Всеволод Заостровский, 409 группа

Отчёт по задаче "Полиномиальная интерполяция".

1 Постановка задачи и теоретическая справка.

Пусть задана дискретная функция $y_i = f(x_i)$, $i = 0, 1, 2, ...n - 1$. Требуется построить алгебраичекий полиноном $P_{n-1}(x)$ степени $n - 1$, удовлетворяющий условиям:

$$P_{n-1}(x_i) = y_i, i = 0, 1, 2, ..., n - 1. \tag{1}$$

Такой полином называется интерполяционным. Его коэффициенты могут быть найдены из решения следующей системы линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $a_0, a_1, ..., a_{n-1}$:

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_0 + \ldots + a_{n-1}x_0^{n-1} = y_0 \\ a_0 + a_1x_1 + \ldots + a_{n-1}x_1^{n-1} = y_1 \\ \ldots \\ a_0 + a_1x_{n-1} + \ldots + a_{n-1}x_{n-1}^{n-1} = y_{n-1} \end{cases}$$

Система имеет единственное решение, т.к. ее определителем является определитель Ван дер Монда (отличен от нуля в случае $x_i \neq x_j$, $i \neq j$). Однако, построение полинома $P_{n-1}(x)$ через явное вычисление его коэффициентов приводит к катастрофической потере точности уже при $n \approx 20/50$. Поэтому обычно для расчетов используют запись интерполяционного полинома в форме Лагранжа:

$$P_{n-1}(x) = L_n(x) = \sum_{i=0}^{n-1} y_i \Phi_i(x),\ \Phi_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

2 Описание программы.

В классе Ln реализована интерполяция с помощью полинома Лагранжа: класс хранит узлы и значения функций, при необходимости вычисления значения полинома в точке x рассчёты каждый раз ведутся с нуля, посредством формул, описанных выше.
В классе Pn реализован второй метод. В частности, класс поддерживает конструирование интерполяционного полинома на основе заданных узлов и значений. При этом, СЛУ решается методом Гаусса с выбором главного элемента по столбцам, метод реализован в файле "GaussMethod.cpp".
В файле "knots.cpp"реализованны функции, осуществляющие генерацию сетей.

3 Тесты.

3.1 Полином 10 степени.

Рассматривалась функция:

```
double f(double x)
{
    return pow(x, 10) +  5 * pow(x, 8) - 2 * pow(x, 6)
        + 3 * pow(x, 5) + 2 * pow(x, 3) + x * x + 11;
}
```

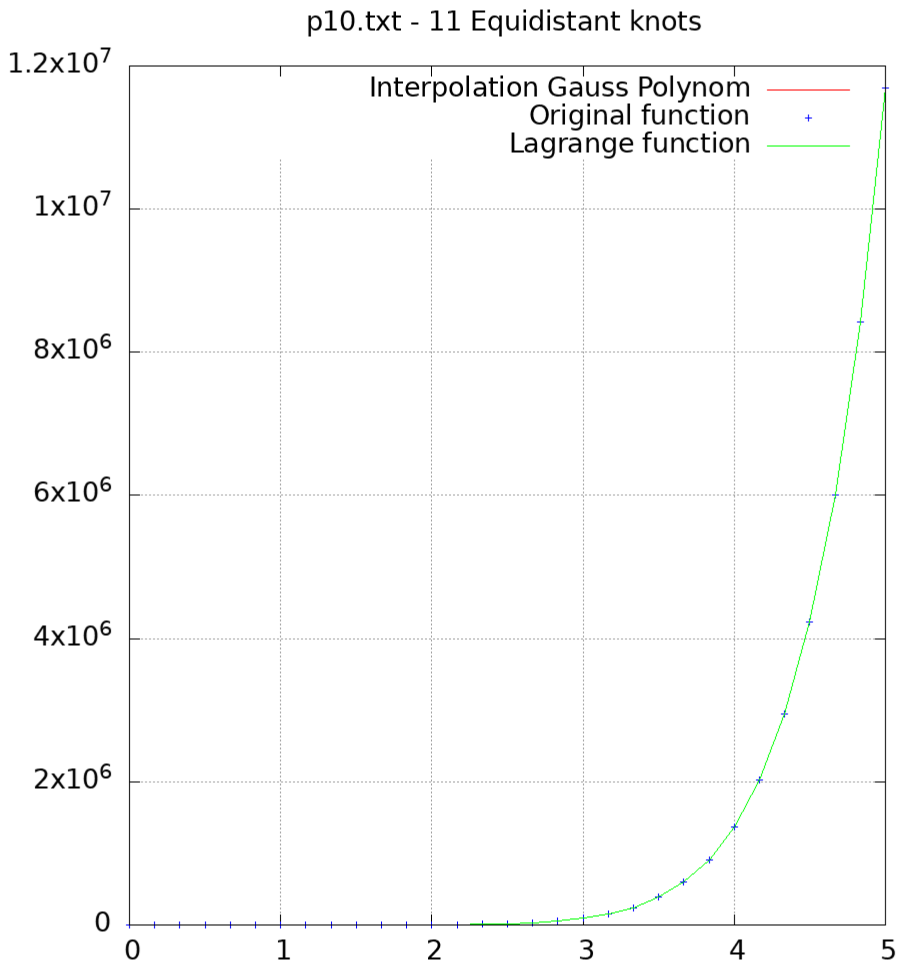

Рис. 1: Результаты теста "Полином 10 степени"на равноудаленных узлах.

При этом, восстановленный полином:

$11x^0 + -7.48166e - 09x^1 + 1x^2 + 2x^3 + 1.13098e - 07x^4 + 3x^5 + -2x^6 + -1.06963e - 08x^7 + 5x^8 + -1.85583e - 10x^9 + 1x^10$

Оригинальный:

$11x^0 + 0x^1 + 1x^2 + 2x^3 + 0x^4 + 3x^5 + -2x^6 + 0x^7 + 5x^8 + 0x^9 + 1x^10$

При этом, восстановленный полином:

$11x^0 + 1.09349e - 09x^1 + 1x^2 + 2x^3 + -3.69267e - 08x^4 + 3x^5 + -2x^6 + 4.60408e - 09x^7 + 5x^8 + 8.05749e - 11x^9 + 1x^10$

Оригинальный:

$11x^0 + 0x^1 + 1x^2 + 2x^3 + 0x^4 + 3x^5 + -2x^6 + 0x^7 + 5x^8 + 0x^9 + 1x^10$

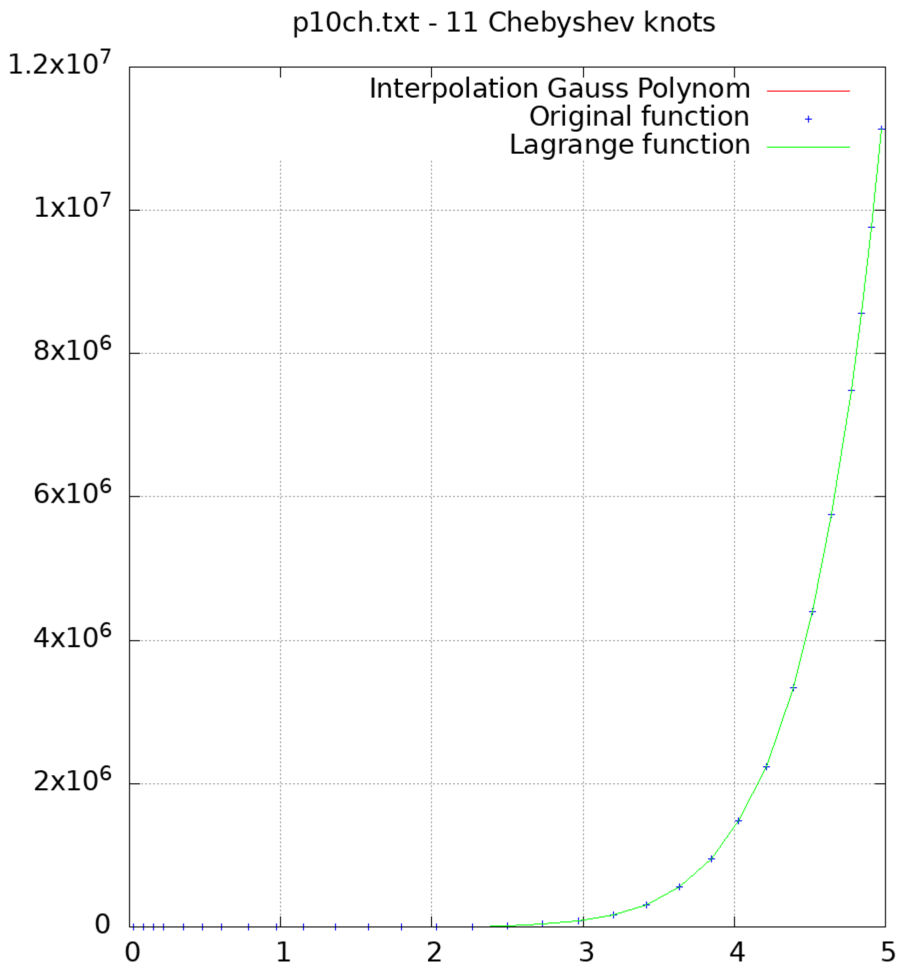

Рис. 2: Результаты теста "Полином 10 степени"на Чебышёвских узлах.

