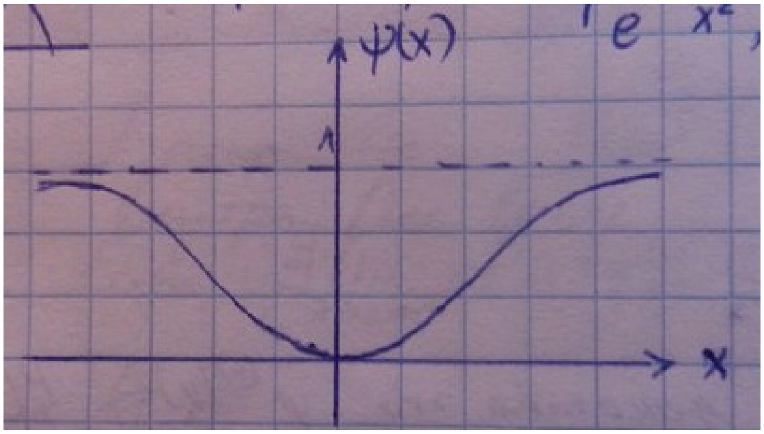
Следовательно, по предыдущей лемме, производная имеет предел, следовательно, $\exists \varphi'_+(0) = 0$. Но производная слева тоже существует и тоже равна 0. Значит, функция имеет двустороннюю производную, которая равна нулю. И предел производных в 0 равен пределу производных, следовательно, производная непрерывна. Таким образом, мы доказали, что производная $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$. По индукции:

$$\varphi^{(n+1)}(x) = \left[\varphi^{(n)}\right]'(x) = P_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x} \to_{x\to 0} 0$$

Значит, у $\varphi^{(n)}(x)$ имеется предел производной, следовательно, $\exists \varphi^{(n+1)}(0) = 0$, очевидно, производная бесконечна. □

Замечание.

$$\psi(x) = \varphi(x^2) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ e^{-1/x^2} & x \ne 0 \end{cases}$$



Очевидно, что $\psi^{(n)}(0) = 0$.

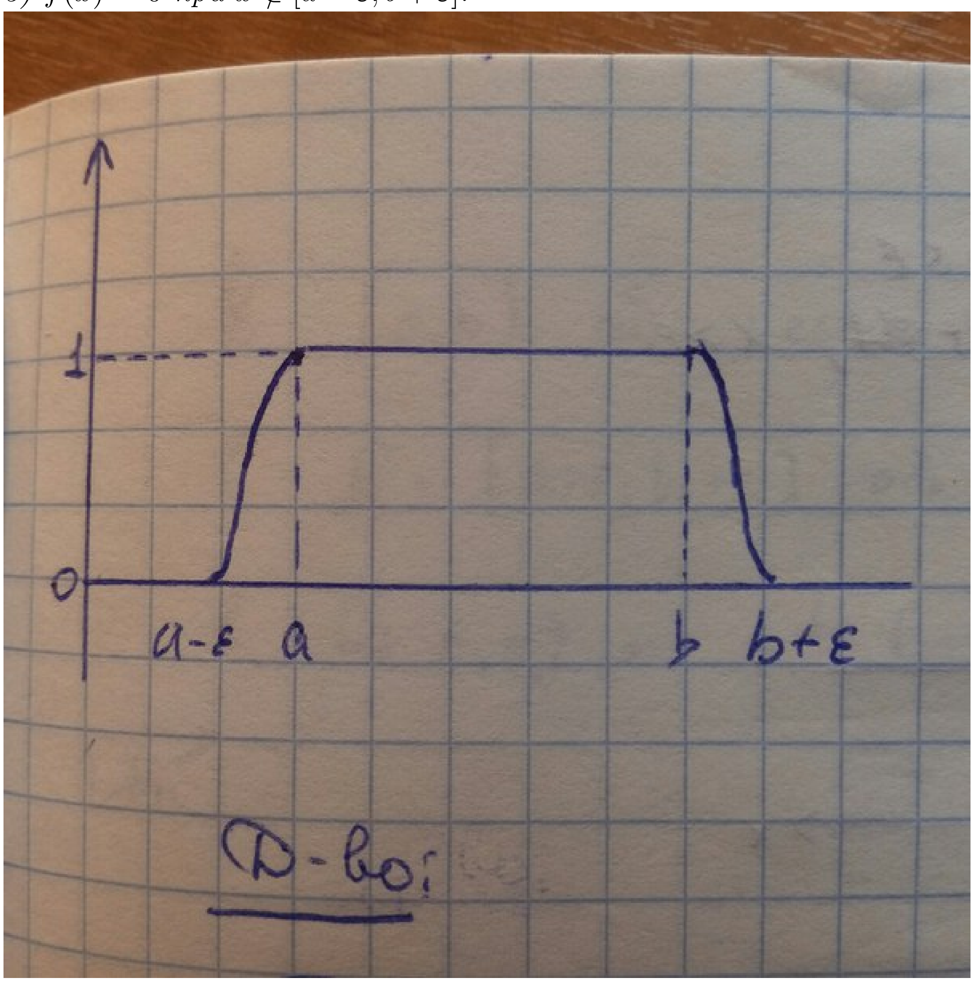
Оценка $|f^{(n)}| \leq CA^n n!$ не может быть верна в окрестности нуля, так как там они очень большие, хотя в нуле равны нулю.

Теорема. *Возьмем произвольный* $[a, b]$ *и* $\varepsilon > 0$. $\exists f \in C^\infty(\mathbb{R})$ *со свойствами:*

1) $0 \leq f \leq 1$ $\forall x$*;*

2) $f(x) = 1$ *при* $x \in [a, b]$

3) $f(x) = 0$ *при* $x \notin [a - \varepsilon, b + \varepsilon]$.

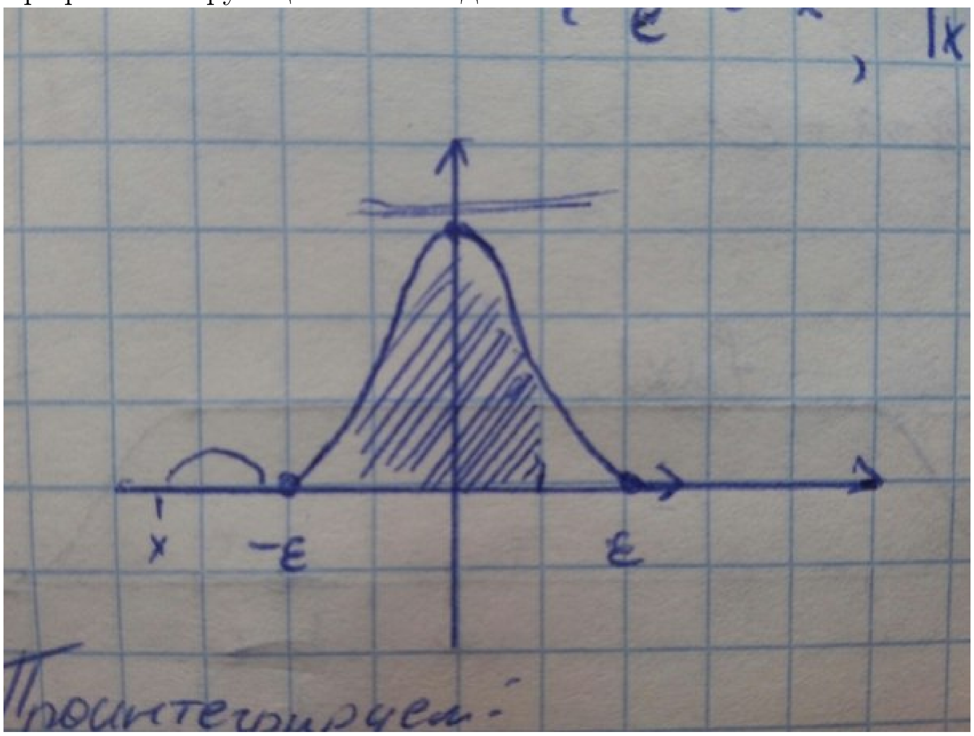


Доказательство. По техническим причинам рассматриваем промежуток $[a - 2\varepsilon, a + 2\varepsilon]$.

