

Дисклеймер.

Автор не несет ответственности за любой ущерб, причиненный Вам при использовании данного документа. Автор напоминает, что данный документ может содержать ошибки и опечатки, недостоверную и/или непроверенную информацию. Если Вы желаете помочь в развитии проекта или сообщить об ошибке/опечатке/неточности:

[GitHub проекта](#)

[Автор в ВК](#)

# Содержание

<b>1</b>	<b>Погрешности</b>	<b>3</b>
1.1	Погрешности приближенных вычислений . . . . .	3
1.1.1	Погрешности арифметических действий . . . . .	3
1.1.2	Обратная задача погрешности . . . . .	4
1.1.3	Статистический подход . . . . .	4
1.1.4	Примеры неустойчивых задач и методов . . . . .	4
1.2	Решение систем линейных уравнений . . . . .	5
1.2.1	Число обусловленности . . . . .	6
1.2.2	Метод Гаусса . . . . .	6
1.2.3	LU-разложение . . . . .	6
1.2.4	QR-разложение . . . . .	6

# 1 Погрешности

## 1.1 Погрешности приближенных вычислений

- 1) Погрешность начальных данных (задачи, измерений).
- 2) Методическая погрешность.
- 3) Вычислительная погрешность.

**Определение 1.1.** Если  $a$  — приближенное значение,  $A$  — точное, тогда  $\Delta a = |A - a|$  — абсолютная погрешность.

**Определение 1.2.**  $\delta a = \frac{\Delta a}{|a|}$  — относительная погрешность. Она показывает, сколько верных знаков в записи числа.

Рассмотрим, как погрешности ведут себя при вычислениях.

### 1.1.1 Погрешности арифметических действий

$x_1 \pm \Delta x_1$  и  $x_2 \pm \Delta x_2$  — неточные числа.

Тогда:

1)  $(x_1 + x_2) + \Delta(x_1 + x_2) = x_1 + \Delta x_1 + x_2 + \Delta x_2 \Rightarrow \Delta_+ = x_1 + x_2$ .

Таким образом,  $|\Delta_{\pm}| \leq |\Delta x_1| \pm |\Delta x_2|$ .

Отсюда абсолютная:  $\frac{\Delta(x_1+x_2)}{x_1+x_2} = \frac{\Delta x_1}{x_1+x_2} + \frac{\Delta x_2}{x_1+x_2} \leq \delta x_1 + \delta x_2$ .

Если  $x_1, x_2 > 0$ , то  $\delta_+ \leq \max \delta x_i$ .

А вот для вычитания  $\frac{\Delta(x_1-x_2)}{(x_1-x_2)}$  и возникает большая проблема для относительной погрешности.

2)  $(x_1 x_2) + \Delta(x_1 x_2) = x_1 x_2 + x_1 \Delta x_2 + x_2 \Delta x_1 + \Delta x_1 \Delta x_2 \Rightarrow \Delta_+ \approx x_1 \Delta x_2 + x_2 \Delta x_1$ .

Отсюда абсолютная:  $\frac{\Delta(x_1 x_2)}{x_1 x_2} \approx \frac{\Delta x_2}{x_2} + \frac{\Delta x_1}{x_1} \Rightarrow |\delta| \leq |\delta x_1| + |\delta x_2|$ .

Пусть  $f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ , где  $\bar{x}_1 = x_1 + \Delta x_1, \dots, \bar{x}_n = x_n + \Delta x_n$ .

Посчитаем

$$\Delta f = f(x_1, \dots, x_n) - f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) = \left[ \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_n) \Delta x_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_n) \Delta x_n \right] + o((\Delta x)^2)$$

откуда абсолютная погрешность:

$$|\Delta f| \leq \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| |\Delta x_i|$$

Рассмотрим относительную:

$$\frac{\Delta f}{f} = \delta f = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{1}{f} \right| |\Delta x_i| = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial \ln f}{\partial x_i} \Delta x_i \right|$$

где  $\frac{\partial \ln f}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{f \partial x_i}$ .

