

Задачи по курсу «Вариационное исчисление и оптимальное управление»

Осенний семестр 2023

Аннотация

В документе собраны решения задач к экзамену по вариационному исчислению и оптимальному управлению осеннего семестра 2023 года. Лектор: Васильева А. А. Задачи могут содержать ошибки и опечатки. Исходники, материалы и информацию по участию в дополнении тега можно найти [тут](#).

Задача 1. Предварительный материал из лекции (Гармонический осциллятор):

Рассмотрим задачу:

$$\mathcal{L}(x) := \int_0^{T_0} (\dot{x}^2 - x^2) dt \rightarrow \inf, \quad x(0) = x(T_0) = 0$$

Тогда $L_{\dot{x}} = 2\dot{x}$, $L_x = -2x$; уравнение Эйлера имеет вид $-\frac{d}{dt}(2\dot{x}) - 2x = 0$, т.е. $\ddot{x} + x = 0$.

Заметим, что $\hat{x} = 0$ является допустимой экстремалью. Выясним, является ли она точкой локального или глобального минимума. Для этого используем следующий прием.

Пусть $\omega \in C^1[0, T_0]$. Тогда

$$\int_0^{T_0} (\dot{\omega}x^2 + 2\omega x\dot{x}) dt = \int_0^{T_0} \frac{d}{dt}(\omega x^2) dt = \omega x^2 \Big|_0^{T_0} = 0, \text{ если } x \in C_{0,0}^1[0, T_0].$$

Значит, можно добавить этот ноль к интегралу:

$$\int_0^{T_0} (\dot{x}^2 - x^2) dt = \int_0^{T_0} (\dot{x}^2 - x^2 - \dot{\omega}x^2 - 2\omega x\dot{x}) dt$$

Подберем ω так, чтобы $\dot{x}^2 - x^2 - \dot{\omega}x^2 - 2\omega x\dot{x}$ было полным квадратом: $\dot{x}^2 - x^2 - \dot{\omega}x^2 - 2\omega x\dot{x} = (\dot{x} - \omega x)^2$, т.е. $-1 - \dot{\omega} = \omega^2$. (Тогда $\int_0^{T_0} (\dot{x}^2 - x^2) dt = \int_0^{T_0} (\dot{x} - \omega x)^2 dt \geq 0$.) Получаем, что $\omega = \text{ctg}(t - t_*)$.

Задача

1) Пусть $T_0 > \pi$, $x(t) = c \sin \frac{\pi t}{T_0}$. Показать, что $\mathcal{L}(x) < 0$ при $c \neq 0$. Почему проведенные выше рассуждения не проходят при $T_0 > \pi$ и проходят при $T_0 < \pi$?

2) Показать, что $\int_0^\pi (\dot{x}^2 - x^2) dt = \int_0^\pi (\dot{x} - x \cdot \text{ctg } t)^2 dt \geq 0$.

Решение. 1) Вычисляем:

$$\begin{aligned} \int_0^{T_0} (\dot{x}^2 - x^2) dt &= c^2 \int_0^{T_0} \left(\frac{\pi^2}{T_0^2} \cos^2 \frac{\pi t}{T_0} - \sin^2 \frac{\pi t}{T_0} \right) dt = \\ &= \frac{c^2}{2} \left(\frac{\pi^2}{T_0^2} \int_0^{T_0} \left(1 + \cos \frac{2\pi t}{T_0} \right) dt - \int_0^{T_0} \left(1 - \cos \frac{2\pi t}{T_0} \right) dt \right) = \frac{c^2 T_0}{2} \left(\frac{\pi^2}{T_0^2} - 1 \right) < 0. \end{aligned}$$

Напомним, что мы подбирали гладкую функцию ω так, чтобы

$$\int_0^{T_0} (\dot{x}^2 - x^2) dt = \int_0^{T_0} (\dot{x} - \omega x)^2 dt$$

при этом ω была решением дифференциального уравнения $\dot{\omega} = -1 - \omega^2$. Значит, $\omega(t) = \text{ctg}(t - a)$.

Если $T_0 < \pi$, то можно подобрать a (в данном случае подойдет $a = 0$) так, чтобы $\text{ctg}(t - a)$ была гладкой на $[0, T_0]$. Если $T_0 > \pi$, то для любого a функция ω будет иметь точку разрыва в интервале $(0, T_0)$, т.к. ctg гладко определен на $(\pi n, \pi n + \pi)$ и имеет разрывы в точках πn .

2) Преобразуем правую часть условия:

$$0 \leq \int_0^\pi (\dot{x} - x \cdot \text{ctg } t)^2 dt = \int_0^\pi (\dot{x}^2 - 2x\dot{x} \text{ctg } t + x^2 \text{ctg}^2 t) dt =$$

интегрируем среднее слагаемое по частям и используем $\text{ctg } t + \text{ctg}^2 t = -1$:

$$= \int_0^\pi (\dot{x}^2 + x^2(\text{ctg } t)' + x^2 \text{ctg}^2 t) dt + x^2(t) \text{ctg } t \Big|_0^\pi = \int_0^\pi (\dot{x}^2 - x^2) dt + x^2(t) \text{ctg } t \Big|_0^\pi.$$

Так как $x \in C^1[0, \pi]$ и $x(0) = 0$, то $x(t) = O(t)$ в окрестности нуля; так как $\text{ctg } t = O(1/t)$ в окрестности нуля, то $x^2(t) \text{ctg } t = O(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$. Аналогично $x^2(t) \text{ctg } t = O(\pi - t) \xrightarrow{t \rightarrow \pi} 0$. Значит, $x^2(t) \text{ctg } t \Big|_0^\pi = 0$ и равенство доказано.

Задача 2. Доказать, что в задаче

$$\int_0^1 t^{1/2} \dot{x}^2 dt \rightarrow \inf, \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 1$$

точки локального минимума в пространстве $C^1[0, 1]$ не существует; найти точку глобального минимума для той же задачи в пространстве

$$W = \left\{ f \in AC[0, 1] : \int_0^1 t^{1/2} \dot{x}^2 dt < \infty \right\}$$

Решение. Напишем уравнение Эйлера: $\frac{d}{dt} (2t^{1/2} \dot{x}) = 0$, откуда $t^{1/2} \dot{x} = c$. Значит, $x = 2ct^{1/2} + b$. Подставляя граничные условия, получаем $x = t^{1/2} \notin C^1[0, 1]$.

Пусть $h \in W, h(0) = h(1) = 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_0^1 t^{1/2} (\dot{x} + \dot{h})^2 dt - \int_0^1 t^{1/2} \dot{x}^2 dt &= \int_0^1 t^{1/2} (2\dot{x}\dot{h} + \dot{h}^2) dt = \int_0^1 t^{1/2} (t^{-1/2} \dot{h} + \dot{h}^2) dt = \\ &= \int_0^1 \dot{h} dt + \int_0^1 t^{1/2} \dot{h}^2 dt = \int_0^1 t^{1/2} \dot{h}^2 dt \geq 0. \end{aligned}$$

Задача 3. Доказать, что в задаче

$$\int_0^1 (1 - \dot{x}^2)^2 dt \rightarrow \inf, \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 0$$

точки локального минимума в пространстве $C^1[0, 1]$ не существует, при этом точная нижняя грань функционала равна 0.

Решение. Заметим, что $\int_0^1 (1 - \dot{x}^2)^2 dt \geq 0$. Если $\int_0^1 (1 - \dot{x}^2)^2 dt = 0$, то $\dot{x}^2(t) \equiv 1$, откуда $\dot{x}(t) = \pm 1$ для любого t . Так как \dot{x} непрерывна, то $\dot{x} \equiv 1$ или $\dot{x} \equiv -1$. Получаем противоречие с граничными условиями. Значит, нулевое значение не достигается.

Теперь покажем, что для любого $\varepsilon > 0$ существует допустимая функция $x \in C^1[0, 1]$ такая, что $\int_0^1 (1 - \dot{x}^2)^2 dt \leq \varepsilon$. Положим

$$z(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} - \delta \\ \frac{1}{\delta} \left(\frac{1}{2} - t \right), & \frac{1}{2} - \delta \leq t \leq \frac{1}{2} + \delta, \\ -1, & \frac{1}{2} + \delta \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$x(t) = \int_0^t z(s) ds$. Тогда $x \in C^1[0, 1]$, $x(0) = x(1) = 0$. При этом $|\dot{x}| \leq 1$. Значит,

$$\int_0^1 (1 - \dot{x}^2)^2 dt = \int_{\frac{1}{2}-\delta}^{\frac{1}{2}+\delta} (1 - \dot{x}^2)^2 dt \leq 2\delta.$$

Значит, достаточно взять $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$.

Задача 4. (задача о геодезических на плоскости Лобачевского.) Найти допустимые экстремали в задаче

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\sqrt{1+\dot{x}^2}}{x} dt \rightarrow \text{extr}, x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1, \quad x > 0$$

Решение. Имеем $L_{\dot{x}} = \frac{\dot{x}}{x\sqrt{1+\dot{x}^2}}, L_{\dot{x}\dot{x}} = \frac{1}{x(1+\dot{x}^2)^{3/2}} > 0$. Значит, $\hat{x} \in C^2[t_0, t_1]$ и $\hat{x}(t)L_{\dot{x}}(\hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)) - L(\hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)) = \text{const}$.

Проверим, что допустимая экстремаль не может обращаться в константу ни на каком невырожденном интервале. Это видно из уравнения Эйлера:

$$-\frac{d}{dt} \frac{\dot{x}}{x\sqrt{1+\dot{x}^2}} - \frac{\sqrt{1+\dot{x}^2}}{x^2} = 0$$

(тогда бы получилось равенство $1/\hat{x}^2(t) \equiv 0$).

Из уравнения $\dot{x}L_{\dot{x}} - L = \text{const}$ получаем

$$\dot{x} \cdot \frac{\dot{x}}{x\sqrt{1+\dot{x}^2}} - \frac{\sqrt{1+\dot{x}^2}}{x} = \text{const}.$$

Значит, $\frac{1}{x\sqrt{1+\dot{x}^2}} = \text{const}$. Получаем $1 + \dot{x}^2 = \frac{c^2}{x^2}$, или $\dot{x} = \pm \sqrt{\frac{c^2}{x^2} - 1}$. На промежутках, где $\dot{x} \neq 0$, решаем это дифференциальное уравнение и получаем

$$t - a = \pm \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{c^2}{x^2} - 1}} = \pm \frac{1}{2} \int \frac{dx^2}{\sqrt{c^2 - x^2}} = \pm \sqrt{c^2 - x^2}$$

Возводим в квадрат и получаем $x^2 + (t - a)^2 = c^2$. Это уравнение окружности с центром на горизонтальной оси.

