

# Задачи по курсу «Вариационное исчисление и оптимальное управление»

Осенний семестр 2023

## **Аннотация**

В документе собраны решения задач к экзамену по вариационному исчислению и оптимальному управлению осеннего семестра 2023 года. Лектор: Васильева А. А. Задачи могут содержать ошибки и опечатки. Исходники, материалы и информацию по участию в дополнении тега можно найти [тут](#).

**Задача 1. Предварительный материал из лекции (Гармонический осциллятор):**

Рассмотрим задачу:

$$\mathcal{L}(x) := \int_0^{T_0} (\dot{x}^2 - x^2) dt \rightarrow \inf, \quad x(0) = x(T_0) = 0$$

Тогда  $L_{\dot{x}} = 2\dot{x}$ ,  $L_x = -2x$ ; уравнение Эйлера имеет вид  $-\frac{d}{dt}(2\dot{x}) - 2x = 0$ , т.е.  $\ddot{x} + x = 0$ .

Заметим, что  $\hat{x} = 0$  является допустимой экстремалью. Выясним, является ли она точкой локального или глобального минимума. Для этого используем следующий прием.

Пусть  $\omega \in C^1[0, T_0]$ . Тогда

$$\int_0^{T_0} (\dot{\omega}x^2 + 2\omega x\dot{x}) dt = \int_0^{T_0} \frac{d}{dt}(\omega x^2) dt = \omega x^2 \Big|_0^{T_0} = 0, \text{ если } x \in C_{0,0}^1[0, T_0].$$

Значит, можно добавить этот ноль к интегралу:

$$\int_0^{T_0} (\dot{x}^2 - x^2) dt = \int_0^{T_0} (\dot{x}^2 - x^2 - \dot{\omega}x^2 - 2\omega x\dot{x}) dt$$

Подберем  $\omega$  так, чтобы  $\dot{x}^2 - x^2 - \dot{\omega}x^2 - 2\omega x\dot{x}$  было полным квадратом:  $\dot{x}^2 - x^2 - \dot{\omega}x^2 - 2\omega x\dot{x} = (\dot{x} - \omega x)^2$ , т.е.  $-1 - \dot{\omega} = \omega^2$ . (Тогда  $\int_0^{T_0} (\dot{x}^2 - x^2) dt = \int_0^{T_0} (\dot{x} - \omega x)^2 dt \geq 0$ .) Получаем, что  $\omega = \text{ctg}(t - t_*)$ .

**Задача**

1) Пусть  $T_0 > \pi$ ,  $x(t) = c \sin \frac{\pi t}{T_0}$ . Показать, что  $\mathcal{L}(x) < 0$  при  $c \neq 0$ . Почему проведенные выше рассуждения не проходят при  $T_0 > \pi$  и проходят при  $T_0 < \pi$ ?

2) Показать, что  $\int_0^\pi (\dot{x}^2 - x^2) dt = \int_0^\pi (\dot{x} - x \cdot \text{ctg } t)^2 dt \geq 0$ .

**Решение.** 1) Вычисляем:

$$\begin{aligned} \int_0^{T_0} (\dot{x}^2 - x^2) dt &= c^2 \int_0^{T_0} \left( \frac{\pi^2}{T_0^2} \cos^2 \frac{\pi t}{T_0} - \sin^2 \frac{\pi t}{T_0} \right) dt = \\ &= \frac{c^2}{2} \left( \frac{\pi^2}{T_0^2} \int_0^{T_0} \left( 1 + \cos \frac{2\pi t}{T_0} \right) dt - \int_0^{T_0} \left( 1 - \cos \frac{2\pi t}{T_0} \right) dt \right) = \frac{c^2 T_0}{2} \left( \frac{\pi^2}{T_0^2} - 1 \right) < 0. \end{aligned}$$

Напомним, что мы подбирали гладкую функцию  $\omega$  так, чтобы

$$\int_0^{T_0} (\dot{x}^2 - x^2) dt = \int_0^{T_0} (\dot{x} - \omega x)^2 dt$$

при этом  $\omega$  была решением дифференциального уравнения  $\dot{\omega} = -1 - \omega^2$ . Значит,  $\omega(t) = \text{ctg}(t - a)$ .

Если  $T_0 < \pi$ , то можно подобрать  $a$  (в данном случае подойдет  $a = 0$ ) так, чтобы  $\text{ctg}(t - a)$  была гладкой на  $[0, T_0]$ . Если  $T_0 > \pi$ , то для любого  $a$  функция  $\omega$  будет иметь точку разрыва в интервале  $(0, T_0)$ , т.к.  $\text{ctg}$  гладко определен на  $(\pi n, \pi n + \pi)$  и имеет разрывы в точках  $\pi n$ .

2) Преобразуем правую часть условия:

$$0 \leq \int_0^\pi (\dot{x} - x \cdot \text{ctg } t)^2 dt = \int_0^\pi (\dot{x}^2 - 2x\dot{x} \text{ctg } t + x^2 \text{ctg}^2 t) dt =$$

интегрируем среднее слагаемое по частям и используем  $\text{ctg } t + \text{ctg}^2 t = -1$ :

$$= \int_0^\pi (\dot{x}^2 + x^2(\text{ctg } t)' + x^2 \text{ctg}^2 t) dt + x^2(t) \text{ctg } t \Big|_0^\pi = \int_0^\pi (\dot{x}^2 - x^2) dt + x^2(t) \text{ctg } t \Big|_0^\pi.$$

Так как  $x \in C^1[0, \pi]$  и  $x(0) = 0$ , то  $x(t) = O(t)$  в окрестности нуля; так как  $\text{ctg } t = O(1/t)$  в окрестности нуля, то  $x^2(t) \text{ctg } t = O(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$ . Аналогично  $x^2(t) \text{ctg } t = O(\pi - t) \xrightarrow{t \rightarrow \pi} 0$ . Значит,  $x^2(t) \text{ctg } t \Big|_0^\pi = 0$  и равенство доказано.

**Задача 2.** Доказать, что в задаче

$$\int_0^1 t^{1/2} \dot{x}^2 dt \rightarrow \inf, \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 1$$

точки локального минимума в пространстве  $C^1[0, 1]$  не существует; найти точку глобального минимума для той же задачи в пространстве

$$W = \left\{ f \in AC[0, 1] : \int_0^1 t^{1/2} \dot{x}^2 dt < \infty \right\}$$

**Решение.** Напишем уравнение Эйлера:  $\frac{d}{dt} (2t^{1/2} \dot{x}) = 0$ , откуда  $t^{1/2} \dot{x} = c$ . Значит,  $x = 2ct^{1/2} + b$ . Подставляя граничные условия, получаем  $x = t^{1/2} \notin C^1[0, 1]$ .

Пусть  $h \in W, h(0) = h(1) = 0$ . Тогда

$$\begin{aligned} \int_0^1 t^{1/2} (\dot{x} + \dot{h})^2 dt - \int_0^1 t^{1/2} \dot{x}^2 dt &= \int_0^1 t^{1/2} (2\dot{x}\dot{h} + \dot{h}^2) dt = \int_0^1 t^{1/2} (t^{-1/2} \dot{h} + \dot{h}^2) dt = \\ &= \int_0^1 \dot{h} dt + \int_0^1 t^{1/2} \dot{h}^2 dt = \int_0^1 t^{1/2} \dot{h}^2 dt \geq 0. \end{aligned}$$

**Задача 3.** Доказать, что в задаче

$$\int_0^1 (1 - \dot{x}^2)^2 dt \rightarrow \inf, \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 0$$

точки локального минимума в пространстве  $C^1[0, 1]$  не существует, при этом точная нижняя грань функционала равна 0.

**Решение.** Заметим, что  $\int_0^1 (1 - \dot{x}^2)^2 dt \geq 0$ . Если  $\int_0^1 (1 - \dot{x}^2)^2 dt = 0$ , то  $\dot{x}^2(t) \equiv 1$ , откуда  $\dot{x}(t) = \pm 1$  для любого  $t$ . Так как  $\dot{x}$  непрерывна, то  $\dot{x} \equiv 1$  или  $\dot{x} \equiv -1$ . Получаем противоречие с граничными условиями. Значит, нулевое значение не достигается.

