Дисклеймер.

Автор не несет ответственности за любой ущерб, причиненный Вам при использовании данного документа. Автор напоминает, что данный документ может содержать ошибки и опечатки, недостоверную и/или непроверенную информацию. Если Вы желаете помочь в развитии проекта или сообщить об ошибке/опечатке/неточности:

GitHub проекта

Автор в ВК

Содержание

(Овсянников Александр Дмитриевич)

Список литературы

[1] Петровский «Лекции по ОДУ»

[2] Матвеев «Методы интегрирования ОДУ»

[3] Филлипов «Сборник задач по ОДУ»

[4] Гандмахер «Теория матриц»

[5] Я/Еругин «»

[6] Демидович «Лекции по теории устойчивости»

[7] Романько «Разностные уравнения»

1 Обыкновенные дифференциальные уравнения

1.0.1 Элементарные сведения

Определение 1.1. Если мы говорим, что у нас есть соотношение $F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$, то это соотношение называется обыкновенным дифференциальным уравнением. При этом обязательно вхождение дифференциала n-ного порядка.

Пример 1.1. К примеру, $y' = 0 \Leftrightarrow y = c$.

Или $y' = y \Leftrightarrow y = c \cdot e^x$, но не $y = e^x + C$.

ДЗ: проверить, что это второй ответ неверен.

Определение 1.2. Решением дифференциального уравнения будем называть функцию $y = \varphi(x)$, такую, что она обращает нашу функцию в тождество: $F(x, \varphi(x), \varphi'(x), ..., \varphi^{(n)}(x)) \equiv 0$.

Определение 1.3. Если решение выражается через элементарные функции и их суперпозиции, то функция представима в виде квадратуры.

ДЗ: $\sqrt[3]{-1}$.

Проблема. Введем понятие задачи Коши. Если вдобавок к нашему уравнению ставятся дополнительные условия вида $y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0^1, ..., y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{n-1}$, то (дописать).

Поговорим о том, где применяются ОДУ (обыкновенные дифференциальные уравнения, в дальнейшем будет использоваться только эта аббривеатура). Например, еще в школе мы работали с телом в поле тяготения земли. Вообще ОДУ встречаются повсеместно: механика, физика, экономика, везде, где исследуется эволюция систем, заданных определенными уравнениями с течением времени.

1.1 ОДУ первого порядка

Определение 1.4. Соотношение вида $F(x, y, y') = 0$, где $y' = \frac{dy}{dx}$, называется ОДУ первого порядка. При этом в него обязательно должна входить первая производная.

Определение 1.5. $y' = f(x, y)$ — нормальная форма ОДУ первого порядка. Договоримся, что правая часть должна быть определена в некоторой плоскости D. Область должна быть открытая и связная.

Определение 1.6. Решением дифференциального уравнения будем называть функцию $y = \varphi(x)$, такую, что она обращает нашу функцию в тождество: $F(x, \varphi(x), \varphi'(x), ..., \varphi^{(n)}(x)) \equiv 0$, где $x \in (a, b)$.

1.1.1 Геометрическая интерпретация

Правая часть нашего уравнения $k = f(x, y)$ определена в некоторой области D. Тогда в некоторой точке этой области мы можем вычислить значение y'. Геометрическая интерпретация производной — тангенс угла: $k = \tan\alpha$. То есть мы можем сказать, что в области D задано поле направлений, то есть в каждой точке угол наклона касательной должен быть определенной величины. Тогда в каждой точке касательной мы можем построить единичный вектор, соответствующий углу наклона.

Определение 1.7. Если построить линии, при которых $k = 0,\ k = 1,\ k = \frac{1}{2},\ k = \pm\infty$ и так далее. Такие линии мы будем называть изоклинами.

Определение 1.8. Договоримся, что в каждой точке области D мы проведем линию, касательную в каждой точке и соответствующую полю направлений. Эту линию будем называть интегральной линией.

Определение 1.9. В дальнейшем под решением ОДУ будем понимать поиск интегральных линий.