Если в какой-то точке \dot{x} обращается в 0, то условия теоремы единственности нарушаются, но всё равно экстремаль задается уравнением окружности (склеивается из двух дуг окружностей; в силу гладкости обе дуги принадлежат одной и той же окружности; горизонтальных "вставок" быть не может, т.к. экстремаль не равна константе на интервалах).

Итак, геодезические - дуги окружности с центром на горизонтальной оси.

Утверждается, что найденная допустимая экстремаль будет точкой глобального минимума. В самом деле, $L_{\dot{x}\dot{x}} > 0$ при $x > 0$, так что L выпукла по \dot{x} .

Задача 5. Найти допустимые экстремали в задаче

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\sqrt{1+\dot{x}^2}}{\sqrt{x}} dt \rightarrow \max, \quad x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1, \quad x > 0$$

Решение. L явно не зависит от t . Если \hat{x} - экстремаль, $\hat{x} \in C^2$, то

$$\dot{x}L_{\dot{x}} - L = \text{const}$$

Так как $L \in C^2$, достаточно доказать, что $L_{\dot{x}\dot{x}} \neq 0$

$$L_{\dot{x}\dot{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}(1+\dot{x}^2)^{3/2}}$$

$\hat{x} \in C^2, L \in C^2$ удовлетворяют $\dot{x}L_{\dot{x}} = \text{const}$

\hat{x} не равна константе ни на каком интервале $\implies \hat{x}$ удовлетворяет уравнению Эйлера

$\hat{x} = c$ на интервале

$$-\frac{d}{dt} \frac{\dot{x}}{\sqrt{x}\sqrt{1+\dot{x}^2}} + \frac{1}{2}x^{-3/2}\sqrt{1+\dot{x}^2} = 0$$

Первое слагаемое ноль, второе - ненулевая константа. Противоречие.

$$\dot{x}L_{\dot{x}} - L = \text{const}$$

$$\dot{x} \frac{\dot{x}}{\sqrt{x}\sqrt{1+\dot{x}^2}} - \frac{\sqrt{1+\dot{x}^2}}{\sqrt{x}} = \text{const}$$

$$x(1+\dot{x}^2) = \text{const}$$

$$\dot{x}^2 = \frac{c}{x} - 1$$

$$\dot{x} = \pm \sqrt{\frac{c}{x} - 1}$$

$$x = c \sin^2 \frac{\tau}{2} = \frac{c}{2}(1 - \cos \tau)$$

$$t + a = \pm \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{c}{x} - 1}} = \pm \int \frac{2c \sin \frac{\tau}{2} \cos \frac{\tau}{2} d\tau}{\sqrt{\frac{1}{\sin^2 \frac{\tau}{2}} - 1}} = \pm c \int \sin \frac{\tau}{2} \cos \frac{\tau}{2} \left| \tan \frac{\tau}{2} \right| d\tau$$

$$c \int \sin^2 \frac{\tau}{2} d\tau = \frac{c}{2} \int (1 - \cos \tau) d\tau = \frac{c}{2}(\tau - \sin \tau)$$

Задача 6. Найти допустимые экстремали в задаче

$$\int_{-T_0}^{T_0} x \sqrt{1 + \dot{x}} dt \rightarrow extr, x(-T_0) = x(T_0) = \xi, x > 0$$

В зависимости от $\xi > 0$ установить, сколько может быть допустимых экстремалей.

Решение.

$$L_{\dot{x}} = \frac{x \dot{x}}{\sqrt{1 + \dot{x}^2}}$$

$$L_{\dot{x}\dot{x}} = \left(\frac{x}{(1 + \dot{x}^2)} \right)^{3/2} > 0,$$

Решение уравнения Эйлера $\hat{x} \in C^2[-T_0, T_0]$ и $\hat{x}(t) \dot{L}_x(\hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)) - L(\hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)) = const$.

Проверим, что допустимая экстремаль не может обращаться в константу ни на каком невырожденном отрезке. Это видно из уравнения Эйлера:

$$-\frac{d}{dt} \frac{x \dot{x}}{\sqrt{1 + \dot{x}^2}} + \sqrt{1 + \dot{x}^2} = 0$$

Решений нет.

Из уравнения $\dot{x} L_{\dot{x}} - L = const$ получаем:

$$\dot{x} \frac{x \dot{x}}{\sqrt{1 + \dot{x}^2}} - x \sqrt{1 + \dot{x}^2} = const$$

$$\frac{x}{\sqrt{1 + \dot{x}^2}} = const = C \Rightarrow 1 + \dot{x}^2 = \frac{x^2}{C^2} \Rightarrow \dot{x} = \pm \sqrt{\frac{x^2}{C^2} - 1} \Rightarrow dt = \pm \frac{dx}{\sqrt{\frac{x^2}{C^2} - 1}}$$

$$t + a = \pm \int \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{C^2} - 1}} dx = |x = Cch(\tau)| = \pm \int \frac{Csh(\tau)}{|sh(\tau)|} d\tau$$

$$t + a = \pm C\tau \Rightarrow \frac{t + a}{C} = \pm \tau \Rightarrow ch\left(\frac{t + a}{C}\right) = ch(\tau) = \frac{x}{C} \Rightarrow x = Cch\left(\frac{t + a}{C}\right)$$

$$x(-T_0) = x(T_0) \Rightarrow x = Cch\left(\frac{t}{C}\right)$$

C — решение уравнения $Cch\left(\frac{T_0}{C}\right) = \xi$. Пусть $b = \frac{1}{C}$, тогда $ch(T_0 b) = \xi b$. $ch(T_0 b)$ — выпуклая вниз функция, а ξb — линейная \Rightarrow может быть 0, 1 или 2 решения.

$\xi_* > 0$ — случай касания.

$\xi > \xi_*$ — два решения.

$\xi < \xi_*$ — нет решений.

$ch(T_0 b) = \xi_* b$, $T_0 sh(T_0 b) = \xi_*$. Исключаем ξ_* .

$$ch(T_0 b) = T_0 b sh(T_0 b)$$

Отсюда находим b , а потом ξ_* .

Задача 7. 1) Пусть $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ задано равенством $F(x_1, x_2) = \sqrt[3]{x_1^2 x_2}$. Показать, что F имеет вариацию по Лагранжу, но не дифференцируемо по Гато в нуле.

2) Пусть X — бесконечномерное нормированное пространство, $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ — линейный неограниченный функционал. Показать, что F имеет вариацию по Лагранжу в нуле, но не дифференцируемо по Гато.

Решение. 1) Пусть $h = (h_1, h_2)$. Тогда $F(th_1, th_2) = \sqrt[3]{(th_1)^2 th_2} = t \sqrt[3]{h_1^2 h_2}$. Значит,

$$\frac{F(th_1, th_2) - F(0, 0)}{t} = \sqrt[3]{h_1^2 h_2}, \quad F'(0, 0)[(h_1, h_2)] = \sqrt[3]{h_1^2 h_2}$$

легко видеть, что это отображение нелинейно.

2) Если функционал F линейен, то $F(th) - F(0) = tF(h)$; значит, $F'(0)[h] = F(h)$. Это отображение линейно, но разрывно.

Задача 8. Пусть $M = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0, x_2 = x_1^2\}$, $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 1, & (x_1, x_2) \in M \\ 0, & (x_1, x_2) \notin M \end{cases}$$

Показать, что f дифференцируемо по Гато, но не дифференцируемо по Фреше в т. $(0, 0)$.

Решение. Вычислим вариацию по Лагранжу в нуле. Пусть $h \in \mathbb{R}^2$. Заметим, что прямая $\{th : t \in \mathbb{R}\}$ пересекается с множеством M не более, чем в одной точке. Значит, при малых t выполнено $th \notin M$, $F(th) - F(0) = 0$. Поэтому $F'(0)[h] = 0$. Это линейный непрерывный функционал. Значит, F дифференцируемо по Гато в 0 . При этом F в нуле разрывно и, следовательно, не дифференцируемо по Фреше.

Задача 9. Построить пример отображений $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $G: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ таких, что F дифференцируемо по Фреше в т. 0, G дифференцируемо по Гато в т. $(0, 0)$, $F(0) = (0, 0)$, при этом $G \circ F$ не имеет вариации по Лагранжу в т. 0.

Решение.

$$F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad x \rightarrow (x, x^2)$$

$$G: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x_1, x_2) \rightarrow \begin{cases} 1, & (x_1, x_2) \in M \\ 0, & (x_1, x_2) \notin M \end{cases}$$

Где $M = \{(x_1, x_2) | x_2 = x_1, x_1 > 0\}$, уже знаем что G дифференцируемо по Гато в т. $(0, 0)$ (но не по Фреше). Покажем, что F дифференцируемо по Фреше в т. 0.

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{F(\lambda h) - F(0)}{\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{(\lambda h, \lambda^2 h^2) - (0, 0)}{\lambda} = (h, 0) = F'(0)[h]$$

$$F(\lambda h) = (\lambda h, \lambda^2 h^2) = (0, 0) + (h, 0) + ((\lambda - 1)h, \lambda^2 h^2)$$

Последнее слагаемое это $\bar{o}(\|h\|)$.

$\Rightarrow F$ дифференцируемо по Фреше в 0. $G \circ F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$x \rightarrow \begin{cases} 1, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

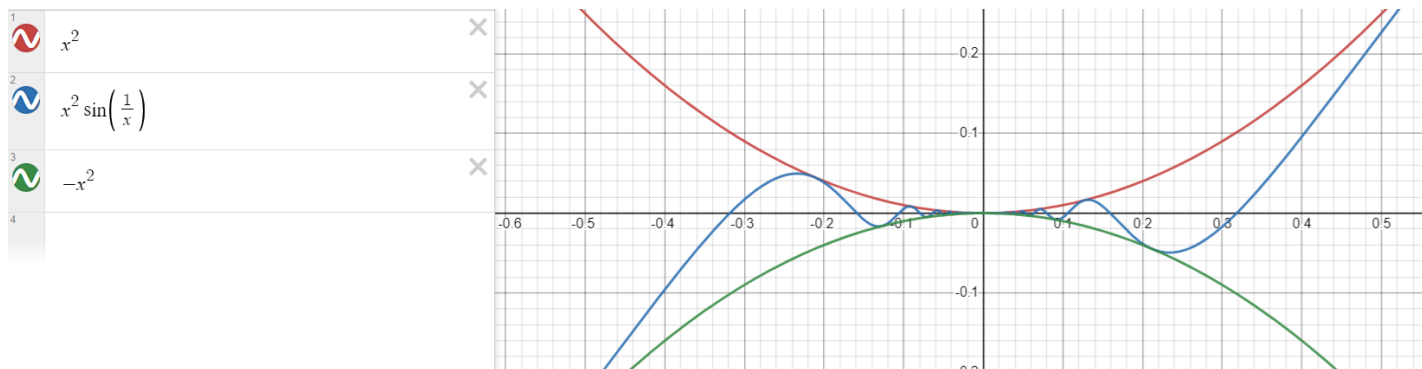
$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} = \frac{G \circ F(\lambda h) - G \circ F(0)}{\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\lambda} \right)$$

\Rightarrow нет вариации по Лагранжу.

