

Задачи по курсу «Вариационное исчисление и оптимальное управление»

Осенний семестр 2023

1 Вопрос 1. Что такое абсолютная или условная конвергенция? Какая конвергенция наблюдается? Какую конвергенцию предсказывает модель Солоу-Свана? Почему?

Контекст

В неоклассической модели Солоу-Свана динамика капитала на эффективного работника определяется уравнением

$$\dot{k} = sf(k) - (n + g + \delta)k,$$

где k — капитал на эффективного работника, s — норма сбережений, n — темп роста населения, g — темп технологического прогресса, δ — норма амортизации. Производственная функция $f(k)$ обладает убывающей отдачей от капитала.

Ответ

- **Абсолютная конвергенция** означает, что экономики с более низким уровнем дохода на душу населения растут быстрее независимо от их фундаментальных характеристик.
- **Условная конвергенция** означает, что более бедные экономики растут быстрее только при прочих равных (одинаковые нормы сбережений, демография и технологии).
- **Эмпирические данные** показывают наличие *условной* конвергенции между странами.
- **Модель Солоу-Свана** предсказывает *условную* конвергенцию, поскольку каждая экономика сходится к собственному стационарному уровню капитала k^* , который зависит от параметров s , n , g и δ . Расстояние до этого стационарного уровня определяет скорость роста: чем дальше текущее k от k^* , тем выше темп роста дохода на душу населения (*стр. 10*).

Вопрос 2. Какие предположения (и почему) лежат в основе модели Солоу-Свана

Контекст

Модель Солоу-Свана является базовой неоклассической моделью экономического роста. Её ключевой элемент — производственная функция, зачастую представляемая в виде функции Cobb–Douglas:

$$Y = K^{\alpha}(AL)^{1-\alpha},$$

где Y — совокупный выпуск, K — капитал, L — труд, A — уровень технологий, а α ($0 < \alpha < 1$) отражает долю капитала в производстве. Эта функция обладает свойством постоянной отдачи от масштаба, что позволяет делить факторы производства на «эффективных» работников. Кроме того, в модели принимаются следующие предположения:

- **Производственная функция имеет убывающую отдачу капитала:** при увеличении капитала его предельная продуктивность снижается.
- **Технологический прогресс экзогенен:** темп технологического прогресса g задан извне и не зависит от решений агентов.
- **Норма сбережений постоянна и экзогенна:** доля выпуска, направляемая на инвестиции, фиксирована.
- **Рынки характеризуются совершенной конкуренцией,** что обеспечивает равенство доходов факторов их предельной продуктивности.
- **Отсутствие adjustment costs:** инвестиции мгновенно трансформируются в новый капитал.

Эти предположения упрощают анализ, обеспечивают наличие единственного стационарного равновесия и позволяют предсказать условную конвергенцию (стр. 10).

Ответ

Модель Солоу-Свана базируется на следующих ключевых предположениях:

1. **Убывающая отдача капитала.** Это означает, что по мере увеличения капитала его предельная продуктивность снижается, что гарантирует существование единственного стационарного уровня капитала.
2. **Постоянная отдача от масштаба.** Производственная функция однородна первого порядка, что позволяет анализировать рост на душу населения через разделение факторов на «эффективных» работников.
3. **Экзогенный технологический прогресс.** Темп технологического прогресса задан извне и является единственным источником долгосрочного роста, поскольку накопление капитала само по себе приводит к убывающей отдаче.
4. **Константная норма сбережений.** Фиксированная норма сбережений упрощает динамику накопления капитала и обеспечивает предсказуемость стационарного равновесия.
5. **Совершенная конкуренция.** Все агенты (фирмы и домохозяйства) получают вознаграждение в размере предельной продуктивности своих факторов, что устраняет арбитражные возможности.
6. **Отсутствие затрат на корректировку капитала.** Это упрощает инвестиционную функцию, позволяя считать, что все инвестиции мгновенно трансформируются в полезный капитал.

Эти предположения важны, поскольку они создают условия для существования единственного стационарного равновесия и позволяют аналитически вывести динамику роста, которая предсказывает условную конвергенцию между экономиками с одинаковыми фундаментальными параметрами (стр. 10).

Вопрос 3. Почему эндогенный рост производства на душу населения ограничен в модели Солоу-Свана?

Контекст

В модели Солоу-Свана выпуск на эффективного работника определяется функцией Cobb–Douglas $y = f(k)$ с убывающей отдачей от капитала ($\partial^2 f / \partial k^2 < 0$). Динамика капитала на эффективного работника описывается уравнением

$$\dot{k} = s f(k) - (n + g + \delta) k,$$

где s — норма сбережений, n — темп роста населения, g — темп технологического прогресса (экзогенен), δ — амортизация.

Ответ

Убывающая отдача капитала означает, что по мере роста k предельный продукт капитала $f'(k)$ снижается, и инвестиции всё менее эффективно превращаются в дополнительный выпуск. Поскольку технологический прогресс экзогенен, модель не содержит внутреннего механизма постоянного роста продуктивности. В результате темп роста дохода на душу населения (\dot{y}/y) постепенно падает и в стационарном состоянии стремится к нулю — то есть эндогенный рост ограничен динамикой убывающей отдачи капитала.