Напомним, как задаются линии: $x = \lambda(t), y = \mu(t)$, где $t \in (a, b)$, такие, что $\lambda'^2(t) + \mu'^2(t) \neq 0$ (то есть хотя бы одна производная не равна нулю). Оказывается, что в этой ситуации x, y равнозначны, то есть независимая переменная и исходная функция становятся равноправны.

При этом иногда ОДУ записывают в симметричной форме: $M(x, y)dx - N(x, y)dy = 0$. Наш частный случай может быть переписан как $dy - f(x, y)dx = 0$. Уравнение в симметричной форме может быть записано как

$$\frac{dy}{dx} = \frac{M(x, y)}{N(x, y)} = f(x, y)$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{N(x, y)}{M(x, y)} = \frac{1}{f(x, y)}$$

Таким образом уравнение в симметричной форме задает поле направлений в области D, если обе функции не обращаются в ноль. Если одна из функций обращается в ноль, то мы должны взять одно из двух уравнений выше. В случае, если обе функции обращаются в ноль в некоторой точке, то поле направлений в ней считается неопределенным.

Уравнение можно переписать еще и как

$$\frac{dx}{N(x, y)} = \frac{dy}{M(x, y)}$$

Определение 1.10. Функция $y = \omega(x, C)$, непрерывно дифференцируемая по x называется общим решением ОДУ, если при подстановке данной функции в ОДУ мы получаем тождество.

Равенство $y = \omega(x, C)$ должно быть разрешимо относительно C: $C = \psi(x, y)\ \forall x, y \in D$.

Если через каждую точку области D проходит единственная интегральная кривая, то эти точки называются точками решения задачи Коши.

ДЗ: переписать на языке ε-δ.

Договоримся об обозначениях:

$y_0 = \omega(x_0, C)$,$C_0 = \psi(x_0, y_0)$, $y = \omega(x, C(x_0, y_0)) = y(x, x_0, y_0)$ — решение в форме Коши.

Отсюда можно вывести:

$y = y(x, x_0, y_0) \Rightarrow y_0 = y(x_0, x_0, y_0)$, откуда $y_0 = y(x_0, x, y)$, то есть роль константы C играет начальное значение y_0.

Пример 1.2. $y' = f(x)$ — неполное уравнение. Ответ:

$$y(x) = \int f(x)dx + C$$

Найдем решение, отвечающее задаче Коши. Если функция определена на интервале (a, b), то область определения имеет вид: (рисунок)

Тогда любая точка из этой полосы будет являться точкой решения задачи Коши:

$$y(x, x_0, y_0) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt + y_0$$

Дефолты: мы работаем в вещественной области и предполагаем, что искомая функция вещественна.

Определение 1.11. Частным решением называется решение ОДУ в каждой точке которого выполняется условие существования и единственности решения задачи Коши.

Определение 1.12. Особое решение — решение ОДУ в каждой точке которого нарушается единственность решения задачи Коши.

Пример 1.3. $y' = g(y)$. Еще одно неполное уравнение. Переворачиваем:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{g(y)}$$

Общее решение примет вид:

$$x(y) = \int \frac{dy}{g(y)} + C$$

И в форме Коши:

$$x = \int_{y_0}^{y} \frac{d\tau}{g(\tau)} + x_0$$

Все замечательно, до того момента, когда $g(y) = 0$. В этом случае $g(\eta) = 0,\ y = \eta$.

//конец первой лекции

Мы договорились, что решение ОДУ $\frac{dx}{dy} = y' = f(x, y)$ является функция $y(x)$.

Для единственности решения: $\exists \delta > 0$, такая, что $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ выполнялось $y_2(x) \equiv y_1(x)$. При условии не единственности, $\forall \delta > 0\ \exists \overline{x} \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, такая, что $y_2(\overline{x}) \not\equiv y_1(\overline{x})$.

