Дисклеймер.

Автор не несет ответственности за любой ущерб, причиненный Вам при использовании данного документа. Автор напоминает, что данный документ может содержать ошибки и опечатки, недостоверную и/или непроверенную информацию. Если Вы желаете помочь в развитии проекта или сообщить об ошибке/опечатке/неточности:

GitHub проекта

Автор в ВК

# Содержание

# 1 Метрические пространства. Определение, примеры

**Определение 1.1.** Пространство $X$ называется метрическим, если $\forall x, y \in X\ \exists! \rho(x,y) \in \mathbb{R}$, такое, что:

1) $\rho(x,y) \geq 0$, при этом $\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
2) $\rho(x,y) = \rho(y,x)$ (симметричность);
3) $\rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(y,z)$ (неравенство треугольника);
$\forall x, y, z \in X$.

**Пример 1.1.**

$X = \mathbb{R}$, тогда $\rho(x,y) = |x - y|$.
$X = \mathbb{R}^n$, тогда:
1) $\rho(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$ (сферическая метрика);
2) $\rho(x,y) = \max_{i=\overline{1,n}} |x_i - y_i|$ (параллелепипедальная);
3) $\rho(x,y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$;
4) $\rho(x,y) = (\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p)^{1/p}$.

**Пример 1.2.** Пусть $X = C[a,b]$.

1) $\rho(f(x), g(x)) = \max_{[a,b]} |f(x) - g(x)|$
2) $\rho(f(x), g(x)) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$.

## 2 Сходимость в метрическом пространстве. Фундаментальные последовательности. Полнота метрического пространства

**Определение 2.1.** Пусть $\{x^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность элементов в $X$. И пусть $x^* \in X$. Тогда $x^{(k)} \to x^*$, если $\rho(x^{(k)}, x^*) \to_{k\to\infty} 0$.

**Определение 2.2.** Последовательность $\{x^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ фундаментальна, если для нее выполнен критерий Коши: $\forall\varepsilon > 0\ \exists N > 0 :\ \forall k, n \geq N$ выполняется $\rho(x^{(k)}, x^{(n)}) < \varepsilon$.

**Теорема 2.1.** *Если последовательность сходится, то она фундаментальна.*

*Доказательство.* Рассмотрим $0 \leq \rho(x^{(k)}, x^{(n)}) \leq \rho(x^{(k)}, x^*) + \rho(x^*, x^{(n)}) \to_{\{k,n\}\to\infty} 0$. Теорема о двух милиционерах. $\square$

**Определение 2.3.** Пространство $X$ — полное, если любая фундаментальная последовательность в нем сходится к элементу этого пространства: $\forall$ фундаментальной последовательности $\{x^{(k)}\} \in X$ $\exists x^* \in X$, такое, что $x^{(k)} \to_{k\to\infty} x^*$.

**Пример 2.1.** $X = \mathbb{R}$ — полное. $X = \mathbb{Q}$ — не полное, так как $x^{(k)} = (1 + \frac{1}{k})^k \in \mathbb{Q}$ сходится к $e$, но $e \notin Q$.

*Замечание* 2.1. Полнота пространства зависит, вообще говоря, от введенной метрики.

**Пример 2.2.** $X = C[a, b]$, $\rho_1(f(x), g(x)) = \max_{[a,b]} |f(x) - g(x)|$ и $\rho_2(f(x), g(x)) = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx$. Если рассматривать $\rho_1(f_k(x), g(x)) \to_{k\to\infty} 0 \Rightarrow f_k(x) \rightrightarrows_{k\to 0}^{[a,b]} f(x) \Rightarrow f(x) \in X$, но $\rho_2(f_k(x), g(x)) \to_{k\to\infty} 0 \not\Rightarrow f(x) \in X$.

**Определение 2.4.** $A$ плотно в $X$, если всякая окрестность любой точки $x \in X$ содержит элемент из $A$. То есть всюду плотное множенство — подмножество пространства, точками которого можно сколь угодно хорошо приблизить любую точку объемлющего пространства.

