Дисклеймер.

Автор не несет ответственности за любой ущерб, причиненный Вам при использовании данного документа. Автор напоминает, что данный документ может содержать ошибки и опечатки, недостоверную и/или непроверенную информацию. Если Вы желаете помочь в развитии проекта или сообщить об ошибке/опечатке/неточности:

GitHub проекта

Автор в ВК

Содержание

1 Теорема об отсутствии рационального числа, квадрат которого равен двум

Теорема: не существует рационального числа, квадрат которого равен 2

Любое рациональное число можно представить в виде $\frac{m}{n}$, при этом m и n не имеют общих делителей. Т.к. $m^2 = 2n^2$, то m — четное. Тогда его можно выразить в виде $2k$. Тогда $n^2 = 2k^2$, то есть n тоже четное. Противоречие.

2 Аксиома Архимеда. Теорема о плотности рациональных чисел

Аксиома: Если имеются 2 величины a и b и $a < b$, то взяв a достаточное количество раз, можно превзойти b.

Теорема: $\forall a, b \in \mathbb{R},$ где $a < b$ $\exists r \in \mathbb{Q} : a < r < b$.

Рассматриваем $0 < a < b$. Берем $c = b - a$. Тогда $\exists n : 1 < nc$ (аксиома). Отсюда $c > \frac{1}{n}$. Еще $\exists m : \frac{m}{n} \leq a, \ \frac{m+1}{n} > a$. Тогда $r = \frac{m+1}{n}$, где $r < b$. Доказываем это, применив, что $b - r = b - \frac{m}{n} - \frac{1}{n} \geq b - a - \frac{1}{n} = c - \frac{1}{n} > 0$

Для $0 = a < b$ берем $c = b - a = b$.

Для $a < 0 < b$ $r = 0$.

Для $b < a < 0$ берем $0 > a > b$, доказываем аналогично первому и разворачиваем.

3 Аксиома полноты. Существование квадратного корня из положительного числа

Определение: $X, Y \in \mathbb{R}, \ X \neq \varnothing, Y \neq \varnothing$, X левее Y, если $\forall x \in X, y \in Y$ выполняется $x < y$.

Аксиома: Если X левее Y, то $\exists c \in \mathbb{R} : \forall x \in X, y \in Y$ выполняется $x \leq c \leq y$.

Теорема: Всякое положительное число имеет квадратный корень.

Говорим, что $\exists c > 0 : \ a = c^2$, где a — наше число. Рассматриваем множества $X = \{x \in \mathbb{R} | x > 0$ и $x^2 < a\}$ и $Y = \{y \in \mathbb{R} | y > 0$ и $y^2 > a\}$, говорим, что $1 < a$,то $1 \in X$, $a < a^2$, то $a \in Y$. Тогда $0 < y^2 - x^2$, откуда следует, что $x < y$. Тогда по аксиоме $x \leq c \leq y$.

Доказываем единственность c от противного, предполагая наличие c', которое по вышесказанному удовлетворяет условию $x \leq c' \leq y$, а, следовательно, $c' = c$.

Доказываем что $c^2 = a$ от противного. Предполагаем, что $c^2 < a$, тогда $\exists (c + \frac{1}{n})^2 \geq a$, откуда получаем $a - c^2 \leq \frac{2c+1}{n}$, что противоречит аксиоме Архимеда (не существует бесконечно малых отрезков). Значит, $c^2 \geq a$

Предполагаем $c^2 > a$, аналогично рассматриваем $a \geq (c - \frac{1}{n})^2$, что приводится к $a - c^2 \geq -\frac{2c}{n} + \frac{1}{n^2}$, из чего можно заключить, что $a - c^2 \geq -\frac{2c}{n} - \frac{1}{n}$, что приводит к противоречию вида $c^2 - a \leq \frac{2c+1}{n}$.

4 Теорема о вложенных промежутках

Теорема: Если $[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}] \ \forall n \in \mathbb{N}$, то $\exists c \in \mathbb{R} : \ c \in [a_n, b_n] \forall n \in \mathbb{N}$, то есть c принадлежит всем промежуткам.

Доказываем, что A (множество левых границ) левее B (множества правых границ), для этого доказываем, что $a_n < b_k \ \forall n, k \in \mathbb{N}$ для двух случаев ($n < k$ и $k < n$) и пользуемся аксиомой полноты.

Для стягивающихся промежутков требуется доказать, что c будет единственной. По условию верно $\lim\limits_{n \to \infty} (b_n - a_n) = 0$, значит, рассмотрев $c_2 - c_1 = b_n - a_n \ \forall n$ можно прийти к противоречию $c_2 - c_1 = 0$.

5 Границы числовых множеств. Существование точной верхней и нижней границ

.

Определение: c — верхняя/нижняя граница X, если $\forall x \in X$ выполняется $x \leq c / x \geq c$. Наименьшая/наибольшая из верхних/нижних границ называется супремум/инфимум. Множество, имеющее верхнюю/нижнюю границу, называется ограниченным сверху/снизу; имеющее общие границы — вообще ограниченным.

Теорема: если множество ограничено сверху/снизу, то супремум/инфимум существует.

Берем Y — множество верхних/нижних границ x, получаем, что X левее/правее Y, по аксиоме полноты $\exists c$, которое и является супремумом/инфимумом. Не забыть указать, что c является верхней/нижней границей, при этом минимальной/максимальной из таковых.

6 Неравенство Бернулли

Лемма: При $x > -1$ выполняется $\forall n \in \mathbb{N} \quad (1+x)^n > 1 + nx$

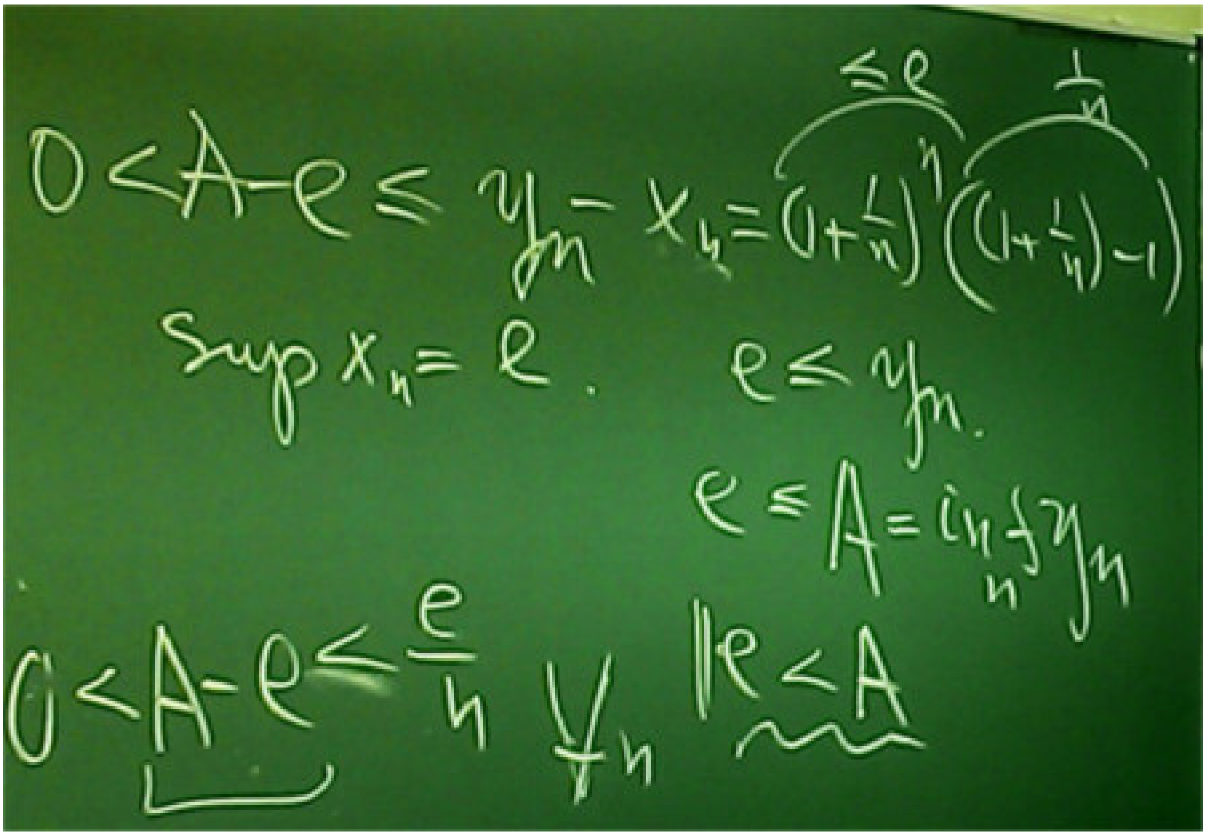
Доказательство по индукции. База при 0. Индукционный переход выдает $1 + nx + x + nx^2$, что всяко больше $1 + (n+1)x$

При рассматривании последовательности $(1 + \frac{1}{n})^n$ сначала рассмотреть

$$\frac{(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}}{(1+\frac{1}{n})^n} = 1 + \frac{1}{(n+1)^3} > 1 \tag{1}$$

а затем

$$\frac{(1+\frac{1}{n})^{n+1}}{(1+\frac{1}{n})^{n+2}} = 1 + \frac{1}{n(n+2)^2} > 1 \tag{2}$$



$y_1 = 4, y_5 = 3 \Rightarrow 2 < x_n < y_n < 3$. $e = \sup x = \inf y$.

7 Отображение и основные понятия

Отображение — математическое понятие, отражающее однозначную парную связь элементов одного множества с элементами другого множества.

Если $x \in X$ сопоставляется по правилу T, то точка $y = T(x)$, при этом каждому x сопоставляется только одна, единственная точка y.

(X, T, Y), где: X — область определения (задания), Y — множество прибытия

Для отображения $f : X \to Y$:

$f(x)$ называется образом точки x на множестве Y.

$f^{-1}(y)$ называется прообразом точки y на множестве X.

Отображение $g : M \subset X \to Y$, принимающее на M те же значения, что и f называется сужением отображения f на множество M.

Композиция отображения - конструкция, которая по двум отображениям позволяет построить новое отображение.

$T : X \to Y$

$S : Y \to Z$

$R(x) = S(T(x))$ где $T(x) \in Y$

обозначение: $R = S \circ T = ST$

$R = S \circ T$ и $R = T \circ S$ не обязательно равны!

Естественная область определения:

Рассмотрим $f : X \to Y$ и $g : Y' \to X$. Для того, чтобы была возможной композиция $h = f \circ g$, требуется, чтобы точка принадлежала множеству $Y \cap Y'$, следовательно, естественная область определения — $X = \{x | f(x) \in Y' \cap Y\}$

Арифметические действия:

f, g определены на X: $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

$g(x) \neq 0 \ \forall x : \frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

Если f определено на X_1, g определено на X_2, то $x_0 = \{x \in X_1 \cap X_2 | g(x) \neq 0\}$

Декартово произведение:

Для множеств X, Y можно рассмотреть множество пар точек (x, y), где $x \in X, y \in Y$

(x, y) и (y, x) - различны.

