Дисклеймер.

Автор не несет ответственности за любой ущерб, причиненный Вам при использовании данного документа. Автор напоминает, что данный документ может содержать ошибки и опечатки, недостоверную и/или непроверенную информацию. Если Вы желаете помочь в развитии проекта или сообщить об ошибке/опечатке/неточности:

GitHub проекта

Автор в ВК

Содержание

1 Метрические пространства. Определение, примеры

Определение 1.1. Пространство X называется метрическим, если $\forall x, y \in X\ \exists! \rho(x,y) \in \mathbb{R}$, такое, что:

1) $\rho(x,y) \geq 0$, при этом $\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
2) $\rho(x,y) = \rho(y,x)$ (симметричность);
3) $\rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(y,z)$ (неравенство треугольника);
$\forall x, y, z \in X$.

Пример 1.1.
$X = \mathbb{R}$, тогда $\rho(x,y) = |x - y|$.
$X = \mathbb{R}^n$, тогда:
1) $\rho(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$ (сферическая метрика);
2) $\rho(x,y) = \max_{i=\overline{1,n}} |x_i - y_i|$ (параллелепипедальная);
3) $\rho(x,y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$;
4) $\rho(x,y) = \left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p\right)^{1/p}$.

Пример 1.2. Пусть $X = C[a,b]$.
1) $\rho(f(x), g(x)) = \max_{[a,b]} |f(x) - g(x)|$
2) $\rho(f(x), g(x)) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$.

2 Сходимость в метрическом пространстве. Фундаментальные последовательности. Полнота метрического пространства

Определение 2.1. Пусть $\{x^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность элементов в X. И пусть $x^* \in X$. Тогда $x^{(k)} \to x^*$, если $\rho(x^{(k)}, x^*) \to_{k\to\infty} 0$.

Определение 2.2. Последовательность $\{x^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ фундаментальна, если для нее выполнен критерий Коши: $\forall \varepsilon > 0\ \exists N > 0 :\ \forall k, n \geq N$ выполняется $\rho(x^{(k)}, x^{(n)}) < \varepsilon$.

Теорема 2.1. *Если последовательность сходится, то она фундаментальна.*

Доказательство. Рассмотрим $0 \leq \rho(x^{(k)}, x^{(n)}) \leq \rho(x^{(k)}, x^*) + \rho(x^*, x^{(n)}) \to_{\{k,n\}\to\infty} 0$. Теорема о двух милиционерах. $\square$

Определение 2.3. Пространство X — полное, если любая фундаментальная последовательность в нем сходится к элементу этого пространства: $\forall$ фундаментальной последовательности $\{x^{(k)}\} \in X\ \exists x^* \in X$, такое, что $x^{(k)} \to_{k\to\infty} x^*$.

Пример 2.1. $X = \mathbb{R}$ — полное. $X = \mathbb{Q}$ — не полное, так как $x^{(k)} = (1 + \frac{1}{k})^k \in \mathbb{Q}$ сходится к e, но $e \notin Q$.

Замечание 2.1. Полнота пространства зависит, вообще говоря, от введенной метрики.

Пример 2.2. $X = C[a, b]$, $\rho_1(f(x), g(x)) = \max_{[a,b]} |f(x) - g(x)|$ и $\rho_2(f(x), g(x)) = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx$. Если рассматривать $\rho_1(f_k(x), g(x)) \to_{k\to\infty} 0 \Rightarrow f_k(x) \rightrightarrows_{k\to 0}^{[a,b]} f(x) \Rightarrow f(x) \in X$, но $\rho_2(f_k(x), g(x)) \to_{k\to\infty} 0 \not\Rightarrow f(x) \in X$.

Определение 2.4. A плотно в X, если всякая окрестность любой точки $x \in X$ содержит элемент из A. То есть всюду плотное множенство — подмножество пространства, точками которого можно сколь угодно хорошо приблизить любую точку объемлющего пространства.

Пример 2.3. Множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$ плотно в пространстве вещественных чисел $\mathbb{R}$.

Определение 2.5. X^* называется пополнением пространства X, если:
1) $X \subset X^*$;
2) X — всюду плотно в X^*.
3) X^* — полное.