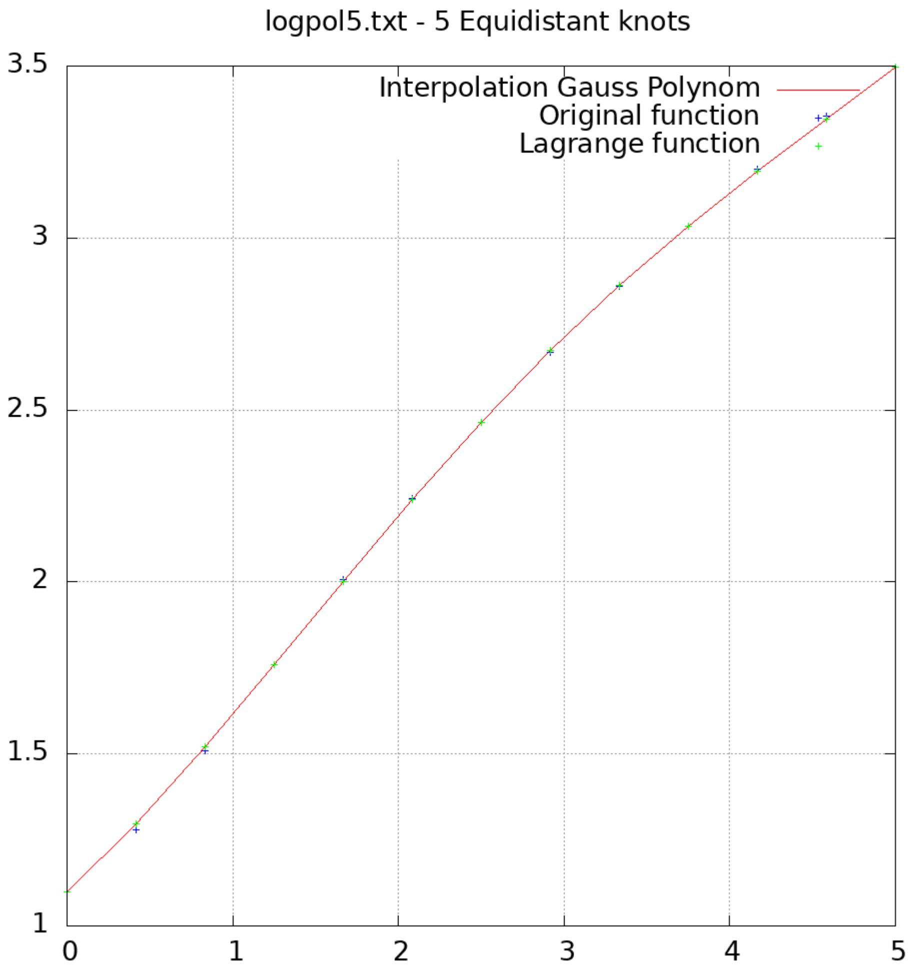

Рис. 3: Результаты теста "$\log(x^2 + x + 3)$".

3.2 $\log(x^2 + x + 3)$.

Как видно, на 20 узлах метод Гаусса не работает, поскольку перестаёт считать матрицу невырожденной из-за высоких степеней x. Тем не менее, интерполяционный многочлен Лагранжа всё ещё работает вполне исправно.

На 100 узлах многочлен Лагранжа даёт сбой, но Чебышевские узлы спасают ситуацию. На 1000 узлов даже Чебышёвская сеть перестает работать.

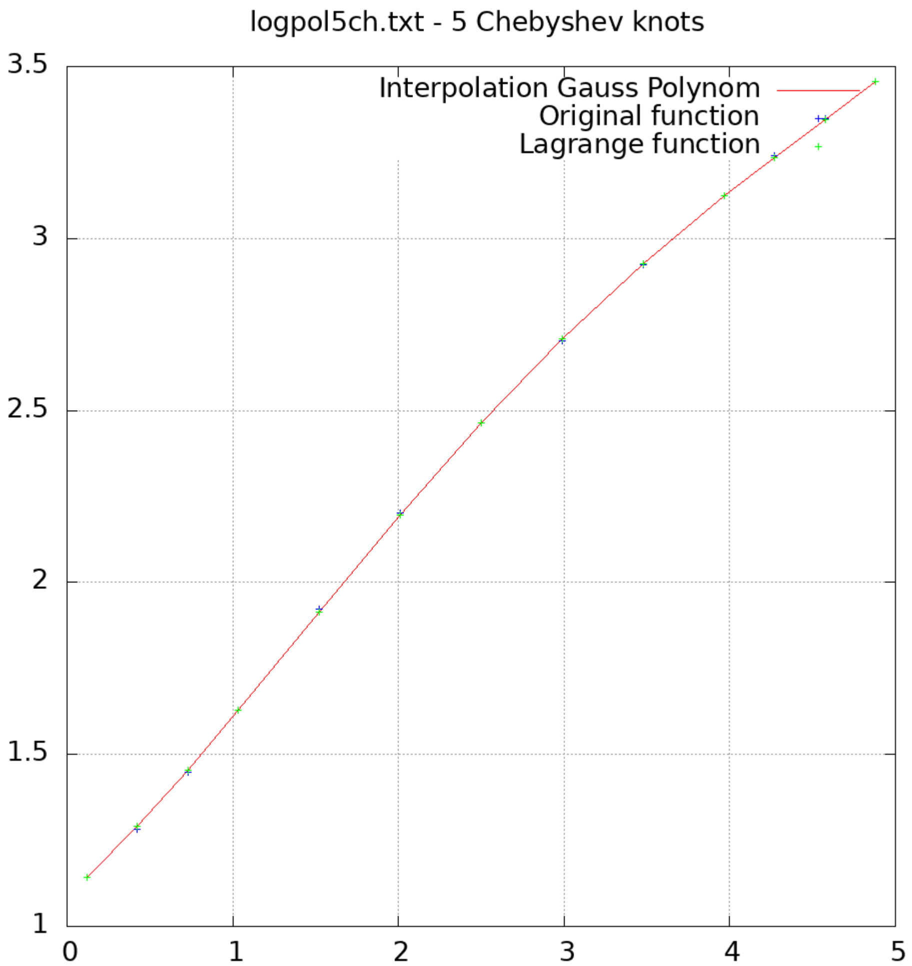

Рис. 4: Результаты теста "$\log(x^2 + x + 3)$".

