

Задачи по курсу «Вариационное исчисление и оптимальное управление»

Осенний семестр 2023

Аннотация

В документе собраны решения задач к экзамену по вариационному исчислению и оптимальному управлению осеннего семестра 2023 года. Лектор: Васильева А. А. Задачи могут содержать ошибки и опечатки. Исходники, материалы и информацию по участию в дополнении тега можно найти [тут](#).

Задача 1. Предварительный материал из лекции (Гармонический осциллятор):

Рассмотрим задачу:

$$\mathcal{L}(x) := \int_0^{T_0} (\dot{x}^2 - x^2) dt \rightarrow \inf, \quad x(0) = x(T_0) = 0$$

Тогда $L_{\dot{x}} = 2\dot{x}$, $L_x = -2x$; уравнение Эйлера имеет вид $-\frac{d}{dt}(2\dot{x}) - 2x = 0$, т.е. $\ddot{x} + x = 0$.

Заметим, что $\hat{x} = 0$ является допустимой экстремалью. Выясним, является ли она точкой локального или глобального минимума. Для этого используем следующий прием.

Пусть $\omega \in C^1[0, T_0]$. Тогда

$$\int_0^{T_0} (\dot{\omega}x^2 + 2\omega x\dot{x}) dt = \int_0^{T_0} \frac{d}{dt}(\omega x^2) dt = \omega x^2 \Big|_0^{T_0} = 0, \text{ если } x \in C_{0,0}^1[0, T_0].$$

Значит, можно добавить этот ноль к интегралу:

$$\int_0^{T_0} (\dot{x}^2 - x^2) dt = \int_0^{T_0} (\dot{x}^2 - x^2 - \dot{\omega}x^2 - 2\omega x\dot{x}) dt$$

Подберем ω так, чтобы $\dot{x}^2 - x^2 - \dot{\omega}x^2 - 2\omega x\dot{x}$ было полным квадратом: $\dot{x}^2 - x^2 - \dot{\omega}x^2 - 2\omega x\dot{x} = (\dot{x} - \omega x)^2$, т.е. $-1 - \dot{\omega} = \omega^2$. (Тогда $\int_0^{T_0} (\dot{x}^2 - x^2) dt = \int_0^{T_0} (\dot{x} - \omega x)^2 dt \geq 0$.) Получаем, что $\omega = \text{ctg}(t - t_*)$.

Задача

1) Пусть $T_0 > \pi$, $x(t) = c \sin \frac{\pi t}{T_0}$. Показать, что $\mathcal{L}(x) < 0$ при $c \neq 0$. Почему проведенные выше рассуждения не проходят при $T_0 > \pi$ и проходят при $T_0 < \pi$?

2) Показать, что $\int_0^\pi (\dot{x}^2 - x^2) dt = \int_0^\pi (\dot{x} - x \cdot \text{ctg } t)^2 dt \geq 0$.

Решение. 1) Вычисляем:

$$\begin{aligned} \int_0^{T_0} (\dot{x}^2 - x^2) dt &= c^2 \int_0^{T_0} \left(\frac{\pi^2}{T_0^2} \cos^2 \frac{\pi t}{T_0} - \sin^2 \frac{\pi t}{T_0} \right) dt = \\ &= \frac{c^2}{2} \left(\frac{\pi^2}{T_0^2} \int_0^{T_0} \left(1 + \cos \frac{2\pi t}{T_0} \right) dt - \int_0^{T_0} \left(1 - \cos \frac{2\pi t}{T_0} \right) dt \right) = \frac{c^2 T_0}{2} \left(\frac{\pi^2}{T_0^2} - 1 \right) < 0. \end{aligned}$$

Напомним, что мы подбирали гладкую функцию ω так, чтобы

$$\int_0^{T_0} (\dot{x}^2 - x^2) dt = \int_0^{T_0} (\dot{x} - \omega x)^2 dt$$

при этом ω была решением дифференциального уравнения $\dot{\omega} = -1 - \omega^2$. Значит, $\omega(t) = \text{ctg}(t - a)$.

Если $T_0 < \pi$, то можно подобрать a (в данном случае подойдет $a = 0$) так, чтобы $\text{ctg}(t - a)$ была гладкой на $[0, T_0]$. Если $T_0 > \pi$, то для любого a функция ω будет иметь точку разрыва в интервале $(0, T_0)$, т.к. ctg гладко определен на $(\pi n, \pi n + \pi)$ и имеет разрывы в точках πn .

