Дисклеймер.

Автор не несет ответственности за любой ущерб, причиненный Вам при использовании данного документа. Автор напоминает, что данный документ может содержать ошибки и опечатки, недостоверную и/или непроверенную информацию. Если Вы желаете помочь в развитии проекта или сообщить об ошибке/опечатке/неточности:

GitHub проекта

Автор в ВК

Внимание: данный документ не поддерживается и поддерживаться не будет! Сообщения об ошибках НЕ рассматриваются, пулл реквесты НЕ принимаются! Если Вы хотите поддерживать этот документ - форкните проект на Github. Благодарю за понимание.

Математический анализ. Конспекты

Введение

Теория множеств

1) $P \Rightarrow Q$ (Если справедливо P, то Q также справедливо (импликация)) $X = 1, \Rightarrow x^2 = 1;$

P - посылка, Q - заключение т.е. P достаточно для Q или Q необходимо для P

$P \Rightarrow Q$ и $Q \Rightarrow P$,

P : $c = ab$, Q : $c = ba$;

$P \Leftrightarrow Q$ (P равносильно Q)

«P необходимо и достаточно для Q»

«P справедливо тогда и только тогда, когда Q»

Г.Кантер — создатель теории множеств.

Множество — любой набор (совокупность) предметов.

Множества состоят из элементов (точек множества)

$x \in A$

$A \ni x$

$x \notin A$

Множества необязательно однородны

Множества могут включать подмножества

$(x \in A) \Rightarrow (x \in B) \Leftrightarrow (A \subset B)$

$A \subset B$ (А подмножество В)

$(A \subset B) \Leftrightarrow (B \subset A)$

$A = B$ (Множества А и В равны)

X P(x) — свойство

Запись: $\{x \in X | P(x)\}$

$\{x \in N | x > 5\}$

Обозначение множеств: $\{z, y, x, ...\}$

$x | (x$ либо $\in A$ либо $x \in B) = A \cup B$

$x | (x \in A$ и $x \in B) = A \cap B$

$A \setminus B = (A \setminus (A \cap B))$

$A \Delta B = (A \setminus B) \cap (B \setminus A)$ — симметрическая разность

$A \setminus B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

Числа и числовые множества

$\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел.

$\mathbb{Z}$ — множество целых чисел.

$\mathbb{Z}_+$ — множество целых чисел и ноль.

В отношении элементов пустого множества справедливо любое высказывание

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ — $\mathbb{N}$ подмножество $\mathbb{Z}_+$

$\mathbb{Q}$ — Все рациональные числа

$$\text{Рациональныечисла} = \frac{m}{n} \tag{1}$$

$\mathbb{R}$ — Все вещественные числа

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Теорема: не существует рационального числа, квадрат которого равен 2

$$1^2 + 1^2 = \left(\frac{m}{n}\right)^2 \tag{2}$$

Допустим, что есть $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$

m и n общих делителей не имеют, значит, $(m, n) = 1$ — взаимно простые.

$m^2 = 2n^2 \Rightarrow m^2$ — четное, тогда и m — четное. $\Rightarrow m = 2k$

$4k^2 = 2m^2 \Leftrightarrow n^2 = 2k^2$

Значит, n^2 — четное, а значит, m и n имеют общий делитель. Приходим к противоречию.

Конец первой лекции.

Свойства вещественных чисел

Алгебраические свойства вещественных чисел:

1) Определена сумма (x+y) и её свойства (переместительное, сочетательное и т.д.)

2) Определена разность (x-y)

3) $x(y+z) = xy + xz$

Упорядоченность:

Для пары $\{x, y\}$ определено одно из соотношений $x < y$ / $x = y$ / $x > y$;

Свойства упорядоченности:

1) Трихотония: для любой пары чисел (x, y) справедливо **одно и только одно** соотношение из $(x < y,\ x = y,\ x > y)$;

2) Транзитивность: $(x < y) \& (y < z) \Rightarrow (x < z)$

3) Если $A \subset \mathbb{R}$, то есть наибольшее и наименьшее числа:

$x_0 \in A$, так что $x_0 \leq x$, если $x \in A$ — ($min\ A$ или $min\ x$) $(x \leftarrow A)$

$y_0 \in A$, так что $x \leq y_0$, если $x \in A$ — ($max\ A$...)

Кванторы:

"Существует $\mathrm{x}_0 \in A$" : $\exists\ x_0 \in A$

"Для любого $x \in A$": $\forall x \in A$

$x^2 - 2 = 0$ или $\exists\ x^2 - 2 = 0$ — разница есть!

Свойства, связывающие неравенства и алгебраические действия:

1) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}\ (x < y) \Rightarrow (x + z < y + z)$

2) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ и $z > 0\ (x < y) \Rightarrow (xz < yz)$

Правило знаков:

$xy > 0$, если x, y одного знака
$xy < 0$, если x, y разных знаков

Аксиома Архимеда (3 век до н. э.):

$$x, y > 0 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : y < nx < (n+1)x \qquad (3)$$

$x, y > 0$, $\exists n$, $\frac{y}{n} < x$ и $y < nx$ сохраняется
Также справедливо для $\frac{y}{n+1} < x$ и т.д.

Теорема о плотности рациональных чисел:
Если $a, b, \in \mathbb{Q}, a < b$, то $\exists r \in \mathbb{Q} : a < r < b$ — Это называется плотностью рациональных чисел.

Т.е. множество рациональных чисел плотно на вещественной прямой.

Доказательство:

Если $a > 0$ и $b > a$, то $c = b - a$, где $c > 0$. $\exists n$: $1 < nc \Leftrightarrow \frac{1}{n} < c$

$\exists k, a < \frac{k}{n}$; $j : \frac{j}{n} \leq a$

$m \in \mathbb{N}$ наибольшее из тех, что $\frac{m}{n} \leq a$. Значит, следующее $\frac{m+1}{n}$ будет $> a$

$r = \frac{m+1}{n}$, где $(m+1)$, $r < b$

$b - r = b - \frac{m}{n} - \frac{1}{n} \geq b - a - \frac{1}{n} = c - \frac{1}{n} > 0$

Теорема доказана для положительных а.

Если $a = 0$, $0 < b$, то $c = b - a = b$

$0 < \frac{1}{n} < b$ (т.к. $b = c$)

Если $a < 0 < b$, то мы можем взять $r = 0$;

$a < b < 0$, нужно рассмотреть -b и -a, где $-b < -a$

$-b < r' < -a$, где $r = -r'$

Промежутки:

$a, b \in \mathbb{R}, a < b$

1) $\{x \in \mathbb{R} | a \leq x, x \leq b\}$ — $[a, b]$ — сегмент (замкнутый промежуток)

2) $\{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$ — (a, b) — интервал (незамкнутый промежуток)

3) $\{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\}$ — $[a, b)$

4) $\{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\}$ — $(a, b]$

Бесконечные аналоги промежутков:

$[a, +\infty)$, $(-\infty, a]$

Модуль (абсолютная величина) вещественного числа:

$|x| = max\{x, -x\}$, где $x \in \mathbb{R}$

Свойства модуля:

1) $|x| \geq 0$;

2) $\pm x \leq |x|$;

3) $|xy| = |x| \cdot |y| \; \forall \; x, y$;

4) Для $a > 0$: $|x| < a \Leftrightarrow x \in (-a, a)$

$|x| < a \Rightarrow x < a$ и $-x < a$ и $-a < x$;

$4'$) $|x| \leq a \Leftrightarrow x \in [-a, a]$;

5) $|x + y| \leq |x| + |y|$ - неравенство треугольника

Доказательство неравенства треугольника:

$|x + y| = \pm(x + y) = \pm x \pm (\pm y) \leq |x| + |y|$

6) $||x| - |y|| \leq |x - y|$ - дополнительное неравенство треугольника

Доказательство:

$|x| = |y + (x - y)| \leq |y| + |x - y|$

$|y| - |x| \leq |x - y|$

$|y| - |x| \leq |y - x| = |x - y|$

$-(|x| - |y|)$

Аксиома полноты (Аксиома Дедекинда)

(Рихард Дедекинд)

$X, Y \subset \mathbb{R}$, где X, Y не пусты

Определение: X левее Y, если $\forall x \in X, \forall y \in Y$: $x \leq y$

Аксиома:

Если X левее Y, то $\exists$ c $\in \mathbb{R}$ для которого:

$\forall \; x \in X, x \leq c$

$\forall \; y \in Y, c \leq y$

Докажем, что всякое положительное число имеет квадратный корень:

Пусть $a > 0$ то $\exists c > 0$, $c^2 = a$

$X = \{x \in \mathbb{R} | x > 0 \text{ и } x^2 < a\}$

$Y = \{y \in \mathbb{R} | y > 0 \text{ и } y^2 > a\}$

Для: $a > 1$

$1 < a \Rightarrow a < a^2$;

$1 \in X$; $a \in Y$.

$x \in X \Rightarrow x^2 < a$;

$y \in Y \Rightarrow y^2 > a \Rightarrow x^2 < y^2$;

$0 < y^2 - x^2 = (y - x)(x + y)$;

$0 < y - x$ т.е. $x < y$;

$\exists c : \forall x \in X \; x \leq c$ и $\forall y \in Y c \leq y$

Упр.: доказать, что c - единственное ($\exists! c > 0, c^2 = a$*)*

Доказательство от противного: Допустим, что

$c^2 < a$. Значит, существует $c + \frac{1}{n}$, где $n \in \mathbb{N}$

$\forall x \in X$, где $x \leq c \Rightarrow c + \frac{1}{n} \in Y$ —? (Возможно, квантор существования)

$a < (c + \frac{1}{n})^2 = c^2 + \frac{2c}{n} + \frac{1}{n^2} < c^2 + \frac{2c+1}{n}$

$0 < a - c^2 < \frac{2c+1}{n} \; \forall n$

Приходим к противоречию.

Конец второй лекции

$a > 0, \exists c > 0 : c^2 = a$

Числа не рациональные называются иррациональными, следовательно, $\sqrt{2}$ - иррациональное число.

$\mathbb{Q}$ удовлетворяет всем алгебраическим свойствам, кроме аксиомы полноты.

Аксиома полноты для множества рациональных чисел несправедлива.

Упр: Доказать, что между любыми двумя числами лежит иррациональное число.

Возьмем $n \in N$ т.ч. $\frac{\sqrt{2}}{n}$ - меньше половины расстояния между 2-мя рациональными числами. Тогда $\exists m \in Z : \frac{m*\sqrt{2}}{n}$

Лемма о вложенных промежутках:

Рассмотрим промежуток $[a_n, b_n]$, где $a_n < b_n$;

Если $[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}]$ $\forall n \in \mathbb{N}$, то $\exists c \in \mathbb{R}$ $c \in [a_n, b_n] \forall n.$

т.е. c принадлежит всем промежуткам.

X_α

Пересечение множества X_α — $\{x | x \in X_\alpha \ \forall \alpha\} = \bigcap_{\alpha \in A}$

Переформулировка: $\exists \alpha \in \mathbb{R} : c \in \cap_n [a_n, b_n]$

Наводящее соображение: $c \in [a_n, b_n] \Rightarrow a_n \leq c \,\forall n, c \leq b_n \,\forall n$

Доказательство:

$X = \{a_n | n = 1, 2, ...\}$;

$Y = \{b_n | n = 1, 2, ...\}$;

$\forall n, \forall k$; $a_n \leq b_k$;

Промежутки вложенные, значит, $a_n \leq a_{n+1}$, а $b_n \geq b_{n+1}$;

Ведь если: $x \in [a_n, b_n]$

Левые концы промежутков возрастают, а правые - убывают.

Пусть $n < k$;

Тогда $a_n \leq a_{n+1} \leq a_k < b_k$. Следовательно, $a_n < b_k$

Д/з: рассмотреть для $n > k$;

Если $k < n$**, то:** $b_k \geq b_{k+1} \geq b_n > a_n$

Значит, по аксиоме полноты $\exists c$, что $a_n \leq c \,\forall n, c \leq b_n \forall n \Rightarrow c \in [a_n, b_n]$

Для открытых промежутков (a_n, b_n) теорема не верна!

Упр.: $\Delta_n = [a_n, b_n]$

Она называется центрированной, если $\cap_{n=1}^{k} \Delta_n \neq \varnothing \,\forall k \in N$

§4. Границы числовых множеств.

Здесь мы будем рассматривать непустые подмножества вещественных чисел.

$X \subset \mathbb{R}$. $C \in \mathbb{R}$, c - верхняя граница X, если $\forall x \in X : x \leq c$; нижняя, если $x \geq c$

Множество, ограниченное сверху: X ограничено сверху (снизу), если $\exists$ верхняя (нижняя) граница. Т.е. $\exists C\ \forall x \in X : x \leq C$

$\exists$кошка, $\forall$мышка : кошка хитрее — если не согласны, то нужно утверждать, что $\forall c$ не верно, что всякий x обладает каким-то свойством. Значит, $\exists x$ не обладающий сво
где Q = x<C, следовательно, $\forall$C $\exists x \in X : x > C$

Если множество ограничено и сверху и снизу называется ограниченным.

Лемма: $X \subset \mathbb{R}, X \neq \varnothing$

Свойства:

1) X - ограниченно.

2) $\exists M\ \forall x \in X : |x| \leq M$

3) $\exists [a, b] : [a, b] \supset X$

Докажем, что

$1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 1;$

Доказательство: $1 \Rightarrow 2$

Пусть A - верхняя граница, B - нижняя граница.

Пусть $M = max\{|A|, |B|\}$

$\forall x \in X : x \leq A \leq |A| \leq M$

$\forall x \in X : x \geq B \geq |B| \geq -M$
$\Rightarrow -M \leq x \leq M \Leftrightarrow |x| \leq M$

$2 \Rightarrow 3$
$\forall x \in X, \text{где} |x| \leq M$
$-M \leq x \leq M$, т.е. $x \in [-M; M]$

$3 \Rightarrow 1$
Если $x \subset [a, b] \Rightarrow \forall x \in X; x \in [a, b]$, а это значит, что $a \leq x \leq b$, следовательно, a - нижняя граница, b - верхняя граница

Пусть $x \subset \mathbb{R}$, $x \neq \varnothing$
$\exists x_0 \in X; \forall x \in X, x \leq x_0$, значит, x_0 - наибольший элемент.

Такой элемент называется максимумом $maxX = max\ x$, где $x \in X$.

$min\ x$ - аналогично

Максимум и минимум есть лишь в закрытых промежутках.

Определение:

$X \subset \mathbb{R}$. Предположим, что X ограничено сверху. Тогда точная верхняя граница (верхняя грань) X есть наименьшая из верхних границ. (supremum). Обозначение: «$\sup X$»

Аналогично определяется точная нижняя граница - наибольшая из нижних границ (нижняя грань) (infinum). Обозначение: «$\inf X$».

Характеристика супремума:

$L = supX$

1) L — верхняя граница. $\forall x \in X : x \leq L$

2) L — наименьшая из верхних границ: $\forall L' < L \, \exists x' \in X : x' > L$, следовательно, L' не верхняя граница.

L верхняя граница, а все, что меньше L - уже не верхняя граница.

Аналогично для L = inf X.

Теорема: Если множество ограничено сверху, то супремум всегда существует.

$x \subset \mathbb{R}$, $x \neq \varnothing$, X - ограничено сверху.

Доказательство:

$X \neq \varnothing$

Пусть Y — множество верхних границ для X.

$\forall x \in X, \forall y \in Y x \leq y$ и y — верхняя граница.

Значит, X левее Y. И мы попадаем в условие теоремы полноты. Значит, $\exists C, \forall x \in X \; x \leq C$ - по определению C — верхняя граница. $\forall y \in Y \; C \leq y - C$ наименьшее.

Следовательно, C — $\sup X$, ч.т.д.

Упр: Пусть X - ограниченное множество, a > 0.

$aX = \{ax | x \in X\}$, $-X = \{-x | -x \in X\}$

Задача: выразить sup (aX), inf (aX), sup(-X), inf(-X) через sup(X)

sup(aX) = sup(X)*a

sup (-X) = -inf (X)

inf (aX) = inf(X)*a

inf (-X) = -sup (X)

Конец третьей лекции.

Математическая индукция

Индукция - лат. наведение.

Индукция - рассуждение от частного к общему.

Пойа — «Математика и правдоподобные рассуждения»

$P(n), n \geq n_0$: $n^2 < 2^n$ - утверждение может быть верным или неверным.

Теорема "Принцип математической индукции"

$P(n), n \geq n_0$

Если:

1) $P(n_0)$ - верно - *база индукции*

2) Если верно $P(n)$, то верно и $P(n+1)$ аналогично $P(n) \Rightarrow P(n+1)$, при $n \geq n_0$ - *индукционное предположение*

то P(n) верно $\forall n \geq n_0$ *индукционный переход*

Доказательство от противного:

$\exists n_1 : P(n_1)$ - ложно.

Пусть n' — наименьшее число, $n' \geq n_0$, так что $P(n')$ - ложно

$n'' = n' - 1$

$n' > n_0$

$n'' \geq n_0$

$P(n'')$ - верно, потому что n' - самое маленькое, для которого $P(n)$ ложно.

Раз $P(n'')$ - верно, то верно и $P(n''+1)$, а $n''+1 = n'$. Следовательно, $P(n')$ - верно. Противоречие.

Примеры:

$x_1, x_2, x_3, ...$

$|x_1 + x_2 + ... + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + ... + |x_n|;$

$|\sum\limits_{k=1}^{n} x_k| \leq \sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|$ $P(n) : n \geq 1$

$n = 1, |x_1| \leq |x_1|$ - база.

$|x_1, x_2, ... + x_n + x_{n+1}| = |(x_1 + ... + x_n) + x_{n+1}| \leq |x_1 + ... + x_n| + |x_{n+1}| \leq |x_1| + ... + |x_n| + |x_{n+1}|.$

$n^3 \leq 2^n$ — P(n)

$n = 1, 1 < 2$

$n = 2, 8 < 4$

Первый раз неравенство будет верным при $n_0 = 10$;

$n \geq 10$. рассмотрим n+1

$(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 = n^3(1 + \frac{3}{n} + \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^3}) \leq 2^n(1 + \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{1}{1000}) = 1,331 * 2^n < 2 * 2^n$

P(n): n = n+1;
P(n): n+1 = n+1+1;
P(n+1): n+1 = n+2;
Здесь нет базы!!

$P(n) : x_1, x_2, ..., x_n$ равны между собой.
Допустим, P(n) верно. Рассмотрим
$x_1, x_2, ..., x_n + x_{n+1}$
Нет индукционного перехода, т.к. нет x_n!!!

Теорема Бернулли (Якоб Бернулли — 1654-1705).
Лемма:
$x \geq -1$:
$\forall n \in N \ (1 + x)^n \geq 1 + nx$
Если $n > 1, \ x \neq 1$тогда$(1 + x)^n > 1 + nx$
Доказательство:
Базы при n = 1 нет.

$(1 + x)^{n+1} = (1 + x)^n(1 + x)) \geq (1 + nx)(1 + x) = 1+nx+x+x^2+nx^2 = 1+(n+1)x+nx^2) > 1+(n+1)x$

а - вклад. Если продержать вклад год, то получим $a(1+1)$. Если полгода - $a(1+\frac{1}{2})$ и тут же его положим еще на полгода. И получим $a(1+\frac{1}{2})^2$. Если делить на

3 части, то $a(1+\frac{1}{3})^3$. А если на n, то $a(1+\frac{1}{n})^n$

Теорема:
$x_n = (1+\frac{1}{n})^n$
$y_n = (1+\frac{1}{n})^{n+1}$
$n = \{1, 2, 3...\}$
Тогда:
1) $x_n < x_n + 1 \Leftrightarrow \frac{x_{n+1}}{x_n} > 1$; — Доказывали ниже.
2) $y_n > y_n + 1$; — *дома сами*
3) $2 < x_n < 3$ при $n > 1$ — тоже доказано (см фотки где крупно на доске. начало с n $>$ 2)
Доказательство:

$$\frac{(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{n+2}{n+1}\Big(\frac{1+\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{n}}\Big)^n = \frac{n+2}{n+1}\Big(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\Big)^n = \\ = \frac{n+2}{n+1}(1-\frac{1}{(n+1)^2}) > \frac{n+2}{n+1}(1-\frac{n}{(n+1)^n})(4)$$

$sup\ x_n, n \geq 1$
$e -$ супремум$\{x_1, x_2, ...\}$ - экспонента
$(1+\frac{1}{n})^n$ - удобно брать для логарифмических исчислений
$2 < e < 3$

Доказать, что $inf\ y_n = e$

$n! = 1 * 2 * 3 ... * n;$

$(\frac{n}{e})^n < n! < (\frac{n}{2})^n$, где $n \geq 6$ для правого правила

$\frac{1}{e} < 1$ - база

$$\frac{(n+1)!}{(\frac{n+1}{e})^{n+1}} = \frac{n!}{\frac{1}{e}(\frac{n+1}{e})^n} > \frac{(\frac{n}{e})^n}{\frac{1}{e}(\frac{n+1}{e})^n} = e\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} > 1 \quad (5)$$

Отображение и функции

Если $x \in X$ сопоставляется по правилу T, то точка $y = T(x)$, при этом каждому x сопоставляется только одна, единственная точка y.

(X, T, Y), где: X — область определения (задания), Y — множество прибытия

Область задания может обозначаться DOM T.

Если Y — числовое множество, то отображение называется функцией.

Постоянное отображение: каждому x сопоставляется $y_0 \in Y$

$A \subset X$

$T : x \to Y = \{y|\ \exists x \in A : y = T(x)\} = \{T(x)|x \in A\}$

$B \subset Y$

$\{x \in X | T(x) \in B\} = T^{-1}(B)$
$f^{-1}(a) - f(x) = a$
$f^{-1}((-\infty, a)) - f(x) < a$

Сужение отображения:
$T : X_0 \subset X \to Y$
$x \in X : S(x) = T(x)$
$T|_{x_0}$

Конец второй лекции

Композиция отображения.

Композиция отображения - конструкция, которая по двум отображениям позволяет построить новое отображение.
$T : X \to Y$
$S : Y \to Z$
$R(x) = S(T(x))$ где $T(x) \in Y$
обозначение: $R = S \circ T = ST$

$X = Y = Z = R$
$f(x) = 2^x;$
$g(x) = x^2;$
$h = g \circ f$

$h(x) = g(f(x)) = g(2^x) = (2^x)^2 = 2^{2x}$
$h = f \circ g$
$h_1(x) = f(g(x)) = f(x^2) = 2^{x^2}$
Т.е. $h = g \circ f$ и $h = f \circ g$ не обязательно равны!

$f(x) = sin(x), g(x) = lg(x)$
$f(g(x)) = sin(lg(x))$
$lg : R_+ = (0; \infty)$ - а множество прибытий синуса не совпадает, как это требуется по определению, с множеством задания другой функции.
$T : X \to Y$
$S : Y' \to Z$
$S(T(x))$ - точка x должна принадлежать $Y \cap Y'$
Нужно определять композицию не для всех x, а только для тех, образы которых попадают в данное пересечение
$x' = \{x \in X | T(x) \in Y \cap Y'\} = T^{-1}(Y \cap Y')$ - естественная область определения композиции.
$R : X \to Z$
$x \in X', T(x) \in Y \cap Y' < Y'$ $R(x) = S(T(x))$
Если
$S(y) = lg(x);$
$T(x) = sin(x);$
То в роли X' будет выступать множество, где синус положительный. $x' = (0; \pi) = \cup_{k \in Z}(2k\pi, 2k\pi + \pi)$

f, g определены на X: $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$,

$(f * g)(x) = f(x) * g(x)$

$g(x) \neq 0 \forall x : \frac{f}{g}\ \frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

Если f определено на X_1, g определено на X_2, то $x_0 = \{x \in X_1 \cap X_2 | g(x) \neq 0\}$

Декартово произведение множеств

x, y то можно рассмотреть множество пар точек (x, y), где $x \in X, y \in Y$

(x, y) и (y, x) - различны.

$\{1, 2\} \to^{\phi} X \cup Y : \phi(1) \in X, \phi(2) \in Y$

Упорядоченная пара: $(\phi(1), \phi(2))$ — пара точек, из которой выделена одна точка, которая названа первой.

Множество всех упорядоченных пар точек называется Декартовым произведением множества X, Y и обозначается $X \times Y$

$[a, b] \times [c, d]$ — можно интерпретировать как прямоугольник.

$T : X \to Y$

Рассмотрим $X \times Y : \Gamma_T = (x, y) \in X \times Y | x \in X, y = T(x)$

Задать отображение = задать график. Только "танцевать" от отображения психологически удобнее, проще объяснить. Формально можно сказать, что отображение - подмножество декартова произведения с каким-то определенным свойством.

$DOM\ T \subset X$

$\Gamma_T = \{(x, y) \in X \times Y | x \in DOM\ T, y = T(x)\}$

$f(x) = sign(x) = \{1,$ если $x > 0; 0,$ если $x = 0; -1,$ если $x < 0\}$ (сигнатура)

$f|_{(0,\infty)}(x) \equiv 1$

$x \in R\ E(x) = max\{n | x \in Z, n \leq x\}$ - изображается $[x]$ —целая часть x

$[\pi] = 3$, а $[-\pi] = -4$, т.к. не должно превосходить что-то там

Упр: нарисовать график $[1/x]$, $(-1)^{1/x}$

Обратное отображение

Если T отображает $x \in X$ в $y \in Y$, то S - возвращает $y \in Y$ в $x \in X$

$T(x) = \{T(x) | x \in X\} = Y_0 \subset Y$

$f(x) = x^2; R \to R$

Обозначают ImT

Если $T(X) = Y$, то T - «Отображение НА» (сюръекция)

$T : X \to Y, Y = ImT$

Определение: $S : Y \to X$ называется обратным к Т, если $S(T(x)) = x \; \forall x \in X$

Замечания по поводу обратного отображения:

1) Обратное отображение единственное (ну или его вообще не может быть).

S - обратное к Т, $S' : Y \to X$ - тоже обратное.

$y \in Y_0 \; \exists x \in X : y = T(x)$

$S(y) = S(T(x)) = x$

$S'(y) = S'(T(x)) = x$, значит, $S(x)$ и $S'(x)$ - одно и то же отображение.

Обозначение обратного отображения: T^{-1} ну или для функций f^{-1}

2) Пусть S обратное отображение к Т. Тогда Т - обратное отображение к S.

$T(S(y)) = y \; \forall y \in Y_0$

$y \in Y_0 \; \exists x \in X, y = T(x)$

$T(S(y)) = T(S(T(y))) = T(x) = y$

Значит, $T = S^{-1}$

$T : x \to Y$, $S : Y \to \neg X$, $S^{-1} : X \to Y_0$

Конец пятой лекции.

Отображение Т называется взаимно однозначным, если оно разные точки переводит в разные.

$\forall x, x \in X$ $(x \neq x') \Rightarrow (T(x) \neq T(x'))$ — инъекция.

Если $T : X \to Y$ взаимно однозначно и является отображением НА (т.е. является инъекцией и сюръекцией), то оно является биекцией (взаимно однозначным соответствием).

Теорема:

$T : X \to Y$. T - обратимо тогда и только тогда, когда T взаимно однозначно.

Доказательство:

Допустим, что отображение T две точки переводит в одну.

1) $\exists S = T^{-1}$

$\exists x_0, x_0' \in X$ т.ч. $T(x_0) = T(x_0') = Y_0$, при этом $x_0 \neq x_0'$

$S(y_0) = S(T(x_0)) = x_0;$

$S(y_0) = S(T(x_0')) = x_0' \neq x_0$

$T : X \to Y > Y_0 = T(x)$ — взаимно однозначное.

$y_0 \in Y_0$ $\exists x_0 \in X : T(x_0) = y_0$. Такая точка — единственная.

Определение обратного отображения $S : Y_0 \to X$:

$\forall y \in Y_0$ $S(y)$ — та единственная точка, для которой $x \in X : y = T(x)$

$S(T(x)) = x$, значит, $S(y)$ — действительно обратная. Теорема доказана.

