Задачи по курсу «Вариационное исчисление и оптимальное управление»

Осенний семестр 2023

Аннотация

В документе собраны решения задач к экзамену по вариационному исчислению и оптимальному управлению осеннего семестра 2023 года. Лектор: Васильева А. А. Задачи могут содержать ошибки и опечатки. Исходники, материалы и информацию по участию в дополнении теха можно найти тут.

Задача 1. Предварительный материал из лекции (Гармонический осциллятор):
Рассмотрим задачу:

$$\mathcal{L}(x) := \int_0^{T_0} \left(\dot{x}^2 - x^2\right) dt \to \inf, \quad x(0) = x\left(T_0\right) = 0$$

Тогда $L_{\dot{x}} = 2\dot{x}, L_x = -2x$; уравнение Эйлера имеет вид $-\frac{d}{dt}(2\dot{x}) - 2x = 0$, т.е. $\ddot{x} + x = 0$.

Заметим, что $\hat{x} = 0$ является допустимой экстремалью. Выясним, является ли она точкой локального или глобального минимума. Для этого используем следующий прием.

Пусть $\omega \in C^1\left[0, T_0\right]$. Тогда

$$\int_0^{T_0} \left(\dot{\omega}x^2 + 2\omega x\dot{x}\right) dt = \int_0^{T_0} \frac{d}{dt}\left(\omega x^2\right) dt = \omega x^2\Big|_0^{T_0} = 0\,, \text{ если } x \in C^1_{0,0}\left[0, T_0\right].$$

Значит, можно добавить этот ноль к интегралу:

$$\int_0^{T_0} \left(\dot{x}^2 - x^2\right) dt = \int_0^{T_0} \left(\dot{x}^2 - x^2 - \dot{\omega}x^2 - 2\omega x\dot{x}\right) dt$$

Подберем ω так, чтобы $\dot{x}^2 - x^2 - \dot{\omega}x^2 - 2\omega x\dot{x}$ было полным квадратом: $\dot{x}^2 - x^2 - \dot{\omega}x^2 - 2\omega x\dot{x} = (\dot{x} - \omega x)^2$, т.е. $-1 - \dot{\omega} = \omega^2$. (Тогда $\int_0^{T_0}\left(\dot{x}^2 - x^2\right) dt = \int_0^{T_0}(\dot{x} - \omega x)^2 dt \geq 0.$) Получаем, что $\omega = \operatorname{ctg}\left(t - t_*\right)$.

Задача

1) Пусть $T_0 > \pi,\ x(t) = c\sin\frac{\pi t}{T_0}$. Показать, что $\mathcal{L}(x) < 0$ при $c \neq 0$. Почему проведенные выше рассуждения не проходят при $T_0 > \pi$ и проходят при $T_0 < \pi$?
2) Показать, что $\int_0^{\pi}\left(\dot{x}^2 - x^2\right) dt = \int_0^{\pi}(\dot{x} - x\cdot\operatorname{ctg} t)^2 dt \geqslant 0$.

Решение. 1) Вычисляем:

$$\int_0^{T_0} \left(\dot{x}^2 - x^2\right) dt = c^2 \int_0^{T_0} \left(\frac{\pi^2}{T_0}\cos^2\frac{\pi t}{T_0} - \sin^2\frac{\pi t}{T_0}\right) dt =$$
$$= \frac{c^2}{2}\left(\frac{\pi^2}{T_0^2}\int_0^{T_0}\left(1 + \cos\frac{2\pi t}{T_0}\right) dt - \int_0^{T_0}\left(1 - \cos\frac{2\pi t}{T_0}\right) dt\right) = \frac{c^2 T_0}{2}\left(\frac{\pi^2}{T_0^2} - 1\right) < 0.$$

Напомним, что мы подбирали гладкую функцию ω так, чтобы

$$\int_0^{T_0}\left(\dot{x}^2 - x^2\right) dt = \int_0^{T_0}(\dot{x} - \omega x)^2 dt$$

при этом ω была решением дифференциального уравнения $\dot{\omega} = -1 - \omega^2$. Значит, $\omega(t) = \operatorname{ctg}(t - a)$.

Если $T_0 < \pi$, то можно подобрать a (в данном случае подойдет $a = 0$) так, чтобы $\operatorname{ctg}(t - a)$ была гладкой на $[0, T_0]$. Если $T_0 > \pi$, то для любого a функция ω будет иметь точку разрыва в интервале $(0, T_0)$, т.к. ctg гладко определен на $(\pi n,\ \pi n + \pi)$ и имеет разрывы в точках πn.

2) Преобразуем правую часть условия:

$$0 \leq \int_0^{\pi}(\dot{x} - x\cdot\operatorname{ctg} t)^2 dt = \int_0^{\pi}\left(\dot{x}^2 - 2x\dot{x}\operatorname{ctg} t + x^2\operatorname{ctg}^2 t\right) dt =$$

интегрируем среднее слагаемое по частям и используем $\dot{ctg} + ctg^2 = -1$:

$$= \int_0^{\pi}\left(\dot{x}^2 + x^2(\operatorname{ctg} t)' + x^2\operatorname{ctg}^2 t\right) dt + x^2(t)\operatorname{ctg} t\Big|_0^{\pi} = \int_0^{\pi}\left(\dot{x}^2 - x^2\right) dt + x^2(t)\operatorname{ctg} t\Big|_0^{\pi}.$$

Так как $x \in C^1[0, \pi]$ и $x(0) = 0$, то $x(t) = O(t)$ в окрестности нуля; так как $\operatorname{ctg} t = O(1/t)$ в окрестности нуля, то $x^2(t)\operatorname{ctg} t = O(t) \underset{t\to 0}{\to} 0$. Аналогично $x^2(t)\operatorname{ctg} t = O(\pi - t) \underset{t\to\pi}{\to} 0$. Значит, $x^2(t)\operatorname{ctg} t\Big|_0^{\pi} = 0$ и равенство доказано.

Задача 2. Доказать, что в задаче

$$\int_0^1 t^{1/2}\dot{x}^2 dt \to \inf, \quad x(0)=0, \quad x(1)=1$$

точки локального минимума в пространстве $C^1[0,1]$ не существует; найти точку глобального минимума для той же задачи в пространстве

$$W = \left\{ f \in AC[0,1] : \int_0^1 t^{1/2}\dot{x}^2 dt < \infty \right\}$$

Решение. Напишем уравнение Эйлера: $\frac{d}{dt}\left(2t^{1/2}\dot{x}\right) = 0$, откуда $t^{1/2}\dot{x} = c$. Значит, $x = 2ct^{1/2} + b$. Подставляя граничные условия, получаем $x = t^{1/2} \notin C^1[0,1]$.

Пусть $h \in W, h(0) = h(1) = 0$. Тогда

$$\int_0^1 t^{1/2}(\dot{x}+\dot{h})^2 dt - \int_0^1 t^{1/2}\dot{x}^2 dt = \int_0^1 t^{1/2}\left(2\dot{x}\dot{h} + \dot{h}^2\right) dt = \int_0^1 t^{1/2}\left(t^{-1/2}\dot{h} + \dot{h}^2\right) dt =$$
$$= \int_0^1 \dot{h} dt + \int_0^1 t^{1/2}\dot{h}^2 dt = \int_0^1 t^{1/2}\dot{h}^2 dt \geqslant 0.$$

Задача 3. Доказать, что в задаче

$$\int_0^1 \left(1-\dot{x}^2\right)^2 dt \to \ \inf, \quad x(0)=0, \quad x(1)=0$$

точки локального минимума в пространстве $C^1[0,1]$ не существует, при этом точная нижняя грань функционала равна 0.