2) Преобразуем правую часть условия:

$$0 \leq \int_0^\pi (\dot{x} - x \cdot \text{ctg } t)^2 dt = \int_0^\pi (\dot{x}^2 - 2x\dot{x} \text{ctg } t + x^2 \text{ctg}^2 t) dt =$$

интегрируем среднее слагаемое по частям и используем $\text{ctg } t + \text{ctg}^2 t = -1$:

$$= \int_0^\pi (\dot{x}^2 + x^2(\text{ctg } t)' + x^2 \text{ctg}^2 t) dt + x^2(t) \text{ctg } t \Big|_0^\pi = \int_0^\pi (\dot{x}^2 - x^2) dt + x^2(t) \text{ctg } t \Big|_0^\pi.$$

Так как $x \in C^1[0, \pi]$ и $x(0) = 0$, то $x(t) = O(t)$ в окрестности нуля; так как $\text{ctg } t = O(1/t)$ в окрестности нуля, то $x^2(t) \text{ctg } t = O(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$. Аналогично $x^2(t) \text{ctg } t = O(\pi - t) \xrightarrow{t \rightarrow \pi} 0$. Значит, $x^2(t) \text{ctg } t \Big|_0^\pi = 0$ и равенство доказано.

Задача 2. Пусть $M = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0, x_2 = x_1^2\}$, $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 1, & (x_1, x_2) \in M \\ 0, & (x_1, x_2) \notin M \end{cases}$$

Показать, что f дифференцируемо по Гато, но не дифференцируемо по Фреше в т. $(0, 0)$.

Решение.

Определение 1. Здесь и далее X и Y — нормированные пространства. Отображение F имеет вариацию по Лагранжу в точке x_0 если для любого $h \in X$ существует предел:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{F(x_0 + \lambda h) - F(x_0)}{\lambda} =: F'(x_0)[h].$$

Определение 2. Отображение F дифференцируемо по Гато в точке x_0 , если оно имеет вариацию по Лагранжу в точке x_0 , а отображение $F'(x_0)$ линейно и непрерывно.

Определение 3. Отображение F дифференцируемо по Фреше в точке x_0 , если существует линейный непрерывный оператор $A : X \rightarrow Y$ такой, что $F(x_0 + h) = F(x_0) + Ah + r(h)$, где отображение r таково, что $\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\|r(h)\|_Y}{\|h\|_X} = 0$.

Вычислим вариацию по Лагранжу в нуле. Пусть $h \in \mathbb{R}^2$. Заметим, что прямая $\{th : t \in \mathbb{R}\}$ пересекается с множеством M не более, чем в одной точке. Значит, при малых t выполнено $th \notin M$, $F(th) - F(0) = 0$. Поэтому $F'(0)[h] = 0$. Это линейный непрерывный функционал. Значит, F дифференцируемо по Гато в 0. При этом F в нуле разрывно и, следовательно, не дифференцируемо по Фреше.

Задача 3. Доказать, что в задаче

$$\int_0^1 (1 - \dot{x}^2)^2 dt \rightarrow \inf, \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 0$$

точки локального минимума в пространстве $C^1[0, 1]$ не существует, при этом точная нижняя грань функционала равна 0.

Решение. Заметим, что $\int_0^1 (1 - \dot{x}^2)^2 dt \geq 0$. Если $\int_0^1 (1 - \dot{x}^2)^2 dt = 0$, то $\dot{x}^2(t) \equiv 1$, откуда $\dot{x}(t) = \pm 1$ для любого t . Так как \dot{x} непрерывна, то $\dot{x} \equiv 1$ или $\dot{x} \equiv -1$. Получаем противоречие с граничными условиями. Значит, нулевое значение не достигается.

Теперь покажем, что для любого $\varepsilon > 0$ существует допустимая функция $x \in C^1[0, 1]$ такая, что $\int_0^1 (1 - \dot{x}^2)^2 dt \leq \varepsilon$. Положим

$$z(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} - \delta \\ \frac{1}{\delta} \left(\frac{1}{2} - t \right), & \frac{1}{2} - \delta \leq t \leq \frac{1}{2} + \delta, \\ -1, & \frac{1}{2} + \delta \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$x(t) = \int_0^t z(s) ds$. Тогда $x \in C^1[0, 1]$, $x(0) = x(1) = 0$. При этом $|\dot{x}| \leq 1$. Значит,

$$\int_0^1 (1 - \dot{x}^2)^2 dt = \int_{\frac{1}{2}-\delta}^{\frac{1}{2}+\delta} (1 - \dot{x}^2)^2 dt \leq 2\delta.$$

Значит, достаточно взять $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$.