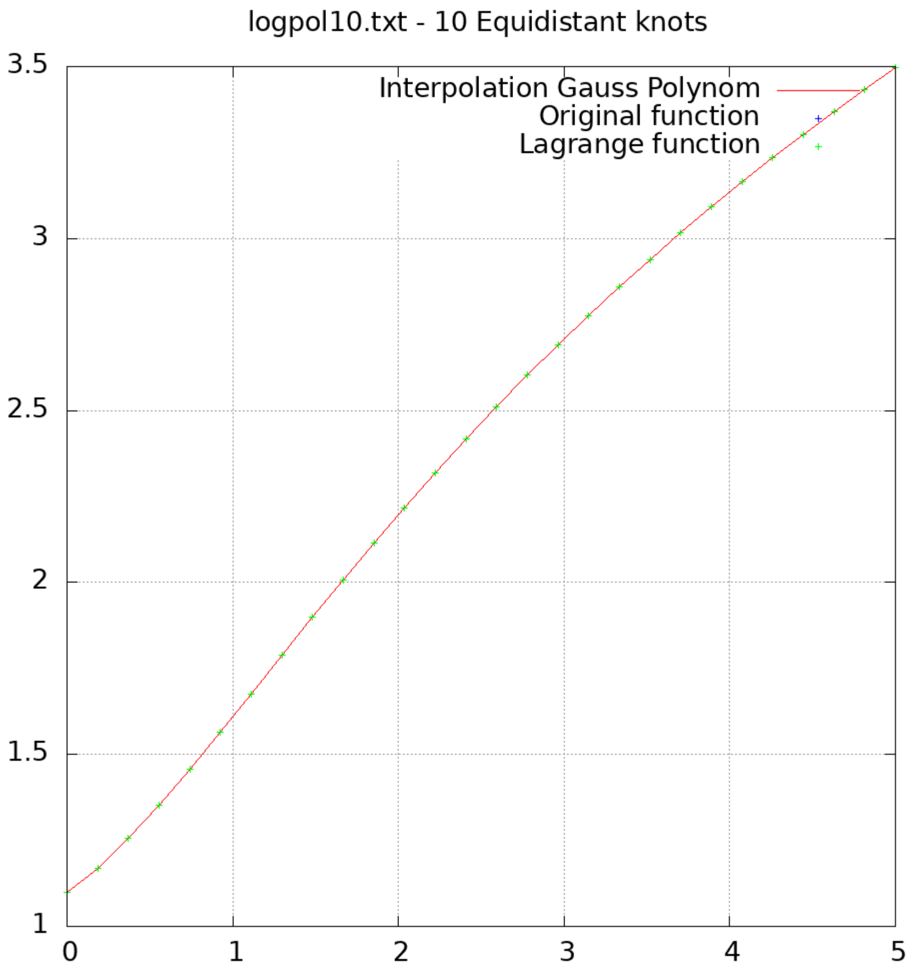

Рис. 5: Результаты теста "$\log(x^2 + x + 3)$".

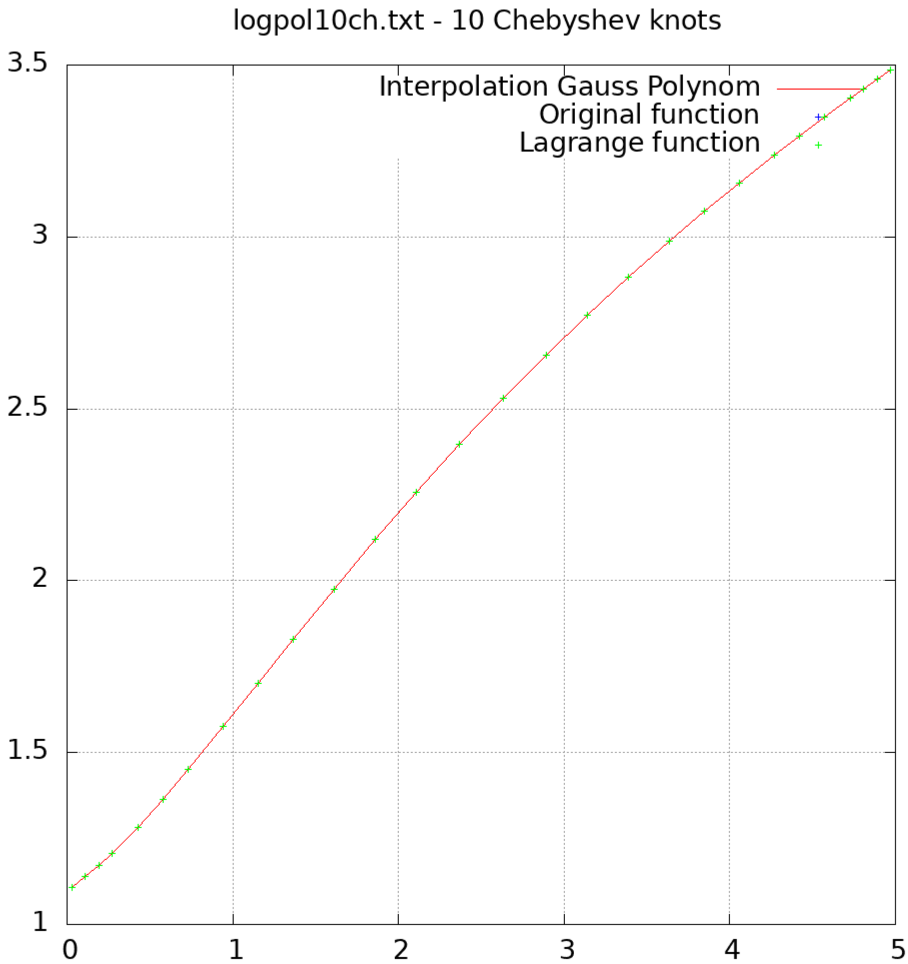

Рис. 6: Результаты теста "$\log(x^2 + x + 3)$".

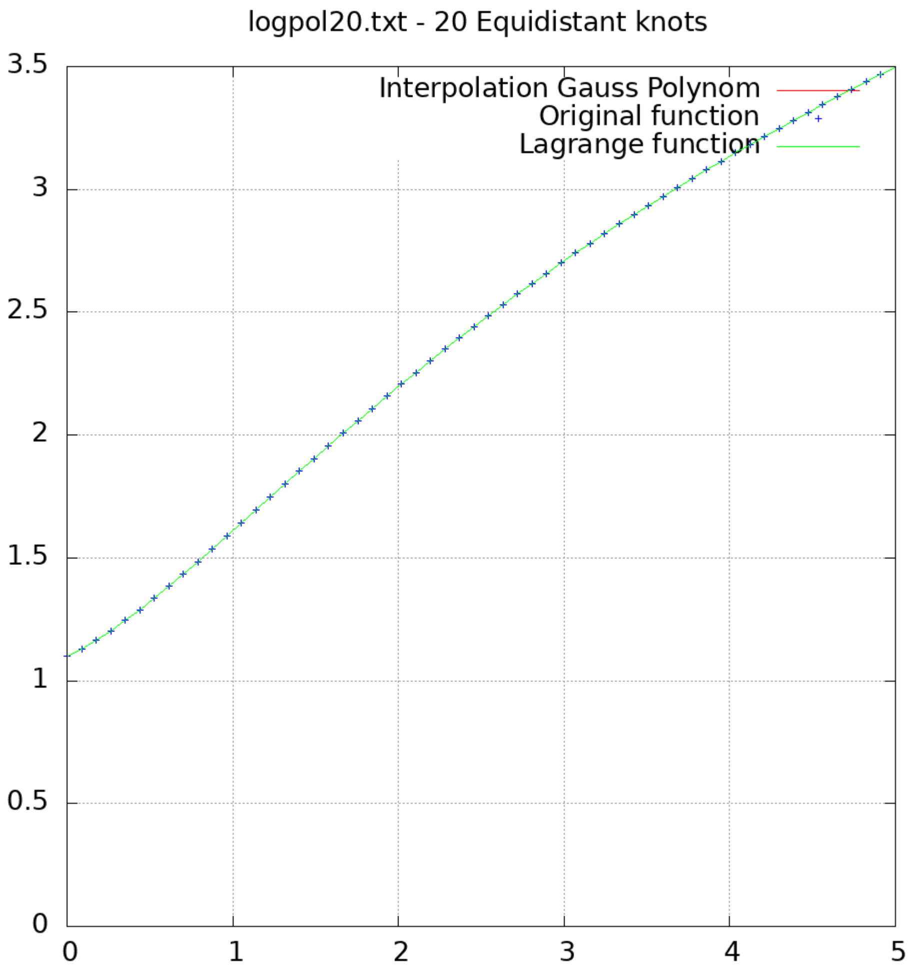

Рис. 7: Результаты теста "$\log(x^2 + x + 3)$".