Решение. Заметим, что $\int_0^1 \left(1-\dot{x}^2\right)^2 dt \geqslant 0$. Если $\int_0^1 \left(1-\dot{x}^2\right)^2 dt = 0$, то $\dot{x}^2(t) \equiv 1$, откуда $\dot{x}(t) = \pm 1$ для любого t. Так как $\dot{x}$ непрерывна, то $\dot{x} \equiv 1$ или $\dot{x} \equiv -1$. Получаем противоречие с граничными условиями. Значит, нулевое значение не достигается.

Теперь покажем, что для любого $\varepsilon > 0$ существует допустимая функция $x \in C^1[0,1]$ такая, что $\int_0^1 \left(1-\dot{x}^2\right)^2 dt \leqslant \varepsilon$. Положим

$$z(t) = \begin{cases} 1, \quad 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2} - \delta \\ \frac{1}{\delta}\left(\frac{1}{2} - t\right), \quad \frac{1}{2} - \delta \leqslant t \leqslant \frac{1}{2} + \delta, \\ -1, \quad \frac{1}{2} + \delta \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

$x(t) = \int_0^t z(s)ds$. Тогда $x \in C^1[0,1], x(0) = x(1) = 0$. При этом $|\dot{x}| \leqslant 1$. Значит,

$$\int_0^1 \left(1-\dot{x}^2\right)^2 dt = \int_{\frac{1}{2}-\delta}^{\frac{1}{2}+\delta} \left(1-\dot{x}^2\right)^2 dt \leqslant 2\delta.$$

Значит, достаточно взять $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$.

Задача 4. (задача о геодезических на плоскости Лобачевского.) Найти допустимые экстремали в задаче

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\sqrt{1+\dot{x}^2}}{x} dt \to \operatorname{extr}, x\left(t_0\right)=x_0, \quad x\left(t_1\right)=x_1, \quad x>0$$

Решение. Имеем $L_{\dot{x}}=\frac{\dot{x}}{x \sqrt{1+\dot{x}^2}}, L_{\dot{x} \dot{x}}=\frac{1}{x\left(1+\dot{x}^2\right)^{3 / 2}}>0$. Значит, $\hat{x} \in C^2\left[t_0, t_1\right]$ и $\dot{\hat{x}}(t) L_{\dot{x}}(\hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t))-L(\hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t))=\mathrm{const}$.

Проверим, что допустимая экстремаль не может обращаться в константу ни на каком невырожденном интервале. Это видно из уравнения Эйлера:

$$-\frac{d}{d t} \frac{\dot{x}}{x \sqrt{1+\dot{x}^2}}-\frac{\sqrt{1+\dot{x}^2}}{x^2}=0$$

(тогда бы получилось равенство $1 / \hat{x}^2(t) \equiv 0$).

Из уравнения $\dot{x} L_{\dot{x}}-L=\mathrm{const}$ получаем

$$\dot{x} \cdot \frac{\dot{x}}{x \sqrt{1+\dot{x}^2}}-\frac{\sqrt{1+\dot{x}^2}}{x}= \text { const. }$$

Значит, $\frac{1}{x \sqrt{1+\dot{x}^2}}=$ const. Получаем $1+\dot{x}^2=\frac{c^2}{x^2}$, или $\dot{x}= \pm \sqrt{\frac{c^2}{x^2}-1}$. На промежутках, где $\dot{x} \neq 0$, решаем это дифференциальное уравнение и получаем

$$t-a= \pm \int \frac{d x}{\sqrt{\frac{c^2}{x^2}-1}}= \pm \frac{1}{2} \int \frac{d x^2}{\sqrt{c^2-x^2}}= \pm \sqrt{c^2-x^2}$$

Возводим в квадрат и получаем $x^2+(t-a)^2=c^2$. Это уравнение окружности с центром на горизонтальной оси.

Если в какой-то точке $\dot{x}$ обращается в 0 , то условия теоремы единственности нарушаются, но всё равно экстремаль задается уравнением окружности (склеивается из двух дуг окружностей; в силу гладкости обе дуги принадлежат одной и той же окружности; горизонтальных "вставок"быть не может, т.к. экстремаль не равна константе на интервалах).

Итак, геодезические - дуги окружности с центром на горизонтальной оси.

Утверждается, что найденная допустимая экстремаль будет точкой глобального минимума. В самом деле, $L_{\dot{x} \dot{x}}>0$ при $x>0$, так что L выпукла по $\dot{x}$.

Задача 5. Найти допустимые экстремали в задаче

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\sqrt{1+\dot{x}^2}}{\sqrt{x}} dt \to \max, \quad x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1, \quad x > 0$$

Решение. L явно не зависит от t. Если $\hat{x}$ - экстремаль, $\hat{x} \in C^2$, то

$$\dot{x}L_{\dot{x}} - L = const$$

Так как $L \in C^2$, достаточно доказать, что $L_{\dot{x}\dot{x}} \neq 0$
$L_{\dot{x}\dot{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}(1+\dot{x}^2)^{3/2}}$
$\hat{x} \in C^2, L \in C^2$ удовлетворяют $\dot{x}L_{\dot{x}} = const$
$\hat{x}$ не равна константе ни на каком интервале $\Longrightarrow$ $\hat{x}$ удовлетворяет уравнению Эйлера
$\hat{x} = c$ на интервале
$-\frac{d}{dt}\frac{\dot{x}}{\sqrt{x}\sqrt{1+\dot{x}^2}} + \frac{1}{2}x^{-3/2}\sqrt{1+\dot{x}^2} = 0$
Первое слагаемое ноль, второе - ненулевая константа. Противоречие.

$$\dot{x}L_{\dot{x}} - L = const$$

$$\dot{x}\frac{\dot{x}}{\sqrt{x}\sqrt{1+\dot{x}^2}} - \frac{\sqrt{1+\dot{x}^2}}{\sqrt{x}} = const$$

$$x(1+\dot{x}^2) = const$$

$$\dot{x}^2 = \frac{c}{x} - 1$$

$$\dot{x} = \pm\sqrt{\frac{c}{x} - 1}$$

$$x = c\sin^2\frac{\tau}{2} = \frac{c}{2}(1-\cos\tau)$$

$$t + a = \pm\int\frac{dx}{\sqrt{\frac{c}{x}-1}} = \pm\int\frac{2c\sin\frac{\tau}{2}\cos\frac{\tau}{2}d\tau}{\sqrt{\frac{1}{\sin^2\frac{\tau}{2}}-1}} = \pm c\int\sin\frac{\tau}{2}\cos\frac{\tau}{2}\left|\tan\frac{\tau}{2}\right|d\tau$$

$$c\int\sin^2\frac{\tau}{2}d\tau = \frac{c}{2}\int(1-\cos\tau)d\tau = \frac{c}{2}(\tau - \sin\tau)$$

