Дисклеймер.

Автор не несет ответственности за любой ущерб, причиненный Вам при использовании данного документа. Автор напоминает, что данный документ может содержать ошибки и опечатки, недостоверную и/или непроверенную информацию. Если Вы желаете помочь в развитии проекта или сообщить об ошибке/опечатке/неточности:

GitHub проекта

Автор в ВК

Содержание

Алексей Сергеевич Еремин

1 Погрешности

1.1 Погрешности приближенных вычислений

1) Погрешность начальных данных (задачи, измерений).
2) Методическая погрешность.
3) Вычислительная погрешность.

Определение 1.1. Если a — приближенное значение, A — точное, тогда $\Delta a = |A - a|$ — абсолютная погрешность.

Определение 1.2. $\delta a = \frac{\Delta a}{|a|}$ — относительная погрешность. Она показывает, сколько верных знаков в записи числа.

Рассмотрим, как погрешности ведут себя при вычислениях.

1.1.1 Погрешности арифметических действий

$x_1 \pm \Delta x_1$ и $x_2 \pm \Delta x_2$ — неточные числа.
Тогда:
1) $(x_1 + x_2) + \Delta(x_1 + x_2) = x_1 + \Delta x_1 + x_2 + \Delta x_2 \Rightarrow \Delta_+ = x_1 + x_2$.
Таким образом, $|\Delta_\pm| \leq |\Delta x_1| \pm |\Delta x_2|$.
Отсюда абсолютная: $\frac{\Delta(x_1+x_2)}{x_1+x_2} = \frac{\Delta x_1}{x_1+x_2} + \frac{\Delta x_2}{x_1+x_2} \leq \delta x_1 + \delta x_2$.
Если $x_1, x_2 > 0$, то $\delta_+ \leq \max \delta x_i$.
А вот для вычитания $\frac{\Delta(x_1-x_2)}{(x_1-x_2)}$ и возникает большая проблема для относительной погрешности.
2) $(x_1x_2) + \Delta(x_1x_2) = x_1x_2 + x_1\Delta x_2 + x_2\Delta x_1 + \Delta x_1\Delta x_2 \Rightarrow \Delta_+ \approx x_1\Delta x_2 + x_2\Delta x_1$.
Отсюда абсолютная: $\frac{\Delta(x_1,x_2)}{x_1x_2} \approx \frac{\Delta x_2}{x_2} + \frac{\Delta x_1}{x_1} \Rightarrow |\delta| \leq |\delta x_1| + |\delta x_2|$.
Пусть $f(\overline{x_1}, ..., \overline{x_n})$, где $\overline{x_1} = x_1 + \Delta x_1, ..., \overline{x_n} = x_n + \Delta x_n$.
Посчитаем

$$\Delta f = f(x_1, ..., x_n) - f(\overline{x_1}, ..., \overline{x_n}) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, ..., x_n)\Delta x_1 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, ..., x_n)\Delta x_n\right] + o\left((\Delta x)^2\right)$$

откуда абсолютная погрешность:

$$|\Delta f| \leq \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right| |\Delta x_i|$$

Рассмотрим относительную:

$$\frac{\Delta f}{f} = \delta f = \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{1}{f}\right| |\Delta x_i| = \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial \ln f}{\partial x_i}\Delta x_i\right|$$

где $\frac{\partial \ln f}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{f \partial x_i}$.
Отсюда $\ln(x_1 \cdot ... \cdot x_n) = \ln x_1 + ... + \ln x_n \Rightarrow \frac{\partial \ln(x_1 ... x_n)}{\partial x_i} = \frac{1}{x_i}$.
То есть для деления $|\delta_\div| \leq |\delta x_1| + |\delta x_2|$.

1.1.2 Обратная задача погрешности

Проблема. По требуемой на Δf (δf) найти допустимые Δx (δx).

Пример 1.1.

1) Принцип равных влияний: считаем, что вклад всех слагаемых в погрешность одинаков:

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right| \cdot \Delta x_1 = \left|\frac{\partial f}{\partial x_2}\right| \cdot \Delta x_2 = ... = \text{const}$$

Откуда

$$\Delta x_i \leq \frac{|\Delta f|}{n\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|}$$

2) Принцип равных погрешностей: требуем одинаковых Δx_i:

$$\Delta x_1 = \Delta x_2 = ... = \text{const} = \Delta x$$

Откуда

$$|\Delta x| \leq \frac{|\Delta f|}{\sum_{i=1}^n \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|}$$

1.1.3 Статистический подход

$\Delta S_n \div \sqrt{n}$, где S_n — сумма n слагаемых $(n > 10)$.
Тогда $\Delta S_n \approx \sqrt{3n} \cdot 0.5 \cdot 10^{-m}$ если $\Delta x_i \leq 0.5 \cdot 10^{-m}$.
Таким образом, при статистическом подходе погрешность $\frac{\Delta S_n}{n} \to 0$ $n \to \infty$.

1.2 Примеры неустойчивых задач и методов

1) Требуется решить $(x-a)^n = \varepsilon$, где a, n, ε — заданные числа, при этом $n >> 1$, $n \in \mathbb{N}$, $0 < \varepsilon < 1$

$x = a$ — приближенное.
$\Delta x = \sqrt[n]{\varepsilon}$ если $\varepsilon \approx 10^{-16}$, $n \approx 10$, $\Delta x \approx 10^{-2}$.

2) $(x-1)(x-2)...(x-20)$ — полином. Раскроем: $x^{20} - 210x^{19} + ... + 20!$. А вот если мы получили погрешность округления вида $210 + 10^{-7}$. Тогда корни этого полинома не просто изменятся, но будут иметь вид:

$$\begin{aligned} x &= 1.000 \\ &\vdots \\ x_7 &= 7.000 \\ x_8 &= 8.007 \\ x_9 &= 8.897 \\ x_{\overline{10,19}} &\in \mathbb{C} \\ x_{20} &= 20.847 \end{aligned}$$

3) Линейная система:

$$\begin{cases} x + 10y = 11 \\ 100x + 1001y = 1101 \end{cases}$$

Решение очевидно: $x = 1, y = 1$.
Добавим погрешность:

$\begin{cases} x + 10y = 11.01 \\ 100x + 1001y = 1101 \end{cases}$
Решение получилось: $x = 11.01, y = 0$.
4) Вычислить набор интегралов

$$\frac{1}{e}\int_0^1 x^n e^x dx$$

где $n = 0, 1, ...$
Пусть I_n — этот интеграл. Тогда запишем рекуррентную формулу:

$$I_n = 1 - nI_{n-1},\ I_0 = 1 - \frac{1}{e}$$

На старых машинах при $n = 14$ уже получались неверные ответы.
Альтернатива: перевернуть формулу и записать ее в виде

$$I_{n-1} = \frac{1}{n}(1 - I_n)$$