Задача 4. (задача о геодезических на плоскости Лобачевского.) Найти допустимые экстремали в задаче

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\sqrt{1+\dot{x}^2}}{x} dt \rightarrow \text{extr}, x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1, \quad x > 0$$

Решение. Имеем $L_{\dot{x}} = \frac{\dot{x}}{x\sqrt{1+\dot{x}^2}}, L_{\dot{x}\dot{x}} = \frac{1}{x(1+\dot{x}^2)^{3/2}} > 0$. Значит, $\hat{x} \in C^2[t_0, t_1]$ и $\hat{x}(t)L_{\dot{x}}(\hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)) - L(\hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)) = \text{const}$.

Проверим, что допустимая экстремаль не может обращаться в константу ни на каком невырожденном интервале. Это видно из уравнения Эйлера:

$$-\frac{d}{dt} \frac{\dot{x}}{x\sqrt{1+\dot{x}^2}} - \frac{\sqrt{1+\dot{x}^2}}{x^2} = 0$$

(тогда бы получилось равенство $1/\hat{x}^2(t) \equiv 0$).

Из уравнения $\dot{x}L_{\dot{x}} - L = \text{const}$ получаем

$$\dot{x} \cdot \frac{\dot{x}}{x\sqrt{1+\dot{x}^2}} - \frac{\sqrt{1+\dot{x}^2}}{x} = \text{const}.$$

Значит, $\frac{1}{x\sqrt{1+\dot{x}^2}} = \text{const}$. Получаем $1 + \dot{x}^2 = \frac{c^2}{x^2}$, или $\dot{x} = \pm \sqrt{\frac{c^2}{x^2} - 1}$. На промежутках, где $\dot{x} \neq 0$, решаем это дифференциальное уравнение и получаем

$$t - a = \pm \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{c^2}{x^2} - 1}} = \pm \frac{1}{2} \int \frac{dx^2}{\sqrt{c^2 - x^2}} = \pm \sqrt{c^2 - x^2}$$

Возводим в квадрат и получаем $x^2 + (t - a)^2 = c^2$. Это уравнение окружности с центром на горизонтальной оси.

Если в какой-то точке \dot{x} обращается в 0, то условия теоремы единственности нарушаются, но всё равно экстремаль задается уравнением окружности (склеивается из двух дуг окружностей; в силу гладкости обе дуги принадлежат одной и той же окружности; горизонтальных "вставок" быть не может, т.к. экстремаль не равна константе на интервалах).

Итак, геодезические - дуги окружности с центром на горизонтальной оси.

Утверждается, что найденная допустимая экстремаль будет точкой глобального минимума. В самом деле, $L_{\dot{x}\dot{x}} > 0$ при $x > 0$, так что L выпукла по \dot{x} .

Задача 5. Найти допустимые экстремали в задаче

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\sqrt{1+\dot{x}^2}}{\sqrt{x}} dt \rightarrow \max, \quad x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1, \quad x > 0$$

Решение. L явно не зависит от t . Если \hat{x} - экстремаль, $\hat{x} \in C^2$, то

$$\dot{x}L_{\dot{x}} - L = \text{const}$$

Так как $L \in C^2$, достаточно доказать, что $L_{\dot{x}\dot{x}} \neq 0$

$$L_{\dot{x}\dot{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}(1+\dot{x}^2)^{3/2}}$$

$\hat{x} \in C^2, L \in C^2$ удовлетворяют $\dot{x}L_{\dot{x}} = \text{const}$

\hat{x} не равна константе ни на каком интервале $\implies \hat{x}$ удовлетворяет уравнению Эйлера

$\hat{x} = c$ на интервале

$$-\frac{d}{dt} \frac{\dot{x}}{\sqrt{x}\sqrt{1+\dot{x}^2}} + \frac{1}{2}x^{-3/2}\sqrt{1+\dot{x}^2} = 0$$

Первое слагаемое ноль, второе - ненулевая константа. Противоречие.

$$\dot{x}L_{\dot{x}} - L = \text{const}$$

$$\dot{x} \frac{\dot{x}}{\sqrt{x}\sqrt{1+\dot{x}^2}} - \frac{\sqrt{1+\dot{x}^2}}{\sqrt{x}} = \text{const}$$

$$x(1+\dot{x}^2) = \text{const}$$

$$\dot{x}^2 = \frac{c}{x} - 1$$

$$\dot{x} = \pm \sqrt{\frac{c}{x} - 1}$$

$$x = c \sin^2 \frac{\tau}{2} = \frac{c}{2}(1 - \cos \tau)$$

$$t + a = \pm \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{c}{x} - 1}} = \pm \int \frac{2c \sin \frac{\tau}{2} \cos \frac{\tau}{2} d\tau}{\sqrt{\frac{1}{\sin^2 \frac{\tau}{2}} - 1}} = \pm c \int \sin \frac{\tau}{2} \cos \frac{\tau}{2} \left| \tan \frac{\tau}{2} \right| d\tau$$

$$c \int \sin^2 \frac{\tau}{2} d\tau = \frac{c}{2} \int (1 - \cos \tau) d\tau = \frac{c}{2}(\tau - \sin \tau)$$