Теорема о характеристике биекции:

$T : X \to Y$, Т - биекция, $\Leftrightarrow \ \exists S : Y \to X$:

1) $S(T(x)) = x, \forall x \in X$; $S^{-1} = T$;

2) $T(S(y)) = y, \forall y \in Y$; $Y_0 = T(x) = Y$

При этом $S = T^{-1}$.

Предположим, что выполняются условия 1 и 2 из выше. Убедимся, что Т — отображение НА.

$T(x) = Y$

$y \in Y,\ x = S(y)$, тогда в силу условия (2) получаем:

$T(x) = T(S(y)) = y$.

$R \supset < a, b >$, где $< a, b >$х — любой промежуток.

$f :< a, b > \to R$;

Определение: f возрастает, если $x, x' \in < a, b >$ $x < x' \Rightarrow f(x) \leq f(x')$ и строго возрастает, если $f(x) < f(x')$

Пример:

$sign(x)$ — возрастающая, но не строго возрастающая функция.

Теорема:

Если $f :< a, b > \to R$ строго монотонна, то существует обратная функция, которая так же строго монотонна (при этом характер монотонности при переходе к обратной функции не меняется (обратная к строго убывающей функции функция так же будет строго убывающей))

Докажем это:

Пусть f — возрастающая. $y, y' \in Y = f(< a, b >), y < y'$.

$f^{-1}(y) < f^{-1}(y')$ — доказать.

$x = f^{-1} \geq x = f^{-1}(y')$

$f(x) \geq f(x')$

$f(x) = f(f^{-1}(y)) = y$

$f(x') = f(f^{-1}(y')) = y'$

$y \geq y'$ — противоречие.

Упр: $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$

f, g — *монотонная,* $h = g \circ f$.

$x = g(y) \Leftrightarrow y = f(x)$, тогда точку $(x, f(x))$ можно считать совпадающей с $(g(y), y)$. При этом $(x, f(x))$ и $(y, g(y))$ — взаимное отражение точек относительно прямой $y = x$.

Основные элементарные функции.

Степень с натуральным показателем:

$n \in N, f(x) = x^n;$

I)

а) $(xy)^n = x^n y^n;$

б) $x^{m+n} = x^n x^m$

в) $x^{mn} = x^{m^n}$

II) $f(x) = x^n$ строго возрастает на правой полуоси.

$f(x) = x$, $x < y \Rightarrow x^n < y^n$, $x, y \geq 0$.

$x^n < y^n$ по индукционному предположению.

$x < y$ по условию.

Умножим первое неравенство на y, а второе - x_n.

$x^n y < y^{n+1};$

$x^{n+1} \leq x^n y;$

$x^{n+1} < y^{n+1}.$

Теорема: если $f(x) = x^n$, то $f([0, +\infty)) = [0, +\infty)$

Если $n \in Z, n < 0$ то $\{x \neq 0 | x^n = \frac{1}{x^{|n|}}\}$

$f(x) = x^2$ если её сузить на $[0, +\infty)$, то она монотонна.

$f_0(x) = x^n \ (x \geq 0)$
$f_0([0, +\infty)) = [0, +\infty)$
$g(x^n) = x \ \forall x \geq 0$
$g(y) = \sqrt[n]{y}$

Лемма:
$x \geq 0, \ m, n, p \in N$
тогда $\sqrt[mn]{x^{mp}} = \sqrt[n]{x^p}$
Возьмем $\sqrt[mn]{x^{mp}} = u, \ \sqrt[n]{x^p} = v.$
Доказать: $f(u) = f(v)$
Доказательство:
$u^{mn} = (\sqrt[mn]{x^{mp}})^{mn} = x^{mp}$
$v^{mn} = ((v)^n)^m = ((\sqrt[n]{x^p})^n)^m = (x^p)^m = x^{mp}.$

$x > 0, \ r > 0, \ r$ — рациональное, $r = \frac{p}{n}$
$x^r = \sqrt[n]{x^p}.$
$x^{r_1+r_2} = x^{r_1} * x^{r_2} (\forall x \leq 0)$

$x^{\sqrt{2}} =?$
$a > 1, x \in R.$
$a^x = sup\{a^r | r \in Q, r < x\}$

Конец шестой лекции.

Лемма: $a > 1$. Тогда:
1) $r, s, \in Q,\ r < s \Rightarrow a^r < a^s$;
2) $a^{\frac{1}{n}} < 1 + \frac{a}{n}, a^{\frac{-a}{n}} > 1 - \frac{a}{n}. \forall n \in N$.

$r = \frac{m}{p}, s = \frac{l}{p}, m < l, a^m < a^l$
$\sqrt[p]{a^m} < \sqrt[p]{a^l}$
Первый пункт доказан.

$a^{\frac{1}{n}} = 1 + t,\ t > 0$.
$a = (1+t)^n > 1 + nt$, значит, $t < \frac{a-1}{n} < \frac{a}{n}$
$a^{\frac{1}{n}} = 1 + t < 1 + \frac{a}{n}$

$$a^{\frac{-1}{n}} = 1(a^{\frac{1}{n}}) > \frac{1}{1 + \frac{a}{n}} > 1 - \frac{a}{n} \qquad (6)$$

Второй пункт доказан.

$a > 1,\ x \in R$.
$a^x = sup\{a^r | r \in Q, r < x\}$.
$r_0 < x$,

$0 < a^{r_0} \leq a^x$

Замечание:

Если $x = s$ - рациональное, то $a^s = sup\{a^r | r - рацион$
$s\}$

Докажем, что: $a^s = sup\{a^r | r - рациональное, r < s\}$

$r < s$, $a^r < a^s$.

$A = sup\{a^r | r < s\} \leq a^s$

Допустим, $A < a^s$, при этом $r = s - \frac{1}{n}$:

$a^{s-\frac{1}{n}} \leq A < a^s$

$1 - \frac{a}{n} < a^{-\frac{1}{n}} \leq \frac{A}{a^s} < 1$

$0 < 1 - \frac{A}{a^s} < \frac{a}{n}$ $\forall n$ — противоречит аксиоме Архимеда.

Значит, справедливо: $A = a^s$. Доказано.

Введем функцию:

$f(x) = a^x$, $a < 1$ $\forall x \in R$.

Можем вычислять её значения в рациональных точках.

Теорема:

$1) f$ — строго возрастает.

2) $\forall x, y \in R \; f(x+y) = f(x)f(y) || a^{x+y} = a^x a^y$ — функциональное уравнение для показательной функции.

Доказательство: 1) Возьмем r и s, такие, что $x < y, \; x < r < y, \; x < r < s < y$, где r, s — рациональные.

$a^x \leq a^r$, $a^s \leq a^y$

$r' < r$

$a^{r'} < a^r, \; r' < x$

$a^x \leq a^r < a^s \leq a^y$

2) $(R, +)$, $(R_+, \times)$

$x \to f(x) = a^x$ — изоморфизм.

$x + y = z$.

$r < x$, $s < y$, $r, s \in Q$. $t = r + s < z$.

$a^r a^s = a^{r+s} < a^z$

$a^r < \frac{a^z}{a^s}$

$a^x \leq \frac{a^z}{a^s}$

$a^s \leq \frac{a^z}{a^x}$

Значит, $a^y \leq \frac{a^x}{a^x}$

$a^x a^y \leq a^z$

Упражнение

(Докажем неравенство в другую сторону.

t — рациональное, $t < z = x + y$

$t = r + s$, где r, s — рациональные, $r < x$ и $s < y$)

$s^t = a^{r+s} = a^r a^s < a^x a^y$, следовательно, $t < z$, значит, $a^z \leq a^x a^y$

$1 = a^0 = a^{x+(-x)} = a^x a^{-x}$

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x} \tag{7}$$

$0 < a < 1$ По определению: $b = \frac{1}{a} > 1$
и полагаем $a^x = b^{-x} = \frac{1}{b^x}$
По определению полагаем, что
$1^x \equiv 1 \ \forall x$

Теорема (которую мы сейчас доказывать не будем):

$f(x) = a^x, a \neq 1$

$f(R) = (0, +\infty)$ — область прибытия

Логарифм

$a > 0, a \neq 1, f(x) = a^x$, $f(x)$ — строго монотонна.

Следовательно, по тому, что функция строго монотонна, то у неё есть обратная функция, также строго монотонная. Эта функция называется $\log_a$

Из определения обратной функции
$\log_a a^x = x \ \forall x \ f(x) = a^x$
$a^{\log_a y} = y \ \forall y > 0$

Особый случай: $a = e$.
$e^x \equiv \exp(x)$
В этом случае логарифм имеет вид $\ln y$

Предел функции.

Окрестности и предельные точки

Определение: $a \in R$. Окрестностью точки a называется любой интервал (p, q), которому принадлежит точка a. (V(a), U(a) — обозначение)

Допустим, мы можем сказать, что $a \in (0, +\infty)$

Свойства окрестности:

1) Отделимость: если $a \neq b$, то тогда у них есть окрестности, которые не пересекаются.

2) Пересечение двух окрестностей одной точки — снова окрестность.

3) Симметричные окрестности — $(a-\delta, a+\delta)$, где $\delta > 0$. $V_\delta(a)$ — дельта-окрестность.

4) $x \in V_\delta(a) \Leftrightarrow |x-a| < \delta$.

5) Всякая окрестность точки a содержит в себе дельта-окрестность.

$U(a)$ — окрестность точки a.

$U(a) \setminus \{a\} = \dot{U}(a)$ — проколотая окрестность.

$\dot{V}_\delta(a) \ni x \Leftrightarrow 0 < |x-a| < \delta$

Предельные точки или точки сгущения.

$X \subset R$, $a \in R$.

Определение: а — предельная точка множества X или точка сгущения, если справедливо следующее: $\forall V(a) \exists x \in R$ со свойствами:

1) $x \in V$,

2) $x \neq a$,

3) $x \in X$:
$\Leftrightarrow x \cap \dot{V}(a) \neq \varnothing$

$X = (\alpha, \beta),\ \alpha < \beta$ — Передельные точки данного интервала:

1) точки самого интервала;

2) точки α и β.

Множество всех предельных точек промежутка (α, β): $[\alpha, \beta]$.

Множество натуральных чисел предельных точек не имеет.

Множество рациональных чисел имеет точки сгущения, причем любая точка предельная.

Определение: $a \in X$. a называется изолированной, если она не предельная.
$\exists U_0(a)$, такое, что $X \cap \dot{U}_0(a) = \varnothing$

Конец седьмой лекции.

Предел функции

Все для $X \subset R$, a — точка сгущения x, $f : x \to R$

Определение (на языке неравенств):

L — предел функции f в точку a, если

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in X$ из условия $0 < |x-a| < \delta$ вытекает неравенство $|f(x) - L| < \varepsilon$, т.е.:

$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

Обозначение: $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ или $f(x) \to_{x \to a} L$

$L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$

Замечания:

Для каждого ε, каким бы малым оно не было, есть предел, т.е. каким бы малым не было число, существует еще меньшее число. — *не помню точно, что он тут говорил.*

Предел - локальное свойство, т.е. если взять окрестность в точке a и вне этой окрестности как угодно изменить функцию, то предел не изменится!

Если $f(x) \to_{x \to a} L$, то $|f(x)| \to_{x \to a} |L|$, т.е.

$||f(x)| - |L|| \leq |f(x) - L| < \varepsilon$

Примеры:

Если $f(x) = const$ и $f(x) = C\ \forall x \in X$, то $L = C$, где L —предел.

$X_0 \subset X, a$ — точка сгущения X_0. Пусть $f_0 = f|_{x_0}$. Если $f(x) \rightarrow_{x \rightarrow a} C$, то $f_0(x) \rightarrow_{x \rightarrow a} C$

$f(x) = sign(x)$, $x \rightarrow 0 = a$. Если взять $0 < \varepsilon < 1$, то предел не существует.

А вот для функции $sign^2(x)$ существует и равен единице: $|f(x) - 1| = 0, x \neq 0$

Дирихле — немецкий математик I половины XIX века. Функция Дирихле $d(x) = \{1$ если x — рациональное; 0 если x — иррациональное$\}$

$L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$, значит, $f(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon) = V_\varepsilon(L)$.

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in \dot{V}_\delta(a) \cap X \Rightarrow f(x) = V_\varepsilon(L)$

$\forall \varepsilon$ — окрестность точки L $\exists \delta$ — окрестность точки a, такое что $\forall x \in \dot{V}_\delta(a) \cap X \Rightarrow f(x) \in V_\varepsilon(L)$.

Поэтому можно сказать, что:

$\forall U(L)$ — дельта-окрестность, $\exists\delta > 0\ \forall x \in \dot{V}_\delta(a) \cap X$

$f(x) \in U(L)$.

Окончательная формулировка:

$\forall$ окрестности L $U(L)$ $\exists$ окрестность $V(a)$ в точке A $\forall x \in \dot{V}(a) \cup X \Rightarrow f(x) \in U(L)$

Свойства пределов, связанных с неравенствами

Теорема о стабилизации знаков: $X \subset R$, a —точка сгущения, $f : X \to R$

$f(x) \to_{x\to a} L$.

1) Если $A < L$, то $\exists\delta > 0$: $\forall x \in \dot{V}_\delta(a) \cap X \Rightarrow f(a) > A$

2) Если $A > L$, то $\exists\delta > 0$: $\forall x \in \dot{V}_\delta(a) \cap X \Rightarrow f(a) < A$

Следствие:

$L > 0 \Rightarrow \exists V(a) \forall x \in \dot{V}(a) \cap X : f(x) > 0.$

Доказательство:

$\varepsilon = L - A > 0$. Тогда по определению предела $\exists \delta > 0 \; \forall x \in \dot{V}_\delta(a) \cap X$, $|f(x) - L| = \varepsilon$.

$L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon \Rightarrow L - \varepsilon = L - (L - A) = A < f(x)$.

Теорема о единственности предела:

$X \subset R$, a —точка сгущения, $f : X \to R$

Если $f(x) \to_{x \to a} L_1$ и $f(x) \to_{x \to a} L_2$, то $L_1 = L_2$

Доказательство:

Пусть $L_1 \neq L_2$; не умаляя общности $L_1 < L_2$.

$L_1 < A < L_2$, A — число.

Воспользуемся второй частью теоремы о стабилизации знаков:

$L_1 < A \; \exists \delta_1 > 0 \; \forall x \in \dot{V}_\delta(a) \cap X : f(x) < A$; (a)

$L_1 > A \; \exists \delta_1 > 0 \; \forall x \in \dot{V}_\delta(a) \cap X : f(x) > A$; (b)

Не умаляя общности $\delta_1 < \delta_2$

$x \in V_{\delta_1} \Rightarrow x \in V_{\delta_2}$

$x \in \dot{V}_{\delta_1}(a)$, $x \in \dot{V}_{\delta_2}(a)$

$A < f(x) < A$ — противоречие. Теорема доказана.

Теорема (о предельном переходе в неравенстве):

$X \subset R$, a —точка сгущения, $f, g : X \to R$

$f(x) \to_{x \to a} A$ и $g(x) \to_{x \to a} B$

Если $f(x) \leq g(x)\ \forall x \in X$ (*), то $A \leq B$

Замечание (частный случай):

$g \equiv const.$

$g(x) = C$

$f(x) \leq C \Rightarrow L \leq C$ (обратное аналогично)

Доказательство:

Пусть $A > B$

$A > C > B$

$f(x) \to A > C$

$\exists V_{\delta_1}(a)\ \forall x \in \dot{V}_{\delta_1}(a) : f(x) > C$

$g(x) \to B < C$

$\exists V_{\delta_2}(a)\ \forall x \in \dot{V}_{\delta_2}(a) : g(x) < C$

$x_0 \in V_{\delta_1} \cap V_{\delta_2}$ (одна из этих окрестностей содержится в другой)

$f(x_0) > C$

$g(x_0) < C$

$f(x_0) > g(x_0)$ — противоречие.

Конец восьмой лекции

Теорема о сжатой переменной

$f, g, h : X \to R$ $(X \subset R)$, a — точка сгущения

Если

1) $f(x) \leq g(x) \leq h(x) \forall x \in X$

2) $f(x) \to_{x \to a} L, h(x) \to_{x \to a} L$,

то $g(x) \to_{x \to a} L$

(теорема о двух милиционерах).

Доказательство (неправильное):

$L = \lim\limits_{x \to a} f(x) \leq \lim\limits_{x \to 0} g(x)$

$\lim g(x) \leq \lim h(x) = L$

$L \leq \lim\limits_{x \to a} g(x)$ $\lim\limits_{x \to a} g(x) \leq L$

НЕПРАВИЛЬНОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО!!!! Неизвестно, существует ли предел $g(x)$!

Нам нужно убедиться, что существует предел, а этого мы пока не знаем.

Доказательство (настоящее):

$\varepsilon > 0$.

Т.к. $f \to L$, то существует окрестность a : $V_1(a)$, такое что $\forall x \in \dot{V}_1 \cap X$ $|f(x) - L| < \varepsilon$.

$L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$

$L - \varepsilon < f(x)$ (*)

$\exists V_2(a) : \forall x \in \dot{V}_2 \cap X$ выполняется $|h(x) - L| < \varepsilon$.

$L - \varepsilon < h(x) < L + \varepsilon$

$h(x) < L + \varepsilon$ (**)

$L - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < L + \varepsilon$

Положим $V = V_1 \cap V_2$, и возьмем $x \in \dot{V} \cap X \subset (\dot{V}_1 \cap X, \dot{V}_2 \cap X)$ — для такого неравенства выполняются оба неравенства (*) и (**)

$L - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < L + \varepsilon$ — выбросим $f(x)$ и $h(x)$

$L - \varepsilon < g(x) < L + \varepsilon \Leftrightarrow |g(x) - L| < \varepsilon$.

Теорема доказана.

Сделаем к этой теореме удобное добавление: условие 1) несколько избыточно, его можно ослабить: достаточно, чтобы $f(x) \leq g(x) \leq h(x) \forall x U \cap X$, (где U — окрестность точки a) существовало на окрестности, т.к. предел — локальное свойство.

тогда можно заменить $V_1' = V_1 \cap X$ и $V_2' = V_2 \cap X$.

Свойства бесконечно малых.

$X \subset R$, a — точка сгущения, $f : X \to R$

Определение: $f(x)$ называется бесконечно малой величиной при $x \to a$ (в точку a) если $f(x) \to_{x \to a} 0$. Предел — 0. $f(x) \equiv 0$ — бесконечно малое.

Теорема:

$X \subset R$, a — точка сгущения, $f : X \to R$

$f(x) \to_{x \to a} L \Leftrightarrow \alpha(x) = f(x) - L \to_{x \to a} 0$, т.е. a — бесконечно малое.

$f(x) = L +$ бесконечно малое

Доказательство:

Предположим, что L — предел.

$\forall \varepsilon > 0 \exists V(a) \forall x \in \dot{V} \cap X$

$|f(x) - L| < \varepsilon$

$|\alpha(x)| < \varepsilon$

$|\alpha(x) - 0| < \varepsilon$, значит, α — бесконечно малое.

И наоборот, если α — бесконечно малое, то

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists V(a) \ \forall x \in \dot{V} \cap X$ такое, что $|\alpha(x)| < \varepsilon$, $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Определение ограниченной функции:

$X, \ f : X \to R$ ограниченная на X, если ограниченно её множество значений $f(X) = Y_0$

Y_0 —ограничено $\Leftrightarrow Y_0 \subset [A, B]$.

$\exists C : \forall y \in Y_0 \ |y| \leq C$

f ограничено, если

$\exists C : |f(x)| \leq C \ \forall x \in X$.

Для нас интересна не просто ограниченнось, а ограниченность возле данной точки.

$X \subset R, a$ — точка сгущения, $f : X \to R$

f локально ограничена в точке a, если $\exists$ окрестность U точки a, где f ограничено на $X \cap U$, т.е. $\exists C = C_U$

$\forall x \in U \cap X \ |f(x) \leq C|$.

Один факт, относящийся к понятию локально ограниченной функции.

Лемма: $f \to_{x \to a} L$, тогда f — локально ограничена в точке a.

Доказательство: $|f(x)| \to_{x\to a} |L| < |L|+1$. По теореме о стабилизации знака $\exists V(a), \forall x \in \dot{V}(a) \cap X$ выполняется $|f(x)| < |L|+1$.

Неточность: $\forall x \in V \cap X$ — непроколотая окрестность по определению.

$|f(x)| \leq C$ — функция определена в точке a?

Свойства бесконечно малых:

1) $\alpha, -\alpha, |\alpha|$ — бесконечно малые одновременно.

ϕ —любая из этих величин. $\phi \to_{x\to a} 0$

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists V(a), \forall x \in \dot{V}(a) \cap X$

$|\phi(x)| < \varepsilon$

2) $\alpha, \beta, |\beta(x)| \leq |\alpha(x)|$ $\forall x$

$-|\alpha(x)| \leq \beta(x) \leq |\alpha(x)|$

3) α, β — бесконечно малые при $x \to a$.

Тогда $\alpha(x) \pm \beta(x)$ — бесконечно малое при $x \to a$.

Доказательство:

$\delta(x) = \alpha(x) + \beta(x)$;

$\varepsilon > 0$

$\exists V_1(a)$ $\forall \dot{V_1}(a) \cap X : |\alpha(x)| < \varepsilon$

$\exists V_2(a)$ $\forall \dot{V_2}(a) \cap X : |\beta(x)| < \varepsilon$

Возьмем $V = V_1 \cap V_2$, $x \in \dot{V_2}(a) \cap X$

$|\delta(x)| = |\alpha(x) + \beta(x)| \leq |\alpha(x)| + |\beta(x)|$

$|\delta(x)| = |\alpha(x) + \beta(x)| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$

$|\delta(x)| < 2\varepsilon$

4) α — бесконечно малое при $x \to a$, β — локально ограниченное в т. a, тогда $\alpha \cdot \beta = \delta$ — бесконечно малое при $x \to a$.

Свойства:

a) $\beta(x) \equiv Const$

$C \cdot \alpha(x)$ — бесконечно малое.

b) β — ограничено на X.

$\alpha(x) \cdot$ любоечисло — бесконечно малое.

c) $f \to_{x \to a} L, \alpha(x)$ — бесконечно малое, то $\alpha(x) f(x)$ — бесконечно малое.

c$'$) Произведение бесконечно малых бесконечно мало.

—

Доказательство:

$\exists U(a), \exists C : |\beta(x)| \leq C \ \forall x \in U \cap X$ (1)

$\varepsilon > 0$

$\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{C} > 0.$

$\exists V(a) \ \forall x \in \dot{V} \cap X |\alpha| < \varepsilon' = \frac{\varepsilon}{C}$ (2)

$W = U \cap V, \ \forall x \in \dot{W} \cap X$ выполняются одновременно неравества (1) и (2)

$\forall x \in \dot{W} X \ |\alpha(x) \cdot \beta(x)| = |\alpha(x)| \cdot |\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{C} \cdot C = \varepsilon.$

Арифметические действия с пределами.

Теорема 1:

$X \subset R$, a — точка сгущения, $f, g : X \to R$

$f \to_{x \to a} A$, $g \to_{x \to a} B$

тогда

$f(x) + g(x) \to_{x \to a} A + B$, $f(x) \cdot g(x) \to_{x \to a} AB$ что равносильно

$\lim\limits_{x \to a}(f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x \to a} f(x) + \lim\limits_{x \to a} g(x)$

Доказательство:

По свойствам бесконечно малых,

$f(x) = A + \alpha(x), \alpha(x)$ — бесконечно малое.

$g(x) = B + \beta(x), \beta(x)$ — бесконечно малое.

$f(x)+g(x) = A+B+(\alpha(x)+\beta(x))$, где $A+B = L$, $(\alpha(x) + \beta(x)$ — бесконечно малые.

$f(x) \cdot g(x) = AB + B\alpha(x) + A\beta(x)) + \alpha(x)\beta(x))$, где $AB = L$, все остальное — бесконечно малые.

Конец девятой лекции.

Лемма $X \subset R$, a — точка сгущения, $g : X \to R$

$x_0 = \{x \in X | g(x) \neq 0\}$

Если $g(x) \to_{x \to a} B,\ B \neq 0$, то

1) a — точка сгущения x_0;

2) $\frac{1}{g}$ локально ограниченна в точке a.

Доказательство (1):

Считаем, что B положительно, иначе можно рассмотреть $|g(x)|$ не умаляя общности.

По теореме стабилизации знака $\exists U_0(a)$ такая что $\forall x \in \dot{U}_0(a) \cap X : g(x) > 0$;

Раз $g(x)$ положительна, то $\dot{U}_0(a) \cap X \subset X_0$.

Это означает, что любая проколотая окрестность точки А пересекается с X.

Возьмем V — произвольная окрестность точки a.

$\dot{V} \cap X_{\supset}\dot{V} \cap \dot{U}_0(a) \cap X$.

$W = U_0 \cap V$, $\dot{W} = \dot{U}_0 \cap \dot{V}$.

$\dot{V} \cap \dot{U}_0(a) \cap X = \dot{W} \cap X \neq \varnothing$

Это мы взяли произвольную окрестность точки а, и удостоверились, что пересечение этой окрестности с X не пусто. Лемма доказана.

Доказательство (2):

$\exists V_0(a)$, такая что g — ограничено на $v_0(a) \cap X_0$.

$0 < \frac{B}{2} < B$, $\exists V_0(a)$ $\forall x \in \dot{V}_0(a) \cap X_0$, $g(x) > \frac{B}{2}$.

Разделим последнее неравенство на g.

$g(x) > \frac{B}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{g(x)} < \frac{2}{B}$ или

$|\frac{1}{g(x)}| < \frac{2}{B}$

Теорема о пределе частного.

$X \subset R$, a — т. сг., $g : X \to R$

$x_0 = \{x \in X | g(x) \neq 0\}$

$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

Если $f(x) \to_{x \to a} A$, $g(x) \to_{x \to a} B$, то $h(x) \to_{x \to a} \frac{A}{B}$

иными словами $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$

Доказательство:

$f(x) = A + \alpha(x), \alpha(x)$ — бесконечно малое.

$g(x) = B + \beta(x), \beta(x)$ — бесконечно малое.

$$\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{A}{B} = \frac{A+\alpha(x)}{B+\beta(x)} - \frac{A}{B} = \frac{B\alpha(x) - A\beta(x)}{B\cdot g(x)} = \frac{1}{B}\cdot\frac{1}{g(x)}(B\cdot\alpha(x) - A\cdot\beta \tag{8}$$

(два последних множителя бесконечно малы).

Теперь мы пользуемся: если разность бесконечно мала, то соответствующая константа есть предел. Следовательно, $\frac{A}{B}$ — предел.

Несколько полезных следствий из двух предыдущих теорем:

1) $f(x) \to_{x\to a} A,\ C$ — константа, $\Rightarrow C\cdot f(x) \to_{x\to a} CA$.

2) $f_1, f_2, ...f_N, f_k(x) \to A_k$, при $k = 1, 2, ...N$, то $C_k\ \sum_{k=1}^{N} C_k f_k(x) \to \sum_{k=1}^{N} C_k A_k$

3) $f_1(x) f_N(x) \to A_1, ...A_n$

Несколько примеров:

$f(x) = x,\ R, a$

$f(x) \to_{x\to a} a$

$\forall\varepsilon > 0\ \delta = \varepsilon$, такое что $|f(x) - a| < \varepsilon$ при $0 < |x-a| < \delta$

$f(x) \to_{x \to a} a = f(a)$ — так бывает не всегда, но в данном случае это так.

А значит, работают следствия:

$\forall n f_n(x) = x^n \to_{x \to a} a^n = f_n(a)$

$P(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n \to_{x \to a} P(a)$

$P(x), Q(x)$, тогда $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ — полином.

Если предел знаменателся отличен от нуля, то $\frac{P(x)}{Q(x)} \to_{x \to a} \frac{P(a)}{Q(a)}$.

Односторонние пределы.

X, a — точка сгущения

$X_a^+ = X \cap (a, +\infty)$

$X_a^- = X \cap (-\infty, a)$

Для одного из таких множеств X_a^+ или X_a^- a может не быть точкой сгущения

Определение:

X, a — т. сг. для X_a^+, $f : X \to R$

Если существует предел сужения f на X_a^+ при $x \to a$, то он называется пределом справа функции f в точку a.