1) Рассмотрим функцию

$$\psi(x) = \varphi(\varepsilon^2 - x^2) = \begin{cases} 0 & |x| \geq \varepsilon \\ e^{-\frac{1}{\varepsilon^2 - x^2}} & |x| < \varepsilon \end{cases}$$

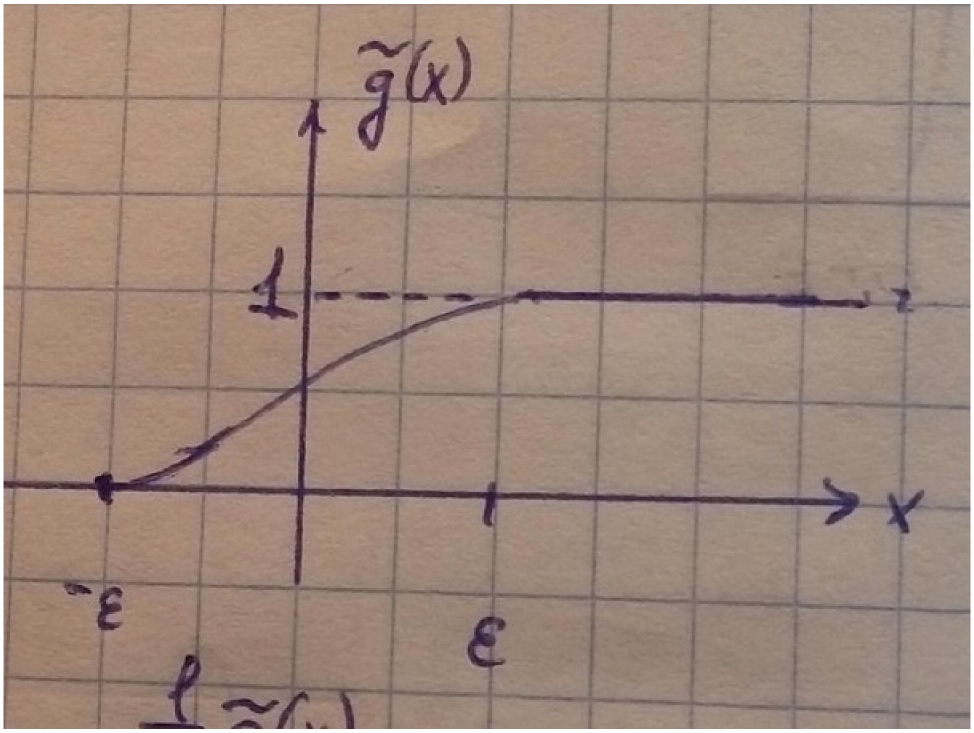
График этой функции имеет вид:



Заметим, что она бесконечно дифференцируема.
Проинтегрируем её ($x \in \mathbb{R}$):

$$g(x) = \int_{-\varepsilon}^{x} \psi(t)dt = \begin{cases} 0 & x < -\varepsilon \\ \text{возрастает} & -\varepsilon < x \leq \varepsilon \\ I = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \psi(t)dt & x \geq \varepsilon \end{cases}$$

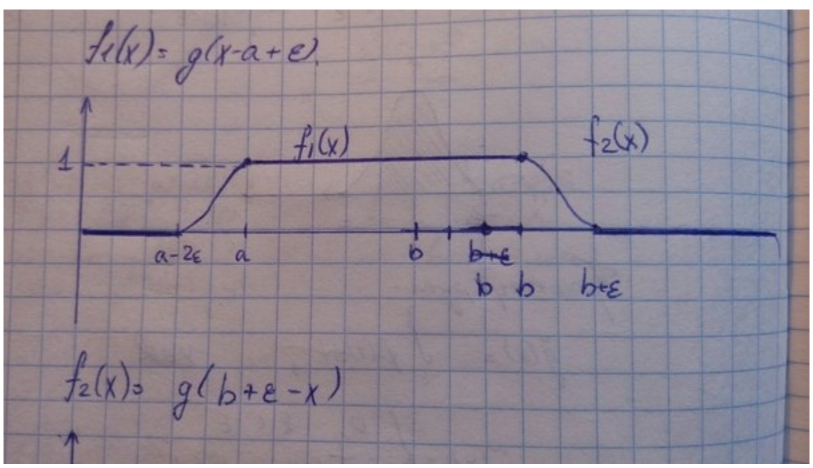
График интеграла будет иметь вид:



При этом график функции $g = \frac{1}{I} \cdot \tilde{g}(x)$.

Теперь манипулируем функцией g: положим $f_1(x) = g(x - a + \varepsilon)$. Если $x = a - 2\varepsilon$, то аргумент будет равен ε и g будет равна нулю. Если $x = a$, то $g(\varepsilon) = 1$, а дальше и подавно будет равно 1.

Положим $f_2(x) = g(b - \varepsilon - x)$. Если $x = b + 2\varepsilon$, то $f_2(x) = 0$. При увеличении x f_2 и подавно равна нулю. При $x = b$ $f_2(x) = 1$, а при $f_2(x)$ тем более равно 1. Теперь перемножим их:



Вне промежутка $[a-2\varepsilon, b+2\varepsilon]$, их произведение равно 0. В $[a, b]$ их произведение равно нулю. А в $[a - 2\varepsilon, a]$ и $[b, b + 2\varepsilon]$ один из множителей равен единице, а другой — больше единицы. $\square$

5.6 Умножение рядов

Пусть у нас есть 2 полинома: $P(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$ и $Q(x) = b_0 + b_1 x + ... + b_n x^n$, перемножим их и получим слагаемые вида $a_i b_j x^{i+j}$, где $0 \leq i,\ j \leq n$

Их можно записать в виде матрицы:

$$\begin{array}{c|cccc}
 & \underline{a_0} & \underline{a_1} & \dots & \underline{a_n} \\
b_0 & a_0b_0x & a_1b_0x & \dots & a_nb_0x^n \\
b_1 & a_0b_1x & a_1b_1x^2 & \dots & a_nb_1x^{n+1} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
b_n & a_0b_nx^n & a_1b_nx^{n+1} & \dots & a_nb_nx^{2n}
\end{array}$$

Естественно желание «собрать» все коэффициенты по степеням x:

$c_kx^k = (a_0b_k + a_1b_{k-1} + ... + a_kb_0)x^k$ при $k \le n$. (равенство (1))

Если мы перемножаем ряды, то наша матрица становится бесконечной, и «тянет» за собой в бесконечность полином, при этом никаких ограничений вида $k \le n$ не должно быть.

Пусть у нас есть 2 числовых ряда: $(A)\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ и $(B)\sum_{k=1}^{\infty} b_k$

Определение. Произведением рядов (A) и (B) называется ряд $(C)\sum_{k=0}^{\infty} c_k$, где c_k определяются равенством (1). То есть мы группируем нашу матрицу по диагонали и получаем произведение рядов.

Теорема. *Если $(A)\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ и $(B)\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ абсолютно сходятся, то ряд $(C)\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ тоже абсолютно сходится и его сумма $C = A \cdot B$*

Доказательство. Посмотрим, что представляет из себя частичная сумма $c_k = \sum_{i,j\ \ i+j=k} a_ib_j$.

$$C_n = \sum_{k=0}^{n} c_k = \sum_{k=0}^{n}\sum_{i+j=k} a_ib_j = \sum_{i+j\le n} a_ib_j \qquad (1)$$

— частичная сумма ряда (C).

Разобьем дальнейшее доказательство на 2 части:

1) **Ряды (A) и (B) положительные.**

$$C_n = \sum_{i+j\le n} a_ib_j \le \sum_{i\le n,\ j\le n} a_ib_j = A_nB_n$$

где $A_n = a_0 + ... + a_n,\ B_n = b_0 + ... + b_n$. Таким образом, $C_n \le A_nB_n \to AB$. Значит, последовательность C_n ограничена (так как ограничены (A) и (B)). Мы рассматриваем случай, когда $(A) > 0,\ (B) > 0$. Значит, $(C) > 0$. Его частичные суммы ограничены, а значит, он сам сходится.

Ограничим произведение: $C_n \le A_nB_n \le C_{2n}$

$$C_{2n} = \sum_{i+j\le 2n} a_ib_j \ge \sum_{i\le n,\ j\le n} a_ib_j = A_nB_n$$

Ряд $C_n \to C$ и $C_{2n} \to C$, следовательно, по теореме о двух милиционерах, $A_nB_n \to C$ и, одновременно, $A_nB_n \to AB$, следовательно, $C = AB$.

Для положительных рядов наша теорема доказана.

2) **Общий случай.**

Будем рассматривать $(A*)\sum_n |a_n|,\ (B*)\sum_n |b_n|,\ (C*)\sum_n |c_n|,\ (D)\sum_{n=0}^{\infty} d_n$.

Вы хотите об этом поговорить? А придется:

$$|c_n| = |\sum_{i+j=n} a_ib_j| \le \sum_{i+j=n} |a_i||b_i| = d_n \qquad (3)$$

То есть $(D) = (A*)(B*)$. По доказанному, ряд (D) сходится. По неравенству (3) $(C*)$ сходится, следовательно, (C) сходится абсолютно.

Остается вычислить сумму:

Докажем, что $C_{2n} - A_nB_n \to 0 \quad (4)$. Если мы это докажем, то перейдем к пределу и там получим, что $C - AB = 0$.

Оценим:

$$|C_{2n} - A_nB_n| = |\sum_{i+j\leq 2n \ \max(i,j)>n} a_ib_j| \leq \sum_{i+j\leq 2n \ \max(i,j)>n} |a_i||b_j| =$$

$$= \underbrace{\sum_{i+j\leq 2n} |a_i||b_j|}_{D_{2n}} - \sum_{i,j\leq n} |a_i||b_j|$$

Отсюда, $|C_{2n} - A_nB_n| \leq \underbrace{D_{2n}}_{\to D} - \underbrace{A_n^*B_n^*}_{\to A^*B^*} \to_{n\to\infty} 0$. $\square$

Замечание. Теорема верна и в комплексном случае.

Если мы рассмотрим 2 степенных ряда: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n \quad (R_1 > 0)$ и $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n \ (R_2 > 0)$. Введем $(C) \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$, где $c_n = \sum_{i+j=n} a_ib_j$. Если $|z-a| < R$, то ряд сходится абсолютно.

5.7 Экспонента комплексного аргумента

Мы уже получили разложение показательной функции в степенной ряд:

$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!}$, $R = \pm\infty$. Но неудивительно, что такой ряд можно рассматривать и на комплексной плоскости:

$z \in \mathbb{C}$

$$\exp(z) = 1 + z + \frac{z}{2!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Мы знаем, что $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$, а что же будет в комплексном случае?

Теорема. $\forall z, w \in \mathbb{C}$ *верно, что* $\exp(z+w) = \exp(z) \cdot \exp(w)$.