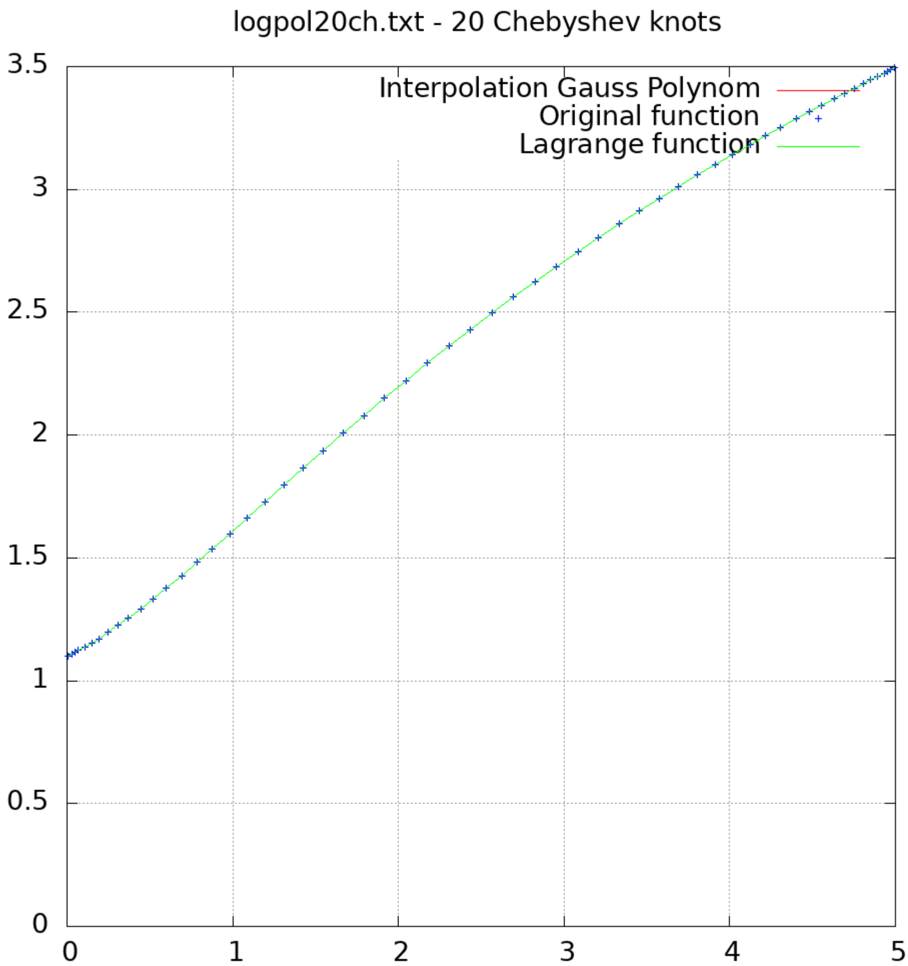

Рис. 8: Результаты теста "$\log(x^2 + x + 3)$".

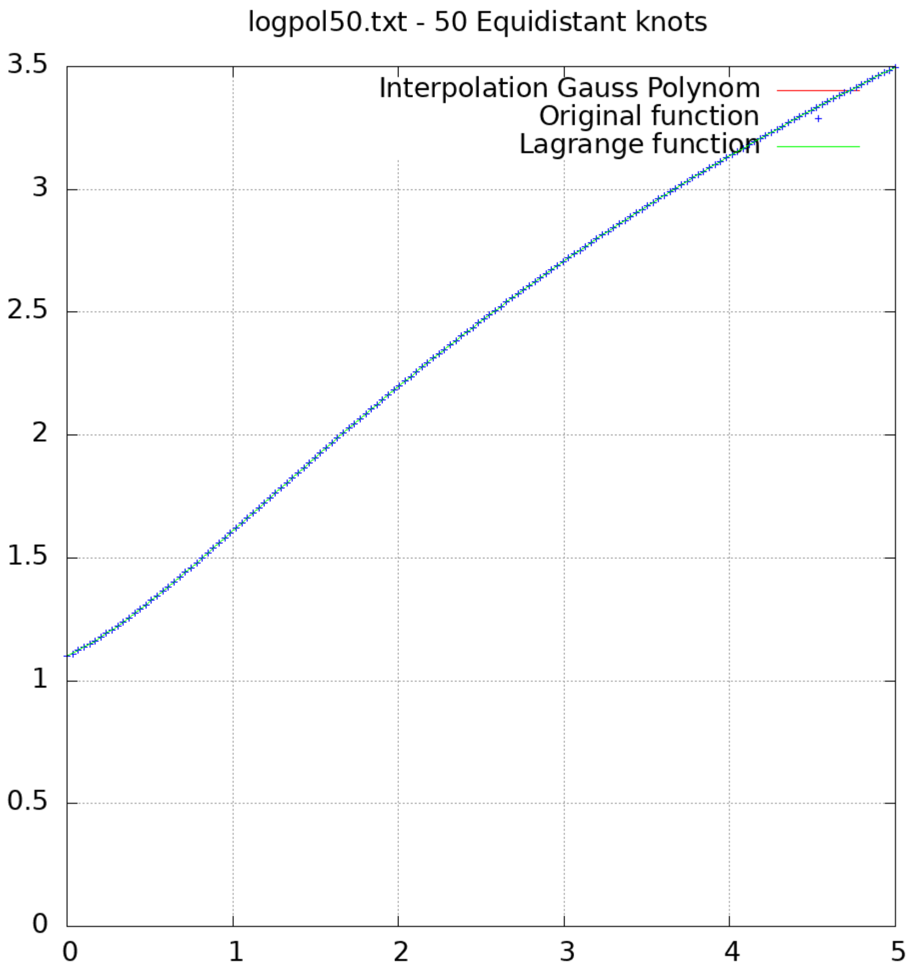

Рис. 9: Результаты теста "$\log(x^2 + x + 3)$".

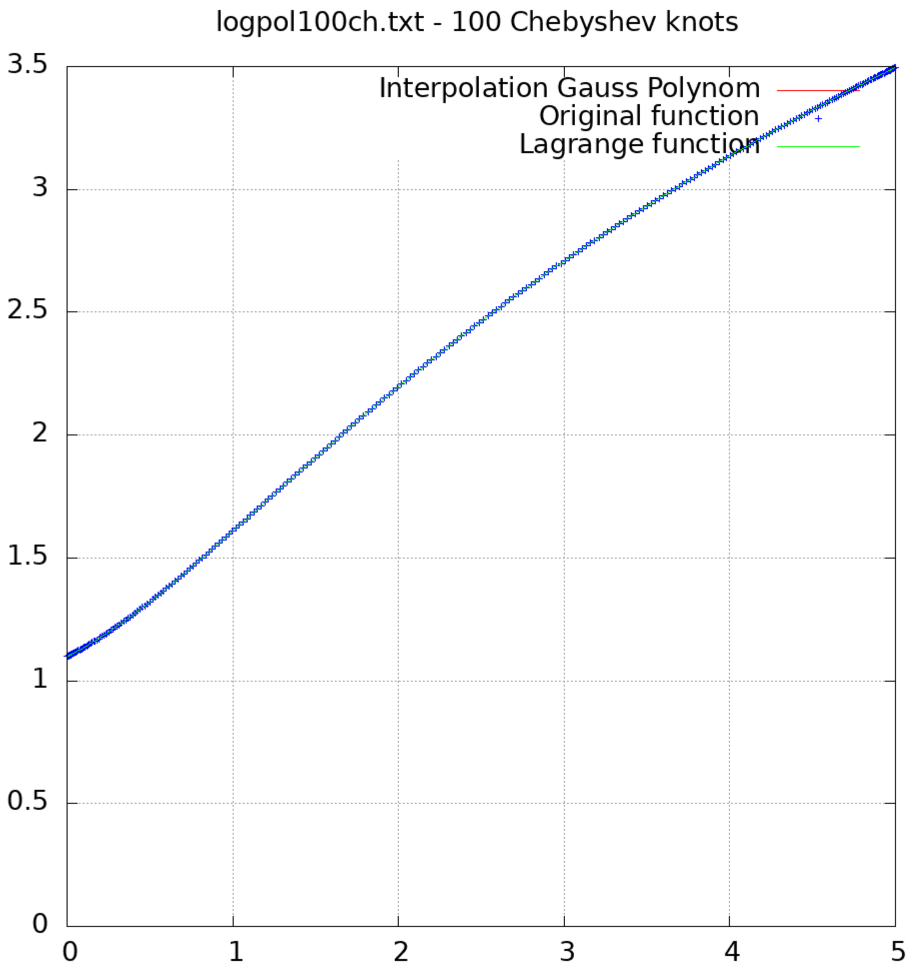

Рис. 10: Результаты теста "$\log(x^2 + x + 3)$".