$\{1, 2\} \to^{\varphi} X \cup Y : \varphi(1) \in X, \varphi(2) \in Y$

Упорядоченная пара: $(\varphi(1), \varphi(2))$ — пара точек, из которой выделена одна точка, которая названа первой.

Множество всех упорядоченных пар точек называется Декартовым произведением множества X, Y и обозначается $X \times Y$

Графиком функции называется $\Gamma_T = \{(x, y) \in X \times Y | x \in DOM\ T, y = T(x)\}$

8 Определение и свойства обратного отображения

$T : X \to Y$, $Y = ImT$

Определение: $S : Y \to X$ называется обратным к T, если $S(T(x)) = x \ \forall x \in X$

Теорема: $T : X \to Y$, T обратимо $\Leftrightarrow T$ — биекция.

Доказываем от противного, берем точки x, x', говорим, что их образы y, y' не равны, потом говорим, что обратные образы тоже не равны, следовательно, обе функции являются сюръекциями. А, так как разные точки переводятся в разные, это инъекции.

Теорема: Обратное отображение единственное.

Доказательство от противного, предполагаем наличие 2 обратных отображения S и S', которые: $S(T(x)) = x$ и $S'(T(x)) = x$, т.е. это одно и то же отображение.

Теорема: Если S обратно к T, то T обратно к S.

Доказываем: $T(S(y)) = y; \ T(S(T(x))) = x$.

9 Биекция

Теорема: Если отображение T — биекция, то существует обратное отображение S, которое также будет биективным.

Говорим, что $S(T(x)) = x$, $T(S(y)) = y$ (два взаимно обратных отображения), затем предполагаем, что это верно и доказываем, что $T(x) = T(S(y)) = y$ — биекция.

10 Монотонная функция

Определение: Функция $f : X \to Y$ называется возрастающей, если $\forall x_1, x_2 \in X, x_1 < x_2$ выполняется $f(x_1) \leq f(x_2)$ или строго возрастающей, если $f(x_1) < f(x_2)$. Функция, которая возрастает или убывает называется монотонной, а та, которая строго возрастает или строго убывает — строго монотонной.

Теорема: Если $f :< a, b >\to \mathbb{R}$ строго монотонна, то $\exists f^{-1}$, которая также строго монотонна.

Говорим, что не умаляя общности функция возрастает. Говорим, что $\exists y, y' \in Y = f(< a, b >), \ y < y'$. Берем $x = f^{-1}(y), x' = f^{-1}(y')$. Потом говорим, что для того, чтобы условие теоремы выполнялось, нужно, чтобы $x > x' \Rightarrow f(x) > f(x')$ Предполагаем обратное, говорим, что $f(x) = f(f^{-1}(y)) = y$ и так же для штриха. Получается, что $y > y'$, что противоречит начальному условию. Теорема доказана.

11 Определение и основные свойства степени с натуральным показателем, корня и степени с рациональным показателем

$f(x) = x^n$ — степень с натуральным показателем.

Свойства:

1) $x^{n+m} = x^n x^m$. Доказывается по индукции.

2) $x^{mn} = x^{m^n}$. Доказывается представлением m^n как $m \cdot ... \cdot m$ n раз.

3) $(xy)^n = x^n \cdot y^n$. Доказывается представлением n раз.

4) $x < y \Rightarrow x^n < y^n$. Доказывается по индукции, умножением первого неравенства на x^n а второго на y^n. Получаем $x^{n+1} < yx^n < y^{n+1}$.

Корень n степени

Обратная к предыдущей функции.

$\sqrt[mn]{x^m p} = \sqrt[n]{x^p}$.

$f(x) = x^q = \sqrt[n]{m}$, если $r = \frac{m}{n}$.

Свойства:

1) Если $r < s$, то $x^r < x^s$. Доказывается представлением $r = \frac{m}{p}, s = \frac{n}{p} \Rightarrow m < n \Rightarrow \sqrt[p]{x^m} < \sqrt[p]{x^n}$.

2) $x^{\frac{1}{n}} < 1 + \frac{x}{n}$. Доказывается через представление x в качестве левой часть неравенства Бернулли: $t < \frac{x-1}{n} < \frac{x}{n}$, откуда $x^{\frac{1}{n}} = 1 + t < 1 + \frac{x}{n}$.

Степень с произвольным показателем:

Определение: $x > 1, a, x \in \mathbb{R}$.

$a^x = \sup\{a^r | r \in \mathbb{Q}, r < x\}$

Доказывается через обозначение данного супремума за A и представление $r = x - \frac{1}{n}$. Допускаем, что $A < a^x$, тогда $a^{x-\frac{1}{n}} \leq A < a^x$, разделим на a^x, получим $1 - \frac{a}{n} < a^{-\frac{1}{n}} \leq \frac{A}{a^x} < 1 \Rightarrow 0 < 1 - \frac{A}{a^x} < \frac{a}{n} \forall n$, что противоречит аксиоме Архимеда.

Функциональное уравнение для a^x:

Теорема:

$f(x + y) = f(x)f(y)\ \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Доказательство через изоморфизм $x \to f(x) = a^x$ и предположение $x+y=z$. Берем $r < x, s < y, t = r+s < z$, по ранее доказанному $a^r \cdot a^s = a^{rs} < a^z$. В таком случае $a^r a^s < a^z \Rightarrow a^r a^y \le a^z$ и $a^x a^s \le a^z \Rightarrow a^x a^y = a^z$, что и доказывает теорему.

12 Окрестности. Точка сгущения

Определение: Окрестность точки — любой интервал, содержащий данную точку.

Свойства:

1) Отделимость: если a и b — различные точки, то они имеют непересекающиеся окрестности.

2) Пересечение двух окрестностей — снова окрестность.

3) Симметричная окрестность: $V_\delta(a)$.

4) $x \in V_\delta(a) \Rightarrow |x-a| < \delta$.

5) Всякая окрестность содержит в себе дельта-окрестность.

Определение: a — предельная точка (точка сгущения), если $\forall V(a) \exists x \in \mathbb{R}$ со свойствами:

1) $x \in \dot{V}(a)$ и

2) $X \cap \dot{V}(a) \neq \varnothing$.

13 Предел функции

$X \subset \mathbb{R}, a$ — точка сгущения X, $f : X \to Y$.

Определение: L — предел f в точку a, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : |x-a| < \delta$ верно $|f(x) - L| < \varepsilon$.

На языке окрестностей: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x \in \dot{V_\delta} \cap X$ верно $f(x) \in U_\varepsilon(L)$.

Предел сужения: $X_0 \subset X$, a— точка сгущения X_0. $f_0 = f|_{X_0}$. Если $f \to L$, то и $f_0 \to L$.

14 Теорема о стабилизации знака

Теорема: $X \subset \mathbb{R}, a$ — точка сгущения, $f : X \to \mathbb{R}$, $f(x) \to L$.

Если $A < L$, то $\exists \delta > 0 : \forall x \in \dot{V}_\delta(a) \Rightarrow f(x) > A$.

Если $A > L$, то $\exists \delta > 0 : \forall x \in \dot{V}_\delta(a) \Rightarrow f(x) < A$.

Доказательство: берем $\varepsilon = L - A$. Раскрываем по определению, получаем $L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$. Берем левое неравенство, раскрываем эпсилон, берем правое, раскрываем эпсилон, пишем чтд.

Следствие: существует окрестность, где функция имеет тот же знак, что и предел.

$L > 0 \Rightarrow \exists V(a) : \forall x \in \dot{V}(a) \cap X f(x) > 0.$

$L < 0 \Rightarrow \exists V(a) : \forall x \in \dot{V}(a) \cap X f(x) < 0.$

Следствие: функция локально ограничена.

15 Теорема о единственности предела

Теорема: $X \subset \mathbb{R}$, a — точка сгущения, $f : X \to \mathbb{R}$.

Если $f(x) \to L_1$ и $f(x) \to L_2$, то $L_1 = L_2$.

Доказательство от противного. Говорим, что $L_1 \neq L_2$. Для определенности $L_1 < L_2$. Тогда $L_1 < A < L_2$. По теореме о стабилизации знака $\exists \delta_1 > 0 : \forall x \in \dot{V}_{\delta_1}(a) \cap X : f(x) > A$ и $\exists \delta_2 > 0 : \forall x \in \dot{V}_{\delta_2}(a) \cap X : f(x) < A$. НУО $\delta_1 < \delta_2$, берем $W = \dot{V}_{\delta_1} \cap \dot{V}_{\delta_2} \cap X$ и тогда $\forall x \in W$ верно $A < f(x) < A$. Противоречие как бы.

16 Теорема о предельном переходе в неравенстве

Теорема: $X \subset \mathbb{R}$, a — точка сгущения, $f, g : X \to \mathbb{R}$.

Если $f(x) \to A$, $g(x) \to B$ и $f(x) < g(x)$, то $A < B$.

Доказательство от противного. Предполагаем, что $A > B$. Тогда $A > C > B$. По теореме стабилизации знака опять существует дофигища окрестностей (смотри теорему выше). Суть в том, что опять имеется окрестность W, такая, что там выполняется $f(x) > C$ и $g(x) < C$, т.е. $g(x) < C < f(x)$, что противоречит условию.

17 Теорема о сжатой переменной

Теорема: $X \subset \mathbb{R}$, $f, g, h : X \to \mathbb{R}, a$ — точка сгущения.

Если $f \to L$ и $h \to L$ и $f(x) \leq g(x) \leq h(x)\ \forall x \in X$, то $g(x) \to L$.

Доказательство: раскрываем предел по определению для $f(x)$, берем минимум. Раскрываем предел по определению для того же ε для $h(x)$, берем максимум. Берем окрестность W, являющуюся пересечением окрестностей для пределов. Теперь можно выбросить из неравенства $f(x)$ и $h(x)$ и оставить $L - \varepsilon < g(x) < L + \varepsilon$ и получится то, что L — предел для g.

18 Бесконечно малые. Характеристика предела с помощью бесконечно малых

$X \subset \mathbb{R}$, a — точка сгущения, $f : X \to \mathbb{R}$.

$\alpha(x)$ — бесконечно малая, если $\alpha(x) \to_{x\to a} 0$.

Теорема:

$f(x) \to_{x\to a} L \Rightarrow \alpha(x) = f(x) - L \Leftrightarrow f(x) = L + \alpha(x)$.

Доказательство: пусть L — предел. Расписываем его по определению, заменяем $|f(x) - L| = \alpha(x)$. $\alpha(x) < \varepsilon \Leftrightarrow |\alpha(x) - 0| < \varepsilon$, следовательно, 0 — предел $\alpha(x)$. Делаем все то же самое в обратную сторону, получаем, что L — предел. Всё.

19 Свойства бесконечно малых. Локальная ограниченность

1) $|\alpha(x)|, -\alpha(x)$ — все б.м.

2) Если $|\beta(x)| < |\alpha(x)|$, то $-|\alpha| < |\beta| < |\alpha|$.

3) Если $\alpha(x), \beta(x)$ — б.м., то $\alpha(x) + \beta(x)$ — б.м.