Обозначается $\lim\limits_{x \to a+} f(x)$ или $\lim\limits_{x \to +0} f(x)$

По определению:

$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x \in X_a^+,\ 0 < |x-a| < \delta$ при $f(x) \to_{x\to a+0} L$

$|f(x) - L| < \varepsilon$

$0 < |x-a| < \delta$ можно заменить $x > a$, так как $a < x < a+\delta$

Окончательная переформулировка:

$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x \in X, a < x < a+\delta$

$|f(x) - L| < \delta$

Предел слева аналогично $(a - \delta < x < a)$.

Теорема о связи односторонних и двусторонних пределов.

$X \subset R, a$ —точка сгущения для X_a^+ и X_a^-

$f : X \to R$

Предел (двусторонний) в точке a существует тогда и только тогда, когда существуют оба односторонних предела и они равны.

Доказательство:

$f(x) \to_{x\to a+0} L$ и $f(x) \to_{x\to a+0} L$ — ?

Нам нужно доказать, что существует двусторонний предел.

Проверка:

$\varepsilon > 0, \exists\delta_+ > 0, \forall x \in X,\ a < x < a + \delta_+$ (1)

$|f(x) - L| < \varepsilon$. (2)

Для этого же ε

$\varepsilon > 0, \exists\delta_- > 0,\ \forall x \in X,\ a - \delta_- < x < a+$ (3)

Положим, $\delta = min(\delta_+, \delta_-) > 0$ $x \in X, 0 < |x - a| < \delta$

В любом случае выполняется либо условие (1), либо условие (3), а они оба влекут (2).

Теорема доказана.

Примеры:

1) Сигнум. Предел справа -1, предел слева 1, согласно нашей теореме двустороннего предела нет.

2) $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ Односторонние пределы также могут не существовать. Здесь отсутствуют пределы справа и слева.

Предел на бесконечности. Расширенная числовая ось.

$X \subset R$, X не ограничено сверху. При рассмотрении множества, не ограниченного снизу, все будет аналогично.

$\forall C\ \exists x \in X\ x > C$ — формула множества, не ограниченного сверху.

Определение:

$X \subset R$, X не ограничено сверху, $f : X \to R$

L — предел f при $x \to +\infty$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists C > 0\ \forall x \in X, x > C,\ |f(x) - L| < \varepsilon.$

$\forall x \in X, x > C$ означает, что $x \in X \cap (C, +\infty)$.

$R, \omega \neq \omega' \notin R$. $\hat{R} = R \cup \{\omega, \omega'\}$
$\omega' < x,\ x < \omega,\ \omega' < \omega$
Производим переобозначение:
$\omega' = -\infty$, $\omega = +\infty$.
И теперь прямая будет обозначаться $[-\infty, +\infty]$
Окрестность $(+\infty)$ — $(C, +\infty]$, а проколотая окрестность — $(C, +\infty)$
$\forall \varepsilon > 0 \exists C : \forall x \in X, x > C$.
$\forall x \in \dot{V}(+\infty) \cap X, V = (C, +\infty]$

Конец десятой лекции.

$\hat{R} = R \cup \{-\infty, +\infty\}, -\infty < x < +\infty$
$(C, +\infty] = \{x \in R | x > C\} \cup \{+\infty\}$
Аналогично $[-\infty, C)$
$(C, +\infty) = \{x \in R | x > C\}$

a — точка сгущения X.
$\forall V(a)\ \dot{V}(a) \cap X \neq \varnothing$.
$X \subset R$ $(+\infty)$ — точка сгущения X
$\forall V(+\infty)\ \dot{V}(+\infty) \cap X \neq \varnothing$.
то, что $+\infty$ — точка сгущения X означает, что X не ограничено сверху. Аналогично для не ограниче-

но снизу.

Определение предела:
$X \subset R$, $L \in R$, $f : X \to R$.
$\forall \varepsilon > 0\ \exists C > 0\ \forall x \in X, x > C$
$|f(x) - L| < \varepsilon$.
или переформулировка:
$\exists V(+\infty)\ \forall x \in X \cap \dot{V}(+\infty)$.
$|f(x) - L| < \varepsilon$.

Верхняя граница множества: $X \subset R$, C, $\forall x \in X$: $x \leq C$. В $\hat{R}$ верхняя граница всегда есть и это $+\infty$.

Если у множества есть обычная верхняя граница, то у нее есть наименьшая верхняя граница. А если у множества $+\infty$ — верхняя граница, то бесконечность и является наименьшей верхней границей.

Теперь мы можем говорить, что всякое числовое множество имеет супремум. Если множество не ограничено сверху, то $sup(X) = +\infty$.

Аналогично с инфимумом.

Бесконечные пределы и действия с ними.

Это когда у какой-то точки a предел поднимается бесконечно вверх (ну или вниз. Да-да, поднимается вниз, бейте меня, граммар-наци)

$X \subset R$, a — точка сгущения. $a \in R$.

$f : X \to R$.

Как определить, что f имееет в точке a предел $+\infty$? Поблизости от a значения функции будут больше, чем С.

$|f(x) - L| < \varepsilon$ — это мы требовали раньше.

А теперь мы скажем так: $\forall C > 0\ \exists \delta > 0$, такое, что $\forall x \in \dot{V}_\delta(a) \cap X\ :\ f(x) > C$ или $f(x) < -C$

$\forall V(L)\ \exists V(a)\ \forall x \in \dot{V}(x) \cap X\ :\ f(x) \in V(L)$.

Можно переформулировать:

$\forall V(+\infty)\ \exists V(a)\ \forall x \in \dot{V}(a) \cap X : f(x) \in V(+\infty)$

Из этого немедленно следует, что $f(x) \to +\infty \Rightarrow -f(x) \to -\infty$ и обратно: $f(x) > C \Leftrightarrow f(x) < -C$.

$f(x) \to_{x \to -\infty} +\infty$ для этого:

$\forall V(+\infty)\ \exists V(-\infty)\ \forall x\ \in\ X \cap \dot{V}(-\infty)\ :\ f(x)\ \in V(+\infty)$.

Переформулируем на языке неравенств:

$\forall C > 0\ \exists C' > 0\ \forall x \in X \cap (-\infty, -C) : f(x) > C$.

Для бесконечных пределов можно вводить односторонние пределы. Они определяются точно так же.

Для $f(x) = \frac{1}{x}$ предел слева равен минус бесконечности, а предел справа — плюс бесконечности.

Определение:

$X \subset R$, $a \in \hat{R}$, a —точка сгущения для X

$f : X \to R$.

f называется бесконечно большой при $x \to a$, если $|f(x)| \to_{x \to a} +\infty$

Лемма:

$X \subset R$, $a \in \hat{R}$, a —точка сгущения для X

$f : X \to R$.

1) f — бесконечно большая $\Rightarrow \frac{1}{f}$ — бесконечно малая при $x \to a$

2) f — бесконечно малая при $x \to a$, $f \neq 0$ на X, то $\frac{1}{f}$ —бесконечно большая.

3) f — бесконечно большая при $x \to a$, $g : X \to R$, локально ограничена в точке a, то $f + g$ — бесконечно большое.

Доказательство 1 пункта:

$|f(x)| \to +\infty > 1$

$\exists U(a)\ \forall x \in \dot{U}(a) \cap X,\ |f(x)| > 1,\ f(x) \neq 0.$

$\varepsilon > 0.$

Положим $C = \frac{1}{\varepsilon}\ \exists V(a)\ \forall x \in \dot{V}(a) \cap X,\ x \in \dot{U}(a)$

Положим $W = U \cap V$.

Тогда $\forall x \in \dot{W} \cap X\ |f(x)| > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow |\frac{1}{f(x)}| < \varepsilon$

Доказательство 2 пункта аналогично (на дом).

Доказательство 3 пункта:

$\exists U(a)\ \exists M$

$\forall x \in \dot{U} \cap X : |g(x)| \leq M$

$h = f + g$. Зафиксируем $C > 0, C' = C + M$.

$\exists V(a)\ \forall x \in \dot{V} \cap X : |f(x)| > C'$

$W = U \cap V$

$\forall x \in \dot{W} \cap X$ справедливы оба неравенства:

$|g(x)| \leq M$, $|f(x)| > C + M$.

$|h(x)| = |f(x) + g(x)| \geq |f(x)| - |g(x)| > C + M - |g(x)| \geq (C + M) - M = C$

$|f(x) + g(x)| \geq |f(x)| - |g(x)|$ — обдумать дома.

Следоветельно, $|h(x)| > C$, следовательно, $|h|$ стремится к бесконечности.

Определим, что собою представляет сумма бесконечности и любого значения.

$x \in R$

1) $(+\infty) + (+\infty) = (+\infty) - (-\infty) = (+\infty) + x = x + (+\infty) = +\infty$

2) $(-\infty) + (-\infty) = (-\infty) - (+\infty) = (-\infty) + x = x + (-\infty) = -\infty$

3) $x > 0$

$x(\pm\infty) = (\pm\infty)x = (\pm\infty)(+\infty) = (+\infty)(\pm\infty) = \pm\infty$

4) $x < 0$

$x(\pm\infty) = (\pm\infty)x = (\pm\infty)(-\infty) = (-\infty)(\pm\infty) = (\mp\infty)$

5) $\frac{x}{\pm\infty} = 0$

Неопределенности:

1) $(+\infty) - (+\infty)$;

2) $(+\infty)+(-\infty)$;
3) $(-\infty)+(+\infty)$;
4) $(-\infty)-(-\infty)$;
5) $0(\pm\infty)$;
6) $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$;

Теорема об арифметических действиях в пределах.

Теорема: $f, g : X \to R$, $a \in \hat{R}$ — точка сгущения X.

$\exists \lim\limits_{x\to a} f(x),\ \lim\limits_{x\to a} g(x)$

1) $\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x)$
2) $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$
3) $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$

ВО ВСЕХ СЛУЧАЯХ, КОГДА ПРАВАЯ ЧАСТЬ ИМЕЕТ СМЫСЛ!!!

$f(x) \to +\infty$
$g(x) \to L \neq 0$ — бесконечно малое.
$\frac{1}{f(x)} \to 0$
$\frac{1}{g(x)} \to \frac{1}{L}$
$|f(x)g(x)| \to +\infty$

Конец одиннадцатой лекции.

Теорема

$\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \lim\limits_{x\to a}(f(x)) + \lim\limits_{x\to a} g(x))$

$\lim\limits_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = lim(f(x))\cdot lim(g(x))$

$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$

1) Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq 0, g(x) \to_{x\to a} 0$, то $\frac{f(x)}{g(x)}$ — бесконечно большое.

Неопределенности:

1) $\infty - \infty$;

2) $0\cdot\infty$;

3) $\frac{\infty}{\infty}$

4) $\frac{0}{0}$

$f(x) = \frac{1}{x-x^2}, g(x) = \frac{1}{x+x^2}$, где $x\to 0$.

$0 < x < 1$ — говорим о пределе справа

$f(x) - g(x) = \frac{1}{x-x^2} - \frac{1}{x+x^2}$ — теорема ничего не говорит (). Приведем к одному знаменателю:

$\frac{2x^2}{x^2-x^4} = \frac{2}{1-x^2}$ — мы раскрыли неопределенность и по нашей теореме предел равен 2

Рассмотрим пример:

1) $f(x) = Ax^n$, при $x\to+\infty$; В зависимости от знака A предел будет стремиться к $+\infty$ либо $-\infty$.

2) Полином: $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n$, при $a_0 \neq$

0. Для решения нужно вынести за скобку x^n — самую быстрорастующую степень: $= x^n(a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + ... + \frac{a_n}{x^n})$. Скобка стремится к a_0.

3) $P(x) = a_0x^4 + ... + a_n,\ a_0, b_0 \neq 0$

$Q(x) = b_0x^m + ... + b_m,\ a_0, b_0 \neq 0,\ m, n \in \mathbb{N}$

$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^n(a_0 + \frac{a_1}{x} + ... + \frac{a_n}{x^n})}{x^m}(b_0 + \frac{b_1}{m} + ... + \frac{b_m}{x^m})$

Если $m > n$, то предел 0. Если $m = n$ — $\frac{a_0}{b_0}$. Если $m < n$ — $\pm\infty$

Данный способ (вынесения самого большого слагаемого за скобки) требует умения найти самое большое слагаемое. Об этом мы поговорим в параграфе

Сравнения бесконечно малых и бесконечно больших

$X \subset \mathbb{R}, a \in \hat{\mathbb{R}}, a$ — точка сгущения.

$f : X \to \mathbb{R},\ g : X \to \mathbb{R}$

f ограничено на X, то $\exists C : |f(x)| \leq C\ \forall x \in X$

f локально ограничено $\exists C, \exists U(a)\ |f(x)| \leq C \forall x \in X \cap U$

$f = O(1)$ — ограничено.

$f = O(1)$ при $x \to a$ — локально ограничено.

f, g — бесконечно малые (большие) при $x \to a$

$f(x) = \bar{\bar{o}}(g(x))$ при $x \to a$, если $\exists$ бесконечно малое α: $f(x) = \alpha(x) \cdot g(x)\ \forall x \in X$

$f(x) \equiv_{x\to a} g(x)$, если $\exists \phi(x) : f(x) = \phi(x) \cdot g(x)$ при $\phi(x) \to_{x\to a} 1$

$g(x) \neq 0 \forall x \in X \cap \dot{a} = \alpha(x)$

$f = o(g) \Leftrightarrow \frac{f(x)}{g(x) \to_{x\to a} 0}$.

$f \equiv g$ при $x \to a$, если $\frac{f(x)}{g(x)} \to_{x\to a} 1$

$f(x) = \phi(x)g(x)$, то $g(x) = \frac{1}{\phi(x)} f(x)$

$g(x) = \psi(x)f(x)$ при $\psi(x) \to 1$.

Хороший пример — многочлены:

$P(x) \equiv a_0x^n$ при $x \to +\infty$.

Полином эквивалентен своему последнему члену.

Теорема

$f \equiv f^*, g \equiv g^*$ при $x \to a$

1) Если $\frac{f^*(x)}{g^*(x)} \to_{x\to a} L$, то $\frac{f(x)}{g(x)} \to_{x\to a} L$

Иными словами, $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f^*(x)}{g^*(x)}$

2) $f(x)g(x) \equiv f^*(x)g^*(x)$

3) $h(x) \to_{x\to a} L \neq 0$, то тогда $L \in \mathbb{R} \Rightarrow h(x)f(x) \equiv Lf^*(x)$

Доказательства:

$f(x) = \phi(x)f^*(x), g(x) = \psi(x)g^*(x), \phi \to_{x\to a} 1, \psi \to_{x\to a} 1$

$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\phi(x)}{\psi(x)} \cdot \frac{f^*(x)}{g^*(x)} \to_{x\to a} 1 \cdot L = L$

где $\frac{\phi(x)}{\psi(x)} \to 1$, $\frac{f^*(x)}{g^*(x)} \to L$
$f(x)g(x) = \phi(x)\psi(x)[g^*(x)]$
$\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f^*(x)}{g^*(x)}$
Данное равенство имеет вольность, т.к. не доказано, что предел справа существует. Если мы докажем это, то и предел слева будет существовать.

Рассмотрим несколько примеров:
$f(x) = (x^2-1)(x-1), g(x) = (x^2-1)(x+1)$
При $x \to +\infty$.
Т.к. $f(x), g(x)$ — полиномы, начинающиеся с x^3, то они эквивалентны.
При $x \to 1$
$f(x) = (x+1)(x-1)^2 \equiv 2(x-1)^2$
$g(x) = (x+1)^2(x-1) \equiv 4(x-1)$
$f(x) = o(g(x))$
При $x \to -1$
$f(x) \equiv 4(x+1)$
$g(x) \equiv -2(x-1)^2$
$g(x) = o(f(x))$ (o — отношение эквивалентности)

$f(x) \to_{x\to a} 0$, $|f(x)| < 1$
$g(x) = \sqrt{1+f(x)} - 1$
(*) $1 + \frac{t}{2} + \frac{1}{t^2} \leq \sqrt{1+t} \leq 1 + \frac{t}{2}$
Подставим $g(x)$.
$\frac{f(x)}{2}(1-f(x)) = \frac{t(x)}{2} - \frac{f^2(x)}{2} \leq y(x) \leq \frac{f(x)}{2}$

$-\frac{f^2(x)}{2} \leq g(x) - \frac{f(x)}{2} \leq 0$, где $g(x) - \frac{f(x)}{2} = \alpha(x)$
$|\alpha(x)| \leq \frac{1}{2} f^2(x)$
$\alpha(x) = O(f^2(x)) = \bar{\bar{o}}(f(x))$

$g(x) = \frac{f(x)}{2} + \alpha(x)$
$\alpha(x) = O(f^2(x)) = \bar{\bar{o}}(f(x))$

$f(x) = x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n + \bar{\bar{o}}(x^n)$
$f * g$ $f(g(x))$ — получится группа G_n
Посмотреть, что представляют собой G_2, G_3, проверить, являются ли они подгруппами G_4

Теорема:
f, g — бесконечно малое (большое), при $x \to a$ Эквивалентность:
1) $f \equiv g$ при $x \to a$
2) $f - g = o(g)$ при $x \to a$
3) $f - g = o(f)$ при $x \to a$
Докажем, что 1) $\Leftrightarrow$ 2), 1) $\Leftrightarrow$ 3)

Доказательство:
Докажем, что 1) $\Rightarrow$ 2)
$f(x) = \phi(x) g(x)$ $\phi(x) \to_{x \to a} 1$
$f(x) - g(x) = (\phi(x) - 1) g(x) = o(g(x))$.
Докажем, что 2) $\Rightarrow$ 1)

$f(x) - g(x) = \alpha(x)g(x)$ $\alpha \to_{x\to a} 0$
$f(x) = (1+\alpha(x))g(x) = \phi(x)g(x)$

$f(x)g(x) \equiv f^*(x)g^*(x)$. Это не относится к разности! $f - g$ может быть не эквивалентно $f^* - g^*$

Примерчик:
$\ln(1+f(x)) \equiv f(x)$ при $f(x) \to_{x\to a} 0$
Вычислить:

$$\lim_{x\to 0} \frac{ln(1+x+x^2) + ln(1-x+x^2)}{x^2} \tag{9}$$

Решение:
$\ln(1+x+x^2) \equiv x + x^2 \equiv x$ при $x \to 0$
1) $\lim \frac{ln(1+x+x^2)+ln(1-x+x^2)}{x^2} = \lim \frac{x+(-x)}{x^2}$
2) $\lim \frac{x+x^2(-x-x^2)}{x^2} = 2$
3) $\lim \frac{\ln(1+x)+\ln(1-x)}{x^2} = \lim \frac{ln(1-x^2)}{x^2} = -1$
ВСЕ ТРИ ОТВЕТА НЕ ВЕРНЫЕ!

$a \in \mathbb{R}, (x-a)^n,\ x-a, (x-a)^2, (x-a)^3$
$f(x) \equiv C(x-a)^n$

Не все бесконечно малые сравнимы!
$f(x) = x\sin(\frac{1}{x})$
$g(x) = x$
$\frac{f(x)}{g(x)} = \sin\frac{1}{x} \nrightarrow$

Теорема:
$a > 1$. $\forall n \in N$ $\frac{x^y}{a^x} \to_{x\to+\infty} 0$
$x^n \to +\infty$
$a^x \to +\infty$
$a^x \equiv C_x^m$

Конец двенадцатой лекции.

Теорема: $a > 1, n \in \mathbb{N}$
$\frac{x^n}{a^x} \to_{x\to+\infty} 0$;
Доказательство через неравенство Бернулли:
$(1+c)^n > 1 + nc$.
Пусть $a = 1 + c, c > 0$, $t > 0, a^t$.
Оценим снизу $a^t : n = [t] \leq t < [t] + 1$
$t - 1 < [t]$.
тогда $a^t \geq a^{[t]} > 1 + c[t] > c(t-1)$
Это во всяком случае верно, когда $t > 1$, да и в обратном случае тоже.
Теперь оценим a^x:
$a^x = a^{\frac{x}{2}} \cdot a^{\frac{x}{2}} > (c(\frac{x}{2} - 1))^2$ при $x > 2$.
$\frac{x}{a^x} < \frac{x}{c(\frac{x}{2}-1)^2} \to_{x\to+\infty} 0$
Мы доказали нашу теорему при $t > 1$. А теперь общий случай:
Положим $b = a^{\frac{1}{n}} > 1$

$\frac{x^n}{a^x} < (\frac{x}{a^{\frac{x}{n}}})^n = (\frac{x}{b^x})^n \to_{x\to+\infty} 0$

Теорема о пределе монотонной функции

$X \subset \mathbb{R}, C$ —верхняя граница, если $\forall x \in X : x \leq C$

$supX \in \mathbb{R}$.

Всякое числовое множество всегда имеет супремум и инфимум.

Понятия точной верхней и нижней границы переносится на функции.

f определенная на X ограничена, если $f(X)$ ограничено.

$\exists X\ \forall x \in X : |f(x)| \leq C$

$f(X)$ ограничено сверху. f ограничено сверху, если $\exists C\ \forall x \in X\ f(x) \leq C$.

Аналогично $\sup f(X) = \sup\limits_X f$

$L = \sup f(X) = \sup\limits_X f$

1) $L \in R$, $\forall x \in X : f(x) \leq L$

2) $\forall C < L$, $\exists x_0 \in X : f(x_0) > C$.

То, что эти условия выполняются, означает, что L — супремум.

Аналогично для бесконечности:

$\sup f(x) = +\infty$

$\forall C \exists x_0 \in X : f(x_0) > C.$

$X \subset \mathbb{R}, f : X \to R$

f — возрастающая на X

$\forall x, x' \in X : x < x' \Rightarrow f(x) \leq f(x')$

Аналогично для убывающей функции. А возрастающая и убывающая функции определяются термином «монотонные».

Утверждения, доказываемые для возрастающей функции сразу переопределяются для убывающей (домножением на -1), поэтому мы будем формулировать теоремы только для возрастающих функций.

Будем рассматривать случай:

Имеется числовое множество X и у него есть супремум a (не обязательно лежащий на границе множества). Это приводит к тому, что супремум оказывается изолированной точкой, то есть он не является точкой сгущения. Теперь нет возможности говорить о пределе в точке a, поэтому этот случай мы исключаем.

То же самое для инфимума.

Если на X имеется возрастающая функция, у которой b — супремум, а a — инфимум, и если рассмотрим $L = \sup\limits_{x<b} f(x)\ x \in X$, то L — предел.

Теорема о пределе возрастающей функции.

$X \subset \mathbb{R}, f : X \to \mathbb{R}, f$ — возрастающая.

$a = \inf X, b = \sup X$.

1) b — точка сгущения X, при этом $b \in \hat{\mathbb{R}}$, $L = \sup\limits_{x<b, x \in X} f(x)$, $f(x) \in \hat{\mathbb{R}}$, то $\exists \lim\limits_{x \to b} f(x) = L$. Заметим, что L может быть как конечным, так и бесконечным.

2) a — точка сгущения X, при этом $a \in \hat{\mathbb{R}}$, $L = \inf\limits_{x>a, x \in X} f(x)$, $f(x) \in \hat{\mathbb{R}}$ то $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x) = L$. Заметим, что L может быть как конечным, так и бесконечным.

Доказательство:

Будем предполагать, что $b \in \mathbb{R}$ — конечно.

Придется исходить из определения:

$\varepsilon > 0$

$f(x) < L + \varepsilon$ автоматически.

$L - \varepsilon$ — не верхняя граница на множестве $X \setminus \{b\}$, значит, $\exists x_0 \in X : L - \varepsilon < f(x_0)$, при этом $x_0 < b$.

Рассмотрим $\delta = b - x_0 > 0$.

$V_\delta(b) = (b - \delta, b + \delta)$.

$x \in X$, $0 < |x - b| < \delta$, что равнозначно $x \in X \cap \dot{V}_\delta(b)$

Тогда $x_0 = b - \delta < x < b$.

$L - \varepsilon < f(x_0) \le f(x) \le L < L + \varepsilon$, что можно переписать как $L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon \Leftrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

Следовательно, L — предел.

$f(x) \to_{x \to b} +\infty$
$\forall C > 0\ \exists V_\delta(b)\ \forall x \in X \cap \dot{V}_\delta(b),\ f(x) > C.$
$C > 0.\ \exists x_0 \in X, x_0 < b, f(x_0) > C.$
Положим, $\delta = b - x_0$
Рассмотрим $V_\delta(b)$.
Возьмем $x \in \dot{V}_\delta(b) \cap X$.
Так как правее b точек нет, то $x_0 = b - \delta < x < b$. Следовательно, $f(x) \geq f(x_0) > C$.

$\lim\limits_{x \to b} f(x)$ — когда данный предел конечен?
$\lim\limits_{x \to b} f(x) = \sup\limits_{x \in X, x < b} f(x),\ f(x) \leq L$
Если предел конечен, то функция ограничена сверху. Ну и наоборот: если функция ограничена сверху, то это значит, что все её значения не превосходят какой-либо константы. **Предел конечен тогда и только тогда, когда функция ограничена сверху!!**

Сформулируем теорему для убывающей функции:
$X \subset \mathbb{R}, f : X \to \mathbb{R}, f$ — возрастающая.
$a = \sup X, b = \inf X$.
1) b — точка сгущения X, при этом $b \in \hat{\mathbb{R}}$, $L =$

$\inf\limits_{x<b, x\in X} f(x),\ f(x) \in \hat{\mathbb{R}}$, то $\exists \lim\limits_{x\to b} f(x) = L$. Заметим, что L может быть как конечным, так и бесконечным.

2) a — точка сгущения X, $\exists \lim\limits_{x\to a} \in \hat{\mathbb{R}}$ и $= \sup\limits_{x\in X, x>a} f(x)$.

Следствие: f ограничено на X, монотонно.

$X_a^+ = \{x \in X | x > a\}$

$X_a^- = \{x \in X | x < a\}$

a — точка сгущения для каждого из этих множеств.

Для монотонной функции оба односторонних предела существуют и конечны.

Доказательство:

Предположим, что функция возрастает (т.е. домножим её на единицу и сведем к этому случаю). Тогда $a = \sup X_a^-$. Функция возрастает на x_a^-. Функция возрастает, предел есть и он равен супремуму. $\lim\limits_{x\to n-0} f(x) = \sup\limits_{x<a, x\in X} \leq f(y), y \in X, y > a$. Следовательно, предел конечен.

Аналогично доказывается существование предела справа, только на этот раз $a = \inf X_a^+$.

Предел конечен, так как $x > a, z \in X, z < a$, $f(x) \geq f(z)$

Конец тринадцатой лекции.

Предел последовательности

Последовательность не обязательно задается числами, может быть последовательность функций, неравенств и так далее.

Смысл последовательности в том, что каждому числу сопоставляется некий объект. Поэтому последовательность — частный случай отображения: $T : \mathbb{N} \to X$

Последовательность — отображение из множества натуральных чисел в некоторое множество.

Значение отображения в точке n: $T(n) = x_n$;

Запись самих последовательностей: $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{x_n\}_{n\geq 0}$ и так далее.

Последовательность, которая числу n сопоставляет натуральное число, у которого есть n делителей.

n 1 2 3 4 5 6

x_n 1 2 4 6 ? 12 ...

График последовательности представляет собой набор точек.

Часто бывает полезно изображать последовательность точками на вещественной оси (единственной).

И, поскольку последовательность — функция, заданная на числовом множестве, можно ставить вопрос о её пределе.

$\mathbb{N} \subset \hat{\mathbb{R}}$

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\ L \subset \hat{\mathbb{R}},\ L = \lim\limits_{n\to\infty} x_n.$

Определение предела последовательности:

$\forall$ окрестности $U(L)\ \exists V(+\infty) : n \in \mathbb{N}, n \in V(+\infty) \Rightarrow x_n \in U(L)$.

Расшифруем наше определение на языке неравенств:

$L \in \mathbb{R}$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists C > 0\ \forall n > C \Rightarrow |x_n - L| < \varepsilon$, где C — окрестность бесконечности (край полуоси).

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n > N : |x_n - L| < \varepsilon$, где N — натуральное число.

$\lim x_n = -\infty$. Расшифровка: $\forall C > 0\ \exists N\ \forall n > N\ x_n < -C$.

