

Дисклеймер.

Автор не несет ответственности за любой ущерб, причиненный Вам при использовании данного документа. Автор напоминает, что данный документ может содержать ошибки и опечатки, недостоверную и/или непроверенную информацию. Если Вы желаете помочь в развитии проекта или сообщить об ошибке/опечатке/неточности:

[GitHub проекта](#)

[Автор в ВК](#)

Содержание

1	Метрические пространства. Определение, примеры	3
2	Сходимость в метрическом пространстве. Фундаментальные последовательности. Полнота метрического пространства	4
3	Открытые и замкнутые множества. Предельные и внутренние точки множества. Замыкание множества	5
4	Принцип сжимающих отображений. Неподвижная точка оператора	6
5	Линейные пространства. Линейно независимая система. Размерность	7
6	Нормированные пространства. Банаховы пространства. Определение, примеры. Сходимость в нормированном пространстве	7
7	Линейные, непрерывные операторы. Норма оператора	7
8	Гильбертово пространство. Ортонормированный базис. Ряд Фурье	7
9	Процесс ортогонализации Грамма-Шмидта	7

1 Метрические пространства. Определение, примеры

Определение 1.1. Пространство X называется метрическим, если $\forall x, y \in X \exists! \rho(x, y) \in \mathbb{R}$, такое, что:

- 1) $\rho(x, y) \geq 0$, при этом $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
 - 2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (симметричность);
 - 3) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(y, z)$ (неравенство треугольника);
- $\forall x, y, z \in X$.

Пример 1.1.

$X = \mathbb{R}$, тогда $\rho(x, y) = |x - y|$.

$X = \mathbb{R}^n$, тогда:

- 1) $\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$ (сферическая метрика);
- 2) $\rho(x, y) = \max_{i=\overline{1, n}} |x_i - y_i|$ (параллелепипедальная);
- 3) $\rho(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$;
- 4) $\rho(x, y) = (\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p)^{1/p}$.

Пример 1.2. Пусть $X = C[a, b]$.

- 1) $\rho(f(x), g(x)) = \max_{[a, b]} |f(x) - g(x)|$
- 2) $\rho(f(x), g(x)) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$.

2 Сходимость в метрическом пространстве. Фундаментальные последовательности. Полнота метрического пространства

Определение 2.1. Пусть $\{x^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность элементов в X . И пусть $x^* \in X$. Тогда $x^{(k)} \rightarrow x^*$, если $\rho(x^{(k)}, x^*) \rightarrow_{k \rightarrow \infty} 0$.

Определение 2.2. Последовательность $\{x^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ фундаментальна, если для нее выполнен критерий Коши: $\forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 : \forall k, n \geq N$ выполняется $\rho(x^{(k)}, x^{(n)}) < \varepsilon$.

Теорема 2.1. Если последовательность сходится, то она фундаментальна.

Доказательство. Рассмотрим $0 \leq \rho(x^{(k)}, x^{(n)}) \leq \rho(x^{(k)}, x^*) + \rho(x^*, x^{(n)}) \rightarrow_{\{k, n\} \rightarrow \infty} 0$. Теорема о двух милиционерах. \square

Определение 2.3. Пространство X — полное, если любая фундаментальная последовательность в нем сходится к элементу этого пространства: \forall фундаментальной последовательности $\{x^{(k)}\} \in X \exists x^* \in X$, такое, что $x^{(k)} \rightarrow_{k \rightarrow \infty} x^*$.

Пример 2.1. $X = \mathbb{R}$ — полное. $X = \mathbb{Q}$ — не полное, так как $x^{(k)} = (1 + \frac{1}{k})^k \in \mathbb{Q}$ сходится к e , но $e \notin \mathbb{Q}$.

Замечание 2.1. Полнота пространства зависит, вообще говоря, от введенной метрики.

Пример 2.2. $X = C[a, b]$, $\rho_1(f(x), g(x)) = \max_{[a, b]} |f(x) - g(x)|$ и $\rho_2(f(x), g(x)) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$. Если рассматривать $\rho_1(f_k(x), g(x)) \rightarrow_{k \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow f_k(x) \Rightarrow_{k \rightarrow 0}^{[a, b]} f(x) \Rightarrow f(x) \in X$, но $\rho_2(f_k(x), g(x)) \rightarrow_{k \rightarrow \infty} 0 \not\Rightarrow f(x) \in X$.