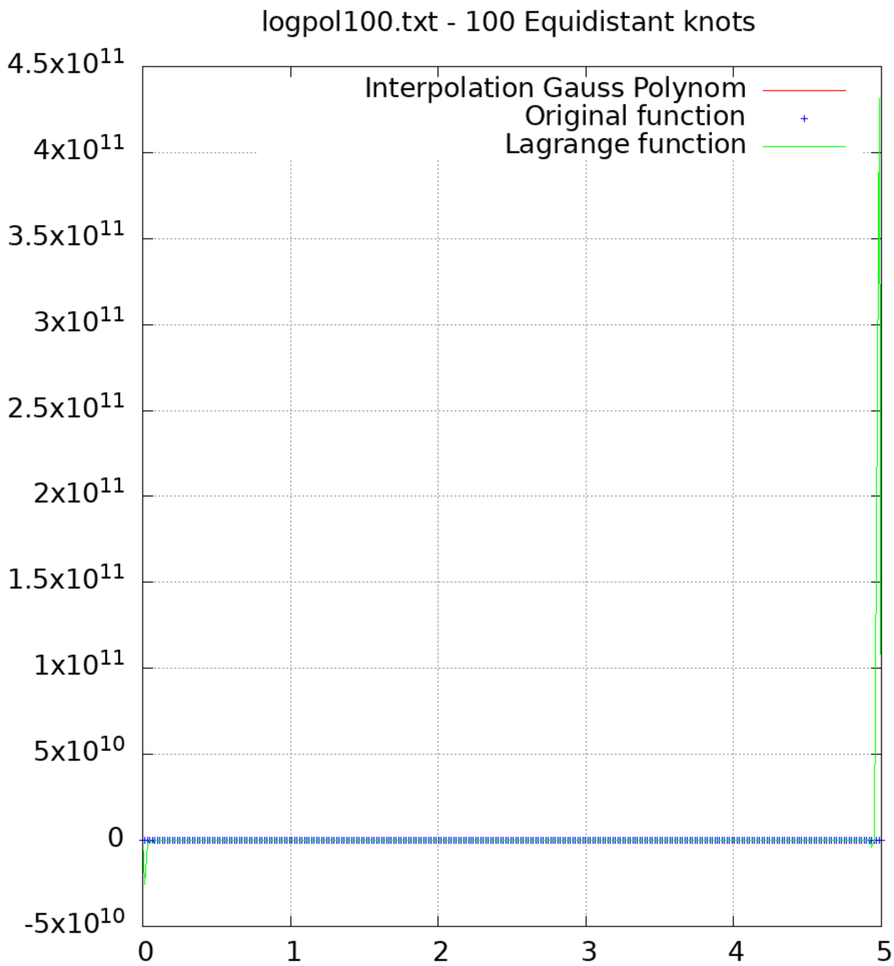

Рис. 11: Результаты теста "$\log(x^2 + x + 3)$".

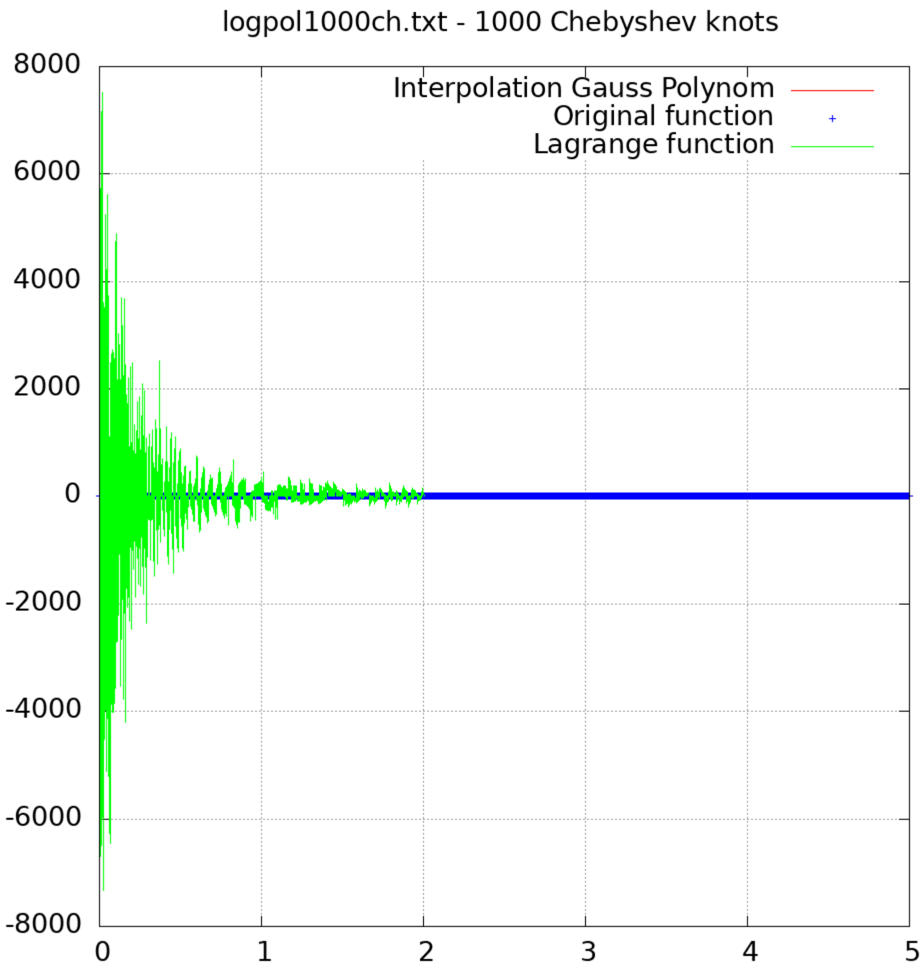

Рис. 12: Результаты теста "$\log(x^2 + x + 3)$".

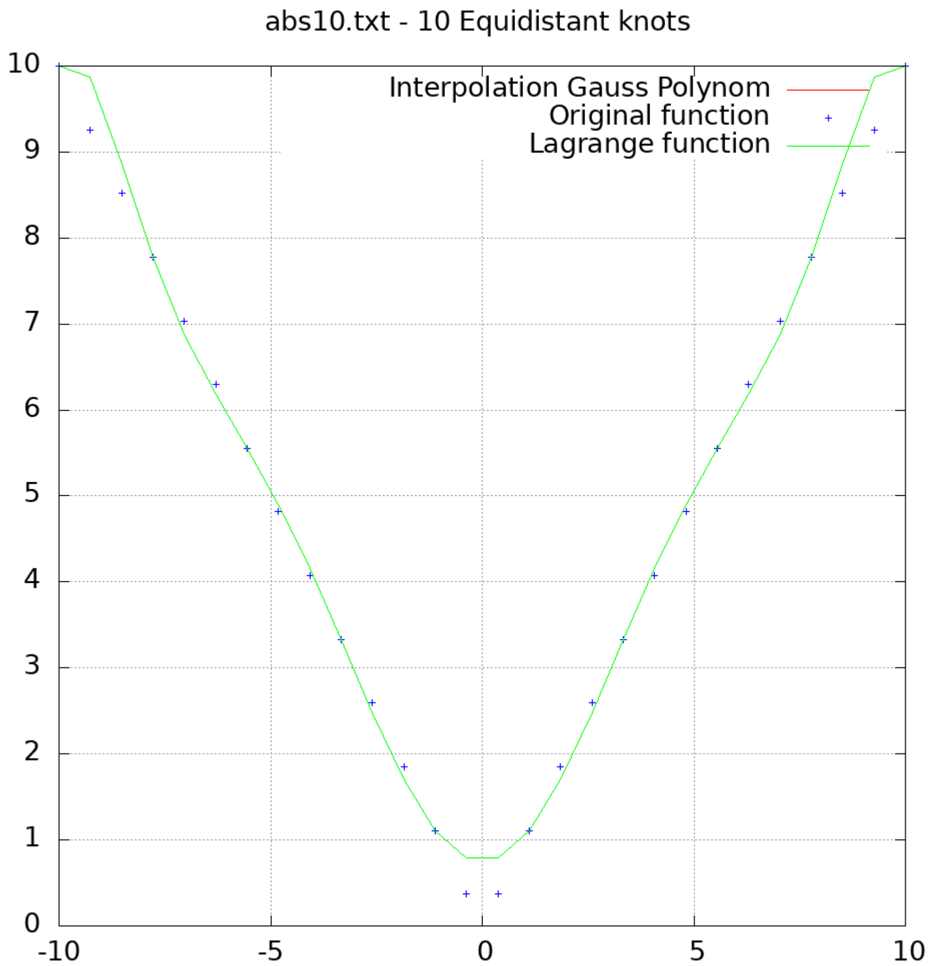

Рис. 13: Результаты теста "$|x|$".

3.3 $|x|$.

На небольшом количестве узлов всё приблежается без проблем. Однако, уже на 20 равномерных узлах что-то идёт не так. Чебышёвская сеть снова спасает ситуаицю, но на 1000 узлах начинает сильно ассцилировать.

3.4 $\frac{1}{1+25x^2}$.

Как видно, равномерные узлы дают сбой, а Чебышёвские приближают вполне неплохо.