Задача 10. Привести пример функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, всюду дифференцируемой по Фреше, но не строго дифференцируемой в нуле.

Доказательство: Рассмотрим функцию f :

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \end{cases}$$



f дифференцируема по Фреше в $x \neq 0$ (по правилу Лейбница):

$$(x+h)^2 = x^2 + 2xh + o(|h|)$$

$$\sin \frac{1}{x+h} = \sin \frac{1}{x} + \frac{-1}{x^2} \cos \frac{1}{x} h + o(|h|)$$

$|f(x)| \leq x^2 \implies f'(0) = 0$ и $f(x) - f(0) = f(x) = o(|x|)$, $|x| \rightarrow 0$ то есть f диф. по Фреше в 0, тогда и на всем \mathbb{R}
Предположим противное: f строго дифференцируемо в 0.

По определению, для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любых $x_1, x_2 \in O_\delta(x_0)$ выполнено

$$|f(x_1) - f(x_2) - A(x_1 - x_2)| \leq \varepsilon |x_1 - x_2|$$

$$f'(0) = 0 \implies |f(x_1) - f(x_2)| \leq \varepsilon |x_1 - x_2| \leq 2\varepsilon \delta$$

$$x \neq 0 : f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \cos \frac{1}{x} \left(-1 \cdot \frac{1}{x^2}\right) = 2x \sin \left(\frac{1}{x}\right) - \cos \frac{1}{x} \not\rightarrow 0, x \rightarrow 0$$

потому что $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$ и $\lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x}$ не существует.

$$\text{Тогда } \exists \xi_n \rightarrow 0 \quad |f'(\xi_n)| \geq c > 0$$

$$f(\xi_n + h_n) - f(\xi_n) = f'(\xi_n) h_n + o(h_n) \quad (\text{по опр. диф. по Фреше})$$

$$h_n \rightarrow 0 :$$

$$|f(\xi_n + h_n) - f(\xi_n)| \geq C |h_n|$$

Получили противоречие. f не является строго дифференцируемой в нуле.

Задача 11. 1) Если $F : X \rightarrow \mathbb{R}$, то существует $x \in [x_0, x_1]$ такое, что $F(x_1) - F(x_0) = F'(x)[x_1 - x_0]$.

2) Если $F : X \rightarrow Y$, $\dim Y > 1$, то утверждение из п. 1 может быть неверным.

Решение. 1) Положим $\varphi(t) = F((1-t)x_0 + tx_1)$. Тогда $\varphi'(t) = F'((1-t)x_0 + tx_1)[x_1 - x_0]$. По теореме Лагранжа, существует $\tau \in (0, 1)$ такое, что $\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\tau)$. Значит,

$$F(x_1) - F(x_0) = \varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\tau) = F'((1-\tau)x_0 + \tau x_1)[x_1 - x_0].$$

2) Пусть $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $F(t) = (\cos t, \sin t)$. Тогда $F(2\pi) - F(0) = (0, 0)$, $F'(t) = (-\sin t, \cos t)$; значит, если $F(2\pi) - F(0) = 2\pi F'(t)$ для некоторого t , то $(0, 0) = 2\pi(-\sin t, \cos t)$ - противоречие.

Задача 12. Показать, что если отображение F строго дифференцируемо в нуле и дифференцируемо по Гато в окрестности 0 , то производная по Гато $F'_G(x) : h \mapsto F'_G(x)[h]$ непрерывна в 0 .

Решение.

Если F строго дифференцируемо в 0 , т.е.

$$\|F(x) - F(y) - F'(0)(x - y)\| \leq \varepsilon \|x - y\| \implies \|F(x) - F(y) - F'_G(0)(x - y)\| \leq \varepsilon \|x - y\|$$

при $\|x\| \leq \delta(\varepsilon)$ и $\|y\| \leq \delta(\varepsilon)$, то константа Липшица отображения $x \mapsto F(x) - F'(0)[x]$, обозначенная здесь через ε стремится к 0 в дельта-окрестности 0 при дельта стремящемся к 0 .

Поскольку отображение $\Phi : h \mapsto (F'_G(x) - F'_G(0))[h]$ липшицево с константой ε в окрестности 0 , то в каждой точке этой окрестности норма производной Φ не больше ε . Поэтому приходим к заключению: $\|F'_G(x) - F'_G(0)\|$ не больше ε , если x в маленькой окрестности нуля. Требуемая непрерывность установлена.

Задача 13. Пусть $T : L^2(0, 1) \rightarrow L^2(0, 1)$, $Tx(t) = \sin x(t)$. Показать, что T дифференцируемо по Гато в каждой точке, но нигде не дифференцируемо по Фреше.

Решение.

1. Дифференцируемость по Гато.

Сначала зафиксируем вектор $h \in L^2(0, 1)$. Пусть $\lambda \in \mathbb{R}$. Для любого t

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\sin[x(t) + \lambda h(t)] - \sin x(t)}{\lambda} \stackrel{(\sin x)' = \cos x}{=} \cos x(t) \cdot h(t).$$

Таким же будет предел в $L^2(0, 1)$, т.е.

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_0^1 \left(\frac{\sin[x(t) + \lambda h(t)] - \sin x(t)}{\lambda} - \cos x(t) h(t) \right)^2 dt = 0,$$

поскольку поточечная сходимость есть, а подинтегральная функция мажорируется функцией из L^1 ,

$$\left| \frac{\sin[x(t) + \lambda h(t)] - \sin x(t)}{\lambda} \right| \leq |h(t)|.$$

2. Однако нет дифференцируемости по Фреше.

Следуя указанию А.А. Васильевой, рассмотрим два случая.

А) Если $\mu\{t : |\cos x(t)| \neq 0\} > 0$, то существует $\varepsilon > 0$ и $E = \{t : |\cos x(t)| \geq \varepsilon\} > 0$. Пусть $E_n \subset E$, что $\mu E_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Возьмем $h_n = 2\pi \cdot 1_{E_n}$. Тогда $\sin(x(t) + h_n(t)) - \sin x(t) \equiv 0$. Поэтому

$$\frac{\|\cos x(\cdot) h_n(\cdot)\|_{L^2}}{\|h_n(\cdot)\|_{L^2}} \geq \frac{\varepsilon (\mu E_n)^{1/2}}{(\mu E_n)^{1/2}} = \varepsilon.$$

В). Если $\mu\{t : |\cos x(t)| \neq 0\} = 0$, то возьмем $h_n = \pi \cdot 2 \cdot 1_{E_n}$. Далее аналогично. Получается, что T не дифференцируемо и по Фреше.

Задача 14. Пусть $A : l_2 \rightarrow l_2$,

$$A(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) = (x_1, x_2/2, \dots, x_n/n, \dots),$$

$(y_1, \dots, y_n, \dots) \in l_2 \setminus \text{Im } A$ (почему такая точка существует?). Рассмотрим задачу

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n x_n \rightarrow \inf, \quad A(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) = 0.$$

Какая точка будет точкой минимума в этой задаче? Показать, что для этой задачи принцип Лагранжа неверен. Какое из условий теоремы о необходимом условии локального минимума здесь не выполнено?

Решение.

1) В качестве точки y можно взять последовательность $(1, 1/2, \dots, 1/n, \dots) \in l_2$. Если $Ax = y$, то $x_n = 1$ для любого $n \in \mathbb{N}$, но $(1, \dots, 1, \dots) \notin l_2$.

2) Если $A(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) = 0$, то $\frac{x_n}{n} = 0$ для любого n . Значит, $x = 0$ -единственная допустимая точка, она же и будет точкой минимума.

3) Пусть $f_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n x_n$, $F(x) = A(x)$. Тогда $f'_0(x)[h] = \sum_{n=1}^{\infty} y_n h_n$, $F'(x)[h] = A'(h) = (h_1, h_2/2, \dots, h_n/n, \dots)$. Если z^* - линейный непрерывный функционал на l_2 , то существует вектор $z = (z_1, \dots, z_n, \dots) \in l_2$ такой, что $z^*(x) = \sum_{n=1}^{\infty} z_n x_n$.

Таким образом, если принцип Лагранжа выполнен, то существуют $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ и $z \in l_2$, одновременно не равные нулю, такие, что для любого $h \in l_2$ выполнено

$$\lambda_0 \sum_{n=1}^{\infty} y_n h_n + \sum_{n=1}^{\infty} z_n \frac{h_n}{n} = 0.$$

Значит, $\lambda_0 y_n + \frac{z_n}{n} = 0, n \in \mathbb{N}$. Если $\lambda_0 \neq 0$, то $y_n = -\frac{z_n}{\lambda_0 n}$, то есть $y = A(-z/\lambda_0)$. Но $y \notin \text{Im } A$ - противоречие. Если $\lambda_0 = 0$, то $\frac{z_n}{n} = 0$ для любого n , поэтому $z = 0$. Получили, что оба множителя Лагранжа нулевые.

4) Пространства $X = Y = l_2$ банаховы, f_0 и F непрерывно дифференцируемы (это линейные непрерывные отображения). Но $\text{Im } F'(0) = \text{Im } A$ незамкнут (он всюду плотен в l_2 , но не совпадает с l_2).

Задача 15. Привести пример гладких функций $f_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ таких, что в задаче $f_0(x) \rightarrow \min, f_1(x) = 0$ будет существовать точка локального минимума и в принципе Лагранжа будет $\lambda_0 = 0$ (а с $\lambda_0 \neq 0$ принцип Лагранжа не выполнен).

Решение. Рассмотрим задачу

$$x \rightarrow \inf, \quad x^2 = 0$$

Единственная допустимая точка $\hat{x} = 0$. Значит, она и будет точкой минимума. Запишем функцию Лагранжа: $\mathcal{L} = \lambda_0 x + \lambda_1 x^2$. Приравнявая ее производную в \hat{x} к нулю, получаем $\lambda_0 = 0$.