Задача 6. Найти допустимые экстремали в задаче

$$\int_{-T_0}^{T_0} x \sqrt{1 + \dot{x}} dt \rightarrow extr, x(-T_0) = x(T_0) = \xi, x > 0$$

В зависимости от $\xi > 0$ установить, сколько может быть допустимых экстремалей.

Решение.

$$L_{\dot{x}} = \frac{x \dot{x}}{\sqrt{1 + \dot{x}^2}}$$

$$L_{\dot{x}\dot{x}} = \left(\frac{x}{(1 + \dot{x}^2)} \right)^{3/2} > 0,$$

Решение уравнения Эйлера $\hat{x} \in C^2[-T_0, T_0]$ и $\hat{x}(t) \dot{L}_x(\hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)) - L(\hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)) = const$.

Проверим, что допустимая экстремаль не может обращаться в константу ни на каком невырожденном отрезке. Это видно из уравнения Эйлера:

$$-\frac{d}{dt} \frac{x \dot{x}}{\sqrt{1 + \dot{x}^2}} + \sqrt{1 + \dot{x}^2} = 0$$

Решений нет.

Из уравнения $\dot{x} L_{\dot{x}} - L = const$ получаем:

$$\dot{x} \frac{x \dot{x}}{\sqrt{1 + \dot{x}^2}} - x \sqrt{1 + \dot{x}^2} = const$$

$$\frac{x}{\sqrt{1 + \dot{x}^2}} = const = C \Rightarrow 1 + \dot{x}^2 = \frac{x^2}{C^2} \Rightarrow \dot{x} = \pm \sqrt{\frac{x^2}{C^2} - 1} \Rightarrow dt = \pm \frac{dx}{\sqrt{\frac{x^2}{C^2} - 1}}$$

$$t + a = \pm \int \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{C^2} - 1}} dx = |x = Cch(\tau)| = \pm \int \frac{Csh(\tau)}{|sh(\tau)|} d\tau$$

$$t + a = \pm C\tau \Rightarrow \frac{t + a}{C} = \pm \tau \Rightarrow ch\left(\frac{t + a}{C}\right) = ch(\tau) = \frac{x}{C} \Rightarrow x = Cch\left(\frac{t + a}{C}\right)$$

$$x(-T_0) = x(T_0) \Rightarrow x = Cch\left(\frac{t}{C}\right)$$

C — решение уравнения $Cch\left(\frac{T_0}{C}\right) = \xi$. Пусть $b = \frac{1}{C}$, тогда $ch(T_0 b) = \xi b$. $ch(T_0 b)$ — выпуклая вниз функция, а ξb — линейная \Rightarrow может быть 0, 1 или 2 решения.

$\xi_* > 0$ — случай касания.

$\xi > \xi_*$ — два решения.

$\xi < \xi_*$ — нет решений.

$ch(T_0 b) = \xi_* b$, $T_0 sh(T_0 b) = \xi_*$. Исключаем ξ_* .

$$ch(T_0 b) = T_0 b sh(T_0 b)$$

Отсюда находим b , а потом ξ_* .

Задача 7. 1. Пусть $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ задано равенством $F(x_1, x_2) = \sqrt[3]{x_1^2 x_2}$. Показать, что F имеет вариацию по Лагранжу, но не дифференцируемо по Гато в нуле. **2.** Пусть X — бесконечномерное нормированное пространство, $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ — линейный неограниченный функционал. Показать, что F имеет вариацию по Лагранжу в нуле, но не дифференцируемо по Гато.

Решение. 1) Пусть $h = (h_1, h_2)$. Тогда $F(th_1, th_2) = \sqrt[3]{(th_1)^2 th_2} = t \sqrt[3]{h_1^2 h_2}$. Значит,

$$\frac{F(th_1, th_2) - F(0, 0)}{t} = \sqrt[3]{h_1^2 h_2}, \quad F'(0, 0)[(h_1, h_2)] = \sqrt[3]{h_1^2 h_2}$$

легко видеть, что это отображение нелинейно.

2) Если функционал F линеен, то $F(th) - F(0) = tF(h)$; значит, $F'(0)[h] = F(h)$. Это отображение линейно, но разрывно.