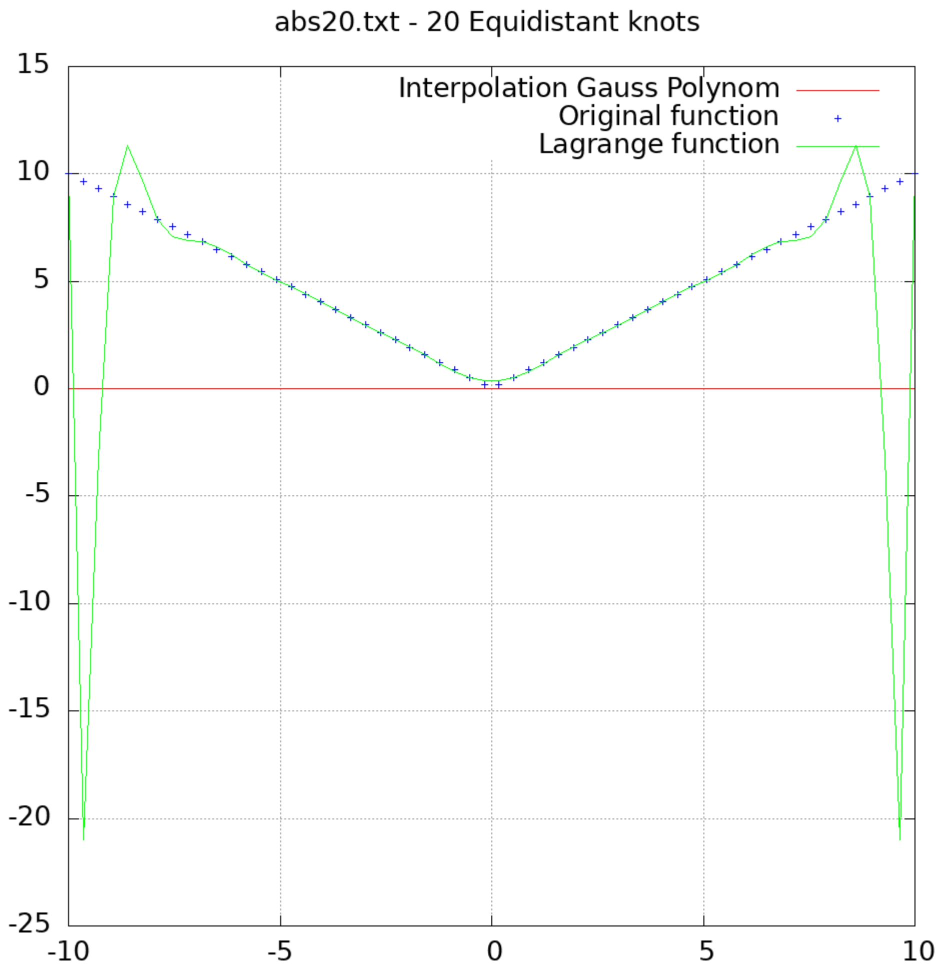

Рис. 14: Результаты теста "$|x|$".

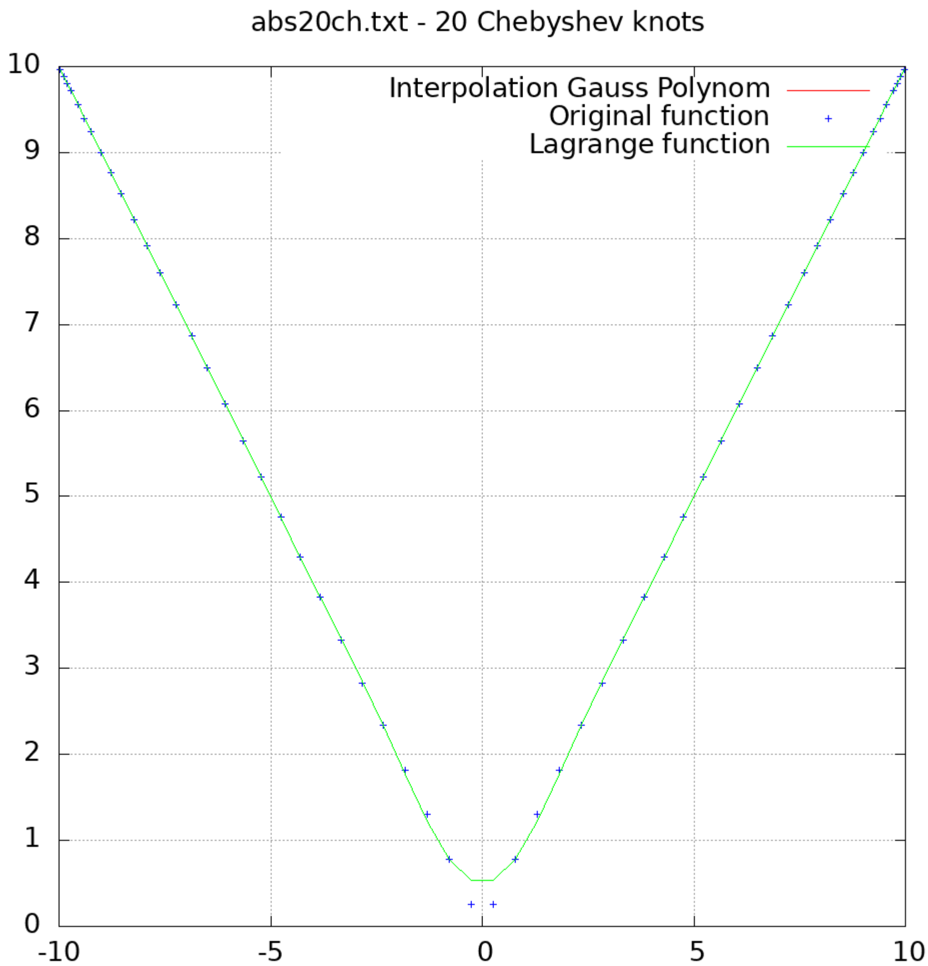

Рис. 15: Результаты теста "$|x|$".

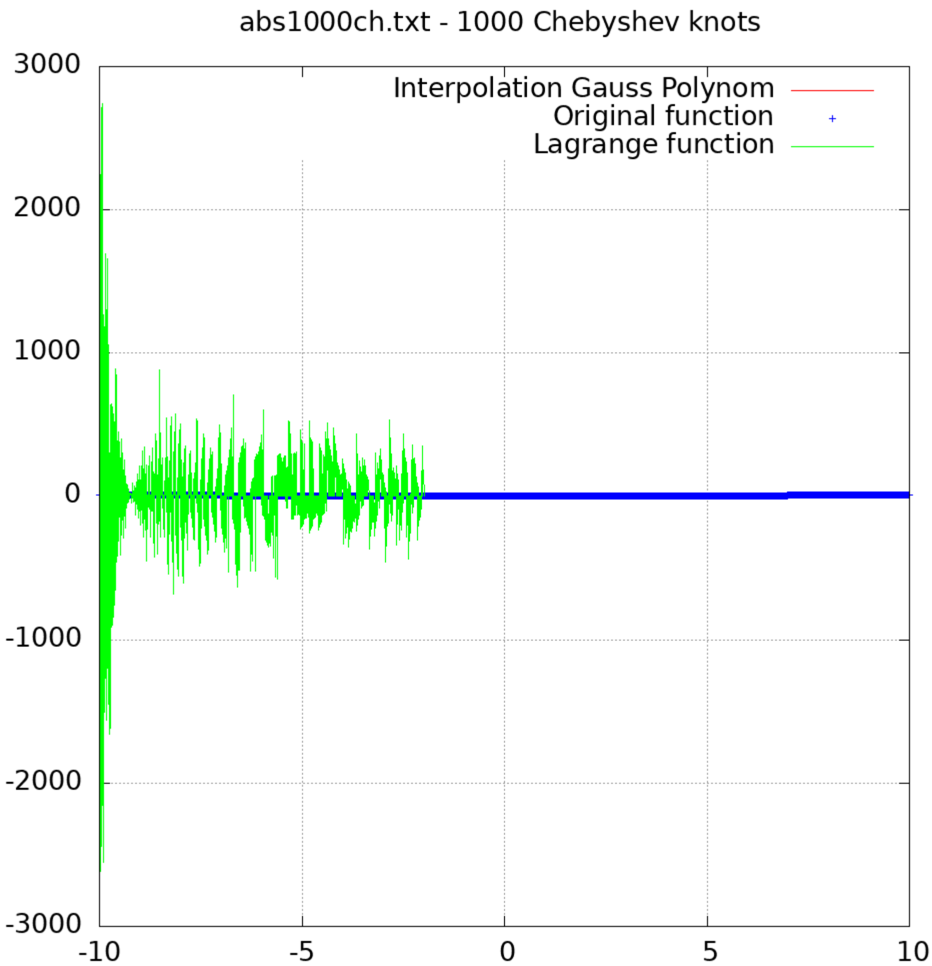

Рис. 16: Результаты теста "$|x|$".