Задача 16. Пусть $\hat{x} \in M$ - точка локального минимума в задаче

$$\begin{cases} f_0(x) \rightarrow \inf \\ x \in M \end{cases}$$

функция f_0 дифференцируема по Гато в точке \hat{x} .

Верно ли, что тогда $f'_0(\hat{x})[h] = 0$ для любого $h \in T_{\hat{x}}M$?

Ответ: нет, неверно.

Пример: Пусть $M = \{(x, y) : y = x^2\}$ (т.е. парабола на плоскости),

$$f_0(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } y = x^2 \\ x, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Тогда $f_0 = 0$ на M , поэтому $(0, 0)$ - точка минимума f_0 на M . При $f_0(th, tg) = th$ при малых t (если $t < \frac{g}{h}$, то $t^2 h^2 < tg$), поэтому $f'_0(0, 0)[(h, g)] = h$.

Касательный вектор в $(0, 0)$ к параболе M имеет вид $(h, 0)$, так что на нем производная равна $h \neq 0$.

Задача 17. Пусть $l > 0$. Доказать, что допустимые экстремали в задаче

$$\int_0^1 (y\dot{x} - x\dot{y})dt \rightarrow \max, \quad \int_0^1 \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}dt = l, \quad x(0) = x(1) = y(0) = y(1) = 0, \quad \dot{x}^2 + \dot{y}^2 > 0$$

являются параметризацией окружности.

Решение. Функция Лагранжа имеет вид

$$\int_0^1 \left(\lambda_0(-y\dot{x} + x\dot{y}) + \lambda_1 \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \right) dt$$

Значит, уравнения Эйлера имеют вид

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dt} \left(\lambda_1 \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} - \lambda_0 y \right) + \lambda_0 \dot{y} &= 0, \\ -\frac{d}{dt} \left(\lambda_1 \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} + \lambda_0 x \right) - \lambda_0 \dot{x} &= 0. \end{aligned}$$

Если $\lambda_1 = 0$, то $\lambda_0 \dot{y} = 0, \lambda_0 \dot{x} = 0$. Так как $\lambda_0 \neq 0$, то $\dot{y} = 0, \dot{x} = 0$, что противоречит условию $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 > 0$. Пусть $\lambda_1 \neq 0$. Можно считать, что $\lambda_1 = 2$. Тогда

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dt} \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} + \lambda_0 \dot{y} &= 0 \\ -\frac{d}{dt} \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} - \lambda_0 \dot{x} &= 0 \end{aligned}$$

откуда

$$\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} = \lambda_0 y + a, \quad \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} = -\lambda_0 x + b$$

Возведем обе части равенств в квадрат и получим

$$1 = (-\lambda_0 y + a)^2 + (\lambda_0 x + b)^2$$

Заметим, что $\lambda_0 \neq 0$, иначе $\frac{dy}{dx} = \text{const}$ или $\frac{dx}{dy} = \text{const}$, при этом (\dot{x}, \dot{y}) нигде не обращается в $(0, 0)$. Тогда будет движение по отрезку всё время в одном направлении, что противоречит граничным условиям. А если $\lambda_0 \neq 0$, то (3) - уравнение окружности.

Задача 18. Привести пример такой задачи выпуклого программирования, что допустимая \hat{x} — не есть точка минимума, но существует ненулевой набор $(\lambda_0, \dots, \lambda_m)$, удовлетворяющий условиям а)-с) теоремы Куна-Таккера.

Теорема 1. (Каруи - Кун - Таккер). Пусть X — линейное пространство, $f_0, \dots, f_m : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ — выпуклые функции.

1. (необходимое условие). Пусть \hat{x} — точка минимума в задаче:

$$\begin{cases} f_0(x) \rightarrow \inf \\ f_j(x) \leq 0, \quad 1 \leq j \leq m \end{cases}$$

Тогда существует ненулевой набор чисел $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m$ со следующими свойствами:

(а) $\lambda_j \geq 0, 0 \leq j \leq m$ (условие неотрицательности);

(б) $\lambda_j f_j(\hat{x}) = 0, 1 \leq j \leq m$ (условие дополняющей нежесткости);

(с) \hat{x} является точкой минимума функции $\mathcal{L}(x) := \sum_{j=0}^m \lambda_j f_j(x)$ (условие минимума).

2. (достаточное условие). Пусть \hat{x} — допустимая точка. Пусть существует набор чисел $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m$ со свойствами а)-с), при этом $\lambda_0 > 0$. Тогда \hat{x} — точка минимума в рассматриваемой задаче.

3. Пусть существует точка $\bar{x} \in X$ такая, что $f_j(\bar{x}) < 0, 1 \leq j \leq m$ (условие Слейтера). Тогда, если $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m$ — ненулевой набор чисел со свойствами а)-с), то $\lambda_0 > 0$.

Пример.

Пусть $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, f_1(x) = -x_1, f_2(x) = x_2$, а $f_0(x) = x_1^2 + (x_2 + 1)^2$. Тогда для функции Лагранжа $\mathcal{L}(x) = -x_1$ имеем: точка $\hat{x} = (0, 0)$ — допустимая, условия а)-с) выполнены, но минимум $f_0(x)$ достигается в точке $(0, -1)$.

Задача 19. (распределение с максимальной энтропией; см. тему про достаточное условие глобального минимума в задаче с равенствами и неравенствами). Пусть $\rho : [0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$, $\int_0^\infty \rho(x) dx = 1$ (функция ρ имеет смысл плотности распределения). Энтропией называется величина $S = -\int_0^\infty \rho(x) \ln \rho(x) dx$. Найти функцию ρ , для которой энтропия максимальна при заданном среднем (т.е. задано ограничение $\int_0^\infty x \rho(x) dx = C_1$).

Решение. Напишем задачу на экстремум:

$$\int_0^\infty \rho(x) \ln \rho(x) dx \rightarrow \inf, \quad \int_0^\infty \rho(x) dx = 1, \quad \int_0^\infty x \rho(x) dx = C_1$$

Составим функцию Лагранжа с $\lambda_0 = 1$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \int_0^\infty \rho(x) \ln \rho(x) dx + \lambda_1 \int_0^\infty \rho(x) dx + \lambda_2 \int_0^\infty x \rho(x) dx = \\ &= \int_0^\infty (\rho(x) \ln \rho(x) + \lambda_1 \rho(x) + \lambda_2 x \rho(x)) dx. \end{aligned}$$

Найдем минимум у функции \mathcal{L} . Для этого при каждом фиксированном $x \in [0, \infty)$ найдем точку минимума у $f(v) = v \ln v + \lambda_1 v + \lambda_2 x v$. Вычислим производную: $f'(v) = \ln v + 1 + \lambda_1 + \lambda_2 x$. Эта функция строго возрастает по v ; $f'(v) = 0$ в точке $\hat{\rho}(x) = e^{-1-\lambda_1-\lambda_2 x}$. Значит, $\hat{\rho}(x) = e^{-1-\lambda_1-\lambda_2 x}$ является точкой минимума $v \ln v + \lambda_1 v + \lambda_2 x v$.

Из условий $\int_0^\infty e^{-1-\lambda_1-\lambda_2 x} dx = 1$ и $\int_0^\infty x e^{-1-\lambda_1-\lambda_2 x} dx = C_1$ находим λ_1 и λ_2 :

$$e^{\lambda_1+1} = \frac{1}{\lambda_2}, \quad C_1 e^{\lambda_1+1} = \frac{1}{\lambda_2^2}$$

Докажем, что найденная функция будет точкой минимума в задаче. В самом деле, пусть $\rho(x)$ - допустимая функция. Тогда для любого $x \in [0, \infty)$ получаем

$$\rho(x) \ln \rho(x) + \lambda_1 \rho(x) + \lambda_2 x \rho(x) \geq \hat{\rho}(x) \ln \hat{\rho}(x) + \lambda_1 \hat{\rho}(x) + \lambda_2 x \hat{\rho}(x).$$

Интегрируем это неравенство и получаем $\mathcal{L}(\rho) \geq \mathcal{L}(\hat{\rho})$, т.е.

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \rho(x) \ln \rho(x) dx + \lambda_1 \int_0^\infty \rho(x) dx + \lambda_2 \int_0^\infty x \rho(x) dx &\geq \\ \geq \int_0^\infty \hat{\rho}(x) \ln \hat{\rho}(x) dx + \lambda_1 \int_0^\infty \hat{\rho}(x) dx + \lambda_2 \int_0^\infty x \hat{\rho}(x) dx. \end{aligned}$$

Воспользуемся ограничениями в задаче и получим, что $\int_0^\infty \rho(x) \ln \rho(x) dx \geq \int_0^\infty \hat{\rho}(x) \ln \hat{\rho}(x) dx$.

Теперь докажем, что других точек минимума в задаче нет. Пусть ρ_1 и ρ_2 - две разные точки минимума. Обозначим минимальное значение через m ; тогда $\int_0^\infty \rho_1(x) \ln \rho_1(x) dx = \int_0^\infty \rho_2(x) \ln \rho_2(x) dx = m$. Функции ρ_1 и ρ_2 различаются на множестве положительной меры. Заметим, что функция $\rho = (\rho_1 + \rho_2)/2$ также является допустимой. Покажем, что $\int_0^\infty \rho(x) \ln \rho(x) dx < m$.

В самом деле, функция $\varphi(v) = v \ln v$ строго выпукла, т.е. для любых $u \neq w, \lambda \in (0, 1)$ выполнено $\varphi((1-\lambda)u + \lambda w) < (1-\lambda)\varphi(u) + \lambda\varphi(w)$. Это верно, так как $\varphi''(v) > 0$ для любого $v > 0$.

Значит, на множестве положительной меры

$$\frac{\rho_1(x) + \rho_2(x)}{2} \ln \left(\frac{\rho_1(x) + \rho_2(x)}{2} \right) < \frac{1}{2} \rho_1(x) \ln \rho_1(x) + \frac{1}{2} \rho_2(x) \ln \rho_2(x),$$

поэтому

$$\int_0^\infty \rho(x) \ln \rho(x) dx < \frac{1}{2} \int_0^\infty \rho_1(x) \ln \rho_1(x) dx + \frac{1}{2} \int_0^\infty \rho_2(x) \ln \rho_2(x) dx = m.$$

Задача 20. (аэродинамическая задача Ньютона). Найти допустимые экстремали в задаче

$$\begin{cases} \int_0^{T_0} \frac{t}{1+u^2} dt \rightarrow \inf \\ x(0) = 0, x(T_0) = \xi \\ \dot{x} = u \\ u \geq 0 \end{cases}$$

здесь $T_0 > 0, \xi > 0$ - заданные параметры. (Ответ для $\hat{x}(t)$ записывается в параметрическом виде: $x = x(v), t = t(v)$.) Доказать, что допустимая экстремаль существует и единственна, и что она будет точкой глобального минимума в данной задаче.