Задача 8. Пусть $M = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0, x_2 = x_1^2\}$, $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 1, & (x_1, x_2) \in M \\ 0, & (x_1, x_2) \notin M \end{cases}$$

Показать, что f дифференцируемо по Гато, но не дифференцируемо по Фреше в т. $(0, 0)$.

Решение. Вычислим вариацию по Лагранжу в нуле. Пусть $h \in \mathbb{R}^2$. Заметим, что прямая $\{th : t \in \mathbb{R}\}$ пересекается с множеством M не более, чем в одной точке. Значит, при малых t выполнено $th \notin M$, $F(th) - F(0) = 0$. Поэтому $F'(0)[h] = 0$. Это линейный непрерывный функционал. Значит, F дифференцируемо по Гато в 0 . При этом F в нуле разрывно и, следовательно, не дифференцируемо по Фреше.

Задача 9. Построить пример отображений $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $G: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ таких, что F дифференцируемо по Фреше в т. 0, G дифференцируемо по Гато в т. $(0, 0)$, $F(0) = (0, 0)$, при этом $G \circ F$ не имеет вариации по Лагранжу в т. 0.

Решение.

$$F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad x \rightarrow (x, x^2)$$

$$G: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x_1, x_2) \rightarrow \begin{cases} 1, & (x_1, x_2) \in M \\ 0, & (x_1, x_2) \notin M \end{cases}$$

Где $M = \{(x_1, x_2) | x_2 = x_1, x_1 > 0\}$, уже знаем что G дифференцируемо по Гато в т. $(0, 0)$ (но не по Фреше). Покажем, что F дифференцируемо по Фреше в т. 0.

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{F(\lambda h) - F(0)}{\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{(\lambda h, \lambda^2 h^2) - (0, 0)}{\lambda} = (h, 0) = F'(0)[h]$$

$$F(\lambda h) = (\lambda h, \lambda^2 h^2) = (0, 0) + (h, 0) + ((\lambda - 1)h, \lambda^2 h^2)$$

Последнее слагаемое это $\bar{o}(\|h\|)$.

$\Rightarrow F$ дифференцируемо по Фреше в 0. $G \circ F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$x \rightarrow \begin{cases} 1, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

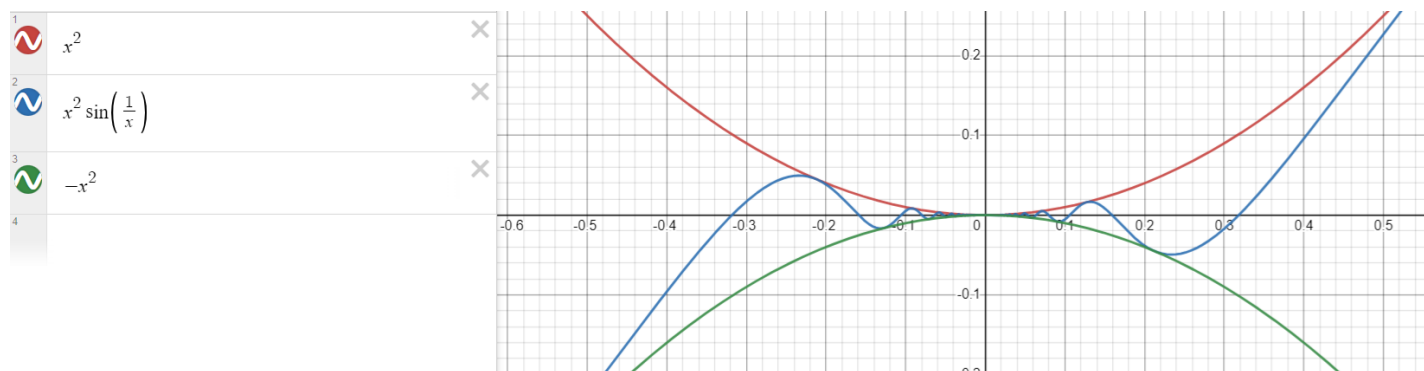
$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} = \frac{G \circ F(\lambda h) - G \circ F(0)}{\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\lambda} \right)$$

\Rightarrow нет вариации по Лагранжу.

Задача 10. Привести пример функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, всюду дифференцируемой по Фреше, но не строго дифференцируемой в нуле.

Доказательство: Рассмотрим функцию f :

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \end{cases}$$



f дифференцируема по Фреше в $x \neq 0$ (по правилу Лейбница):

$$(x+h)^2 = x^2 + 2xh + o(|h|)$$

$$\sin \frac{1}{x+h} = \sin \frac{1}{x} + \frac{-1}{x^2} \cos \frac{1}{x} h + o(|h|)$$

$|f(x)| \leq x^2 \implies f'(0) = 0$ и $f(x) - f(0) = f(x) = o(|x|)$, $|x| \rightarrow 0$ то есть f диф. по Фреше в 0, тогда и на всем \mathbb{R}
Предположим противное: f строго дифференцируемо в 0.