Теперь покажем, что для любого  $\varepsilon > 0$  существует допустимая функция  $x \in C^1[0, 1]$  такая, что  $\int_0^1 (1 - \dot{x}^2)^2 dt \leq \varepsilon$ . Положим

$$z(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} - \delta \\ \frac{1}{\delta} \left( \frac{1}{2} - t \right), & \frac{1}{2} - \delta \leq t \leq \frac{1}{2} + \delta, \\ -1, & \frac{1}{2} + \delta \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$x(t) = \int_0^t z(s) ds$ . Тогда  $x \in C^1[0, 1]$ ,  $x(0) = x(1) = 0$ . При этом  $|\dot{x}| \leq 1$ . Значит,

$$\int_0^1 (1 - \dot{x}^2)^2 dt = \int_{\frac{1}{2}-\delta}^{\frac{1}{2}+\delta} (1 - \dot{x}^2)^2 dt \leq 2\delta.$$

Значит, достаточно взять  $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ .

**Задача 4.** (задача о геодезических на плоскости Лобачевского.) Найти допустимые экстремали в задаче

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\sqrt{1+\dot{x}^2}}{x} dt \rightarrow \text{extr}, x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1, \quad x > 0$$

**Решение.** Имеем  $L_{\dot{x}} = \frac{\dot{x}}{x\sqrt{1+\dot{x}^2}}, L_{\dot{x}\dot{x}} = \frac{1}{x(1+\dot{x}^2)^{3/2}} > 0$ . Значит,  $\hat{x} \in C^2[t_0, t_1]$  и  $\hat{x}(t)L_{\dot{x}}(\hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)) - L(\hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)) = \text{const}$ .

Проверим, что допустимая экстремаль не может обращаться в константу ни на каком невырожденном интервале. Это видно из уравнения Эйлера:

$$-\frac{d}{dt} \frac{\dot{x}}{x\sqrt{1+\dot{x}^2}} - \frac{\sqrt{1+\dot{x}^2}}{x^2} = 0$$

(тогда бы получилось равенство  $1/\hat{x}^2(t) \equiv 0$ ).

Из уравнения  $\dot{x}L_{\dot{x}} - L = \text{const}$  получаем

$$\dot{x} \cdot \frac{\dot{x}}{x\sqrt{1+\dot{x}^2}} - \frac{\sqrt{1+\dot{x}^2}}{x} = \text{const}.$$

Значит,  $\frac{1}{x\sqrt{1+\dot{x}^2}} = \text{const}$ . Получаем  $1 + \dot{x}^2 = \frac{c^2}{x^2}$ , или  $\dot{x} = \pm \sqrt{\frac{c^2}{x^2} - 1}$ . На промежутках, где  $\dot{x} \neq 0$ , решаем это дифференциальное уравнение и получаем

$$t - a = \pm \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{c^2}{x^2} - 1}} = \pm \frac{1}{2} \int \frac{dx^2}{\sqrt{c^2 - x^2}} = \pm \sqrt{c^2 - x^2}$$

Возводим в квадрат и получаем  $x^2 + (t - a)^2 = c^2$ . Это уравнение окружности с центром на горизонтальной оси.

Если в какой-то точке  $\dot{x}$  обращается в 0, то условия теоремы единственности нарушаются, но всё равно экстремаль задается уравнением окружности (склеивается из двух дуг окружностей; в силу гладкости обе дуги принадлежат одной и той же окружности; горизонтальных "вставок" быть не может, т.к. экстремаль не равна константе на интервалах).

Итак, геодезические - дуги окружности с центром на горизонтальной оси.

Утверждается, что найденная допустимая экстремаль будет точкой глобального минимума. В самом деле,  $L_{\dot{x}\dot{x}} > 0$  при  $x > 0$ , так что  $L$  выпукла по  $\dot{x}$ .

**Задача 5.** Найти допустимые экстремали в задаче

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\sqrt{1+\dot{x}^2}}{\sqrt{x}} dt \rightarrow \max, \quad x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1, \quad x > 0$$

**Решение.**  $L$  явно не зависит от  $t$ . Если  $\hat{x}$  - экстремаль,  $\hat{x} \in C^2$ , то

$$\dot{x}L_{\dot{x}} - L = \text{const}$$

Так как  $L \in C^2$ , достаточно доказать, что  $L_{\dot{x}\dot{x}} \neq 0$

$$L_{\dot{x}\dot{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}(1+\dot{x}^2)^{3/2}}$$

$\hat{x} \in C^2, L \in C^2$  удовлетворяют  $\dot{x}L_{\dot{x}} = \text{const}$

$\hat{x}$  не равна константе ни на каком интервале  $\implies \hat{x}$  удовлетворяет уравнению Эйлера

$\hat{x} = c$  на интервале

$$-\frac{d}{dt} \frac{\dot{x}}{\sqrt{x}\sqrt{1+\dot{x}^2}} + \frac{1}{2}x^{-3/2}\sqrt{1+\dot{x}^2} = 0$$

Первое слагаемое ноль, второе - ненулевая константа. Противоречие.

$$\dot{x}L_{\dot{x}} - L = \text{const}$$

$$\dot{x} \frac{\dot{x}}{\sqrt{x}\sqrt{1+\dot{x}^2}} - \frac{\sqrt{1+\dot{x}^2}}{\sqrt{x}} = \text{const}$$

$$x(1+\dot{x}^2) = \text{const}$$

$$\dot{x}^2 = \frac{c}{x} - 1$$

$$\dot{x} = \pm \sqrt{\frac{c}{x} - 1}$$

$$x = c \sin^2 \frac{\tau}{2} = \frac{c}{2}(1 - \cos \tau)$$

$$t + a = \pm \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{c}{x} - 1}} = \pm \int \frac{2c \sin \frac{\tau}{2} \cos \frac{\tau}{2} d\tau}{\sqrt{\frac{1}{\sin^2 \frac{\tau}{2}} - 1}} = \pm c \int \sin \frac{\tau}{2} \cos \frac{\tau}{2} \left| \tan \frac{\tau}{2} \right| d\tau$$

$$c \int \sin^2 \frac{\tau}{2} d\tau = \frac{c}{2} \int (1 - \cos \tau) d\tau = \frac{c}{2}(\tau - \sin \tau)$$

**Задача 6.** Найти допустимые экстремали в задаче

$$\int_{-T_0}^{T_0} x \sqrt{1 + \dot{x}} dt \rightarrow extr, x(-T_0) = x(T_0) = \xi, x > 0$$

В зависимости от  $\xi > 0$  установить, сколько может быть допустимых экстремалей.

**Решение.**

$$L_{\dot{x}} = \frac{x \dot{x}}{\sqrt{1 + \dot{x}^2}}$$

$$L_{\dot{x}\dot{x}} = \left( \frac{x}{(1 + \dot{x}^2)} \right)^{3/2} > 0,$$

Решение уравнения Эйлера  $\hat{x} \in C^2[-T_0, T_0]$  и  $\hat{x}(t) \dot{L}_x(\hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)) - L(\hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)) = const$ .

Проверим, что допустимая экстремаль не может обращаться в константу ни на каком невырожденном отрезке. Это видно из уравнения Эйлера:

$$-\frac{d}{dt} \frac{x \dot{x}}{\sqrt{1 + \dot{x}^2}} + \sqrt{1 + \dot{x}^2} = 0$$

Решений нет.

Из уравнения  $\dot{x} L_{\dot{x}} - L = const$  получаем:

$$\dot{x} \frac{x \dot{x}}{\sqrt{1 + \dot{x}^2}} - x \sqrt{1 + \dot{x}^2} = const$$

$$\frac{x}{\sqrt{1 + \dot{x}^2}} = const = C \Rightarrow 1 + \dot{x}^2 = \frac{x^2}{C^2} \Rightarrow \dot{x} = \pm \sqrt{\frac{x^2}{C^2} - 1} \Rightarrow dt = \pm \frac{dx}{\sqrt{\frac{x^2}{C^2} - 1}}$$

$$t + a = \pm \int \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{C^2} - 1}} dx = |x = Cch(\tau)| = \pm \int \frac{Csh(\tau)}{|sh(\tau)|} d\tau$$

$$t + a = \pm C\tau \Rightarrow \frac{t + a}{C} = \pm \tau \Rightarrow ch\left(\frac{t + a}{C}\right) = ch(\tau) = \frac{x}{C} \Rightarrow x = Cch\left(\frac{t + a}{C}\right)$$

$$x(-T_0) = x(T_0) \Rightarrow x = Cch\left(\frac{t}{C}\right)$$

$C$  — решение уравнения  $Cch\left(\frac{T_0}{C}\right) = \xi$ . Пусть  $b = \frac{1}{C}$ , тогда  $ch(T_0 b) = \xi b$ .  $ch(T_0 b)$  — выпуклая вниз функция, а  $\xi b$  — линейная  $\Rightarrow$  может быть 0, 1 или 2 решения.

$\xi_* > 0$  — случай касания.

$\xi > \xi_*$  — два решения.

$\xi < \xi_*$  — нет решений.