Задача 6. Найти допустимые экстремали в задаче

$$\int_{-T_0}^{T_0} x\sqrt{1+\dot{x}}\,dt \to extr,\; x(-T_0)=x(T_0)=\xi,\; x>0$$

В зависимости от $\xi > 0$ установить, сколько может быть допустимых экстремалей.
Решение.

$$L_{\dot{x}} = \frac{x\dot{x}}{\sqrt{1+\dot{x}^2}}$$

$$L_{\dot{x}\dot{x}} = (\frac{x}{(1+\dot{x}^2)})^{3/2} > 0,$$

Решение уравнения Эйлера $\hat{x} \in C^2[-T_0, T_0]$ и $\hat{x}(t)\dot{L_x}(\hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)) - L(\hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)) = const$.
Проверим, что допустимая экстремаль не может обращаться в константу ни на каком невырожденном отрезке. Это видно из уравнения Эйлера:

$$-\frac{d}{dt}\frac{x\dot{x}}{\sqrt{1+\dot{x}^2}} + \sqrt{1+\dot{x}^2} = 0$$

Решений нет.
Из уравнения $\dot{x}L_{\dot{x}} - L = const$ получаем:

$$\dot{x}\frac{x\dot{x}}{\sqrt{1+\dot{x}^2}} - x\sqrt{1+\dot{x}^2} = const$$

$$\frac{x}{\sqrt{1+\dot{x}^2}} = const = C \Rightarrow 1+\dot{x}^2 = \frac{x^2}{C^2} \Rightarrow \dot{x} = \pm\sqrt{\frac{x^2}{C^2}-1} \Rightarrow dt = \pm\frac{dx}{\sqrt{\frac{x^2}{C^2}-1}}$$

$$t+a = \pm\int \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{C^2}-1}}\,dx = |x = Cch(\tau)| = \pm\int \frac{Csh(\tau)}{|sh(\tau)|}\,d\tau$$

$$t+a = \pm C\tau \Rightarrow \frac{t+a}{C} = \pm\tau \Rightarrow ch\left(\frac{t+a}{C}\right) = ch(\tau) = \frac{x}{C} \Rightarrow x = Cch\left(\frac{t+a}{C}\right)$$

$$x(-T_0) = x(T_0) \Rightarrow x = Cch\left(\frac{t}{C}\right)$$

C — решение уравнения $Cch\left(\frac{T_0}{C}\right) = \xi$. Пусть $b = \frac{1}{C}$, тогда $ch(T_0 b) = \xi b$. $ch(T_0 b)$ — выпуклая вниз функция, а ξb — линейная $\Rightarrow$ может быть 0, 1 или 2 решениия.

$$\xi_* > 0 \text{ — случай касания.}$$

$$\xi > \xi_* \text{ — два решения.}$$

$$\xi < \xi_* \text{ — нет решений.}$$

$ch(T_0 b) = \xi_* b$, $T_0 sh(T_0 b) = \xi_*$. Исключаем ξ_*.

$$ch(T_0 b) = T_0 b sh(T_0 b)$$

Отсюда находим b, а потом ξ_*.

Задача 7. **1.** Пусть $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ задано равенством $F(x_1,x_2)=\sqrt[3]{x_1^2x_2}$. Показать, что F имеет вариацию по Лагранжу, но не дифференцируемо по Гато в нуле. **2.** Пусть X — бесконечномерное нормированное пространство, $F:X\to\mathbb{R}$ — линейный неограниченный функционал. Показать, что F имеет вариацию по Лагранжу в нуле, но не дифференцируемо по Гато.

Решение. 1) Пусть $h=(h_1,h_2)$. Тогда $F(th_1,th_2)=\sqrt[3]{(th_1)^2\,th_2}=t\sqrt[3]{h_1^2h_2}$. Значит,

$$\frac{F(th_1,th_2)-F(0,0)}{t}=\sqrt[3]{h_1^2h_2},\quad F'(0,0)\left[(h_1,h_2)\right]=\sqrt[3]{h_1^2h_2}$$

легко видеть, что это отображение нелинейно.
2) Если функционал F линеен, то $F(th)-F(0)=tF(h)$; значит, $F'(0)[h]=F(h)$. Это отображение линейно, но разрывно.

Задача 8. Пусть $M = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0, x_2 = x_1^2\right\}, f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f\left(x_1, x_2\right) = \begin{cases} 1, & (x_1, x_2) \in M \\ 0, & (x_1, x_2) \notin M \end{cases}$$

Показать, что f дифференцируемо по Гато, но не дифференцируемо по Фреше в т. $(0, 0)$.

Решение. Вычислим вариацию по Лагранжу в нуле. Пусть $h \in \mathbb{R}^2$. Заметим, что прямая $\{th : t \in \mathbb{R}\}$ пересекается с множеством M не более, чем в одной точке. Значит, при малых t выполнено $th \notin M, F(th) - F(0) = 0$. Поэтому $F'(0)[h] = 0$. Это линейный непрерывный функционал. Значит, F дифференцируемо по Гато в 0 . При этом F в нуле разрывно и, следовательно, не дифференцируемо по Фреше.

Задача 9. Построить пример отображений $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ таких, что F дифференцируемо по Фреше в т. 0, G дифференцируемо по Гато в т. $(0, 0)$, $F(0) = (0, 0)$, при этом $G \circ F$ не имеет вариации по Лагранжу в т. 0.

Решение.

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad x \to (x, x^2)$$

$$G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x_1, x_2) \to \begin{cases} 1, (x_1, x_2) \in M \\ 0, (x_1, x_2) \notin M \end{cases}$$

Где $M = \{(x_1, x_2) | x_2 = x_1, x_1 > 0\}$, уже знаем что G дифференцируемо по Гато в т. $(0, 0)$ (но не по Фреше). Покажем, что F дифференцируемо по Фреше в т. 0.

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{F(\lambda h) - F(0)}{\lambda} = \lim_{\lambda \to 0} \frac{(\lambda h, \lambda^2 h^2) - (0, 0)}{\lambda} = (h, 0) = F'(0)[h]$$

$$F(\lambda h) = (\lambda h, \lambda^2 h^2) = (0, 0) + (h, 0) + ((\lambda - 1)h, \lambda^2 h^2)$$

Последнее слагаемое это $\bar{o}(\|h\|)$.
$\Rightarrow$ F дифференцируемо по Фреше в 0. $G \circ F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$x \to \begin{cases} 1, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$$