Доказательство.

$$\exp(z) \cdot \exp(w) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j!} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{w^k}{k!} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

Так как ряды сходятся абсолютно, можно применить определение произведения рядов, которое гласит, что

$$c_n = \sum_{j+k=n}^{\infty} \frac{z^j}{j!} \frac{w^k}{k!}$$

Преобразуем c_n:

$$c_n = \frac{1}{n!}\sum_{j+k=n}\frac{n!}{j!k!}z^j w^k = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{(n-k)!k!}z^{n-k}w^k =$$

$$\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}z^{n-k}w^k = \frac{1}{n!}(z+w)^n$$

Отсюда

$$\exp(z)\cdot\exp(w) = \sum_{n=0}^{\infty}c_n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(z+w)^n = \exp(z+w)$$

□

Свойства (как функции $\exp(z)\equiv f(z)\equiv e^z$):

1) $f(0)=1,\ f(z)\neq 0\ \forall z$.

Пусть $f(z_0)=0$. Тогда $f(z)=f(z_0+(z-z_0))=f(z_0)f(z-z_0)=0\cdot f(z-z_0)=0$, то есть $\forall z\ f(z)=0$. Противоречие.

2) $\dot{\mathbb{C}}=\mathbb{C}\backslash\{0\}$, то $(\mathbb{C},+)\longrightarrow^{\exp}(\dot{\mathbb{C}}^*,\cdot)$, где экспонента — гомоморфизм.

3) $\forall z\ \forall n\in\mathbb{N}$ верно, что $f(nz)=[f(z)]^n$.

Проверим по индукции: $f((n+1)z)=f(nz+z)=f(nz)\cdot f(z)=[f(nz)]^n\cdot f(z)$.

4) $f(\overline{z})$. Мы знаем, что $\overline{z\cdot w}=\overline{z}\cdot\overline{w}$ и $\overline{z+w}=\overline{z}+\overline{w}$. Тогда $\exp(\overline{z})=\overline{\exp}(z)$.

$P(\overline{z})=\overline{a_0}+...+\overline{a_n}(\overline{z})^n$, что дает в случае вещественных коэффициентов $P(\overline{z})=\overline{P(z)}$.

$S_n(z)=1+z+...+\frac{1}{n!}z^n$, откуда $S_n(\overline{z})=\overline{S_n(z)}$, так как коэффициеты вещественные. $S_n(\overline{z})\to\exp(\overline{z})$, $\overline{S_n(z)}\to\overline{\exp(z)}$.

5.7.1 Экспонента с чисто мнимым показателем

$z=it$, где $t\in\mathbb{R}$.

Теорема. $e^{it}=\cos t+i\sin t$.

Доказательство.

$$e^{it}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(it)^n}{n!}=(*)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(it)^{2k}}{(2k)!}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(it)^{2k+1}}{(2k+1)!}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{t^{2k}}{(2k)!}+\sum_{k=0}^{\infty}i\frac{(-1)^k t^{2k+1}}{(2k+1)!}=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{t^{2k}}{(2k)!}+i\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k t^{2k+1}}{(2k+1)!}=\left(1-\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{4!}-...\right)+i\left(t-\frac{t^3}{3!}+\frac{t^5}{5!}-...\right)=\cos t+i\sin t$$

(*)Если мнимую единицу возводить в четную степень, получим -1: $(i)^{2n}=(-1)^n$, а $(i)^{2k+1}=i(i)^{2k}=i(-1)^k$. □

Отметим некоторые свойства экспоненты с чисто мнимым показателем:

1) $|e^{it}|=1$

$|e^{it}|^2=e^{it}\overline{(e^{it})}=e^{it}\cdot\overline{e}^{it}=e^{it}\cdot e^{-it}=e^0=1$.

2) $t\to e^{it}$ — гомоморфизм. $S=\{z\in\mathbb{C}|\ |z|=1\}$

Ядро этого гомоморфизма: $e^{it}=1\Leftrightarrow t=2\pi k$.

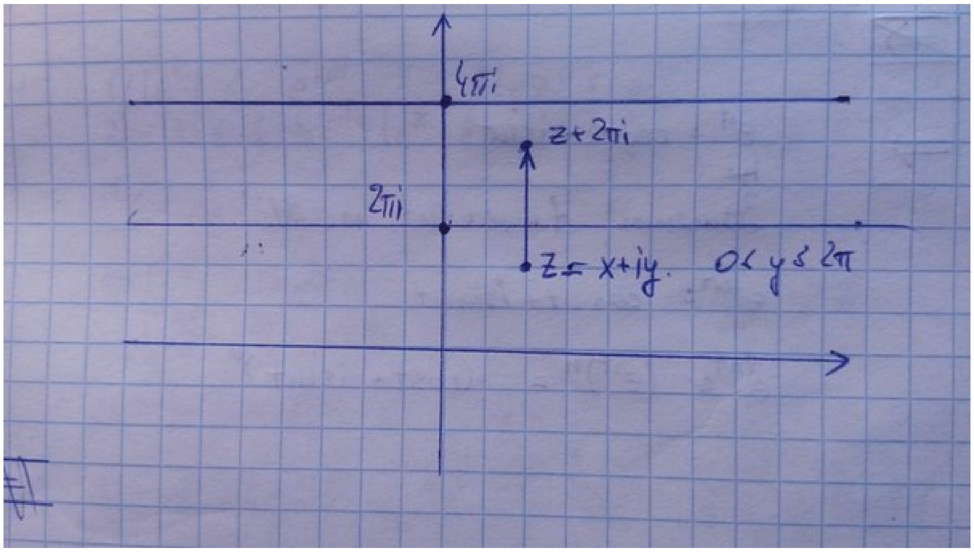
Следствие:

$e^{it} = \cos t + i \sin t$
$e^{-it} = \cos t - i \sin t$
Отсюда

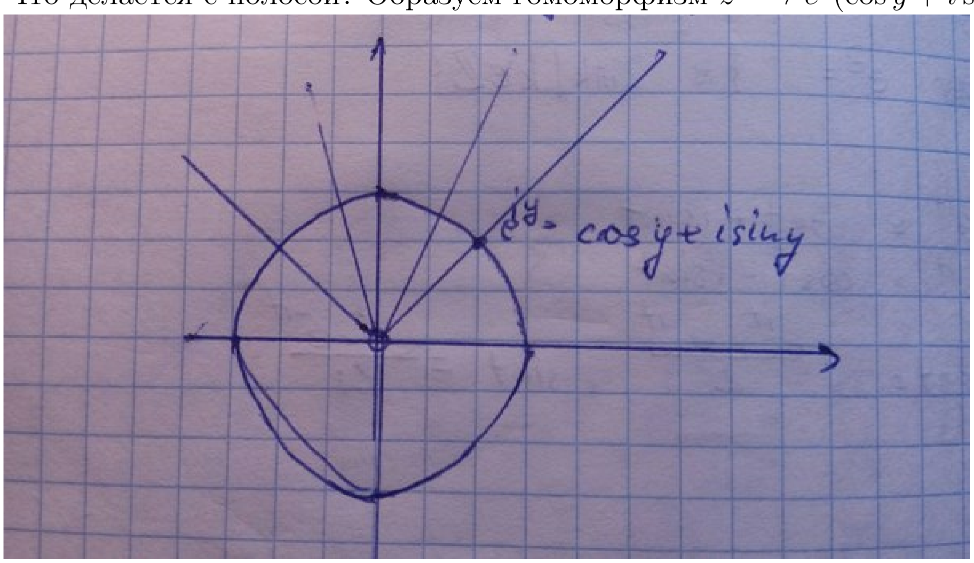
$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}, \quad \sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$$

3) Экспонента с комплексным показателем периодична и имеет период $2\pi i$:

$$e^{z+2\pi i} = e^z \cdot e^{2\pi i} = e^z(\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = e^z$$



Какие значения может принимать экспонента?
$z = x + iy, \ 0 \le y \le 2$
$e^z = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$
$|e^z| = |e^x \cdot e^{iy}| = e^x \qquad (*)$.
Что делается с полосой? Образуем гомоморфизм $z \longrightarrow e^x(\cos y + i \sin y) = w$.



Если зафиксировать y и менять x, то экспонента будет меняться по лучу. Горизонтальные прямые переходят в лучи, исходящие от центра. А меняющиеся y при фиксированном x обходят окружности. Таким образом, вся полоса отображается в комплексную плоскость с выколотой точкой $[0, 0]$. Если мы возьмем полосу $\alpha < y < \alpha + 2\pi$, то мы получили бы плоскость с разрезом по лучу, отклоненному на угол α.

Еще одно следствие:

$e^{it} = \cos t + i\sin t$. Заменим t на nt.

$$\cos nt + i\sin nt = e^{int} = \exp(nit) = (e^{it})^n = (\cos t + i\sin t)^n$$

Это формула Муавра. Благодаря ей мы можем рассматривать свойства различных тригонометрических функций, к примеру:

$\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta) = (\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta)$, откуда $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$.

Допустим, что у нас не было никаких синусов и косинусов до этого момента. Тогда мы можем определить их как

$$\cos t = Re\ e^{it},\ \sin t = Im\ e^{it}$$

откуда вывести все нужные формулы. Таким образом, посредством экспоненты и комплексных чисел мы можем определить тригонометрические функции.