Отсюда  $\ln(x_1 \cdot \dots \cdot x_n) = \ln x_1 + \dots + \ln x_n \Rightarrow \frac{\partial \ln(x_1 \dots x_n)}{\partial x_i} = \frac{1}{x_i}$ .

То есть для деления  $|\delta_{\div}| \leq |\delta x_1| + |\delta x_2|$ .

### 1.1.2 Обратная задача погрешности

**Проблема.** По требуемой на  $\Delta f$  ( $\delta f$ ) найти допустимые  $\Delta x$  ( $\delta x$ ).

**Пример 1.1.**

1) Принцип равных влияний: считаем, что вклад всех слагаемых в погрешность одинаков:

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right| \cdot \Delta x_1 = \left| \frac{\partial f}{\partial x_2} \right| \cdot \Delta x_2 = \dots = \text{const}$$

Откуда

$$\Delta x_i \leq \frac{|\Delta f|}{n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|}$$

2) Принцип равных погрешностей: требуем одинаковых  $\Delta x_i$ :

$$\Delta x_1 = \Delta x_2 = \dots = \text{const} = \Delta x$$

Откуда

$$|\Delta x| \leq \frac{|\Delta f|}{\sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|}$$

### 1.1.3 Статистический подход

$\Delta S_n \div \sqrt{n}$ , где  $S_n$  — сумма  $n$  слагаемых ( $n > 10$ ).

Тогда  $\Delta S_n \approx \sqrt{3n} \cdot 0.5 \cdot 10^{-m}$  если  $\Delta x_i \leq 0.5 \cdot 10^{-m}$ .

Таким образом, при статистическом подходе погрешность  $\frac{\Delta S_n}{n} \rightarrow 0$   $n \rightarrow \infty$ .

### 1.1.4 Примеры неустойчивых задач и методов

1) Требуется решить  $(x - a)^n = \varepsilon$ , где  $a, n, \varepsilon$  — заданные числа, при этом  $n \gg 1$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $0 < \varepsilon < 1$

$x = a$  — приближенное.

$\Delta x = \sqrt[n]{\varepsilon}$  если  $\varepsilon \approx 10^{-16}$ ,  $n \approx 10$ ,  $\Delta x \approx 10^{-2}$ .

2)  $(x - 1)(x - 2) \dots (x - 20)$  — полином. Раскроем:  $x^{20} - 210x^{19} + \dots + 20!$ . А вот если мы получили погрешность округления вида  $210 + 10^{-7}$ . Тогда корни этого полинома не просто изменятся, но будут иметь вид:

$$x = 1.000$$

$\vdots$

$$x_7 = 7.000$$

$$x_8 = 8.007$$

$$x_9 = 8.897$$

$$x_{10,19} \in \mathbb{C}$$

$$x_{20} = 20.847$$

3) Линейная система:

$$\begin{cases} x + 10y = 11 \\ 100x + 1001y = 1101 \end{cases}$$

Решение очевидно:  $x = 1, y = 1$ .

Добавим погрешность:

$$\begin{cases} x + 10y = 11.01 \\ 100x + 1001y = 1101 \end{cases}$$

Решение получилось:  $x = 11.01, y = 0$ .

4) Вычислить набор интегралов

$$\frac{1}{e} \int_0^1 x^n e^x dx$$

где  $n = 0, 1, \dots$

Пусть  $I_n$  — этот интеграл. Тогда запишем рекуррентную формулу:

$$I_n = 1 - nI_{n-1}, \quad I_0 = 1 - \frac{1}{e}$$

На старых машинах при  $n = 14$  уже получались неверные ответы.

Альтернатива: перевернуть формулу и записать ее в виде

$$I_{n-1} = \frac{1}{n}(1 - I_n)$$

## 1.2 Решение систем линейных уравнений

**Определение 1.3.** Норма:  $\|\cdot\|$ ;

- 1)  $\|x\| \geq 0, \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ;
- 2)  $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ ;
- 3)  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ ;

**Пример 1.2.** Нормы векторов

$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$  — долгая и неблагодарная норма;

$\|x\|_1 = |x_1| + \dots + |x_n|$  — более простая норма;

$\|x\|_p = (|x_1|^p + \dots + |x_n|^p)^{1/p}$  — строгая математическая норма;

$\|x\|_\infty = \max_{i=\overline{1,n}} |x_i|$  — наиболее частоиспользуемая норма.