Доказательство: расписываем бесконечно малые по определению, каждая из них меньше эпсилон, их сумма меньше 2ε.

4) Если $\alpha(x)$ — б.м., $\beta(x)$ — лок. огран., то их произведение б.м.

Доказательство: $|\beta(x)| < C$, фиксируем произвольный эпсилон, расписываем $\alpha(x)$ по определению, только $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{C}$. Перемножаем, получается, что их произведение меньше, чем $\varepsilon' \cdot C$, что равно $C \cdot \frac{\varepsilon}{C} = \varepsilon$.

Лемма: $|f(x)| \to L$, тогда $f(x)$ локально ограничена в a.

Доказательство: $|f(x)| \to |L| < |L + 1|$, по теореме о стабилизации знака $|f(x)| < |L + 1|$.

20 Теорема о пределе суммы и произведения

$X \subset \mathbb{R}$, a — точка сгущения, $f, g : X \to \mathbb{R}$, $f \to_{x\to a} A$, $g \to_{x\to a} B$.

Теорема:

$f(x) + g(x) \to_{x\to a} A + B$

$f(x)g(x) \to_{x\to a} AB$

Доказательство: расписываем функции как «предел плюс бесконечно малое», выполняем действия, все члены с бесконечно малыми уходят, сумма/произведение пределов остаются.

21 Теорема о пределе частного

$X \subset \mathbb{R}$, a — точка сгущения, $f, g : X \to \mathbb{R}$, $f \to_{x\to a} A$, $g \to_{x\to a} B \neq 0$, $g(x) \neq 0 \forall x \in X$.

Лемма: $X_0 = \{x \in X | g(x) \neq 0\}$. Если $g \to_{x\to a} B \neq 0$, то 1)a — точка сгущения X_0 и 2) $\frac{1}{g}$ локально ограничена в точке a.

Доказательство (1): Пусть $B > 0$, по теореме о стабилизации знака существует окрестность, где $g(x) > 0$. Пересечение этой окрестности с X является подмножеством X_0. Берем произвольную окрестность $V(a)$, которая содержит первую окрестность, берем их пересечение. Оно не пусто, значит, a — точка сгущения.

Доказательство (2): Существует окрестность a, на которой g ограничено: $g(x) < B$. Берем $\frac{B}{2}$ и окрестность, в которой по теореме о стабилизации знака верно $g(x) > \frac{B}{2}$. $g(x) > \frac{B}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{g(x)} < \frac{2}{B}$.

Теорема:
$\frac{f(x)}{g(x)} \to_{x\to a} \frac{A}{B}$.

Доказательство: раскрываем функции как предел+бесконечно малое, вычитаем частное пределов, получаем длинную строку, в которой 2 элемента б.м., один - константа и один - локально ограничен. Результат - $\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{A}{B}$ стремится к нулю, следовательно, частное функций стремится к $\frac{A}{B}$.

22 Односторонние пределы. Теорема о связи односторонних и двусторонних пределов

$X \subset \mathbb{R}$, a — точка сгущения.

Теорема: Двусторонний предел существует, если существуют пределы справа и слева и они равны.

Доказательство: пусть существует двусторонний предел. Тогда существуют пределы справа и слева (рассматриваем сужения на X^+ и X^-). Затем делаем обратное: фиксируем эпсилон, говорим, что существуют пределы справа и слева (на $a < x < a + \delta_+$ и $a - \delta_- < x < a$). Берем $\delta = \min(\delta_-, \delta_+)$ и рассматриваем дельта-окрестность точки a. В нем выполняются оба условия, они влекут $|f(x) - L| < \varepsilon$.

23 Расширенная числовая прямая, конечный предел

Если $\forall r \in \mathbb{R} r > \omega$, $\omega \in \mathbb{R}$, то $\omega = -\infty$
Если $\forall r \in \mathbb{R} r < \omega$, $\omega \in \mathbb{R}$, то $\omega = +\infty$
Формулировка предела:
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists C: \ \forall x > C$ верно $|f(x) - L| < \varepsilon$.
На языке окрестностей:
$\forall U(L) \ \exists V(\pm\infty): \forall x \in \dot{V}(\pm\infty) \cap X$ верно $f(x) \in U(L)$.

24 Бесконечные пределы

$X \subset \mathbb{R}$, a — точка сгущения, $a \in \mathbb{R}$, $f: X \to \mathbb{R}$.
Предел:
$\forall C > 0 \exists \delta > 0: \ \forall x \in \dot{V}_\delta(a) \cap X$ верно $f(x) > C$.
На языке окрестностей:
$\forall U(\pm\infty) \exists V(a): \forall x \in \dot{V}(a) \cap X$ верно $f(x) \in U(\pm\infty)$.
Для $x \to \pm\infty$:
$\forall C > 0 \exists C' > 0: \ \forall x > C'$ верно $f(x) > C$.
На языке окрестностей:
$\forall U(\pm\infty) \exists V(\pm\infty): \ \forall x \in V(\pm\infty)$ верно $f(x) \in U(\pm\infty)$.

25 Бесконечно большие. Связь б.б. и б.м.

Определение: f — бесконечно большая, если $|f(x)| \to_{x \to a} +\infty$.
Свойства:
1) Если f — б.б., то $\frac{1}{f}$ — б.м.
Доказывается расписыванием предела по определению, задавая, что $|f(x)| > 1$, затем мы берем $C = \frac{1}{\varepsilon}$, снова расписываем по определению и берем пересечение окрестностей. Получается, что в нём $|f(x)| > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow |\frac{1}{f(x)}| < \varepsilon$.
2) Если f — б.м., то $\frac{1}{f}$ — б.б.
Доказывается расписыванием предела по определению, задавая, что $|f(x)| < 1$. В дальнейшем аналогично предыдущему.
3) f — б.б., g — лок. огран., то $f + g$ — б.б.
Расписываем g по определению: $|g(x)| \leq M$. Фиксируем $C > 0$, $C' = M + C$. Расписав по определению $f(x)$ получаем $|f(x)| > C'$. Берем пересечение окрестностей, тогда выполняется $|g(x)| < M, \ |f(x)| > C'$. Тогда

$|f(x)+g(x)| > |f(x)| - |g(x)| > M + C - M$, то есть $|g(x)+f(x)| > C$, то есть сумма — б.б.

26 Теорема о сумме и произведении функций, имеющих бесконечные пределы

27 Определение арифметических действий в $\hat{\mathbb{R}}$. Общая теорема об арифметических действиях

$X \subset \mathbb{R}$, a — точка сгущения, $a \in \mathbb{R}$, $f, g : X \to \mathbb{R}$.
Теорема:
1) $\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x)$.
2) $\lim\limits_{x\to a}[f(x)g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$
3) $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$
Доказывается расписыванием предела через бесконечно малые.
Неопределенности:
1) $\infty - \infty$;
2) $0 \cdot \infty$;
3) $\frac{\infty}{\infty}$
4) $\frac{0}{0}$;
5) 1^∞;
6) 0^0;
7) ∞^0.

28 Сравнение б.б. и б.м.

$X \subset \mathbb{R}$, f, g — б.б./б.м. при $x \to a$.
Определение: $f \sim g$, если $\exists h \to 1 \ : \ f = gh$;
$f = o(g)$, если $\exists h \to 0 \ : \ f = gh$;
$f = O(g)$, если $|\frac{f}{g}| \le M$.
Теорема: Пусть $f \sim f^*, \ g \sim g^*$
1) Если $\frac{f(x)}{g(x)} \to L$, то $\frac{f^*(x)}{g^*(x)} \to L$.

Доказательство: вводим $\varphi(x), \psi(x) \to 1$. Расписываем с их помощью f, g через f^*, g^*, отделяем фи и пси от частного $\frac{f^*(x)}{g^*(x)}$, их предел стремится к нулю, следовательно, наше частное стремится к L.

2) $f(x)g(x) \sim f^*(x)g^*(x)$

Доказательство: точно так же расписываем через фи и пси и устремляем их произведение к 1.

3) Если $h(x) \to L$, то $h(x)f(x) \sim Lf^*(x)$.

Доказательство: расписываем $f(x) = f^*(x)\varphi(x)$ и все устремляем к пределам.

Теорема: f, g — б.б./б.м., тогда

1) $f \sim g$;

2) $f - g = o(g)$;

3) $f - g = o(f)$.

Доказательство:

Доказываем $1 \Rightarrow 2$: расписываем $f(x) = \varphi(x)g(x)$, подставляем, устремляем $\varphi(x) \to 1$, получаем $g(x) \cdot 0 = o(g(x))$.

Доказываем $2 \Rightarrow 1$: расписываем $f(x) - g(x) = \alpha(x)g(x)$ при $\alpha(x) \to 0$, переносим вправо $g(x)$, считаем, все в шоколаде.

Доказываем $1 \Rightarrow 3$: аналогично первому, но расписываем $g(x)$.

Доказываем $3 \Rightarrow 1$: аналогично второму, но переносим $f(x)$.

29 Вычисление предела $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^n}{a^x}$

Доказательство через неравенство Бернулли ($(1+c)^n > 1 + nc$) :

Пусть $m = 1 + c, c > 0,\ t > 0, m^t$.

Оценим снизу $m^t : n = [t] \leq t < [t] + 1$

$t - 1 < [t]$.

тогда $m^t \geq \underbrace{m^{[t]} > 1 + c[t] > c(t-1)}_{\text{смотри строчку выше}}$

Это во всяком случае верно, когда $t > 1$, да и в обратном случае тоже.

Теперь оценим a^x:

$a^x = a^{\frac{x}{2}} \cdot a^{\frac{x}{2}} = (a^{\frac{x}{2}})^2 > (c(\frac{x}{2} - 1))^2$ при $x > 2$ (по выведенной выше формуле).

$\frac{x}{a^x} < \frac{x}{(c(\frac{x}{2}-1))^2} \to_{x\to+\infty} 0$

Мы доказали нашу теорему при $t > 1$. А теперь общий случай:

Положим $b = a^{\frac{1}{n}} > 1$

$\frac{x^n}{a^x} < (\frac{x}{a^{\frac{x}{n}}})^n = (\frac{x}{b^x})^n \to_{x\to+\infty} 0$

30 Точная верхняя и точная нижняя граница функции

.

Определение: $X \subset \mathbb{R},\ C$ — верхняя граница **множества**, если $\forall x \in X$ верно $x \leq C$.

Определение: $L \in \mathbb{R}$, $L = \sup f(x)$, если:

1) $\forall x \in X : f(x) \leq L$ и

2) $\forall C \in \mathbb{R} < L \exists x_0$ т.ч. $f(x_0) > C$.

Для бесконечности: $\sup f(x) = +\infty$, если $\forall C \in \mathbb{R} \exists x_0 \in X$ т.ч. $f(x_0) > C$.

Определение: Монотонная функция — функция, возрастающая или убывающая на X.

Теорема о пределе возрастающей функции:

$X \subset \mathbb{R}$, a — точка сгущения, $a \in \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ — возрастающая.

$a = \inf X,\ b = \sup X$.

