

# Задачи по курсу «Вариационное исчисление и оптимальное управление»

Осенний семестр 2023

# 1 Вопрос 1. Что такое абсолютная или условная конвергенция? Какая конвергенция наблюдается? Какую конвергенцию предсказывает модель Солоу-Свана? Почему?

## Контекст

В неоклассической модели Солоу-Свана динамика капитала на эффективного работника определяется уравнением

$$\dot{k} = sf(k) - (n + g + \delta)k,$$

где  $k$  — капитал на эффективного работника,  $s$  — норма сбережений,  $n$  — темп роста населения,  $g$  — темп технологического прогресса,  $\delta$  — норма амортизации. Производственная функция  $f(k)$  обладает убывающей отдачей от капитала.

## Ответ

- **Абсолютная конвергенция** означает, что экономики с более низким уровнем дохода на душу населения растут быстрее независимо от их фундаментальных характеристик.
- **Условная конвергенция** означает, что более бедные экономики растут быстрее только при прочих равных (одинаковые нормы сбережений, демография и технологии).
- **Эмпирические данные** показывают наличие *условной* конвергенции между странами.
- **Модель Солоу-Свана** предсказывает *условную* конвергенцию, поскольку каждая экономика сходится к собственному стационарному уровню капитала  $k^*$ , который зависит от параметров  $s$ ,  $n$ ,  $g$  и  $\delta$ . Расстояние до этого стационарного уровня определяет скорость роста: чем дальше текущее  $k$  от  $k^*$ , тем выше темп роста дохода на душу населения (*стр. 10*).

## Вопрос 2. Какие предположения (и почему) лежат в основе модели Солоу-Свана

### Контекст

Модель Солоу-Свана является базовой неоклассической моделью экономического роста. Её ключевой элемент — производственная функция, зачастую представляемая в виде функции Cobb–Douglas:

$$Y = K^{\alpha}(AL)^{1-\alpha},$$

где  $Y$  — совокупный выпуск,  $K$  — капитал,  $L$  — труд,  $A$  — уровень технологий, а  $\alpha$  ( $0 < \alpha < 1$ ) отражает долю капитала в производстве. Эта функция обладает свойством постоянной отдачи от масштаба, что позволяет делить факторы производства на «эффективных» работников. Кроме того, в модели принимаются следующие предположения:

- **Производственная функция имеет убывающую отдачу капитала:** при увеличении капитала его предельная продуктивность снижается.
- **Технологический прогресс экзогенен:** темп технологического прогресса  $g$  задан извне и не зависит от решений агентов.
- **Норма сбережений постоянна и экзогенна:** доля выпуска, направляемая на инвестиции, фиксирована.
- **Рынки характеризуются совершенной конкуренцией,** что обеспечивает равенство доходов факторов их предельной продуктивности.
- **Отсутствие adjustment costs:** инвестиции мгновенно трансформируются в новый капитал.

Эти предположения упрощают анализ, обеспечивают наличие единственного стационарного равновесия и позволяют предсказать условную конвергенцию (стр. 10).

### Ответ

Модель Солоу-Свана базируется на следующих ключевых предположениях:

1. **Убывающая отдача капитала.** Это означает, что по мере увеличения капитала его предельная продуктивность снижается, что гарантирует существование единственного стационарного уровня капитала.
2. **Постоянная отдача от масштаба.** Производственная функция однородна первого порядка, что позволяет анализировать рост на душу населения через разделение факторов на «эффективных» работников.
3. **Экзогенный технологический прогресс.** Темп технологического прогресса задан извне и является единственным источником долгосрочного роста, поскольку накопление капитала само по себе приводит к убывающей отдаче.
4. **Константная норма сбережений.** Фиксированная норма сбережений упрощает динамику накопления капитала и обеспечивает предсказуемость стационарного равновесия.
5. **Совершенная конкуренция.** Все агенты (фирмы и домохозяйства) получают вознаграждение в размере предельной продуктивности своих факторов, что устраняет арбитражные возможности.
6. **Отсутствие затрат на корректировку капитала.** Это упрощает инвестиционную функцию, позволяя считать, что все инвестиции мгновенно трансформируются в полезный капитал.

Эти предположения важны, поскольку они создают условия для существования единственного стационарного равновесия и позволяют аналитически вывести динамику роста, которая предсказывает условную конвергенцию между экономиками с одинаковыми фундаментальными параметрами (стр. 10).