Также мы можем определить экспоненту как

$e^x = \lim(1+\frac{x}{n})^n$. Для этого докажем теорему, но перед ней

Лемма. *1)* $|e^z| \le e^{|z|},\ |1+z| \le e^{|z|}$

2) $|z| \le 1$, *то* $|e^z - (1+z)| \le |z|^2$

Доказательство. 1) $|e^z| = e^{Re\ z} \le e^{|z|}$

$|1+z| \le 1+|z| \le 1+|z|+\frac{|z|^2}{2!}+\ldots = e^{|z|}$

2) $e^z - (1+z) = \frac{z^2}{2!}+\ldots+\frac{z^n}{n!}+\ldots$

$$|e^z-(1+z)| \le \frac{|z|^2}{2}+\ldots+\frac{|z|^n}{n!}+\ldots \le |z|^2\left(\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\underbrace{\frac{1}{n!}}_{\ge 2^{n-1}}+\ldots\right) \le |z|^2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots\right) = |z|^2$$

□

Также нам понадобится ранее доказанная лемма, которая гласит:

$u, v\in\mathbb{C},\ |u|\le r,\ |v|\le r$, тогда $|u^n - v^n| \le nr^{n-1}|n-v| \quad (+)$.

Теорема. *(3)* $\forall z \in (1+\frac{z}{n})^n \to e^z$, *кроме того,* $\forall R>0$ *выполняется* $\left(1+\frac{z}{n}\right)^n \rightrightarrows e^z$ *в* $\overline{B}(0,R)$.

Доказательство. Оценим $|e^z - (1+\frac{z}{n})^n|$. Будем принимать $v = 1+\frac{z}{n}$. Представим $e^z = e^{n\frac{z}{n}} = \left(e^{\frac{z}{n}}\right)^n$ и примем $u = e^{\frac{z}{n}}$ и будем считать, что $|z|\le n$, то есть дробь по модулю меньше единицы.

$$|e^z - (1+\frac{z}{n})^n| = |\left(e^{\frac{z}{n}}\right)^n - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n|$$

Оценим модули: $|u| = |e^{\frac{z}{n}}| \le e^{\frac{|z|}{n}}$, $|v| \le e^{\frac{|z|}{n}} = r$. Применим старую лемму:

$$|e^z - (1+\frac{z}{n})^n| \le n\left(e^{\frac{|z|}{n}}\right)^{n-1}|e^{\frac{z}{n}} - (1+\frac{z}{n})| \le n\left(e^{\frac{|z|}{n}}\right)^n \cdot |\frac{z}{n}|^2 = \frac{|z|^2 e^{|z|}}{n} \to_{n\to\infty} 0$$

Вторая часть теоремы («кроме того»):
Если мы в круге, то $|z| \leq R$ и мы будем считать, что $n > R$. Тогда

$$|e^z - (1 + \frac{z}{n})^n| \leq \frac{|z|^2 e^{|z|}}{n} \leq \frac{R^2 e^R}{n}$$

Если мы возьмем супремум по кругу от этой разности:

$$\sup_{|z| \leq n} |e^z - (1 + \frac{z}{n})^n| \leq \frac{R^2 e^R}{n}$$

что означает наличие в круге равномерной сходимости (и компактной тоже). □

$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 1 - \frac{z^2}{2!} + ...$
$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = z - \frac{z^3}{3!} + ...$
А если рассмотреть косинус чисто мнимого аргумента?
$\cos it = \frac{e^{-t} + e^t}{2} = \cosh t$
$\sin it = \frac{e^{-t} - e^t}{2i} = i\frac{e^t - e^{-t}}{2} = i \sinh t.$

Как обычные синус и косинус параметризуют окружность, так и гиперболические синус и косинус параметризуют гиперболу:

$x = \cosh t,\ y = \sinh t.$

Часть III

Функции от многих переменных

6 Непрерывные отображения

6.1 Пространство $\mathbb{R}^m$

Определение. $\mathbb{R}^m,\ m \in \mathbb{N}$. Множество $\mathbb{R}^m$ — множество упорядоченных наборов из m чисел: $\mathbb{R}^m \ni x,\ x = (x_1, ..., x_m)$.

Упорядоченный набор: $\{1, 2, ...m\} \to^{\varphi} \mathbb{R}$.

Числа $x_1, ..., x_m$ — координаты.

Если у нас есть 2 точки с координатами: $x = (x_1, ..., x_m)$ и $y = (y_1, ..., y_n)$, то под суммой и разностью мы будем понимать наборы вида $x \pm y = (x_1 \pm y_1, ..., x_n \pm y_n)$.

При умножении на число $\alpha \in \mathbb{R}:\ \alpha x = (\alpha x_1, ..., \alpha x_m)$.

Набор $0_m = (0, ..., 0)$ мы будем называть нулем и чаще всего не будем писать индекс m под нулём (при непонятках руководствоваться здравым смыслом).

При таком сложении и умножении на скаляр выполняются все аксиомы векторного пространства и точки подобного вида мы будем называть векторами (всё, привет, АТЧ).

Ноль выполняет обычные функции: не изменяет набор при сложении и вычитании.

Раз это векторное пространство, то мы можем говорить о базисах.

Среди наборов, претендующих на базис, мы выделим следующие: $e_1 = (1, 0, ..., 0),\ e_2 = (0, 1, ..., 0),\ ...,\ e_m = (0, 0, ..., 1)$.

Чтобы получить вектор $x = (x_1, ..., x_m)$ нужно сделать $x_1 e_1 + x_2 e_2 + ... + x_m e_m$. Таким образом, любой вектор — линейная комбинация базисных векторов.

Определение. Превратим наше пространство в евклидово: $x = (x_1, ..., x_m),\ y = (y_1, ..., y_m)$, то их скалярное произведение будем обозначать как $< x, y >$ и $< x, y >= x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_my_m$.

Ясно всем и всегда, что $< 0, y >= 0$.
Несколько слов о свойствах скалярного произведения:
1) $< x, y >=< y, x >$, так как умножение чисел коммутативно.
2a) $< x' + x'', y >=< x', y > + < x'', y >$ (аддитивность по аргументу)
2b) $\alpha \in \mathbb{R}$, $< \alpha x, y >= \alpha < x, y >$ (однородность по аргументу)
Следствие из свойства 2:
3) $< \alpha x' + \beta x'', y >= \alpha < x', y > +\beta < x'', y >$.
С помощью скалярного произведения можно ввести аналог длины для вектора:

Определение. Нормой вектора $x = (x_1, ..., x_m)$ бы будем называть

$$\sqrt{< x, x >} = \sqrt{\sum_{k=1}^{m} x_k^2} = ||x||$$

Для точек $z \in \mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{C}$ мы будем писать $|z|$.

Определение. Число m называется размерностью пространства.

Свойства нормы:
1) $||x|| \geq 0,\ ||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
2) $||\alpha x|| = |\alpha| \cdot ||x||\ \forall \alpha \in \mathbb{R}$, в частности, $|| - x|| = ||x||$.

Продолжим перечислять свойства скалярного произведения:
4) $| < x, y > | \leq ||x|| \cdot ||y||$ (неравенство Коши).
Доказательство: введем вспомогательный полином: $P(t) = ||x + ty||^2 =< x + ty, x + ty >=< x, x > +t < x, y > +t < y, x > +t^2 < y, y >= ||x||^2 + 2t < x, y > +t^2||y||^2$ — неотрицательный квадрат нормы.
Дискриминант $4 < x, y >^2 -4||x||^2||y||^2 \leq 0$. Отсюда $< x, y >^2 \leq ||x||^2 \cdot ||y||^2$.
Неравенство Коши обращается в равенство тогда и только тогда, когда векторы линейно зависимы.
5) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$. (неравенство треугольника).
Доказательство:
Оценим $||x+y||^2 =< x+y, x+y >= ||x||^2+2 < x, y > +||y||^2 \leq ||x||^2+2||x||\cdot||y||+||y||^2 = (||x|| + ||y||)^2$. Извлекая из крайних частей квадратный корень, получим то, что нужно.
5') $|||x|| - ||y||| \leq ||x - y||$. (посчитайте количество палок на ночь)
Доказательство: $||x|| = ||(x-y)+y|| \leq ||x-y||+||y||$, откуда $||x||-||y|| \leq ||x-y||$ и, так как обе переменных равноправны, $||y||-||x|| \leq ||y-x|| = ||x-y||$. Отсюда $|||x||-||y||| \leq ||x-y||$.

Наличие нормы позволяет сделать наше пространство метрическим:

Определение. $\rho(x, y) = ||x - y||$ — расстояние.

Свойства расстояния:
1) $\rho(x, y) \geq 0,\ \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
2) Расстояние симметрично: $\rho(x, y) = \rho(y, x)$.

3) $\rho(x,y) \le (x,z) + \rho(z,y)$.
$\rho(x,y) = ||x-y|| = ||(x-z)+(z-y)|| \le ||x-z|| + ||z-y|| = \rho(x,z) + \rho(z,y)$.
Неравенство Коши позволяет ввести понятие угла между векторами:
$| < x, y > | \le ||x|| \cdot ||y||$.
$-1 \le \underbrace{\dfrac{< x, y >}{||x|| \cdot ||y||}}_{=\cos\varphi} \le 1$
Для нас важен случай, когда $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Определение. x ортогонален y, если $< x, y >= 0 \Leftrightarrow < y, x >= 0$.

Нулевой вектор ортогонален любым другим.
Ортогональность будем обозначать символом $\perp$.