$\lim x_n = +\infty$. Расшифровка: $\forall C > 0\ \exists N\ \forall n > N\ x_n > C$.

Математики любят использовать синонимы. Поэтому вместо $\exists N : \forall n > N$ говорят «Начиная с некоторого места...» или «Для **всех** достаточно больших номеров...»

Если L — предел, то мы будем писать $x_n \to_{n\to\infty} L$.

Последовательности, которые имеют конечный предел, называются сходящимися, а последовательности, предела не имеющие или имеющие предел бесконечных называются расходящимися.

Теорема: Сходящаяся последовательность ограничена.

f ограничено на $x : \exists C : |f(x)| \leq C\ \forall x \in X$.

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ограничено: $\exists C |x_n| \leq C\ \forall n$ — это требуется доказать.

Доказательство:

$x_n \to L$ конечно.

$\varepsilon = 1$. $\exists N\ \forall n > N\ |x_n - L| < 1$.

$|x_n| = |x_n - L + L| \leq |x_n - L| + |L| < 1 + |L| = C'$. C' — некая константа

$C'' = \max |x_1|, |x_2|, ..., |x_N|$.

Положим $C = C' + C''$, тогда $|x_n| \leq C\ \forall n$.

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ возрастающая, если $x_n \leq x_{n+1}\ \forall n$

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ убывающая, если $x_n \geq x_{n+1}\ \forall n$

Теорема о пределе монотонной последовательности:

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — числовая последовательность.

Если $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ монотонна, то существует предел этой последовательности $(\lim\limits_{n\to\infty} x_n)$.

Если последовательность возрастает, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sup\limits_n x_n$.

Супремум может быть конечен, если последовательность ограничена, или равен бесконечности, если не ограничена.

Если последовательность убывает, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \inf\limits_n x_n$.

Предел монотонной последовательности конечен тогда и только тогда, когда последовательность ограничена.

$\exists C\ |x_n| \le C \Leftrightarrow -C \le x_n \le C$. Следовательно, у конечной последовательности пределы тоже конечны.

$x_n = (1+\frac{1}{n})^n$ — возрастает ($\uparrow$)
$y_n = (1+\frac{1}{n})^{n+1}$ — убывает ($\downarrow$).
$e = \sup x_n,\ y_n = x_n(1+\frac{1}{n}) \to e$

Уточним теорему о вложенных промежутках:
$... \supset [a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}] \supset ...$
$\exists C : C \in a_n, b_n \forall n$ (*)
$C \in \cap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]$.
Уточнение:
Если $b_n - a_n \to 0$, то
1) C —единственное со свойством (*).

2) $a_n \to C,\ b_n \to C$.

Пусть $C' \in [a_n, b_n] \forall n$

Тогда $0 \leqslant |C - C'| \leqslant (b_n - a_n)$

$|a_n - C| \leqslant b_n - a_n$

$|b_n - C| \leqslant b_n - a_n$

Тогда $|C - C'| \to 0 \Rightarrow C \equiv C'$

$a_n = C+$бесконечно малое

Упражнения для размышления:

1) $x_n \to L \in \hat{\mathbb{R}}$.

Строим новую последовательность $y_n = \frac{x_1+\ldots+x_n}{n}$

Доказать, что y_n стремится к L, а обратное неверно.

2) $\{x_n\} \to L$.

Мы взяли и произвольным образом переставили члены последовательности.

Обязана ли новая последовательность стремиться к L?

Уточнение: что значит переставим?

Пусть $\omega : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

Строим новую последовательность $y_n = x_{\omega(n)}$

Принцип Больцано-Вейерштрасса.

Первоначально это утверждение было доказано чешским математиком Бернардом Больцано (1781-1848).

Некоторое время спустя этот же факт доказал математик Карл Вейерштрасс (1815-1897)

Пусть у нас есть последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ и последовательность натуральных чисел $n_1 < n_2 < ...$

$y_k = x_{n_k}$ — подпоследовательность последовательности x_n.

Взяв $x_n = (-1)^n$, $n_k = 2k$, получим $y_1 = y_2 = y_3 = ... = 1 \to 1$

Взяв $n_k = 2k - 1$, получим $y_1 = y_2 = y_3 = ... = -1 \to -1$ —?

Теорема о пределе подпоследовательности:

$x_n \to_{n\to\infty} L \in \hat{\mathbb{R}}$

$\{y_k\}$ — подпоследовательность $\{x_n\} \Rightarrow y_k \to_{k\to\infty} L$

Доказательство:

Заметим, что последовательность номеров n_k строго возрастает.

$1 \le n_1$, $2 \le n_2$, по индукции легко докажем, что $k \le n_k \; \forall k$.

Рассмотрим $U(L)$ — окрестность.

Тогда $\exists N \; \forall n > N \; x_n \in U(L)$.

Предположим, что $k > N$, тогда $n_k \ge k > N$. Следовательно, $x_{n_k} \in U(L)$. А $y_k = x_{n_k}$, значит, $y_k \in$

$U(L)$. Отсюда $y_k \to L$.

Теорема (принцип выбора) Больцано-Вейерштрасса.

Формулировка: У всякой ограниченной последовательности есть сходящаяся подпоследовательность.

Доказательство:

$\{x_n\}$ — ограниченная последовательность.

$\exists [a, b]$, такой, что $\forall n \; x_n \in [a, b]$

Доказательство будет проходить методом деления промежутка пополам.

Разделим промежуток пополам точкой c:

$[a, c]$ $[c, b]$ — хоть один из этих двух промежутков содержит точки x_n со сколь угодно большими номерами.

Возьмем этот промежуток и назовем $[a_1, b_1]$. То есть $[a_1, b_1] \subset [a, b]$.

Теперь берем $[a_1, b_1]$ и делим его пополам точкой c_1.

И так далее.

На шаге k получим промежуток $[a_k, b_k] \subset [a_{k-1}, b_{k-1}]$, который содержит точки x_n со сколь угодно большими номерами.

В итоге получается последовательность промежутков $[a_k, b_k]$ со следующими свойствами:

1) $[a_k, b_k] \supset [a_{k+1}, b_{k+1}]$;

2) Длина $[a_k, b_k]$ равна $b_k - a_k = \frac{b-a}{a^k} \to n \to \infty 0$.

3) $\forall k [a_k, b_k]$ содержит точки x_n со сколь угодно большими номерами.

Строим последовательность:

Берем произвольно номер n_1, для которого $x_{n_1} \in [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2]$

Берем n_2, такое, что $x_{n_2} \in [a_2, b_2]$ и $n_2 > n_1$.

$n_1 < n_2 < ... < n_k$

Выбираем из промежутка $[a_k, b_k]$ точку x_{n_k}, $n_k > n_{k-1}$.

Так возникает подпоследовательность $y_k = x_{n_k}$

$\forall k \; a_k \leq x_{n_k} \leq b_k$. Т.к. промежутки вложенные, $\exists C \in [a_k, b_k] \; \forall k$, такое, что $a_k \to C$ и $b_k \to C$. Следовательно, по теореме о двух милиционерах $x_{n_k} \to C$

Конец четырнадцатой лекции.

Добавление:

1) $\{x_n\}$ не ограничена сверху, то существует подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, стремящаяся к $+\infty$.

2) $\{x_n\}$ не ограничена снизу, то существует подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, стремящаяся к $-\infty$.

Доказательство:

$\forall C \; \exists n : x_n > C$, $\exists n' : x'_n > C + 1$ и так далее. Т.е. существует бесконечно много номеров, таких, что $x_n > C$.

Отсюда становится возможным построение подпоследовательности:

$x_{n_1} > 1$

$x_{n_2} > 2$, $x_{n_2} > x_{n_1}$

$x_{n_3} > 3$, $x_{n_3} > x_{n_2}$

$\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} : x_{n_k} > k = z_k$, где $x_{n_k} \to \infty$, $z_k \to \infty$.

Задачи:

1) Из всякой последовательности можно извлечь монотонную подпоследовательность. (Не опираться на принцип Больцано-Вейерштрасса);

2) $x_n \to A$, тогда A — частичный предел последовательности. Пусть $\{L_n\}$ — частичные пределы последовательности $\{x_n\}$. Если $L_n \to L \in \hat{\mathbb{R}}$, и L — тоже частичный предел.

3) $x_n = \sqrt{n} - [\sqrt{n}]$. $n_k = k^2$, $x_{n_k} = x_{k^2} = 0 \to 0$. Будет ли любое число частичным пределом этой последовательности?

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — как узнать, есть ли у данной последовательности предел?

Что значит, что последовательность стремится к L? $\forall \varepsilon > 0$ $|L - x_n| < \varepsilon$ Если последовательность сходится, то при всех больших номерах все точки x_n бесконечно близки друг к другу.

Точное определение:

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется сходящейся в себе (фундаментальной или последовательностью Коши), если обладает следующим свойством: $\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n, m > N |x_n - x_m| < \varepsilon$.

(Введено в честь французского математика Огюстена Коши (1789-1857), создателя теории пределов)

Свойства, связанные с определением:

1) **Лемма:** сходящаяся последовательность фундаментальна.

$x_n \to L \in R$. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда $\exists N\ \forall n > N\ |x_n - L| < \frac{\varepsilon}{2}$ (*).

Возьмем 2 числа: $m, n > N$. Для $|x_n - L| < \frac{\varepsilon}{2}$ и для $|x_m - L| < \frac{\varepsilon}{2}$.

$|x_n - x_m| = |(x_n - L) - (x_m - L)| \geq |(x_n - L)| + |(x_m - L)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

2) **Лемма:** фундаментальная последовательность ограничена.

Доказательство:

$\varepsilon = 1$. Тогда $\exists N\ \forall n, m > N$.

$m_0 > N\ |x_n - x_m| < 1$.

$n > N\ |x_n| = |x_{m_0} + (x_n - x_{m_0})| \geq |x_{m_0}| + |x_n - x_{m_0}| < |x_{m_0}| + 1 = C'$

Отсюда $|x_n \geq C'|$

$C'' = \max |x_k|$ при $1 \geq k \geq N$

$C = C' + C''$

Теорема: Последовательность сходится тогда и только тогда, когда она фундаментальна.

Доказательство:

Идея в том, чтобы доказать, что последовательность имеет предел. Если это так, то все подпоследовательности тоже имеют этот предел. Отсюда идея: возьмем подпоследовательность, докажем, что у неё есть предел и докажем, что этот предел является пределом всей последовательности. Зная, что из ограниченной последовательности можно извлечь сходящуюся подпоследовательность.

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — фундаментальна, следовательно, она ограничена. Следовательно, $\exists x_{n_k}$ сходится: $x_{n_k} \to L \in \mathbb{R}$

Теперь докажем, что $\{x_n\} \to L$

$\varepsilon > 0,\ \exists N:\ \forall n, m > N\ |x_n - x_m| < \varepsilon,\ m = n_k > N$.

$|x_n - x_{n_k}| < \varepsilon\ \forall n > N, k > N\ (n_k \geq k)$.

$|x_n - L| \leq \varepsilon < 2\varepsilon$.

L — предел x_n.

Характеристика предела функций на языке последовательностей.

Лемма: $X \subset \mathbb{R},\ a \in \hat{\mathbb{R}}$.

a — точка сгущения множества $X \Leftrightarrow \exists\{x_n\}$ со свойствами:

1) $x_n \in X \forall n$;

2) $x_n \to a$;

3) $x_n \neq a \forall n$

Доказательство:

Необходимости:

a — точка сгущения.

$a \in \mathbb{R}\ \forall V(a)\ \dot{V}(a) \cap X \neq \varnothing$.

$\forall \delta > 0\ \dot{V}(a) \cap X \neq \varnothing$.

$a = +\infty$. $(a - \delta, a + \delta)$, $(C, +\infty]$

$\delta = \frac{1}{n}$

$\forall n \dot{V}_{\frac{1}{n}}(a) \cap X \neq \varnothing$.

$\exists x_n \in \dot{V}_{\frac{1}{n}}(a) \cap X : x_n \in X, 0 < |x_n - a| < \frac{1}{n}$

$|x_n - a| < \frac{1}{n} \to 0$.

Достаточность:

$V(a)$. Т.к. $x_n \to a$, то начиная с некоторого места $x_n \in V(a)$, точнее, ввиду условий (3) и (1) $x_n \in \dot{V}(a) \cap X$.

Получилось, что для любой окрестности точки a пересечение окрестности с X не пусто, следовательно, a — точка сгущения.

Лемма доказана.

Теорема: $X \subset \mathbb{R}, a \in \hat{\mathbb{R}}, a$ — точка сгущения.

$f : X \to \mathbb{R}$.

$f(x) \to_{x\to a} L,\ (L \in \hat{\mathbb{R}})$

$\forall$ последовательности $\{x_n\}$ со свойством (*)

1) $x_n \in X \forall n$;

2) $x_n \to a$

3) $x_n \neq 0\ \forall n(*)$

$f(x) \to L$ (**)

Доказательство:

Требуется доказать, что: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L, y_n = f(x_n) \to_{n\to\infty}$ L

Доказываем:

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ со свойством (*).

Возьмем $V(L)$

Лемма гарантирует, что $\exists U(a) \forall x \in \dot{U}(a) \cap X$

$f(x) \in V(L)$.

Вспомним, что $x_n \to a$

$\exists N\ \forall n > N\ x_n \in U(a)$.

По свойству (1) и (3): $x_n \in \dot{U}(a)$ и, так как $x_n \in X$ $\dot{U}(a) \cap X$

Следовательно, $f(x_n) \in V(L)$.

Получилось, что для любой окрестности $V(L)$ мы нашли такой номер N, что как только $n > N\ f(x_n) \in V(L)$.

Конец пятнадцатой лекции.

$X \subset \mathbb{R}, a \in \hat{\mathbb{R}}, a$ — точка сгущения.

$L = \lim\limits_{x \to a} f(x) \Leftrightarrow$

$\forall \{x_n\}$ со свойствами:

(*) 1) $x_n \in X \ \forall n$, 2) $x_n \to_{n\to\infty} a$, 3) $x_n \neq a \forall n$. Тогда $L(x_n) \to L, \ L \in \hat{\mathbb{R}}$

Переходим к доказательству достаточности:

На языке неравенств нужно доказать, что $\forall \varepsilon \ \exists \delta > 0$.

Откуда возьмется δ? Разобъем множество X на 2 части, в первой выполняется условие, а во второй - нет.

1) $L \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$

$A = \{x \in X | |f(x) - L| < \varepsilon\}$;

$B = \{x \in X | |f(x) - L| \geq \varepsilon\}$

$A \cap B = \varnothing, \ A \cup B = X$.

Сначала берем те точки X, где точки графика принадлежат полосе $|f(x_n) - L| < \varepsilon$ — это A, а точки, которые не входят в полосу — B. Точки, где график «высовывается» за полосу (т.е. множество B), лежат достаточно далеко от A.

Мы и докажем, что a — НЕ точка сгущения для B. От противного.

Доказательство:

Допустим, что a — точка сгущения. Тогда по лемме о характеристике точек сгущения, найдется последовательность точек $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ которая удовлетворяет свойствам 1), 2), 3) где вместо X стоит B. Так как $B \in X$, то $0 < \varepsilon \leq |f(x_n) - L| \to 0$. Противоречие. Теорема доказана.

Таким образом, установлено, что a — НЕ точка сгущения для B. На языке окрестностей:

$\exists U(a) : \dot{U}(A) \cap B = \varnothing$.

Попытаемся понять, что мы доказали. Рассмотрим $\dot{U}(a) \cap X$. Данное пересечение состоит из точек множества A. Следовательно, $(\dot{U}(a) \cap X) \in A$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists U(a) : \ \forall x \in \dot{U}(a) \cap X \Rightarrow x \in A$. А в A попадают точки, которые лежат в $|f(x) - L| < \varepsilon$. Значит, $\forall \varepsilon > 0 \ \exists U(a) : \ \forall x \in \dot{U}(a) \cap X \Rightarrow x \in A \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

Отсюда, по определению, L — предел x_n.

Ну а если $L = +\infty$, то нужно доказать $f(x) > C$.

Зафиксируем C и возьмем

$A = \{x \in X | f(x) > C\}$;

$B = \{x \in X | f(x) \leq C\}$

Материал по программе коллоквиума ЗАКОНЧЕН!

Обобщение понятия предела.

Пусть есть X, функция ρ на множество $X \times X$. Значения ρ на $X \times X$ обозначаем как (x, y)

1) $\rho(x,y) \geq 0$ и $\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

2) $\rho(x,y) = \rho(y,x)$.

3) $\rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(z,y)$

Множество X удовлетворяющее условиям выше называется метрическим расстоянием.

А (X,ρ) называется метрическим пространством.

Рассмотрим несколько частных случаев, прежде чем переходить к общим понятиям:

1) Прямая $\mathbb{R}$. $\rho(x,y) = |x-y|$.

1$'$) Прямая $\mathbb{Q}$. $\rho(x,y) = |x-y|$. — это уже другое пространство со свойствами, не всегда выполняющимися в $\mathbb{R}$

2) $\mathbb{R}^2$: $z = (x,y)$, $z' = (x',y')$. $\rho(z,z') = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}$. Данная метрика не единственная. Можно задать метрику $\rho(z,z') = \frac{|x-x'|}{1+|x-x'|} + \frac{|y-y'|}{1+|y-y'|}$

3) В трехмерном пространстве $\mathbb{R}$: $w = (x,y,z)$, $w' = (x',y',z')$. $\rho(z,z') = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$.

Метрическое пространство: X, ρ

Как только есть метрическое пространство, так сразу возникают метрические шары.

Шар $B(a,r) = \{x \in X | \rho(x,a) < r\}$ — открытый шар. На прямой это просто (a)

Шар $\bar{B}(a,r) = \{x \in X | \rho(x,a) \leq r\}$ — закрытый шар. На прямой это просто $[a-r, a+r]$

Для плоскости:

$\rho(z,z') = \frac{|x-x'|}{1+|x-x'|} + \frac{|y-y'|}{1+|y-y'|} < 2.$
Нарисовать шары с $0 < r < 2$.
$\rho(x,a) = r$, где r — радиус.

Окрестностью точки a в метрическом пространстве называется любой открытый шар с центром в этой точке.

$a, b \in X$. $\rho(a,b) = d > 0$. Шары радиусом $\frac{d}{2}$ пересекаться не будут (выполнено правило о непересекающихся окрестностях разных точек).

Докажем (от противного):
$c \in B(a, \frac{d}{2}) \cap B(b, \frac{d}{2})$
$d = \rho(a,b) \leq \rho(a,c) + \rho(c,b) < \frac{d}{2} + \frac{d}{2} = d$, где $\rho(a,c) < \frac{d}{2}$ и $\rho(c,b) < \frac{d}{2}$.

Определение предела на языке метрических пространств:

Пусть есть пространство (X, ρ). Пусть есть подмножество $A \subset X$.

Определение: точка $a \in X$ называется точкой сгущения множества A, если $\forall U(a)$ выполняется $\dot{U}(a) \sqcap A \neq \varnothing$ ($\sqcap$ — пересечение).

Если (X, ρ):
Определение:
1) $\rho(x_n, a) \to_{n\to\infty} 0$.
2) $\forall U(a)\ \exists N : \forall n > N x_n \in U(a)$.
$U = B(a, \varepsilon)$:

3) $\forall \varepsilon\ \exists N : \forall n > N$
$rho(x_n, a) < \varepsilon$.

Пусть есть 2 пространства (X, ρ), $(Y, \bar{\rho})$.

$A \subset X,\ T : A \to Y, a$ — точка сгущения.

Определение: $b \in Y$, b — предел T в точке a если: $\forall U(b)\ \exists V(a) :\ \forall x \in \dot{V}(a) \cap A \Leftarrow T(x) \in U(b)$.

$U = B(b, \varepsilon),\ V(a) = B(a, \delta)$:

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ \forall x \in A \cap B(a, \delta), T(x) \in B(b, \varepsilon)$.

что как только $xinA, 0 < \rho(x, a) < \delta$, то сразу $\bar{\rho}(T(x), b) < \varepsilon$.

Метрику в $\hat{\mathbb{R}}$ следует вводить следующим образом $(x, y \in \mathbb{R})$:

$\rho(x, y) = |\frac{x}{1+|x|} - \frac{y}{1+|y|}|$

$\rho(\pm\infty, y) = |\pm 1 - \frac{x}{1+|x|}|$

$\rho(-\infty, +\infty) = 2$.

$\varepsilon = \frac{1}{1+C}$.

В любом метрическом пространстве X, ρ можно ввести фундаментальную последовательность $\{x_n\}$, если она удовлетворяет условию $\forall \varepsilon > 0\, \exists N : \forall n, m > N,\ \rho(x_n, x_m) < e$. Все сохранятся для более общего случая.

А вот в случае обратной теоремы не все так радужно. Например, в метрическом пространстве $\mathbb{Q}, \rho(x, y) = |x-y|$, то последовательность $\{x_n\}$, являющаяся округлением $n\sqrt{2}$ стремится к 0: $x_n \to \sqrt{2}$. Но в $\mathbb{Q}$ нет $\sqrt{2}$! Следовательно, в данном метрическом пространстве последовательность предела не имеет.

Определение: Метрическое пространство, в котором всякая последовательность имеет предел называется полным.

Зафиксируем p — простое.

$\mathbb{Q}, r = \frac{m}{n}, s = \frac{a}{b} \neq r$.

a, b — натуральные, не делящиеся на p.

$|r - s| = \frac{a}{b}p^k$.

$\frac{|mb-na|}{nb}$, тогда $\rho(r, s) = \frac{1}{p^k}$. Эта штуковина называется $p-$одической метрикой.

Упражнение: Найти предел $t_n = 1 + p + ... + p^n$ в $p-$одической метрике.

Конец шестнадцатой лекции.

Вторая глава

Непрерывная функция

Определение: $X \subset \mathbb{R}, a \in X, f : X \to \mathbb{R}$

Функция называется непрерывной в точке a, если:

1) a — точка сгущения, и $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

2) a — изолированная точка X.

Непрерывность функции в данной точке — локальное свойство, то есть если взять какую-то проколотую окрестность точки a и изменить функцию вне её, её значение в точке a не изменится.

В данном случае a — обычное число, и предел конечен. Расшифровка на языке неравенств:

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x \in X, 0 < |x - a| < \delta,\ |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Если $x = a$, то последнее неравенство выполняется автоматически.

Так что теперь можно записать это в виде: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x \in X, |x - a| < \delta\ |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Теперь расшифруем это дело на языке окрестностей:

$\forall U(f(a))\ \exists V(a) : \forall x \in X \cap \dot{V}(a)$ выполняется $f(x) \in U(f(a))$.

Последнее можно записать в виде: $\forall U(f(a))\ \exists V(a) : \forall x \in X \cap V(a)$ выполняется $f(x) \in U(f(a))$.

Расшифровка непрерывности на языке последовательностей:

a — точка сгущения.

$f(x) = \lim\limits_{x \to a} f(a)$

$\forall \{x_n\}$ со свойствами:

1) $x_n \in X$, 2) $x_n \to a$, 3) $x_n = a$, то $f(x_n) \to f(a)$ (*)

Теперь третье условие можно опустить. Докажем это:

$x_n \in X$, $x_n \to a$

$n_k, x_{n_k} \neq a$, $m_k, x_{m_k} = a$

$x_{n_k} \to a, x_{n_k} \neq a$.

Поэтому $f(x_{n_k}) \to f(a)$.

Если вспомнить определение предела, то НСНМ $|f(x_{n_k}) - f(a)| < \varepsilon$

Рассмотрев $|f(x_n) - f(a)|$, то оно тоже НСНМ будет меньше эпсилон.

Таким образом, мы можем модифицировать условие (*), и сказать, что f — непрерывна в т. a, если $\forall \{x_n\}$ со свойствами 1) и 2), то $f(x_n) \to f(a)$.

Если f непрерывна в точке a, $X \supset X_0 \ni a$, $f : X \to \mathbb{R}$, то $g = f|_{X_0}$.

Если $f : X \to \mathbb{R}$, f — непрерывна в точке a, то её сужение также непрерывно в этой точке.

Если $f : X \to \mathbb{R}$, $a \in X$, а f не непрерывна в точке a, то a называется точкой разрыва.

При этом, если $\lim\limits_{x \to a+0} = f(a)$, то говорят, что $f(x)$ непрерывна справа.

Примеры:

1) $f(x) = sign\ x$

Она разрывна и слева и справа. Предел слева равен 1, справа — -1, а значение равно нулю.

2) $f(x) = [x]$.

Справа эта функция непрерывна. Разрывы происходят в целых точках. А слева, конечно, будут разрывы.

3) $f(x) = \frac{1}{x}$

Она непрерывна в каждой точке. А в 0 говорить о разрыве нельзя, поскольку там функция не определена.

4) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, x \neq 0 \\ A, x = 0 \end{cases}$.

Тогда она прерывается в точке 0.

5) $f(x) = sin\frac{1}{x}$, $f(0) = A$.

Эта функция не имеет предела ни справа, ни слева.

6) $D(x) = \begin{cases} 0, x \text{ иррациональное} \\ 1, x \text{ рациональное.} \end{cases}$

(функция Дирихле).

Определение: a — точка разрыва f. Если $\exists$ конечные пределы справа и слева, то тогда a — точка разрыва первого рода. А в противном случае будем говорить, что это точка разрыва второго рода.

У $sign\ x, [x]$ все x — точки разрыва первого рода (скачки). У остальных — точки разрыва второго рода.

f монотонна и определена на (a, b), то все её разрывы только первого рода.

Задачи:

1) Функция Римана:

$$f(x) = \begin{cases} 0, x \text{ иррациональное число} \\ \frac{1}{n}, x = \frac{m}{n} \text{и эта дробь несократима} \end{cases}$$

Найти все разрывы и определить их характер (первого или второго рода)

2) Придумать функцию, которая разрывна во всех точках, кроме 2-х.

Простейшие свойства непрерывных функций

Теорема: о стабилизации знака:

$X \in \mathbb{R}, a \in X, f : X \to X.$

Если $f(a) > C$ $(f(a) < C)$ и f — непрерывна в т. a, то $\exists V(a)$, такая, что $\forall x \in V(a) \cap X : f(x) >$

$C(f(x) < C)$.

Доказательство:

$f(a) > C$.

$f(a) = \lim\limits_{x \to a} > C$. Тогда по старой теореме о стабилизации знака о пределах, $\exists V(a)$, такое, что $\forall x \in \dot{V}(a) \cap X : f(x) > C, f(a) > C$. (Воспользовались старой теоремой о стабилизации знака).

Теорема об арифметических действиях с непрерывными функциями.

f, g определены на X, непрерывны в т. $a \in X$, следовательно, $f \pm g, fg$ — непрерывны в точке a. Если $g(a) \neq 0$, то $\frac{f}{g}$ непрерывны в т. a

Теорема о непрерывности композиций.

$f : X \to \mathbb{R}$, a — точка сгущения,

$g : Y \to \mathbb{R}$, b — точка сгущения, $b = f(a)$,

$f(x) \subset Y$.

Тогда можно образовать композицию

$h(x) = g(f(x)), x \in X$,

$b = f(a) \in Y$.

Формулировка: Если обе функции непрерывны в точке a, то их композиция тоже непрерывна.

Доказательство:

$h(x) \to_{x \to a} h(a)$ — требуется доказать.

Воспользуемся определением предела на языке последовательностей:

1) $x_n \in X$, 2) $x_n \to a$, 3) $x_n \neq a$ (*)

Положим, $y_n = f(x_n) \to f(a) = b$. ($y_n \in Y$).

Получается, что последовательность y_n удовлетворяет первым двум условиям из (*). g непрерывна по условию в b.

Мы имеем правом сказать (воспользовавшись непрерывностью g), что $g(y_n) \to g(b)$.

$g(y_n) = g(f(x_n)) = h(x_n)$

$g(b) = g(f(a)) = h(a)$

$h(x_n) = g(y_n) \to g(b) = h(a)$.

Значит, что предел h равен $h(a)$, то есть h — непрерывна.

$f(x) \to_{x \to a} b$, $g(y) \to_{y \to b} L$, тогда $h(x) = g(f(x)) \to_{x \to a} L$ — неверно.