Если:

1) b —т. сг. X, $L = \sup f(x)$, тогда $\exists \lim\limits_{x\to b} f(x) = L$.

2) a —т. сг. X, $L = \inf f(x)$, тогда $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) = L$.

Доказываем: фиксируем эпсилон, говорим, что $L - \varepsilon$ — не верхняя граница, тогда $\exists x_0 : f(x_0) > L - \varepsilon$. Рассматриваем $\delta = b - x_0 > 0$. Тогда для любого x из $\dot{V}_\delta(b) \cap X$ выполняется $x_0 < x < b \Rightarrow f(x_0) < f(x) < f(b) \Rightarrow L - \varepsilon < f(x_0) < f(x) < L < L + \varepsilon \Leftrightarrow L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon \Rightarrow L$ — предел.

Для $f(x) \to \pm\infty$:

Доказываем: фиксируем $C > 0$, тогда $\exists x_0 = b - \delta$, т.ч. $f(x_0) > C$. Берем $x \in \dot{V}_\delta(b)$, тогда $x_0 < x < b \Rightarrow C < f(x_0) < f(x)$.

31 Предел числовой последовательности. Ограниченность сходящейся подпоследовательности. Предел монотонной последовательности

Определение: Предел последовательности: $\forall U(L)\ \exists V(+\infty) : n \in \mathbb{N} \Rightarrow x_n \in U(L)$.

Определение: Сходящаяся подпоследовательность — подпоследовательность, имеющая предел.

Теорема: сходящаяся подпоследовательность ограничена.

Доказываем: устремляем последовательность к L. Фиксируем $\varepsilon = 1$. Тогда $\exists N > 0 : \forall n > N$ верно $|x_n - L| < 1$. Тогда $|x_n - L + L| \leq |x_n - L| + L \Rightarrow x_n < |L| + 1 = C$. Теперь положим $C' = \max(x_1, ..., x_N)$. И возьмем $C'' = C + C'$. Тогда $|x_n| < C''\ \forall n$

Теорема о пределе монотонной последовательности: предел монотонной последовательности конечен, следовательно, она ограничена

Доказательство проще пареной репы: по предыдущей теореме $\exists C : |x_n| \leq C \Leftrightarrow -C \leq x_n \leq C$, что как бы намекает.

32 Теорема о пределе подпоследовательности

Теорема: Если $\{x_n\} \to L \in \mathbb{R}$, то $\{y_k\} \to L$

Доказательство: замечаем, что всегда $k < n_k$. Тогда $\forall U(L) \exists N : \forall n > N$ верно $x_n \in U(L)$. Берем $k > N \Rightarrow n_k > k > N \Rightarrow x_{n_k} \in U(L) \Rightarrow y_k \in U(L)$.

33 Принцип Больцано-Вейерштрасса

Теорема: У всякой ограниченной последовательности есть сходящаяся подпоследовательность.

Доказываем рекурсивно разбивая отрезок пополам, в одной из половинок — элементы последовательности с бесконечными номерами. Потом берем любые x_1, x_2 из $[a_1, b_1], [a_2, b_2]$ и строим подпоследовательность. Так как у всех этих промежутков есть общая точка C (по теореме о стягивающихся промежутках), то она и будет пределом, так как $a_k \to C$ и $b_k \to C$ (теорема о двух милиционерах).

34 Фундаментальные подпоследовательности

Определение: Фундаментальная подпоследовательность — подпоследовательность, для которой выполняется: $\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n, m > N$ верно $|x_m - x_n| < \varepsilon$.

Лемма: Сходящаяся последовательность фундаментальна.

Доказательство: Фиксируем $\varepsilon > 0$, расписываем предел последовательности для $\frac{\varepsilon}{2}$. Берем произвольные k, l, они также стремятся к L по теореме о пределе подпоследовательности. Расписываем $|x_k - x_l|$, получаем, что оно меньше эпсилон. Не расслабляемся, переходим к следующей лемме.

Лемма: Фундаментальная последовательность ограничена.

Доказательство через фиксацию $\varepsilon = 1$ и расписывание $|x_m - x_n| < \varepsilon$. Тогда $|x_n| = |x_n - x_m + x_m| < |x_n - x_m| + |x_m| < |x_m| + 1 = C'$. $C'' = \max|x_k|\ \forall k \in [1, N]$. $C = C' + C''$. Аналогично доказательству о ограниченности сходящейся последовательности.

Теорема: Последовательность сходится тогда и только тогда, когда она фундаментальна.

Доказательство: Последовательность фундаментальна, значит, ограничена, значит, существует подпоследовательность, стремящаяся к пределу. Докажем, что этот предел будет пределом всей последовательности. Зафиксируем эпсилон, скажем, что $|x_n - x_m| < \varepsilon \Rightarrow |x_n - x_{n_k}| < \varepsilon\ \forall n, k > N$, если $n_k \geq k$. Тогда $|x_n - L| \leq \varepsilon < 2\varepsilon$. Выдыхаем.

35 Характеристика точки сгущения на языке последовательностей

Лемма: a —точка сг. $X \iff \exists\{x_n\}$ со свойствами:

1) $x_n \in X\ \forall n$;

2) $x_n \to a$;

3) $x_n \neq a\ \forall N$.

Доказательство: необходимость. Опираясь на то, что a — точка сгущения, говорим, что $\forall V(a) V(a) \cap X \neq \varnothing$. Если $a = +\infty$, то $\delta = \frac{1}{n}$, откуда $\exists x_n \in \dot{V}_\delta(a) \cap X$, такая, что $x_n \in X, |x_n - a| < \frac{1}{n} \to 0 \Rightarrow a$ — предел.

Доказательство: достаточность. Так как $x_n \to a$, то ввиду условий 1 и 3 $x_n \in \dot{V}(a) \cap X$, следовательно, любая окрестность точки a не пуста.

36 Теорема о характеристике предела функции на языке последовательностей (необходимость)

Теорема: $X \subset \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ —точка сг., $f : X \to \mathbb{R}$.

$\forall \{x_n\}$ со свойствами

1) $x_n \in X\ \forall n$;

2) $x_n \to a$;

3) $x_n \neq a\ \forall N$.

верно, что $f(x_n) \to L$.

Доказательство: берем последовательность, фиксируем $V(L)$. По определению предела функции $\exists U(a) : \forall x \in \dot{U}(a) \cap X$ верно $f(x) \in V(L)$. Теперь предоставим последовательность, которая будет удовлетворять этому: т.к. $x_n \to a$, то $\exists N : \forall n > N$ верно $x_n \in U(a)$. По свойствам 1 и 3 $x_n \in \dot{U}(a) \cap X$. Следовательно, $f(x_n) \in V(L)$.

37 Теорема о характеристике предела функции на языке последовательностей (достаточность)

Теорема: $X \subset \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ —точка сг., $f : X \to \mathbb{R}$.
$\forall\{x_n\}$ со свойствами
1) $x_n \in X\ \forall n$;
2) $x_n \to a$;
3) $x_n \neq a\ \forall N$.
верно, что $f(x_n) \to L$.

Доказательство: не паникуем. Фиксируем эпсилон. Разбиваем множество на 2 части: $A = \{x \in X|\ |f(x) - L| < \varepsilon\}$ и $B = \{x \in X|\ |f(x) - L| \geq \varepsilon\}$. Доказываем, что a — не точка сгущения B. От противного, тогда верно, что существует последовательность, удовлетворяющая свойствам 1, 2, 3, где X — это B. Тогда верно, что $0 < \varepsilon \leq |f(x) - L| \to 0$. Противоречие, значит, a — точка сгущения A.

Дальше легче: $\exists U(a) : \forall x \in U(a) \cap X$ верно $x \in A$, отсюда, по определению A, $|f(x_n) - L| < \varepsilon$, следовательно, L — предел.

Если $L = \pm\infty$, то доказываем, что $f(x) > C$. Фиксируем его и разбиваем на $A = \{x \in X|\ f(x) > C\}$ и $B = \{x \in X|\ f(x) \leq C\}$.

38 Непрерывность функции в точке. Переформулировка на языке неравенств и последовательностей

$X \subset \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ —точка сг., $f : X \to \mathbb{R}$.

Определение: Функция непрерывна в точке a, если a — т. сг. X и $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$. (Особый случай - когда a изолированная точка).

На языке неравенств: $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |x - a| < \delta$, верно $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

На языке последовательностей: $\forall\{x_n\}$ со свойствами $x_n \in X$, $x_n \to a$, $x_n \neq a\ \forall n$ верно, что $f(x_n) \to f(a)$. Причем третье условие можно убрать, так как $|f(x_n)-f(a)|<\varepsilon,\ f(x_n)=f(a)\Rightarrow|f(x_n)-f(a)|=0<\varepsilon$.

39 Односторонняя непрерывность. Классификация точек разрыва

Определение: $X\subset\mathbb{R}$, $a\in\mathbb{R}$ —точка сг., $f:X\to\mathbb{R}$, f — не непрерывна в a, то a — точка разрыва.

При этом, если $\lim\limits_{x\to a-}f(x)=f(a)$, то $f(x)$ непрерывна слева, если $\lim\limits_{x\to a+}f(x)=f(a)$, то $f(x)$ непрерывна справа.

Определение: Точка разрыва первого рода — точка, в которой существуют конечные пределы справа и слева, но они не равны. В противном случае точка — точка разрыва второго рода.

40 Непрерывность суммы, произведения и частного. Непрерывность сужения

Теорема: $x\subset\mathbb{R},\ f,g:X\to\mathbb{R}$, непрерывны в точке a (точка сгущения).

Тогда $f\pm g,\ fg$ непрерывны в a, если $g(a)\neq0$, то $\frac{f}{g}$ непрерывны в a.

Доказательство: Расписываем непрерывность как $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$, $\lim\limits_{x\to a}g(x)=g(a)$. Расписываем $\lim[f(x)+g(x)],\lim f(x)g(x),\lim\frac{f(x)}{g(x)}$, получаем, что они равны, соответственно, $(f+g)(a),(fg)(a),(\frac{f}{g})(a)$, то есть они непрерывны.

Так как предел сужения равен пределу функции, то если функция непрерывна на X, то она непрерывна и на $f|_{X_0}$

41 Теорема о стабилизации знака для непрерывной функции

$X\subset\mathbb{R},a\in X,f:X\to\mathbb{R}$.

Теорема: если $f(a)>C$ $(f(a)<C)$ и f — непрерывна в a, то $\exists V(a):$ $\forall x\in\dot{V}(a)\cap X$ верно $f(x)>C$ $(f(x)<C)$

Доказательство: $f(a)=\lim\limits_{x\to a}f(x)>C$. Тогда по старой теореме о стабилизации знака $\exists V(a):\forall x\in\dot{V}(a)\cap X$ верно $f(x)>C$.

42 Непрерывность суперпозиции непрерывных функций

$f : X \to \mathbb{R},\ a$ — точка сгущения.
$g : Y \to \mathbb{R},\ f(a) = b$ — точка сгущения.
$h(x) = g(f(x))$

Теорема: если обе функции непрерывны в данной точке, то их композиция также непрерывна.