Теорема. *(теорема Пифагора) $x_1, ..., x_N$ — векторы. Если $x_i \perp x_k$ при $i \ne j$, то $||x_1 + x_2 + ... + x_N|| = ||x_1||^2 + ... + ||x_N||^2$.*

Доказательство.

$$\left|\left|\sum_{k=1}^{N} x_k\right|\right|^2 = < \sum_{k=1}^{N} x_k, \sum_{i=1}^{N} x_i >= \sum_{i,k=1}^{N} < x_k, x_i >=$$

$$\sum_{k=1}^{N} < x_k, x_k >= \sum_{k=1}^{N} ||x_k||^2$$

Теперь мы будем обозначать номера векторов вот так: $x^{(1)}, ..., x^{(N)}$, потому что $x_1, ..., x_N$ — координаты. В теореме выше x_N — векторы. $\square$

Теперь $\mathbb{R}^m$ — евклидово пространство с метрикой $||x-y||$. Если смотреть на базис e, то можно увидеть, что он ортонормирован.

Отображение сдвига:
Пусть у нас есть вектор $a = (a_1, ..., a_m)$. И есть отображение $T_a : \ x \longrightarrow T_a(x) = x + a$.
Понятно, что $T_a(x) = x + a$ и $T_a(y) = y + a$ и расстояние между ними не изменится.

Определение. $B(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^m | \ ||x-a|| < r\}$ — открытый шар.
$\overline{B}(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^m | \ ||x-a|| \le r\}$ — закрытый шар.
$S^{m-1}(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^m | \ ||x-a|| = r\}$ — сфера.
(Привет, топология. Что за фигня здесь творится?)

Определение. $\Delta_k =< a_k, b_k >\subset \mathbb{R}$
$x = (x_1, ..., x_m) \ x_k \in \Delta_k, \ k = 1, 2, ..., m$.
Это декартово произведение промежутков Δ_k, которое обозначается $\prod_{k=1}^{m} \Delta_k$ и называется m-мерным параллелепипедом. Если все промежутки открыты, то параллелепипед открытый, а если замкнуты — то и параллелепипед замкнут.

Если $a = (a_1, ..., a_m)$ и $b = (b_1, ..., b_m)$, то $c = \frac{1}{2}(a+b)$ называется центром параллелепипеда.

А $b_k - a_k$ называется длиной ребер параллелепипеда. Если же $b_k - a_k = 2h > 0$, то параллелепипед — куб.

Если Δ_k — открыты, то $c = (c_1, ..., c_m), \ c_k = \frac{a_k + b_k}{2}$. $\Delta_k = (c_k - h, c_k + h)$

Куб открытый мы будем обозначать $Q(c,h)$, где c—центр, а h — половина длины ребра. Закрытый куб будем обозначать по аналогии с закрытым шаром $\overline{Q}$.

6.2 Сходимость в пространстве $\mathbb{R}^m$

Мы ввели метрику: $\rho(x,y) = ||x-y||$.

Определение. $x^{(n)} \longrightarrow a \Leftrightarrow \rho(x^{(n)},a) \to 0$, то есть $||x^{(n)}-a|| \to_{n\to\infty} 0$, то есть $\forall\varepsilon > 0\ \exists N:$ $\forall n > N$ верно $||x^{(n)}-a|| < \varepsilon \Leftrightarrow \varepsilon > 0\ ||x^{(n)}-a|| < \varepsilon$ начиная с некоторого места.

$||x-a|| < \varepsilon \Leftrightarrow x \in B(a,\varepsilon) \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ x^{(n)} \in B(a,\varepsilon)$ начиная с некоторого места.

Заметим, что $\max_k |x_k| \le ||x|| = \sqrt{\sum_{k=1}^m x_k^2} \le |x_1| + |x_2| + ... + |x_m|$. (1)

В геометрических терминах: пусть $x \in B(a,r)$, что означает, что $\sqrt{\sum |x_k - a_k|^2} < r$, что означает $|x_k - a_k| < r$, что в свою очередь означает $x \in (a_k - r, a_k + r)$. То есть $x \in Q(a,r)$. Отсюда очевидно, что $B(a,r) \subset Q(a,r)$, что совершенно очевидно в геометрическом смысле.

Если точка $x = (x_k)_{k=1}^m \in Q(a,r)$, то $|x_k - a_k| < r$, значит, $||x-a|| = \sqrt{\sum (x_a - a_k)^2} \le r\sqrt{m}$, то есть точка попадает в шар $B(a, r\sqrt{m})$: $Q(a, {}^r/\sqrt{m}) \subset B(a,r) \subset Q(a,r) \subset B(a, r\sqrt{m})$ (2).

Тогда $x^{(n)} \to a\ \forall\varepsilon > 0\ x^{(n)} \in Q(a,\varepsilon)$ начиная с некоторого места.

Теорема. *(1)*

$x^{(n)} = (x_1^{(n)}, ..., x_m^{(n)})$, $a = (a_1, ..., a_m)$. $x^{(n)} \to_{n\to\infty} a$ по норме $\Leftrightarrow$ $x_1^{(n)} \to a$, $x_2^{(n)} \to a$, ..., $x_m^{(n)} \to a^{(m)}$ $(*)$.

Последовательность $x^{(n)}$ сходится к а покоординатно.

Доказательство. $||x^{(n)} - a|| \to_{n\to\infty} 0$, тогда по неравенству (1) $\forall k$, $\forall n$ $|x_k^{(n)} - a_k| \le ||x^{(n)} - a||$.

Обратно: по неравенству (1) $||x^{(n)} - a|| \le |x_1^{(n)} - a_1| + ... + |x_m^{(n)} - a_m| \to_{n\to\infty} 0$, так как каждая разность стремится к нулю. □

Следствие:
$x^{(n)} \to a$, $y^{(n)} \to b$, $\alpha_n \to \alpha$, $\beta_n \to \beta$. Тогда $z^{(n)} = \alpha_n x^{(n)} + \beta_n y^{(n)} \to_{n\to\infty} \alpha a + \beta b$.
Возьмем k-ю координату:
$z_k^{(n)} = \alpha_n x_k^{(n)} + \beta_n y_k^{(n)} \to \alpha a_k + \beta b_b$.

Определение. Пусть $\{x^{(n)}\}_{n=1}^\infty$, $x^{(n)} \in \mathbb{R}^m$. Последовательность фундаментальна (сходящаяся в себе) если $\forall\varepsilon > 0\ \exists N:\ \forall n,k > N\ ||x^{(n)} - x^{(k)}|| < \varepsilon$. Существенно, что все точки с большими номерами становятся близкими. Если последовательность имеет предел, то она фундаментальна.

Замечание. $x^{(n)} \to_{n\to\infty} a \Rightarrow \{x^{(n)}\}$ —фундаментальна.

Доказательство. $\forall\varepsilon > 0\ ||x^{(n)} - a|| < \frac{\varepsilon}{2}$ начиная с некоторого места. Предположим, что это неравенство справедливо $\forall n > N$. Если $k > N$, то $||x^{(k)} - a|| < \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда $||x^{(n)} - x^{(k)}|| = ||(x^{(n)} - a) + (a - x^{(k)})|| \le ||(x^{(n)} - a)|| + ||(a - x^{(k)})|| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. □

Это очевидно, но не очевидно обратное (верно лишь в $\mathbb{R}^n$):
$\rho(x^{(n)}, x^{(k)}) < \varepsilon$, то последовательность фундаментальна.

Теорема. *(2)*

Пусть $\{x^{(n)}\} \subset \mathbb{R}^n$, фундаментальна. Тогда $x^{(n)}$ имеет предел.

Доказательство. Рассмотрим $x^{(n)} - x^{(k)} = (x_1^{(n)} - x_1^{(k)}, ..., x_m^{(n)} - x_m^{(n)})$. Тогда $|x_i^{(n)} - x_i^{(k)}| \leq ||x^{(n)} - x^{(k)}|| < \varepsilon$ начиная с некоторого места.

Получаем, что $\forall i$ $\{x_i^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна, а значит, имеет предел. По теореме из 1 семестра $\exists$ конечный $\lim_{n\to\infty} x_i^{(n)} = a_i$, что верно $\forall i = 1, ..., m$. Таким образом, $x^{(n)} \to a = (a_1, ..., a_m)$ покоординатно. А значит, сходится и по норме (по теореме выше). $\square$

Определение. $A \in \mathbb{R}^m$ ограничено, если $\exists R$ такое, что $A \subset \overline{B}(0, R) \Leftrightarrow \forall x \in A$ верно, что $||x|| \leq R$.

Определение. X, $T : X \to \mathbb{R}^m$. T — ограничено, если $T(X)$ — ограничено, что можно расшифровать как $\exists R > 0 : \ \forall x \in X : \ ||T(x)|| \leq R$

В частности, это отностится к последовательностям, т.к. последовательности — отображения $\mathbb{N} \to \mathbb{R}^m$

$\{x^{(n)}\}$ — ограничена $\Leftrightarrow \exists R : \ ||x^{(n)}|| \leq R \ \forall n$.

Теорема. *(3) (Принцип Больцано-Вейерштрасса)*

$\{x^{(n)}\}$ — последовательность векторов пространства $\mathbb{R}^n$. Если последовательность ограничена, то у нее существует сходящаяся подпоследовательность $\{x^{(n_i)}\}$.

Доказательство. По индукции. Индукция по размерности:

$n = 1$ результат известен (Принцип Больцано-Вейерштрасса для числовых последовательностей, 1 семестр).