$ch(T_0 b) = \xi_* b$ ,  $T_0 sh(T_0 b) = \xi_*$ . Исключаем  $\xi_*$ .

$$ch(T_0 b) = T_0 b sh(T_0 b)$$

Отсюда находим  $b$ , а потом  $\xi_*$ .

**Задача 7. 1.** Пусть  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  задано равенством  $F(x_1, x_2) = \sqrt[3]{x_1^2 x_2}$ . Показать, что  $F$  имеет вариацию по Лагранжу, но не дифференцируемо по Гато в нуле. **2.** Пусть  $X$  — бесконечномерное нормированное пространство,  $F : X \rightarrow \mathbb{R}$  — линейный неограниченный функционал. Показать, что  $F$  имеет вариацию по Лагранжу в нуле, но не дифференцируемо по Гато.

**Решение.** 1) Пусть  $h = (h_1, h_2)$ . Тогда  $F(th_1, th_2) = \sqrt[3]{(th_1)^2 th_2} = t \sqrt[3]{h_1^2 h_2}$ . Значит,

$$\frac{F(th_1, th_2) - F(0, 0)}{t} = \sqrt[3]{h_1^2 h_2}, \quad F'(0, 0)[(h_1, h_2)] = \sqrt[3]{h_1^2 h_2}$$

легко видеть, что это отображение нелинейно.

2) Если функционал  $F$  линеен, то  $F(th) - F(0) = tF(h)$ ; значит,  $F'(0)[h] = F(h)$ . Это отображение линейно, но разрывно.



**Задача 8.** Пусть  $M = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0, x_2 = x_1^2\}$ ,  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 1, & (x_1, x_2) \in M \\ 0, & (x_1, x_2) \notin M \end{cases}$$

Показать, что  $f$  дифференцируемо по Гато, но не дифференцируемо по Фреше в т.  $(0, 0)$ .

**Решение.** Вычислим вариацию по Лагранжу в нуле. Пусть  $h \in \mathbb{R}^2$ . Заметим, что прямая  $\{th : t \in \mathbb{R}\}$  пересекается с множеством  $M$  не более, чем в одной точке. Значит, при малых  $t$  выполнено  $th \notin M$ ,  $F(th) - F(0) = 0$ . Поэтому  $F'(0)[h] = 0$ . Это линейный непрерывный функционал. Значит,  $F$  дифференцируемо по Гато в  $0$ . При этом  $F$  в нуле разрывно и, следовательно, не дифференцируемо по Фреше.

**Задача 9.** Построить пример отображений  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $G: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  таких, что  $F$  дифференцируемо по Фреше в т. 0,  $G$  дифференцируемо по Гато в т.  $(0, 0)$ ,  $F(0) = (0, 0)$ , при этом  $G \circ F$  не имеет вариации по Лагранжу в т. 0.

**Решение.**

$$F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad x \rightarrow (x, x^2)$$

$$G: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x_1, x_2) \rightarrow \begin{cases} 1, (x_1, x_2) \in M \\ 0, (x_1, x_2) \notin M \end{cases}$$

Где  $M = \{(x_1, x_2) | x_2 = x_1, x_1 > 0\}$ , уже знаем что  $G$  дифференцируемо по Гато в т.  $(0, 0)$  (но не по Фреше). Покажем, что  $F$  дифференцируемо по Фреше в т. 0.

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{F(\lambda h) - F(0)}{\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{(\lambda h, \lambda^2 h^2) - (0, 0)}{\lambda} = (h, 0) = F'(0)[h]$$

$$F(\lambda h) = (\lambda h, \lambda^2 h^2) = (0, 0) + (h, 0) + ((\lambda - 1)h, \lambda^2 h^2)$$

Последнее слагаемое это  $\bar{o}(\|h\|)$ .

$\Rightarrow F$  дифференцируемо по Фреше в 0.  $G \circ F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$x \rightarrow \begin{cases} 1, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$$

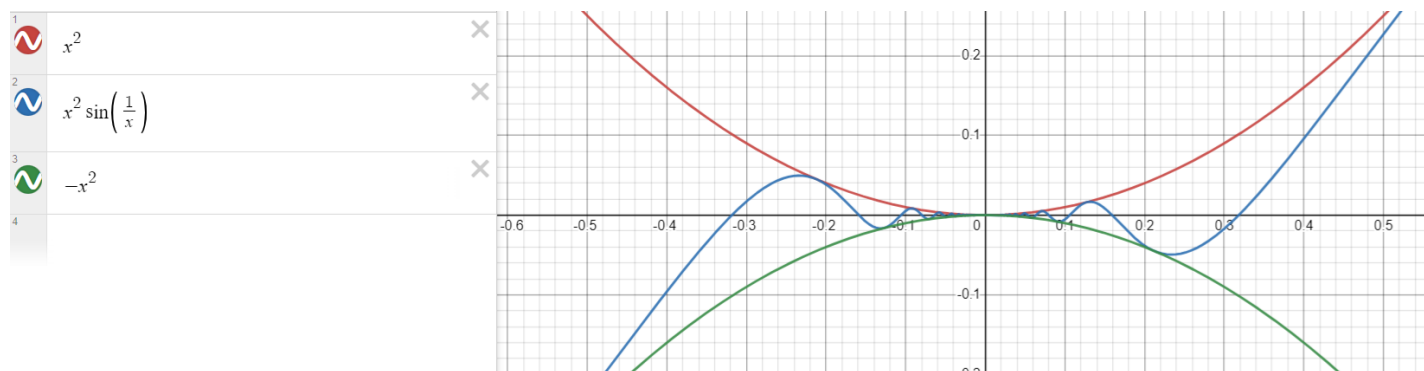
$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} = \frac{G \circ F(\lambda h) - G \circ F(0)}{\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\lambda} \right)$$

$\Rightarrow$  нет вариации по Лагранжу.

**Задача 10.** Привести пример функции  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , всюду дифференцируемой по Фреше, но не строго дифференцируемой в нуле.

**Доказательство:** Рассмотрим функцию  $f$ :

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \end{cases}$$



$f$  дифференцируема по Фреше в  $x \neq 0$  (по правилу Лейбница):

$$(x+h)^2 = x^2 + 2xh + o(|h|)$$

$$\sin \frac{1}{x+h} = \sin \frac{1}{x} + \frac{-1}{x^2} \cos \frac{1}{x} h + o(|h|)$$

$|f(x)| \leq x^2 \implies f'(0) = 0$  и  $f(x) - f(0) = f(x) = o(|x|)$ ,  $|x| \rightarrow 0$  то есть  $f$  диф. по Фреше в 0, тогда и на всем  $\mathbb{R}$   
Предположим противное:  $f$  строго дифференцируемо в 0.

По определению, для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta > 0$  такое, что для любых  $x_1, x_2 \in O_\delta(x_0)$  выполнено

$$|f(x_1) - f(x_2) - A(x_1 - x_2)| \leq \varepsilon |x_1 - x_2|$$

$$f'(0) = 0 \implies |f(x_1) - f(x_2)| \leq \varepsilon |x_1 - x_2| \leq 2\varepsilon \delta$$

$$x \neq 0 : f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \cos \frac{1}{x} \left(-1 \cdot \frac{1}{x^2}\right) = 2x \sin \left(\frac{1}{x}\right) - \cos \frac{1}{x} \not\rightarrow 0, x \rightarrow 0$$

потому что  $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$  и  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x}$  не существует.

$$\text{Тогда } \exists \xi_n \rightarrow 0 \quad |f'(\xi_n)| \geq c > 0$$

$$f(\xi_n + h_n) - f(\xi_n) = f'(\xi_n) h_n + o(h_n) \quad (\text{по опр. диф. по Фреше})$$

$$h_n \rightarrow 0 :$$

$$|f(\xi_n + h_n) - f(\xi_n)| \geq C |h_n|$$

Получили противоречие.  $f$  не является строго дифференцируемой в нуле.

**Задача 11.** 1) Если  $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ , то существует  $x \in [x_0, x_1]$  такое, что  $F(x_1) - F(x_0) = F'(x)[x_1 - x_0]$ . 2) Если  $F : X \rightarrow Y$ ,  $\dim Y > 1$ , то утверждение из п. 1 может быть неверным.

**Решение.** 1) Положим  $\varphi(t) = F((1-t)x_0 + tx_1)$ . Тогда  $\varphi'(t) = F'((1-t)x_0 + tx_1)[x_1 - x_0]$ . По теореме Лагранжа, существует  $\tau \in (0, 1)$  такое, что  $\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\tau)$ . Значит,

$$F(x_1) - F(x_0) = \varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\tau) = F'((1-\tau)x_0 + \tau x_1)[x_1 - x_0].$$

2) Пусть  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $F(t) = (\cos t, \sin t)$ . Тогда  $F(2\pi) - F(0) = (0, 0)$ ,  $F'(t) = (-\sin t, \cos t)$ ; значит, если  $F(2\pi) - F(0) = 2\pi F'(t)$  для некоторого  $t$ , то  $(0, 0) = 2\pi(-\sin t, \cos t)$  - противоречие.

