

Дисклеймер.

Автор не несет ответственности за любой ущерб, причиненный Вам при использовании данного документа. Автор напоминает, что данный документ может содержать ошибки и опечатки, недостоверную и/или непроверенную информацию. Если Вы желаете помочь в развитии проекта или сообщить об ошибке/опечатке/неточности:

[GitHub проекта](#)

[Автор в ВК](#)

Содержание

I	Случайные события	3
1	Элементарная теория вероятности	3
1.1	Основные понятия. Испытание (опыт, эксперимент), событие	3
1.2	Вероятность	4
1.2.1	Классическая формула вычисления вероятности	4
1.2.2	Статистическое определение вероятности	4
1.2.3	Геометрическое определение вероятности	4
1.3	Операции над событиями	4
1.4	Основные теоремы теории вероятностей	5
1.4.1	Независимость событий	5
1.5	Основные формулы комбинаторики	6
1.5.1	Перестановки	6
1.5.2	Правила комбинаторики	6
1.6	Выборки	6
2	Аксиоматика А.М. Колмогорова	7
2.1	Аксиоматическое определение вероятности	7
2.2	Формула полной вероятности	7
2.3	Формула Байеса	8
2.4	Схема Бернулли	8
2.5	Формула Пуассона	8
2.6	Простейший поток событий	8
II	Случайные величины	9
3	pass	9
3.1	Случайная величина	9
3.2	Дискретные случайные величины	9
3.3	Основные распределения дискретных случайных величин	9
3.4	Числовые характеристики дискретных случайных величин	9
3.5	Моменты порядка k	10
3.6	Числовые характеристики для основных распределений дискретной случай- ной величины	10

Часть I

Случайные события

1 Элементарная теория вероятности

1.1 Основные понятия. Испытание (опыт, эксперимент), событие

Определение 1.1. Теория вероятности — наука, изучающая закономерности случайных явлений.

Определение 1.2. Опыт, испытание, эксперимент — некоторая воспроизводимая совокупность условий, в рамках которых может произойти то или иное явление, тот или иной факт.

Пример 1.1.

- 1) Подбрасывание одной монеты;
- 2) Двух;
- 3) Выстрел по мишени;
- 4) Подбрасывание игрального кубика-кости (да, берцовой);
- 5) Рождение ребенка и тому подобное.

Определение 1.3. Событие — любой факт, который может произойти либо не произойти в результате испытания. Обычно обозначаются заглавными латинскими буквами: A, B .

Пример 1.2.

- 1) Событие A — выпадение герба. $\Omega = \{Г, Р\}$;
- 2) Выпали все решки;
- 3) Попали по мишени;
- 4.1) Выпало шесть точек;
- 4.2) Выпало четное число точек;
- 5) Родился мальчик.

Событие 4.2 является *составным*.

Определение 1.4. Элементарное событие (или исход) — событие, которое не может являться объединением более мелких событий. Неопределяемое понятие.

Замечание 1.1. ω_i — обозначение элементарного исхода.

$\Omega = \{\omega_i\}$ — пространство элементарных исходов.

Определение 1.5. Случайное событие $A \subseteq \Omega$. Лежит между \emptyset и Ω .

Определение 1.6. Событие, которое обязательно произойдет, называется достоверным. Так как оно состоит из всех элементов пространства элементарных исходов, оно обозначается Ω .

Определение 1.7. Событие, которое никогда не произойдет в результате испытаний, называется невозможным. Оно обозначается \emptyset .

Определение 1.8. Вероятность события A — число, характеризующее степень возможности этого события. Обозначается $p(A)$. Данное определение не является классическим.

Вероятность невозможного события $p(\emptyset) = 0$

Вероятность достоверного события $p(\Omega) = 1$.

Таким образом, $0 \leq p(A) \leq 1$.

1.2 Вероятность

1.2.1 Классическая формула вычисления вероятности

Пусть относительно Ω выполнены условия:

1) $|\Omega| = n$.

2) «Равные шансы»: все элементарные исходы равновозможны.

Тогда

$$p(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

где $|A|$ — мощность множества элементарных исходов, составляющих множество благоприятных исходов.

1.2.2 Статистическое определение вероятности

Если не выполнено второе условие, то формула приобретает вид:

$$p(A) = \frac{m_A}{n}$$

где m_A — число появлений события A , а n — число экспериментов.

1.2.3 Геометрическое определение вероятности

Выполнено второе условие, но не выполнено первое (конечность множества). В этом случае формула приобретет вид:

$$p(A) = \frac{l}{L}$$

где l — площадь (n -мерная) области, удовлетворяющей условию, L — площадь всей области.