Доказательство: Определяем предел на языке последовательностей по 3 условиям. Затем говорим, что y удовлетворяет 1 и 2. По условию g в точке b непрерывна. Теперь мы можем сказать, что $g(y_n) = g(f(x_n)) = h(x_n)$ и $g(b) = g(f(a)) = h(a)$. Тогда $h(x_n) \to h(a)$, следовательно, h непрерывна в a.

43 Теорема о пределе суперпозиции

$f : X \to \mathbb{R}$
$g : Y \to \mathbb{R}$
$h(x) = g(f(x)), x \in X.$

Теорема: Если
1) $g(x)$ непрерывна в b или
2) f — строго монотонна, то
$h(x) \to L.$

Доказательство:

1) Очевидно из теоремы о непрерывности композиции (если $g(x)$ непрерывна в b, то $h \to h(a) = L$).

2) Пусть f строго возрастает и $x < a$. Тогда $\exists x' :\ x < x' \leq a$. В силу строгого возрастания $f(x) < f(x') < b = \sup f(x)$. Переходим на язык последовательностей, опять три условия, $y_n = f(x_n)$. последовательность y_n удовлетворяет всем трем условиям, у нее есть предел, следовательно, $g(y_n) \to L \Rightarrow g(y_n) = g(f(x_n)) = h(x_n) \to L$.

44 Теорема Больцано-Коши о нуле

Теорема: $f : [a, b] \to \mathbb{R}, f$ — непрерывна. Если $f(a) \cdot f(b) < 0$, то $\exists c : f(c) = 0$.

Доказательство: делим промежутки пополам, причем берем такие, где края промежутков разных знаков. Получаем последовательность промежутков, края которых с разных сторон стремятся к нулю и общую точку для них, которая и будет нулём. Радостные идём к Макарову.

45 Теорема Больцано-Коши о промежуточном значении

Теорема: $f : [a, b] \to \mathbb{R}, f$ — непрерывна. Если $C \in [f(a), f(b)]$, то $\exists c : f(c) = C$.

Доказательство: введем вспомогательную функцию $g(x) = f(x) - C$. Тогда $g(a)g(b) < 0$, применяем первую теорему о нуле, $\exists c : g(c) = 0$. «Развернем» функцию обратно.

Следствие: Если f непрерывна на промежутке Δ, то $\Delta' = f(\Delta)$ — тоже промежуток.

Доказательство: требуется доказать, что $(p, q) \subset \Delta'$. Берем $p = \inf f(x)$, $q = \sup f(x)$. Возьмем $p < C < q$. Т.к. C не нижняя граница, то $\exists x_1 \in \Delta$ такая, что $f(x_1) < C$. Аналогично $\exists x_2 \in \Delta$, такая, что $f(x_2) > C$. Рассматриваем промежуток $[x_1, x_2] \in \Delta$. $f(x_1) < C < f(x_2)$, то по теореме о промежуточном значении $\exists c \in \Delta : f(c) = C$. Значит, $(p, q) \in \Delta'$.

46 Первая теорема Вейерштрасса

Теорема: Если f определена и непрерывна на $[a, b]$, то она ограничена.

Доказательство от противного: $f(x)$ не ограничена, тогда $\forall C\ \exists x \in [a, b]$, такая, что $|f(c)| > C$. Последовательность на компакте, следовательно, она ограничена, причем для $n = c$ выполняется $|f(x_n)| > n$ Вычленим подпоследовательность $x_{n_k} \to x_0 \in [a, b]$. По условию f непрерывна в x_0, следовательно, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x_{n_k}) = f(x_0)$, а $|f(x_{n_k})| > n_k > k \to \infty$. Противоречие.

47 Вторая теорема Вейерштрасса

Теорема: f определена и непрерывна на $[a, b]$. Тогда $\exists x_1, x_2 \in [a, b]$, такие, что $\forall x \in [a, b]$ выполняется $f(x_1) < f(x) < f(x_2)$.

Доказываем для наибольшего значения. От противного. Пусть наибольшего значения нет. Тогда есть $\sup f(x) = M$. Положим $g(x) = \frac{1}{M - f(x)}$. Знаменатель не равен нулю $\Rightarrow$ функция непрерывна на всем $[a, b]$. По первой теореме Вейерштрасса, $g(x)$ ограничено, значит, $\exists C : g(x) < C\ \forall x \in$

$[a,b] \Rightarrow \frac{1}{M-f(x)} < C \Leftrightarrow \frac{1}{C} < M - f(x) \Leftrightarrow f(x) < M - \frac{1}{C}$. Приходим к противоречию, потому что $M \neq \sup f(x)$.

48 Теорема о непрерывности монотонной функции

Теорема: $f :< a,b > \to \mathbb{R}$, f — монотонна. Если $f(< a,b >) =< p,q >$, то f непрерывна.

Доказательство: предполагаем, что f возрастает. $\exists c \in < a,b >$ т.ч. $a < c \leq b$, $f(c) = D$. $\forall x < c$ верно $f(x) \leq f(c)$. Предположим, что $\lim\limits_{x \to c-} f(x) = A < f(c)$. Теперь говорим, что тогда $\forall x < c : f(x) < A$ и $\forall x > c : f(x) \geq A$. Теперь фиксируем $C : A < C < f(c)$. Тогда $a < x_1 < c < x_2 < b$. $f(x_1) \in < p,q >$, $f(x_2) \in < p,q > \Rightarrow C \in < p,q >$. Для $x < c \;\; f(x) \leq A < C$, для $x \geq c \;\; f(x) \geq D > C$, то есть $f(c) \neq C$, так как отрезок непрерывен.

49 Теорема о непрерывности обратной функции

Теорема: если f строго монотонна и непрерывна, то $g = f^{-1}$ тоже будет непрерывной.

Доказательство: $f(< a,b >) =< p,q >$ по следствию из теоремы Больцано-Коши, $f^{-1}(< p,q >) =< a,b >$, так как f — биекция. g — монотонна, задана на промежутке, следовательно, непрерывна.

50 Непрерывность основных элементарных функций

1) Степень с рациональным показателем - как композицию непрерывных функций.

2) Показательную функцию:

$a > 1$: $\forall \varepsilon > 0 \; \exists n \in \mathbb{N}$ такое, что $\frac{a}{n} < \varepsilon$.

Пусть $\delta = \frac{1}{n} > 0$. Возьмем $0 < x \leq \frac{1}{n}$. Воспользуемся леммой: $a^{\frac{1}{n}} < 1 + \frac{a}{n}$.

$a > 1 \Rightarrow a^x$ монотонно возрастает $\Rightarrow a^x < a^{\frac{1}{n}} < 1 + \frac{a}{n} = 1 + \varepsilon$

$a^x = f(x) < 1 + \varepsilon = f(0) + \varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(0)| < \varepsilon$. Непрерывность в 0 доказана.

Общий случай: $x = (x - x_0) + x_0$. Тогда $|a^x - a^{x_0}| = |a^{x_0}(a^{x-x_0} - 1)|$, $a > 0 \Rightarrow a^{x_0} > 0$, значит, от модуля можно избавиться: $a^{x_0}|a^{x-x_0} - 1|$. При $x \to x_0$ $|x - x_0| \to 0$, отсюда $a^{x-x_0} \to 1$, значит, $a^{x_0}(a^{x-x_0} - 1) \to 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Доказано.

3) Логарифм: если получится, настаивайте на том, что логарифм биективен, следовательно, если его обратная функция непрерывна, то он сам непрерывен. А его обратную функцию мы уже рассмотрели :)

Ну а для тех, кому не повезло: $\forall \varepsilon > 0 \exists U(x_0)$ такая, что $\forall x \in \dot{U}(x_0)$ верно $|\log_a x - \log_a x_0| < \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon < \log_a \frac{x}{x_0} < \varepsilon \Rightarrow x_0 a^{-\varepsilon} < x < x_0 a^{\varepsilon}$. Таким образом, $U =< x_0 a^{-\varepsilon}, x_0 a^{\varepsilon} >$. Мы предъявили такую окрестность точки x_0, в которой выполняется условие непрерывности, следовательно, функция непрерывна.

51 Теорема о непрерывных функциях, удовлетворяющих равенству $f(x+y) = f(x)f(y)$

f — непрерывна на $\mathbb{R}$.

Теорема: если $\forall x, y$ верно $f(x + y) = f(x)f(y)$ и $f(x) \not\equiv Const$, то $\exists a > 0, a \neq 1$ такое, что $f(x) = a^x \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Доказательство:

1) $f(x) \neq 0 \ \forall x$

Допустим, что это не так, тогда $f(x_0) = 0$. Тогда $f(x) = f(x - x_0 + x0) = f(x - x_0)f(x_0) = 0 \ \forall x \Rightarrow$ функция константа, противоречие.

2) $f(x) > 0 \ \forall x$

$f(x) = f(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}) = f(\frac{x}{2})f(\frac{x}{2}) = (f(\frac{x}{2}))^2 > 0/$

3) $\forall x, n \in \mathbb{N}$ $f(nx) = (f(x))^n$

$f(nx) = f(x + ... + x) = f(x) \cdot ... \cdot f(x) = (f(x))^n$ — доказывать, конечно же, по индукции.

4) $f(0) = 1$

$f(x) = f(x + 0) = f(x)f(0)$

5) $f(-x) = \frac{1}{f(x)}$

$1 = f(0) = f(x - x) = f(x) \cdot f(-x) = f(x) \cdot \frac{1}{f(x)}$.

Пусть $f(1) = a$. Докажем, что $f(x) = a^x$:

1) Для натуральных выполняется свойство 3.

2) Для рациональных - свойства 3 и 5.

3) Для вещественных ($x_0 \in \mathbb{R}$):

Возьмем последовательность рациональных чисел $\{x\} \to x_0$.

$f(x_n) = a^{x_n}$. $a^{x_n} \to a^{x_0}$ по свойству непрерывной показательной функции. $f(x_n) \to f(x_0) \Rightarrow f(x_0) = a^{x_0}$.

52 Вычисление предела $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$

Доказательство: фиксируем $x > 1,\ n = [x]$. $n < x < n+1$. Оцениваем функцию снизу: $(1+\frac{1}{x})^x \le (1+\frac{1}{n})^{n+1} = (1+\frac{1}{n})^n(1+\frac{1}{n}) \le (1+\frac{1}{n})e \le (1+\frac{1}{x-1})e = \frac{x}{x-1}e$.

Запишем: $(1+\frac{1}{x})^x \le \frac{x}{x-1}e$.

Оценим снизу: $e \le (1+\frac{1}{n+1})^{n+2} \le (1+\frac{1}{n})^{n+2} \le (1+\frac{1}{n})^n(1+\frac{1}{x})^2$

$e \leftarrow \frac{e}{(1+\frac{1}{x})^2} \le f(x) \le \frac{x}{x+1}e \to e \Rightarrow f(x) \to e$.

Для $x \to -\infty$ замена $t = -x,\ t \to +\infty$.

53 Вычисление пределов $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^p-1}{x} = p$

Доказательство: строим эквивалентности.