Пусть теорема верна в $\mathbb{R}^m$, докажем, что она верна в $\mathbb{R}^{m+1}$:

$x^{(n)} \in \mathbb{R}^{m+1}$ $\{x^{(n)}\}$ — ограничен.

Введем вектор $x^{(n)} = (x_1^{(n)}, ..., x_{m+1}^{(n)})$ и вспомогательную последовательность $\tilde{x}^{(n)} = (x_1^{(n)}, ..., x_m^{(n)})$. Ясно, что $||\tilde{x}^{(n)}|| \leq ||x^{(n)}||$. Поэтому к $\tilde{x}^{(n)}$ можно применить индукционное предположение: $\exists n_k : \ \ \tilde{x}^{(n_k)} \to \tilde{a} \in \mathbb{R}^m$. Пусть $\tilde{a} = (a_1, ..., a_m)$, тогда $x_i^{(n_k)} \to_{k\to\infty} a_i$ $i = 1, ..., m$. Теперь расмотрим $x^{(n_k)} = (\underbrace{x_1^{(n_k)}}_{\to a_1}, ..., \underbrace{x_m^{(n_k)}}_{\to a_m}, x_{m+1}^{(n_k)})$. $x_{m+1}^{(n_k)}$ можно проредить, чтобы получилась сходящаяся подпоследовательность: берем n_{k_i}, такую, что $x_{m+1}^{(n_{k_i})} \to a_{m+1}$. Такая последовательность существует согласно одномерному случаю. Теперь рассматриваем $x^{(n_{k_i})} = (\underbrace{x_1^{(n_{k_i})}}_{\to a_1}, ..., \underbrace{x_m^{(n_{k_i})}}_{\to a_m}, \underbrace{x_{m+1}^{(n_{k_i})}}_{\to a_{m+1}})$. Она имеет предел покоординатно, а значит, и по норме. Таким образом, принцип Больцано-Вейерштрасса справедлив и для ограниченной последовательности в пространстве $\mathbb{R}^m$. $\square$

6.3 Открытые и замкнутые множества в $\mathbb{R}^m$

Определение. $A \subset \mathbb{R}^m$. $a \in A$ —внутренняя точка A, если $\exists \varepsilon > 0$ $B(a, \varepsilon) \subset A$.

Определение. $G \subset \mathbb{R}^m$ — открытое, если у него каждая точка внутренняя.

Замкнутое множество — дополнение открытого.

Рассмотрим $B(a, r)$, $x_0 \in B(a, r)$. Докажем, что x_0 — внутренняя. (x_0, 0 здесь — номер). Рассмотрим $||x_0 - a|| < r$. Возьмем $||x_0 - a|| + \varepsilon < r$. Теперь мы можем утверждать, что $B(x_0, \varepsilon) \subset B(a, r)$. В самом деле, пусть $x \in B(x_0, \varepsilon)$. $||x - a|| = ||(x - x_0) + (x_0 - a)|| \leq \underbrace{||x - x_0||}_{<\varepsilon} + ||x_0 - a|| < \varepsilon + ||x_0 - a|| < r$ по выбору ε. По определению шара, $x \in B(a, r)$.

Теорема. $\{G_\alpha\}_\alpha$ *— открытое,* $\{F_\alpha\}$ *— замкнуто.*

1) $\cup_\alpha G_\alpha$ *— открыто.*

1') $\cap_\alpha G_\alpha$ *— замкнуто.*

2) $G_1, ..., G_N$ *— открыто* $\Rightarrow \cap_{k=1}^N G_k$ *— открыто.*

2') $F_1, ..., F_N$ *— закрыто* $\Rightarrow \cup_{k=1}^N F_k$ *— закрыто.*

Доказательство.

1) Пусть $a \in \cup_\alpha G_\alpha \Rightarrow \exists \alpha_0 : a \in G_{\alpha_0}$. G_{α_0} открыто, значит, $\exists B(a, \varepsilon) \subset G_{\alpha_0} \subset \cup_\alpha G_a$.

2) $a \in \cap_\alpha G_\alpha$. Тогда $\forall k$ $a \in G_k$ — открыто, поэтому a — внутренняя точка G_k. Значит, $\exists \varepsilon_k > 0 :\ B(a, \varepsilon_k) \subset G_k$. Возьмем $0 < \varepsilon = \min_{k=1,...,N} \varepsilon_k$. Тогда $B(a, \varepsilon) \subset B(a, \varepsilon_k) \subset G_k$ $\forall k = 1, ..., N$. Значит, он содержится и в пересечении G_k.

Для доказательства «штрихованных» утверждений вспомним формулы двойственности:

$X,\ E_\omega$ $\omega \in \Omega$. $X \backslash E$ — дополнение, E^C.

Собственно, формулы:

$\cup_\omega E_\omega^C = (\cap_{\omega E \omega})^C$, $\cap_\omega E_\omega^C = (\cup_{\omega E \omega})^C$

Вернемся к доказательству: $F_\alpha = G_\alpha^C$.

$\cap_\alpha F_\alpha = \cap_\alpha G_\alpha^C = (\cup_\alpha G_\alpha)^C$. □

В вопросах, связанных с пределами, удобно рассматривать проколотые окрестности: $\dot{V}(a) = V(a) \backslash \{a\}$. С их помощью определяются предельные точки множества:

Определение. Если $A \subset \mathbb{R}^m,\ a \in \mathbb{R}^m$, a — предельная точка, если $\forall V(a)$ $\dot{V}(a) \cap A \neq \varnothing$.

Благодаря тому, что база счетна, то справедлива старая теорема:

a — точка сгущения $A \Leftrightarrow \exists \{x_n\} \subset A$ $x_n \to a,\ x_n \neq a$ $\forall n$. Доказать самостоятельно по аналогии со старым доказательством.

А что если отказаться от требования $x_n \neq a$? Если $x_n = a$ начиная с некоторого места, то наша последовательность x_n станционарна, то есть $a \in A$ и наша последовательность тривиальна и начиная с некоторого места постоянна.

Кроме точек сгущения еще могут быть изолированные точки. Такие точки невозможно апроксимировать с помощью последовательности x_n, однако можно апроксимировать с помощью станционарной последовательности.

Определение. $\forall V(a)$ $V(a) \cap A \neq 0$. Точки, обладающие таким свойством, называются точками прикосновения.

Определение. $ClA \equiv \overline{A} = \cap_{F \supset A} F \supset A$ — замыкание множества. Минимальное по количеству элементов множество.

Свойства:

1) $\overline{A} \supset A$

2) $\overline{A}$ — замкнуто,

3) A — замкнуто $\Leftrightarrow A = \overline{A}$.

Охарактеризуем точки замыкания:

Теорема. $a \in \overline{A} \Leftrightarrow a$ *— точка прикосновения* A.

Доказательство. Пусть $a \in \overline{A}$. Допустим противное. Пусть a — не точка прикосновения A. Значит, $\exists U(a)$, такое, что $U(a) \cap A = \varnothing$. Тогда внешность $U^C = \mathbb{R}^m \backslash U \supset A$. Это дополнение замкнуто, значит, $A \subset U^C \not\ni a$. Следовательно, $\overline{A} \subset U^C \not\ni a$. Вступаем в противоречие с тем, что нам дано. Доказано, что $a \in \overline{A} \Rightarrow a$ — точка прикосновения A.

В другую сторону: Пусть a — точка прикосновения для A. Допустим, что $a \notin \overline{A}$. Пусть $U = \mathbb{R}^m \backslash \overline{A}$. Тогда $a \in U$. U — дополнение замкнутого, открыто, то есть U — окрестность a. $U \cap \overline{A} = \varnothing$, $A \subset \overline{A}$, откуда $U \cap A = \varnothing$. Значит, a — не точка прикосновения. Противоречие. □

Следствие: $A \subset \overline{A} \Leftrightarrow \exists x_n$со свойствами:
1) $x_n \in A \; \forall n$
2) $x_n \to_{n \to \infty} a$.

Еще одно следствие: A — замкнуто $\Leftrightarrow$ из условий $x_n \in A \; \forall n, \; x_n \to a$ следует, что $a \in A$. (*) То есть множество A содержит все свои точки прикосновения.

Последний вопрос, который мы затронем — вопрос о компактных множествах.

Определение. Пусть у нас есть совокупность множеств $\{A_\omega\}_{\omega \in \Omega}$. $B \subset \cup_{\omega \in \Omega} A_\omega$ называется покрытием.

Определение. Пусть мы имеем $K \subset \mathbb{R}^m$. G_ω — открытые множества. K — компактно, если $\forall$ открытого покрытия $G_\omega \left[K \subset \cup_{\omega \in \Omega} G_\omega\right]$, $\exists \omega_1, ..., \omega_N$ (дописать)

Теорема. *$K \subset \mathbb{R}^m$ компактно $\Leftrightarrow$*
1) K — замкнуто.
2) K — ограничено.

Доказательство. списать из курса топологии. □

Теорема. *$K \subset \mathbb{R}^m$ компактно $\Leftrightarrow \forall \{x_n\}_n \subset K \; \exists x_{n_k}$ такое, что $x_{n_k} \to x_0, \; x_0 \in K$.(*)*

Доказательство. K — компактно, $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset K$. Тогда $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ ограничена. Для нее справедлив принцип Больцано-Вейерштрасса: $\exists x_{n_k} \to x_0$. $x_{n_k} \in K$, K замкнуто, $\Rightarrow x_0 \in K$. Теорема в одну сторону доказана.