Представим, что $g(y) = sign^2 y = \begin{cases} 1, y \neq 0 \\ 0, y = 0 \end{cases}$, а $f(x) = x \sin \frac{1}{x} \to 0$

Возьмем $x = x_n = \frac{1}{n\pi}$

$h(x) = sign^2(x \sin \frac{1}{x}) = \begin{cases} 0, x = x_y \\ 1, x \neq x_n \end{cases}$

Таким образом, функция h предела иметь не может, значит, вышесказанное неверно.

Конец семнадцатой лекции.

$f : X \to \mathbb{R}$, a — точка сгущения,

$g : Y \to \mathbb{R}$, b — точка сгущения,

$f(x) \subset Y$.

Тогда можно образовать композицию

$h(x) = g(f(x)), x \in X$,

$b = f(a) \in Y$.

Теорема: если

1) $g(x)$ непрерывна в точке b

или

2) f — строго монотонна,

то $h(x) \to_{x \to a} L$.

Доказательство:

1 очевидно из теоремы о непрерывности композиции (выше)

2: Если $x \neq a$, то $f(x) \neq b$. Пусть для определенности f — строго возрастает и $x < a$. В таком случае существует x', лежащая между x и a. В силу строго возрастания $f(x) < f(x') \leq b = \sup_{t<a} f(t)$.

Раз супремум равен b, то $f(x) \neq b$.

Перейдем на язык последовательностей:

$x_n \in X, x_n \to a, x_n \neq a$. $y_n = f(x_n)$. Тогда $y \in Y, y_n \to b, y_n \neq b$. Значит, $f(x) \neq b$.

Последовательность удовлетворяет всем трем условиям (каким?), поэтому $g(y_n) \to L$. $g(y_n) = g(f(x_n)) = h(x_n) \to L$.

Примеры:

1) Многочлен $P(x) = a_0 x^m + a_x^{x-1} + ... + a_m$ непрерывен в каждой точке множества $\hat{\mathbb{R}}$

Мы доказывали, что $\lim\limits_{x \to x_0} P(x) = P(x_0)$

2) $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ непрерывен в точках, где знаменатель отличен от нуля.

3) $|x|$ непрерывен.

Основные свойства непрерывных функций

Непрерывные функции — функции, непрерывные в каждой точке.

Теорема 1: Первая теорема Больцано-Коши (теорема о нуле)

Формулировка: пусть f непрерывна на $[a, b]$. Если на концах функция принимает значения разных знаков ($f(a)f(b) < 0$), то $\exists c \in (a, b)$, такая, что $f(c) = 0$.

Доказательство (методом деления промежутка пополам):

Для определенности считаем, что $f(a) < 0$, $f(b) > 0$.

Разделим промежуток $[a, b]$ пополам точкой p. $p = \frac{a+b}{2}$.

Случаи, возможные в p:

1) $f(p) = 0$. Теорема доказана.

2) $f(p) > 0$.

3) $f(p) < 0$.

Рассмотрим два последних случая. Обязательно должен найтись промежуток, на левом конце которого функция отрицательна, а на правом положительна. Рассматриваем такой промежуток и нарекаем его $[a_1, b_1]$.

$[a_1, b_1]$ имеет свойства:

1) Его длина равна половине исходного промежутка.

2) $f(a_1) < 0$, $f(b_1) > 0$.

Повторяем процедуру. (Сие есть индукционный переход). В итоге у нас возникает последовательность промежутков $[a_n, b_n]$ со свойствами:

1) $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$

2) $f(a_n) < 0, f(b_n) > 0$ $(+)$

Промежутки $[a_n, b_n]$ вложенные, значит, существует c, принадлежащая всем промежуткам. А поскольку длины промежутков стремятся к нулю, то $a_n \to c$ и $b_n \to c$. Теперь вспомним про условие $(+)$, $f(a_n) < 0$, значит, f непрерывна в точке c и мы получаем, что $f(c) \leq 0$. Но есть и вторая часть уравнения, аналогично утверждающая, что $f(b_n) > 0$ и $f(c) \geq 0$. Отсюда вытекает, что $f(c) = 0$.

Упражнение:

f определена и непрерывна на $\mathbb{R}$. $|f(x)| = |x| \forall x$. Полностью описать все такие функции. Таких функций конечное число.

Теорема: Вторая теорема Больцано-Коши (Теорема о промежуточном значении)

Формулировка: Пусть f непрерывна на $[a, b]$. Если C лежит между $f(a)$ и $f(b)$, то существует c, которое лежит в (a, b) и такое, что $f(c) = C$.

Доказательство:

1) $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, $C = 0$ по теореме 1.

Введем вспомогательную функцию $g(x) = f(x) - C$. Эта функция непрерывна, так как разность непрерывна (константа непрерывна, f непрерывна)

Так как C лежит между $f(a)$ и $f(b)$ то $g(a) = f(a) - C$ и $g(b) = f(b) - C$ разных знаков. И теперь мы попадаем в условие теоремы 1: $\exists c \in (a, b) : g(c) = 0$ и $f(c) - C = 0$.

Следствие: f непрерывна на промежутке Δ

$\Delta' = f(\Delta)$.

Δ' — тоже промежуток. (может быть вырожденным промежутком (точкой), если функция постоянна).

Пример:

$\Delta = \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x+x^2}$, то $\Delta' = (0, 1]$

$\Delta = \mathbb{R}, f(x) = \frac{(1+x)^2}{2(1+x^2)}$, то $\Delta' = [0, 1]$

Доказательство следствия:

$p = \inf_{x\in\Delta} f(x)$, $q = \sup_{x\in\Delta} f(x)$

Докажем, что $\Delta' \supset (p, q)$ (*)

Для Δ' остается 4 варианта:

$(p, q), [p, q), (p, q], [p, q]$.

Доказательство следствия:

Возьмем $p < C < q$.

$C > p$, поэтому C не нижняя граница функции, $\Rightarrow \exists x_1 \in \Delta$, такое, что $f(x_1) < C$.

$C < q$, поэтому C не верхняя граница функции, $\Rightarrow \exists x_2 \in \Delta$, такое, что $f(x_2) > C$.

А теперь рассмотрим промежуток с концами $[x_1, x_2]$ (ну или $[x_2, x_1]$). Так как обе точки $x_1, x_2 \in \Delta$, то и весь промежуток $[x_1, x_2] \subset \Delta$. На концах этого промежутка функция принимает значения $f(x_1), f(x_2)$, а C лежит между ними. Тогда, по теореме о промежуточном хначении $\exists c \in \Delta$, такое что $f(c) = C$. Значит, $\Delta' \supset (p, q)$. Включение (*) доказано.

Пример:

В свое время мы доказывали, что $\forall a > 0\ \exists c > 0 : c^2 > a$.

Теперь мы можем это записать как $\Delta' \supset (0, +\infty)$

Пример примера:

$f(x) = x^n, x \in [0, +\infty)$, то есть $\Delta = [0, +\infty)$. $p = 0, q = +\infty$. Значит, множество значений содержит интервал $[0, +\infty)$.

Теорема: Первая теорема Вейерштрасса.

Формулировка: Если f определена и непрерывна на $[a, b]$, то она ограничена.

Доказательство (от противного): допустим, что не ограничена. Тогда $\forall C \ \exists c \in [a, b] : |f(c)| > C$. То есть никакое число не является верхней границей функции.

$n \ \exists x_n \in [a, b], |f(x_n)| > n$. n — число.

Последовательность x_n ограничена, значит, существует подпоследовательность $\underbrace{x_{n_k}}_{\in[a,b]} \to x_0 \in [a, b]$,

Значит, мы можем сказать, что $n_k < |f(x_{n_k})|$ стремится одновременно к бесконечности и конечному числу $|f(x_0)|$, где x_0 — число из промежутка $[a, b]$. Противоречие. Следовательно, теорема доказана.

Определение: $X \subset \mathbb{R}$. X называется замкнутым, если из условий $x_n \in X \ \forall n, \ x_n \to x_0$ следует, что $x_0 \in X$.

$[a, b], [a, +\infty)$ — замкнутые множества, а $(a, b), (a, b]$ — незамкнутые, так как предел справа не лежит в данном множестве.

Warning! Теорема Вейерштрасса верна только для замкнутых множеств!

Теперь теорему Вейерштрасса можно обобщить:

$X \subset \mathbb{R}, f$ непрерывна на X.

Если X ограничено и замкнуто, то f — ограничено.

Доказательство аналогично доказательству обыкновенной теоремы Вейерштрасса.

Теорема: Вторая теорема Вейерштрасса.

Формулировка: Пусть f определена и непрерывна на $[a, b]$. Тогда существуют $x_1, x_2 \in [a, b]$, такие, что $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)\ \forall x \in [a, b]$. Переформулировка: промежуток имеет максимальное и минимальное значение.

Доказательство (для наибольшего значения):

Докажем, что существует наибольшее значение. По предыдущей теореме, функция ограничена, а значит, у нее есть супремум: $M = \sup f(x)$. Допустим, что наибольшего значения нет. Тогда $f(x) < M\ \forall x$.

Положим теперь $g(x) = \frac{1}{M-f(x)}$. Знаменатель не обращается в ноль, а значит, $g(x)$ непрерывна всюду на $[a, b]$. По первой теореме Вейерштрасса, $g(x)$ ограничено, то есть $\exists C : g(x) < C\ \forall x \in [a, b]$.

Значит, $\frac{1}{M-f(x)} < C$.

$\frac{1}{C} = M - f(x)$. $f(x) < M - \frac{1}{C} \forall [a, b]$.

$M - \frac{1}{C} < M$, а значит, M — не наименьшая верхняя граница. Таким образом, противоречие, теорема доказана.

Конец восемнадцатой лекции.

Непрерывность монотонной функции

$< a, b >\subset \mathbb{R}$ — под данным промежутком подразумевается любой из промежутков: открытый, полуоткрытый и т.д.

Чтобы $f :< a, b >\to \mathbb{R}$ была непрерывна, необходимо, чтобы множество значений функции было промежутком.

Теорема о непрерывной монотонной функции:

$< a, b >$, $f :< a, b >\to \mathbb{R}, f$ — монотонна.

Если $f(< a, b >) =< p, q >$ — промежуток, то f — непрерывна.

Доказательство: не умаляя общности предполагаем, что функция возрастает (иначе можем домножить на -1).

Точка $a < c \leq b,\ c \in< a, b >$.

Нам нужно доказать, что $\lim\limits_{x\to c-0} f(x) = f(c)$.

$\forall X < C : f(x) \leq f(C)$

$\lim\limits_{x\to c-0} f(x) \leq f(c)$ — а нам нужно доказать равенство.

Доказываем от противного: предположим, что $\lim\limits_{x \to c-0} f(x) = A < f(c)$.

$\forall x < C \ f(x) \leq A$

$\forall x \geq c \ f(x) \geq f(c)$

Фиксируем C, такое, что $A < C < f(c)$.

$a < x_1 < c$ и $x < x_2 < b$

$f(x_1) \in < p, q >, f(x_2) \in < p, q > \Rightarrow C \in < p, p >$.

Если $x < c$, то $f(x) \leq A < C$

Если $x \geq c$, то $f(x) \geq A > C$, следовательно, $f(x) \neq C$, так как отрезок, который является областью прибытия функции, по условию непрерывен.

Теорема f непрерывна на $< a, b >$.

Если f строго монотонна, то $g = f^{-1}$ непрерывна на своей области задания.

Доказательство:

$f(< a, b >) =< p, q >$ по следствию теоремы о среднем значении (Больцано-Коши, №2)

Обратная функция $f^{-1}(< p, q >) =< a, b >$ (так как функция строго монотонна и g является отображением НА).

Функция g монотонна, задана на промежутке и множество её значений — промежуток. Поэтому она непрерывна.

Пример:

$$f(x) = \begin{cases} x, \text{ если } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} - x \ \frac{1}{2} < x < 1 \\ 1, \ x = 1 \end{cases}$$

Упражнение: f определена на $< a, b >$, непрерывна, биективна, то она строго монотонна.

Непрерывность основных элементарных функций

1) $P(x)$ — полиномы, определенные на $\mathbb{R}$, непрерывны.

$n \in N, \ f(x) = x^n$ при $0 \leq x < +\infty$, то функция строго монотонна, а $Imf = [0, +\infty)$.

2) $\forall n \in N$ рассмотрим $f(x) = x^n \ x \geq 0$. $f^{-1} : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ непрерывна всюду на полуоси.

Корни нечетных степеней можно рассматривать на всей прямой (но, если это не оговаривается специально, то корень рассматривается исключительно на положительной полуоси).

3) Степень с рациональным показателем: $r = \frac{m}{n}$, $x^r = (x^{\frac{1}{n}})^m$

4) Показательные функции $a > 0, a \neq 1 \quad a^x = f(x), \ x \in \mathbb{R}$

$a^{x+y} = a^x + a^y$.

Теорема $a > 0, a \neq 1$ $f(x) = a^x$, f непрерывна на всей вещественной оси.

Если $0 < a < 1: \ a^x = (\frac{1}{a})^{-x}$

Если $a > 1$:

Лемма: $a^{\frac{1}{n}} < 1 + \frac{a}{n}, \ a^{-\frac{1}{n}} > 1 - \frac{a}{n}$.

Непрерывна в нуле: $f(0) = 1$

$f(x) \rightarrow_{x \to 1} 0$.

Доказательство на языке неравенств:

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$, $n : \ \frac{a}{n} < \varepsilon$, положим $\delta = \frac{1}{n} > 0$.

Докажем, что $|x| < \delta \Rightarrow |f(x) - 1| < \varepsilon$. $(+)$

Пусть $0 < x < \delta = \frac{1}{n}$

Тогда $f(0) = 1 < a^x < a^{\frac{1}{n}} \leq 1 + \frac{a}{n} < 1 + \varepsilon$

$f(x) = a^x$, $-\varepsilon < f(x) - 1 < \varepsilon$.

Аналогично рассматривается второй случай, когда $-\frac{1}{n} = \delta < x < 0$. Тогда

$1 - \varepsilon < 1 - \frac{a}{n} a^{-\frac{1}{n}} < a^x < 1 + a^0 = f(0)$

$a = f(x)$

Если вычесть единицу, получим $-\varepsilon < a^x - 1 < 0 \Leftrightarrow -\varepsilon < f(x) - 1 < 0 < \varepsilon$.

$\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$, где происходит отображение из $(\mathbb{R}, +)$ в $(\mathbb{R}, \times)$ (изоморфизмы (привет, АТЧ, давно не виделись...)).

Теорема f непрерывна на $\mathbb{R}$.

Если $\forall x, y : f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ и $f \not\equiv const$, то $\exists a > 0,\ a \neq 1 : f(x) = a^x\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Доказательство:

1) $f(x) \neq 0\ \forall x$

Допустим противное: $f(x_0) = 0$. Тогда $f(x) = f(x - x_0 + x_0) = f(x-x_0)f(x_0)$, значит, функция константа, а она такой по условию не является. Противоречие.

2) $f(x) > 0\ \forall x$.

$f(x) = f(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}) = f(\frac{x}{2}) \cdot f(\frac{x}{2}) = (f(\frac{x}{2}))^2 > 0$

3) $\forall x, \forall n \in \mathbb{N}\ \ f(nx) = [f(x)]^n$

$f(2x) = f(x+x) = f(x) \cdot f(x) = [f(x)]^2$

4) $f(0) = 1$, $f(x) = f(x+0) = f(x) \cdot f(0)$

5) $f(-x) = \frac{1}{f(x)}$

$1 = f(0) = f(x + (-x)) = f(x) \cdot f(-x)$ (и разделить на $f(x)$)

Напомним, мы хотим доказать, что $f(x) = a^x$.

$f(1) = a > 0$

Для $x = 1$

$f(n) = f(1 \cdot n) = [f(1)]^n = a^n$.

$f(-n) = \frac{1}{f(n)} = \frac{1}{a^n} = a^{-n}$.

Пусть $r \in \mathbb{Q}$. Тогда $r = \frac{m}{n} > 0$, где $m, n \in \mathbb{N}$.

Воспользуемся свойством (3), $x = \frac{1}{n}, m \in \mathbb{N}$.

$f(r) = f(\frac{m}{n}) = [f(\frac{1}{n})]^m$

Подсчитаем последнее:

$f(1) = f(n \cdot \frac{1}{n}) = [f(\frac{1}{n})]^n$, получим, что $(f(\frac{1}{n}))^n = a$.

Подставив куда-то, получим

$f(r) = (a^{\frac{1}{n}})^m = a^r.$

Ну а если $r < 0$, то положим $s = -r$
$f(r) = f(-s) = \frac{1}{f(s)} = \frac{1}{a^s} = a^{-s} = a^r.$

Промежуточный итог: $f(x) = a^x \ \forall x \in \mathbb{Q}$.

Возьмем произвольную x_0. x_n — рациональные, $x_n \to x_0$.
$f(x_n) = a^{x_n}$
Перейдем к пределу:
$a^{x_n} \to a^{x_0}, \quad f(x_n) \to f(x_0).$
$f(x_0) = a^{x_0}$, а a_0 — любая точка.
То есть $f(x) = a^x$.

Конец лекции.

1) $a^{xy} = (a^x)^y$, 2) $ab^x = a^x b^x$. Докажем это для любых (не только рациональных).

Будем считать, что x — рациональное, а y — иррациональное.

y_n — рациональные, $y_n \to y$ (апроксимировали иррациональное рациональным).

$a^{xy_n} = (a^x)^{y_n} = (a^{y_n})^x$. Переходим к пределу:

$a^{xy_n} \to a^{xy}$, $(a^x)^{y_n} \to (a^x)^y$ $(a^{y_n})^x \to (a^y)^x$ (на основании непрерывности)

Откуда: $a^{xy} = (a^x)^y = (a^y)^x$.

Теперь предположим, что оба числа иррациональны:

Аппроксимируем: x_n — рациональное, $x_n \to x$.

$a^{x_n y} = (a^y)^{x_n}$

$a^{x_n y} \to a^{xy}$ (по непрерывности $t \to a^t$).

$(a^y)^{x_n} \to (a^y)^x$

Следовательно, $a^{xy} = (a^y)^x = (a^x)^y$ (можем заменить y на x и наоборот).

Логарифм:

$a > 0, a \neq 1$. $f(x) = a^x$

f — непрерывно строго монотонная.

$Im\ f = (0, +\infty)$. Значит, $\exists f^{-1}(y) = \log_a y$. $y > 0$.

Свойства:

$\log_a(a^x) = x\ \forall x$.

$a^{\log_a y} = y\ \forall y > 0$.

1) $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$ $(t = s \Leftrightarrow a^t = a^s)$

проверим:

$a^t = a^{\log_a(xy)} = xy$

$a^s = a^{\log_a x + \log_a y} = a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y} = xy$.

2) $\log_a(b^c) = c \log_a b$

Проверим: $b^c = (a^{\log_a b})^c = a^c \log_a b$.

Особенно важен для нас $\log_e x$, т.н. натуральный логарифм. Обозначается $\ln x$.

3) Показательная функция с произвольным показателем:

$p \in \mathbb{R}, x > 0$

$x \to f(x) = x^p = e^{p \ln x}$

Пусть $p > 0$. $x^p = e^{p \ln x}$. Как ведет себя x^p при $x \to 0+$? Показатель стремится к минус бесконечности, а сама функция, следовательно, к нулю. Доопределяем её в нуле: $f(0) = 0$.

Некоторые замечательные пределы

$f(x) = (1 + \frac{1}{x})^x$. $x \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$.

Теорема: $(1 + \frac{1}{x})^x \to_{x \to +\infty \text{ или } x \to -\infty} e$.

Доказательство:

1) $x \to +\infty$. Оценим f сверху и снизу и применим теорему о двух милиционерах.

Зафиксируем $x > 1$. $n = [x]$. $n \leq x < n + 1 \Leftrightarrow x - 1 < n$.

Оценим $f(x)$ сверху: $f(x) = (1 + \frac{1}{x})^x \leq (1 + \frac{1}{n})^{n+1} = (1 + \frac{1}{n})(1 + \frac{1}{n})^n \leq (1 + \frac{1}{n})e \leq (1 + \frac{1}{x-1})e = \frac{x}{x-1}e$.

Мы получили, что $f(x) = (1 + \frac{1}{x})^x \leq \frac{x}{x-1}e$.

Оценим снизу:

$e \le (1+\frac{1}{n+1})^{n+2} \le (1+\frac{1}{x})^{n+2} = (1+\frac{1}{x})^2(1+\frac{1}{x})^n \le (1+\frac{1}{x})^2(1+\frac{1}{x})^x$.

$e \leftarrow \frac{e}{(1+\frac{1}{x})^2} \le f(x) \le \frac{x}{x+1}e \to e$

Теперь $x \to -\infty$, $x = -t$, $t \to +\infty$.

$f(x) = (1-\frac{1}{t})^{-t} = \frac{1}{(1-\frac{1}{t})^t} = (\frac{t}{t-1})^t = (1+\frac{1}{t-1})^{t-1}(1+\frac{1}{t-1})$.

Следствие: $(1+x)^{\frac{1}{x}} \to_{x\to 0} e$.

Докажем. Пусть $x \to +0, (x > 0). x_n \to 0, x_n > 0$.

$t_n = \frac{1}{x_n}$

$(1+x_n)^{\frac{1}{x_n}} = (1+\frac{1}{t_n}^{t_n}) \to_{t_n \to +\infty} e$.

Теорема 2

1) $\frac{\ln(1+x)}{x} \to_{x\to 0} 1$;

2) $\frac{e^x-1}{x} \to_{x\to 0} 1$;

3) $\forall p \in \mathbb{R}, \frac{(1+x)^p-1}{x} \to_{x\to 0} p$.

Напомним, что $\frac{f(x)}{g(x)} \to_{x\to a} 1$, то $f(x) \sim_{x\to a} g(x)$

Перепишем:

$\ln(1+x) \sim_{x\to 0} x$.

$\frac{e^x-1}{x} \sim_{x\to 0} x$.

$(1+x)^p - 1 \sim_{x\to 0} px$.

Пункты аналогичны на языке последовательностей.

Доказательство:

1) $\frac{\ln(1+x)}{x} = \ln((1+x)^{\frac{1}{x}}) \to \ln e = 1$ (так как $((1+x)^{\frac{1}{x}}) \to e)$.

2) $\frac{e^x-1}{x}$, $e^x - 1 = y \to_{x\to 0} 0$, тогда $e^x = 1 + y$, тогда $x = \ln(1+y)$.

$\frac{e^x-1}{x} = \frac{y}{ln(1+y)} \to 1$

3) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+x)^p-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{p\ln(1+x)}-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{p\ln(1+x)}{x}$ (по второму пункту) $p \lim\limits_{x\to 0} \frac{ln(1+x)}{x} = p$

Теорема 3: $p > 0, \varepsilon > 0, a > 1$.

1) $\frac{x^p}{a^x} \to_{x\to+\infty} 0$,

2) $\frac{(\ln x)^p}{x^\varepsilon} \to_{x\to+\infty} 0$,

3) $x^\varepsilon |\ln x|^p \to_{x\to+\infty} 0$.

Доказательство:

1) $n \in \mathbb{N},\ a > 1\ \frac{x^n}{a^x} \to_{x\to+\infty} 0$.

$x > 1$, $p \le n \le [p] + 1$.

$0 < \frac{x^p}{a^x} \le \frac{x^n}{a^x} \to_{x\to+\infty} 0$.

2) $x_n \to +\infty$. $t_n = \ln x_n$.

Тогда $\frac{(lnx_n)^p}{x^\varepsilon} = \frac{t_n^p}{(e^{t_n})^\varepsilon} = \frac{t_n^p}{a^{t_n}} \to_{x\to+\infty} 0$

3) $t = \frac{1}{x} \to +\infty$.

Тогда $x^\varepsilon |\ln x|^p = \frac{1}{t^\varepsilon} (\ln t)^p \to_{t\to+\infty} 0$

Упражнение: $n^{\frac{1}{n}}$ при $n \to \infty$.

Новые неопределенности: $1^\infty, 0^0, \infty^0$
$n^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\ln n} \to e^0 = 0$

Конец двадцатой лекции

Длина дуги окружности. Если у нас есть угол (а под углом мы будем понимать часть плоскости, ограниченной двумя лучами (два луча образуют 2 различных угла)). Если мы возьмем угол и рассмотрим дуги окружностей, ограниченных лучами, и с центром в точке О, то увидим, что они образуют пропорцию: $\frac{L}{R} = \frac{L'}{R'} = \alpha$.

Если длина дуги равна радиусу, то говорят, что угол равен одному радиану.

Еще древние греки ввели отношение $\frac{\text{длина окружности}}{\text{диаметр}} = \pi$

Давайте рассмотрим единичную окружность, одну сторону угла закрепим, а вторая будет меняющейся, то косинус α — длина отрезка от O до проекции точки пересечения окружности и второго луча на ось x, а синус α — на ось y.

Площадь сектора круга равна $\frac{1}{2}\alpha R^2$.

Лемма: Если $0 < x < \frac{\pi}{2}$ (x - аргумент тригонометрической функции), то $0 < \sin x < x < \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$

Доказательство: рассмотрим первую четверть окружности с произвольным радиусом R. Начало координат — O, проекция на ось абсцисс — A, точка пересечения стороны угла и окружности B, точка пересечения оси абсцисс с окружностью — C, точка пересечения OB с касательной к окружности в точке $C - D$.

$|CD| = R \operatorname{tg} x$;

$|OB| = R \sin x$;

Треугольник $OBC \subset$ сектор $OBC \subset$ треугольник OCD.

$0 < \frac{1}{2}R \cdot R\sin x < \frac{1}{2}xR^2 < \frac{1}{2}R^2 \operatorname{tg} x$. Остается сократить. Лемма доказана.

Если $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$, то $|\sin x| < |x|$

Теорема: Функции $\sin x$ и $\cos x$ непрерывны на всей прямой.

Доказательство: зафиксируем x, $x+h$ — приращение. $|h| < \frac{\pi}{2}$.

Оценим $|\sin(x+h) - \sin x| = 2|cos(x+\frac{h}{2}) \cdot \sin(\frac{h}{2})| = 2|\cos(x+\frac{h}{2})| \cdot |\sin(\frac{h}{2})| \le 2 \cdot |\frac{h}{2}| = |h|$. Значит, $\sin(x+$

$h) \to_{h \to 0} \sin x$

Следствие 1: $\cos x \to_{x\to 0} 1 = \cos 0$.

Следствие 2: $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, где $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$. То есть тангенс непрерывен во всех точках, где определен.

Еще один замечательный предел:

Теорема: $\frac{\sin x}{x} \to_{x\to 0} 1$

Доказательство: Будем считать, что $x \to 0+$. Можно считать, что $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Воспользуемся леммой: $0 < \sin x < x < \operatorname{tg} x$. Разделим на $\sin x$:

$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$, где $\cos x \to_{x\to 0} 1$. Следовательно, $\frac{1}{\cos x} \to_{x\to 0+} 1$. По теореме о двух милиционерах $\frac{1}{\cos x} \to 1$.

Материал по пределам закончен. Печалька :(

Основы дифференциального исчисления

Определение дифференцируемости и производной

Бесконечно малые бывают различного порядка, поэтому бесконечно малые можно сравнивать.

Приращение функции пропорционально приращению аргумента.

Будем считать, что область задания $X \subset \mathbb{R}$ является объединением промежутков. Например, тангенс задан на объединении $(\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi)$. Во множестве X любая точка — точка сгущения, так как изолированных точек на нем не существует.

$f : X \to \mathbb{R},\ x_0 \in X$.

$x - x_0 = h$ — приращение аргумента. Δx.

$f(x) - f(x_0) = \Delta f(x_0, h) = \Delta f(x_0, x - x_0)$

Определение $f : X \to \mathbb{R},\ x_0 \in X$. f дифференцируема в точке x_0, если существует такое число $A \in \mathbb{R}$, что $\Delta f(x_0, h) = Ah + \alpha(h)$ (*), где $\alpha(h) =_{h\to 0} o(h)$, то есть $\frac{\alpha(h)}{h} \to h \to 00$.