**Пример 2.3.** Множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$ плотно в пространстве вещественных чисел $\mathbb{R}$.

**Определение 2.5.** $X^*$ называется пополнением пространства $X$, если:
1) $X \subset X^*$;
2) $X$ — всюду плотно в $X^*$.
3) $X^*$ — полное.

# 3 Открытые и замкнутые множества. Предельные и внутренние точки множества. Замыкание множества

**Определение 3.1.** $\varepsilon$-окрестность точки $x_0$ — множенство $V_\varepsilon(x_0) = \{x \in X : \rho(x_0, x) < \varepsilon\}$ . Также $\varepsilon$-окрестность эквивалентна открытому шару $B_\varepsilon(x_0)$, где $x_0$ — центр, а $\varepsilon$ — радиус.

**Определение 3.2.** Закрытый шар $\overline{B}_\varepsilon(x_0)$ — это такие $x : \rho(x, x_0) \leq \varepsilon$.

**Определение 3.3.** $E \subset X$. $x_0$ — внутренняя точка, если $\exists \varepsilon > 0$, такое, что $B_\varepsilon(x_0) \in E$.

**Определение 3.4.** Открытое множество — множество, состоящее только из внутренних точек.

**Определение 3.5.** $E \subset X$. $x_0$ — предельная точка для $E$, если $\forall \varepsilon > 0$ выполняется $B_\varepsilon(x_0) \cap E \neq \varnothing$.

**Определение 3.6.** Замыкание множества — процесс присоединения к нему всех его предельных точек: $\overline{E} = E \cup \{\text{предельные точки}\}$.

# 4 Принцип сжимающих отображений. Неподвижная точка оператора

Пусть $X, Y$ — два метрических пространства. Пусть $\rho_1, \rho_2$ — метрики в пространствах $X$ и $Y$ соответственно. И пусть задано отображение $\mathcal{A} : X \to Y$ ($\forall x \in X \ \exists y = \mathcal{A}x \in Y$).

**Определение 4.1.** Отображение $\mathcal{A}$ называется непрерывным в точке $x_0 \in X$, если $\forall \{x_k\} \in X : \ x_k \to_{k\to\infty} x_0 \Rightarrow \mathcal{A}x_k \to_{k\to\infty} \mathcal{A}x_0$.

Или, что то же самое: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$, такое, что если $\rho_1(x, x_0) < \delta$, то $\rho_2(\mathcal{A}x, \mathcal{A}x_0) < \varepsilon$.

Предположим далее, что $X = Y$, то есть $\mathcal{A} : X \to X$ и $\rho_1 = \rho_2 = \rho$.

**Определение 4.2.** Точка $x^* \in X$ — неподвижная точка отображения $\mathcal{A}$, если $\mathcal{A}x^* = x^*$.

**Определение 4.3.** Отображение $\mathcal{A} : X \to X$ называется сжимающим, если $\exists \alpha \in [0, 1)$, такая, что $\forall x, y \in X$ верно $\rho(\mathcal{A}x, \mathcal{A}y) \le \alpha\rho(x, y)$.

**Лемма 4.1.** *$\mathcal{A}$ сжимающее $\Rightarrow$ $\mathcal{A}$ непрерывное на $X$.*

*Доказательство.* $\forall x_0 \in X, \forall \{x_k\} \in X : \ x_k \to_{k\to\infty} x_0 \Rightarrow 0 \le \rho(\mathcal{A}x_k, \mathcal{A}x_0) \le \alpha\rho(x_k, x_0) \to_{k\to\infty} 0$ □

**Теорема 4.1.** *(о неподвижной точке, она же Каччапалья-Банаха, она же принцип сжимающих отображений)*

*Пусть $X$ — полное метрическое пространство, $\mathcal{A} : X \to X$ — сжимающее. Тогда у отображения $\mathcal{A}$ $\exists!$ неподвижная точка.*

*Доказательство.* $\forall x_0 \in X$:

$x_1 = \mathcal{A}x_0$

$x_2 = \mathcal{A}x_1 = \mathcal{A}(\mathcal{A}x_0) = \mathcal{A}^2x_0$

...