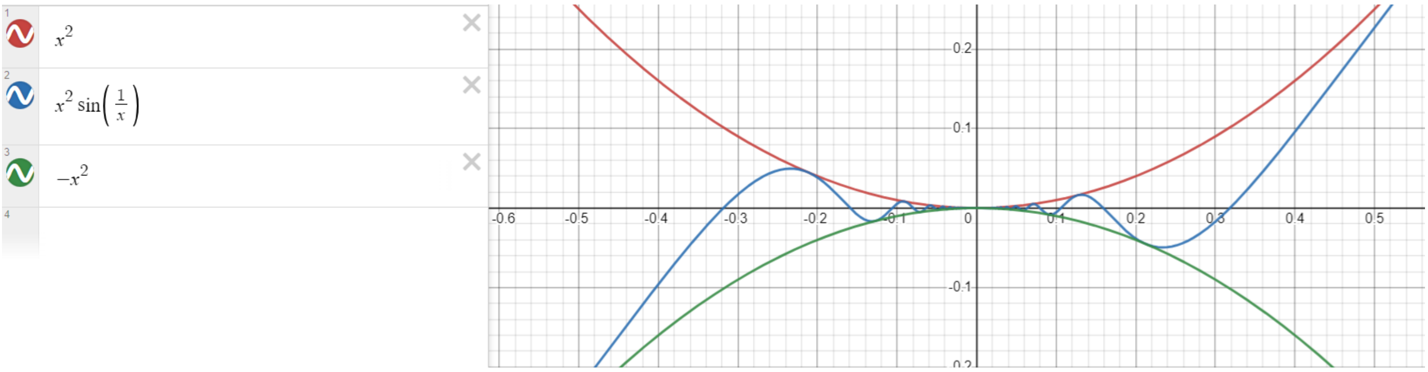
$$\lim_{\lambda \to 0} = \frac{G \circ F(\lambda h) - G \circ F(0)}{\lambda} = \lim_{\lambda \to 0} \left(\frac{1}{\lambda} \right)$$

$\Rightarrow$ нет вариации по Лагранжу.

Задача 10. Привести пример функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, всюду дифференцируемой по Фреше, но не строго дифференцируемой в нуле.

Доказательство: Рассмотрим функцию f:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \end{cases}$$



f дифференцируема по Фреше в $x \neq 0$ (по правилу Лейбница):

$$(x+h)^2 = x^2 + 2xh + \bar{o}(|h|)$$
$$\sin\frac{1}{x+h} = \sin\frac{1}{x} + \frac{-1}{x^2}\cos\frac{1}{x}h + \bar{o}(|h|)$$

$|f(x)| \leq x^2 \implies f'(0) = 0$ и $f(x) - f(0) = f(x) = \bar{o}(|x|), |x| \to 0$ то есть f диф. по Фреше в 0, тогда и на всем $\mathbb{R}$

Предположим противное: f строго дифференцируемо в 0.

По определению, для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любых $x_1, x_2 \in O_\delta(x_0)$ выполнено

$$|f(x_1) - f(x_2) - A(x_1 - x_2)| \leq \varepsilon|x_1 - x_2|$$
$$f'(0) = 0 \implies |f(x_1) - f(x_2)| \leq \varepsilon|x_1 - x_2| \leq 2\varepsilon\delta$$
$$x \neq 0 : f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} + x^2\cos\frac{1}{x}\left(-1 \cdot \frac{1}{x^2}\right) = 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\frac{1}{x} \nrightarrow 0, x \to 0$$

потому что $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$ и $\lim\limits_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}$ не существует.

Тогда $\exists \xi_n \to 0 \quad |f'(\xi_n)| \geqslant c > 0$

$f(\xi_n + h_n) - f(\xi_n) = f'(\xi_n) h_n + \bar{o}(h_n)$ (по опр. диф. по Фреше)

$h_n \longrightarrow 0 :$

$|f(\xi_n + h_n) - f(\xi_n)| \geqslant C|h_n|$

Получили противоречие. f не является строго дифференцируемой в нуле.

Задача 11. 1) Если $F : X \to \mathbb{R}$, то существует $x \in [x_0, x_1]$ такое, что $F(x_1) - F(x_0) = F'(x)[x_1 - x_0]$ .2) Если $F : X \to Y, \dim Y > 1$, то утверждение из п. 1 может быть неверным.

Решение. 1) Положим $\varphi(t) = F((1-t)x_0 + tx_1)$. Тогда $\varphi'(t) = F'((1-t)x_0 + tx_1)[x_1 - x_0]$. По теореме Лагранжа, существует $\tau \in (0,1)$ такое, что $\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\tau)$. Значит,

$$F(x_1) - F(x_0) = \varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\tau) = F'((1-\tau)x_0 + \tau x_1)[x_1 - x_0].$$

2) Пусть $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, F(t) = (\cos t, \sin t)$. Тогда $F(2\pi) - F(0) = (0,0), F'(t) = (-\sin t, \cos t)$; значит, если $F(2\pi) - F(0) = 2\pi F'(t)$ для некоторого t, то $(0,0) = 2\pi(-\sin t, \cos t)$ - противоречие.

Задача 12. Показать, что если отображение F строго дифференцируемо в нуле и дифференцируемо по Гато в окрестности 0 , то производная по Гато $F_G(x) : h \mapsto F_G(x)[h]$ непрерывна в 0 .

Решение.

Если F строго дифференцируемо в 0 , т.е.

$$\|F(x) - F(y) - F'(0)(x-y)\| \leq \varepsilon\|x-y\| \quad \Longrightarrow \quad \|F(x) - F(y) - F'_G(0)(x-y)\| \leq \varepsilon\|x-y\|$$

при $\|x\| \leq \delta(\varepsilon)$ и $\|y\| \leq \delta(\varepsilon)$, то константа Липшица отображения $x \mapsto F(x) - F'(0)[x]$, обозначенная здесь через ε стремится к 0 в дельта-окрестности 0 при дельта стремящемся к 0 .

Поскольку отображение $\Phi : h \mapsto (F'_G(x) - F'_G(0))\,[h]$ липшицево с константой эпсилон в окрестности 0 , то в каждой точке этой окрестности норма производной Φ не больше эпсилон. Поэтому приходим к заключению: $\|F'_G(x) - F'_G(0)\|$ не больше эпсилон, если x в маленькой окрестности нуля. Требуемая непрерывность установлена.

Задача 13. Пусть $A : l_2 \to l_2$,

$$A\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\right) = \left(x_1, x_2/2, \ldots, x_n/n, \ldots\right),$$

$(y_1, \ldots, y_n, \ldots) \in l_2 \setminus \operatorname{Im} A$ (почему такая точка существует?). Рассмотрим задачу

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n x_n \to \inf, \quad A\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\right) = 0.$$

Какая точка будет точкой минимума в этой задаче? Показать, что для этой задачи принцип Лагранжа неверен. Какое из условий теоремы о необходимом условии локального минимума здесь не выполнено?

Решение.

1) В качестве точки y можно взять последовательность $(1, 1/2, \ldots, 1/n, \ldots) \in l_2$. Если $Ax = y$, то $x_n = 1$ для любого $n \in \mathbb{N}$, но $(1, \ldots, 1, \ldots) \notin l_2$.

2) Если $A\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\right) = 0$, то $\frac{x_n}{n} = 0$ для любого n. Значит, $x = 0$-единственная допустимая точка, она же и будет точкой минимума.

3) Пусть $f_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n x_n, F(x) = A(x)$. Тогда $f_0'(x)[h] = \sum_{n=1}^{\infty} y_n h_n, F'(x)[h] = A'(h) = (h_1, h_2/2, \ldots, h_n/n, \ldots)$. Если z^* - линейный непрерывный функционал на l_2, то существует вектор $z = (z_1, \ldots, z_n, \ldots) \in l_2$ такой, что $z^*(x) = \sum_{n=1}^{\infty} z_n x_n$.