Решение.

Составим функцию Лагранжа:

$$\mathcal{L} = \lambda_0 \int_0^{T_0} \frac{t}{1+u^2} dt + \int_0^{T_0} p(t)(\dot{x} - u)dt + \lambda_1 x(0) + \lambda_2 (x(T_0) - \xi).$$

Необходимые условия локального минимума имеют вид $\lambda_0 \geq 0$ (условие неотрицательности), $\dot{p} = 0$ (уравнение Эйлера), $p(0) = \lambda_1, p(T_0) = -\lambda_2$ (условие трансверсальности),

$$\min_{v \geq 0} \left(\frac{\lambda_0 t}{1+v^2} - p(t)v \right) = \frac{\lambda_0 t}{1+\hat{u}(t)^2} - p(t)\hat{u}(t)$$

(принцип максимума Понтрягина).

Из уравнения Эйлера получаем, что $p(t) = c$. Пусть $\lambda_0 = 0$. Тогда $\min_{v \geq 0} (-cv) = -c\hat{u}(t)$. Если $c = 0$, то $p(t) \equiv 0$; из условия трансверсальности следует, что $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, то есть все множители Лагранжа нулевые. Если $c > 0$, то у функции $-cv$ на $[0, +\infty)$ точки минимума нет. Если $c < 0$, то $\hat{u}(t) \equiv 0$. В силу граничного условия в нуле, $\hat{x}(t) \equiv 0$, что противоречит с условием $x(T_0) = \xi > 0$.

Пусть $\lambda_0 > 0$. Без ограничения общности можно взять $\lambda_0 = 1$. Также обозначим $q = -c$. Получаем

$$\min_{v \geq 0} \left(\frac{t}{1+v^2} + qv \right) = \frac{t}{1+\hat{u}(t)^2} + q\hat{u}(t).$$

Для фиксированного $t \in [0, T_0]$ положим $f(v) = \frac{t}{1+v^2} + qv$. Если $q \leq 0$, то минимум функции f не достигается, так как она строго убывает. Значит, остается случай $q > 0$. Найдем участки монотонности функции f на \mathbb{R}_+ . Имеем: $f'(v) = -\frac{2tv}{(1+v^2)^2} + q$. Условие $f'(v) = 0$ эквивалентно уравнению

$$q(1+v^2)^2 - 2tv = 0. \quad (1)$$

В левой части стоит строго выпуклая функция, поэтому у нее количество нулей не больше 2. Также заметим, что максимальный корень строго возрастает по t . В самом деле, если $t_1 < t_2$, $q(1+u_1^2)^2 - 2t_1 u_1 = 0$, то $q(1+u_1^2)^2 - 2t_2 u_1 < 0$. Кроме того, максимальный корень стремится к $+\infty$ при $t \rightarrow +\infty$.

Итак, либо f строго возрастает (тогда 0 гочка минимума), либо сначала возрастает, потом убывает и затем снова возрастает. Во втором случае минимум либо при $v = 0$, либо в точке u_* , являющейся максимальным корнем уравнения (1). Сравним значения $f(0)$ и $f(u_*)$. Запишем неравенство $f(0) \leq f(u_*)$, получим $\frac{tu_*}{1+u_*^2} \leq q$; подставим из (1) $t = \frac{q(1+u_*^2)^2}{2u_*}$ и получим после вычислений $u_* \leq 1$.

Итак, если f строго возрастает или $u_* < 1$, то минимум достигается в 0; если $u_* > 1$, то минимум достигается в u_* . Заметим, что $u_* = 1$ при $t = 2q$. Так как u_* строго возрастает по t , то при $t < 2q$ минимум функции f достигается в 0, а при $t > 2q$ в u_* . Итак,

$$\hat{u}(t) = \begin{cases} 0, & t < 2q, \\ u_*(t), & t > 2q. \end{cases}$$

В силу условия $x(0) = 0$, при $0 \leq t \leq 2q$ получаем $\hat{x}(t) = 0$. При $t \geq 2q$ функцию $x(t)$ запишем параметрически. Выражая t через v из (2), получаем $t(v) = \frac{q}{2} \left(\frac{1}{v} + 2v + v^3 \right)$. Далее, $\frac{dx}{dv} = \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dt}{dv} = v \cdot \frac{q}{2} \left(-\frac{1}{v^2} + 2 + 3v^2 \right) = \frac{q}{2} \left(-\frac{1}{v} + 2v + 3v^3 \right)$. Значит, $x(v) = \frac{q}{2} \left(-\ln v + v^2 + \frac{3}{4}v^4 \right) + C$; константа C находится из условия $x(1) = 0$ (здесь мы воспользовались тем, что x непрерывна по t и $u_*(2q) = 1$), т.е. $x(v) = \frac{q}{2} \left(-\ln v + v^2 + \frac{3}{4}v^4 - \frac{7}{4} \right)$. Итак,

$$t(v) = \frac{q}{2} \left(\frac{1}{v} + 2v + v^3 \right), \quad x(v) = \frac{q}{2} \left(-\ln v + v^2 + \frac{3}{4}v^4 - \frac{7}{4} \right).$$

Теперь покажем, что для любых $T_0 > 0, \xi > 0$ найдется $q > 0$ такое, что $x(T_0) = \xi$. Пусть $a = \frac{\xi}{T_0}$. Возьмем $q = 2$. Покажем, что если $x_0(t) = 0$ при $t \leq 2q = 4$, а при $t > 4$ задано параметрически:

$$t(v) = \frac{1}{v} + 2v + v^3, \quad x_0(v) = -\ln v + v^2 + \frac{3}{4}v^4 - \frac{7}{4},$$

то найдется такое $t_* > 4$, что $x_0(t_*) = at_*$. Затем определим q из равенства $\frac{qt_*}{2} = T_0$. Мы уже говорили, что $\hat{x}_0(t)$ строго возрастает при $t > 4$ и $\hat{x}_0(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} +\infty$. Значит, $x_0(t) \rightarrow at$ при $t \rightarrow +\infty$. Кроме того, $x_0(4) - 4a < 0$. Поэтому уравнение $x_0(t) = at$ имеет корень на $(4, +\infty)$. Единственность корня следует из строгой выпуклости x_0 на $[4, +\infty)$.

Теперь покажем, что найденная экстремаль является точкой минимума. Достаточно показать, что она является точкой минимума функции \mathcal{L} . Из условий трансверсальности следует, что $\lambda_1 = -q, \lambda_2 = q$. Имеем: $\mathcal{L}(x, u) = \mathcal{L}_1(x) + \mathcal{L}_2(u)$, где

$$\mathcal{L}_1(x) = - \int_0^{T_0} q \dot{x} dt - qx(0) + q(x(T_0) - \xi) \equiv -q\xi T_0, \quad \mathcal{L}_2(u) = \int_0^{T_0} \left(\frac{t}{1+u^2} + qu \right) dt.$$

Из принципа максимума Понтрягина следует, что $\mathcal{L}_2(u) \geq \mathcal{L}_2(\hat{u})$. Значит, $\mathcal{L}(x, u) \geq \mathcal{L}(\hat{x}, \hat{u})$ для любой допустимой пары (x, u) .

Задача 21. (из лекций) Сделав замену $\dot{x} = u$, вывести необходимое условие сильного минимума в простейшей задаче вариационного исчисления (условие Вейерштрасса и непрерывность $L_{\dot{x}}(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t))$) из принципа максимума Понтрягина.

Решение.

Определение 1. Функция Вейерштрасса определяется по формуле:

$$\mathcal{E}(t, x, u, v) = L(t, x, v) - L(t, x, u) - L_{\dot{x}}(t, x, u)(v - u).$$

Определение 2. Пусть $\hat{x} \in PC^1([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ — допустимая экстремаль (т.е. решение уравнения Эйлера–Лагранжа). Скажем, что выполнено условие Вейерштрасса для \hat{x} , если $\mathcal{E}(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t), v) \geq 0$ для любого $t \in [t_0, t_1], v \in \mathbb{R}^n$.

Задача записывается в виде

$$\int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), u(t)) dt \rightarrow \inf, \quad x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1, \quad \dot{x} = u.$$

Функция Лагранжа имеет вид

$$\mathcal{L} = \int_{t_0}^{t_1} (\lambda_0 L(t, x(t), u(t)) + p(t)(\dot{x}(t) - u(t))) dt + \lambda_1 x(t_0) + \lambda_2 x(t_1).$$

Условие неотрицательности: $\lambda_0 \geq 0$.

Уравнение Эйлера: $-\dot{p}(t) + \lambda_0 L_x(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t)) = 0$.

Условие трансверсальности: $p(t_0) = \lambda_1, p(t_1) = -\lambda_2$.

Принцип максимума Понтрягина: $\min_{v \in \mathbb{R}} (\lambda_0 L(t, \hat{x}(t), v) - p(t)v) = \lambda_0 L(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t)) - p(t)\hat{u}(t)$.

Так как L гладкая и минимум берется по $v \in \mathbb{R}$, то получаем $\lambda_0 L_{\dot{x}}(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t)) - p(t) = 0$.

Если $\lambda_0 = 0$, то отсюда $p = 0$; в силу условий трансверсальности, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, то есть все множители Лагранжа нулевые.

Итак, $\lambda_0 > 0$. Можно считать, что $\lambda_0 = 1$. Так как $\dot{\hat{x}} = \hat{u}$, то $L_{\dot{x}}(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)) = p(t)$. В теореме о необходимом условии сильного минимума в задаче оптимального управления функция p кусочно непрерывно-дифференцируемая и, значит, непрерывная. Отсюда получаем непрерывность $t \mapsto L_{\dot{x}}(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t))$.

Еще раз запишем принцип максимума Понтрягина: для любого $v \in \mathbb{R}$

$$L(t, \hat{x}(t), v) - L_{\dot{x}}(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t))v \geq L(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t)) - L_{\dot{x}}(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t))\hat{u}(t)$$

Подставим $\hat{u} = \dot{\hat{x}}$, перенесем все в левую часть и получим условие Вейерштрасса.

Задача 22. Показать, что если L явно не зависит от x (т.е. $L = L(t, \dot{x}(t))$), то условие Вейерштрасса будет достаточным условием глобального минимума.

Решение. В силу уравнения Эйлера, $L_{\dot{x}}(t, \dot{x}(t)) \equiv c$.