**Задача 12.** Показать, что если отображение  $F$  строго дифференцируемо в нуле и дифференцируемо по Гато в окрестности  $0$ , то производная по Гато  $F'_G(x) : h \mapsto F'_G(x)[h]$  непрерывна в  $0$ .

**Решение.**

Если  $F$  строго дифференцируемо в  $0$ , т.е.

$$\|F(x) - F(y) - F'(0)(x - y)\| \leq \varepsilon \|x - y\| \implies \|F(x) - F(y) - F'_G(0)(x - y)\| \leq \varepsilon \|x - y\|$$

при  $\|x\| \leq \delta(\varepsilon)$  и  $\|y\| \leq \delta(\varepsilon)$ , то константа Липшица отображения  $x \mapsto F(x) - F'(0)[x]$ , обозначенная здесь через  $\varepsilon$  стремится к  $0$  в дельта-окрестности  $0$  при дельта стремящемся к  $0$ .

Поскольку отображение  $\Phi : h \mapsto (F'_G(x) - F'_G(0)) [h]$  липшицево с константой  $\varepsilon$  в окрестности  $0$ , то в каждой точке этой окрестности норма производной  $\Phi$  не больше  $\varepsilon$ . Поэтому приходим к заключению:  $\|F'_G(x) - F'_G(0)\|$  не больше  $\varepsilon$ , если  $x$  в маленькой окрестности нуля. Требуемая непрерывность установлена.

**Задача 13.** Пусть  $T : L^2(0, 1) \rightarrow L^2(0, 1)$ ,  $Tx(t) = \sin x(t)$ . Показать, что  $T$  дифференцируемо по Гато в каждой точке, но нигде не дифференцируемо по Фреше.

**Решение.**

### 1. Дифференцируемость по Гато.

Сначала зафиксируем вектор  $h \in L^2(0, 1)$ . Пусть  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Для любого  $t$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\sin[x(t) + \lambda h(t)] - \sin x(t)}{\lambda} \stackrel{(\sin x)' = \cos x}{=} \cos x(t) \cdot h(t).$$

Таким же будет предел в  $L^2(0, 1)$ , т.е.

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_0^1 \left( \frac{\sin[x(t) + \lambda h(t)] - \sin x(t)}{\lambda} - \cos x(t) h(t) \right)^2 dt = 0,$$

поскольку поточечная сходимость есть, а подинтегральная функция мажорируется функцией из  $L^1$ ,

$$\left| \frac{\sin[x(t) + \lambda h(t)] - \sin x(t)}{\lambda} \right| \leq |h(t)|.$$

### 2. Однако нет дифференцируемости по Фреше.

Следуя указанию А.А. Васильевой, рассмотрим два случая.

А) Если  $\mu\{t : |\cos x(t)| \neq 0\} > 0$ , то существует  $\varepsilon > 0$  и  $E = \{t : |\cos x(t)| \geq \varepsilon\} > 0$ . Пусть  $E_n \subset E$ , что  $\mu E_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Возьмем  $h_n = 2\pi \cdot 1_{E_n}$ . Тогда  $\sin(x(t) + h_n(t)) - \sin x(t) \equiv 0$ . Поэтому

$$\frac{\|\cos x(\cdot) h_n(\cdot)\|_{L^2}}{\|h_n(\cdot)\|_{L^2}} \geq \frac{\varepsilon (\mu E_n)^{1/2}}{(\mu E_n)^{1/2}} = \varepsilon.$$

В). Если  $\mu\{t : |\cos x(t)| \neq 0\} > 0$ , то возьмем  $h_n = \pi \cdot 2 \cdot 1_{E_n}$ . Далее аналогично. Получается, что  $T$  не дифференцируемо и по Фреше.

**Задача 14.** Пусть  $A : l_2 \rightarrow l_2$ ,

$$A(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) = (x_1, x_2/2, \dots, x_n/n, \dots),$$

$(y_1, \dots, y_n, \dots) \in l_2 \setminus \text{Im } A$  (почему такая точка существует?). Рассмотрим задачу

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n x_n \rightarrow \inf, \quad A(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) = 0.$$

Какая точка будет точкой минимума в этой задаче? Показать, что для этой задачи принцип Лагранжа неверен. Какое из условий теоремы о необходимом условии локального минимума здесь не выполнено?

**Решение.**

1) В качестве точки  $y$  можно взять последовательность  $(1, 1/2, \dots, 1/n, \dots) \in l_2$ . Если  $Ax = y$ , то  $x_n = 1$  для любого  $n \in \mathbb{N}$ , но  $(1, \dots, 1, \dots) \notin l_2$ .

2) Если  $A(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) = 0$ , то  $\frac{x_n}{n} = 0$  для любого  $n$ . Значит,  $x = 0$ -единственная допустимая точка, она же и будет точкой минимума.

3) Пусть  $f_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n x_n$ ,  $F(x) = A(x)$ . Тогда  $f'_0(x)[h] = \sum_{n=1}^{\infty} y_n h_n$ ,  $F'(x)[h] = A'(h) = (h_1, h_2/2, \dots, h_n/n, \dots)$ . Если  $z^*$  - линейный непрерывный функционал на  $l_2$ , то существует вектор  $z = (z_1, \dots, z_n, \dots) \in l_2$  такой, что  $z^*(x) = \sum_{n=1}^{\infty} z_n x_n$ .

Таким образом, если принцип Лагранжа выполнен, то существуют  $\lambda_0 \in \mathbb{R}$  и  $z \in l_2$ , одновременно не равные нулю, такие, что для любого  $h \in l_2$  выполнено

$$\lambda_0 \sum_{n=1}^{\infty} y_n h_n + \sum_{n=1}^{\infty} z_n \frac{h_n}{n} = 0.$$

Значит,  $\lambda_0 y_n + \frac{z_n}{n} = 0, n \in \mathbb{N}$ . Если  $\lambda_0 \neq 0$ , то  $y_n = -\frac{z_n}{\lambda_0 n}$ , то есть  $y = A(-z/\lambda_0)$ . Но  $y \notin \text{Im } A$  - противоречие. Если  $\lambda_0 = 0$ , то  $\frac{z_n}{n} = 0$  для любого  $n$ , поэтому  $z = 0$ . Получили, что оба множителя Лагранжа нулевые.

4) Пространства  $X = Y = l_2$  банаховы,  $f_0$  и  $F$  непрерывно дифференцируемы (это линейные непрерывные отображения). Но  $\text{Im } F'(0) = \text{Im } A$  незамкнут (он всюду плотен в  $l_2$ , но не совпадает с  $l_2$ ).

**Задача 15.** Привести пример гладких функций  $f_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  таких, что в задаче  $f_0(x) \rightarrow \min, f_1(x) = 0$  будет существовать точка локального минимума и в принципе Лагранжа будет  $\lambda_0 = 0$  (а с  $\lambda_0 \neq 0$  принцип Лагранжа не выполнен).

**Решение.** Рассмотрим задачу

$$x \rightarrow \inf, \quad x^2 = 0$$

Единственная допустимая точка  $\hat{x} = 0$ . Значит, она и будет точкой минимума. Запишем функцию Лагранжа:  $\mathcal{L} = \lambda_0 x + \lambda_1 x^2$ . Приравнявая ее производную в  $\hat{x}$  к нулю, получаем  $\lambda_0 = 0$ .



**Задача 16.** Пусть  $\hat{x} \in M$  - точка локального минимума в задаче

$$\begin{cases} f_0(x) \rightarrow \inf \\ x \in M \end{cases}$$

функция  $f_0$  дифференцируема по Гато в точке  $\hat{x}$ .

Верно ли, что тогда  $f'_0(\hat{x})[h] = 0$  для любого  $h \in T_{\hat{x}}M$  ?

**Ответ:** нет, неверно.

**Пример:** Пусть  $M = \{(x, y) : y = x^2\}$  (т.е. парабола на плоскости),

$$f_0(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } y = x^2 \\ x, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Тогда  $f_0 = 0$  на  $M$ , поэтому  $(0, 0)$  - точка минимума  $f_0$  на  $M$ . При  $f_0(th, tg) = th$  при малых  $t$  (если  $t < \frac{g}{h}$ , то  $t^2 h^2 < tg$ ), поэтому  $f'_0(0, 0)[(h, g)] = h$ .