Теорема 1.1. *(Пеано — о существовании решения задачи Коши)*

Пусть $(x, y) \in D$, где D — область определения и непрерывности правой части. Тогда ??? (дописать)

Теорема 1.2. *(Пикара)*

Если мы вдобавок потребуем, чтобы существовала непрерывная $\frac{\partial f}{\partial y}$. Тогда мы гарантируем не только существование решения на некотором интервале, но еще и в этой точке ??? (дописать)

Условие Липшица: $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L \cdot |y_1 - y_2|$.

$\forall (x, y) \in D$ $f(x, y_1) - f(x, y_2) = \frac{\partial f(x,\hat{y})}{\partial y}(y_1 - y_2)$, $\hat{y} \in [y_1, y_2]$.

Потребуем условие: $|f(x, y)| < M$.

$R = \{(x, y) : \ |x - y_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}$

$|x - x_0| \leq h = \min\{a, \frac{b}{M}\}$.

Дальше уже хрень какая-то.

Итерации Пикара:

$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\tau, y_0) d\tau$.

$y_2 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\tau, y_1(\tau)) d\tau$

...

$y_{k+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\tau, y_k(t)) d\tau$

—

$|y_1(x) - y_0| \leq \left|\int_{x_0}^{x} f(\tau, y) d\tau\right| \leq h \cdot M \leq b$

—

Две эквивалентные задачи:

$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y \end{cases}$ и $y(x) \equiv y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\tau, y(\tau)) d\tau$

откуда $y'(x) \equiv f(x, y(x))$ и $y(x) - \underbrace{y(x_0)}_{=y_0} \equiv \int_{x_0}^{x} f(\tau, y(\tau)) d\tau$

Рассмотрим функциональную последовательность:

$\{y_n(x)\} \to_{n\to\infty} ?$

Перейдем к функциональным рядам. С этой целью рассмотрим сумму:

$$y_0 + (y_1 - y_0) + (y_2 - y_1) + ... + (y_{k+1} - y_k) + ...$$

Сумма этого ряда равна $S_{n+1}(x) = y_n(x)$.

Покажем, что он сходится. Для этого найдем мажоранту.

Посмотрим
$$|y_1 - y_0| \leq (1) \leq (x - x_0)M$$

1) будем рассматривать $x \geq x_0$.

Рассмотрим

$$|y_2 - y_1| \leq \int_{x_0}^{x} |f(\tau, y_1(\tau)) - f(\tau, y_0)| d\tau \leq \int_{x_0}^{x} L\,|y_1 - y_0|\,d\tau \leq$$
$$\leq \int_{x_0}^{x} LM(\tau - x_0) d\tau \leq LM \cdot \frac{(x - x_0)^2}{2}$$

Сделаем еще раз:

$$|y_3 - y_2| \leq \int_{x_0}^{x} L\,|y_2 - y_1|\,d\tau \leq \frac{L^2 M (x - x_0)^3}{3!}$$

Откуда

$$|y_k - y_{k-1}| \le M\frac{L^{k-1}(x-x_0)^k}{k!}$$

Докажем индукционный переход:

$$|y_{k+1} - y_k| \le \int_{x_0}^{x} L\,|y_k - y_{k-1}|\,d\tau = M\frac{L^k(x-x_0)^{k+1}}{(k+1)!}$$

Оценивая теперь хрен знает что получаем:

$$|y_0| + Mh + ML\frac{h^2}{2!} + ... + ML^{k-1}\frac{h^k}{k!} + ...$$

Это мажорирующий ряд, который является сходящимся, так как сводится к экспоненциальной функции.

ДЗ: привести ряд к экспоненциальной форме.

Назовем $y^*(x) \leftleftarrows_{n\to\infty} y_n(x)$. Итерации Пикара сходятся. Посмотрим, являются ли они единственным решением.

$$y^*(x) = \lim_{k\to\infty} y_{k+1}(x) \equiv y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\tau, y_k(\tau))d\tau =$$

$$= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\tau, y^*(\tau))d\tau$$