Пусть x - произвольная допустимая функция. В силу условия Вейерштрасса

$$\int_{t_0}^{t_1} \mathcal{E}(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t), \dot{x}(t)) dt \geq 0$$

откуда

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(L(t, \dot{x}(t)) - L(t, \dot{\hat{x}}(t)) - L_{\dot{x}}(t, \dot{\hat{x}}(t))(\dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t)) \right) dt \geq 0$$

Значит,

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} L(t, \dot{x}(t)) dt &\geq \int_{t_0}^{t_1} L(t, \dot{\hat{x}}(t)) dt + \int_{t_0}^{t_1} c(\dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t)) dt = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} L(t, \dot{\hat{x}}(t)) dt + cx|_{t_0}^{t_1} - c\hat{x}|_{t_0}^{t_1} = \int_{t_0}^{t_1} L(t, \dot{\hat{x}}(t)) dt \end{aligned}$$

так как $x(t_0) = \hat{x}(t_0)$ и $x(t_1) = \hat{x}(t_1)$.

Задача 23.

Определение 3. Скажем, что выполнено условие Эйлера, если \hat{x} – экстремаль, т.е. решение уравнения Эйлера–Лагранжа.

Определение 4. Скажем, что выполнено условие Лежандра, если $\hat{L}_{\dot{x}\dot{x}} \geq 0 \forall t \in [-T_0, T_0]$.

Определение 5. Скажем, что выполнено усиленное условие Лежандра, если $\hat{L}_{\dot{x}\dot{x}} > 0 \forall t \in [-T_0, T_0]$.

Определение 6. Скажем, что выполнено условие Якоби, если справедливо усиленное условие Лежандра, а решение уравнения Якоби

$$-\frac{d}{dt} \left(\hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t) \dot{h} + \hat{L}_{\dot{x}x}(t) h \right) + \left(\hat{L}_{\dot{x}x}(t) \dot{h} + \hat{L}_{xx}(t) h \right) = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left(\hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t) \dot{h} \right) = \left(\hat{L}_{xx}(t) - \frac{d}{dt} \hat{L}_{\dot{x}x}(t) \right) h \quad (2)$$

не обращается в ноль на интервале $(-T_0, T_0)$ при начальных условиях: $h(-T_0) = 0, \quad \dot{h}(-T_0) = 1$.

Определение 7. Скажем, что выполнено усиленное условие Якоби, если справедливо усиленное условие Лежандра, а решение уравнения (2) не обращается в ноль на полусегменте $(-T_0, T_0]$ при начальных условиях: $h(-T_0) = 0, \quad \dot{h}(-T_0) = 1$.

Определение 8. Скажем, что выполнено усиленное условие Вейерштрасса, если функция $\dot{x} \mapsto L(t, x(t), \dot{x})$ выпукла в ' C '-окрестности экстремали \hat{x} при любом $t \in [-T_0, T_0]$, т.е. для любого $t \in [-T_0, T_0]$ и $x(t) \in \mathcal{O}(\hat{x}, \varepsilon)$ (с некоторым $\varepsilon > 0$) функция $\dot{x} \mapsto L(t, x(t), \dot{x})$ выпукла.

Теорема 2. Если выполнены усиленное условие Якоби и усиленное условие Вейерштрасса, то экстремаль доставляет сильный максимум.

Рассмотрим задачу $\int_0^\pi (\dot{x}^2 - x^2 - x^4) dt \rightarrow \inf, x(0) = x(\pi) = 0$. Показать, что для $\hat{x} = 0$ выполнено усиленное условие Лежандра, условие Якоби, при этом $\hat{x} = 0$ не является точкой слабого минимума.

Решение. Имеем $\hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t) = 2, \hat{L}_{\dot{x}x} = 0, \hat{L}_{xx} = -2$. Значит, выполнено усиленное условие Лежандра. Уравнение Якоби имеет вид $\ddot{h} + h = 0$; его нетривиальное решение, исчезающее при $t = 0$, имеет вид $h(t) = a \sin t, a \neq 0$. Тогда $h(t) \neq 0$ при $t \in (0, \pi)$, но $h(\pi) = 0$. Значит, выполнено условие Якоби, но не усиленное. Возьмем $x(t) = \varepsilon \sin t$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_0^\pi (\dot{x}^2 - x^2 - x^4) dt &= \varepsilon^2 \int_0^\pi (\cos^2 t - \sin^2 t) dt - \varepsilon^4 \int_0^\pi \sin^4 t dt = \\ &= \varepsilon^2 \int_0^\pi \cos 2t dt - \varepsilon^4 \int_0^\pi \sin^4 t dt = -\varepsilon^4 \int_0^\pi \sin^4 t dt < 0. \end{aligned}$$

Так как $\varepsilon > 0$ может быть сколь угодно мало, то слабого минимума нет.

Задача 24.

$$F(x) = \int_0^{3/2} (\dot{x}^3 + 2x) dt \rightarrow \inf, x(0) = 0, x(3/2) = 1$$

Доказать, что выполнено (неусиленное) условие Лежандра, усиленное условие Якоби, а допустимая экстремаль не дает слабый минимум.

Примечание. Усиленное условие Якоби предполагает 2й порядок этого линейного уравнения. В моем файле ТУ усиленное условие Якоби трактовалось при выполнении усиленного условия Лежандра, которое обеспечивает 2й порядок уравнения Якоби.

Решение.

Уравнение экстремалей $f_x = \frac{d}{dt} f_{\dot{x}}$ для $f = \dot{x}^3 + 2x$ имеет вид $2 = 6\dot{x}\ddot{x}$, т.е. $3y\dot{y} = 1$ для $y = \dot{x}$. Имеем $3ydy = dt$, т.е. $\frac{3}{2}y^2 = t + C$. При $C = 0$ имеем $\dot{x}(t) = \left(\frac{2}{3}t\right)^{1/2}$, что при условии $x(0) = 0$ дает

$$\hat{x}(t) = \left(\frac{2}{3}\right)^{1/2} t^{3/2} \cdot \frac{2}{3} = \left(\frac{2}{3}t\right)^{3/2} \implies \hat{x}\left(\frac{3}{2}\right) = 1$$

т.е. допустимую экстремаль \hat{x} . Имеем

$$\begin{aligned} F(\hat{x} + h) - F(\hat{x}) &= \int_0^{3/2} \left\{ \left([\dot{\hat{x}} + \dot{h}]^3 + 2[\hat{x} + h] \right) - \left([\dot{\hat{x}}]^3 + 2[\hat{x}] \right) \right\} dt = \\ &= \int_0^{3/2} \left\{ 3\dot{\hat{x}}^2\dot{h} + 3\dot{\hat{x}}(\dot{h})^2 + (\dot{h})^3 + 2h \right\} dt = \int_0^{3/2} \left\{ 3\dot{\hat{x}}(\dot{h})^2 + (\dot{h})^3 \right\} dt \end{aligned}$$

Последнее равенство верно, т.к. на экстремали \hat{x} линейная по h часть разности $F(\hat{x} + h) - F(\hat{x})$ равна нулю. Таким образом,

$$F(\hat{x} + h) - F(\hat{x}) = \int_0^{3/2} \left\{ 3\dot{\hat{x}}(\dot{h})^2 + (\dot{h})^3 \right\} dt = \int_0^{3/2} \left\{ 3 \left(\frac{2t}{3} \right)^{1/2} (\dot{h})^2 + (\dot{h})^3 \right\} dt$$

Заметим, что усиленное условие Лежандра $\hat{f}_{\dot{x}\dot{x}}(t) > 0$ при $t \in [0, 3/2]$ нарушается при $t = 0$. Учитывая это есть резон быстро уйти от нуля, взяв функцию h кусочно-линейной, такую, что $h(0) = h(3/2) = 0$, а $\dot{h} = -\varepsilon < 0$ при $0 < t < \delta \ll 1$ и $\dot{h} = a > 0$ при $0 < t < \delta$. Тогда $h(t) = a(t - 3/2)$ при $t > \delta$ и $a \approx \frac{2}{3}\delta$. Отсюда получаем

$$\begin{aligned} F(\hat{x} + h) - F(\hat{x}) &\approx \int_0^\delta \sqrt{6}t^{1/2}\varepsilon^2 dt - \varepsilon^3\delta + \int_0^{3/2} \sqrt{6}t^{1/2}a^2 dt + \frac{3}{2}a^3 = \\ \varepsilon^3\delta &\left\{ \frac{2}{3}\sqrt{6}\frac{\delta^{1/2}}{\varepsilon} + \left(\frac{3}{2}\right)^{3/2} (2/3)^2 \frac{\delta}{\varepsilon} + \frac{3}{2}(2/3)^3 \delta^2 \right\} - \varepsilon^3\delta < 0 \quad \text{при} \quad \frac{\delta^{1/2}}{\varepsilon} \ll 1. \end{aligned}$$

Задача 25. $F(x) = \int_0^1 (\dot{x}^2 - x\dot{x}^3) dt \rightarrow \text{extr}, x(0) = x(1) = 0$. Показать, что для экстремали $\hat{x} = 0$ выполнено усиленное условие Лежандра, усиленное условие Якоби, условие Вейерштрасса (не усиленное), и \hat{x} не является точкой сильного минимума.

Решение.

Имеем $\hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t) = 2, \hat{L}_{\dot{x}x}(t) = 0, \hat{L}_{xx}(t) = 0$. Значит, выполнено усиленное условие Лежандра. Уравнение Якоби имеет вид $\dot{h} = 0$. Если h - нетривиальное решение и $h(0) = 0$, то $h(t) = at$, где $a \neq 0$. Эта функция зануляется только при $t = 0$. Значит, выполнено усиленное условие Якоби.

Далее, $\mathcal{E}(t, \hat{x}(t), \hat{x}(t), v) = v^2 \geq 0$. Значит, выполнено условие Вейерштрасса.

Теперь покажем, что \hat{x} не является точкой сильного минимума. Пусть $R > 0, 0 < \delta < \frac{1}{2}$. Положим

$$\dot{h}(t) = \begin{cases} R, & 0 \leq t < \delta \\ -\frac{R\delta}{1-\delta}, & \delta < t \leq 1 \end{cases}$$

$h(t) = \int_0^t \dot{h}(s) ds$. Тогда

$$h(t) = \begin{cases} Rt, & 0 \leq t \leq \delta \\ \frac{R\delta}{1-\delta}(1-t), & \delta \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Получаем

$$\begin{aligned} \int_0^1 (\dot{h}^2 - h\dot{h}^3) dt &= \int_0^\delta (R^2 - R^4 t) dt + \\ &+ \int_\delta^1 \left(\frac{R^2 \delta^2}{(1-\delta)^2} - \frac{R^4 \delta^4}{(1-\delta)^4} (1-t) \right) dt \leq \\ &\leq R^2 \delta - \frac{R^4 \delta^2}{2} + C_1 R^2 \delta^2 + C_2 R^4 \delta^4, \end{aligned}$$

где C_1, C_2 - положительные константы. Сделав замену $R\delta = \varepsilon$, получим

$$\int_0^1 (\dot{h}^2 - h\dot{h}^3) dt \leq R\varepsilon - \frac{R^2 \varepsilon^2}{2} + C_1 \varepsilon^2 + C_2 \varepsilon^4$$

Если $R = \frac{1}{\varepsilon^2}$, то при малых ε получим отрицательное число. При этом $\|h\|_C = \varepsilon$; это число можно выбрать сколь угодно малым, так что сильного минимума нет.