$f(x) - f(x_0) = A(x - x_0) + \alpha(x - x_0)$, где $\frac{\alpha(x-x_0)}{x-x_0} \to_{x\to x_0}$ 0

Замечания:

1) Число A может быть только одно (определяется однозначно) (если существует — то функция дифференцируема).

Докажем: $\Delta f(x_0, h) = Bh + \beta(h)$, $\beta(h) =_{h\to 0} o(h)$.

$0 = (A - B)h + \alpha(h) - \beta(h)$.

$0 = A - B + \frac{\alpha(h)}{h} - \frac{\beta(h)}{h}$. Устремив h к нулю, получим $A - B = 0$.

2) Дифференцируемость — локальное свойство.

3) Если x_0 — крайняя точка промежутка, то приращение будет только одного знака и соответствующий предел будет односторонним. Т.е. дифференцировать можно и в крайних точках промежутка.

$\frac{\alpha(h)}{h} = \omega(h), \omega(0) = 0.$ — будем обозначать так.

$\alpha(h) = h\omega(h), \omega$ — бесконечно малое при $h \to 0$.

Введем следующее определение: $U(x), V(x)$, $U(x) = O(V(x))$, если $\exists C : |U(x)| \leq C|V(x)|$

$U(x) = O(V(x))$ при $x \to x_0$,если $\exists$ окрестность $W(x_0)$ и $\exists C :\ |U(x)| \leq C|V(x)|\ \forall x \in W$.

Еще термины:

Пусть f дифференцируема в x_0. Если $A \neq 0$, то приращение функции эквивалентно произведению Ah: $\Delta(x_0, h) \sim Ah$. При этом Ah называется дифференциалом и обозначается $df(x_0, h)$. Дифференциал — главная линейная часть приращения.

Определение: $x_0, x \in X,\ x \neq x_0, \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

$\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ — производная f в точке x_0. Не исключено, что данный предел бесконечен.

Теорема: $f : X \to \mathbb{R}, x_0 \in X$.

1) Если f дифференцируема в точке x_0, то f непрерывна в точке x_0.

2) f дифференцируема тогда и только тогда, когда в x_0 функция имеет конечную производную.

Доказательство:

$f(x) - f(x_0) = A(x - x_0) + o(x - x_0) \to_{x \to 0} 0$.

Пусть функция дифференцируема. $\Delta f(x_0, h) = Ah+$

$\alpha(h)$, $\alpha(h) = o(h)$.

$\frac{\Delta f(x_0,h)}{h} = A + \frac{\alpha(h)}{h} \to_{h\to 0} A$.

В другую сторону: предположим, существует конечная производная.

$\frac{\Delta f(x_0,h)}{h} \to_{h\to 0} A$.

$\frac{\Delta f(x_0,h)}{h} = A + \omega(h)$, $\omega(h) \to_{h\to 0} 0$.

$\Delta f(x_0, h) = Ah + h\omega(h)$.

Теорема доказана.

Конец двадцать первой лекции.

Напомним:

f дифференцируема в x_0, если $\exists A \in \mathbb{R}$: $f(x_0+h) - f(x_0) = Ah + o(h)$ (при $h \to 0$).

Производная: $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$. И мы доказывали, что функция дифференцируема тогда и только тогда, когда в этой точке есть производная.

Обозначение производной: $\frac{df}{dx}(x_0)$ — обозначение введено Лейбницем (1646-1716).

Ну или $f'(x_0)$ — введено Лагранжем (1736-1813).

$\dot{f}(x)$ — введено Ньютоном, применяется в механике.

Добавление для случая дифференцируемости: $A = f'(x_0)$

Приращение $\Delta(x_0, h)$ может быть записано как $f'(x_0)h + o(h)$.

Напомним, что это: $f'(x_0)h$ называется дифференциалом и обозначается: $df(x_0, h)$

Конечно, производной может не существовать:

$f(x) = x \sin 1/x$, $(x \neq 0), f(0) = 0$.

$\Delta f(0, h) = h \sin \frac{1}{h}$

$\frac{\Delta(0,h)}{h} = \sin \frac{1}{h} \not\to_{h\to 0}$

Если существует односторонний предел, то существует односторонняя производная, которая обозначается $f'_{\pm}(x_0)$. К примеру: $f(x) = |x|, x_0 = 0$

$h > 0$, $f(x_0 + h) = |0 + h| = h$.

$\frac{f(h)-f(0)}{h} = 1$, $f'_{+}(0) = \pm 1$.

производную слева - самостоятельно

Механический и геометрический смысл производной

Сначала о механике. Рассмотрим случай: по прямой движется точка. Положение точки на прямой мы можем определить по какой-либо функции, задающей координаты от времени: $x(t)$.

Если точка движется равномерно (в пропорциональные промежутки времени проходит пропорциональные пути), то это отношение называется скоростью: $\frac{x(t_2)-x(t_1)}{t_2-t_1}$. Если точка движется неравномерно, то можно ввести некий суррогат скорости — среднюю скорость.

$\bar{v} = \frac{x(t_2)-x(t_1)}{t_2-t_1}$

Можно перейти к пределу (замена $t_0 = t_1$):

$v = \lim\limits_{h\to 0} \frac{x(t_0+h)-x(t_0)}{h} = x'(t_0)$.

И то, что производная — скорость, позволяет математически описать процессы движения.

Геометрический смысл производной: касательная.

Если у нас есть прямая и точка, не лежащая на этой прямой, то расстоянием от точки до прямой будем называть перпендикуляр, опущенный из этой точки на прямую. Будем обозначать такое расстояние $dist(M, l)$

$E \subset \mathbb{R}^2, M_0 \in E$ — точка сгущения, l — прямая, $M_0 \in L$. Возьмем точку E, отличную от M_0 и сравним расстояние от M до l и сравним с расстоянием от M до M_0:

$\frac{dist(M,l)}{\rho(M,M_0)}$. Если $\frac{dist(M,l)}{\rho(M,M_0)} \to_{M\to M_0} 0$, то l называется касательной к множеству E в точке M_0.

Формально говоря, мы рассматриваем функцию $f(x) = dist(M, l)$.

Вместо $\frac{dist(M,l)}{\rho(M,M_0)} \to_{M \to M_0} 0$ можно написать, что $\frac{f(M)}{\rho(M,M_0)} \to_{M \to M_0} 0$.

Немного подробнее обсудим это понятие:

Лемма: l, l' — прямые, которые пересекаются в M_0 под углом $\alpha \leq \frac{\pi}{2}$. Берем точку M (любую) и утверждаем, что $dist(M, l) + dist(M, l') \geq \rho(M, M_0) \cdot \sin \frac{\alpha}{2}$ $(+)$.

Доказательство: соединим M_0 с M, получим 2 угла, $\beta + \beta' = \alpha$, $dist(M, l) = d$ $dist(M, l') = d'$.Не умаляя общности можно сказать, что $\beta \geq \frac{\alpha}{2}$.

$d = \rho(M, M_0) \sin \beta \geq \rho(M, M_0) \sin \frac{\alpha}{2}$. Отсюда видно, что $(+)$ выполняется. Лемма доказана.

Следствие: касательная может быть только одна.

Если касательных две, то для l $\frac{dist(M,l)}{\rho(M,M_0)} \to_{M \to M_0} 0$, и для l' $\frac{dist(M,l')}{\rho(M,M_0)} \to_{M \to M_0} 0$, тогда $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\rho(M,M_0) \sin(\frac{\alpha}{2})}{\rho(M,M_0)} \leq \frac{dist(M,l) + dist(M,l')}{\rho(M,M_0)} \to_{M \to M_0} 0$. Приходим к противоречию.

Общий вид прямых, проходящих через данную точку задаются уравнениями: $y - y_0 = k(x - x_0)$. $x = x_0$.

Теорема: $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$, $x_0 \in X$, $y_0 = f(x_0)$, $M_0 = (x_0, y_0)$.

$\Gamma_f = \{(x, y) | x \in X, y = f(x)\} \ni M_0$.

Если f дифференцируемо в точке x_0, то Γ_f имеет в точке M_0 касательную, имеющую вид $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ (1). Здесь $f'(x) = k = \operatorname{tg}\alpha$.

Доказательство:

Мы предполагаем, что функция дифференцируема в x_0.

Пусть l (касательная) определяется уравнением (1). Возьмем произвольную $M(x, f(x)) \in \Gamma_f$.

$y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0)$.

$|f(x) - y| = |f(x) - y_0 - f'(x_0)(x - x_0)| = |f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)| = |\Delta f(x_0, x - x_0) - f'(x_0)(x - x_0)| = |\alpha(x - x_0)| = o(x - x_0)$. (т.к. $f(x) - f(x_0) = A(x - x_0) + \alpha(x - x_0)$).

$\frac{dist(M,l)}{\rho(M,M_0)} \leq \frac{|MN|}{|x-x_0|} = \frac{\alpha(x-x_0)}{|x-x_0|} \to_{M \to M_0} 0$.

Таким образом, наша прямая действительно является касательной по определению: она тесно прилегает к графику.

Пусть у нас имеется график и мы хотим построить секущую к этому графику (через две точки x и x_0). $x \neq x_0$, $y_0 = f(x_0), x_1, y_1 = f(x_1)$. Прямая, проходящая через (x_0, y_0) и (x_1, y_1) имеет уравнение $y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$.

Теперь представим, что вместо x_1 мы взяли произвольную точку x. Тогда угловой коэффициент будет иметь вид $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

Если мы возьмем не дифференцируемую функцию $f(x) = x\sin x$, $f(0) = 0$, мы увидим, что её график имеет дрянной характер и её секущие будут колебаться от биссектрисы первого координатного угла до биссектрисы четвертого координатного угла. Понятно, что никакого предельного положения у них не будет, следовательно, функция не дифференцируема.

Можно доказать, что если к функции есть наклонная касательная, то функция дифференцируема (и наоборот).

Но касательная может быть и вертикальна. Если $f'(x) = \infty$ и $f(x)$ непрерывна в x_0, то касательная вертикальна. Почему? $dist(M, l) = |x - x_0|$, а расстояние от M до M_0 есть $\rho(M, M_0) = \sqrt{(f(x) - f(x_0))^2 + (x - x_0)^2}$.

Отсюда

$$\frac{dist(M, l)}{\rho(M, M_0)} = \frac{|x - x_0|}{\sqrt{---}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}} \to_{x \to x_0} 0 \tag{10}$$

Конец двадцать второй лекции

Правила дифференцирования

Теорема: f, g определены на X, дифференцируемы в точке $x_0 \in X$. Тогда:

1) $f \pm g$ дифференцируема в точке x_0 и $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$

2) C — константа, то Cf дифференцируема в точке x_0 и $(Cf)'(x_0) = C \cdot f'(x_0)$.

3) $f \cdot g$ дифференцируема в точке x_0 и $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$.

4) $g(x_0) \neq 0$, то $\frac{1}{g}$ дифференцируема в точке x_0 и $(\frac{1}{g})(x_0) = \frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}$

5) $g(x_0) \neq 0$, то $(\frac{f}{g})'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$.

Докажем третье утверждение (первые два самостоятельно).

Построим прямоугольник со сторонами $f(x_0)$ и $g(x_0)$. Достроим его по приращениям. Разобъем приращение площади на 3 части: площадь первого $\Delta f \cdot \Delta g$, $f(x_0)\Delta g$ и $g(x_0)\Delta f$. $\Delta f \cdot \Delta g$ бесконечно мала. Разъясняем:

$U = f \cdot g$.

Приращение $\Delta U(x_0, h) = f(x_0 + h) \cdot g(x_0 + h) - f(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0 + h)g(x_0) - f(x_0)g(x_0) = f(x_0 + h)\Delta g(x_0, h) + \Delta f(x_0, h)g(x_0)$.

Разделим:

$$\frac{\Delta U(x_0, h)}{h} = f(x_0+h)\frac{\Delta g(x_0 + h)}{h} + \frac{\Delta f(x_0, h)}{h}g(x_0) = f(x_0)g'(x_0) + f'(x_0)g(x_0) \tag{11}$$

Докажем четвертое:

Рассмотрим $U(x) = \frac{1}{g(x)}$. Исследуем её приращение:

$U(x_0+h) - U(x_0) = \frac{1}{g(x_0+h)} - \frac{1}{g(x_0)} = -\frac{\Delta g(x_0,h)}{g(x_0+h)g(x_0)}$. А теперь разделим всё на h

$$\frac{\Delta U(x_0,h)}{h} = -\frac{\Delta g(x_0,h)}{h}\cdot\frac{1}{g(x_0+h)}\cdot\frac{1}{g(x_0)} \Rightarrow -g(x_0)\cdot\frac{1}{g(x_0)}\cdot\frac{1}{g(x_0)} = \frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2} \tag{12}$$

Пятое доказывается по свойствам третьего и четвертого.

Отметим следствия из этой теоремы:

1) α, β — постоянные, то $(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0)$.

2) $f_1, ..., f_n$ дифференцируемы в x_0. Тогда $(\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k f_k)(x_0) = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k f_k'(x_0)$.

Упражнение: вывести формулу для $(f_1 \cdot ... \cdot f_n)'(x_0)$.

Производные основных функций:

1) $(C)' = 0$;

2) $n \in \mathbb{N}, f(x) = x^n$. Тогда $\forall x\ (x^n)' = nx^{n-1}$. В частности, $(x)' = 1$.

$(x+h)^n = x^n + nx^{n-1}h + o(h)$ (*). ИП: $(x+h)^{n+1} = (x+h)^n(x+h) = (x^n + nx^{n-1}h + o(h))(x+h) = x^{n+1} + nx^{n-1}hx + x_n h + o(h) = x^{n+1} + (n+1)x^n h + o(h)$. Получили формулу (*).

А формулу (*) можно переписать как $\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = nx^{n-1} + \frac{o(h)}{h}$.

3) $n = -k,\ k \in \mathbb{N}$, если $f(x) = x^n$, то $(x^n)' = nx^{n-1}$. $(\frac{1}{x})' = \frac{-1}{x^2}$.

$(x^n)' = \frac{1}{x^k} = \frac{-(x^k)'}{(x^k)^2} = \frac{-kx^{k-1}}{x^{2k}} = (-k)x^{-k-1} = nx^{n-1}$.

4) $p,\ x>0,\ f(x)=x^p$, то $(x^p)'=px^{p-1}$ (воспользовавшись $\frac{(1+t)^p-1}{t}\to_{t\to 0} p$)

Возьмем произвольную h. $f(x+h)-f(x)=(x+h)^p-x^p=x^p[(1+\frac{h}{x})-1]\sim x^p p\frac{h}{x}=px^{p-1}h$.

$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{px^{p-1}h}{h}=px^{p-1}$.

Отметим частный случай: $\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

$f(x)=x^p$. Дифференцируемость в нуле: $\frac{f(x)-f(0)}{x}=x^{p-1}\to_{x\to 0+} 0$.

При $0<p<1$ $\frac{f(x)-f(0)}{x}=x^{p-1}\to_{x\to 0-}\infty$ — додел.

5) $a>0,\ a\neq 1,\ (a^x)'=a^x\ln a$. Частный случай: $(e^x)'=e^x$. (Доказать самостоятельно для обоих случаев).

6) $(\ln x)'=\frac{1}{x}(x>0)$.

$\ln(1+t)\sim_{t\to 0} t$.

$\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h}=\frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{x\frac{h}{x}}\to_{\frac{h}{x}\to\frac{1}{x}}$

$(\ln|x|)'=\frac{1}{x}(x\neq 0)$. Возьмем $x<0$, и $x+h<0$.

$\frac{\ln|x+h|-\ln|x|}{h}=\frac{\ln(-(x+h))-\ln(-x)}{h}=\frac{\ln(1+\frac{n}{x})}{h}\to\frac{1}{x}$.

7) $(\sin x)'=\cos x$.

$\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h}=\frac{2\sin\frac{h}{2}\cos(x+\frac{h}{2})}{h}=\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\cos(x+\frac{h}{2})\to_{h\to 0}\cos x$.

8) $(\cos x)'=-\sin x$.

9) $(\operatorname{tg} x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$

10) $(\operatorname{ctg} x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$

$\varphi: X\to\mathbb{R}$.

$f: Y\to\mathbb{R}$.

Если $\varphi(X)\subset Y$, то $g(x)=f(\varphi(x))$.

Теорема: Если φ дифференцируема в точке x_0, а f в точке $y_0=\varphi(x_0)$, то g — дифференцируема в точке x_0:

$g'(x_0)=f'(y_0)\varphi'(x_0)=f'(\varphi(x_0)\cdot\varphi(x_0))$.

Доказательство:

(1) $f(y_0+\Delta y)-f(y_0) = f'(y_0)\cdot\Delta y+\Delta y\omega(\Delta y)$. $\omega(\Delta y) \to_{\Delta y\to 0} 0$, $\omega(0)=0$.

Возьмем x_0, x_0+h.

$g(x_0+h)-g(x_0) = f(\varphi(x_0+h))-f(\varphi(x_0)) = f(y_0+\Delta(\varphi(x_0,h))-f(y_0) = f'(y_0)\Delta\varphi(x_0,h)+\Delta\varphi(x_0,h)\cdot\omega(\Delta\varphi(x_0,h))$.

$(\varphi(x_0+h) = \varphi+\Delta\varphi(x_0,h) = y_0+\Delta(x_0,h))$.

Разделим:

$$\frac{g(x_0+h)-g(x)}{h} = f'(y_0)\frac{\Delta\varphi(x_0,h)}{h}+\frac{\Delta\varphi(x_0,h)}{h}\cdot\omega(\Delta\varphi(x_0,h)) \tag{13}$$

Конец двадцать третьей лекции.

Производная большего числа функций:

$g(x) = f_0\underbrace{(f_1(f_2(...(f_n(x)))))}_{\varphi}$ и тогда $g'(x) = f'(\varphi(x))\underbrace{(f_1(f_2(...(f_n(x)))))'}_{\varphi}$ и так далее.

Может попасться на экзамене:

$$g'(x) = (e^{\sqrt{\ln(1+\sin^2 x)}}+2^{\sqrt{\ln(\cos 3(1-x))}})' \tag{14}$$

Дифференцирование обратной функции

f определена на $< a,b >$, непрерывна на нем и строго монотонна. Раз она непрерывна, то $Im\ f =<$

$p, q >$. Тогда, так как f монотонна, существует $g = f^{-1}$, $g :< p, q > \to < a, b >$, то $\exists f'(x_0), y_0 = f(x_0)$.

График обратной функции симметричен графику функции относительно прямой $y = x$. Как обстоит дело с касательной? Касательная отстоит от графика функции на очень малое расстояние. При симметрии расстояние не меняется. Значит, прямая, симметричная касательной, тоже будет касательной к графику обратной функции. Она, как нетрудно подсчитать, образует угол с x, равный $\pi - \alpha$, где α — угол, образованный касательной к графику функции.

$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$.

Теорема: при сделанных предположениях существует $g'(y_0)$ и при этом

$$g'(x_0) = \begin{cases} \frac{1}{f'(x)}, \text{ если} f'(x_0) \neq 0, \text{ конечна} \\ 0, \text{ если } f'(x_0) = \pm\infty \\ +\infty, \text{ если } f'(x_0) = 0, f \text{ — возрастающая} \\ -\infty, \text{ если } f'(x_0) = 0, f \text{ — убывающая} \end{cases}$$

Доказательство:

Мы не имеем права дифференцировать композицию, не доказав, что g — дифференцируема! Но мы можем сказать следующее:

Если $f'(x_0) = 0$, то обратная функция не дифференцируема!

Берем точку y_0 и придаем ей приращение: $y_0 +$

$\eta, \eta \neq 0$. Тогда $g(y_0+\eta) = g(y_0) + \underbrace{\Delta g(y_0,\eta)}_{h} = x_0 + h$.

Рассмотрим отношение $\frac{\Delta g(y_0,\eta)}{\eta} = \frac{h}{\eta}$. Преобразуем η:

$f|g(y_0+\eta) = x_0 + h \Rightarrow y_0 + \eta = f(x_0+h) \Rightarrow \eta f(x_0,h) - y_0 = f(x_0+h) - f(x_0) = \Delta f(x_0,h)$. Значит, η — приращение функции f. И теперь мы можем написать:

$\frac{\Delta g(y_0,\eta)}{\eta} = \frac{h}{\Delta f(x_o,h)}$.

Теперь перезапишем: $\frac{\Delta(y_0,\eta)}{\eta} = \frac{1}{\frac{\Delta f(x_0,h)}{h}}$. Выясним предел:

(g непрерывна и в силу этого её приращение стремится к нулю. $h \to 0$)

$$\underbrace{\frac{1}{\frac{\Delta f(x_0,h)}{h}}}_{\to_{\eta\to 0} f'(x_0)} \to_{h\to 0} \begin{cases} \frac{1}{f'(x)}, \text{ если} f'(x_0) \neq 0, \text{ конечна} \\ 0, \text{ если } f'(x_0) = \pm\infty \\ +\infty, \text{ если } f'(x_0) = 0, f \ - \text{ возрастающая} \\ -\infty, \text{ если } f'(x_0) = 0, f \ - \text{ убывающая} \end{cases} \tag{15}$$

$\frac{\Delta f(x_0,h)}{h} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

Дифференцирование обратных тригонометрических функций

$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ — запомнили.

$\cos = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$

Лемма:

1) Если $0 < x < \pi$, то $\sin x > 0$

2) $\sin x$ строго возрастает на $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.

Проверим второе:

$-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$. $x + h \le \frac{\pi}{2}$.

$\sin(x + h) - \sin(x) = 2\underbrace{\sin(\frac{\pi}{2})}_{>0}\underbrace{\cos(x + \frac{h}{2})}_{>0}$. Значит, приращение синуса строго больше нуля, значит, синус строго возрастает.

Под обратными тригонометрическими функциями понимают функции, обратные к сужениям, на которых функция монотонна.

$f(x)$ — сужение sin на $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, а множество значений — $[-1, 1]$.

Следовательно: $f^{-1} : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$. И эта обратная функция называется «арксинус».

$g(y) = \arcsin(y)$.

В соответствии с общими свойствами: $\arcsin(\sin(x)) = x$, при $x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$

$\sin(\arcsin(y)) = y$ при $y \in [-1, 1]$.

Разберемся с производной:

$|x| < \frac{\pi}{2}$, то $(\sin(x))' = \cos x \neq 0$. Значит, если $|y| <$

1, то $(\arcsin y)' = \frac{1}{\cos(x)}$, при условии, что $y = \sin x$.

Отсюда: $\cos x = +\sqrt{1 - \sin^2(x)} = \sqrt{1 - y^2}$.

Отсюда $(\arcsin y)' = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$.

$[0, \pi]$ $\cos x$ строго убывает от $+1$ до -1. И отсюда получаем $\arccos y$. Действуя аналогично, получим: $(\arccos y)' = \frac{1}{-\sin x} = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$.

$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$. Функция имеет период π. Простейший промежуток, где тангенс монотонный, это $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$, множество значений — $\mathbb{R}$.

$(\arctan y)' = \frac{1}{(tgx)'} = \cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1+y^2}$

Нужно взять $(\operatorname{ctg} x)$ на $(0, \pi)$. Получается $(\operatorname{arcctg} y)' = -\frac{1}{1+y^2}$.

Основные теоремы дифференциального исчисления

Теорема Ферма (1601-1665):

f определена на $< a, b >$, $a < c < b$. Пусть $f(c)$— наибольшее (наименьшее) значение функции на этом промежутке.

Если f дифференцируема в c, то её производная в c равна нулю.

Доказательство: пусть, для определенности, f достигает наибольшего значения.

$f(c) = \max$. Значит, $\forall x \in < a, b > \quad f(x) \leq f(c)$.

Рассмотрим производную справа: $f'(c) = f'_+(c) = \lim\limits_{h \to 0+} \frac{f(c+h)-f(h)}{h}$. Знаменатель положителен, а числитель отрицателен. Следовательно, предел меньше или равен нуля.

Для производной слева: $f'(c) = f'_-(c) = \lim\limits_{h \to 0-} \frac{f(c+h)-f(h)}{h}$. Знаменатель меньше нуля, а числитель по-прежнему не положителен. Значит, предел неотрицателен.

Получаем, что $\begin{cases} f'(c) \leq 0 \\ f'(c) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow f'(c) = 0$.

Теорема Ролля (1663-1719).

f определена и непрерывна на $[a, b]$ и дифференцирована в в каждой точке (a, b). Если $f(a) = f(b)$, то $\exists c \in (a, b) : f'(c) = 0$.

Доказательство:

Если $f(x) \equiv const$, то можно взять любую точку интервала. Поэтому лучше возьмем $f(x) \not\equiv const$ — так интереснее. По второй теореме Вейерштрасса

$\exists x_1 \in [a, b] : f(x_1) - \max f(x)$.

$\exists x_2 \in [a, b] : f(x_2) - \min f(x)$.

Так как функция — не константа, $f(x_2) < f(x_1)$.

Поэтому хотя бы одна из этих точек (x_1 или x_2) — внутренняя, так как оба этих значения на концах достигаться не могут. Та, которая внутренняя, будет обозначена за c. Остается на эту точку c натравить теорему Ферма. По теореме Ферма производная в c равна нулю.

Обязательна дифференцируемость в точке c (вспоминаем $f(x) = |x|$). И подумать, нужна ли непрерывность на конце?

Конец двадцать четвертой лекции.

Теорема Лагранжа (1736-1813)

f определена и непрерывна на $[a, b]$, дифференцируема в (a, b). Тогда $\exists c \in (a, b)$, такая, что $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$ (*), что можно переписать как $f(a) - f(b) = f'(c)(a - b)$ (дополнительно).

Поясним геометрический смысл неравенства (*): $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$. Построим график. Если мы проведем прямую, соединяющую крайние точки графика (a, b), то мы увидим, что угловой коэффициент этой прямой - дробь, стоящая в левой части. А $f'(c)$ — это угловой коэффициент касательной в точке c. Собственно, теорема Лагранжа утверждает существование такой точки, производная функции в которой параллельна хорде, построенной через точки a, b.

Доказательство:

$g(x) = f(x) - Kx$, где Kx — некая постоянная.

Потребуем, чтобы $g(b) = g(a)$. Запишем уравнение в виде: $f(b) - Kb = f(a) - Ka$. $f(b) - f(a) = K(b-a)$. Отсюда $K = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Тогда по теореме Ролля существует такая точка c, что $g(c) = 0$. По выведенному ранее, $g'(c) = f'(c) - K = 0$. Значит, $K = f'(c)$.

Следствие 1: Пусть $M = \sup\limits_{(a,b)} |f'(x)|$. Тогда очевидно, что $|f(b) - f(a)| \leq M(b-a)(**)$ — это неравенство называется неравенством Лагранжа.

Следствие 2: Пусть условия теоремы Лагранжа выполнены и точки $x_0, x_0 + h \in [a, b]$. Если $\exists \Theta \in (0, 1)$, тогда $f(x_0 + h) - f(x) = f'(x_0 + \Theta h)h$ (***) — формула конечных приращений. Причем здесь h может быть как положительно, так и отрицательно. $df(x_0, h) = f'(x_0)h$, что ранее записывалось как $df = f'(x_0)dx$.

Доказательство:

$[x_0, x_0 + h]$, в данном промежутке имеется точка c, такая, что $f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(c)h$.

$x_0 < c < x_0 + h$, то $c = x_0 + \Theta h$.

Следствие 3:

Пусть f удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа, $x_0, x_0+h \in [a,b]$. Тогда выполняется $|\Delta f(x_0,h) - f'(x_0)h| \leq \sup(|f'(x) - f'(x_0)| \cdot |h|)$, где $x \in [x_0, x_0+h]$

Доказательство:

Введем функцию: $g(x) = f(x) - f'(x_0)x$.

$g(x_0+h) - g(x_0) = g'(x+\Theta h) \cdot h$.

$f(x_0+h) - f'(x_0)(x_0+h) - (f(x_0) - f'(x_0)x_0) = \Delta f(x_0,h) - df(x_0,h)$

$|\Delta f(x_0,h) - df(x_0,h)| = |g'(x_0+\Theta h)| \cdot |h| = |f'(x_0+\Theta h) - f'(x_0)| \cdot |h| \leq |f'(x) - f'(x_0)| \cdot |h|$.