По определению, для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любых $x_1, x_2 \in O_\delta(x_0)$ выполнено

$$|f(x_1) - f(x_2) - A(x_1 - x_2)| \leq \varepsilon |x_1 - x_2|$$

$$f'(0) = 0 \implies |f(x_1) - f(x_2)| \leq \varepsilon |x_1 - x_2| \leq 2\varepsilon \delta$$

$$x \neq 0 : f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \cos \frac{1}{x} \left(-1 \cdot \frac{1}{x^2}\right) = 2x \sin \left(\frac{1}{x}\right) - \cos \frac{1}{x} \not\rightarrow 0, x \rightarrow 0$$

потому что $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$ и $\lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x}$ не существует.

$$\text{Тогда } \exists \xi_n \rightarrow 0 \quad |f'(\xi_n)| \geq c > 0$$

$$f(\xi_n + h_n) - f(\xi_n) = f'(\xi_n) h_n + o(h_n) \quad (\text{по опр. диф. по Фреше})$$

$$h_n \rightarrow 0 :$$

$$|f(\xi_n + h_n) - f(\xi_n)| \geq C |h_n|$$

Получили противоречие. f не является строго дифференцируемой в нуле.

Задача 11. 1) Если $F : X \rightarrow \mathbb{R}$, то существует $x \in [x_0, x_1]$ такое, что $F(x_1) - F(x_0) = F'(x)[x_1 - x_0]$. 2) Если $F : X \rightarrow Y$, $\dim Y > 1$, то утверждение из п. 1 может быть неверным.

Решение. 1) Положим $\varphi(t) = F((1-t)x_0 + tx_1)$. Тогда $\varphi'(t) = F'((1-t)x_0 + tx_1)[x_1 - x_0]$. По теореме Лагранжа, существует $\tau \in (0, 1)$ такое, что $\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\tau)$. Значит,

$$F(x_1) - F(x_0) = \varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\tau) = F'((1-\tau)x_0 + \tau x_1)[x_1 - x_0].$$

2) Пусть $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $F(t) = (\cos t, \sin t)$. Тогда $F(2\pi) - F(0) = (0, 0)$, $F'(t) = (-\sin t, \cos t)$; значит, если $F(2\pi) - F(0) = 2\pi F'(t)$ для некоторого t , то $(0, 0) = 2\pi(-\sin t, \cos t)$ - противоречие.

Задача 12. Пусть $A : l_2 \rightarrow l_2$,

$$A(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) = (x_1, x_2/2, \dots, x_n/n, \dots),$$

$(y_1, \dots, y_n, \dots) \in l_2 \setminus \text{Im } A$ (почему такая точка существует?). Рассмотрим задачу

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n x_n \rightarrow \inf, \quad A(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) = 0.$$

Какая точка будет точкой минимума в этой задаче? Показать, что для этой задачи принцип Лагранжа неверен. Какое из условий теоремы о необходимом условии локального минимума здесь не выполнено?

Решение.

1) В качестве точки y можно взять последовательность $(1, 1/2, \dots, 1/n, \dots) \in l_2$. Если $Ax = y$, то $x_n = 1$ для любого $n \in \mathbb{N}$, но $(1, \dots, 1, \dots) \notin l_2$.

2) Если $A(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) = 0$, то $\frac{x_n}{n} = 0$ для любого n . Значит, $x = 0$ -единственная допустимая точка, она же и будет точкой минимума.

3) Пусть $f_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n x_n$, $F(x) = A(x)$. Тогда $f'_0(x)[h] = \sum_{n=1}^{\infty} y_n h_n$, $F'(x)[h] = A(h) = (h_1, h_2/2, \dots, h_n/n, \dots)$. Если z^* - линейный непрерывный функционал на l_2 , то существует вектор $z = (z_1, \dots, z_n, \dots) \in l_2$ такой, что $z^*(x) = \sum_{n=1}^{\infty} z_n x_n$.