Задача 26. Доказать, используя поле экстремалей, что допустимая экстремаль в задаче

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\sqrt{1 + \dot{x}^2}}{x} dt \rightarrow \text{extr}, \quad x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1, \quad x > 0$$

является точкой глобального минимума (здесь $x_0 > 0, x_1 > 0$).

Решение. Напомним, что геодезические на плоскости Лобачевского - это дуги окружностей с центром на оси t .

Пусть $\hat{x}(t) = \sqrt{c^2 - (t - a)^2}, t_* < t_0, c^2 - (t_* - a)^2 > 0, x_* = \sqrt{c^2 - (t_* - a)^2}$. Определим семейство экстремалей (решений уравнения Эйлера) $x(t, \alpha)$ таких, что $x(t_*, \alpha) = x_*, \dot{x}(t_*, \alpha) = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$.

Сначала заметим, что для любого $\alpha \in \mathbb{R}$ геодезическая $x(t, \alpha)$ существует, при этом абсцисса центра окружности и ее радиус гладко зависят от α . В самом деле, центр окружности получается следующим образом: проводим к прямой $x = x_* + \alpha(t - t_*)$ перпендикуляр и находим его точку пересечения с осью t .

Если $\tau > t_*, \xi > 0$, то существует единственная геодезическая, проходящая через (t_*, x_*) и (τ, ξ) , при этом абсцисса центра окружности и радиус гладко зависят от (τ, ξ) (а значит, и α). Действительно, центр окружности получается следующим образом: проводим к отрезку с концами в (t_*, x_*) и (τ, ξ) серединный перпендикуляр и находим его точку пересечения с осью t .

Осталось заметить, что $L_{\dot{x}\dot{x}} > 0$, поэтому L выпукла по \dot{x} . Значит, по достаточному условию, экстремаль будет точкой глобального минимума.

Задача 27. Доказать, используя поле экстремалей, что допустимая экстремаль в задаче

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\sqrt{1 + \dot{x}^2}}{\sqrt{x}} dt \rightarrow \text{extr}, \quad x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1, \quad x > 0$$

является точкой глобального минимума (здесь $x_0 > 0, x_1 > 0$).

Решение. Мы уже вычисляли экстремали в параметрическом виде:

$$x = c(1 - \cos \tau), \quad t - a = c(\tau - \sin \tau)$$

где $a \in \mathbb{R}, c > 0, \tau \in [0, 2\pi]$. Будем их обозначать $x(t, a, c)$.

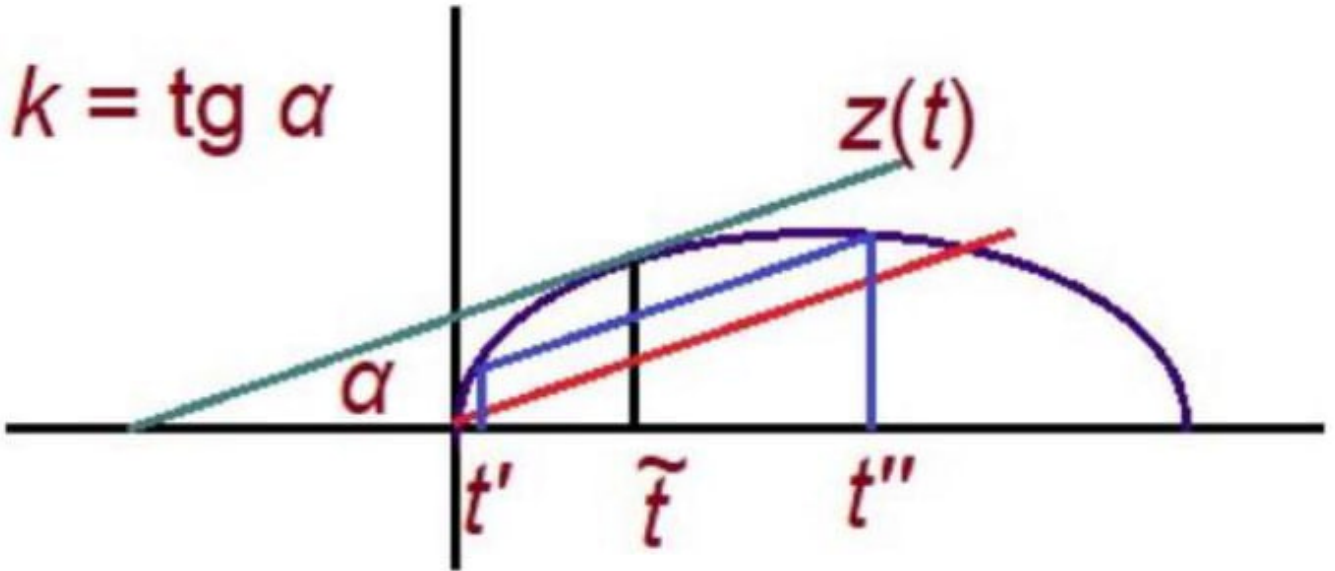
Наша цель доказать: допустимая экстремаль будет точкой глобального минимума.

Сначала покажем, что $\dot{x}(t, a, c)$ строго убывает, при этом принимает все вещественные значения. В самом деле, $t(\tau)$ строго возрастает; $\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\tau} \cdot \frac{d\tau}{dt} = \frac{\sin \tau}{1 - \cos \tau}$; при $\tau \rightarrow +0$ предел равен $+\infty$, при $\tau \rightarrow 2\pi - 0$ предел $-\infty$. Производная по τ от $\frac{\sin \tau}{1 - \cos \tau}$ равна $-\frac{1}{1 - \cos \tau} < 0$, так что $\ddot{x} < 0$.

Теорема 3. Для любых $t_* < t_{**}, x_* > 0, x_{**} > 0$ существуют единственные $c > 0, a \in \mathbb{R}$ такие, что $x(t_*, a, c) = x_*, x(t_{**}, a, c) = x_{**}$, при этом a и c гладко зависят от t_*, x_*, t_{**}, x_{**} .

Доказательство. Пусть без ограничения общности $x_* \leq x_{**}$.

Пусть $k = \frac{x_{**} - x_*}{t_{**} - t_*}, l$ - длина отрезка $[(t_*, x_*), (t_{**}, x_{**})], \gamma = l/x_*$. Возьмем экстремаль $x(\cdot, 0, 1)$ и покажем, что существуют такие $t' < t''$, что $\frac{x(t'', 0, 1) - x(t', 0, 1)}{t'' - t'} = k$ и отношение длины отрезка $[(t', x(t', 0, 1)), (t'', x(t'', 0, 1))]$ к $x(t', 0, 1)$ равно γ ; при этом t' и t'' определяются однозначно и гладко зависят от k и γ .



(Затем полагаем $c = x_*/x(t', 0, 1), a = t_* - ct'$ и получаем утверждение.)

Так как $\dot{x}(t, 0, 1)$ строго убывает по t и принимает все вещественные значения, то существует единственное \tilde{t} такое, что $z(t) = x(\tilde{t}, 0, 1) + k(t - \tilde{t})$ - касательная. Далее рассматриваем уравнение $x(t, 0, 1) = z(t) - r$, где $r > 0$. Так как вторая производная x строго отрицательна, то количество корней не более 2. Если решений ровно 2, то получаем хорду $[(t'_r, x'_r), (t''_r, x''_r)]$ (ее концы - точки пересечения циклоиды и графика $z(t) - r$). При этом t'_r гладко зависит от r (по теореме о неявной функции) и строго убывает по r (а значит, и x'_r), длина хорды l_r строго возрастает по r ; x'_r меняется от $x(\tilde{t}, 0, 1)$ до 0, а l_r - от 0 до некоторого положительного числа. Значит, l_r/x'_r строго возрастает от 0 до $+\infty$ и при некотором $r > 0$ равно γ (это число r единственно и гладко зависит от γ). Тем самым найдены t' и t'' . \square

Докажем, что экстремаль в задаче о брахистохроне (с положительными x_0, x_1) будет точкой глобального минимума, используя поле экстремалей.

Пусть $t_* < t_0$ (достаточно близко к t_0 , так, чтобы экстремаль гладко продолжалась в эту точку). Пусть $\hat{x}(t_*) = x_* > 0$. Рассмотрим множество всех циклоид $x(t, b)$, проходящих через (t_*, x_*) ; в качестве параметра b можно взять $\dot{x}(t_*, b) = b$.

Пусть $\delta > 0$ - достаточно малое число, $t_* < \tau < t_1 + \delta, \xi > 0$. В силу доказанного утверждения, существует (единственная) циклоида, проходящая через (t_*, x_*) и (τ, ξ) , при этом параметры, ее определяющие, гладко зависят от τ, ξ . Значит, $b(\tau, \xi)$ - гладкая функция. Поэтому построенное семейство экстремалей образует центральное поле.

Наконец, $L_{\dot{x}\dot{x}} > 0$, т.е. L выпукла по \dot{x} . Поэтому по достаточному условию экстремаль будет точкой глобального минимума.

Задача 28. Рассмотрим задачу

$$\int_{-T_0}^{T_0} x \sqrt{\dot{x}^2 + 1} dt \rightarrow \min, x(T_0) = x(-T_0) = \xi.$$

1) Выписать уравнение Якоби, подобрать одно из его решений, затем найти общее решение.

2) Пусть допустимых экстремалей две. Доказать, что одна из них является точкой сильного минимума, а вторая не является точкой слабого минимума.

Решение. У этой задачи мы уже нашли экстремали: $\hat{x}(t) = \frac{1}{c} \operatorname{ch} ct$, где $c > 0$ находится из условия $c T_0 = c \xi$. Напомним, что существует $\xi_* > 0$ такое, что при $\xi < \xi_*$ решений нет, при $\xi = \xi_*$ есть ровно одно решение, при $\xi > \xi_*$ есть ровно два решения. При этом в случае $\xi = \xi_*$ число $c = c_*$ удовлетворяет равенству

$$\operatorname{ch} c_* T_0 - c_* T_0 \cdot \operatorname{sh} c_* T_0 = 0$$

В случае $\xi > \xi_*$ выполнено $\operatorname{ch} c_* T_0 < \xi T_0$, поэтому одно из решений уравнения $\operatorname{ch} c T_0 = c \xi$ будет больше c_* , а второе меньше.