Таким образом, если принцип Лагранжа выполнен, то существуют $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ и $z \in l_2$, одновременно не равные нулю, такие, что для любого $h \in l_2$ выполнено

$$\lambda_0 \sum_{n=1}^{\infty} y_n h_n + \sum_{n=1}^{\infty} z_n \frac{h_n}{n} = 0.$$

Значит, $\lambda_0 y_n + \frac{z_n}{n} = 0, n \in \mathbb{N}$. Если $\lambda_0 \neq 0$, то $y_n = -\frac{z_n}{\lambda_0 n}$, то есть $y = A\left(-z/\lambda_0\right)$. Но $y \notin \operatorname{Im} A$ - противоречие. Если $\lambda_0 = 0$, то $\frac{z_n}{n} = 0$ для любого n, поэтому $z = 0$. Получили, что оба множителя Лагранжа нулевые.

4) Пространства $X = Y = l_2$ банаховы, f_0 и F непрерывно дифференцируемы (это линейные непрерывные отображения). Но $\operatorname{Im} F'(0) = \operatorname{Im} A$ незамкнут (он всюду плотен в l_2, но не совпадает с l_2).

Задача 14. Привести пример гладких функций $f_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ таких, что в задаче $f_0(x) \to \min, f_1(x) = 0$ будет существовать точка локального минимума и в принципе Лагранжа будет $\lambda_0 = 0$ (а с $\lambda_0 \neq 0$ принцип Лагранжа не выполнен).

Решение. Рассмотрим задачу

$$x \to \inf, \quad x^2 = 0$$

Единственная допустимая точка $-\hat{x} = 0$. Значит, она и будет точкой минимума. Запишем функцию Лагранжа: $\mathcal{L} = \lambda_0 x + \lambda_1 x^2$. Приравнивая ее производную в $\hat{x}$ к нулю, получаем $\lambda_0 = 0$.

Задача 15. Пусть $\hat{x} \in M$ - точка локального минимума в задаче

$$\begin{cases} f_0(x) \to \inf \\ x \in M \end{cases}$$

функция f_0 дифференцируема по Гато в точке $\hat{x}$.
Верно ли, что тогда $f_0'(\hat{x})[h] = 0$ для любого $h \in T_{\hat{x}}M$?
Ответ: нет, неверно.
Пример: Пусть $M = \left\{(x, y) : y = x^2\right\}$ (т.е. парабола на плоскости),

$$f_0(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } y = x^2 \\ x, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Тогда $f_0 = 0$ на M, поэтому $(0, 0)$ - точка минимума f_0 на M. При $f_0(th, tg) = th$ при малых t (если t $< \frac{g}{h}$, то $t^2h^2 < tg$), поэтому $f_0'(0, 0)[(h, g)] = h$.
Касательный вектор в $(0, 0)$ к параболе M имеет вид $(h, 0)$, так что на нем производная равна $h \neq 0$.

Задача 16. Пусть $l > 0$. Доказать, что допустимые экстремали в задаче

$$\int_0^1 (y\dot{x} - x\dot{y})dt \to \max, \quad \int_0^1 \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}dt = l, \quad x(0) = x(1) = y(0) = y(1) = 0, \quad \dot{x}^2 + \dot{y}^2 > 0$$

являются параметризацией окружности.

Решение. Функция Лагранжа имеет вид

$$\int_0^1 \left(\lambda_0(-y\dot{x} + x\dot{y}) + \lambda_1\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\right) dt$$

Значит, уравнения Эйлера имеют вид

$$-\frac{d}{dt}\left(\lambda_1 \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} - \lambda_0 y\right) + \lambda_0\dot{y} = 0,$$
$$-\frac{d}{dt}\left(\lambda_1 \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} + \lambda_0 x\right) - \lambda_0\dot{x} = 0.$$

Если $\lambda_1 = 0$, то $\lambda_0\dot{y} = 0, \lambda_0\dot{x} = 0$. Так как $\lambda_0 \neq 0$, то $\dot{y} = 0, \dot{x} = 0$, что противоречит условию $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 > 0$.
Пусть $\lambda_1 \neq 0$. Можно считать, что $\lambda_1 = 2$. Тогда

$$-\frac{d}{dt}\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} + \lambda_0\dot{y} = 0$$
$$-\frac{d}{dt}\frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} - \lambda_0\dot{x} = 0$$

откуда

$$\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} = \lambda_0 y + a, \quad \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} = -\lambda_0 x + b$$

Возведем обе части равенств в квадрат и получим

$$1 = (-\lambda_0 y + a)^2 + (\lambda_0 x + b)^2$$

Заметим, что $\lambda_0 \neq 0$, иначе $\frac{dy}{dx} = \text{const}$ или $\frac{dx}{dy} = \text{const}$, при этом $(\dot{x}, \dot{y})$ нигде не обращается в $(0, 0)$. Тогда будет движение по отрезку всё время в одном направлении, что противоречит граничным условиям. А если $\lambda_0 \neq 0$, то (3) - уравнение окружности.

Задача 17. Привести пример такой задачи выпуклого программирования, что допустимая $\hat{x}-$ не есть точка минимума, но существует ненулевой набор $(\lambda_0, \dots, \lambda_m)$, удовлетворяющий условиям a)-c) теоремы Куна-Таккера.

Теорема 1. *(Каруш - Кун - Таккер). Пусть X — линейное пространство, $f_0, \dots, f_m : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ — выпуклые функции.*

1. *(необходимое условие). Пусть $\hat{x}$ - точка минимума в задаче:*
   $$\begin{cases} f_0(x) \to \inf \\ f_j(x) \leq 0, \quad 1 \leq j \leq m \end{cases}$$
   Тогда существует ненулевой набор чисел $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m$ со следующими свойствами: (a) $\lambda_j \geq 0, 0 \leq j \leq m$ (условие неотрицательности);
   (b) $\lambda_j f_j(\hat{x}) = 0, 1 \leq j \leq m$ (условие дополняющей нежесткости);
   (c) $\hat{x}$ является точкой минимума функции $\mathcal{L}(x) := \sum_{j=0}^{m} \lambda_j f_j(x)$ (условие минимума).

2. *(достаточное условие). Пусть $\hat{x}-$ допустимая точка. Пусть существует набор чисел $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m$ со свойствами a)-c), при этом $\lambda_0 > 0$. Тогда $\hat{x}-$ точка минимума в задаче (32).*

3. *Пусть существует точка $\bar{x} \in X$ такая, что $f_j(\bar{x}) < 0, 1 \leq j \leq m$ (условие Слейтера). Тогда, если $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m$ - ненулевой набор чисел со свойствами a)-c), то $\lambda_0 > 0$.*

Пример. Если $\hat{x}$ - решение задачи на минимум $f_0(x)$ при условии $f_1(\hat{x}) = 0, f_2(\hat{x}) = 0$, где функционалы выпуклы, то для функции Лагранжа $\mathcal{L}(x) = \sum_{j \geq 0} \lambda_j f_j(x)$ справедливы условия

a) минимум функции Лагранжа достигается на решении;

b) $\lambda_j f_j(\hat{x}) = 0, j \geq 1$;

c) $\lambda_j \geq 0, j \geq 0$.