Пример:

$f(x) = \sin x, x_0 = 0$

$\Delta f(0,h) = \sin h$

$f'(0) = \cos 0 = 1$

$|\sin h - h| \leq \sup|1 - \cos x| \cdot |h| \leq 2\sin^3 \frac{h}{2} h \leq \frac{1}{2}|h|^3$, так как $|x| < h$.

Теорема Коши

Пусть f, g непрерывны на $[a,b]$, дифференцируемы в (a,b) и $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in (a,b)$.

Тогда $\exists c \in (a,b)$, что

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \tag{16}$$

Доказательство:

Прежде всего проверим, что $g(b) - g(a) \neq 0$. Предположим, $g(b) - g(a) = 0$, значит, $g(b) = g(a)$. Тогда она удовлетворяет теореме Ролля, значит, $\exists\, c \in [a, b]$, такая, что $g'(c) = 0$, что противоречит условию. Значит, $g(b) \neq g(a)$.

Докажем непосредственно формулу (16).

Введем вспомогательную функцию: $F(x) = f(x) - Kg(x)$. Подберем K так, чтобы $F(b) = F(a)$, что равносильно тому, что $f(b) - Kg(b) = f(a) - Kg(a) \Leftrightarrow K = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

Значит, $\exists c \in [a, b]$, такая, что $F'(c) = 0$.

$F'(x) = f'(x) = Kg'(x)$

$0 = F'(c) = f'(c) - Kg(c)$, $K = \frac{f'(c)}{g'(c)}$. По определению K полученное равенство равносильно равенству 16.

Геометрический смысл:

$f(x), g(x)$.

$z(x) = (f(x), g(x))$ (перемещение точки на плоскости). Полученное множество точек $z(x)$ называются траекторией.

Проекция мгновенной скорости в каждой точке траектории на абсциссу будет равна $f'(x)$, на ординату — $g'(x)$.

Тогда $z(x)$ — вектор скорости данной точки на плоскости.

Критерии постоянства и монотонности функции

Теорема: f определена на $< a, b >$.

$f \equiv const \Leftrightarrow f$ — дифференцируема и $f'(x) \equiv 0$.

Необходимость: Если f — константа, то её производная 0.

Достаточность:

$\forall x_1, x_2 \in < a, b >,\ f(x_1) = f(x_2)$.

Не умаляя общности $x_1 < \bar{x} < x_2$. Берем промежуток $[x_1, x_2]$.

По теореме Лагранжа $f(x_2) - f(x_1) = f'(\bar{x})(x_2 - x_1) = 0$.

Пример:

$f(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$.

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+(\frac{1}{x^2})}(-\frac{1}{x^2}) \qquad (17)$$

$f(1) = \arctan(1) + \arctan(1) = \frac{\pi}{2}$. Арктангенс — нечетный, поэтому $f(-1) = -\frac{\pi}{2}$

arctan рассматривается не на промежутке.

Теорема (критерий монотонности)

f определена на $< a, b >$, дифференцируема.

f возврастает на $< a, b > \Rightarrow f'(c) \geq 0$

f убывает на $< a, b > \Rightarrow f'(c) \leq 0$

Доказательство:

Необходимость: пусть f возрастает. Возьмем $x_0, x_0 + h \in < a, b >, h > 0$. Тогда

$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geq 0$

Если h положительно, то дробь неотрицательна. Если h отрицательно, то дробь все равно неотрицательна.

Переходим к пределу и в нем получим, что $f'(x_0) \geq 0$.

В другую сторону: пусть производная неотрицательна. Возьмем $x_1, x_2 \in < a, b >$, $x_1 < x_2$.

$[x_1, x_2] \subset < a, b >$.

Тогда $\exists \bar{x} \in (x_1, x_2)$, такая, что $f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{f'(\bar{x})}_{\geq 0}(x_2 - x_1) \geq 0$.

Теорема критерий строгой мотонности

f определена на $< a, b >$, дифференцируема.

f строго возрастает на $< a, b > \Rightarrow$

1) $f'(x) \geq 0 \; \forall x \in < a, b >$;

2) не существует $[p, q] \subset < a, b >$, на котором $f'(x) = 0$.

Доказательство:

Необходимость:

f — строго возрастающая. Тогда условие 1) выполняется по предыдущей теореме, а условие 2) докажем от противного:

Пусть $\exists [p,q],\ p<q,\ f'(x)\equiv 0\ \forall x\in [p,q]$.

Тогда $f(x)\equiv const\ \forall x\in [p,q]$. Тогда $f(p)=f(q)$ при $p<q$, что противоречит условию неэквивалентности нулю.

Достаточность:

$\exists x_1,x_2 \in <a,b>,\ f(x_1)\leq f(x_2)$.

$x_1<x_2$, но $f(x_1)=f(x_2)$.

$x_1<x<x_2$. $f(x_1)\leq f(x)\leq f(x_2)=f(x_1)$. Значит, $f(x)\equiv f(x_1)\ \forall x\in [x_1,x_2]$. Значит, производная равна нулю, что противоречит условию.

Замечание: Нельзя путать условие 2 с условием о том, что...

Конец двадцать пятой лекции.

Предположим, нам необходимо выяснить, справедливо ли неравенство $f(x)<g(x)$ при $a<x\leq b$.

Доказательство проводится по следующей схеме:

Введем вспомогательную функцию $\varphi(x)=g(x)-f(x)$ и подсчитаем её в точке a:

Если $\varphi(a)<0$, то наше неравенство в окрестности точки a неверно.

А вот если $\varphi(a) \geq 0$, то надежда на верность нашего неравенства сохраняется.

Вычисляем производную. Если $\varphi'(x) > 0$, то функция строго возрастает, следовательно, наше неравенство верное.

Примерчики:

Неравенство Бернулли:

1) $(1+x)^n > 1 + nx$ при $x \neq 0, n > 1, x > -1$

Пусть $p > 1$. Тогда $(1+x)^p > 1+px$ при $x \neq 0, x > -1$.

Положим $\varphi(x) = (1+x)^p - (1+px)$. Заметим, что $\varphi(0) = 0$.

$\varphi'(x) = p(1+x)^p - p = p((1+x)^p - 1) - 1$. Эта разность положительна при $x > 0$ и отрицательна при $-1 < x < 0$

Значит, функция убывает на $-1 < x < 0$ и возрастает на $x > 0$. $\varphi(0) = 0$. Следовательно, функция всегда положительна (кроме значения в точке 0).

разобрать для $0 < p < 1$ *и* $p < 0$.

$1 - \cos x \sim_{x \to 0} \frac{x^2}{2} \Leftrightarrow \cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$. Будем считать, что $x > 0$, так как функция четная.

Составим равенство: $\varphi(x) = \cos x - (1 - \frac{x^2}{2})$

$\varphi'(x) = -\sin x + x > 0$, $\varphi(0) = 0$. Значит, функция φ всегда положительна. А это выполняется при

$1 - \frac{x^2}{2} < \cos x$.

Мы доказывали, что $\sin x < x < \operatorname{tg} x$ при $0 < x < \frac{\pi}{2}$

$x - \sin x = O(x^3)$

$x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x$ при $x > 0$.

Докажем левое неравенство:

$\varphi(x) = \sin x - (x - \frac{x^3}{6})$

$\varphi'(x) = \cos x - (1 - \frac{x^2}{2}) > 0$, значит, функция положительна. Неравенство доказано.

$\frac{x}{x+1} < \ln(1+x) < x$ при $x > -1, x \neq 0$

$\varphi(x) = x - \ln(1+x), \varphi(0) = 0$.

$\varphi'(x) = 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x}{1+x}$.

$\varphi'(x) > 0$ при $x > 0$

$\varphi'(x) < 0$ при $-1 < x < 0$.

Левое неравенство даже можно свести к правому, сделав замену: $t = \frac{x}{x+1}$. Неравенство примет вид: $t < \ln(1-t) \Rightarrow \ln(1-t) < -t$, что есть наше правое неравенство.

В свое время мы долго мучились, доказывая, что последовательность $x_n = (1+\frac{1}{n})^n$ возрастает, а $(1+\frac{1}{n})^{n+1}$ убывает. А теперь мы можем решить более общую задачу:

Введем $f(x) = (1+\frac{1}{x})^x$, $g(x) = (1+\frac{1}{x})^{x+1}$.

Дифференцируем:

$$f'(x) = \left(e^{x\ln(1+\frac{1}{x})}\right)' = e^{x\ln(1+\frac{1}{x})}\Big(\ln(1+\frac{1}{x})+x\frac{1}{1+\frac{1}{x}}(-\frac{1}{x^2})\Big) = f(x)\Big(ln(\tag{18}$$

Применим еще раз разность: $\varphi(x) = ln(1+\frac{1}{x})-\frac{1}{x+1}$.

$$\varphi'(x) = 1\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{x(x+1)} = -\frac{1}{x(x+1)^2} < 0 \tag{19}$$

Значит, функция убывает. —?

На бесконечности данная функция стремится к нулю, т.е. 0 - inf данной функции, следовательно, данная функция положительна.

Найдем пределы для $f(x)$ и $g(x)$.

$$f(x) = e^{x\ln(1+\frac{1}{x})} \tag{20}$$

$x\ln(1+\frac{1}{x}) = x\ln(1+x) - x\ln x$

$$g(x) = f(x)(1+\frac{1}{x}) \tag{21}$$

В качестве упражнений рассмотреть $f(x) = (1+\frac{1}{x})^{x+\frac{1}{2}}$ и $(1+\frac{1}{x})^{x+\alpha}$ при $0 < \alpha < 1$.

Правило Лопиталя

Лопиталь (1661 - 1704)

Теорема: f, g определены на $(a, b >$ (или определены на $< a, b))$ и удовлетворяют условию:

1) f, g — бесконечно малые при $x \to a$ $(xtob)$

2) f, g дифференцируемы в (a, b) и $g'(x) \neq 0\ \forall x$

3) $\exists$ (конечный или бесконечный) $L = \lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Предположим, что выполняются эти условия. Тогда $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$

Короче говоря, $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

(при решении задач необходимо убедиться в существовании предела $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$)

(иногда может получиться так, что предел у отношения функций есть предел, а у отношения производных - хренушки)

Доказательство:

1) $a \in \mathbb{R}$. (конечно)

Положим $f(a) = g(a) = 0$. Тогда f и g станут непрерывными в a. Будем доказывать, что $\frac{f(x)}{g(x)} \to_{x \to a} L$ на языке последовательностей:

Пусть $x_n \to a$, $x_n \neq a$.

Рассмотрим промежуток $[a, x_n]$ и применим к нему теорему Коши: $\exists \bar{x}_n$ $(a < \bar{x}_n < x_n)$, такая, что

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f(x_n) - f(0)}{g(x_n) - g(0)} = \frac{f'(\bar{x}_n)}{g'(\bar{x}_n)} \Rightarrow \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f'(\bar{x}_n)}{g'(\bar{x}_n)} \to_{n \to \infty} L \tag{22}$$

так как $x_n \to a$, $\bar{x}_n \to a$.

2) Если $a = -\infty$:

Вместо $(-\infty, b>$ рассмотрим $(-\infty, c) \subset (-\infty, b>$, $c < 0$.

Введем вспомогательные функции:

$f_1(t) = f(-\frac{1}{t})$, где $-\frac{1}{t} < c,\ 0 < t < -\frac{1}{c}$

$g_1(t) = g(-\frac{1}{t})$.

Функции теперь заданы на конечном промежутке, в роли a выступает ноль.

$$\frac{f_1'(t)}{g_1'(t)} = \frac{f'(-\frac{1}{t})(\frac{1}{t^2})}{g'(\frac{-1}{t})(\frac{1}{t^2})} \to_{t\to 0+} L \tag{23}$$

По ранее доказанному,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f_1(-\frac{1}{x})}{g_1(-\frac{1}{x})} \to_{x\to -\infty} L \tag{24}$$

Для случая, когда предел берется в точке a теорема доказана. Для другого - аналогично.

Примерчики:

$x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x \Rightarrow 0 < x - \sin x < \frac{x^3}{6}$.

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{3x^2}$

Предупреждение:

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x+x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x}{1+2x}!!! =!!! \lim\limits_{x\to 0} \frac{sinx}{2} = 0$

Ошибка. Правило Лопиталя приспособлено только к тому случаю, когда частное - неопределенность.

А вот когда неопределенности нет, лопиталить нельзя.

Теорема 2: Аналогично, кроме условия: f, g — бесконечно большие.

Конец двадцать шестой лекции.

Условие локального экстремума

f определена на X, $x_0 \in X$. В точке x_0 функция f имеет локальный максимум, если $\exists\, V(x_0)$, такая, что $\forall x \in U \cap X$ выполняется $f(x) \leq f(x_0)$ ($f(x) < f(x_0)$ — строгий локальный максимум). Локальный минимум и строгий локальный минимум определяются аналогично. Понятия локальный максимум и локальный минимум определяются общим понятием «локальный экстремум».

У функции Антье в каждой точке локальный экстремум.

Можно сформулировать необходимое условие экстремума, которое нам известно:

$X \in \mathbb{R}, x_0 \in X$. x_0 называется внутренней точкой, если $\exists U(x_0)$, такая, что $U(x_0) \in X$. Если $X =< a, b >$, то $a < x_0 < b$.

Теорема: (О необходимом условии экстремума)

f определена на X, $x_0 \in X$.

Если:

1) x_0 — внутренняя и

2) в точке x_0 — локальный экстремум,

то либо f не дифференцируема в x_0, либо $f'(x_0) = 0$.

Какие последствия это имеет для графика? Если имеется касательная и в точке x_0 достигается локальный экстремум, то касательная всегда горизонтальная. Поблизости от x_0 график f всегда близок к касательной, $f(x) = f(x_0) + o(x - x_0)$ при $(x \neq x_0)$. x_0 также называется стационарной точкой.

Доказательство:

Возьмем, для определенности, в точке x_0 — локальный максимум.

Тогда $\exists U$, такое, что $\forall x \in X \cap U$, выполняется $f(x) \leq f(x_0)$.

$\exists V(x_0) \in X$.

Теперь можно считать, что $U \in X$.

$U = (p, q)$.

Тогда $p < x_0 < q$.

$\forall x \in (p, q)\ f(x) \leq f(x_0)$.

Теперь возможны два случая: если функция в x_0 не дифференцируема — тогда она не дифференцируема.

Либо f дифференцируема в точке x_0 и тогда на эту ситуацию мы должны напустить теорему Ферма.

Теорема доказана.

Примечания:

1) Очень важно, что точка x_0 внутри. Если мы возьмем $f(x) = x$ на промежутке $[0, 1]$, то производная не будет нулем, поскольку локальный минимум и максимум достигается в граничных точках.

2) Данного условия не достаточно. Скажем, $f(x) = x^3$. Производная $3x^2$. Обращается в ноль в нуле. Но совершенно ясно, что справа от нуля функция положительна, а слева отрицательна, поэтому в нуле не достигается ни локального минимума, ни локального максимума.

Предположим, что f — дифференцируема на $[a, b]$ и нам нужно найти её наибольшее значение. Оно может достигаться на концах промежутка или во внутренних точках. Чтобы в этом разобраться, нужно рассмотреть подозрительные точки. $f'(x) = 0$. Решаем это уравнение. И наибольшее значение будет достигаться в точках, которые удовлетворяют этому уравнению. Допустим, решения $x_1, ..., x_n \in (a, b)$. Теперь мы можем вычислить значения функции в этих точках и сравнить. Одно из $f(a), f(b), f(x_i)$ будет наибольшим значением.

Бывают случаи, когда нужно понять, есть ли экстремум в подозрительной точке. На этот случай есть

Теорема (о достаточном условии локального экстремума):

f определена и непрерывна на $< a, b >$.

Пусть x_0 — внутренняя точка и f дифференцируема на $(a, x_0), (x_0, b)$. Если производная сохраняет знак в каждом из этих интервалов, то

Знак		Вывод
(a, x_0)	(x_0, b)	
$+$	$+$	f возрастает, экстремум не существует
$+$	-	Строгий локальный максимум
-	$+$	Строгий локальный минимум
-	-	f убывает, экстремум не существует

Будем доказывать первые два случая:

1) $f'(x) > 0$ при $x \in (a, x_0)$;

f строго возрастает на $(a, x_0]$

Следовательно, $f(x) < f(x_0)$ $\forall x \in (a, x_0)$;

$f'(x) > 0$ при $x \in (x_0, b)$;

f строго возрастает на $(a, x_0]$

Следовательно, $f(x) < f(x_0) < f(x') \ \forall x \in (a, b)$.

2) $f'(x) > 0$ при $x \in (a, x_0)$;
f возрастает на $(a, x_0]$
Следовательно, $f(x) < f(x_0) \ \forall x \in (a, x_0)$;
$f'(x) > 0$ при $x \in (x_0, b)$;
f строго убывает на $(a, x_0]$
Следовательно, $f(x) < f(x_0) \ \forall x \in (a, b), x \neq x_0$.
Теорема доказана.

Если область задания состоит из нескольких промежутков, то надо исследовать функцию на каждом промежутке в отдельности.

Это позволяет легко строить графики функций:
$f(x) = \sqrt[5]{x^3}(x-1)^2 = x^{\frac{3}{5}}(x-1)\frac{2}{5}$
Определена на $\mathbb{R}_+$
Поищем точки экстремума:
$f'(x) = \frac{1}{5}(x-1)^{-\frac{3}{5}}x^{-\frac{2}{5}}[3(x-1)+2x]$
Подозрительные точки: 0, $\frac{3}{5}$, 1.
На промежутке $(-\infty, 0)$ знак производной $+$.
На промежутке $(0, \frac{3}{5})$ знак производной $+$.
На промежутке $(\frac{3}{5}, 1)$ знак производной -.
На промежутке $(1, +\infty)$ знак производной $+$.

Экстремума в точке 0 нет, там происходит возрастание, в нуле производная бесконечна (так как происходит деление на 0).

В точке $\frac{3}{5}$ локальный максимум со значением $\frac{\sqrt[5]{108}}{5}$.

И в единице значение функции 0, производная вертикальна (так как опять деление на 0) и дальше функция возрастает.

Поймем, как ведет себя функция на бесконечности:

Вынесем все иксы из-под корня: $f(x) = x(1 - \frac{1}{x})^{\frac{2}{5}}$. $x \to \infty$. Тогда, по замечательному пределу $(1+x)^p - 1 \sim px$. Тогда $(1 - \frac{1}{x})^{\frac{2}{5}} = \frac{2}{5}(\frac{1}{x} + o(\frac{1}{x}))$. Тогда $f(x) == x(1 - \frac{1}{x})^{\frac{2}{5}} = x(1 - \frac{2}{5x} + o(\frac{1}{x})) = x - \frac{2}{5} +$ б.м.

На бесконечности график функции ведет себя как прямая $y = x - \frac{2}{5}$.

Наш график имеет асимптоту $y = x - \frac{2}{5}$.

Задача: $a > 0$ и мы рассматриваем уравнение $a^x = x^a$. Есть тривиальный корень $x = a$. А есть ли другие?

Прологарифмируем: $x \ln a = a \ln x \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} = \frac{\ln a}{a} \equiv t$.

Для того, чтобы разобраться в этом, стоит нарисовать график функции $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

Дифференцируем: $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$. Подозрительная точка $x = e$.

$f'(x) > 0$ при $0 < x < e$;

$f'(x) < 0$ при $x > e$.

На бесконечности стремится к нулю.

Если взять какое-либо $t = \frac{\ln a}{a}$.

Если $0 < a \leq 1$ и $a = e$, то наше уравнение имеет только одно решение.

Если $1 < a \neq e$, то горизонтальная прямая пересечет график в двух местах — два решения.

Конец двадцать седьмой лекции.

Производная высшего порядка

f определена в окрестности x_0 и дифференцируема там. В окрестности x_0 у f есть производная, и возникает новая функция $g(x) = f'(x)$. Она ничем не хуже других функций и мы можем ставить вопрос о существовании производной функции g в x_0.

Если существует производная g в точке x_0, то она называется второй производной f в точке x_0. Обозначается вторая производная либо $f''(x)$, либо $\frac{d^2 f(x_0)}{dx^2}$. В ньютоновском, если о нем вспоминают, обозначении пишется $\ddot{y}$.

Вторая производная также имеет механический смысл — ускорение. Геометрически вторую производную можно истолковать как понятие кривизны кривой (хз, что это).

Но ведь если существует вторая производная, то можно ставить вопрос о существовании следующей производной. Если она существует, то она называется третьей производной.

Определение: пусть $n \in \mathbb{N}$. существует конечная производная порядка n в окрестности x_0. То существует $g(x) = f^{(n)}(x)$. Если $\exists g'(x_0)$, то она $f^{(n+1)}(x_0)$

Обозначения: $f', f'', f''', f^{IV}, f^{(5)}$... Ну или $\frac{d^n f(x_0)}{dx^n}$.

Свойства производной высшего порядка:

1) $f^{(n+1)}(x_0) = (f^{(n)})'(x_0) = (f')^{(n}(x_0)$;

2) $f^{(n+k)}(x_0) = (f^{(n)})^{(k)}(x_0)$;

3) $(f \pm g)^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0) \pm g^{(n)}(x_0)$;

4) $\alpha \in \mathbb{R}$, $(\alpha f)^{(n)}(x_0) = \alpha f^{(n)}(x_0)$;

5) $(\alpha f + \beta g)^{(n)}(x_0) = \alpha f^{(n)}(x_0) + \beta g^{(n)}(x_0)$;

6) $\alpha \in \mathbb{R},\ \alpha = 1, ..., N,\ f - n$ раз дифференцируема в x_0, то $(\sum\limits_{k=1}^{N} \alpha_k f_k)^{(n)}(x_0) = \sum\limits_{k=1}^{N} \alpha_k f_k^{(n)}(x_0)$.

Примеры:

0) $f^{(0)} \equiv 0$;

1) $f(x) = x^m,\ m \in \mathbb{N}$: $f'(x) = mx^{m-1}$, $f^{(k)}(x) = m(m-1)...(m-k+1)x^{m-k}$, $f^{(m)}(x) = m!$, все после-

дующие производные равны нулю.

2) $f(x) = \frac{1}{x^m} = x^{-m}$: $f'(x) = (-m)x^{-m-1}$, $f^{(n)}(x) = (-m)(-m-1)...(-m-n-1)x^{-m-n} = (-1)^n m(m+1)...(m+n-1)\frac{1}{x^{m+n}}$.

3) $f(x) = \ln x$: $(\ln x)^{(n-1)} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}$.

4) $f(x) = (x+a)^p$, $(x > -a), p \in \mathbb{R} : f^{(n)}(x) = p(p-1)...(p-n+1)(x-a)^{p-n}$;

5) $f(x) = e^{cx}$, $f'(x) = ce^{cx}$, $f^{(n)}(x) = c^n e^{cx}$;

Придадим данной формуле вид: $f(x) = a^x = e^{x \ln a}$. $f^{(n)}(x) = (\ln a)^n a^x$;

6) $f(x) = \sin x : f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$, $f'''(x) = -\cos x$, $f''''(x) = \sin x$, $n = 4k + r$ $f^{(n)}(x) = f^{(r)}(x)$;

$\sin(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2}) \Rightarrow \sin(x + n\frac{\pi}{2})$;

7) $\cos^{(n)}(x) = (\sin(x + \frac{\pi}{2}))^{(n)} = \sin(x + \frac{\pi}{2} + n\frac{\pi}{2}) = \cos(x + n\frac{\pi}{2})$;

$\cos(x) = \cos(x + \frac{\pi}{2}) \Rightarrow \cos(x + n\frac{\pi}{2})$;

В качестве примера использования подобных производных можно привести доказательство бинома Ньютона:

$$(1+x)^n = A_0^{(n)} + A_1^{(n)}x + ... + A_k^{(n)}x^k + ... + A_n^{(n)}x^n \quad (25)$$

$1 \leq k \leq n$. Дифференцируем k раз:

$$n(n-1)...(n-k+1)(1+x)^{n-k} = 0+A_k^{(n)}k!+A_{k+1}^{(n)}(k+1)k...2x+... \tag{26}$$

Положим $x = 0$:

$$n(n-1)...(n-k+1)(1+x)^{n-k} = 0+A_k^{(n)}k! \Leftrightarrow A_k^{(n)} = \frac{n(n-1)...(n-k+}{k!} \tag{27}$$

Таким образом, сумма принимает вид $(1+x)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k x^k = 1 + C_n^1 x + ... + C_n^n x^n$

$C_{n+1}^k = C_n^k + Ck - 1_n$

Теорема: f, g дифференцируемы n раз в точке x_0. Тогда их произведение тоже дифференцируемо n раз в точке x_0 и справедливо $(fg)^{(n)}(x_0) = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(x_0) g^{(n-k)}(x_0)$ — формула Лейбница.

Доказательство:

Сделать самим для $fg' + f'g$ (по индукции).

Пример:

$F(x) = (x^2 - 5x + 4)e^{3x}$, $F^{(100)} =?$

$F^{(100)} = (x^2-5x+4)\cdot 3^{100}\cdot e^{3x}+100(2x-5)\cdot 3^{99}e^{3x} + \frac{100\cdot 99}{2}\cdot 2\cdot 3^{98}\cdot e^{3x}$.

Упражнение: f бесконечно дифференцируема, $m \in \mathbb{N}$, $g(x) = \frac{f(x)}{1+x^m}$. Сколько производных $g(x) = f(x)$?

Гладкие функции

f определена на $< a, b >$, $r \in \mathbb{N}$.

$f - (r)$ — гладкая, класса C^r, если f дифференцируема r раз в каждой точке промежутка и $f^{(r)}$ непрерывна на $< a, b >$.

$C^{(r)}(< a, b >)$ — обозначение.

Если функция дифференцируема бесконечно, то она называется функцией класса $C^\infty = \cap_{r=1}^\infty C^r(< a, b >)$.

$C^{(r)}(< a, b >) \subset C^{(r-1)}(< a, b >)$.

$f \in C^{(r)} \Leftrightarrow f' \in C^{(r-1)}$.

Теорема о свойствах гладких функций:

$f, g \in C^{(r)}(< a, b >), \quad r \in \mathbb{N}, r = \infty$

1) $f \pm g \in C^{(r)}$;

2) $\alpha \in \mathbb{R},\ \alpha f \in C^{(r)}$;

3) $fg \in C^{(r)}$;

4) Предположим, что $\varphi \in C^{(r)}(\Delta),\ \Delta \supset f(< a, b >)$, тогда имеет смысл композиция $F = \varphi \circ f \Rightarrow F \in C^{(r)}(< a, b >)$;

5) $f(x) \neq 0\ \forall x \in (< a, b >)$, то $\frac{1}{f} \in C^{(r)}$;

6) $f'(x) \neq 0 \; \forall x \in (< a, b >)$, то $\frac{1}{f} \in C^{(r)}$.
Доказательство:
Пункты 1, 2 вытекают из определения.

Пункт 3 вытекает из формулы Лейбница.

Пункт 4: Индукция по r:

1) $r = 1$, $F'(x) = \varphi'(x) f'(x)$,при этом обе функции и, следовательно, их композиция, непрерывны.

Значит, у F существует производная, и притом непрерывная. Значит, она гладкая.

2) Допустим, что это верно для производной порядка r и докажем для производной порядка $r + 1$.

И.П.: $f, g \in C^{(r+1)}$

$F'(x) = \underbrace{\varphi'}_{\in C^{(r)}}(f(x)) \cdot \underbrace{f'(x)}_{\in C^{(r)}}$, следовательно, $\underbrace{\varphi'(f(x))}_{\in C^{(r)}}$, следовательно, $F'(x) \in C^{(r)}$

Пункт 5: $0 \notin f(< a, b >)$ — промежуток. $\varphi(t) = \frac{1}{t}$ Значит, он лежит либо справа, либо слева от нуля. Значит, множество значений лежит либо в правой, либо в левой полуоси.

$F(x) = \varphi(f(x)) = \frac{1}{f(x)}$. Ссылаемся на предыдущий пункт и всё :)

Конец двадцать восьмой лекции.