### Вопрос 3. Почему эндогенный рост производства на душу населения ограничен в модели Солоу-Свана?

#### Контекст

В модели Солоу-Свана выпуск на эффективного работника определяется функцией Cobb–Douglas  $y = f(k)$  с убывающей отдачей от капитала ( $\partial^2 f / \partial k^2 < 0$ ). Динамика капитала на эффективного работника описывается уравнением

$$\dot{k} = s f(k) - (n + g + \delta) k,$$

где  $s$  — норма сбережений,  $n$  — темп роста населения,  $g$  — темп технологического прогресса (экзогенен),  $\delta$  — амортизация.

#### Ответ

Убывающая отдача капитала означает, что по мере роста  $k$  предельный продукт капитала  $f'(k)$  снижается, и инвестиции всё менее эффективно превращаются в дополнительный выпуск. Поскольку технологический прогресс экзогенен, модель не содержит внутреннего механизма постоянного роста продуктивности. В результате темп роста дохода на душу населения  $(\dot{y}/y)$  постепенно падает и в стационарном состоянии стремится к нулю — то есть эндогенный рост ограничен динамикой убывающей отдачи капитала.

## Вопрос 4. Что такое «золотое» правило сбережения в модели Солоу-Свана?

### Контекст

В модели Солоу-Свана потребление на эффективного работника определяется как разница между выпуском и инвестициями:

$$c = f(k) - (n + g + \delta)k,$$

где  $f(k)$  — производственная функция Cobb–Douglas,  $n$  — темп роста населения,  $g$  — технологический прогресс (экзогенный),  $\delta$  — амортизация.

### Ответ

«Золотое» правило сбережения — это норма сбережений  $s^*$ , которая максимизирует потребление на эффективного работника в стационарном состоянии. Условие золотого правила:

$$f'(k^*) = n + g + \delta,$$

то есть предельная продуктивность капитала равна сумме темпов роста населения, технологического прогресса и амортизации. Это обеспечивает наибольшее возможное потребление на душу населения в долгосрочном равновесии.

## Вопрос 5. Чем лучше вариант модели с человеческим капиталом?

### Контекст

В расширенной версии модели Солоу (Mankiw–Romer–Weil, QJE 1992) вводится человеческий капитал  $H$ . Производственная функция принимает вид

$$F(K, H, L) = K^\alpha H^\beta (AL)^{1-\alpha-\beta},$$

где  $K$  — физический капитал,  $H$  — человеческий капитал,  $L$  — труд,  $A$  — уровень технологий;  $\alpha, \beta \in (0, 1)$ ,  $\alpha + \beta < 1$ . Динамика накопления задаётся

$$\dot{K} = s_K K^\alpha H^\beta (AL)^{1-\alpha-\beta} - \delta K, \quad \dot{H} = s_H K^\alpha H^\beta (AL)^{1-\alpha-\beta} - \delta H.$$

(стр. 40)

### Ответ

Модель с человеческим капиталом превосходит стандартный Солоу-Свана, поскольку:

- устраняет чрезмерную убывающую отдачу от одного фактора, позволяя росту per capita зависеть от накопления как физического, так и человеческого капитала;
- лучше объясняет кросс-страновые различия в доходе через различия в накоплении человеческого капитала;
- предсказывает более высокие темпы роста для стран с низким уровнем обоих капиталов (условная конвергенция) и демонстрирует более высокую  $R^2$  в регрессионных тестах;
- согласуется с эмпирическими данными лучше стандартной модели Солоу (стр. 40) .

## Вопрос 6. Чем вызвано сглаживание потребления в модели Рамсея–Касса–Купмана

### Контекст

Модель Рамсея–Касса–Купмана — это непрерывно-временная модель межвременного оптимального потребления общества. Социальный планировщик максимизирует суммарную дисконтированную полезность

$$\max_{c(t) \geq 0} \int_0^{\infty} e^{-\beta t} u(c(t)) dt$$

при динамике капитала на эффективного работника

$$\dot{k} = f(k) - c - (n + g + \delta)k,$$

где  $\beta$  — коэффициент времени предпочтения,  $u(c)$  — строго возрастающая, строго вогнутая функция полезности (стр. 50).

Первый порядок условия оптимальности (Эйлерово уравнение) связывает темп роста потребления с разницей между предельной ставкой доходности  $r$  и коэффициентом дисконтирования:

$$\frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = \frac{1}{\theta} (r(t) - \rho),$$

где  $\theta = -u''(c)/u'(c) > 0$  — коэффициент межвременной эластичности замещения (стр. 50).