1.3 Операции над событиями

Теория множеств	Теория вероятности
Ω — универсальное множество	пространство элем. исходов
$A \subset \Omega$	случайное событие
\emptyset — пустое множество	невозможное событие
$\bar{A} = \Omega \setminus A$ — дополнение	противоположное событие
$A \cap B$	$A \cdot B$ произведение событий
$A \cup B$	$A + B$ сумма событий

Определение 1.9. Суммой событий $A + B$ называется событие D , которое состоит в выполнении хотя бы одного события A и B .

Определение 1.10. $\{A_1, \dots, A_n\}$ — полная группа событий, если $A_i \cap A_j = \emptyset \ \forall i \neq j$ и $\sum_{i=1}^n A_i = \Omega$.

Определение 1.11. События A и B называются несовместными, если появление одного из них исключает появление другого. Не путать с независимостью!

Замечание 1.2. $A \subset B$ — появление события A влечет появление события B .

1.4 Основные теоремы теории вероятностей

Теорема 1.1. Пусть A, B — несовместные события, то есть $(A \cdot B = \emptyset)$. Тогда $p(A + B) = p(A) + p(B)$.

Вывод 1.1. $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$.

Теорема 1.2. (о сложении)

$$p(A + B) = p(A) + p(B) - p(A \cdot B).$$

Определение 1.12. $p(A/B) = p_B(A)$ (читается «пэ от A при условии B ») вводится как

$$\frac{p(A \cdot B)}{p(B)}$$

— условная вероятность события A при условии, что событие B произошло.

Теорема 1.3. (умножения)

Вероятность того, что произошло событие A и событие B равна $p(A \cdot B) = p(A) \cdot p(B) = p(B) \cdot p(A/B)$.

Вывод 1.2. $p(A \cdot B \cdot C) = p(A) \cdot p(B/A) \cdot p(C/A \cdot B)$ и аналогично для большего числа событий.

1.4.1 Независимость событий

Определение 1.13. A и B независимы, если $p(A \cdot B) = p(A) \cdot p(B)$.

Определение 1.14. A_1, \dots, A_n независимы в совокупности, если $\forall A_{i_1}, \dots, A_{i_k}$ выполнено $p(A_{i_1}, \dots, A_{i_k}) = \prod_{l=1}^k p(A_{i_l})$

Определение 1.15. A_1, \dots, A_n попарно независимы, если $\forall A_i, A_j$ верно $p(A_i \cdot A_j) = p(A_i) \cdot p(A_j) \ \forall i \neq j$. Очевидно, что из независимости в совокупности следует попарная независимость.

Пример 1.3. (Контрпример. Пирамида Бернштейна)

Кидаем тетраэдр, грани которого раскрашены в красный, зеленый и синий цвета, а основание — во все три. Мы ее бросаем и смотрим, какой цвет выпал. Пусть A — выпадение красного, B — синего и C — зеленого цвета. Тогда $p(A \cdot B) = 1/4 = p(A) \cdot p(B) = 2/4 \cdot 2/4$. Аналогично для других цветов. То есть эти события попарно независимы. Но $p(A \cdot B \cdot C) = 1/4 = p(A)p(B)p(C) = 1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/2 \Rightarrow$ нет независимости в совокупности.

1.5 Основные формулы комбинаторики

1.5.1 Перестановки

Определение 1.16. Перестановки — комбинации из n элементов, отличающихся порядком их расположения.

Множество всех перестановок множества из n элементов равно $n!$. $P_n = n!$.

Определение 1.17. Размещения — комбинации из n элементов по m элементов, отличающихся либо порядком, либо составом элементов.

Число всевозможных размещений $A_n^m = n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot (n - m + 1)$.

Определение 1.18. Сочетания — комбинации из n элементов по m элементов, отличающихся только составом элементов.

Число всевозможных сочетаний $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$.

Запомним: $C_n^{n-m} = C_n^m$, $C_n^0 = 1$.

1.5.2 Правила комбинаторики

Определение 1.19. Правило произведения: (a_1, \dots, a_n) и (b_1, \dots, b_m) . Тогда выбрать пару (a_i, b_j) можно $n \cdot m$ способами.

Определение 1.20. Правило суммы: (a_1, \dots, a_n) и (b_1, \dots, b_m) . Тогда выбрать либо a_i , либо b_j можно $m + n$ способами.