Определение 2.4. A плотно в X , если всякая окрестность любой точки $x \in X$ содержит элемент из A . То есть всюду плотное множество — подмножество пространства, точками которого можно сколь угодно хорошо приблизить любую точку объемлющего пространства.

Пример 2.3. Множество рациональных чисел \mathbb{Q} плотно в пространстве вещественных чисел \mathbb{R} .

Определение 2.5. X^* называется пополнением пространства X , если:

- 1) $X \subset X^*$;
- 2) X — всюду плотно в X^* .
- 3) X^* — полное.

3 Открытые и замкнутые множества. Предельные и внутренние точки множества. Замыкание множества

Определение 3.1. ε -окрестность точки x_0 — множество $V_\varepsilon(x_0) = \{x \in X : \rho(x_0, x) < \varepsilon\}$. Также ε -окрестность эквивалентна открытому шару $B_\varepsilon(x_0)$, где x_0 — центр, а ε — радиус.

Определение 3.2. Замкнутый шар $\overline{B}_\varepsilon(x_0)$ — это такие $x : \rho(x, x_0) \leq \varepsilon$.

Определение 3.3. $E \subset X$. x_0 — внутренняя точка, если $\exists \varepsilon > 0$, такое, что $B_\varepsilon(x_0) \subset E$.

Определение 3.4. Открытое множество — множество, состоящее только из внутренних точек.

Определение 3.5. $E \subset X$. x_0 — предельная точка для E , если $\forall \varepsilon > 0$ выполняется $B_\varepsilon(x_0) \cap E \neq \emptyset$.

Определение 3.6. Замыкание множества — процесс присоединения к нему всех его предельных точек: $\overline{E} = E \cup \{\text{предельные точки}\}$.

4 Принцип сжимающих отображений. Неподвижная точка оператора

Пусть X, Y — два метрических пространства. Пусть ρ_1, ρ_2 — метрики в пространствах X и Y соответственно. И пусть задано отображение $\mathcal{A} : X \rightarrow Y$ ($\forall x \in X \exists y = \mathcal{A}x \in Y$).

Определение 4.1. Отображение \mathcal{A} называется непрерывным в точке $x_0 \in X$, если $\forall \{x_k\} \in X : x_k \rightarrow_{k \rightarrow \infty} x_0 \Rightarrow \mathcal{A}x_k \rightarrow_{k \rightarrow \infty} \mathcal{A}x_0$.

Или, что то же самое: $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$, такое, что если $\rho_1(x, x_0) < \delta$, то $\rho_2(\mathcal{A}x, \mathcal{A}x_0) < \varepsilon$.

Предположим далее, что $X = Y$, то есть $\mathcal{A} : X \rightarrow X$ — оператор и $\rho_1 = \rho_2 = \rho$.

Определение 4.2. Точка $x^* \in X$ — неподвижная точка отображения \mathcal{A} , если $\mathcal{A}x^* = x^*$.

Определение 4.3. Отображение $\mathcal{A} : X \rightarrow X$ называется сжимающим, если $\exists \alpha \in [0, 1)$, такая, что $\forall x, y \in X$ верно $\rho(\mathcal{A}x, \mathcal{A}y) \leq \alpha \rho(x, y)$.

Лемма 4.1. \mathcal{A} сжимающее $\Rightarrow \mathcal{A}$ непрерывное на X .

Доказательство. $\forall x_0 \in X, \forall \{x_k\} \in X : x_k \rightarrow_{k \rightarrow \infty} x_0 \Rightarrow 0 \leq \rho(\mathcal{A}x_k, \mathcal{A}x_0) \leq \alpha \rho(x_k, x_0) \rightarrow_{k \rightarrow \infty} 0$ □

Теорема 4.1. (о неподвижной точке, она же Каччапалья-Банаха, она же принцип сжимающих отображений)

Пусть X — полное метрическое пространство, $\mathcal{A} : X \rightarrow X$ — сжимающее. Тогда у отображения \mathcal{A} $\exists!$ неподвижная точка.