3 Открытые и замкнутые множества. Предельные и внутренние точки множества. Замыкание множества

Определение 3.1. ε-окрестность точки x_0 — множенство $V_\varepsilon(x_0) = \{x \in X : \rho(x_0, x) < \varepsilon\}$. Также ε-окрестность эквивалентна открытому шару $B_\varepsilon(x_0)$, где x_0 — центр, а ε — радиус.

Определение 3.2. Закрытый шар $\overline{B}_\varepsilon(x_0)$ — это такие $x : \rho(x, x_0) \leq \varepsilon$.

Определение 3.3. $E \subset X$. x_0 — внутренняя точка, если $\exists \varepsilon > 0$, такое, что $B_\varepsilon(x_0) \in E$.

Определение 3.4. Открытое множество — множество, состоящее только из внутренних точек.

Определение 3.5. $E \subset X$. x_0 — предельная точка для E, если $\forall \varepsilon > 0$ выполняется $B_\varepsilon(x_0) \cap E \neq \varnothing$.

Определение 3.6. Замыкание множества — процесс присоединения к нему всех его предельных точек: $\overline{E} = E \cup \{\text{предельные точки}\}$.

4 Принцип сжимающих отображений. Неподвижная точка оператора

Пусть X, Y — два метрических пространства. Пусть ρ_1, ρ_2 — метрики в пространствах X и Y соответственно. И пусть задано отображение $\mathcal{A} : X \to Y$ $(\forall x \in X\ \exists y = \mathcal{A}x \in Y)$.

Определение 4.1. Отображение $\mathcal{A}$ называется непрерывным в точке $x_0 \in X$, если $\forall \{x_k\} \in X :\ x_k \to_{k\to\infty} x_0 \Rightarrow \mathcal{A}x_k \to_{k\to\infty} \mathcal{A}x_0$.

Или, что то же самое: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$, такое, что если $\rho_1(x, x_0) < \delta$, то $\rho_2(\mathcal{A}x, \mathcal{A}x_0) < \varepsilon$.

Предположим далее, что $X = Y$, то есть $\mathcal{A} : X \to X$ и $\rho_1 = \rho_2 = \rho$.

Определение 4.2. Точка $x^* \in X$ — неподвижная точка отображения $\mathcal{A}$, если $\mathcal{A}x^* = x^*$.

Определение 4.3. Отображение $\mathcal{A} : X \to X$ называется сжимающим, если $\exists \alpha \in [0, 1)$, такая, что $\forall x, y \in X$ верно $\rho(\mathcal{A}x, \mathcal{A}y) \le \alpha\rho(x, y)$.

Лемма 4.1. *$\mathcal{A}$ сжимающее $\Rightarrow$ $\mathcal{A}$ непрерывное на X.*

Доказательство. $\forall x_0 \in X, \forall \{x_k\} \in X :\ x_k \to_{k\to\infty} x_0 \Rightarrow 0 \le \rho(\mathcal{A}x_k, \mathcal{A}x_0) \le \alpha\rho(x_k, x_0) \to_{k\to\infty} 0$ □

Теорема 4.1. *(о неподвижной точке, она же Каччапалья-Банаха, она же принцип сжимающих отображений)*

Пусть X — полное метрическое пространство, $\mathcal{A} : X \to X$ — сжимающее. Тогда у отображения $\mathcal{A}$ $\exists!$ неподвижная точка.

Доказательство. $\forall x_0 \in X$:

$x_1 = \mathcal{A}x_0$

$x_2 = \mathcal{A}x_1 = \mathcal{A}(\mathcal{A}x_0) = \mathcal{A}^2x_0$

...

$X_k = \mathcal{A}^k x_0$

Докажем, что эта последовательность является фундаментальной:

$\forall n \ge m \ge 1$

$$\begin{aligned}\rho(x_n, x_m) = \rho(\mathcal{A}^n x_0, \mathcal{A}^m x_0) \le \alpha\rho(\mathcal{A}^{n-1}x_0, \mathcal{A}^{m-1}x_0) \le ... \le \alpha^m\rho(\mathcal{A}^{n-m}x_0, x_0) \le (*) \le \\ \le \alpha^m \left(\rho(\mathcal{A}^{n-m}x_0, \mathcal{A}^{n-m-1}x_0) + ... + \rho(\mathcal{A}^{n-m-1}x_0, \mathcal{A}^{n-m-2}x_0) + ... + \rho(\mathcal{A}x_0, x_0)\right) \le \\ \le \alpha^m \left(\alpha^{n-m-1}\rho(\mathcal{A}x_0, x_0) + \alpha^{n-m-2}\rho(\mathcal{A}x_0, x_0) + ... + \rho(\mathcal{A}x_0, x_0)\right) \le \\ \le \alpha^m\rho(x_0, x_1)\left(1 + \alpha + \alpha^2 + ... + \alpha^{n-m-1} + ...\right) = \frac{\alpha^m\rho(x_0, x_1)}{1-\alpha} \to_{m\to\infty} 0\end{aligned}$$

$(*)$ — по неравенству треугольника.

Следовательно, последовательность является фундаментальной.

X полное, следовательно, $\exists x^* \in X :\ x_k \to_{k\to\infty} x^*$. Покажем, что x^* будет неподвижной точкой:

$$\mathcal{A}x^* = \mathcal{A}\lim_{k\to\infty} x_k = (A \text{ сжим,непр}) = \lim_{k\to\infty} \mathcal{A}x^* = \lim_{k\to\infty} x_{k+1} = x^*$$

Докажем, что точка единственная. От противного:

x^*, y^* — неподвижные точки $\mathcal{A}$. Тогда:

$$0 < \rho(x^*, y^*) = \rho(\mathcal{A}x^*, \mathcal{A}y^*) \le \underbrace{\alpha}_{<1}\rho(x^*, y^*)$$

противоречие, то есть $\rho(x^*, y^*) = 0$. □

Замечание 4.1. В доказательстве содержится алгоритм поиска неподвижной точки. Выберем любую точку, применим к ней несколько раз отображение и предел данной последовательности будет неподвижной точкой.

5 Линейные пространства. Линейно независимая система. Размерность

Определение 5.1. Непустое множество L называют линейным пространством (или векторным пространством), если выполняются следующие условия:

$\forall x, y \in L\ \exists z = x + y \in L$, причем выполнены:

1) Коммутативность: $x + y = y + x$;

2) Ассоциативность: $(x + y) + z = x + (y + z)$;

3) Существование нулевого элемента: $\exists 0 \in L$, что $\forall x \in L : x + 0 = x$;

4) Существование противоположного элемента: $\forall x \in L\ \exists -x \in L$, такой что $x+(-x) = 0$

Для любого числа α и любого элемента $x \in L$ определён элемент $\alpha x \in L$ (произведение элемента на число), причём

1) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$;

2) $1 \cdot x = x$;

3) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$;

4) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$.

Определение 5.2. Система элементов $\{x_1, ..., x_n\}$ линейного пространства L называется линейно независимой, если равенство $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$ возможно только при $a_1 = a_2 = ... = a_n = 0$.

Определение 5.3. Базисом в n-мерном линейном пространстве называется любая система n линейно независимых элементов.

Определение 5.4. Если в линейном пространстве L можно найти n линейно независимых элементов, а любые $n+1$ элементов являются линейно-зависимыми, то пространство L имеет размерность n. Если же в линейном пространстве можно выбрать любое конечное число линейно независимых элементов, то такое пространство называют бесконечномерным.

6 Нормированные пространства. Банаховы пространства. Определение, примеры. Сходимость в нормированном пространстве

Определение 6.1. Норма — функция $||\cdot|| : X \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая свойствам:

1) $||x|| \geq 0$;
2) $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
3) $||\alpha x|| = \alpha \, ||x||$;
4) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$;

где $x \in X$.

Определение 6.2. Нормированное пространство — линейное пространство, на котором введена норма.

Определение 6.3. Банахово пространство — полное нормированное пространство.

Пример 6.1. Пусть пространство имеет вид:

1) $C[a, b]$: f непрерывна, $||f|| = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|$;
2) $C^k[a, b]$: $||f|| :\ \max_{x\in[a,b]} |f(x)| + \sum_{n=1}^{k} \max |f^{(n)}(x)|$;
3) $L_1[a, b] : f$ интегрируема по Лебегу на $[a, b]$, $||f|| = \int_a^b |f(x)|dx$;
4) $L_p[a, b] : ||f||_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{1/p}$;
5) $l_p(\mathbb{N}) :=$ {последовательности $x = \{x_n\} :\ \sum_n |x_n|^p < +\infty$}: $||x||_p = (\sum_n |x_n|^p)^{1/p} < +\infty$.