1.6 Выборки

Определение 1.21. (a_1, \dots, a_n) — некоторая генеральная совокупность однородных объектов. Вынем из них $\langle a_{i_1}, \dots, a_{i_m} \rangle$ — выборка объема m . Выборка может быть с возвращением и без возвращения элементов в генеральную совокупность, а так же упорядоченная или неупорядоченная.

- 1) Упорядоченная выборка с возвращением: $\langle a_{i_1}, \dots, a_{i_n} \rangle$, тогда $|\Omega| = n^m$.
- 2) Упорядоченная выборка без возвращения: $[a_{i_1}, \dots, a_{i_n}]$, тогда $|\Omega| = A_n^m$.
- 3) Неупорядоченная выборка без возвращения: $[a_{i_1}, \dots, a_{i_n}]$, при этом порядок не важен, важен состав $|\Omega| = C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$.
- 4) Неупорядоченная выборка с возвращением, $|\Omega| = C_{n+m-1}^m$.

M состояний частицы есть фактически M ящиков, в которые мы кладем n частиц. Частицы могут быть различимыми, а могут быть неразличимыми.

Запрет Паули говорит о том, что в коробке может находиться одна или ноль частиц.

- 1) Частицы различимы, запрета Паули нет. Тогда это состояние эквивалентно упорядоченной выборке с возвращением.
- 2) Частицы неразличимы, есть запрет Паули. Тогда это состояние эквивалентно неупорядоченной выборке без возвращения.
- 3) Частицы неразличимы, нет запрета Паули. Тогда это состояние эквивалентно неупорядоченной выборке с возвращением.
- 4) Частицы различимы, запрет Паули существует. Тогда это состояние эквивалентно упорядоченной выборке без возвращения.

2 Аксиоматика А.М. Колмогорова

2.1 Аксиоматическое определение вероятности

Определение 2.1. $\mathbb{A} \in 2^\Omega$, где Ω — пространство элементарных исходов, называется алгеброй, если:

- 1) $\Omega \in \mathbb{A}$
- 2) $\forall A, B \in \mathbb{A}, \begin{cases} A \cup B \in \mathbb{A} \\ A \cap B \in \mathbb{A} \end{cases}$
- 3) $\forall A \in \mathbb{A}$ выполняется $\bar{A} \in \mathbb{A}$.

Пример 2.1. $\mathbb{A}_1 = \{\emptyset, \Omega\}$

Определение 2.2. Числовая функция $\mu(A)$ называется конечной аддитивной мерой на \mathbb{A} , если:

- 1) $\mu(A) \geq 0 \forall A \in \mathbb{A}$.
- 2) $\forall A, B \in \mathbb{A} : A \cap B = \emptyset$ выполняется $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.

Определение 2.3. Если $\mu(A) = 1$, то ее говорят, что это конечная аддитивная вероятностная мера. Она обозначается $p(A) = \mu(A)$.

Она обладает следующими свойствами:

- 1) $p(A) \geq 0$
- 2) $p(\Omega) = 1$
- 3) $\forall A, B \in \mathbb{A} : A \cap B = \emptyset$ выполняется $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.

Определение 2.4. Система подмножеств \mathbb{F} называется сигма-алгеброй, если:

- 1) Она является алгеброй
- 2) Она замкнута относительно счетного объединения/пересечения событий.

Определение 2.5. Счетно-аддитивная вероятностная мера $p(A)$ заданная $\forall A \in \mathbb{F}$ называется вероятностью, то есть:

- 1) $\forall A \in \Omega \ p(A) \geq 0$
- 2) $p(\Omega) = 1$
- 3) $\forall A_1, \dots, A_n \in \mathbb{F}, A_i \cap A_j = \emptyset \forall i \neq j$ выполняется $p(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} p(A_n)$

Определение 2.6. (Ω, \mathbb{F}, p) — вероятностное пространство.

Определение 2.7. (Ω, \mathbb{F}) — измерительное пространство.

2.2 Формула полной вероятности

Пусть у нас есть событие A и оно может произойти одновременно с одним и только одним из событий H_1, \dots, H_n , таких, что:

- 1) $H_i \cdot H_j = \emptyset \forall i \neq j$;
- 2) $H_1 + \dots + H_n = \Omega$;

И нам нужно найти вероятность события A .

$$\begin{aligned} p(A) &= p(A \cdot \Omega) = p(A \cdot (H_1 + \dots + H_n)) = p\left(\sum_{i=1}^n A \cdot H_i\right) = \\ &= \sum_{i=1}^n p(A \cdot H_i) = \sum_{i=1}^n p(H_i) \cdot p(A/H_i) \end{aligned}$$

2.3 Формула Байеса

$$p(H_i/A) = \frac{p(H_i \cdot A)}{p(A)} = \frac{p(H_i) \cdot p(A/H_i)}{\sum_{i=1}^n p(H_i) \cdot p(A/H_i)}$$

$p(H_i/A)$ — апостериорная вероятность.