Касательный вектор в  $(0, 0)$  к параболе  $M$  имеет вид  $(h, 0)$ , так что на нем производная равна  $h \neq 0$ .

**Задача 17.** Пусть  $l > 0$ . Доказать, что допустимые экстремали в задаче

$$\int_0^1 (y\dot{x} - x\dot{y})dt \rightarrow \max, \quad \int_0^1 \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}dt = l, \quad x(0) = x(1) = y(0) = y(1) = 0, \quad \dot{x}^2 + \dot{y}^2 > 0$$

являются параметризацией окружности.

**Решение.** Функция Лагранжа имеет вид

$$\int_0^1 \left( \lambda_0(-y\dot{x} + x\dot{y}) + \lambda_1 \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \right) dt$$

Значит, уравнения Эйлера имеют вид

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dt} \left( \lambda_1 \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} - \lambda_0 y \right) + \lambda_0 \dot{y} &= 0, \\ -\frac{d}{dt} \left( \lambda_1 \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} + \lambda_0 x \right) - \lambda_0 \dot{x} &= 0. \end{aligned}$$

Если  $\lambda_1 = 0$ , то  $\lambda_0 \dot{y} = 0, \lambda_0 \dot{x} = 0$ . Так как  $\lambda_0 \neq 0$ , то  $\dot{y} = 0, \dot{x} = 0$ , что противоречит условию  $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 > 0$ . Пусть  $\lambda_1 \neq 0$ . Можно считать, что  $\lambda_1 = 2$ . Тогда

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dt} \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} + \lambda_0 \dot{y} &= 0 \\ -\frac{d}{dt} \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} - \lambda_0 \dot{x} &= 0 \end{aligned}$$

откуда

$$\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} = \lambda_0 y + a, \quad \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} = -\lambda_0 x + b$$

Возведем обе части равенств в квадрат и получим

$$1 = (-\lambda_0 y + a)^2 + (\lambda_0 x + b)^2$$

Заметим, что  $\lambda_0 \neq 0$ , иначе  $\frac{dy}{dx} = \text{const}$  или  $\frac{dx}{dy} = \text{const}$ , при этом  $(\dot{x}, \dot{y})$  нигде не обращается в  $(0, 0)$ . Тогда будет движение по отрезку всё время в одном направлении, что противоречит граничным условиям. А если  $\lambda_0 \neq 0$ , то (3) - уравнение окружности.

**Задача 18.** Привести пример такой задачи выпуклого программирования, что допустимая  $\hat{x}$  — не есть точка минимума, но существует ненулевой набор  $(\lambda_0, \dots, \lambda_m)$ , удовлетворяющий условиям а)-с) теоремы Куна-Таккера.

**Теорема 1.** (Каруи - Кун - Таккер). Пусть  $X$  — линейное пространство,  $f_0, \dots, f_m : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  — выпуклые функции.

1. (необходимое условие). Пусть  $\hat{x}$  — точка минимума в задаче:

$$\begin{cases} f_0(x) \rightarrow \inf \\ f_j(x) \leq 0, \quad 1 \leq j \leq m \end{cases}$$

Тогда существует ненулевой набор чисел  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m$  со следующими свойствами:

(а)  $\lambda_j \geq 0, 0 \leq j \leq m$  (условие неотрицательности);

(б)  $\lambda_j f_j(\hat{x}) = 0, 1 \leq j \leq m$  (условие дополняющей нежесткости);

(с)  $\hat{x}$  является точкой минимума функции  $\mathcal{L}(x) := \sum_{j=0}^m \lambda_j f_j(x)$  (условие минимума).

2. (достаточное условие). Пусть  $\hat{x}$  — допустимая точка. Пусть существует набор чисел  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m$  со свойствами а)-с), при этом  $\lambda_0 > 0$ . Тогда  $\hat{x}$  — точка минимума в рассматриваемой задаче.

3. Пусть существует точка  $\bar{x} \in X$  такая, что  $f_j(\bar{x}) < 0, 1 \leq j \leq m$  (условие Слейтера). Тогда, если  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m$  — ненулевой набор чисел со свойствами а)-с), то  $\lambda_0 > 0$ .

**Пример.** Если  $\hat{x}$  — решение задачи на минимум  $f_0(x)$  при условии  $f_1(\hat{x}) = 0, f_2(\hat{x}) = 0$ , где функционалы выпуклы, то для функции Лагранжа  $\mathcal{L}(x) = \sum_{j \geq 0} \lambda_j f_j(x)$  справедливы условия

а) минимум функции Лагранжа достигается на решении;

б)  $\lambda_j f_j(\hat{x}) = 0, j \geq 1$ ;

с)  $\lambda_j \geq 0, j \geq 0$ .

Пусть  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, f_1(x) = x_1, f_2(x) = x_2$ , а  $f_0(x) = x_1^2 + (x_2 - 1)^2$ . Тогда для функции Лагранжа  $\mathcal{L}(x) = f_1(x) + f_2(x)$  имеем: точка  $\hat{x} = (0, 0)$  — допустимая, условия а)-с) выполнены, но минимум  $f_0(x)$  достигается в точке  $(0, 1)$ .

**Задача 19.** (распределение с максимальной энтропией; см. тему про достаточное условие глобального минимума в задаче с равенствами и неравенствами). Пусть  $\rho : [0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ ,  $\int_0^\infty \rho(x) dx = 1$  (функция  $\rho$  имеет смысл плотности распределения). Энтропией называется величина  $S = -\int_0^\infty \rho(x) \ln \rho(x) dx$ . Найти функцию  $\rho$ , для которой энтропия максимальна при заданном среднем (т.е. задано ограничение  $\int_0^\infty x \rho(x) dx = C_1$ ).

**Решение.** Напишем задачу на экстремум:

$$\int_0^\infty \rho(x) \ln \rho(x) dx \rightarrow \inf, \quad \int_0^\infty \rho(x) dx = 1, \quad \int_0^\infty x \rho(x) dx = C_1$$

Составим функцию Лагранжа с  $\lambda_0 = 1$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \int_0^\infty \rho(x) \ln \rho(x) dx + \lambda_1 \int_0^\infty \rho(x) dx + \lambda_2 \int_0^\infty x \rho(x) dx = \\ &= \int_0^\infty (\rho(x) \ln \rho(x) + \lambda_1 \rho(x) + \lambda_2 x \rho(x)) dx. \end{aligned}$$

Найдем минимум у функции  $\mathcal{L}$ . Для этого при каждом фиксированном  $x \in [0, \infty)$  найдем точку минимума у  $f(v) = v \ln v + \lambda_1 v + \lambda_2 x v$ . Вычислим производную:  $f'(v) = \ln v + 1 + \lambda_1 + \lambda_2 x$ . Эта функция строго возрастает по  $v$ ;  $f'(v) = 0$  в точке  $\hat{\rho}(x) = e^{-1-\lambda_1-\lambda_2 x}$ . Значит,  $\hat{\rho}(x) = e^{-1-\lambda_1-\lambda_2 x}$  является точкой минимума  $v \ln v + \lambda_1 v + \lambda_2 x v$ .

Из условий  $\int_0^\infty e^{-1-\lambda_1-\lambda_2 x} dx = 1$  и  $\int_0^\infty x e^{-1-\lambda_1-\lambda_2 x} dx = C_1$  находим  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ :

$$e^{\lambda_1+1} = \frac{1}{\lambda_2}, \quad C_1 e^{\lambda_1+1} = \frac{1}{\lambda_2^2}$$

Докажем, что найденная функция будет точкой минимума в задаче. В самом деле, пусть  $\rho(x)$  - допустимая функция. Тогда для любого  $x \in [0, \infty)$  получаем

$$\rho(x) \ln \rho(x) + \lambda_1 \rho(x) + \lambda_2 x \rho(x) \geq \hat{\rho}(x) \ln \hat{\rho}(x) + \lambda_1 \hat{\rho}(x) + \lambda_2 x \hat{\rho}(x).$$

Интегрируем это неравенство и получаем  $\mathcal{L}(\rho) \geq \mathcal{L}(\hat{\rho})$ , т.е.

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \rho(x) \ln \rho(x) dx + \lambda_1 \int_0^\infty \rho(x) dx + \lambda_2 \int_0^\infty x \rho(x) dx &\geq \\ \geq \int_0^\infty \hat{\rho}(x) \ln \hat{\rho}(x) dx + \lambda_1 \int_0^\infty \hat{\rho}(x) dx + \lambda_2 \int_0^\infty x \hat{\rho}(x) dx. \end{aligned}$$

Воспользуемся ограничениями в задаче и получим, что  $\int_0^\infty \rho(x) \ln \rho(x) dx \geq \int_0^\infty \hat{\rho}(x) \ln \hat{\rho}(x) dx$ .