Пусть $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, f_1(x) = x_1, f_2(x) = x_2$, а $f_0(x) = x_1^2 + (x_2 - 1)^2$. Тогда для функции Лагранжа $\mathcal{L}(x) = f_1(x) + f_2(x)$ имеем: точка $\hat{x} = (0, 0)$ - допустимая, условия a)-c) выполнены, но минимум $f_0(x)$ достигается в точке $(0, 1)$.

Задача 18. (распределение с максимальной энтропией; см. тему про достаточное условие глобального минимума в задаче с равенствами и неравенствами). Пусть $\rho : [0,+\infty) \to (0,+\infty), \int_0^\infty \rho(x)dx = 1$ (функция ρ имеет смысл плотности распределения). Энтропией называется величина $S = -\int_0^\infty \rho(x)\ln\rho(x)dx$. Найти функцию ρ, для которой энтропия максимальна при заданном среднем (т.е. задано ограничение $\int_0^\infty x\rho(x)dx = C_1$).

Решение. Напишем задачу на экстремум:

$$\int_0^\infty \rho(x)\ln\rho(x)dx \to \inf, \quad \int_0^\infty \rho(x)dx = 1, \quad \int_0^\infty x\rho(x)dx = C_1$$

Составим функцию Лагранжа с $\lambda_0 = 1$:

$$\mathcal{L} = \int_0^\infty \rho(x)\ln\rho(x)dx + \lambda_1\int_0^\infty \rho(x)dx + \lambda_2\int_0^\infty x\rho(x)dx =$$

$$= \int_0^\infty \left(\rho(x)\ln\rho(x) + \lambda_1\rho(x) + \lambda_2 x\rho(x)\right)dx.$$

Найдем минимум у функции $\mathcal{L}$. Для этого при каждом фиксированном $x \in [0,\infty)$ найдем точку минимума у $f(v) = v\ln v + \lambda_1 v + \lambda_2 xv$. Вычислим производную: $f'(v) = \ln v + 1 + \lambda_1 + \lambda_2 x$. Эта функция строго возрастает по $v; f'(v) = 0$ в точке $\hat\rho(x) = e^{-1-\lambda_1-\lambda_2 x}$. Значит, $\hat\rho(x) = e^{-1-\lambda_1-\lambda_2 x}$ является точкой минимума $v\ln v + \lambda_1 v + \lambda_2 xv$.

Из условий $\int_0^\infty e^{-1-\lambda_1-\lambda_2 x}dx = 1$ и $\int_0^\infty xe^{-1-\lambda_1-\lambda_2 x}dx = C_1$ находим λ_1 и λ_2 :

$$e^{\lambda_1+1} = \frac{1}{\lambda_2}, \quad C_1 e^{\lambda_1+1} = \frac{1}{\lambda_2^2}$$

Докажем, что найденная функция будет точкой минимума в задаче. В самом деле, пусть $\rho(x)$ - допустимая функция. Тогда для любого $x \in [0,\infty)$ получаем

$$\rho(x)\ln\rho(x) + \lambda_1\rho(x) + \lambda_2 x\rho(x) \geq \hat\rho(x)\ln\hat\rho(x) + \lambda_1\hat\rho(x) + \lambda_2 x\hat\rho(x).$$

Интегрируем это неравенство и получаем $\mathcal{L}(\rho) \geq \mathcal{L}(\hat\rho)$, т.е.

$$\int_0^\infty \rho(x)\ln\rho(x)dx + \lambda_1\int_0^\infty \rho(x)dx + \lambda_2\int_0^\infty x\rho(x)dx \geq$$

$$\geq \int_0^\infty \hat\rho(x)\ln\hat\rho(x)dx + \lambda_1\int_0^\infty \hat\rho(x)dx + \lambda_2\int_0^\infty x\hat\rho(x)dx.$$

Воспользуемся ограничениями в задаче и получим, что $\int_0^\infty \rho(x)\ln\rho(x)dx \geq \int_0^\infty \hat\rho(x)\ln\hat\rho(x)dx$.

Теперь докажем, что других точек минимума в задаче нет. Пусть ρ_1 и ρ_2 - две разные точки минимума. Обозначим минимальное значение через m; тогда $\int_0^\infty \rho_1(x)\ln\rho_1(x)dx = \int_0^\infty \rho_2(x)\ln\rho_2(x)dx = m$. Функции ρ_1 и ρ_2 различаются на множестве положительной меры. Заметим, что функция $\rho = (\rho_1+\rho_2)/2$ также является допустимой. Покажем, что $\int_0^\infty \rho(x)\ln\rho(x)dx < m$.

В самом деле, функция $\varphi(v) = v\ln v$ строго выпукла, т.е. для любых $u \neq w, \lambda \in (0,1)$ выполнено $\varphi((1-\lambda)u + \lambda w) < (1-\lambda)\varphi(u) + \lambda\varphi(w)$. Это верно, так как $\varphi''(v) > 0$ для любого $v > 0$.

Значит, на множестве положительной меры

$$\frac{\rho_1(x)+\rho_2(x)}{2}\ln\left(\frac{\rho_1(x)+\rho_2(x)}{2}\right) < \frac{1}{2}\rho_1(x)\ln\rho_1(x) + \frac{1}{2}\rho_2(x)\ln\rho_2(x),$$

поэтому

$$\int_0^\infty \rho(x)\ln\rho(x)dx < \frac{1}{2}\int_0^\infty \rho_1(x)\ln\rho_1(x)dx + \frac{1}{2}\int_0^\infty \rho_2(x)\ln\rho_2(x)dx = m.$$

Задача 19. (из лекций) Сделав замену $\dot{x}=u$, вывести необходимое условие сильного минимума в простейшей задаче вариационного исчисления (условие Вейерштрасса и непрерывность $L_{\dot{x}}(t,\hat{x}(t),\dot{\hat{x}}(t))\Big)$ из принципа максимума Понтрягина.

Решение. Задача записывается в виде

$$\int_{t_0}^{t_1} L(t,x(t),u(t))dt \to \inf, \quad x\left(t_0\right)=x_0, \quad x\left(t_1\right)=x_1, \quad \dot{x}=u.$$

Функция Лагранжа имеет вид

$$\mathcal{L}=\int_{t_0}^{t_1}\left(\lambda_0 L(t,x(t),u(t))+p(t)(\dot{x}(t)-u(t))\right)dt+\lambda_1 x\left(t_0\right)+\lambda_2 x\left(t_1\right).$$

Условие неотрицательности: $\lambda_0 \geq 0$.

У равнение Эйлера: $-\dot{p}(t)+\lambda_0 L_x(t,\hat{x}(t),\hat{u}(t))=0$.

Условие трансверсальности: $p\left(t_0\right)=\lambda_1, p\left(t_1\right)=-\lambda_2$.

Принцип максимума Понтрягина: $\min_{v\in\mathbb{R}}\left(\lambda_0 L(t,\hat{x}(t),v)-p(t)v\right)=\lambda_0 L(t,\hat{x}(t),\hat{u}(t))-p(t)\hat{u}(t)$.