Выпишем уравнение Якоби.

Имеем: $\dot{\hat{x}}(t) = \operatorname{sh} ct$, $\sqrt{1 + \dot{\hat{x}}^2(t)} = \operatorname{ch} ct$. Отсюда

$$\hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t) = \frac{1}{c} \cdot \frac{1}{\operatorname{ch}^2 ct}, \quad \hat{L}_{x\dot{x}}(t) = \frac{\operatorname{sh} ct}{\operatorname{ch} ct}, \quad \hat{L}_{xx}(t) = 0.$$

Значит, уравнение Якоби имеет вид

$$-\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{c} \cdot \frac{1}{\operatorname{ch}^2 ct} \dot{h} + \frac{\operatorname{sh} ct}{\operatorname{ch} ct} h \right) + \frac{\operatorname{sh} ct}{\operatorname{ch} ct} \dot{h} = 0$$

После преобразований получаем

$$\ddot{h} - 2c \frac{\operatorname{sh} ct}{\operatorname{ch} ct} \dot{h} + c^2 h = 0.$$

Одно из решений угадывается: $h_0(t) = \operatorname{sh} ct$.

Общее решение найдем через определитель Вронского. Напомним, что если h, w - два решения уравнения, то определитель Вронского - это

$$W = W(h, w) = \begin{vmatrix} h & w \\ \dot{h} & \dot{w} \end{vmatrix} = h\dot{w} - w\dot{h}.$$

Тогда $\dot{W} = h\ddot{w} - w\ddot{h} = 2c \frac{\operatorname{sh} ct}{\operatorname{ch} ct} W$ (мы воспользовались тем, что h и w - решения дифференциального уравнения). Решим это дифференциальное уравнение на W :

$$\dot{W} \cdot \operatorname{ch} ct - 2(\operatorname{ch} ct)' W = 0$$

поделив на $\operatorname{ch}^3 ct$, получим $(W \operatorname{ch}^{-2} ct)' = 0$, откуда $W = a \operatorname{ch}^2 ct$, где $a \in \mathbb{R}$.

Теперь найдем h через $W(h_0, h)$:

$$\dot{h} \operatorname{sh} ct - h(\operatorname{sh} ct)' = a \operatorname{ch}^2 ct$$

или

$$(h / \operatorname{sh} ct)' = a \frac{\operatorname{ch}^2 ct}{\operatorname{sh}^2 ct}$$

Если $h = z \operatorname{sh} ct$, то $\dot{z} = a \frac{\operatorname{ch}^2 ct}{\operatorname{sh}^2 ct}$. Заметим, что $(\operatorname{ch} s / \operatorname{sh} s)' = 1 - (\operatorname{ch} s / \operatorname{sh} s)^2$. Отсюда $z = \frac{a}{c} \left(ct - \frac{\operatorname{ch} ct}{\operatorname{sh} ct} \right) + b$, или $h = \frac{a}{c} (ct \operatorname{sh} ct - \operatorname{ch} ct) + b \operatorname{sh} ct$.

Итак, общее решение уравнения Якоби является линейной комбинацией

$$h_0(t) = \operatorname{sh} ct, \quad h_1 = \operatorname{ch} ct - ct \operatorname{sh} ct.$$

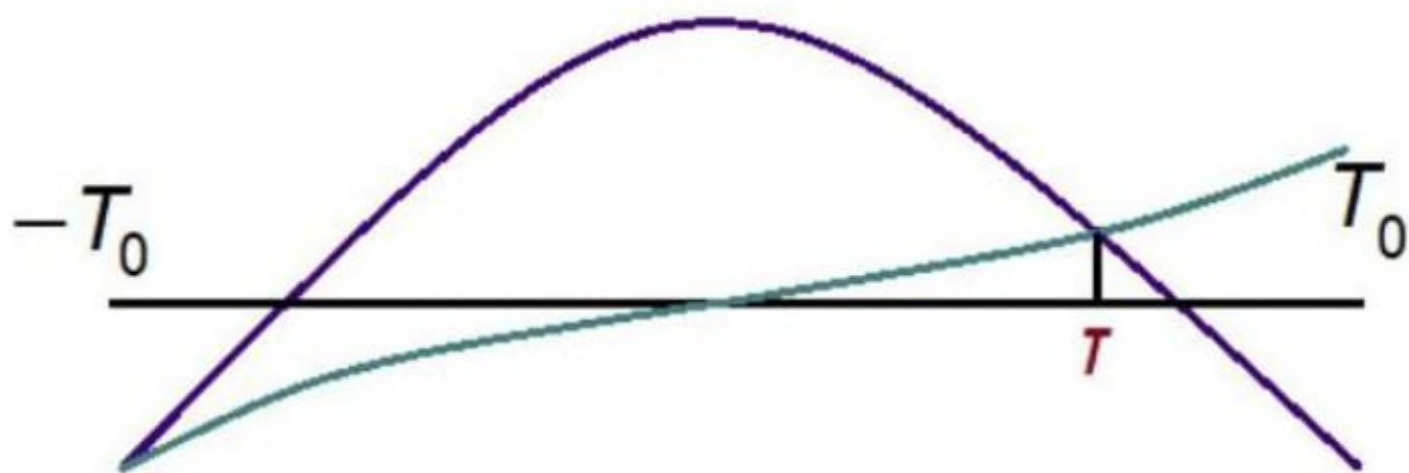
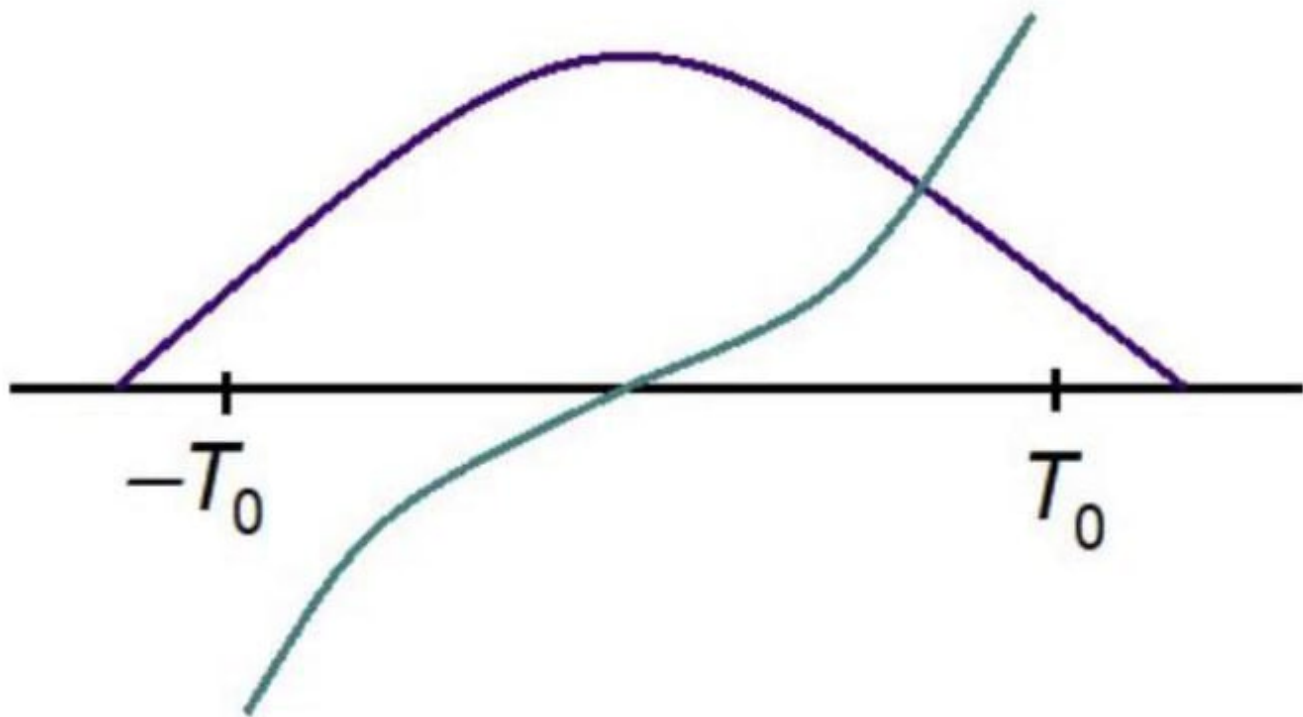
Функция h_0 нечетная и строго возрастающая, функция h_1 четная, $h_1(0) > 0$, h_1 строго возрастает при $t \leq 0$ и строго убывает при $t \geq 0$.

Напомним, что для одного из решений уравнения $\operatorname{ch} c T_0 = c \xi$ выполнено $c_1 < c_*$, а для другого выполнено $c_2 > c_*$. Значит, при $c = c_1$ функция h_1 будет строго положительной на $[-T_0, T_0]$, а при $c = c_2$ выполнено $h_1(-T_0) < 0$.

Пусть $c = c_1$. Докажем, что любая нетривиальная линейная комбинация h_0 и h_1 имеет не более одного нуля на $[-T_0, T_0]$. Для αh_0 и αh_1 это понятно. Учитывая четность и нечетность, получаем: достаточно доказать, что при $\alpha > 0$ уравнение $h_1 = \alpha h_0$ имеет не более одного корня на $[-T_0, T_0]$. В самом деле, $h_1(t) > 0, h_0(t) \leq 0$ при $t \in [-T_0, 0]$. На отрезке $[0, T_0]$ функция h_0 строго возрастает, а h_1 строго убывает. Значит, количество корней не более одного.

Таким образом, при $c = c_1$ выполнено усиленное условие Якоби.

Пусть $c = c_2$. Покажем, что условие Якоби не выполнено. Пусть $h = h_1 - \alpha h_0, h(-T_0) = 0$. Тогда $\alpha > 0$. Значит, $h(0) > 0, h(T_0) < 0$. По теореме о промежуточных значениях, $h(\tau) = 0$ для некоторого $\tau \in (0, T_0)$.



Осталось заметить, что при $x > 0$ будет выполнено $L_{\dot{x}\dot{x}} = \frac{x}{(1+x^2)^{3/2}} > 0$. Значит, выполнено усиленное условие Лежандра и усиленное условие Вейерштрасса. Поэтому в первом случае будет сильный минимум, а во втором не будет слабого минимума.