2.4 Схема Бернулли

Определение 2.8. Схема Бернулли — последовательность из n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A одинакова и равна p .

Если событие A произошло, то говорят об успехе, иначе — о неудаче.

Определение 2.9. Сама формула Бернулли имеет вид

$$p_n(K) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

где $q = 1 - p$.

2.5 Формула Пуассона

Пусть $np = \lambda$, тогда

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} p_n(k) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)\dots(n-k)\lambda^k}{n \cdot n \cdot \dots \cdot n \cdot k!} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} = \\ &= \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n \rightarrow \infty} 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \end{aligned}$$

Отсюда выводится сама формула:

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

2.6 Простейший поток событий

Определение 2.10. Поток событий называется последовательность событий, которые наступают в случайный момент времени.

Определение 2.11. Поток называется простейшим/пуассоновским, если выполнены свойства:

- 1) Стационарность: вероятность появления k событий длины t $P_t(k)$ зависит только от t и k и не зависит начала.
- 2) Отсутствие последействия: вероятность появления k событий длины t $P_t(k)$ не зависит от предыстории процесса.
- 3) Ординарность: \forall сколь угодно малого Δt вероятность наступления двух событий стремится к нулю.

Теорема 2.1. Если поток пуассоновского типа, то вероятность $P_t(k)$ можно вычислить по формуле

$$P_t(k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

где λ — интенсивность потока, то есть количество наступлений событий за единицу времени.

Часть II

Случайные величины

3 pass

3.1 Случайная величина

Определение 3.1. $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^1$. Функция называется измеримой, если прообраз баррельского множества изменим.

Определение 3.2. Неформальное определение: числовая функция, которая в результате испытания примет одно и только одно значение, неизвестное заранее.

Случайные величины делятся на 3 типа:

- 1) Дискретные
- 2) Непрерывные
- 3) Сингулярные

Определение 3.3. Случайная величина является дискретной, если ее возможное значение конечно или счетно.

3.2 Дискретные случайные величины

Определение 3.4. Законом распределения ДСВ x называется перечень всех ее возможных значений x_i и соответствующих им вероятностей p_i .

Записи:

x	x_1	x_2	\dots	x_n
p	p_1	p_2	\dots	p_n

События попарно несовместны, и сумма всех вероятностей равна единице.

Либо в виде многоугольника распределения.

3.3 Основные распределения дискретных случайных величин

1) Биномиальное. Если S_n — число успехов в схеме Бернулли, то случайная величина будет принимать целочисленные значения от 0 до n . $p_k\{S_n = k\} = C_n^k p^k q^{n-k}$.

- 2) Распределение Пуассона.
- 3) Геометрическое распределение.
- 4) Гипергеометрическое распределение.

3.4 Числовые характеристики дискретных случайных величин

Определение 3.5. Математическое ожидание случайной величины X есть среднее значение случайной величины X :

$$M(X) = \sum_i x_i p_i$$

Свойства:

- 1) $M(c) = c$;
- 2) $M(c \cdot X) = c \cdot M(X)$;

- 3) $M(X + Y) = M(X) + M(Y)$;
 4) $M(XY) = M(X) \cdot M(Y)$, если X, Y — независимы.

Пример 3.1. (Санкт-Петербургский парадокс — пример не существования матожидания)

Игрок играет против казино. Подбрасывают монетку. Если выпадает герб на i броске, то игрок получает 2^i доллара. Посчитаем матожидание выигрыша: $M(Y) = \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{4} \cdot 4 + \dots$ Этот ряд расходится, следовательно, матожидания выигрыша не существует.

Определение 3.6. Дисперсия случайной величины X :

$$D(x) = M(X - M(X))^2$$

или, что тоже самое,

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2$$

3.5 Моменты порядка k

Определение 3.7. Начальный момент порядка k : $M_k = M(X^k)$

Определение 3.8. Центральный момент порядка k : $\nu_k = M(X - M(X))^k$

3.6 Числовые характеристики для основных распределений дискретной случайной величины

- 1) Биномиальное: S_n — число успехов:

$$p_k = p\{S_n = k\} = C_n^k p^k q^{n-k}$$