### Ответ

Сглаживание потребления происходит потому, что планировщик равномерно распределяет потребление во времени, стремясь максимизировать суммарную полезность при вогнутой функции полезности. Эйлерово уравнение требует, чтобы относительный темп роста потребления был пропорционален разнице между рентабельностью капитала  $r$  и субъективной ставкой дисконтирования  $\rho$ . Поскольку  $u$  строго вогнута ( $\theta > 0$ ), любое резкое изменение потребления снижает общую полезность, поэтому оптимальный путь характеризуется плавным изменением  $c(t)$ , а не скачкообразными колебаниями (стр. 50).

## Вопрос 7. Чем отличаются централизованный и децентрализованный варианты экономики Рамсея?

### Контекст

Модель Рамсея описывает оптимальное межвременное распределение потребления и накопления капитала. **Централизованный вариант** (социальный планировщик) формулируется как задача максимизации суммарной дисконтированной полезности

$$\max_{c(t)} \int_0^{\infty} e^{-\beta t} u(c(t)) dt$$

при динамике капитала

$$\dot{k} = f(k) - c - (n + g + \delta)k.$$

**Децентрализованный вариант** состоит из двух оптимизационных задач:

- Домохозяйство выбирает  $c(t)$  для максимизации собственной полезности, принимая ренту  $r(t)$  и заработную плату  $w(t)$  как данные.
- Фирма максимизирует прибыль, нанимая капитал и труд при совершенной конкуренции.

Равновесие достигается, когда решения агентов воспроизводят социально оптимальную траекторию (стр. 50).

### Ответ

Главное отличие — в механизме принятия решений:

- В централизованном варианте единый планировщик выбирает  $c(t)$  так, чтобы максимизировать общественное благосостояние, напрямую контролируя накопление капитала.
- В децентрализованном варианте оптимизация разбита между домохозяйствами (решают, сколько потреблять и сберегать) и фирмами (решают, сколько инвестировать), взаимодействующими через рынок факторов при равновесных ценах  $r(t)$  и  $w(t)$ .

Несмотря на различие в формулировке, при совершенной конкуренции и отсутствии рыночных искажений оба варианта дают одну и ту же динамику потребления и капитала — социально оптимальное равновесие (стр. 50).



## Вопрос 8. Определение общего равновесия

### Контекст

В децентрализованной версии модели Рамсея «общее равновесие» означает такое состояние, при котором одновременно выполняются оптимальные решения всех агентов (домохозяйств и фирм) и все рынки (товаров, капитала и труда) сбалансированы. Для модели Рамсея это формализуется системой уравнений общего равновесия, включающей:

- Условие оптимального потребления домохозяйства (Эйлерово уравнение).
- Условие оптимального выбора капитала фирмой (предельная продуктивность капитала равна ставке доходности  $r$ ).
- Рыночное равновесие капитала: совокупные сбережения домохозяйств равны инвестициям фирм.
- Рыночное равновесие труда: спрос фирм на труд равен предложению.

Все эти уравнения совместно определяют динамику  $c(t), k(t), r(t), w(t)$  в экономике в соответствии с социально оптимальным траекторией (стр. 50).

### Ответ

Общее равновесие — это состояние, при котором:

$$(i) \quad \frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta}(r - \rho), \quad (ii) \quad r = f'(k), \quad (iii) \quad s f(k) = (n + g + \delta)k + c, \quad (iv) \quad \text{рынок труда сбалансирован,}$$

то есть решения агентов оптимальны и все рынки одновременно очищаются. Именно такое состояние децентрализованной экономики воспроизводит траекторию социально оптимального (централизованного) решения модели Рамсея.

## Вопрос 9. Зачем и где нужно условие отсутствия пирамид (no-Ponzi condition)?

### Контекст

При оптимизации в непрерывном времени (модель Рамсея–Касса–Купманса или обобщённые модели межвременного потребления) агенты могут теоретически наращивать бесконечный долг, финансируя текущие расходы за счёт будущих обязательств. Чтобы исключить такие «Понци-схемы», вводится *условие отсутствия пирамид*:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\int_0^t r(\tau) d\tau} A(t) \geq 0,$$

где  $A(t)$  — накопленное богатство (стр. 50).

### Ответ

Это условие необходимо, чтобы гарантировать экономическую состоятельность решений: запрещает бесконечное увеличение задолженности и требует, чтобы приведённая стоимость активов не была отрицательной в долгосрочном пределе. Без него оптимизационная задача не имела бы смысла, поскольку агент мог бы поддерживать любое текущее потребление, лишь наращивая долг, не заботясь об его погашении. Условие применяется везде, где модели допускают бесконечную временную шкалу и накопление финансовых обязательств — в моделях Солоу, Рамсея и OLG — и обеспечивает конечность оптимального пути потребления и капитала (стр. 50).