Доказательство. $\forall x_0 \in X$:

$$x_1 = \mathcal{A}x_0$$

$$x_2 = \mathcal{A}x_1 = \mathcal{A}(\mathcal{A}x_0) = \mathcal{A}^2x_0$$

...

$$x_k = \mathcal{A}^k x_0$$

Докажем, что эта последовательность является фундаментальной:

$$\forall n \geq m \geq 1$$

$$\begin{aligned} \rho(x_n, x_m) &= \rho(\mathcal{A}^n x_0, \mathcal{A}^m x_0) \leq \alpha \rho(\mathcal{A}^{n-1} x_0, \mathcal{A}^{m-1} x_0) \leq \dots \leq \alpha^m \rho(\mathcal{A}^{n-m} x_0, x_0) \leq (*) \leq \\ &\leq \alpha^m (\rho(\mathcal{A}^{n-m} x_0, \mathcal{A}^{n-m-1} x_0) + \dots + \rho(\mathcal{A}^{n-m-1} x_0, \mathcal{A}^{n-m-2} x_0) + \dots + \rho(\mathcal{A} x_0, x_0)) \leq \\ &\leq \alpha^m (\alpha^{n-m-1} \rho(\mathcal{A} x_0, x_0) + \alpha^{n-m-2} \rho(\mathcal{A} x_0, x_0) + \dots + \rho(\mathcal{A} x_0, x_0)) \leq \\ &\leq \alpha^m \rho(x_0, x_1) (1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{n-m-1} + \dots) = \frac{\alpha^m \rho(x_0, x_1)}{1 - \alpha} \rightarrow_{m \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

(*) — по неравенству треугольника.

Следовательно, последовательность является фундаментальной.

X полное, следовательно, $\exists x^* \in X : x_k \rightarrow_{k \rightarrow \infty} x^*$. Покажем, что x^* будет неподвижной точкой:

$$\mathcal{A}x^* = \mathcal{A} \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = (\mathcal{A} \text{ сжим, непр}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{A}x_k = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{k+1} = x^*$$

Докажем, что точка единственная. От противного:

x^*, y^* — неподвижные точки \mathcal{A} . Тогда:

$$0 < \rho(x^*, y^*) = \rho(\mathcal{A}x^*, \mathcal{A}y^*) \leq \underbrace{\alpha}_{< 1} \rho(x^*, y^*)$$

противоречие, то есть $\rho(x^*, y^*) = 0$. □

Замечание 4.1. В доказательстве содержится алгоритм поиска неподвижной точки. Выберем любую точку, применим к ней несколько раз отображение и предел данной последовательности будет неподвижной точкой.

5 Линейные пространства. Линейно независимая система. Размерность

6 Нормированные пространства. Банаховы пространства. Определение, примеры. Сходимость в нормированном пространстве

Определение 6.1. Норма — функция $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющая свойствам:

- 1) $\|x\| \geq 0$;
 - 2) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
 - 3) $\|\alpha x\| = \alpha \|x\|$;
 - 4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$;
- где $x \in X$.

Определение 6.2. Нормированное пространство — линейное пространство, на котором введена норма.

Определение 6.3. Банахово пространство — ...

Пример 6.1. Пусть пространство имеет вид:

- 1) $C[a, b]$: f непрерывна, $\|f\| = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$;
- 2) $C^k[a, b]$: $\|f\| = \max_{x \in [a, b]} |f(x)| + \sum_{n=1}^k \max |f^{(n)}(x)|$;
- 3) $L_1[a, b]$: f интегрируема по Лебегу на $[a, b]$, $\|f\| = \int_a^b |f(x)| dx$;
- 4) $L_p[a, b]$: $\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$;
- 5) $l_p(\mathbb{N}) := \{\text{последовательности } x = \{x_n\} : \sum_n |x_n|^p < +\infty\}$: $\|x\|_p = (\sum_n |x_n|^p)^{1/p} < +\infty$.

7 Линейные, непрерывные операторы. Норма оператора

8 Гильбертово пространство. Ортонормированный базис. Ряд Фурье

9 Процесс ортогонализации Грамма-Шмидта