Таким образом, если принцип Лагранжа выполнен, то существуют $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ и $z \in l_2$, одновременно не равные нулю, такие, что для любого $h \in l_2$ выполнено

$$\lambda_0 \sum_{n=1}^{\infty} y_n h_n + \sum_{n=1}^{\infty} z_n \frac{h_n}{n} = 0.$$

Значит, $\lambda_0 y_n + \frac{z_n}{n} = 0, n \in \mathbb{N}$. Если $\lambda_0 \neq 0$, то $y_n = -\frac{z_n}{\lambda_0 n}$, то есть $y = A(-z/\lambda_0)$. Но $y \notin \text{Im } A$ - противоречие. Если $\lambda_0 = 0$, то $\frac{z_n}{n} = 0$ для любого n , поэтому $z = 0$. Получили, что оба множителя Лагранжа нулевые.

4) Пространства $X = Y = l_2$ банаховы, f_0 и F непрерывно дифференцируемы (это линейные непрерывные отображения). Но $\text{Im } F'(0) = \text{Im } A$ незамкнут (он всюду плотен в l_2 , но не совпадает с l_2).

Задача 13. Привести пример гладких функций $f_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ таких, что в задаче $f_0(x) \rightarrow \min, f_1(x) = 0$ будет существовать точка локального минимума и в принципе Лагранжа будет $\lambda_0 = 0$ (а с $\lambda_0 \neq 0$ принцип Лагранжа не выполнен).

Решение. Рассмотрим задачу

$$x \rightarrow \inf, \quad x^2 = 0$$

Единственная допустимая точка $\hat{x} = 0$. Значит, она и будет точкой минимума. Запишем функцию Лагранжа: $\mathcal{L} = \lambda_0 x + \lambda_1 x^2$. Приравнявая ее производную в \hat{x} к нулю, получаем $\lambda_0 = 0$.

Задача 14. Пусть $\hat{x} \in M$ - точка локального минимума в задаче

$$\begin{cases} f_0(x) \rightarrow \inf \\ x \in M \end{cases}$$

функция f_0 дифференцируема по Гато в точке \hat{x} .

Верно ли, что тогда $f'_0(\hat{x})[h] = 0$ для любого $h \in T_{\hat{x}}M$?

Ответ: нет, неверно.

Пример: Пусть $M = \{(x, y) : y = x^2\}$ (т.е. парабола на плоскости),

$$f_0(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } y = x^2 \\ x, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Тогда $f_0 = 0$ на M , поэтому $(0, 0)$ - точка минимума f_0 на M . При $f_0(th, tg) = th$ при малых t (если $t < \frac{g}{h}$, то $t^2 h^2 < tg$), поэтому $f'_0(0, 0)[(h, g)] = h$.

Касательный вектор в $(0, 0)$ к параболе M имеет вид $(h, 0)$, так что на нем производная равна $h \neq 0$.

Задача 15. Пусть $l > 0$. Доказать, что допустимые экстремали в задаче

$$\int_0^1 (y\dot{x} - x\dot{y})dt \rightarrow \max, \quad \int_0^1 \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}dt = l, \quad x(0) = x(1) = y(0) = y(1) = 0, \quad \dot{x}^2 + \dot{y}^2 > 0$$

являются параметризацией окружности.

Решение. Функция Лагранжа имеет вид

$$\int_0^1 \left(\lambda_0(-y\dot{x} + x\dot{y}) + \lambda_1 \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \right) dt$$

Значит, уравнения Эйлера имеют вид

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dt} \left(\lambda_1 \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} - \lambda_0 y \right) + \lambda_0 \dot{y} &= 0, \\ -\frac{d}{dt} \left(\lambda_1 \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} + \lambda_0 x \right) - \lambda_0 \dot{x} &= 0. \end{aligned}$$

Если $\lambda_1 = 0$, то $\lambda_0 \dot{y} = 0, \lambda_0 \dot{x} = 0$. Так как $\lambda_0 \neq 0$, то $\dot{y} = 0, \dot{x} = 0$, что противоречит условию $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 > 0$. Пусть $\lambda_1 \neq 0$. Можно считать, что $\lambda_1 = 2$. Тогда

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dt} \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} + \lambda_0 \dot{y} &= 0 \\ -\frac{d}{dt} \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} - \lambda_0 \dot{x} &= 0 \end{aligned}$$

откуда

$$\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} = \lambda_0 y + a, \quad \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} = -\lambda_0 x + b$$

Возведем обе части равенств в квадрат и получим

$$1 = (-\lambda_0 y + a)^2 + (\lambda_0 x + b)^2$$

Заметим, что $\lambda_0 \neq 0$, иначе $\frac{dy}{dx} = \text{const}$ или $\frac{dx}{dy} = \text{const}$, при этом (\dot{x}, \dot{y}) нигде не обращается в $(0, 0)$. Тогда будет движение по отрезку всё время в одном направлении, что противоречит граничным условиям. А если $\lambda_0 \neq 0$, то (3) - уравнение окружности.