$X_k = \mathcal{A}^kx_0$

Докажем, что эта последовательность является фундаментальной:

$\forall n \ge m \ge 1$

$$\begin{aligned}
\rho(x_n, x_m) = \rho(\mathcal{A}^nx_0, \mathcal{A}^mx_0) \le \alpha\rho(\mathcal{A}^{n-1}x_0, \mathcal{A}^{m-1}x_0) \le ... \le \alpha^m\rho(\mathcal{A}^{n-m}x_0, x_0) \le (*) \le \\
\le \alpha^m \left(\rho(\mathcal{A}^{n-m}x_0, \mathcal{A}^{n-m-1}x_0) + ... + \rho(\mathcal{A}^{n-m-1}x_0, \mathcal{A}^{n-m-2}x_0) + ... + \rho(\mathcal{A}x_0, x_0)\right) \le \\
\le \alpha^m \left(\alpha^{n-m-1}\rho(\mathcal{A}x_0, x_0) + \alpha^{n-m-2}\rho(\mathcal{A}x_0, x_0) + ... + \rho(\mathcal{A}x_0, x_0)\right) \le \\
\le \alpha^m\rho(x_0, x_1)\left(1 + \alpha + \alpha^2 + ... + \alpha^{n-m-1} + ...\right) = \frac{\alpha^m\rho(x_0, x_1)}{1-\alpha} \to_{m\to\infty} 0
\end{aligned}$$

$(*)$ — по неравенству треугольника.

Следовательно, последовательность является фундаментальной.

$X$ полное, следовательно, $\exists x^* \in X : \ x_k \to_{k\to\infty} x^*$. Покажем, что $x^*$ будет неподвижной точкой:

$$\mathcal{A}x^* = \mathcal{A}\lim_{k\to\infty} x_k = (A \text{ сжим,непр}) = \lim_{k\to\infty} \mathcal{A}x^* = \lim_{k\to\infty} x_{k+1} = x^*$$

Докажем, что точка единственная. От противного:

$x^*, y^*$ — неподвижные точки $\mathcal{A}$. Тогда:

$$0 < \rho(x^*, y^*) = \rho(\mathcal{A}x^*, \mathcal{A}y^*) \le \underbrace{\alpha}_{<1}\rho(x^*, y^*)$$

противоречие, то есть $\rho(x^*, y^*) = 0$. □

*Замечание* 4.1. В доказательстве содержится алгоритм поиска неподвижной точки. Выберем любую точку, применим к ней несколько раз отображение и предел данной последовательности будет неподвижной точкой.

# 5 Линейные пространства. Линейно независимая система. Размерность

**Определение 5.1.** Непустое множество $L$ называют линейным пространством (или векторным пространством), если выполняются следующие условия:

$\forall x, y \in L\ \exists z = x + y \in L$, причем выполнены:

1) Коммутативность: $x + y = y + x$;

2) Ассоциативность: $(x + y) + z = x + (y + z)$;

3) Существование нулевого элемента: $\exists 0 \in L$, что $\forall x \in L : x + 0 = x$;

4) Существование противоположного элемента: $\forall x \in L\ \exists -x \in L$, такой что $x+(-x) = 0$

Для любого числа $\alpha$ и любого элемента $x \in L$ определён элемент $\alpha x \in L$ (произведение элемента на число), причём

1) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$;

2) $1 \cdot x = x$;

3) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$;

4) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$.

**Определение 5.2.** Система элементов $\{x_1, ..., x_n\}$ линейного пространства $L$ называется линейно независимой, если равенство $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$ возможно только при $a_1 = a_2 = ... = a_n = 0$.