Теперь докажем, что других точек минимума в задаче нет. Пусть  $\rho_1$  и  $\rho_2$  - две разные точки минимума. Обозначим минимальное значение через  $m$ ; тогда  $\int_0^\infty \rho_1(x) \ln \rho_1(x) dx = \int_0^\infty \rho_2(x) \ln \rho_2(x) dx = m$ . Функции  $\rho_1$  и  $\rho_2$  различаются на множестве положительной меры. Заметим, что функция  $\rho = (\rho_1 + \rho_2)/2$  также является допустимой. Покажем, что  $\int_0^\infty \rho(x) \ln \rho(x) dx < m$ .

В самом деле, функция  $\varphi(v) = v \ln v$  строго выпукла, т.е. для любых  $u \neq w, \lambda \in (0, 1)$  выполнено  $\varphi((1-\lambda)u + \lambda w) < (1-\lambda)\varphi(u) + \lambda\varphi(w)$ . Это верно, так как  $\varphi''(v) > 0$  для любого  $v > 0$ .

Значит, на множестве положительной меры

$$\frac{\rho_1(x) + \rho_2(x)}{2} \ln \left( \frac{\rho_1(x) + \rho_2(x)}{2} \right) < \frac{1}{2} \rho_1(x) \ln \rho_1(x) + \frac{1}{2} \rho_2(x) \ln \rho_2(x),$$

поэтому

$$\int_0^\infty \rho(x) \ln \rho(x) dx < \frac{1}{2} \int_0^\infty \rho_1(x) \ln \rho_1(x) dx + \frac{1}{2} \int_0^\infty \rho_2(x) \ln \rho_2(x) dx = m.$$

**Задача 20.** (аэродинамическая задача Ньютона). Найти допустимые экстремали в задаче

$$\begin{cases} \int_0^{T_0} \frac{t}{1+u^2} dt \rightarrow \inf \\ x(0) = 0, x(T_0) = \xi \\ \dot{x} = u \\ u \geq 0 \end{cases}$$

здесь  $T_0 > 0, \xi > 0$  - заданные параметры. (Ответ для  $\hat{x}(t)$  записывается в параметрическом виде:  $x = x(v), t = t(v)$ .) Доказать, что допустимая экстремаль существует и единственна, и что она будет точкой глобального минимума в данной задаче.

**Решение.**

Составим функцию Лагранжа:

$$\mathcal{L} = \lambda_0 \int_0^{T_0} \frac{t}{1+u^2} dt + \int_0^{T_0} p(t)(\dot{x} - u)dt + \lambda_1 x(0) + \lambda_2 (x(T_0) - \xi).$$

Необходимые условия локального минимума имеют вид  $\lambda_0 \geq 0$  (условие неотрицательности),  $\dot{p} = 0$  (уравнение Эйлера),  $p(0) = \lambda_1, p(T_0) = -\lambda_2$  (условие трансверсальности),

$$\min_{v \geq 0} \left( \frac{\lambda_0 t}{1+v^2} - p(t)v \right) = \frac{\lambda_0 t}{1+\hat{u}(t)^2} - p(t)\hat{u}(t)$$

(принцип максимума Понтрягина).

Из уравнения Эйлера получаем, что  $p(t) = c$ . Пусть  $\lambda_0 = 0$ . Тогда  $\min_{v \geq 0} (-cv) = -c\hat{u}(t)$ . Если  $c = 0$ , то  $p(t) \equiv 0$ ; из условия трансверсальности следует, что  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ , то есть все множители Лагранжа нулевые. Если  $c > 0$ , то у функции  $-cv$  на  $[0, +\infty)$  точки минимума нет. Если  $c < 0$ , то  $\hat{u}(t) \equiv 0$ . В силу граничного условия в нуле,  $\hat{x}(t) \equiv 0$ , что противоречит с условием  $x(T_0) = \xi > 0$ .

Пусть  $\lambda_0 > 0$ . Без ограничения общности можно взять  $\lambda_0 = 1$ . Также обозначим  $q = -c$ . Получаем

$$\min_{v \geq 0} \left( \frac{t}{1+v^2} + qv \right) = \frac{t}{1+\hat{u}(t)^2} + q\hat{u}(t).$$

Для фиксированного  $t \in [0, T_0]$  положим  $f(v) = \frac{t}{1+v^2} + qv$ . Если  $q \leq 0$ , то минимум функции  $f$  не достигается, так как она строго убывает. Значит, остается случай  $q > 0$ . Найдем участки монотонности функции  $f$  на  $\mathbb{R}_+$ . Имеем:  $f'(v) = -\frac{2tv}{(1+v^2)^2} + q$ . Условие  $f'(v) = 0$  эквивалентно уравнению

$$q(1+v^2)^2 - 2tv = 0. \quad (1)$$

В левой части стоит строго выпуклая функция, поэтому у нее количество нулей не больше 2. Также заметим, что максимальный корень строго возрастает по  $t$ . В самом деле, если  $t_1 < t_2, q(1+u_1^2)^2 - 2t_1u_1 = 0$ , то  $q(1+u_1^2)^2 - 2t_2u_1 < 0$ . Кроме того, максимальный корень стремится к  $+\infty$  при  $t \rightarrow +\infty$ .

Итак, либо  $f$  строго возрастает (тогда 0 точка минимума), либо сначала возрастает, потом убывает и затем снова возрастает. Во втором случае минимум либо при  $v = 0$ , либо в точке  $u_*$ , являющейся максимальным корнем уравнения (1). Сравним значения  $f(0)$  и  $f(u_*)$ . Запишем неравенство  $f(0) \leq f(u_*)$ , получим  $\frac{tu_*}{1+u_*^2} \leq q$ ; подставим из (2)  $t = \frac{q(1+u_*^2)^2}{2u_*}$  и получим после вычислений  $u_* \leq 1$ .

Итак, если  $f$  строго возрастает или  $u_* < 1$ , то минимум достигается в 0; если  $u_* > 1$ , то минимум достигается в  $u_*$ . Заметим, что  $u_* = 1$  при  $t = 2q$ . Так как  $u_*$  строго возрастает по  $t$ , то при  $t < 2q$  минимум функции  $f$  достигается в 0, а при  $t > 2q$  в  $u_*$ . Итак,

$$\hat{u}(t) = \begin{cases} 0, & t < 2q, \\ u_*(t), & t > 2q. \end{cases}$$

В силу условия  $x(0) = 0$ , при  $0 \leq t \leq 2q$  получаем  $\hat{x}(t) = 0$ . При  $t \geq 2q$  функцию  $x(t)$  запишем параметрически. Выражая  $t$  через  $v$  из (2), получаем  $t(v) = \frac{q}{2} \left( \frac{1}{v} + 2v + v^3 \right)$ . Далее,  $\frac{dx}{dv} = \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dt}{dv} = v \cdot \frac{q}{2} \left( -\frac{1}{v^2} + 2 + 3v^2 \right) = \frac{q}{2} \left( -\frac{1}{v} + 2v + 3v^3 \right)$ . Значит,  $x(v) = \frac{q}{2} \left( -\ln v + v^2 + \frac{3}{4}v^4 \right) + C$ ; константа  $C$  находится из условия  $x(1) = 0$  (здесь мы воспользовались тем, что  $x$  непрерывна по  $t$  и  $u_*(2q) = 1$ ), т.е.  $x(v) = \frac{q}{2} \left( -\ln v + v^2 + \frac{3}{4}v^4 - \frac{7}{4} \right)$ . Итак,

$$t(v) = \frac{q}{2} \left( \frac{1}{v} + 2v + v^3 \right), \quad x(v) = \frac{q}{2} \left( -\ln v + v^2 + \frac{3}{4}v^4 - \frac{7}{4} \right).$$

Теперь покажем, что для любых  $T_0 > 0, \xi > 0$  найдется  $q > 0$  такое, что  $x(T_0) = \xi$ . Пусть  $a = \frac{\xi}{T_0}$ . Возьмем  $q = 2$ . Покажем, что если  $x_0(t) = 0$  при  $t \leq 2q = 4$ , а при  $t > 4$  задано параметрически:

$$t(v) = \frac{1}{v} + 2v + v^3, \quad x_0(v) = -\ln v + v^2 + \frac{3}{4}v^4 - \frac{7}{4},$$

то найдется такое  $t_* > 4$ , что  $x_0(t_*) = at_*$ . Затем определим  $q$  из равенства  $\frac{qt_*}{2} = T_0$ . Мы уже говорили, что  $\hat{x}_0(t)$  строго возрастает при  $t > 4$  и  $\hat{x}_0(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} +\infty$ . Значит,  $x_0(t) \rightarrow at$  при  $t \rightarrow +\infty$ . Кроме того,  $x_0(4) - 4a < 0$ . Поэтому уравнение  $x_0(t) = at$  имеет корень на  $(4, +\infty)$ . Единственность корня следует из строгой выпуклости  $x_0$  на  $[4, +\infty)$ .