Так как L гладкая и минимум берется по $v\in\mathbb{R}$, то получаем $\lambda_0 L_{\dot{x}}(t,\hat{x}(t),\hat{u}(t))-p(t)=0$.

Если $\lambda_0=0$, то отсюда $p=0$; в силу условий трансверсальности, $\lambda_1=\lambda_2=0$, то есть все множители Лагранжа нулевые.

Итак, $\lambda_0>0$. Можно считать, что $\lambda_0=1$. Так как $\dot{\hat{x}}=\hat{u}$, то $L_{\dot{x}}(t,\hat{x}(t),\dot{\hat{x}}(t))=p(t)$. В теореме о необходимом условии сильного минимума в задаче оптимального управления функция p кусочно непрерывно-дифференцируемая и, значит, непрерывная. Отсюда получаем непрерывность $t\mapsto L_{\dot{x}}(t,\hat{x}(t),\dot{\hat{x}}(t))$.

Еще раз запишем принцип максимума Понтрягина: для любого $v\in\mathbb{R}$

$$L(t,\hat{x}(t),v)-L_{\dot{x}}(t,\hat{x}(t),\dot{\hat{x}}(t))v \geq L(t,\hat{x}(t),\hat{u}(t))-L_{\dot{x}}(t,\hat{x}(t),\dot{\hat{x}}(t))\hat{u}(t)$$

Подставим $\hat{u}=\dot{\hat{x}}$, перенесем все в левую часть и получим условие Вейерштрасса.

Задача 20. Показать, что если L явно не зависит от x (т.е. $L = L(t, \dot{x}(t))$), то условие Вейерштрасса будет достаточным условием глобального минимума.

Решение. В силу уравнения Эйлера, $L_{\dot{x}}(t, \dot{\hat{x}}(t)) \equiv c$.

Пусть x - произвольная допустимая функция. В силу условия Вейерштрасса

$$\int_{t_0}^{t_1} \mathcal{E}(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t), \dot{x}(t)) dt \geq 0$$

откуда

$$\int_{t_0}^{t_1} \Big(L(t, \dot{x}(t)) - L(t, \dot{\hat{x}}(t)) - L_{\dot{x}}(t, \dot{\hat{x}}(t))(\dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t)) \Big) \, dt \geq 0$$

Значит,

$$\int_{t_0}^{t_1} L(t, \dot{x}(t)) dt \geq \int_{t_0}^{t_1} L(t, \dot{\hat{x}}(t)) dt + \int_{t_0}^{t_1} c(\dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t)) dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} L(t, \dot{\hat{x}}(t)) dt + cx|_{t_0}^{t_1} - c\hat{x}|_{t_0}^{t_1} = \int_{t_0}^{t_1} L(t, \dot{\hat{x}}(t)) dt$$

так как $x(t_0) = \hat{x}(t_0)$ и $x(t_1) = \hat{x}(t_1)$.

Задача 21. Рассмотрим задачу $\int_0^\pi \left(\dot{x}^2 - x^2 - x^4\right) dt \to \inf$, $x(0) = x(\pi) = 0$. Показать, что для $\hat{x} = 0$ выполнено усиленное условие Лежандра, условие Якоби, при этом $\hat{x} = 0$ не является точкой слабого минимума.

Решение. Имеем $\hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t) = 2, \hat{L}_{\dot{x}x} = 0, \hat{L}_{xx} = -2$. Значит, выполнено усиленное условие Лежандра. Уравнение Якоби имеет вид $\ddot{h} + h = 0$; его нетривиальное решение, зануляющееся при $t = 0$, имеет вид $h(t) = a\sin t$, $a \neq 0$. Тогда $h(t) \neq 0$ при $t \in (0, \pi)$, но $h(\pi) = 0$. Значит, выполнено условие Якоби, но не усиленное. Возьмем $x(t) = \varepsilon \sin t$. Тогда

$$\int_0^\pi \left(\dot{x}^2 - x^2 - x^4\right) dt = \varepsilon^2 \int_0^\pi \left(\cos^2 t - \sin^2 t\right) dt - \varepsilon^4 \int_0^\pi \sin^4 t dt =$$
$$= \varepsilon^2 \int_0^\pi \cos 2t dt - \varepsilon^4 \int_0^\pi \sin^4 t dt = -\varepsilon^4 \int_0^\pi \sin^4 t dt < 0.$$

Так как $\varepsilon > 0$ может быть сколь угодно мало, то слабого минимума нет.

Задача 22.
$$F(x)=\int_0^{3/2}\left(\dot{x}^3+2x\right)dt\to\inf, x(0)=0, x(3/2)=1$$
.

Доказать, что выполнено (неусиленное) условие Лежандра, усиленное условие Якоби, а допустимая экстремаль не дает слабый минимум.

Примечание. Усиленное условие Якоби предполагает 2й порядок этого линейного уравнения. В моем файле TU усиленное условие Якоби трактовалось при выполнении усиленного условия Лежандра, которое обеспечивает 2й порядок уравнения Якоби.

Решение.
Уравнение экстремалей $f_x=\frac{d}{dt}f_{\dot{x}}$ для $f=\dot{x}^3+2x$ имеет вид $2=6\dot{x}\ddot{x}$, т.е. $3y\dot{y}=1$ для $y=\dot{x}$. Имеем $3ydy=dt$, т.е. $\frac{3}{2}y^2=t+C$. При $C=0$ имеем $\dot{x}(t)=\left(\frac{2}{3}t\right)^{1/2}$, что при условии $x(0)=0$ дает
$$\hat{x}(t)=\left(\frac{2}{3}\right)^{1/2}t^{3/2}\cdot\frac{2}{3}=\left(\frac{2}{3}t\right)^{3/2}\Longrightarrow\hat{x}\left(\frac{3}{2}\right)=1$$

т.е. допустимую экстремаль $\hat{x}$. Имеем
$$F(\hat{x}+h)-F(\hat{x})=\int_0^{3/2}\left\{\left([\dot{\hat{x}}+\dot{h}]^3+2[\hat{x}+h]\right)-\left([\dot{\hat{x}}]^3+2[\hat{x}]\right)\right\}dt=$$
$$\int_0^{3/2}\left\{3(\dot{\hat{x}})^2\dot{h}+3\dot{\hat{x}}(\dot{h})^2+(\dot{h})^3+2h\right\}dt=\int_0^{3/2}\left\{3\dot{\hat{x}}(\dot{h})^2+(\dot{h})^3\right\}dt$$

Последнее равенство верно, т.к. на экстремали $\hat{x}$ линейная по h часть разности $F(\hat{x}+h)-F(\hat{x})$ равна нулю. Таким образом,
$$F(\hat{x}+h)-F(\hat{x})=\int_0^{3/2}\left\{3\dot{\hat{x}}(\dot{h})^2+(\dot{h})^3\right\}dt=\int_0^{3/2}\left\{3\left(\frac{2t}{3}\right)^{1/2}(\dot{h})^2+(\dot{h})^3\right\}dt$$