## Вопрос 10. Что искажает искажающее налогообложение и к чему это приводит?

### Контекст

Искажающее налогообложение в модели Рамсея появляется при финансировании государственных расходов налогами на доход от капитала или потребления. В децентрализованном равновесии правительство устанавливает налоговую ставку, влияющую на предельную отдачу капитала  $r$  и чистые доходы домашних хозяйств.

### Ответ

Налог на доход от капитала снижает чистую ставку доходности  $r$ , искажая решение домашних хозяйств о сбережениях и инвестициях. Это приводит к уменьшению накопления капитала  $k$ , снижению долгосрочного уровня выпуска и потребления на душу населения. В итоге экономика оказывается в состоянии *динамической неэффективности* по сравнению с социально оптимальным траекторным путём (стр. 50).

## Вопрос 11. Что такое Рикардианская эквивалентность?

### Контекст

Рикардианская эквивалентность — это теоретический результат в модели межвременного выбора, согласно которому способ финансирования государственных расходов (через налоги или долг) не влияет на оптимальное потребление частных домохозяйств. В двухпериодной модели с неопределённостью домохозяйство максимизирует

$$u(c_1) + \frac{1}{1+\rho} E[u(c_2)]$$

при бюджете  $c_2 = (1+r_i)(y_1 - c_1) + y_2$ . Условие первого порядка даёт

$$u'(c_1) = \frac{1+r}{1+\rho} E[u'(c_2)].$$

Если государственный долг не возвратен (no-Ponzi), то ожидаемая доходность  $E[r_i]$  совпадает с рыночной ставкой  $r$ , и ковариационный член обнуляется. Тогда

$$u'(c_1) = \frac{1+r}{1+\rho} E[u'(c_2)],$$

что означает, что текущее потребление не зависит от способа финансирования дефицита — будь то налоги или выпуск долга (стр. 87–88).

### Ответ

Рикардианская эквивалентность утверждает, что при совершенных рынках и рациональных ожиданиях финансирование дефицита через выпуск государственного долга не меняет оптимального потребления домашних хозяйств по сравнению с немедленным налогообложением. Домохозяйства учитывают будущие налоговые обязательства, поэтому текущий дефицит бюджета не влияет на их потребление, а экономическая политика становится нейтральной относительно временного профиля потребления.

## Вопрос 12. Какие отличия производственной функции в АК-модели от неоклассической производственной функции? Как понимается капитал?

### Контекст

АК-модель — простейшая эндогенная модель роста, в которой предполагается *постоянная отдача от масштаба капитала*. Производственная функция имеет линейный вид:

$$Y = AK,$$

где  $A$  — константа технологического уровня,  $K$  — агрегированный капитал. В отличие от неоклассической Cobb–Douglas функции  $Y = K^\alpha (AL)^{1-\alpha}$  ( $\alpha < 1$ ), здесь нет убывающей предельной отдачи от капитала (стр. 9).

### Ответ

В АК-модели производственная функция линейна в капитале, что означает отсутствие убывающей отдачи: каждый дополнительный рубль капитала порождает постоянный прирост выпуска. Капитал трактуется агрегированно (включает физический и человеческий капитал, технологии и организации), без разграничения на факторы и без амортизации, обеспечивая непрерывный положительный рост дохода на душу населения без внешнего технологического прогресса.

### Вопрос 13. Возможен ли неограниченный эндогенный рост подушевого потребления в АК-модели? Почему?

#### Контекст

АК-модель — простейшая эндогенная модель роста, в которой производственная функция линейна в капитале:

$$Y = AK,$$

что означает *постоянную отдачу от капитала* и отсутствие убывающей отдачи. В пер-capita терминах динамика потребления определяется Эйлеровым уравнением

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{f'(k) - (\rho + \delta + n + g)}{\theta},$$

где  $f'(k) = A$  постоянна (стр. 46).

#### Ответ

Да — в АК-модели per capita потребление может расти неограниченно. Поскольку предельная продуктивность капитала  $f'(k) = A$  постоянна и превышает дисконтную ставку  $\rho + \delta + n + g$ , темп роста потребления остаётся положительным даже при высоком уровне капитала. Отсутствие убывающей отдачи обеспечивает постоянный положительный рост per capita без необходимости внешнего технологического прогресса.

## Вопрос 14. Что такое $q$ -Тобина?

### Контекст

В неоклассической теории инвестиций Тобин предложил показатель  $q$ , который отражает отношение рыночной стоимости капитала к его восстановительной стоимости. В модели с инвестиционными затратами  $q(t)$  определяется как «marginal  $q$ »:

$$q(t) = \frac{p(t)k(t) + \chi \hat{I}(t)}{\hat{k}(t)},$$

где  $p(t)$  — цена капитала,  $\hat{k}$  — объем капитала,  $\hat{I}$  — инвестиции,  $\chi$  — коэффициент adjustment cost (стр. 27).