Теперь покажем, что найденная экстремаль является точкой минимума. Достаточно показать, что она является точкой минимума функции  $\mathcal{L}$ . Из условий трансверсальности следует, что  $\lambda_1 = -q, \lambda_2 = q$ . Имеем:  $\mathcal{L}(x, u) = \mathcal{L}_1(x) + \mathcal{L}_2(u)$ , где

$$\mathcal{L}_1(x) = - \int_0^{T_0} q \dot{x} dt - qx(0) + q(x(T_0) - \xi) \equiv -q\xi T_0, \quad \mathcal{L}_2(u) = \int_0^{T_0} \left( \frac{t}{1+u^2} + qu \right) dt.$$

Из принципа максимума Понтрягина следует, что  $\mathcal{L}_2(u) \geq \mathcal{L}_2(\hat{u})$ . Значит,  $\mathcal{L}(x, u) \geq \mathcal{L}(\hat{x}, \hat{u})$  для любой допустимой пары  $(x, u)$ .

**Задача 21.** (из лекций) Сделав замену  $\dot{x} = u$ , вывести необходимое условие сильного минимума в простейшей задаче вариационного исчисления (условие Вейерштрасса и непрерывность  $L_{\dot{x}}(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t))$ ) из принципа максимума Понтрягина.

**Решение.** Задача записывается в виде

$$\int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), u(t)) dt \rightarrow \inf, \quad x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1, \quad \dot{x} = u.$$

Функция Лагранжа имеет вид

$$\mathcal{L} = \int_{t_0}^{t_1} (\lambda_0 L(t, x(t), u(t)) + p(t)(\dot{x}(t) - u(t))) dt + \lambda_1 x(t_0) + \lambda_2 x(t_1).$$

Условие неотрицательности:  $\lambda_0 \geq 0$ .

Уравнение Эйлера:  $-\dot{p}(t) + \lambda_0 L_x(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t)) = 0$ .

Условие трансверсальности:  $p(t_0) = \lambda_1, p(t_1) = -\lambda_2$ .

Принцип максимума Понтрягина:  $\min_{v \in \mathbb{R}} (\lambda_0 L(t, \hat{x}(t), v) - p(t)v) = \lambda_0 L(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t)) - p(t)\hat{u}(t)$ .

Так как  $L$  гладкая и минимум берется по  $v \in \mathbb{R}$ , то получаем  $\lambda_0 L_{\dot{x}}(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t)) - p(t) = 0$ .

Если  $\lambda_0 = 0$ , то отсюда  $p = 0$ ; в силу условий трансверсальности,  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ , то есть все множители Лагранжа нулевые.

Итак,  $\lambda_0 > 0$ . Можно считать, что  $\lambda_0 = 1$ . Так как  $\dot{\hat{x}} = \hat{u}$ , то  $L_{\dot{x}}(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)) = p(t)$ . В теореме о необходимом условии сильного минимума в задаче оптимального управления функция  $p$  кусочно непрерывно-дифференцируемая и, значит, непрерывная. Отсюда получаем непрерывность  $t \mapsto L_{\dot{x}}(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t))$ .

Еще раз запишем принцип максимума Понтрягина: для любого  $v \in \mathbb{R}$

$$L(t, \hat{x}(t), v) - L_{\dot{x}}(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t))v \geq L(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t)) - L_{\dot{x}}(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t))\hat{u}(t)$$

Подставим  $\hat{u} = \dot{\hat{x}}$ , перенесем все в левую часть и получим условие Вейерштрасса.

**Задача 22.** Показать, что если  $L$  явно не зависит от  $x$  (т.е.  $L = L(t, \dot{x}(t))$ ), то условие Вейерштрасса будет достаточным условием глобального минимума.

**Решение.** В силу уравнения Эйлера,  $L_{\dot{x}}(t, \dot{x}(t)) \equiv c$ .

Пусть  $x$  - произвольная допустимая функция. В силу условия Вейерштрасса

$$\int_{t_0}^{t_1} \mathcal{E}(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t), \dot{x}(t)) dt \geq 0$$

откуда

$$\int_{t_0}^{t_1} \left( L(t, \dot{x}(t)) - L(t, \dot{\hat{x}}(t)) - L_{\dot{x}}(t, \dot{\hat{x}}(t))(\dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t)) \right) dt \geq 0$$

Значит,

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} L(t, \dot{x}(t)) dt &\geq \int_{t_0}^{t_1} L(t, \dot{\hat{x}}(t)) dt + \int_{t_0}^{t_1} c(\dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t)) dt = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} L(t, \dot{\hat{x}}(t)) dt + cx|_{t_0}^{t_1} - c\hat{x}|_{t_0}^{t_1} = \int_{t_0}^{t_1} L(t, \dot{\hat{x}}(t)) dt \end{aligned}$$

так как  $x(t_0) = \hat{x}(t_0)$  и  $x(t_1) = \hat{x}(t_1)$ .



**Задача 23.** Рассмотрим задачу  $\int_0^\pi (\dot{x}^2 - x^2 - x^4) dt \rightarrow \inf$ ,  $x(0) = x(\pi) = 0$ . Показать, что для  $\hat{x} = 0$  выполнено усиленное условие Лежандра, условие Якоби, при этом  $\hat{x} = 0$  не является точкой слабого минимума.

**Решение.** Имеем  $\hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t) = 2$ ,  $\hat{L}_{\dot{x}x} = 0$ ,  $\hat{L}_{xx} = -2$ . Значит, выполнено усиленное условие Лежандра. Уравнение Якоби имеет вид  $\ddot{h} + h = 0$ ; его нетривиальное решение, зануляющееся при  $t = 0$ , имеет вид  $h(t) = a \sin t$ ,  $a \neq 0$ . Тогда  $h(t) \neq 0$  при  $t \in (0, \pi)$ , но  $h(\pi) = 0$ . Значит, выполнено условие Якоби, но не усиленное. Возьмем  $x(t) = \varepsilon \sin t$ . Тогда

$$\begin{aligned} \int_0^\pi (\dot{x}^2 - x^2 - x^4) dt &= \varepsilon^2 \int_0^\pi (\cos^2 t - \sin^2 t) dt - \varepsilon^4 \int_0^\pi \sin^4 t dt = \\ &= \varepsilon^2 \int_0^\pi \cos 2t dt - \varepsilon^4 \int_0^\pi \sin^4 t dt = -\varepsilon^4 \int_0^\pi \sin^4 t dt < 0. \end{aligned}$$

Так как  $\varepsilon > 0$  может быть сколь угодно мало, то слабого минимума нет.

**Задача 24.**

$$F(x) = \int_0^{3/2} (\dot{x}^3 + 2x) dt \rightarrow \inf, x(0) = 0, x(3/2) = 1$$

Доказать, что выполнено (неусиленное) условие Лежандра, усиленное условие Якоби, а допустимая экстремаль не дает слабый минимум.

Примечание. Усиленное условие Якоби предполагает 2й порядок этого линейного уравнения. В моем файле TU усиленное условие Якоби трактовалось при выполнении усиленного условия Лежандра, которое обеспечивает 2й порядок уравнения Якоби.