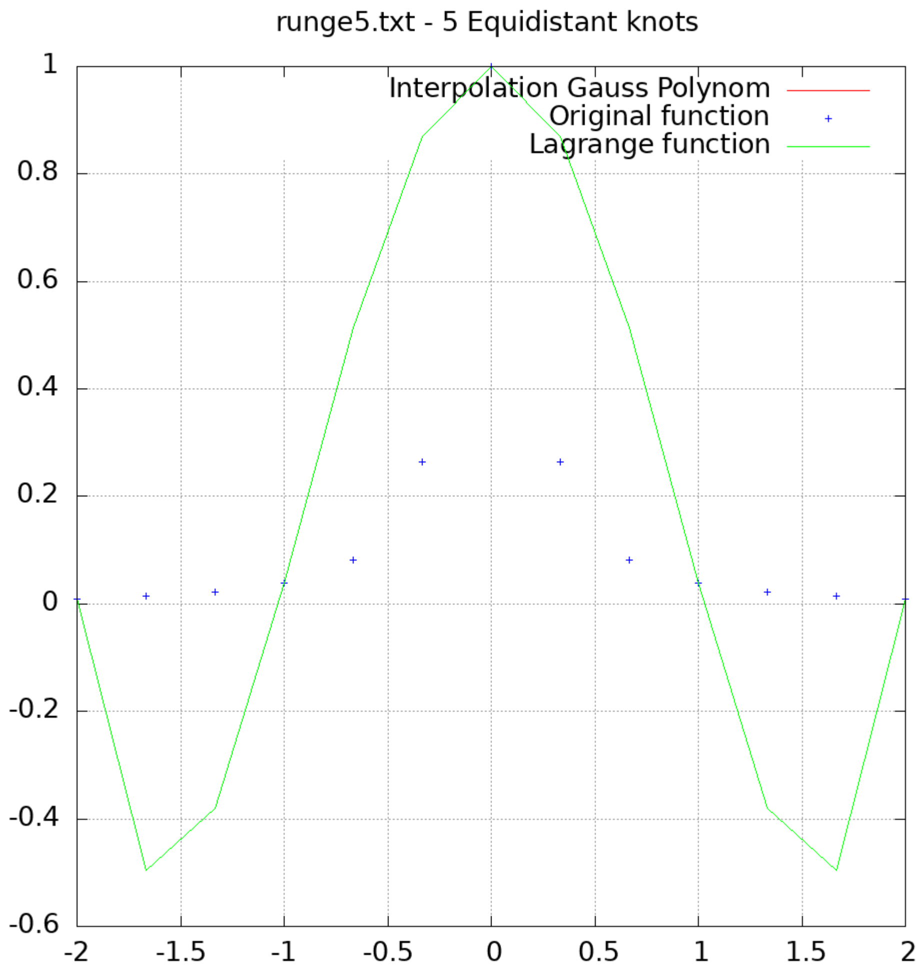

Рис. 17: Результаты теста "$|x|$".

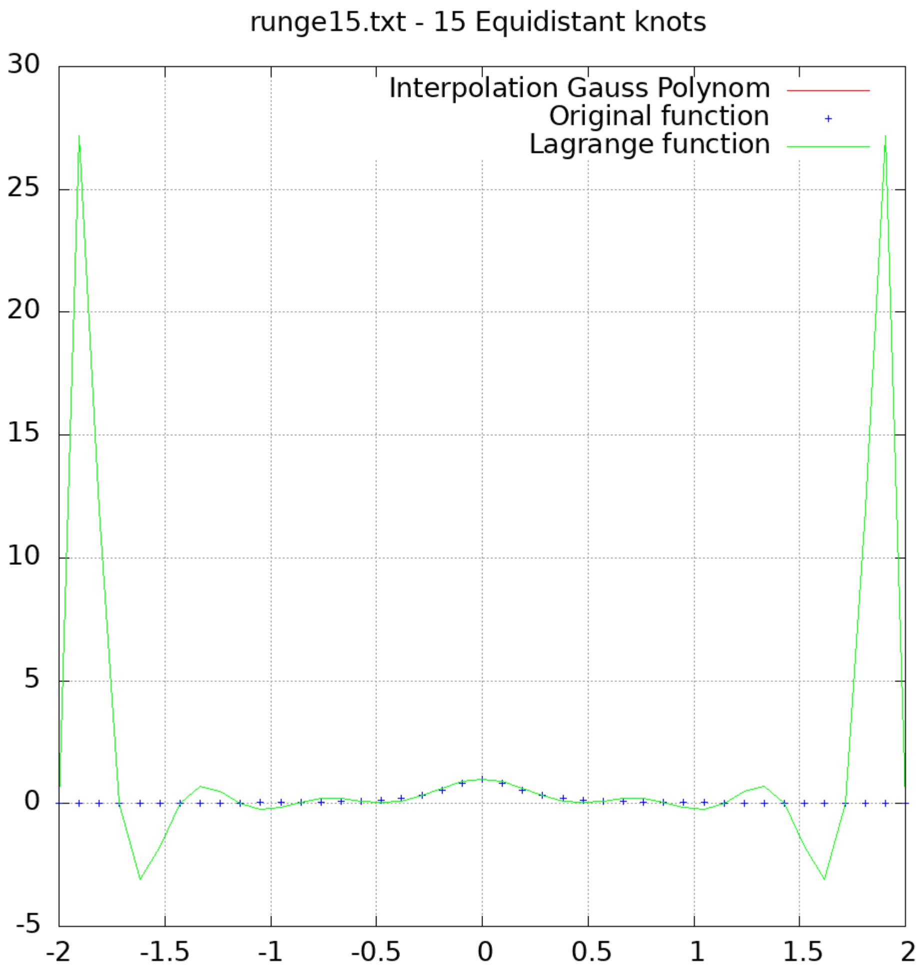

Рис. 18: Результаты теста "$|x|$".

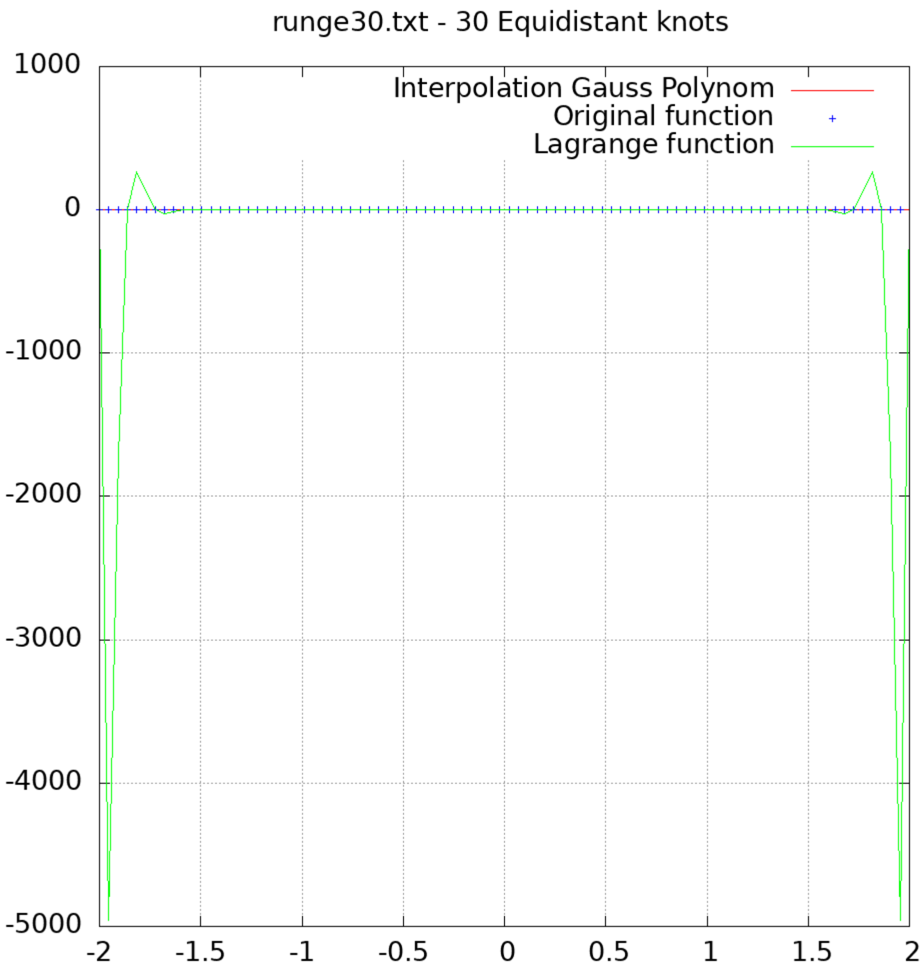

Рис. 19: Результаты теста "$|x|$".