Средний  $q$  ( $\bar{q}$ ) равен дисконтированной сумме ожидаемой предельной продуктивности капитала:

$$\bar{q}(t_0) = \frac{1}{k_0} \int_{t_0}^{\infty} e^{-r(s-t_0)} (f'(\hat{k}(s)) - \chi' \hat{I}(s)) ds.$$

### Ответ

$q$ -Тобина измеряет привлекательность новых инвестиций:

$q > 1 \quad \Rightarrow \quad$  инвестиции приносят прибыль выше издержек,

$q < 1 \quad \Rightarrow \quad$  инвестиции менее рентабельны и должны сокращаться.

Таким образом,  $q$  служит сигналом для фирм о целесообразности наращивания капитала и обеспечивает связь рыночных цен с реальными инвестиционными решениями.

## Вопрос 15. Как влияют перераспределительная и накопительная пенсионные системы на равновесие в модели с перекрывающимися поколениями?

### Контекст

В моделях с перекрывающимися поколениями (OLG) рассматриваются механизмы распределения доходов между различными поколениями, что существенно влияет на динамику сбережений, накоплений и инвестиций. Два основных типа пенсионных систем:

- **Перераспределительная пенсионная система (PAYG):** в этой системе пенсионные выплаты текущим пенсионерам финансируются за счёт взносов работающего населения. Такой механизм приводит к прямому перераспределению ресурсов от молодого поколения к пожилым и, как следствие, снижает стимулы для самостоятельного накопления капитала. Подобное воздействие подробно анализируется на стр. 86–88.
- **Накопительная пенсионная система:** здесь пенсии формируются на основе индивидуальных сбережений, которые аккумулируются и инвестируются на протяжении трудовой жизни. Это создает дополнительные стимулы для увеличения личных сбережений, что способствует формированию более высокого уровня капитала. В документе приведён анализ влияния накопительной системы на инвестиционную динамику (см. стр. 88–90).

### Ответ

- **Перераспределительная пенсионная система (PAYG):** за счёт того, что пенсионные выплаты осуществляются за счет текущих взносов работающего поколения, домохозяйства могут снизить личные сбережения, ожидая получения пенсий. Это приводит к снижению общего уровня накоплений и инвестиций, что в свою очередь ограничивает долгосрочный рост капитала и выпуска на душу населения (см. стр. 86–88).
- **Накопительная пенсионная система:** поскольку пенсионные выплаты зависят от накопленных средств, домохозяйства стимулированы к увеличению сбережений. Более высокие сбережения способствуют накоплению капитала и росту инвестиций, что положительно влияет на экономический рост. Однако при чрезмерном накоплении возможны вопросы динамической эффективности, если избыток капитала приводит к снижению предельной отдачи (см. стр. 88–90).

Таким образом, выбор между перераспределительной и накопительной пенсионными системами существенно влияет на равновесие в модели с перекрывающимися поколениями. Перераспределительная система может снижать стимулы к сбережениям и замедлять рост капитала, тогда как накопительная система, напротив, стимулирует накопление и способствует долгосрочному экономическому росту.



## Вопрос 16. Что такое динамическая неэффективность?

### Контекст

Динамическая неэффективность возникает в моделях экономического роста, когда экономика накапливает капитал сверх того уровня, при котором потребление на душу населения максимально. При этом предельная отдача капитала  $f'(k)$  оказывается ниже суммы темпов роста населения, технологического прогресса и нормы амортизации, то есть выполняется неравенство

$$f'(k) < n + g + \delta.$$

В такой ситуации сокращение капитала может привести к повышению текущего потребления, поскольку ресурсы используются не оптимально. (см. стр. 51 и стр. 107).

### Ответ

Динамическая неэффективность характеризуется тем, что экономика накапливает капитал в объёмах, превышающих оптимальный (золотой) уровень, при котором потребление на душу населения максимально. Если при избытке капитала предельная отдача  $f'(k)$  становится ниже суммы темпов роста населения, технологического прогресса и амортизации ( $n + g + \delta$ ), то сокращение капитала ведёт к увеличению текущего потребления без негативных последствий для будущего. Таким образом, динамическая неэффективность сигнализирует о том, что избыточные накопления препятствуют достижению максимума социального благосостояния, и существуют возможности для улучшения распределения ресурсов (см. стр. 51 и стр. 107).