**Решение.**

Уравнение экстремалей  $f_x = \frac{d}{dt} f_{\dot{x}}$  для  $f = \dot{x}^3 + 2x$  имеет вид  $2 = 6\dot{x}\ddot{x}$ , т.е.  $3y\dot{y} = 1$  для  $y = \dot{x}$ . Имеем  $3ydy = dt$ , т.е.  $\frac{3}{2}y^2 = t + C$ . При  $C = 0$  имеем  $\dot{x}(t) = \left(\frac{2}{3}t\right)^{1/2}$ , что при условии  $x(0) = 0$  дает

$$\hat{x}(t) = \left(\frac{2}{3}\right)^{1/2} t^{3/2} \cdot \frac{2}{3} = \left(\frac{2}{3}t\right)^{3/2} \implies \hat{x}\left(\frac{3}{2}\right) = 1$$

т.е. допустимую экстремаль  $\hat{x}$ . Имеем

$$\begin{aligned} F(\hat{x} + h) - F(\hat{x}) &= \int_0^{3/2} \left\{ \left( [\dot{\hat{x}} + \dot{h}]^3 + 2[\hat{x} + h] \right) - \left( [\dot{\hat{x}}]^3 + 2[\hat{x}] \right) \right\} dt = \\ &= \int_0^{3/2} \left\{ 3\dot{\hat{x}}^2\dot{h} + 3\dot{\hat{x}}(\dot{h})^2 + (\dot{h})^3 + 2h \right\} dt = \int_0^{3/2} \left\{ 3\dot{\hat{x}}(\dot{h})^2 + (\dot{h})^3 \right\} dt \end{aligned}$$

Последнее равенство верно, т.к. на экстремали  $\hat{x}$  линейная по  $h$  часть разности  $F(\hat{x} + h) - F(\hat{x})$  равна нулю. Таким образом,

$$F(\hat{x} + h) - F(\hat{x}) = \int_0^{3/2} \left\{ 3\dot{\hat{x}}(\dot{h})^2 + (\dot{h})^3 \right\} dt = \int_0^{3/2} \left\{ 3 \left( \frac{2t}{3} \right)^{1/2} (\dot{h})^2 + (\dot{h})^3 \right\} dt$$

Заметим, что усиленное условие Лежандра  $\hat{f}_{\dot{x}\dot{x}}(t) > 0$  при  $t \in [0, 3/2]$  нарушается при  $t = 0$ . Учитывая это есть резон быстро уйти от нуля, взяв функцию  $h$  кусочно-линейной, такую, что  $h(0) = h(3/2) = 0$ , а  $\dot{h} = -\varepsilon < 0$  при  $0 < t < \delta \ll 1$  и  $\dot{h} = a > 0$  при  $0 < t < \delta$ . Тогда  $h(t) = a(t - 3/2)$  при  $t > \delta$  и  $a \approx \frac{2}{3}\delta$ . Отсюда получаем

$$\begin{aligned} F(\hat{x} + h) - F(\hat{x}) &\approx \int_0^\delta \sqrt{6}t^{1/2}\varepsilon^2 dt - \varepsilon^3\delta + \int_0^{3/2} \sqrt{6}t^{1/2}a^2 dt + \frac{3}{2}a^3 = \\ \varepsilon^3\delta \left\{ \frac{2}{3}\sqrt{6}\frac{\delta^{1/2}}{\varepsilon} + \left(\frac{3}{2}\right)^{3/2} (2/3)^2 \frac{\delta}{\varepsilon} + \frac{3}{2}(2/3)^3 \delta^2 \right\} - \varepsilon^3\delta &< 0 \quad \text{при} \quad \frac{\delta^{1/2}}{\varepsilon} \ll 1. \end{aligned}$$

**Задача 25.** Рассмотрим задачу

$$\int_{-T_0}^{T_0} x \sqrt{\dot{x}^2 + 1} dt \rightarrow \min, x(T_0) = x(-T_0) = \xi.$$

1. Выписать уравнение Якоби, подобрать одно из его решений, затем найти общее решение.
2. Пусть допустимых экстремалей две. Доказать, что одна из них является точкой сильного минимума, а вторая не является точкой слабого минимума.

**Решение.**

**Определение 1.** Скажем, что выполнено усиленное условие Лежандра, если  $\hat{L}_{\dot{x}\dot{x}} > 0 \forall t \in [-T_0, T_0]$ .

**Определение 2.** Скажем, что выполнено условие Якоби, если справедливо усиленное условие Лежандра, а решение уравнения Якоби

$$-\frac{d}{dt} \left( \hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t) \dot{h} + \hat{L}_{\dot{x}x}(t) h \right) + \left( \hat{L}_{\dot{x}x}(t) \dot{h} + \hat{L}_{xx}(t) h \right) = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left( \hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t) \dot{h} \right) = \left( \hat{L}_{xx}(t) - \frac{d}{dt} \hat{L}_{\dot{x}x}(t) \right) h \quad (2)$$

не обращается в ноль на интервале  $(-T_0, T_0)$  при начальных условиях:  $h(-T_0) = 0, \dot{h}(-T_0) = 1$ .

**Определение 3.** Скажем, что выполнено усиленное условие Якоби, если справедливо усиленное условие Лежандра, а решение уравнения (2) не обращается в ноль на полусегменте  $(-T_0, T_0]$  при начальных условиях:  $h(-T_0) = 0, \dot{h}(-T_0) = 1$ .

**Определение 4.** Скажем, что выполнено усиленное условие Вейерштрасса, если функция  $\dot{x} \mapsto L(t, x(t), \dot{x})$  выпукла в  $\mathcal{C}'$ -окрестности экстремали  $\hat{x}$  при любом  $t \in [-T_0, T_0]$ , т.е. для любого  $t \in [-T_0, T_0]$  и  $x(t) \in \mathcal{O}(\hat{x}, \varepsilon)$  (с некоторым  $\varepsilon > 0$ ) функция  $\dot{x} \mapsto L(t, x(t), \dot{x})$  выпукла.

**Теорема 2.** Если выполнены усиленное условие Якоби и усиленное условие Вейерштрасса, то экстремаль доставляет сильный максимум.

Для упрощения формул, будем считать, что  $T_0 = 1$ . Ясно, что это не ограничивает общность рассуждений.

1. Уравнение Якоби в данном случае имеет вид:

$$\ddot{h} - \frac{2}{C} \operatorname{th}\left(\frac{t}{C}\right) \dot{h} + \frac{1}{C^2} h = 0$$

Оно имеет два линейно независимых решения:  $h_1(t) = \operatorname{sh} \frac{t}{C}$  и  $h_2(t) = \operatorname{ch} \frac{t}{C} - \frac{t}{C} \operatorname{sh} \frac{t}{C}$ . Общее решение, подчиненное условию  $h(-1) = 0$ , таково:

$$h(t) = \left( \operatorname{ch} \frac{t}{C} - \frac{t}{C} \operatorname{sh} \frac{t}{C} \right) \operatorname{sh} \frac{1}{C} + \left( \operatorname{ch} \frac{1}{C} - \frac{1}{C} \operatorname{sh} \frac{1}{C} \right) \operatorname{sh} \frac{t}{C}.$$

2. Было показано (см. 6), что экстремали существуют, если и только если  $\xi \geq \xi_* = \operatorname{sh} \frac{1}{C_0}$ , где  $C_0 = \operatorname{th} \frac{1}{C_0} \approx 1.5088 \dots$ . При этом, экстремаль задается формулой  $x(t) = C \operatorname{ch} \frac{t}{C}$ , а параметр  $C > 0$  есть корень уравнения  $\varphi(C) = \xi$ , где  $\varphi(C) \stackrel{\text{def}}{=} C \operatorname{ch} \frac{1}{C}$ .

Функция  $C \mapsto \varphi(C)$  выпукла, т.к.  $\varphi''(C) = C^{-3} \operatorname{ch} \frac{1}{C}$ . Ее минимум достигается в точке  $C_0$ , где  $\varphi'(C_0) = 0$ . Отметим, что

$$\varphi'(C) = \left[ \operatorname{ch} \frac{1}{C} - \frac{1}{C} \operatorname{sh} \frac{1}{C} \right]$$

Если  $\xi > \xi_*$ , то существуют ровно два значения  $C_1 \in (0, C_0)$  и  $C_2 > C_0$ , которые удовлетворяют условию  $\varphi(C) = \xi$ . Покажем, что экстремаль  $\hat{x}_2 = C_2 \operatorname{ch} \frac{1}{C_2}$  доставляет сильный (локальный) минимум, а экстремаль  $\hat{x}_1 = C_1 \operatorname{ch} \frac{1}{C_1}$  не является ни слабым минимумом, ни слабым максимумом. Прежде всего, отметим, что для обеих экстремалей выполнено усиленное условие Лежандра, а именно:  $\hat{f}_{\dot{x}\dot{x}}(t) = C \operatorname{ch}^{-2} \frac{t}{C} > 0$  и потому ни одна из них не является локальным максимумом.

Так как  $h(0) = \operatorname{sh} \frac{1}{C} \neq 0$ , то нули функции  $h$  совпадают с нулями функции

$$z : t \mapsto z(t) = \frac{h(t)}{\operatorname{sh} \frac{1}{C} \operatorname{sh} \frac{t}{C}} = \left( \operatorname{cth} \frac{t}{C} - \frac{t}{C} \right) + \left( \operatorname{cth} \frac{1}{C} - \frac{1}{C} \right)$$

Заметим, что  $z'(t) < 0$ , а  $z(1) = \frac{2\varphi'(C)}{\operatorname{sh} \frac{1}{C}}$ . Поэтому, если  $z(1) < 0 \Leftrightarrow C = C_1$ , то условие Якоби не выполнено, а если  $z(1) > 0 \Leftrightarrow C = C_2$ , то выполнено усиленное условие Якоби.