**Определение 5.3.** Базисом в $n$-мерном линейном пространстве называется любая система $n$ линейно независимых элементов.

**Определение 5.4.** Если в линейном пространстве $L$ можно найти $n$ линейно независимых элементов, а любые $n+1$ элементов являются линейно-зависимыми, то пространство $L$ имеет размерность $n$. Если же в линейном пространстве можно выбрать любое конечное число линейно независимых элементов, то такое пространство называют бесконечномерным.

# 6 Нормированные пространства. Банаховы пространства. Определение, примеры. Сходимость в нормированном пространстве

**Определение 6.1.** Норма — функция $||\cdot|| : X \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая свойствам:
1) $||x|| \geq 0$;
2) $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
3) $||\alpha x|| = \alpha \, ||x||$;
4) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$;
где $x \in X$.

**Определение 6.2.** Нормированное пространство — линейное пространство, на котором введена норма.

**Определение 6.3.** Банахово пространство — полное нормированное пространство.

**Пример 6.1.** Пусть пространство имеет вид:
1) $C[a, b]$: $f$ непрерывна, $||f|| = \max_{x \in [a,b]} |f(x)|$;
2) $C^k[a, b]$: $||f|| :\ \max_{x \in [a,b]} |f(x)| + \sum_{n=1}^{k} \max |f^{(n)}(x)|$;
3) $L_1[a, b]$ : $f$ интегрируема по Лебегу на $[a, b]$, $||f|| = \int_a^b |f(x)| dx$;
4) $L_p[a, b] : ||f||_p = \left( \int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$;
5) $l_p(\mathbb{N})$ := {последовательности $x = \{x_n\}$ : $\sum_n |x_n|^p < +\infty$}: $||x||_p = (\sum_n |x_n|^p)^{1/p} < +\infty$.

**Определение 6.4.** Пусть $\{x^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность элементов в $X$. И пусть $x^* \in X$. Тогда $x^{(k)} \to_{k \to \infty} x^*$, если $||x^* - x_k|| \to_{k \to \infty} 0$.

# 7 Линейные, непрерывные операторы. Норма оператора

**Определение 7.1.** $X, Y$ — линейные пространства. $A : X \to Y$ — оператор, если $\forall x \in X\ \exists y = Ax \in Y$.

**Определение 7.2.** Если $Y = \mathbb{R}$, то есть оператор $A : X \to \mathbb{R}$, то $A$ называется функционалом.

**Определение 7.3.** Оператор $A$ называется линейным, если он удовлетворяет свойству дистрибутивности: $\forall x_1, x_2 \in X,\ \forall \alpha_1, \alpha_2 = const\ A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 A x_1 + \alpha_2 A x_2$. Также линейным может быть и функционал.

**Пример 7.1.** $X = C^1[a,b]$, $Y = C[a,b]$. $A = \frac{d}{dt} :\ x(t) \in X \to x'(t) \in Y$.

**Определение 7.4.** Линейный оператор непрерывен, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0$, такое, что $||x_1 - x_2||_x < \delta \Rightarrow ||Ax_1 - Ax_2||_y$.

**Определение 7.5.** $A$ — ограничен, если $\forall x \in X$ выполняется $||Ax||_y \leq C\,||x||_x$.

*Утверждение* 7.1. $A$ непрерывен $\Leftrightarrow$ $A$ ограничен.

**Определение 7.6.** Пусть $P$ и $Q$ — два нормированных линейных пространства и $A : P \to Q$. Если $A$ ограничен, наименьшее возможное $M$ называется его нормой.

Норма оператора определяется как $||A|| = \sup_{||x||_x \leq 1} ||Ax||_y = \sup \frac{||Ax||_y}{||x||_x}$.

# 8 Гильбертово пространство. Ортонормированный базис. Ряд Фурье

# 9 Процесс ортогонализации Грамма-Шмидта