В другую сторону: Пусть K обладает свойством (*). Пусть K не ограничено. Тогда $\forall n \; \exists x_n \in K$ такая, что $||x_n|| > n$. Из этой последовательности нельзя извлечь сходящейся подпоследовательности, т.к. если $x_{n_k} \to x_0$, то $\underbrace{n_k}_{\to\infty} \leq ||x_{n_k}|| = ||x_0 + (x_{n_k} - x_0)|| \leq ||x_0|| + \underbrace{||x_{n_k} - x_0||}_{\to 0} \leq C$. Противоречие, ограниченность K установлена.

Докажем замкнутость. Нам нужно проверить, что если $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset K$, $x_n \to x_0$, то $x_0 \in K$. Проверим, что $x_0 \in K$. Точки x_n лежат в K, то есть мы можем вычленить сходящуюся подпоследовательность $x_{n_k} \to y_0 \in K$. С другой стороны, если $x_n \to x_0$ то и $x_{n_k} \to x_0$, предел единственен, тогда $y_0 = x_0 \in K$. □

Если $K \subset \mathbb{R}^m$, то $a = \inf K, \; b = \sup K \Rightarrow a, b \in K$. Почему это так? Рассмотрим произвольное n. $b - \frac{1}{n}$ — не супремум K. Значит, $\exists x_n \in K$, такое, что $b - \frac{1}{n} < x_n \leq b$. $b - \frac{1}{n} \to b \Rightarrow x_n \to b$ и x_n из K и K замкнуто, т.е. содержит пределы лежащих в ней последовательностей. Значит, $b \in K$.

Компактные множества очень важны, с этим мы столкнемся в ближайшее время.

6.4 Предел и непрерывность в $\mathbb{R}^m$

Теперь в роли области задания функции будет выступать множество из $\mathbb{R}^m$:

$X \subset \mathbb{R}^m$, $f : X \to \mathbb{R}' \equiv \mathbb{R}$. f мы будем называть функцией от множества переменных.

$T : X \to \mathbb{R}^l$.

$\mathbb{R}^l \ni T(x) = (f_1(x), ..., f_l(x))$, где $f_i(x)$ — координатные функции отображения $T(x)$. Аналогично, имея координатные функции, мы можем построить отображение.

Определение. Предел функции и отображения определяются аналогично другим ситуациям:

$X \subset \mathbb{R}^m$, a — точка сгущения X, $T : X \to \mathbb{R}^l$, $y_0 \in \mathbb{R}^l$. Мы будем говорить, что $T(x) \to_{x \to a} y_0$, если $\forall V(y_0)\ \exists U(a)$ такая, что $\forall x \in \dot{U}(a) \cap X$ выполняется $T(x) \in V(y_0)$. Это можно переформулировать на языке шаров: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$, такая, что $\forall x \in \dot{B}(a, \delta) \cap X$ верно, что $T(x) \in B(y_0, \varepsilon)$. Или на языке неравенств: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ такая, что $\forall x :\ 0 < ||x - a|| < \delta,\ x \in X$ верно $||T(x) - y_0|| < \varepsilon$.

Так же можно получить характеристику предела на языке последовательностей:

Теорема. $T(x) \to_{x \to a} y_0 \Leftrightarrow \forall \{x_n\}$ *со свойствами:*

1) $x_n \in X\ \forall n$.

2) $x_n \neq a\ \forall n$,

3) $x_n \to a$

то $T(x_n) \to y_0$. *Или, что то же самое,* $T(x) \to_{x \to a} y_0 \Leftrightarrow ||T(x) - y_0|| \to_{x \to a} 0$.

Доказательство. справедливо доказательство из предыдущего семестра. □

Замечание. $T(x) = (f_1(x), ..., f_l(x))$, $y_0 = (y_1^0, ..., y_l^0)$. Тогда $|f_k(x) - y_k^0| \leq ||T(x) - y_0||$. И наоборот, $||T(x) - y_0|| \leq \sum_{k=1}^{l} |f_k(x) - y_k^0|$, где y_k^0 — вектор.

Определение. Если $T : X \to \mathbb{R}^l$, $x_0 \in X$, T — непрерывно в точке x_0 если $\lim_{x \to x_0} T(x) = T(x_0)$. Справедливо лишь если x_0 — точка сгущения либо изолированная точка. Отображение непрерывно в точке x_0 тогда и только тогда, когда координатные функции непрерывны в x_0.

Очевидно, что композиция отображений — отображение; композиция непрерывных отображений непрерывна. Проще всего это доказать на языке последовательностей.

Мы будем говорить о непрерывности в точке на языке последовательностей, хотя топологи этого не любят. Но нам пофиг.

1) $< x, y >$. $x_n \to x_0,\ y_n \to y_0$, тогда $< x_n, y_n > \to < x_0, y_0 >$

Это следует из: $|< x_n, y_n > - < x_0, y_0 >| = |< x_n - x_0, y_0 >| + |< x_0, y_n - y_0 >| \leq ||x_n - x_0|| \cdot ||y_n|| + ||x_0|| \cdot ||y_n - y_?|| \to 0$.

Следовательно, $||x - x_0|| = f(x) = \sqrt{< x, x >}$, скалярное произведение непрерывно в каждой точке, следовательно, метрика тоже непрерывна: $\rho(x, y) = ||x - y||$.

2) Мы уже говорили, что если $x_n \to x_0,\ y_n \to y_0\ \alpha_n \to \alpha,\ \beta_n \to \beta$, то $\alpha_n x_n + \beta_n y_n \to \alpha x_0 + \beta y_0$. Это свидетельствует о том, что операции непрерывны. В частности, непрерывны сдвиг и обратное к нему отображение.

Теорема. *(о непрерывном образе компактного множества)*

$X \subset \mathbb{R}^m$, *X — компактно,* $T : X \to \mathbb{R}^l$, *T — непрерывно, тогда* $Y = T(X) \Rightarrow Y$ *компакто.*

Доказательство. Характеристика компактного множества: $\forall \{y_n\} \subset Y \; \exists y_{n_k} \to y_0 \in Y$

Возьмем последовательность точек $y_n \in Y$. Т.к. Y — образ, то это значения: $\exists x_n \in X$: $y_n = T(x_n)$. Множество X компатно, поэтому из последовательности x_n можно выделить подпоследовательность: $\exists x_{n_k} \to x_0 \in X$. В силу непрерывности, $T(x_{n_k}) \to T(x_0) = y_0 \in Y$. $T(x_{n_k}) = y_{n_k}$, $y_{n_k} \to y_0 \in Y$. Характеристика проверена, Y — компактно. □

Следствие: $X \subset \mathbb{R}^m$, X — компактно, $f : X \to \mathbb{R}$, f —непрерывна, $f(X)$ компактно. (дописать)

Теорема. *(о свойствах отображений «непрерывность на компактном множестве»)*
$X \subset \mathbb{R}^m$, X — компактно, T — непрерывно, $X \to \mathbb{R}^l$. $Y = T(X)$. Предположим, что T взаимно однозначно, следовательно, $\exists T^{-1} : Y \to X$. Тогда T^{-1} непрерывно.

Доказательство. $y_0 \in Y$, докажем, что T^{-1} — непрерывно в y_0.

Допустим, что это не верно. Тогда $\exists y_n \in Y$, $y_n \to y_0$, но $T^{-1}(y_n) \not\to T^{-1}(y_0)$. Переобозначим: $T^{-1} = S$, $T^{-1}(y_n) = x_n$, $T^{-1}(y_0) = x_0$. То есть $y_n = T(x_n)$, $y_0 = T(x_0)$. Тогда, по предположению, $x_n \not\to x_0$. То есть неверно, что $\forall \varepsilon > 0 \; ||x_n - x_0|| < 0$. Тогда $\forall \varepsilon_0 > 0 : \; ||x_n - x_0|| \geq \varepsilon_0$ для бесконечного множества n, то есть $\exists x_{n_k} : \; ||x_{n_k} - x_0|| \geq \varepsilon_0 \; \forall k$. Не умаляя общности, $||x_n - x_0|| \geq \varepsilon_0 \; \forall n \quad (+)$.

Теперь используем тот факт, что наше отображение задано на компактном множестве, то есть $\exists x_{n_j} \to \bar{x} \in X$. Если мы подставим это в $(+)$, то получим, что $||x_{n_j} - x_0|| \geq \varepsilon_0 > 0 \; \forall j$. Перейдем к пределу и получим, что $||\bar{x} - x_0|| \geq \varepsilon_0 > 0$. Отсюда вывод: $\bar{x} \neq x_0$. Посмотрим, каковы образы этих точек: $T(x_0) = y_0$ по определению x_0. А $T(\bar{x}) = \lim T(x_{n_j}) = \lim_{j\to\infty} y_{n_j} = y_0$. Значит,

$$\begin{cases} T(x_0) = y_0 \\ T(\bar{x}) = y_0 \\ x_0 \neq \bar{x} \end{cases}$$

Противоречие биективности T. Таким образом, отрицание непрерывности приводит к противоречию. Теорема доказана. □

Обсудим еще одно свойство, связанное с отображением в компактном множестве.

6.5 Равномерная непрерывность отображения

Определение. Равномерная непрерывность — независимость от x свойства $|f_n(x) - g(x)| < \varepsilon$ (собственное определение)

$f : X \to \mathbb{R}$ непрерывна, $\forall x_0 \; \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$: $||x - x_0|| < \delta \Rightarrow ||f(x) - f(x_0)|| < \varepsilon$. (непрерывность в точке x_0). Но если взять другой x, то на нем график может подниматься круче и старая δ уже не будет годиться несмотря на неизменный ε.