1) $\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{1}{x}\ln(1+x) = \ln((1+x)^{\frac{1}{x}}) = \ln e = 1$.

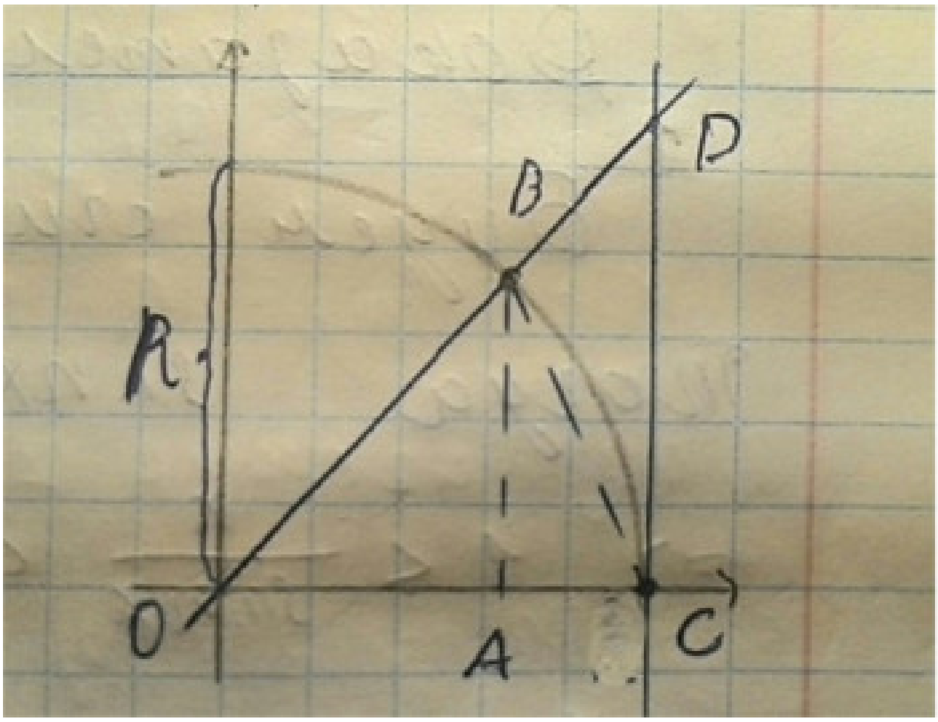
2) $\frac{e^x-1}{x}$ Замена: $e^x = 1+y(x\to 0)$. Тогда $\frac{1+y-1}{ln(1+y)} \to 1$ (по предыдущему $ln(1+y) \sim y$).

3) $\frac{(1+x)^p-1}{x} = \frac{e^{p\ln(1+x)}-1}{x} = \frac{p\ln(1+x)}{x} \to p$ (по предыдущим $e^{p\ln(1+x)} - 1 \sim p\ln(1+x) = px$.

54 Неравенства $\sin x < x < \operatorname{tg} x$ и всё такое прочее

Лемма: Если $0 < x < \frac{\pi}{2}$, то $\sin(x) < x < tg(x)$.

Доказательство: строим рисунок:



$|CD| = R\operatorname{tg}x,\ |AB| = R\sin x$

$\triangle OBC \subset$ сектор $OBC \subset \triangle OCD$ (Sсектора $= \frac{1}{2}xR^2$).

Найдём площади, получим, что все сократится, останется $\sin x < x < \operatorname{tg}x$.

Теорема: $\sin x, \cos x$ непрерывны.

Доказательство: фиксируем $x, x+h$, оцениваем $|\sin(x+h) - \sin(x)| < 2|\frac{h}{2}| < |h|$. Значит, $\sin(x+h) = \sin(x)$, т.е синус непрерывен. Косинус - как композицию двух непрерывных функций: $\sqrt{1-\sin^2 x}$ (Пользуемся свойствами, что произведение двух непрерывных (а значит и квадрат одной) функций непрерывно, сумма двух непрерывных непрерывна, композиция двух непрерывных непрерывна).

Теорема: $\frac{\sin x}{x} \to_{x\to 0} 1$.

Доказательство: делим наше неравенство $\sin x < x < \operatorname{tg}x$ на $\sin x$. $\frac{1}{\cos x} \to_{x\to 0} 1$. Маркиз Лопиталь нервно курит в сторонке.

55 Вычисление пределов $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^p}{a^x} = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln^p(x)}{x^\varepsilon} = 0$, $\lim\limits_{x\to 0+} x^\varepsilon|\ln(x)|^p = 0$

Доказательство:

1) Возьмем $n \in \mathbb{N}, a > 1, \frac{x^n}{a^x} \to 0$ по ранее доказанному. $p \leq n \Rightarrow 0 < \frac{x^p}{a^x} \leq \frac{x^n}{a^x} \to 0$.

2) $x_n \to +\infty, t_n = \ln x_n$

Тогда $\frac{(\ln x_n)^p}{x^\varepsilon} = \frac{t_n^p}{e^{t_n}} = \frac{t_n^p}{a^{t_n}} \to_{t \to +\infty} 0$ по ранее доказанному.

3) $t = \frac{1}{x}$ Тогда $x^\varepsilon |\ln(x)|^p = \frac{1}{t^\varepsilon} |\ln t|^p$ $(|\ln \frac{1}{t}| = |\ln t|)$

56 Определение дифференцируемости, дифференциала и производной. Теорема об условиях дифференцируемости функции. Односторонняя производная

$X \subset \mathbb{R}, x_0 \in X, f : X \to \mathbb{R}$.

Определение: f дифференцируема в x_0, если $\exists A \in \mathbb{R}$, такая, что $\Delta f(x_0, h) = Ah + \alpha(h)$.

Определение: Дифференциал — главная линейная часть приращения $Ah = df(x_0, h)$.

Определение: Производная — предел $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{\Delta f(x_0, h)}{h}$.

Теорема: $f : X \to \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}$.

1) Если f — дифференцируема в x_0, то f непрерывна в x_0.

2) f дифференцируема $\Leftrightarrow$ в x_0 функция имеет конечную производную.

Доказательство:

1) $|f(x) - f(x_0)| = |A(x - x_0) + o(x - x_0)|$.

2) Пусть f — дифференцируема, тогда $\Delta f(x_0, h) = Ah + \alpha(h)$. $\frac{\Delta f(x_0,h)}{h} = A + \frac{\alpha(x_0)}{h} \to A$. В обратную сторону: пусть существует конечная производная $\frac{\Delta f(x_0,h)}{h} \to A$, тогда $\Delta f(x_0, h) = Ah + h\alpha(h)$. И Артурову стрелочку.

57 Определение касательной к плоскому множеству. Теорема о существовании касательной к графику дифференцируемой функции

Определение: Касательной к плоскому множеству называется такая прямая, для которой выполняется $\frac{dist(M,l)}{\rho(M,M_0)} \to 0$, где M — точка множества, M_0 — точка касания, l — касательная.

Теорема: Если f дифференцируема в x_0, то Γ_f имеет в т. M_0 касательную вида $y - y_0 = f'(x)(x - x_0)$.

Доказательство: Предполагаем, что касательная определяется этим уравнением. Берем произвольную $M(x, f(x)) \in \Gamma_f$. $y = y_0 + f'(x)(x - x_0)$. Теперь вычтем его из значения x: $|f(x) - y| = |f(x) - y_0 - f'(x_0)(x - x_0)| = |\Delta f(x_0, x - x_0) - A(x - x_0)| = |\alpha(x - x_0)| = o(x - x_0)$, т.к. $f(x) - f(x_0) = A(x - x_0) + \alpha(x - x_0)$ по определению. Тогда

$\frac{dist(M,l)}{\rho(M,M_0)} \leq \frac{\alpha(x-x_0)}{|x-x_0|} \to 0$, т.е. прямая является касательной.

58 Дифференцирование суммы, произведения и частного

$f, g : X \to \mathbb{R}$, дифференцируема в $x_0 \in X$.

Теорема:

1) $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g(x_0)$

2) $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g'(x_0)$

3) $(\frac{f}{g})'(x_0) = \frac{f'(x)}{g'(x)}$, если $g'(x) \neq 0$.

Доказательство: 1) Расписываем производные как соответствующие пределы.

2) Пользуемся прямоугольником, задаем $\Delta U(x_0, h) = f(x_0, h) \cdot g(x_0, h) - f(x_0)g(x_0) = f(x_0)g(x_0) + \Delta f(x_0, h)g(x_0) + \Delta g(x_0, h)f(x_0) + \Delta f(x_0)\Delta g(x_0) - f(x_0)g(x_0) = \Delta f(x_0, h)g(x_0) + \Delta g(x_0, h)f(x_0)$. Берем соответствующий предел $\frac{\Delta U(x_0,h)}{h} = f'(x_0)g(x) - g'(x_0)f(x_0)$.

3) Расписываем так же, как и (2), под общий знаменатель, потом берем соответствующий предел.

59 Теорема о дифференцировании композиции

$\varphi : X \to \mathbb{R}, \; f : Y \to \mathbb{R}, \quad Y = \varphi(X)$

Теорема: Если φ дифференцируема в x_0, а f дифференцируема в $y_0 = \varphi(x_0)$, то $g = f \circ \varphi$ дифференцируемо в x_0.

Доказательство: пользуемся формулой $f(y_0 + \Delta y) - f(y_0) = f'(y_0) \cdot \Delta y + \omega(\Delta y)$. Если возникают вопросы, откуда она взялась — распишите условие дифференцируемости функции. Дальше все классно, омеги лесом, остается $f'(\varphi(x_0))\varphi'(x_0)\Delta x$. Вы уже догадались, что нужно сделать.

60 Теорема о дифференцируемости обратной функции. Вычисление $\arcsin' x, \arccos' x$

$f : X \to Y, \quad f^{-1} : Y \to X$ взаимно обратны, непрерывны в $x_0 \in X$, $y_0 = f(x_0) \in Y$.

Теорема: Если f — дифференцируема в т. x_0 и $f'(x_0) \neq 0$, то f^{-1} также дифференцируема в y_0, причем $f^{-1}(y_0) = (f'(x_0))^{-1}$.

Доказательство: Берем $f(x) - f(x_0)$ и $f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)$. Они не обращаются в ноль (иначе функция не дифференцируема). Из непрерывности функции можно заключить, что $(X \ni x \to x_0) \Leftrightarrow (Y \ni y \to y_0)$. Теперь, используя теорему о пределе композиции:

$\lim\limits_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{1}{\frac{f(x)-f(x_0)}{x - x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)}$.

Синусы-косинусы по полученной формуле :)

61 Лемма Ферма

$f :< a, b >\to \mathbb{R}, \quad \exists c : a < c < b$.

Теорема: Пусть $f(c)$ — наибольшее/наименьшее значение функции на данном промежутке. Тогда, если f дифференцируема в c, $f'(c) = 0$.

Доказательство: для определенности говорим, что функция достигает в точке c максимума. Затем рассматриваем производные справа и слева, расписывая их как предел. Предел справа всегда не больше нуля, предел слева не меньше, следовательно, $f'(c) \leq 0$ и, одновременно, $f'(c) \geq 0$. В результате $f'(c) = 0$.