Все эти нормы эквивалентны, то есть  $\|\cdot\|_\alpha, \|\cdot\|_\beta$  эквивалентны, если  $\exists c_1, c_2: \forall x$  выполняется  $c_1 \|x\|_\beta \leq \|x\|_\alpha \leq c_2 \|x\|_\beta$ .

**Определение 1.4.** Рассмотрим линейный оператор  $A$ ; здесь  $\|Ax\| \leq C$ . Тогда  $\min_x C = \|A\|$  — норма матрицы, согласованная с нормой вектора, если  $\|Ax\| \leq \|A\| \|x\|$ .

**Определение 1.5.** Норма матрицы, подчиненная норме вектора:

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

**Пример 1.3.**

$$1) \|A\|_1 = \max_{j=\overline{1,n}} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|;$$

$$2) \|A\|_2 = \sqrt{\max_{i=\overline{1,n}} \lambda(A^T A)};$$

$$3) \|A\|_\infty = \max_{i=\overline{1,n}} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|.$$

Норма Фробениуса:  $\|A\|_F = \sqrt{\sum_{ij} a_{ij}^2}$ .

### 1.2.1 Число обусловленности

Рассмотрим систему  $Ax = b$  и пусть  $b + \Delta b$ . Как  $\Delta b$  повлияет на  $\Delta x$ ?

$A(x + \Delta x) = b + \Delta b$ ;  $A\Delta x = \Delta b$ .

$\|A\Delta x\| = \|\Delta b\|$ , раскрыв скобки,  $\|A\| \|\Delta x\| \geq \|\Delta b\|$ ;

Откуда  $\|\Delta x\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|\Delta b\|$ . Но это абсолютная погрешность. Что с относительной?

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A^{-1}\| \|A\| \|\Delta b\|}{\|b\|}$$

и тогда  $\nu(A) = \|A^{-1}\| \|A\|$  — число обусловленности системы.

И если  $\nu(A) \gg 1$ , то система плохо обусловлена.

Есть способы т.н. предобусловливания систем, однако мы их смотреть пока не будем.

Пример плохо обусловленной системы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 100 & 1001 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 11.01 \end{pmatrix}$$

### 1.2.2 Метод Гаусса

Обычный метод Гаусса.

### 1.2.3 LU-разложение

$A = LU$ , где  $L$  — нижнетреугольная матрица, а  $U$  — верхнетреугольная. Потребуем, чтобы на главной диагонали  $L$  стояли единицы для однозначного разложения.

$U$  — матрица, получающаяся в ходе прямого разложения Гаусса.  $L$  получается, как матрица, в которой запомнены коэффициенты, на которые мы домножали:  $\frac{a_{21}}{a_{11}}$ , к примеру. Но если наше разложение наткнется на нуль на диагонали, будет больно.

Поэтому используют  $A = P^{-1}LU$ , где  $P$  — матрица перестановки с аналогичными желаемым перестановками.

Для решения уравнения будем использовать  $PAx = Pb$ . Затем  $Ly = Pb$ .

Как ее построить? Если мы переставляли строки в исходной матрице, то аналогично должны переставить в матрице  $P$ . Затем воспользуемся тем, что  $P$  ортогональна:  $P^{-1} = P^T$ .

### 1.2.4 QR-разложение

**Метод вращений Гивенса:**

Строим  $QR = A$ , где  $R$  — верхнетреугольная матрица, а  $Q$  — ортонормированная.

Повернем  $A_1$  на какой-то угол, чтобы получилось  $\begin{pmatrix} a_{11}^{(0)} \\ 0 \\ a_{31}^{(0)} \\ \vdots \\ a_{n1}^{(0)} \end{pmatrix}$ . Матрицы поворота выгля-

дят так:  $\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$ . Матрица обратного поворота, аналогично,  $\begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$ .