Пункт 6: Заметим, что производная сохраняет знак, так как она не равна нулю. Значит, функция строго монотонна. Раз она строго монотонна, значит, существует обратная. Она определена на $\Delta = f(< a, b >)$, $f^{-1} \in C(\Delta)$.

$g \equiv f^{-1}$.

$y \in \Delta, y = f(x) \Rightarrow x = g(y)$. Тогда $g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(g(y))}$.

Если функция f принадлежит $C^{(1)}$, то функции непрерывны.

Из формулы вытекает, что $g' \in C(\Delta)$.

Наше утверждение верно при $r = 1$. А дальше по индукции.

Допустим, для r — верно, докажем для $r + 1$.

Проводим рассуждения для $f \in C^{(r+1)}$ $g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}$. В знаменателе композиция двух функций, входящих в класс $C^{(r)}$, значит, по четвертому пункту, их композиция тоже входит в этот класс, а, по пятому пункту, знаменатель не обращается в ноль, значит, знаменатель входит в класс $C^{(r+1)}$, значит, $g' \in C^{(r)}(\Delta)$.

Если функция $f \in C^{(\infty)} = \cap_{r=1}^{\infty} C^r$.
Тогда $f \in C^{(r)}\ \forall r \in \mathbb{N}$
И $f^{-1} \in C^{(r)}\ \forall r \in \mathbb{N} \Rightarrow f^{-1} \in \cap C^{(r)} = C^{(\infty)}$.

Формула Тейлора

Если функция непрерывна в точке x_0, то $f(x) - f(x_0)$ — б.м. $(x \to x_0)$

$\rho_0(x) = f(x) - f(x_0)$.

f — дифференцируема в x_0, то $\rho_0(x) = f(x) - f(x_0) = A(x - x_0) + \rho_1(x)$, где $\rho_1(x) = o(x - x_0)$.

Если дважды дифференцируема, то $\rho_1(x)$ — дописать.

В итоге получится, что приращение нашей функции можно представить в качестве суммы бесконечно малых:

$f(x) - f(x_0) = A_1(x - x_0) + A(x - x_0)^2 + \ldots$. Если перебросить $f(x) = f(x_0) + A_1(x - x_0) + A(x - x_0)^2 + \ldots$, то $f(x)$ будет многочленом.

Лемма: P — полином, $\deg P \leq n$. Иными словами, $P(x) = A_0 + A_1(x - x_0) + \ldots + A_n(x - x_0)^n$.

Тогда $P^{(k)}(x_0) = k! A_k$, то есть $A_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$.

Доказательство:

$k = 0,\ P(x_0) = A_0$

Возьмем $1 \leq k \leq n$ и продифференцируем k раз.

$P^{(k)}(x) = [A_0 + ... + A_k(x - x_0)^k + ... + A_n(x - x_0)^n]^{(k)}$.

Все слагаемые до $A_k(x - x_0)^k$ пропадут.

Поэтому $= 0 + A_k k! + a_k(k+1)k...2(x - x_0) + ...$

Возьмем $x = x_0$. Тогда $P^{(k)}(x_0) = A_k k! + 0$

Доказано.

Если считать $A_k = 0$ при $k > n$, то можно считать, что $P^{(k)}(x_0) = A_k k!$, $k \in \mathbb{N}, k = 0$

Значит, всякий полином можно расписать в виде $P(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$.

Обратимся к апроксимации. Будем считать, что f дифференцируема n раз в точке x_0.

Каким полиномом её естественно апроксимировать? Полиномом, у которого в точке x_0 такие же производные, как и у f.

Определение: $n \in \mathbb{N}$. Полиномом Тейлора порядка n функции f в точке x_0 называется полином $T_n(f, x_0, x - x_0) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$, который называется n-ый полином Тейлора.

Порядка n, а не степени n! Порядок полинома не всегда его степень (порядок не превосходит n)

Связь соседних полиномов:

$T_{n+1} = T_n + \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$.

Дифференцирование полинома n порядка:

$T_n(f,x,x-x_0) = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot k(x-x_0)^{k-1}$

Если заменим $k-1=j$, то полином примет вид:

$T_n(f,x,x-x_0) = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{f'^{(k-1)}(x_0)}{(k-1)!} \cdot k(x-x_0)^{k-1} = \sum\limits_{j=0}^{n-1} \frac{f'^{(j)}(x_0)}{j!} = T_{n-1}(f',x,x_0)$.

Теорема (Тейлора-Пеано)

Пусть f n раз дифференцируема в точке x_0. Тогда $f(x) = T_n(f,x_0,x-x_0) + \rho_n(x)$, где $\frac{\rho_n(x)}{(x-x_0)^n} \to 0$ $(\rho_n(x) = o((x-x_0)^n))$.

При $n=1$ полином $T_1(f,x_0,x-x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$.

Доказательство:

При $n=1$ утверждение верно. Допустим, что утверждение верно для полиномов T_n.

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\rho(_{n+1}(x))}{(x-x_0)^n+1} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-T_{n+1}(f,x_0,x-x_0)}{(x-x_0)^n+1} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f'(x)-[T_{n+1}(f,x_0,x-x_0)]'}{(n+1)(x-x_0)^n} = \frac{1}{n+1} \lim\limits_{x\to 0} \frac{f'(x-T_n(f',x_0,x-x_0))}{(x-x_0)^n} = 0$ согласно индукционному предположению.

Полиномы Макларена:

$T_n(f,0,x)$.

Во всех случаях $x_0 = 0$

1) $f(x) = e^x$

$f^{(n)}(x) = e^x$, $f^{(n)}(0) = 1$, $T_n(f, 0, x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!}$

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$.

2) $f(x) = \ln(1 + x)$

$f^{(n)} = \frac{(-1^{n-1}(n-1)!)}{1+x^{n+1}}$. $\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{-1^{k-1}}{k}$

$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + ... + (-1)^{n-1}$—

3) $f(x) = (1 + x)^p$

$f(0) = 1$, $f^{(k)}(x) = p(p-1)...(p-k+1)(1+x)^{p-k}$

$f^{(k)}(0) = p(p-1)...(p-k+1)$

$(1+x)^p = 1 + px + \frac{p(p-1)}{2!}x^2 + ... + \frac{p(p-1)...(p-n+1)}{n+1}x^n + o(x^n)$

Обозначение:

$\begin{matrix} n \\ p \end{matrix} = \frac{p(p-1)...(p-n+1)}{n!} = \frac{p!}{n!(p-n)!} = C_p^n$

4) $f(x) = \sin(x)$

$f^{(2m)}(x) = \pm\sin(x)$, поэтому $f^{(2m)}(0) = 0$.

$f^{(2m+1)}(x) = \sin(x + \frac{2m+1}{2}\pi) = \sin(x + \frac{\pi}{2} + mp) = (-1)^m \sin(x + \frac{\pi}{2})$, $f^{(2m+1)}(x) = (-1)^m \cos(x)$, поэтому $f^{(2m+1)}(0) = (-1)^m$.

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + \frac{(-1)^m}{(2m+1)!}x^{2m+1} + o(x^{2m+1}) = T_{2m+1} = T_{2m+2}$, так как четные производные - нули.

5) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + ... + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + o(x^{2n})$, что есть производная полинома Тейлора для синуса.

Полином Тейлора - это такой полином, что $f(x) -$

$T_n(f, x_0, x - x_0) = o((x - x_0)^n)$

А единственен ли такой полином?

Лемма: P — полином $\deg P \leq n$

Если $P(x) = o((x - x_0)^n)$ при $x \to x_0$, то $P \equiv 0$.

Доказательство:

$P(x) = A_0 + A_1(x - x_0) + ... + A_n(x - x_0)^n$

$A_0 + A_1(x - x_0) + ... + A_n(x - x_0)^n = o((x - x_0)^n)$

Положим $x = x_0$, тогда увидим, что $A_0 = 0$.

Положив $x \neq x_0$ получим $A_1 + A_2(x - x_0) + ... + A_n(x - x_0)^{n-1} = \frac{o((x-x_0)^n)}{x-x_0}$.

Перейдем к пределу ($A_1 = 0$):

$\lim\limits_{x \to x_0} = A_2 + A_3(x - x_0) + ... + A_n(x - x_0)^{n-2} = \frac{o((x-x_0)^n)}{(x-x_0)^2}$

Снова перейдем к пределу ($A_2 = 0$)...

В конце концов получим, что $A_n = \frac{o((x-x_0)^n)}{(x-x_0)^n} \to_{x \to x_0} 0$.

Полином тождественно равен нулю. Лемма доказана.

Конец лекции.

Если степень полинома $P \leq n$ и $P(x) = o((x - x_0)^n)$ при $x \to x_0 \ \Rightarrow P \equiv 0$.

Этим свойством обладает лишь многочлен Тейлора.

Теорема об асимптотической характеристике полинома Тейлора:

Пусть f n раз дифференцируема в x_0, P — полином, причем $\deg P \leq n$. Если $f(x) = p(x) + o((x - x_0)^p)$ (*), то полином $P(x) = T_n(f, x_0, x-x_0) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$.

Доказательство:

Наряду с равенством (*) имеет место такое неравенство: $f(x) = T_n(f, x_0, x - x_0) + o((x - x_0)^n)$. Вычитая это из (*), получим

$0 = P(x) - T_n(f, x_0, x - x_0) + o((x - x_0)^n) \Leftrightarrow Q(x) = T_n(f, x_0, x - x_0) - P(x) = o((x - x_0)^n)$ при $x \to x_0$.

Значит, $\deg Q \leq n$ и по лемме $Q \equiv 0$.

Примерчики:

$f(x) = \frac{1}{1-x}$. Будем считать, что $|x| < 1, x_0 = 0$.

$f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + ... + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x}$. Значит, весь многочлен (за исключением последнего члена) — полином Тейлора n степени, потому что последний член - o малое.

$f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x^2 + x^4 + ... + (-1)^n x^{2n} + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+1}}{1+x^2}$

Нацелимся на арктангенс:

$[T_n(f, x_0, x - x_0)]' = T_{n-1}(f', x_0, x - x_0)$.

$[f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + ... + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + ... +$

$\frac{f^{(n)}}{n!}(x-x_0)^n]' = f'(x_0) + f''(x-x_0) + ... + \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-1)!}(x-x_0)^{k-1} + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}$

...

$T_n(f', x_0, x-x_0) = A_0 + A_1(x-x_0) + ...A_n(x-x_0)^n (+)$.

$T_{n+1}(f, x_0, x-x_0) = A_0(x-x_0) + \frac{A_1}{2}(x-x_0)^2 + ... + \frac{A_k}{k+1}(x-x_0)^{k+1} + ... + \frac{A_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}$ — продифференцировав этот многочлен, мы получим полином Тейлора (тот, который выше строчкой $(+)$)

Теперь найдем полином Тейлора для $\frac{1}{1+x^2} = (\operatorname{arctg} x)' = 1 - x^2 + ... + (-1)^k x^{2k} + ... + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n+1})$.

Отсюда $\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - ... + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

Выведем формулу Тейлора для арксинуса:

$(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. $|x| < 1$

$(1+x)^p = 1 + px + ... + C_n^p x^n + o(x_n)$.

$p = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + (-\frac{1}{2})x + (\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{2!})x^2 + ... + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})...(-\frac{1}{2}-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$.

Преобразуем $\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})...(-\frac{1}{2}-k+1)}{k!} = (-1)^k \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot ...\cdot(2k-1)}{2^k 6!} = (-1)^k \frac{(2k-1)!!}{2k}!!$

$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + (-\frac{1}{2})x + (\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{2!})x^2 + ... + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})...(-\frac{1}{2}-n+1)}{n!}x^n +$

$o(x^n) = 1-\frac{1}{2}x+...+(-1)^k\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}x^k+...+(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n!!)}x^n = 1+\frac{1}{2}x^x+...+\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}x^{2k}+...+o(x^{2n})$.

То есть $\arcsin x = x+\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+...+\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\frac{x^{2k+1}}{2k+1}+...+\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+o(x^{2n+1}) = x+\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\frac{x^{2x+1}}{2k+1}+o(x^{2n+1})$

$f(x)-T_n(f,x_0,x-x_0) = \rho_n(x) = o((x-x_0)^n)$.

Теорема для оценки остатка формулы Тейлора

Пусть f дифференцируема $n+1$ раз на $< a,b >$, $x, x_0 \in < a,b >$, $\rho_n(x) = f(x)-T_n(f,x_0,x-x_0)$.

Тогда $\exists \bar{x}$ между x и x_0, такой, что $\rho_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\bar{x})}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ — формула остатка по Лагранжу.

$f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(\bar{x})}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$

$f(x) = f(x_0)+f'(\bar{x})(x-x_0) \Leftrightarrow f(x)-f(x_0) = f'(\bar{x})(x-x_0)$

—

$n=1$: $f(x) = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(\bar{x})}{2}(x-x_0)^2$ (1) $\Leftrightarrow$

$\Delta f(x_0,x+x_0)-d_{x_0}f(x-x_0) = \frac{f''(\bar{x})}{2}(x-x_0)^2$

$|f''(x)| < M_2$

$|\Delta f(x_0,x+x_0)-d_{x_0}f(x-x_0)| \leq \frac{M_2}{2}(x-x_0)^2$

Доказательство:

Фиксируем x_0, x.

$\rho_n(x) = f(x)-T_n(f,x_0,x-x_0)$.

$\varphi(u) = f(x)-\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(u)}{k!}(x-u)^k$, где $u \in < a,b >$

φ — дифференцируемо.

$\varphi(x_0) = \rho_n(x)$

$\varphi(x) = f(x) - f(x)$ (где второй $f(x)$ — свободный член суммы).

$-\varphi'(u) = [-f(x) + f(u) + \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(u)}{k!}(x-u)^k]' = f'(u) + \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{f^{()k+1}(u)}{k!}(x-u)^k = \sum\limits_{k=1}^{n} \cdot k(x-u)^{k-1}(-1) = f'(u) + \frac{f''(u)}{1!}(x-u) + ... + \frac{f^{(n+1)}(u)}{n!}(x-u)^n - f'(u) - \frac{f''(u)}{1!}(x-u) - ... - \frac{f^{(n+1)}(u)}{(n-1)!}(x-u)^n$

$\varphi'(u) = -\frac{f^{(n+1)(n)}}{n!}(x-n)^n$

$\psi(u) = (u-x_0)^{n+1},\ x, x_0,\ [x, x_0]$

По теореме Коши $\exists \bar{x}$ между x и x_0, такая, что $\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{\psi(x)-\psi(x_0)} = \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$

$\frac{0-\rho_n(x)}{0-(x_0-x)^{n+1}} = \frac{-\frac{f^{(n+1)}(\bar{x})}{n!}(x-\bar{x})^n}{(n+1)(\bar{x}-x_0)^n} = (-1)^{n+1}\frac{f^{(n+1)}(\bar{x})}{(n+1)!}$

$-\rho_n(x) = (-1)^{n+1}\frac{f(n+1)(\bar{x})}{(n+1)!}(x_0-x)^{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(\bar{x})}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$.

Конец ХЕЗ лекции.

Из $\rho_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\bar{x})}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ следует, что $|f^{(n+1)}| \leq$

$M_{n+1}\ \forall x \in < a, b >$.

Тогда $|\rho_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1}$ и $\rho_n(x) = O((x-x_0)^{n+1})$.

1) $f(x) = e^{\sin x}, \quad x_0 = 0, n = 5,\ o(x^5)$

$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2!} + ... + \frac{y^5}{5!} + o(y^5)$

$f(x) = 1 + \sin x + \frac{\sin^2 x}{2!} + ... + \frac{\sin^5 x}{5!} + o(x) = 1 + (x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!}) + \frac{1}{2}(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!})^2 + \frac{1}{3!}(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}) + \frac{1}{4!}(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}) + \frac{1}{5}(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}) = 1 + (x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}) + \frac{1}{2}[(x - \frac{x^3}{3!})^2 + 2(x - \frac{x^3}{3!})\frac{x^5}{5!}] + \frac{1}{3}(x - \frac{x^3}{3!})^3 + \frac{1}{4!}(x - \frac{x^3}{3!})^4 + \frac{1}{5!}(x - \frac{x^3}{3!})^5 = 1 + x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \frac{1}{2}(x^2 - \frac{2x^4}{6}) + \frac{1}{3!}(x^3 - \frac{3x^2x^3}{6}) + \frac{1}{4!}(x^4) + \frac{1}{5!}(x^5) + o(x^5) = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{1x^4}{8} - \frac{x^5}{15}$.

2) $\frac{1}{\cos x},\ n = 7,\ O(x^8)$

$\frac{1}{\cos x} = ax^2 + bx^4 + cx^6 + O(x^8)$.

Дописать.

$\frac{1}{\cos x} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + Cx^6 + O(x^8)$

Упражнение: $\operatorname{tg} x$ с точностью до $O(x^8)$.

$\rho_n(x) \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}(x-x_0)^n$.

$(1 + \frac{1}{n}) \leq n \leq (1 + \frac{1}{n})^{n+1} \leq 3$

Будем считать, что $x_0 = 0, x = 1, f(x) = e^x$

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\bar{x}}}{(n+1)!}x^{n+1}$.

$$e = \underbrace{1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + ... + \frac{1}{n!}}_{S_n} + \frac{e^{\bar{x}}}{(n+1)!}$$

Оценим: $0 < e - S_n \leq \frac{e}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}$. Таким образом, если мы возьмем $S = 9$, то эта сумма будет давать e с точностью до 6 знаков.

Теорема: e — иррациональное.

Доказательство: Воспользуемся неравенством $0 < e - S_n < \frac{3}{(n+1)!}$. От противного: $e = \frac{p}{q}$.

$0 < \frac{p}{q} - (1 + 1 + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!}) < \frac{3}{(n+1)!}$.

Возьмем $n > q$.

$0 < \underbrace{\frac{p}{q} n!}_{\text{целое}} - \underbrace{n! S_n}_{\text{целое}} < \frac{3}{(n+1)!}$

$0 <$ целое $< \frac{3}{n+1} < 1$ при больших n

Применение формулы Тейлора для исследования точек, подозрительных на экстремум.

$f \in < a, b >$, $x_0 \in < a, b >$.

x_0 — max.

$\exists U(x_0) : f(x) = f(x_0) \ \forall x \in U(x_0) \cap < a, b >$.

$a < x_0 < b \ f'(x_0) = 0$.

Теорема: $a < x_0 < b$

Пусть f дифференцируема n раз в точке x_0. $n \geq 2$.

Если $f'(x_0) = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ и $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, то при нечетном n — экстремума нет.

при четном n — строгий экстремум.

При этом $f^{(n)}(x_0) > 0$ — min, $f^{(n)}(x_0) < 0$ — max.

Следствие: $\exists f''(x_0) \neq 0, f'(x_0) = 0$, если $f''(x_0) > 0$ — min (например, x^2 в точке 0)

Доказательство:

$f^{(n)}(x_0) > 0$

$f(x) = T_n(f, x_0, x - x_0) + \rho_n(x)$.

Полином выглядит как свободный член, так как все производные, кроме n — нули: $T_n(f, x_0, x - x_0) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$

$\rho_n(x) = o((x - x_0)^n)$.

Таким образом, $f(x) - f(x_0) = \underbrace{\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}}_{=A}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n) \Rightarrow f(x) - f(x_0) = (x - x_0)^n[A + \alpha(x)]$

$\exists \delta > 0 : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset < a, b >$

$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

$|x - x_0| < \delta \; a + \alpha(x) > 0$

$f(x) - f(x_0) = (x - x_0)^n + \underbrace{\alpha(x)]}_{>0}$

Если n — четное, то $(x - x_0)^n > 0$ при $x - x_0 \neq 0$.

Значит, $f(x) - f(x_0) > 0$ в точке x_0 локальный минимум.

Если n нечетно, то $(x - x_0)^n$ при переходе через x_0 меняет знак, следовательно, приращение функции тоже меняет знак.

получаем, что $f(x) < f(x_0)$ с одной стороны и $f(x) > f(x_0)$, значит, экстремум не существует.

Характеристика кратности корня многочлена.

P — полином, $\deg P \neq 0$.

Имеется точка a.

Тогда $P(x) = (x-a)Q(x) + P(a)\ \forall x$.

Если $P(a) = 0$ (a — корень P), то $P(x) = (x-a)Q(x)$. Может случиться, что a — корень Q.

Определение: Пусть a — корень P. Будем считать, что a — корень кратности k. Если $P(x) = (x-a)^k R(x)$, где $R(a) \neq 0$.

Если $k = 1$, то корень a — простой, если $k > 1$, то a — кратный.

Кратность можно описать с помощью производных.

Теорема

$P(a) = 0$

a —корень кратности $k \Leftrightarrow P'(a) = P''(a) = P^{k-1}(a) = 0$, а $P^{(k)} \neq 0$ (*).

$P(x) = x^3 - 3x - 2$ в $x = 2, -1$, $P' = 3x^2 - 3$ $P'' = 6x \neq 0$.

Доказательство:

Необходимость:

$P(x) = (x-a)^k R(x), R(a) \neq 0.$

Возьмем $1 \leq i < k$. тогда $((x-a)^k)^{(i)} = Const(x-$

$a)^{k-i}$, а $((x-a)^k)^{(k)} = k!$.

$P^{(i)}(x) = \sum\limits_{j=0}^{i} C_i^j((x-a)^k)^{(i)}R^{(i-j)}(x)$

Если $i < k$, то все производные бинома равны нулю.

Если $i = k$, то $P^{(k)}(x) = \sum\limits_{j=0}^{k-i} C_k^j((x-a)^k)^{(j)}R^{(k-j)} + C_k^k k!R^{(0)}(x)$.

Условие (*) выполняется.

Достаточность:

$\deg P = n \leq k$:

$P(x) = T_n(P, a, x-a)$ (остаточного члена нет, так как все его производные будут равны 0).

$P(x) = T_n(P, a, x-a) = \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + ... + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n =$ (вынесем за скобку)

$= (x-a)^k[\frac{p^{(k)}(a)}{k!} + \frac{P^{(k+1)}(a)}{(k+1)!}(x-a) + ...] = (x-a)^k R(x)$, где $R(x) = \frac{P^{(k)}(a)}{k!} \neq 0$.

Конец уже черт знает какой лекции.

Сравнение множеств.

Кантор утверждал (вопреки постулату «часть меньше целого»), что мы можем рассматривать бесконечные множества.

Однако как сравнивать бесконечные множества? Тут мы опираемся на идею, что конечное множество можно сравнивать не пересчитывая, достаточно образовать пары, и то множество, где что-то остается, больше. В основу сравнения множеств можно положить биекцию. Если мы можем установить между двумя множествами биекцию, то они равномощны.

Определение: множества X и Y, если существует биекция $\phi : X \to Y$. Кстати, если есть биекция, то есть и обратное отображение $\psi : Y \to X$.

Если мы имеем $\mathbb{N}$ и $\bar{\mathbb{N}}$ — множество квадратов натуральных чисел, то между ними существует биекция $\varphi : \mathbb{N} \to \bar{\mathbb{N}}$.

Равномощные множества обозначаются как $X \sim Y$.

Свойства эквивалентности:

1) Если $X \sim Y$, то $Y \sim X$

2) Если $X \sim Y$ и $Y \sim Z$, то $X \sim Z$.

Проверить, что композиция биекций есть биекция.

Примеры равномощных множеств:

1) $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$;

$\phi = (-1)^n[\frac{n}{2}]$.

2) Отрезки различной длины также равномощны.

3) График равномощен отрезку, на котором построен (спроецируем точки графика на отрезок).

Особенно важны множества, равномощные натуральному ряду. Такие множества называются счетными.

Например, множество всех целых чисел счётно.

Добавляя к счетному множеству конечное множество, мы снова получаем счетное множество.

Теорема: Любое бесконечное множества X содержит счетное подмножество.

Доказательство: $a_1 \in X$. Берем $X \setminus \{a_1\} \neq \varnothing$. Берем $a_2 \in$

$X \setminus \{a_1\}$. В результате у нас получается последовательность точек a_n, которые попарно различны, т.е. a_n не совпадает с предыдущими точками. Возникает биекция $n \to a_n$, что означает, что $A \sim \mathbb{N}$.

Теорема: X — счетно, A — содержится в X. Тогда A — конечно или счетно.

Доказательство:

1) $X = \mathbb{N}$. Допустим, A — бесконечно. Будем убеждаться, что множество A — счетно. Во всяком непустом подмножестве натуральных чисел есть минимальный элемент.

Пусть $n_1 - \min A$. Положим $A_2 = A \setminus \{n_1\} \varnothing$. $n_2 = \min A_2$. Ясно, что $n_2 > n_1$. Продолжаем процесс. Возникает последовательность точек $n_1, n_2, ..., n_{k-1}, n_k$.

$k \to n_k$. Данная последовательность возрастает. Получается отображение $\mathbb{N} \to A$.

2) Сводим общий случай к частному. X содержит счетное A, из которого мы вычленяем B. Если A конечно, то B тоже конечно. И если A бесконечно, то и B бесконечно, так как $A \sim B$. А по доказанному B — счетно.

Теорема: X — бесконечное множество, A — счетное.

Тогда $X \cup A \sim X$.

Доказательство:

Эти множества могут иметь общую часть. Введем $A \supseteq A' = A \setminus X$.

Очевидно, что $X \cup A = X \cup A'$ Не умаляя общности, $A' \cap X = \varnothing$

A' — счетное. $A' = \{y_0, y_1, ..., y_n, ...\} \in A'$. Вычленим $\{0, 1, 2, ...\}$. Вычленим $\{x_1, x_2, ..., x_n, ..., x_k\} \in X$.

Возьмем $B = \{y_0, x_1, y_1, x_2, y_2, ..., x_n, y_n, ...\}$

Построим биекции $y_k \to -k$, $x_k \to k$. Тогда $B \sim \mathbb{Z} \sim \mathbb{N} \sim \{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$. Теорема доказана.

Теорема Образ счетного множества конечен или счетен.

$T : X \to Y$, $Z = T(X)$, X — счетное множество.

Доказательство:

Если Z конечно, то нечего и доказывать. Допустим, Z бесконечно. Отображение - это нечто вроде проецирования, где каждому X сопоставляется элемент из Z. $\forall z \in Z$ смотрим прообраз $T^{-1}\{x \in X | T(x) = z\}$.

$z \neq z' \Rightarrow T^{-1}(z) \cap T^{-1}(z') = \varnothing$.

Теперь в каждом прообразе фиксируем точку:

$a_z \in T^{-1}(z)$. $T(a_z) = z$.

$\{a_z | z \in Z\}$. $T(A) = Z$. Если $u, v \in A : u \neq v$, то $u \in T^{-1}(z)$, а $v \in T^{-1}(z')$, при этом $z \neq z'$. Значит, $T(u) \neq T(v)$. Доказали инъекцию.

Возьмем сужение $T_0 = T|_A$. Тогда все точки будут переходить в разные. Значит, T_0 — биекция, и значит, есть биекция между Z и A.

$X \supset A \sim Z$. Если $A \sim \mathbb{N}$, то и $Z \sim \mathbb{N}$.

Теорема: $\phi : \mathbb{N} \to [0, 1]$. Никакое отображение натурального ряда на отрезок не может быть сюръекцией.

Доказательство: положим $x_n = \phi(n)$. Утверждаем, что $\exists c \in [0, 1]$, такая, что $c \neq x_n$ $\forall n$.

Делим промежуток $[0, 1]$ на 3 равные части. Хотя бы одна из этих 3 частей не содержит точки x_1. Напополам делить недостаточно, так как точка x_1 может совпасть с точкой деления и будет принадлежать обоим промежуткам.

Назовем промежуток, которому не принадлежит x_1 $[a_1, b_1]$. Теперь берем этот промежуток и повторяем процедуру. $x_2 \notin$

$[a_2, b_2] \subset [a_1, b_1]$, а $b_2 - a_2 = \frac{1}{3^2}$. По индукции получим:

$x_{n+1} \notin [a_{n+1}, b_{n+1}]$, $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{3^{n+1}}$.

Данные промежутки вложенные, $x_n \notin [a_n, b_n]$, и их длины стремятся к нулю.

У этих промежутков, так как они вложенные, существует общая точка $c \in [a_n, b_n]$. Тогда существует $c \neq x_n$, то есть такая точка не единственная.