62 Теорема Ролля

Теорема: $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, f непрерывна и дифференцируема на (a, b). Если $f(a) = f(b)$ то $\exists c \in (a, b)$, такая, что $f'(c) = 0$.

Доказательство: Отдельный случай, когда функция константа. Если она не константа, то по второй теореме Вейерштрасса минимум и максимум функция достигает на компакте. Т.к. $f(a) = f(b)$, то либо минимум, либо максимум внутри. А дальше применяем лемму Ферма.

63 Теорема Лагранжа и следствия

Теорема: f непрерывна на $[a, b]$ и дифференцируема на (a, b). Тогда $\exists c \in (a, b)$, такая, что $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

Доказательство: Вводим $g(x) = f(x) - kx$, требуем, чтобы $g(a) = g(b)$. Запишем в виде $f(b) - kb = f(a) - ka$. Перепишем как $k = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. По теореме Ролля $\exists c : g'(c) = f'(c) - k = 0 \Rightarrow k = f'(c)$.

Следствие 1: Если $M = \sup |f'(x)|$. Тогда $|f(b) - f(a)| \leq M(b-a)$.

Следствие 2: Пусть выполняются условия теоремы Лагранжа и точки $x_0, x_0 + h \in [a, b]$. Если $\exists \Theta \in (0,1)$, тогда $f(x_0+h) - f(x_0) = f'(x_0 + \Theta h)h$.

Доказательство: для $[x_0, x_0 + h]$ по теореме Лагранжа $f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(c)h$. $x_0 < c < x_0 + h \Rightarrow c = x_0 + \Theta h$.

Следствие 3: f удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа, $x_0, x_0 + h \in [a, b]$. Тогда выполняется $|\Delta f(x_0, h) - f'(x_0)h| \leq \sup(|f'(x) - f'(x_0)| \cdot |h|)$, где $x \in [x_0, x_0 + h]$.

Доказательство: оставь надежду, всяк сюда входящий. Введем функцию $g(x) = f(x) - f'(x_0)$. $g(x_0 + h) - g(x_0) = g'(x_0 + \Theta h)h$. $f(x_0 + h) - f'(x_0)(x_0 + h) - (f(x_0) - f'(x_0)x_0) = \Delta f(x_0) - df(x_0, h)$. $|\Delta f(x_0, h) - df(x_0, h)| = |g'(x_0 + \Theta h)| \cdot |h| = |f'(x_0 + \Theta h) - f'(x_0)| \cdot |h| \leq |f'(x) - f'(x_0)| \cdot |h|$.

64 Теорема Коши

Теорема: f, g непрерывны на $[a, b]$, дифференцируемы на (a, b) и $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in (a, b)$. Тогда $\exists c \in (a, b)$, т.ч. $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$.

Доказательство: проверяем, что $g(b) - g(a) \neq 0$. Если это не так, то по теореме Ролля $g'(c) = 0$, что противоречит условию. Затем вводим функцию $F(x) = f(x) - kg(x)$ и говорим, что подобрали k так, чтобы выполнялось $F(a) = F(b)$. Расписываем аналогично теореме Лагранжа. По теореме Лагранжа верно существование $F'(c) = 0$. Затем $0 = F'(c) = f'(c) - kg'(c) \Rightarrow k = \frac{f'(c)}{g'(c)}$, чтд.

65 Теоремы об условиях постоянства и монотонности функции

Теорема: (постоянство)

$f :< a, b >\to \mathbb{R}. f \equiv Const \Leftrightarrow f$ дифференцируема и $f'(x) = 0$.

Доказательство: необходимость: если $f \equiv Const \Rightarrow f'(x) = 0$, достаточность $\forall x_1 \neq x_2, x_1, x_2 \in < a, b >$ верно, что $f(x_1) - f(x_2) = 0$, по теореме Лагранжа $f(x_2) - f(x_1) = f'(x)(x_2 - x_1) \Rightarrow f'(x) = 0$.

Теорема: (монотонность)

$f :< a, b >\to \mathbb{R}$, f дифференцируема на $< a, b >$. Тогда если $f'(c) \geq 0$, то функция возрастает, а если $f'(c) \leq 0$, то функция убывает.

Доказательство: необходимость: предполагаем, что функция возрасатает, рассматриваем аналогично лемме Ферма, расписываем как предел и получаем все чики-пуки. Достаточность: предполагаем, что производная больше нуля, берем $x_1, x_2 \in (a, b)$, по теореме Лагранжа получаем $f(x_2) - f(x_1) = f'(x)(x_2 - x_1)$, где все положительно.

66 Теорема об условиях строгой монотонности

Теорема: f строго возрастает если:

1) $f'(x) > 0 \; \forall x \in < a, b >$;

2) $\nexists [p, q] \subset < a, b >$, на котором $f'(x) = 0$.

Доказательство: необходимость: 1) выполнено по критерию монотонности, 2) доказывается от противного предположением существования $[p, q]$, такого, что там $f'(x) = 0$, но тогда на этом промежутке функция - константа, что противоречит условию строгого возрастания. Достаточность: предполагаем существование $x_1 < x_2$, таких, что $f(x_1) = f(x_2)$, тогда там производная ноль, что противоречит условию.

67 Неравенства $\frac{x}{1+x} < \ln(1 + x) < x$

Для того, чтобы выяснить, справедливо ли неравенство $f(x) < g(x)$ при $a < x \leq b$ необходимо:

1) Ввести функцию $h(x) = g(x) - f(x)$.

2) Подсчитать ее в точке a.

3) Если значение меньше нуля, условие не выполняется, иначе

4) Если $h'(a) > 0$, то функция строго возрастает $\Rightarrow$ неравенство верное.

$\ln(1 + x) < x$

$h(x) = x - \ln(x + 1)$

$h'(x) = 1 - \frac{1}{x-1} = \frac{x}{x+1}$

$h'(x) > 0$ при $x > 0$ и $h'(x) < 0$ при $-1 < x < 0$.

Второе неравенство сводится к первому заменой $t = \frac{x}{x+1}$.

68 Правило Лопиталя

Теорема: f, g определены на $(a, b >$ или $< a, b)$ и удовлетворяют условиям:

1) f, g — б.м. при $x \to a$ $(x \to b)$

2) f, g дифференцируемы в (a, b) и $g'(x) \neq 0$ $\forall x$

3) $\exists L = \lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Тогда $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Доказательство: кладем $f(x) = g(x) = 0$, тогда они непрерывны в a. Расписываем предел на языке последовательностей $x_n \to a$, $x_n \neq a$. Рассматриваем $[a, x_n]$ и применяем теорему Коши: $\exists \bar{x} : a < \bar{x_n} < x_n$. $\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f(x_n) - f(0)}{g(x_n) - g(0)} = \frac{f'(\bar{x})}{g'(\bar{x})} \to_{n \to \infty} L$ по теореме о двух милиционерах для первого неравенства.

Если $a = -\infty$ рассматриваем $(-\infty, c) \subset (-\infty, b >$, где $c < 0$ и вводим вспомогательные функции $f_1(t) = f(-\frac{1}{t})$ и $g_1(t) = g(-\frac{1}{t})$. Дальше аналогично.

69 Локальный экстремум. Теорема о необходимых условиях экстремума

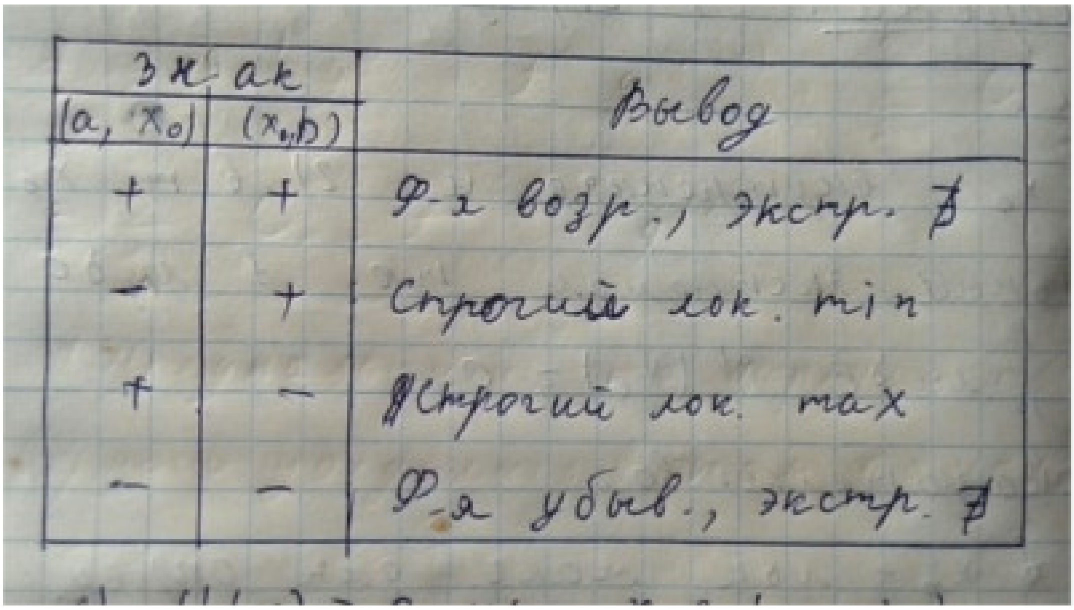
Определение: f определена на X, $x_0 \in X$. В точке x_0 функция имеет локальный максимум, если $\exists U(x_0) : \forall x \in \dot{U}(x_0) \cap X$ верно $f(x) < f(x_0)$. Аналогично для минимума.

Теорема: f определена на X, $x_0 \in X$. Если x_0 — внутренняя и в ней локальный экстремум, то f либо не дифференцируема в данной точке, либо $f'(x_0) = 0$.

Доказательство: Для определенности говорим, что в x_0 локальный максимум. Тогда $\exists U$ (по определению), $U = (p, q)$, $p < x_0 < q$. $\forall x \in (p, q)$ $f(x) \leq f(x_0)$. Теперь либо функция не дифференцируема, либо по лемме Ферма $f'(x_0) = 0$.

70 Теорема о достаточных условиях экстремума

Теорема: f определена и непрерывна на $< a, b >$. $x_0 \in (a, b)$ и f дифференцируема на $(a, x_0) \cup (x_0, b)$, то



Знак		Вывод
(a, x_0)	(x_0, b)	
+	+	Ф-я возр., экстр. $\nexists$
−	+	Строгий лок. min
+	−	Строгий лок. max
−	−	Ф-я убыв., экстр. $\nexists$

Доказательство: просто говорим, что мол, есть знаки производной, следовательно, на (a, x_0) функция убывает/возрастает, на (x_0, b) то же самое, делаем выводы.

71 Производные высших порядков. Правило Лейбница

Определение: Если $n \in \mathbb{N}$, и существует конечная производная порядка n в окрестности x_0, то $\exists g(x) = f^{(n)}(x)$.