Теперь, если мы домножим на матрицу  $Q_{21} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Тогда обнулится

элемент  $a_{21}$ . Аналогично, далее используем матрицу  $Q_{31} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  и так

далее. Таким образом,  $Q_{n,n-1}Q_{n,n-2}, \dots, Q_{21}$ .

Это разложение нам понадобится для решения уравнения вида  $Ax = b$  решая уравнение  $Rx = Qb$ .

Как найти  $\alpha$ ? У нас есть  $a_{11}$  и  $a_{21}$  и мы именно этот вектор хотим домножить на матрицу вращения. Уравнение:

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Легко выводится, что  $\begin{cases} \sin \alpha a_{11} + \cos \alpha a_{21} = 0 \\ \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \end{cases}$ ,  $\sin \alpha = -\frac{\cos \alpha a_{21}}{a_{11}}$ ,  $\cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha \left(\frac{a_{21}}{a_{11}}\right) = 1$ , откуда  $\cos^2 \alpha = \frac{a_{11}^2}{a_{11}^2 + a_{21}^2}$ , отсюда  $\cos \alpha = \frac{a_{11}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{21}^2}}$ ,  $\sin \alpha = -\frac{a_{21}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{21}^2}}$ .

Плюсы в сравнении с методом Гаусса: не нужно выбирать ведущий элемент и не растёт вычислительная погрешность. Из минусов: работает в 4 раза медленнее.

### Метод отражений Хаусхольдера:

Рассмотрим вспомогательный вектор  $\omega$  — вектор единичной длины.  $\omega^T \omega = 1$ .

Рассмотрим  $U = E - 2\omega\omega^T$ ,  $U^T U = E - 4\omega\omega^T + 4\underbrace{\omega\omega^T\omega\omega^T}_1 = E \Rightarrow U^{-1} = U^T$ .

$U_\omega = (E - 2\omega\omega^T)\omega = \omega - 2\omega = -\omega \Rightarrow \omega$  — собственный вектор с собственным числом  $-1$ .

$v \perp \omega$ , то есть  $v^T \omega = 0$  или  $\omega^T v = 0$ ,  $U_v = (E - 2\omega\omega^T)v = v - 2\omega\omega^T v = v \Rightarrow v$  — собственный вектор с собственным числом  $1$ .

Таким образом,  $y = v + \alpha\omega \Rightarrow Uy = v - \alpha\omega$ , то есть матрица  $U$  отражает вектор.

Пусть  $y, z$  — ... векторы. Нам нужно найти  $U$ , такую, что  $Uy = \alpha z$ . Смотрим:

$$\|Uy\| = \|y\| = \|\alpha z\| \Rightarrow \alpha = \frac{\|y\|}{\|z\|}$$

$$\omega = \frac{y - \alpha z}{\|y - \alpha z\|}$$

Теперь, используя  $A_1$  как  $y$ ,  $e_1$  как  $z$ , строим  $U_1 = E - 2\omega\omega^T$ . Тогда  $U_1 A$  будет иметь нулевой первый столбец (исключая элемент  $a_{11}^{(1)}$ ).

Тогда  $Q = U_{n-1} \cdot \dots \cdot U_1$ .

Тогда решением  $Ax = b$  будет являться  $Rx = Q^T b$ .

### Симметричная матрица — метод квадратного корня.

$A = S^T S$ , где  $S$  — верхнетреугольная. Такое разложение возможно и единственно только для симметричной матрицы.

Рассмотрим  $A$  — положительно определенная матрица, следовательно,  $s_{ij} \in \mathbb{R}$ . Просто расписав матрицы, получим  $s_{11}^2 = a_{11}$ ,  $s_{11}s_{12} = a_{12}$ , ...,  $s_{11}s_{1n} = a_{1n}$ . Теперь посмотрим на вторую строку:  $s_{22}^2 + s_{12}^2 = a_{22}$ ,  $s_{23}s_{22} + s_{12}s_{13} = a_{23}$  и так далее.

Метод квадратного корня требует в 2 раза меньше операций, чем в методе Гаусса +  $n\sqrt{\phantom{x}}$ .