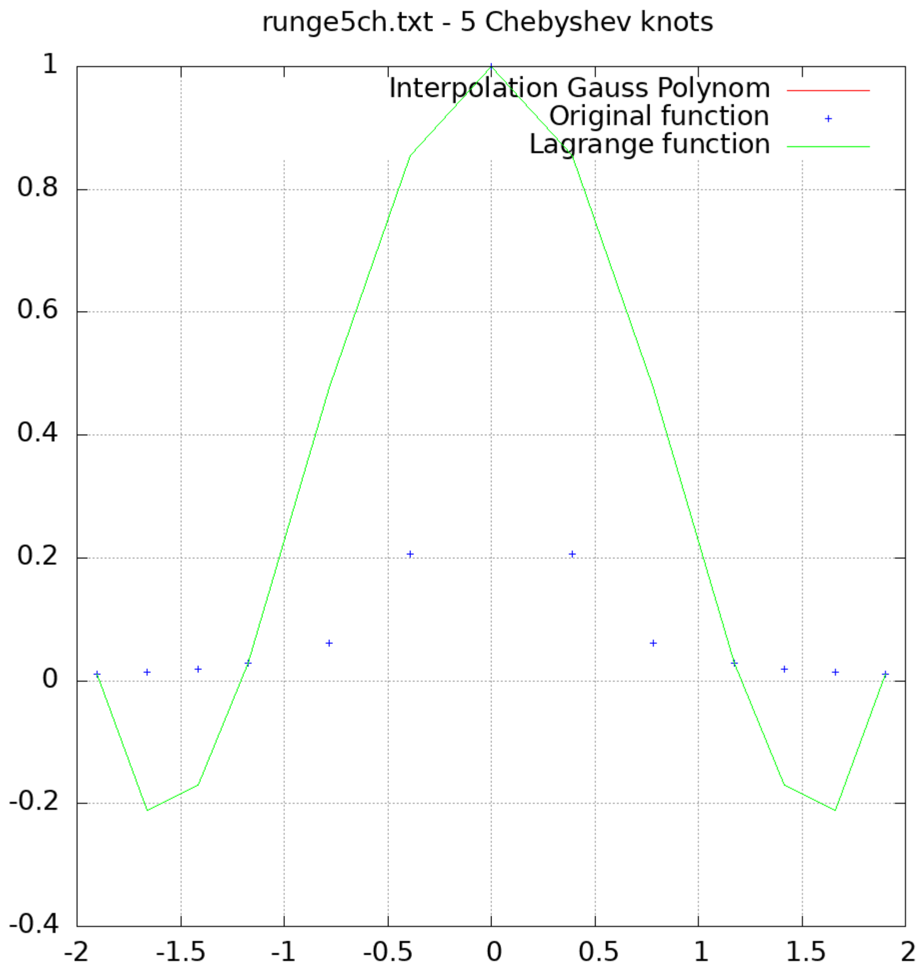

Рис. 20: Результаты теста "$|x|$".

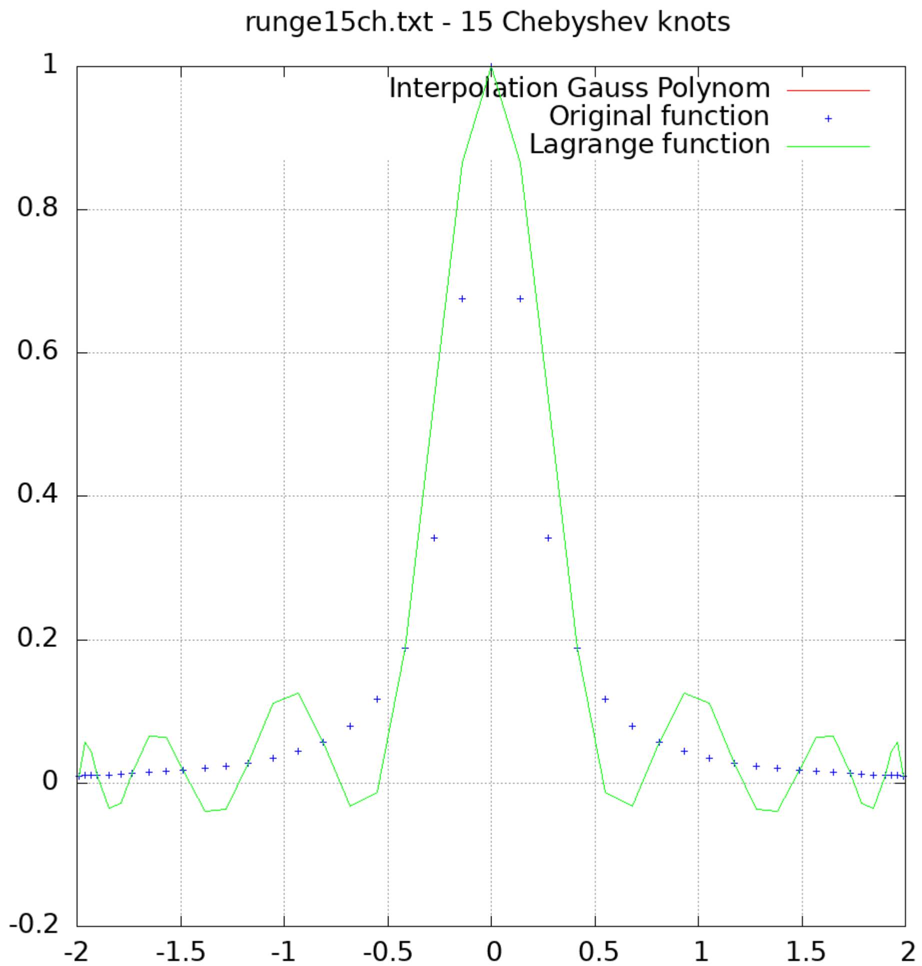

Рис. 21: Результаты теста "$|x|$".

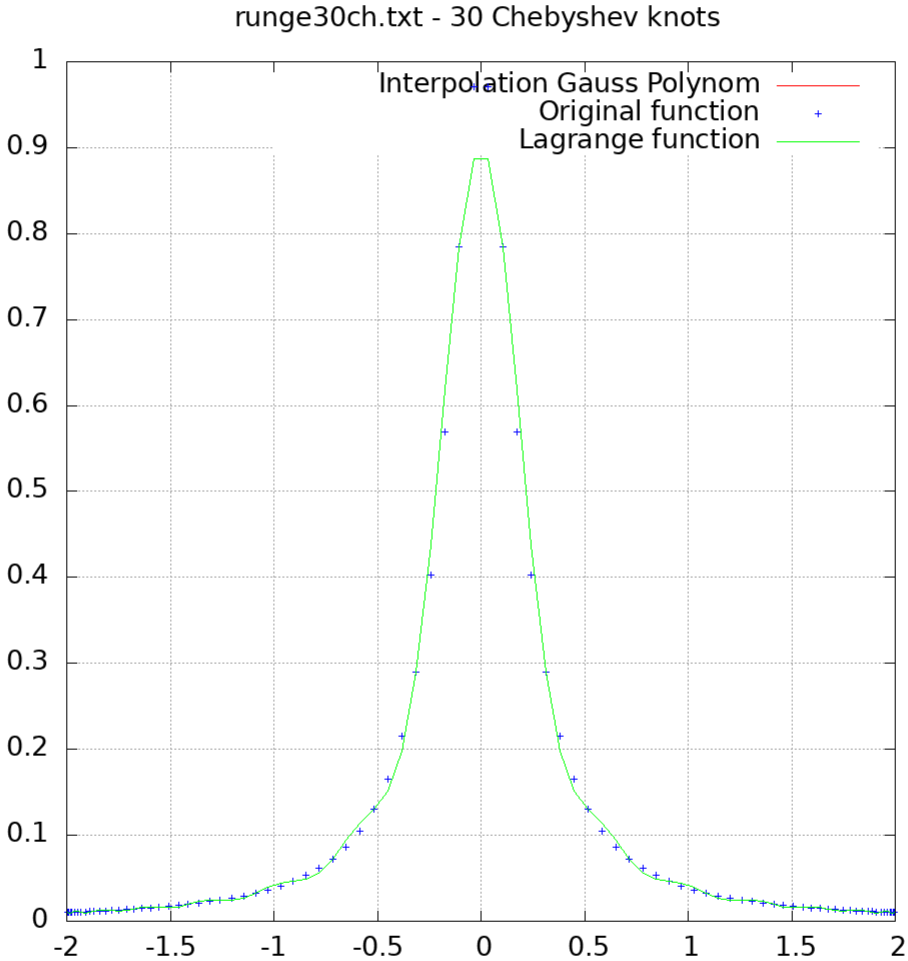

Рис. 22: Результаты теста "$|x|$".