Свойства:

1) $f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)})'(x) = (f')^{(n)}(x)$;
2) $f^{(n+k)}(x) = (f^{(n)})^{(k)}(x)$;
3) $(f+g)^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) + g^{(n)}(x)$;
4) $(\alpha f)^{(n)}(x_0) = \alpha f^{(n)}(x_0)$;
5) $(\alpha f + \beta g)^{(n)}(x) = \alpha f^{(n)} + \beta g^{(n)}(x_0)$;
6) Если $\alpha = 1, ..., N, f$ дифференцируема в x_0, то $(\sum\limits_{k=1}^{N} \alpha_k f_k)^{(n)}(x) = \sum\limits_{k=1}^{N} \alpha_k f_k^{(n)}(x)$.

Формула Лейбница: Если f, g дифференцируемы n раз в x_0, то их произведение тоже дифференцируемо n раз и выполняется $(fg)^{(n)} = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(x_0) g^{(n-k)}(x_0)$.

Доказательство: по индукции, база $= 1$, индукционный переход осуществляется введением условия, что функции дифференцируемы $(n+1)$ раз. Предполагаем, что формула верна, тогда, по формуле дифференцирования произведения $(fg)' = f'g + g'f$, получаем $(fg)^{(n+1)} = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n-k+1)} g^{(k)} + \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k+1)} = \sum\limits_{k=1}^{n} (C_n^k + C_n^{k-1}) f^{(n+1)-k} g^{(k)} + f^{(n+1)} g^0 + f^0 g^{(n+1)} = \sum\limits_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k f^{(n+1)-k} g^{(k)}$.

72 Классы C^r

$f :< a, b >\to \mathbb{R}$;

Определение: f — гладкая класса C^r, если она дифференцируема r раз в каждой точке промежутка и непрерывна на $< a, b >$.

Теорема о свойствах гладких функций: $f, g \in C^r(< a, b >), r \in \mathbb{N}$

1) $f + g \in C^r$;

2) $\alpha f \in C^r$;

3) $fg \in C^r$;

4) композиция функций $\in C^r$;

5) $\frac{1}{f} \in C^r$ при $f(x) \neq 0\ \forall x \in< a, b >$;

6) $\frac{1}{f'} \in C^r$ при $f'(x) \neq 0\ \forall x \in< a, b >$;

Доказательство:

1), 2) по ранее доказанному.

3) вытекает из формулы Лейбница.

4) индукция по r. База при $r = 1$: $F' = (\varphi(f(x)))' = \varphi'(f(x))f'(x)$, f — непрерывная, φ — непрерывная, композиция непрерывна, следовательно, F' тоже непрерывна. $F' = \varphi'(f(x))f'(x) \Rightarrow F' \in C^r \Rightarrow F \in C^{r+1}$.

5) Т.к. $0 \notin< a, b >$, то $\varphi(f(x)) = \frac{1}{f(x)} \in C^r$ по предыдущему пункту.

6) f строго монотонна. Значит, существует обратная непрерывная $g = \frac{1}{f}$, причем $g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(g(y_0))}$. Все это дело по предыдущим принадлежит C^r.

73 Определение и свойства полинома Тейлора. Теорема Тейлора-Пеано

Определение: Полиномом Тейлора порядка n функции f в точке x_0 называется полином $T_n(f, x_0, x - x_0) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$.

Свойства:

1) Связь соседних полиномов: $T_{n+1} = T + \frac{f^{(n+1)(x_0)}}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$

2) Дифференцирование полинома: $(T_n(f, x_0, x-x_0))' = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(f')^{(k-1)}(x_0)}{(k-1)!}(x-x_0)^{k-1} = T_{n-1}(f, x_0, x-x_0)$.

Теорема Тейлора-Пеано: Пусть f дифференцируема n раз в точке x_0. Тогда $f(x) = T_n(f, x_0, x-x_0) + \rho_n(x)$, где $\rho_n(x) = o(x-x_0)$.

Доказательство по индукции. База при $n = 1$. Затем проводим $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\rho_{n+1}(x)}{(x-x_0)^{n+1}}$, раскладываем остаток как разность функции и полинома, применяем правило Лопиталя, в конце получаем $\frac{1}{n+1} \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x_0)-T_n(f', x_0, x-x_0)}{(x-x_0)^n} = 0$.

74 Вычисление многочленов Маклорена для $e^x, \sin x, \cos x, \ln(1+x), (1+x)^p$

Полином Маклорена (точнее, Мак Лорена) — полином Тейлора для $x_0 = 0$.

Это очень легко. Просто раскрой по определению. Do it. Just do it!!!

75 Многочлены Тейлора для производной. Вычисление многочленов Маклорена для $\operatorname{arctg} x$

$[T_n(f, x_0, x-x_0)]' = T_{n-1}(f', x_0, x-x_0)$.

$[f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n]' = f'(x_0) + f''(x_0)(x-x_0) + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}$.

(Сначала подставляем x_0, затем дифференцируем! При этом (т.к. мы не знаем, какой у нас x_0) $f^{(k)}$ вообще не меняем).

Сделаем из выражения конфетку: заменим все производные аналогичными A_k:

$A_0 + A_1(x-x_0) + A_2(x-x_0)^2 + ... + A_n(x-x_0)^n = T_n(f', x_0, x-x_0)$.

Распишем и продифференцируем $T_{n+1}(f, x_0, x-x_0) = T_n(f', x_0, x-x_0)$ (действия легкие, можно сделать самостоятельно).

Вычисление арктангенса: $\frac{1}{1+x^2} = (\operatorname{arctg} x)' = 1 - x^2 + ... + (-1)^n x^{2n}$. Тогда $\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

76 Вычисление многочлена Маклорена для $\arcsin x$

$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1}$

Считаем «в лоб», замечаем, что каждый второй элемент будет равняться нулю, а остальные - нет. Получаем что-то вроде: $(1-x^2)^{-1} = 1+\frac{x^2}{2}+...+\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}x^{2k}+o(2k)$. Отсюда $\arcsin x = x+\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+...+\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\frac{x^{2k+1}}{2k+1}+o(x^{2k+1})$.

77 Теорема об остаточном члене формулы Тейлора по Лагранжу

Теорема: Пусть f дифференцируема $n+1$ раз на $<a,b>$, $x, x_0 \in <a,b>$, $\rho(x) = f(x) - T_n(f, x_0, x-x_0)$. Тогда $\exists \bar{x}$, такой, что $\rho(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$.

Доказательство: фиксируем $x, x_0 = u$. Вводим функцию $\varphi(u) = f(x) - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(u)}{k!}(x-u)^k$. Дифференцируем её по u, сокращаются все члены, кроме последнего. Таким образом, имеем: $\varphi'(u) = -\frac{f^{(n+1)}(u)}{n!}(x-u)^n$. Теперь применяем теорему Коши к этой гадости и к $\psi(x) = (u-x_0)^{n+1}$. По теореме Коши $\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \frac{f'(\bar{x})}{g'(\bar{x})}$. Таким образом имеем $\frac{0-\rho_n(x)}{0-(x_0-x)^{n+1}} = \frac{-\frac{f^{(n+1)}(\bar{x})}{n!}(x-\bar{x})^n}{(n+1)(\bar{x}-x)^n} = \frac{f^{(n+1)}(\bar{x})(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$. $\rho_n(x) = \frac{f^{(n)}(\bar{x})(-1)^{n+1}}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$.

78 Приближенное вычисление числа e

Раскладываем e в ряд Маклорена с остаточным членом в форме Лагранжа и берем $x=1$. Затем оцениваем сумму без остаточного члена, получаем $0 < e - S_n \leq \frac{e}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}$.

Теорема: e — иррациональное.

Доказательство: пользуемся неравенством $0 < e - S_n < \frac{3}{(n+1)!}$ и предположением, что $e = \frac{p}{q}$, получаем $0 < \frac{p}{q} - (1+1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n!}) < \frac{3}{(n+1)!}$. Берем $n > q$, домножаем неравенство на $n!$ и получаем $0 < \frac{p}{q}n! - n!S_n < \frac{3}{n+1}$, где оба числа в середине - целые для любых значений n, что невозможно.

79 Достаточное условие экстремума с использованием производных высших порядков

Теорема: $a < x_0 < b$. Пусть f дифференцируема n раз в точке x_0, $n \geq 2$. Если $f'(x_0) = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ и $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, то при нечетном n экстремум не существует, а при четном существует. При этом если $f^{(n)} < 0$, то это максимум, а если $f^{(n)} > 0$, то минимум.

Доказательство: расписываем $f(x) = T_n(f, x_0, x - x_0) + \rho_n(x)$, т.к. все производные, кроме энной, равны нулю, то $T_n(f, x_0, x - x_0) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$, таким образом, $f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n) \Rightarrow f(x) - f(x_0) = (x - x_0)^n(A + \alpha(x))$. Делаем дельта-окрестность точки x_0, в которой $A + \alpha(x) > 0$. Тогда если n четно, то $(x - x_0)^n > 0 \Rightarrow f(x) - f(x_0) > 0 \Rightarrow$ в точке x_0 локальный минимум. Если же n нечетно, то при переходе через x_0 $(x - x_0)^n$ меняет знак, значит, экстремума нет.

80 Характеристика кратности корня многочлена с помощью производных высшего порядка

Определение: a — корень многочлена P. Будем считать, что a — корень кратности k, если $P = (x - a)^k R(x)$.

Теорема: $P(a) = 0$, a — корень кратности $k \Rightarrow P'(a) = P''(a) = ... = P^{(k-1)}(a) = 0$, а $P^{(k)} \neq 0$.

Доказательство: $P(x) = (x - a)^k R(x), R(x) \neq 0$. Возьмем $1 \leq i \leq k$, тогда $((x - a)^k)^{(i)} = Const \cdot (x - a)^{k-i}$, а $((x - a)^k)^{(k)} = k!$. Через формулу Лейбница $P^{(k)}(x) = \sum\limits_{j=0}^{i} C_i^j ((x-a)^k)^{(i)} R^{(i-j)}(x)$. Если $i < k$, то все производные бинома равны нулю. Если же $i = k$, то $P^{(k)}(x) = \sum\limits_{j=0}^{k-1} C_k^j ((x - a)^k)^{(j)} R^{(k-j)}(x) + C_k^k k! R^{(0)}(x)$.

Достаточность: $\deg P = n \leq k$. $P(x) = T_n(P, a, x - a)$ (остаточного члена нет, ведь его производная $= 0$). $P(x) = \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + ... + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n = (x - a)^k R(x)$, где $R(x) = \frac{P^{(k)}(a)}{k!} \neq 0$.

Консультация

Общее определение предела — это предел на бесконечности, бесконечный предел и так далее, то есть то, что охватывает все случаи формулировки пределов (пределы в рамках расширенной числовой прямой).

26 — это свойства пределов, имеющих стремление как к конечным, так и к бесконечным числам. Свойства их сумм и произведений в обоих случаях. Доказывать арифметические действия с пределами опять. Общая теорема об арифметических действиях с пределами

$X \subset \hat{\mathbb{R}}$, $a \in \hat{\mathbb{R}}$

$\lim(f+g) = \lim f + \lim g$ и так далее при условии, что правая часть имеет смысл.