Заметим, что усиленное условие Лежандра $\hat{f}_{\dot{x}\dot{x}}(t)>0$ при $t\in[0,3/2]$ нарушается при $t=0$. Учитывая это есть резон быстро уйти от нуля, взяв функцию h кусочно-линейной, такую, что $h(0)=h(3/2)=0$, а $\dot{h}=-\varepsilon<0$ при $0<t<\delta\ll 1$ и $\dot{h}=a>0$ при $0<t<\delta$. Тогда $h(t)=a(t-3/2)$ при $t>\delta$ и $a\approx\frac{2}{3}\delta$. Отсюда получаем
$$F(\hat{x}+h)-F(\hat{x})\approx\int_0^{\delta}\sqrt{6}t^{1/2}\varepsilon^2dt-\varepsilon^3\delta+\int_0^{3/2}\sqrt{6}t^{1/2}a^2dt+\frac{3}{2}a^3=$$
$$\varepsilon^3\delta\left\{\frac{2}{3}\sqrt{6}\frac{\delta^{1/2}}{\varepsilon}+\left(\frac{3}{2}\right)^{3/2}(2/3)^2\frac{\delta}{\varepsilon}+\frac{3}{2}(2/3)^3\delta^2\right\}-\varepsilon^3\delta<0\quad\text{при}\quad\frac{\delta^{1/2}}{\varepsilon}\ll 1.$$

Задача 23. Рассмотрим задачу

$$\int_{-T_0}^{T_0} x\sqrt{\dot{x}^2+1}dt \to \min, x\left(T_0\right) = x\left(-T_0\right) = \xi.$$

1. Выписать уравнение Якоби, подобрать одно из его решений, затем найти общее решение.
2. Пусть допустимых экстремалей две. Доказать, что одна из них является точкой сильного минимума, а вторая не является точкой слабого минимума.

Решение.

Определение 1. Скажем, что выполнено усиленное условие Лежандра, если $\widehat{L}_{\dot{x}\dot{x}} > 0 \; \forall t \in [-T_0, T_0]$.

Определение 2. Скажем, что выполнено условие Якоби, если справедливо усиленное условие Лежандра, а решение уравнения Якоби

$$-\frac{d}{dt}\left(\widehat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t)\dot{h} + \widehat{L}_{\dot{x}x}(t)h\right) + \left(\widehat{L}_{\dot{x}x}(t)\dot{h} + \widehat{L}_{xx}(t)h\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\widehat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t)\dot{h}\right) = \left(\widehat{L}_{xx}(t) - \frac{d}{dt}\widehat{L}_{\dot{x}x}(t)\right)h \tag{1}$$

не обращается в ноль на интервале (t_0, t_1) при начальных условиях: $h\left(t_0\right) = 0, \quad \dot{h}\left(t_0\right) = 1$.

Определение 3. Скажем, что выполнено усиленное условие Якоби, если справедливо усиленное условие Лежандра, а решение уравнения (1) не обращается в ноль на полусегменте $(-T_0, T_0]$ при начальных условиях: $h(-T_0) = 0, \; \dot{h}(-T_0) = 1$.

Определение 4. Скажем, что выполнено усиленное условие Вейерштрасса, если функиия $\dot{x} \mapsto L(t, x(t), \dot{x})$ выпукла в 'C'-окрестности экстремали $\widehat{x}$ при любом $t \in [-T_0, T_0]$, т.е. для любого $t \in [-T_0, T_0]$ u $x(t) \in \mathcal{O}(\widehat{x}, \varepsilon)$ (с некоторым $\varepsilon > 0$) функиия $\dot{x} \mapsto L(t, x(t), \dot{x})$ выпукла.

Теорема 2. *Если выполнены усиленное условие Якоби и усиленное условие Вейерштрасса, то экстремаль доставляет сильный максимум.*

1. Уравнение Якоби в данном случае имеет вид:

$$\ddot{h} - \frac{2}{C}\,\mathrm{th}(\frac{t}{C})\dot{h} + \frac{1}{C^2}h = 0$$

Оно имеет два линейно независимых решения: $h_1(t) = \mathrm{sh}\,\frac{t}{C}$ и $h_2(t) = \mathrm{ch}\,\frac{t}{C} - \frac{t}{C}\,\mathrm{sh}\,\frac{t}{C}$. Общее решение, подчиненное условию $h(-1) = 0$, таково:

$$h(t) = \left(\mathrm{ch}\,\frac{t}{C} - \frac{t}{C}\,\mathrm{sh}\,\frac{t}{C}\right)\mathrm{sh}\,\frac{1}{C} + \left(\mathrm{ch}\,\frac{1}{C} - \frac{1}{C}\,\mathrm{sh}\,\frac{1}{C}\right)\mathrm{sh}\,\frac{t}{C}.$$

2. Было показано (см. 6), что экстремали существуют, если и только если $\xi \geq \xi_* = \mathrm{sh}\,\frac{1}{C_0}$, где $C_0 = \mathrm{th}\,\frac{1}{C_0} \approx 1.5088\ldots$ При этом, экстремаль задается формулой $x(t) = C\,\mathrm{ch}\,\frac{t}{C}$, а параметр $C > 0$ есть корень уравнения $\varphi(C) = \xi$, где $\varphi(C) \stackrel{\text{def}}{=} C\,\mathrm{ch}\,\frac{1}{C}$.

Функция $C \mapsto \varphi(C)$ выпукла, т.к. $\varphi''(C) = C^{-3}\,\mathrm{ch}\,\frac{1}{C}$. Ее минимум достигается в точке C_0, где $\varphi'\left(C_0\right) = 0$. Отметим, что

$$\varphi'(C) = \left[\mathrm{ch}\,\frac{1}{C} - \frac{1}{C}\,\mathrm{sh}\,\frac{1}{C}\right]$$

Если $\xi > \xi_*$, то существуют ровно два значения $C_1 \in (0, C_0)$ и $C_2 > C_0$, которые удовлетворяют условию $\varphi(C) = R$. Покажем, что экстремаль $\widehat{x}_2 = C_2\,\mathrm{ch}\,\frac{1}{C_2}$ доставляет сильный (локальный) минимум, а экстремаль $\widehat{x}_1 = C_1\,\mathrm{ch}\,\frac{1}{C_1}$ не является ни слабым минимумом, ни слабым максимумом. Прежде всего, отметим, что для обеих экстремалей выполнено усиленное условие Лежандра, а именно: $\widehat{f}_{\dot{x}\dot{x}}(t) = C\mathrm{ch}^{-2}\,\frac{t}{C} > 0$ и потому ни одна из них не является локальным максимумом.

Так как $h(0) = \mathrm{sh}\,\frac{1}{C} \neq 0$, то нули функции h совпадают с нулями функции

$$z : t \mapsto z(t) = \frac{h(t)}{\mathrm{sh}\,\frac{1}{C}\,\mathrm{sh}\,\frac{t}{C}} = \left(\mathrm{cth}\,\frac{t}{C} - \frac{t}{C}\right) + \left(\mathrm{cth}\,\frac{1}{C} - \frac{1}{C}\right)$$

Заметим, что $z'(t) < 0$, а $z(1) = \frac{2\varphi'(C)}{\mathrm{sh}\,\frac{1}{C}}$. Поэтому, если $z(1) < 0 \Leftrightarrow C = C_1$, то условие Якоби не выполнено, а если $z(1) > 0 \Leftrightarrow C = C_2$, то выполнено усиленное условие Якоби.