Определение 6.4. Пусть $\{x^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность элементов в X. И пусть $x^* \in X$. Тогда $x^{(k)} \to_{k\to\infty} x^*$, если $||x^* - x_k|| \to_{k\to\infty} 0$.

7 Линейные, непрерывные операторы. Норма оператора

Определение 7.1. X, Y — линейные пространства. $A : X \to Y$ — оператор, если $\forall x \in X\ \exists y = Ax \in Y$.

Определение 7.2. Если $Y = \mathbb{R}$, то есть оператор $A : X \to \mathbb{R}$, то A называется функционалом.

Определение 7.3. Оператор A называется линейным, если он удовлетворяет свойству дистрибутивности: $\forall x_1, x_2 \in X,\ \forall \alpha_1, \alpha_2 = const\ A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 A x_1 + \alpha_2 A x_2$. Также линейным может быть и функционал.

Пример 7.1. $X = C^1[a,b]$, $Y = C[a,b]$. $A = \frac{d}{dt} :\ x(t) \in X \to x'(t) \in Y$.

Определение 7.4. Линейный оператор непрерывен, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0$, такое, что $||x_1 - x_2||_x < \delta \Rightarrow ||Ax_1 - Ax_2||_y$.

Определение 7.5. A — ограничен, если $\forall x \in X$ выполняется $||Ax||_y \leq C\,||x||_x$.

Утверждение 7.1. A непрерывен $\Leftrightarrow$ A ограничен.

Определение 7.6. Пусть P и Q — два нормированных линейных пространства и $A : P \to Q$. Если A ограничен, наименьшее возможное M называется его нормой.

Норма оператора определяется как $||A|| = \sup_{||x||_x \leq 1} ||Ax||_y = \sup \frac{||Ax||_y}{||x||_x}$.

8 Гильбертово пространство. Ортонормированный базис. Ряд Фурье

Определение 8.1. Скалярное произведение — функция $H \times H \to \mathbb{R}$ (обозначается как (x, y)), удовлетворяющее условиям:

1) $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
2) $(x, y) = (y, x)$;
3) $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$;
4) $(x + z, y) = (x, y) + (z, y)$;

Пример 8.1. В пространстве:

$\mathbb{R}^n$ — $(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$;
$l_2(\mathbb{N})$ — $(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$;
$L_2[0, 1]$ — $(f, g) = \int_0^1 f \cdot g$.

Определение 8.2. Гильбертово пространство — Банахово пространство, в котором введено скалярное произведение.

(еще что-то)

9 Процесс ортогонализации Грамма-Шмидта

Определение 9.1. Процессом ортогонализации системы векторов $a_1, a_2, ..., a_s$ называется переход от данной системы к системе $b_1, b_2, ..., b_s$, построенной следующим образом: $b_1 = a_1; b_k = a_k - \sum_{i=1}^{n-1} c_i b_i$ $(k = 2, 3, ..., s)$, где $c_i = \frac{(a_k, b_i)}{(b_i, b_i)}$.

Определение 9.2. Система векторов евклидового пространства называется ортогональной, если все векторы этой системы попарно ортогональны между собой.

Процесс ортогонализации Грама Шмидта:

Данный алгоритм позволяет из множества линейно независимых векторов $m_1, ..., m_n$ построить множество ортогональных векторов $t_1, ..., t_n$ или ортонормированных векторов $k_1, ..., k_n$, однако при условии, что выполняется: каждый вектор t_j либо же k_j выражается линейной комбинацией векторов $m_1, ..., m_j$.

Алгоритм:

Полагают $b_1 = a_1$, и, если уже построены векторы $b_1, b_2, .., b_{i-1}$, то

$$b_i = a_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{(a_i, b_j)}{(b_j, b_j)} b_j$$

Геометрический смысл описанного процесса состоит в том, что на каждом шагу вектор b_i является перпендикуляром, восстановленным к линейной оболочке векторов $a_1, ..., a_{i-1}$ до конца вектора a_i.

Нормируя полученные векторы b_i: $c_i = {}^{b_i}/_{|b_i|}$ получают искомую ортонормированную систему $\{c_i\}$.