Пример. $|\sin x - \sin x'| \leq |x - x'| < \varepsilon$. Тогда достаточно взять $\delta = \varepsilon$.

А если взять $f(x) = x^2$? Рассмотрим: x_0, $x_0 + h$: $\varepsilon > |f(x_0+h) - f(x_0)| = 2x_0h + h^2 > 2x_0h$. То есть нужно взять $\delta < \frac{\varepsilon}{2x_0}$.

Определение. $X \subset \mathbb{R}^m$, $T : X \to \mathbb{R}^l$.

T равномерно непрерыно на X, если $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$, такая, что $\forall x, x' \in X$ выполняется $||x - x'|| < \delta \Rightarrow ||T(x) - T(x')|| < \varepsilon$.

Замечание. Достаточным для равномерной непрерывности условием является условие Липшица:

Если $\exists C: \ ||T(x) - T(x')|| \le C||x - x'|| \ \forall x, x' \in X$.

Замечание. $X \subset \mathbb{R}^m, \ T : X \to \mathbb{R}^l$.

Зафиксируем $\delta > 0$ и положим $\omega_T(\delta) = \sup_{x,x' \in X, \ ||x-x'||<\delta} ||T(x) - T(x')||$ и $\omega_T(0) = 0$. ω_T — модуль непрерывности отображения.

1) $\delta < \delta_1 \ \omega_T(\delta) \le \omega_T(\delta_1)$

2) $u, v \in X$

Тогда $||T(u) - T(v)|| \le \omega_T(||u - v||)$.

Почему так? Положим $\delta = ||u - v||$. Тогда $\sup_{x,x' \in X, \ ||x-x'||<\delta} ||T(x) - T(x')|| \ge ||T(u) - T(v)||$. То есть $\omega_T(||u - v||) \ge ||T(u) - T(v)||$.

Теорема. *(Кантора)*

X — компактное подмножество в $\mathbb{R}^m$, а $T : X \to \mathbb{R}^l$. Если T непрерывно на X, то T равномерно непрерывно на X.

Доказательство. Согласно замечанию, $\forall x, x' \in X: \ ||T(x) - T(x')|| \le \omega_T(||x - x'||) \quad (1)$.

Если $\omega_T(\delta) \to_{\delta \to +0} 0$, то T — равномерно непрерывно (2). Проверим это: зададим произвольное $\varepsilon > 0$ $\omega_T(\delta) \to_{\delta \to 0+} 0$ $\exists \delta_0 > 0$, такая, что $\omega_T(\delta) < \varepsilon$ при $\delta < \delta_0$. Тогда $\forall x, x' \in X, \ ||x - x'|| < \delta_0$ и $||T(x) - T(x')|| \le \omega_T(||x - x'||) < \varepsilon$.

От противного, пусть (2) неверно: пусть $\omega_T(\delta) \not\to_{\delta \to 0+} 0$. Напомним, что ω_T возрастает. Тогда $\exists \lim_{\delta \to 0+} \omega_T(\delta) > 0$ и $\exists \lim_{\delta \to 0+} \omega_T(\delta) = \inf \omega_T(\delta) = C > 0$.

$\forall \delta > 0$ $\omega_T(\delta) \ge C > 0$, $\forall n$ $\omega_T(\frac{1}{n}) \ge C > 0$, то есть $\sup ||T(x) - T(x')|| \ge C > 0$. Тогда $\exists x_n, x'_n \in X$ такое, что одновременно $||x_n - x'_n|| \le \frac{1}{n}$ и $||T(x_n) - T(x'_n)|| \ge \frac{C}{2}$. Теперь, когда у нас есть последовательность, используем компактность:

$\exists x_{n_k} \to x_0 \in X$. Тогда $||x'_{n_k} - x_0|| \le ||x'_{n_k} - x_{n_k}|| + ||x_{n_k} - x_0|| \le ...$

Таким образом, $x'_{n_k} \to x_0$. Отсюда $||T(x_{n_k}) - T(x'_{n_k})|| \ge \frac{C}{2}$. Перейдем к пределу: $||T(x_0) - T(x_0)|| \ge \frac{C}{2} > 0$, противоречие. Следовательно, (2) верно, из него вытекает равномерная непрерывность, теорема доказана. □

6.6 Связные множества

$X \subset \mathbb{R}^m$.

Определение.

$X \cap G$ — относительно открыт в X, если G — открыто в $\mathbb{R}^m$.

$X \cap G$ — относительно замкнут в X, если G — замкнуто в $\mathbb{R}^m$.

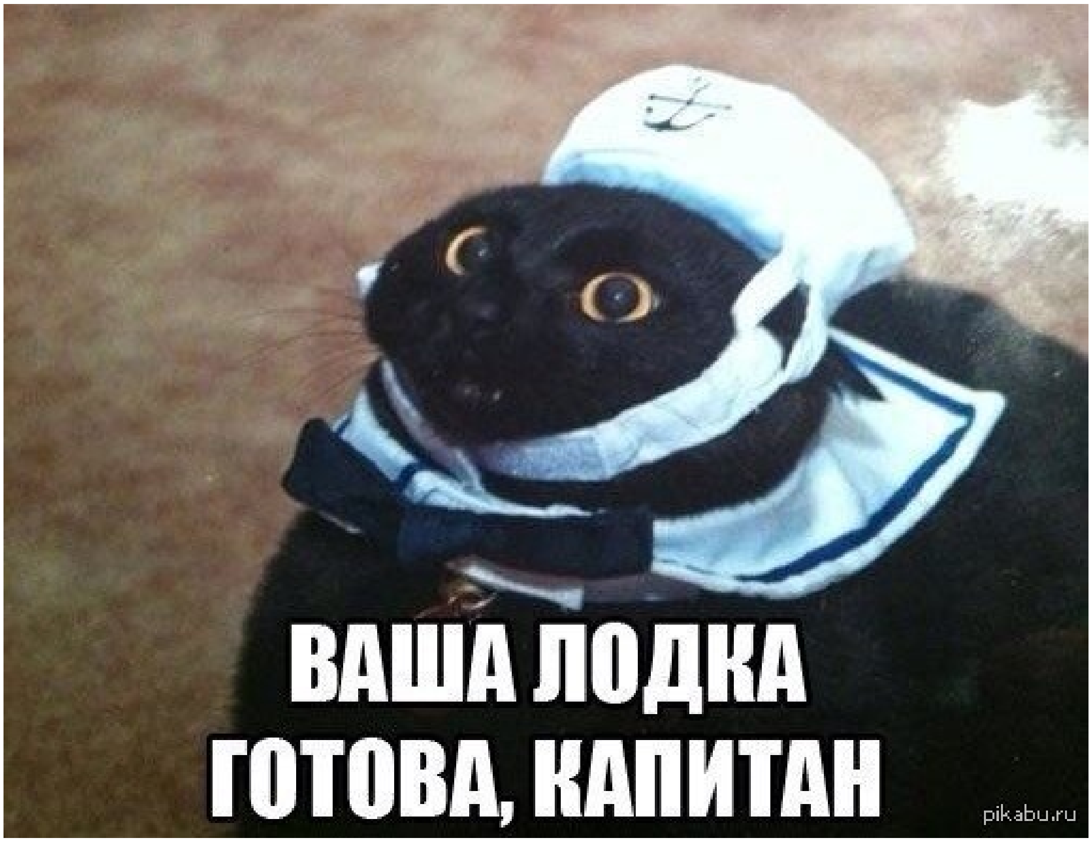
Определение. X — несвязно, если $X = A \cup B$, таких, что:

1) $A, B \ne \varnothing$;

2) $A \cap B = \varnothing$;

3) A, B относительно открыты.

Определение. Связное множество — не несвязное множество



Определение. Если $A = X \cap G$ $F = \mathbb{R}^m \backslash G$, то $B = X \backslash A = X \cap F$. $\Rightarrow B$ — дополнение A.

Теорема. *X несвязно согда (а что, топология же!) $\exists$ непрерывная на X функция, принимающая лишь 2 значения: $f : X \to \{-1, 1\}$.*

Доказательство. (А докажет нам Катя Швагер, благодаря которой это доказательство здесь и отсутствует!) □

Теорема. *Пусть $X \subset \mathbb{R}^m$ — связно. Докажем, что это промежуток: пусть $a = \inf X$, $b = \sup X$. (прокатит и для бесконечных a, b). Если $a < c < b \Rightarrow c \in X$.*

Доказательство. От противного, пусть $a < c_0 < b$, $c_0 \notin X$. $A = X \cap (-\infty, c_0)$, $B = X \cap (c_0, +\infty)$. Так как $c_0 \notin X$, то $A \cup B = X$.

Таким образом, всякое связное множество — промежуток.

А почему промежуток связен? По теореме Больцано-Коши. □

Теорема. *Если $T : X \to Y$ непрерывно, X — связно, тогда Y тоже связно.*

Доказательство. Пусть $Y = T(X)$ несвязно. Тогда $\exists f : X \to \{-1, 1\}$. Рассмотрим $g = f \circ T$. Она непрерывна и принимает два значения. Значит, X несвязно. Противоречие. □

Из этой теоремы вытекает теорема Больцано-Коши:

Следствие: Если X связно, f непрерывна на X, то $f(x)$ — промежуток.

Согласно теореме $f(X)$ связно, а связные подмножества прямой — промежутки.

Ну вот, пожалуй, и всё. Всем удачной сессии, спасибо, что были с нами, мы вас любим (нет). Встретимся в сентябре.