Задача 16. Привести пример такой задачи выпуклого программирования, что допустимая \hat{x} — не есть точка минимума, но существует ненулевой набор $(\lambda_0, \dots, \lambda_m)$, удовлетворяющий условиям а)-с) теоремы Куна-Таккера.

Теорема 1. (Каруи - Кун - Таккер). Пусть X — линейное пространство, $f_0, \dots, f_m : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ — выпуклые функции.

1. (необходимое условие). Пусть \hat{x} — точка минимума в задаче:

$$\begin{cases} f_0(x) \rightarrow \inf \\ f_j(x) \leq 0, \quad 1 \leq j \leq m \end{cases}$$

Тогда существует ненулевой набор чисел $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m$ со следующими свойствами: (а) $\lambda_j \geq 0, 0 \leq j \leq m$ (условие неотрицательности);

(b) $\lambda_j f_j(\hat{x}) = 0, 1 \leq j \leq m$ (условие дополняющей нежесткости);

(с) \hat{x} является точкой минимума функции $\mathcal{L}(x) := \sum_{j=0}^m \lambda_j f_j(x)$ (условие минимума).

2. (достаточное условие). Пусть \hat{x} — допустимая точка. Пусть существует набор чисел $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m$ со свойствами а)-с), при этом $\lambda_0 > 0$. Тогда \hat{x} — точка минимума в задаче (32).

3. Пусть существует точка $\bar{x} \in X$ такая, что $f_j(\bar{x}) < 0, 1 \leq j \leq m$ (условие Слейтера). Тогда, если $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m$ — ненулевой набор чисел со свойствами а)-с), то $\lambda_0 > 0$.

Пример. Если \hat{x} — решение задачи на минимум $f_0(x)$ при условии $f_1(\hat{x}) = 0, f_2(\hat{x}) = 0$, где функционалы выпуклы, то для функции Лагранжа $\mathcal{L}(x) = \sum_{j=0}^2 \lambda_j f_j(x)$ справедливы условия

а) минимум функции Лагранжа достигается на решении;

б) $\lambda_j f_j(\hat{x}) = 0, j \geq 1$;

с) $\lambda_j \geq 0, j \geq 0$.

Пусть $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, f_1(x) = x_1, f_2(x) = x_2$, а $f_0(x) = x_1^2 + (x_2 - 1)^2$. Тогда для функции Лагранжа $\mathcal{L}(x) = f_1(x) + f_2(x)$ имеем: точка $\hat{x} = (0, 0)$ — допустимая, условия а)-с) выполнены, но минимум $f_0(x)$ достигается в точке $(0, 1)$.

Задача 17. (из лекций) Сделав замену $\dot{x} = u$, вывести необходимое условие сильного минимума в простейшей задаче вариационного исчисления (условие Вейерштрасса и непрерывность $L_{\dot{x}}(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t))$) из принципа максимума Понтрягина.

Решение. Задача записывается в виде

$$\int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), u(t)) dt \rightarrow \inf, \quad x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1, \quad \dot{x} = u.$$

Функция Лагранжа имеет вид

$$\mathcal{L} = \int_{t_0}^{t_1} (\lambda_0 L(t, x(t), u(t)) + p(t)(\dot{x}(t) - u(t))) dt + \lambda_1 x(t_0) + \lambda_2 x(t_1).$$

Условие неотрицательности: $\lambda_0 \geq 0$.

Уравнение Эйлера: $-\dot{p}(t) + \lambda_0 L_x(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t)) = 0$.

Условие трансверсальности: $p(t_0) = \lambda_1, p(t_1) = -\lambda_2$.

Принцип максимума Понтрягина: $\min_{v \in \mathbb{R}} (\lambda_0 L(t, \hat{x}(t), v) - p(t)v) = \lambda_0 L(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t)) - p(t)\hat{u}(t)$.

Так как L гладкая и минимум берется по $v \in \mathbb{R}$, то получаем $\lambda_0 L_{\dot{x}}(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t)) - p(t) = 0$.

Если $\lambda_0 = 0$, то отсюда $p = 0$; в силу условий трансверсальности, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, то есть все множители Лагранжа нулевые.

Итак, $\lambda_0 > 0$. Можно считать, что $\lambda_0 = 1$. Так как $\dot{\hat{x}} = \hat{u}$, то $L_{\dot{x}}(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)) = p(t)$. В теореме о необходимом условии сильного минимума в задаче оптимального управления функция p кусочно непрерывно-дифференцируемая и, значит, непрерывная. Отсюда получаем непрерывность $t \mapsto L_{\dot{x}}(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t))$.

Еще раз запишем принцип максимума Понтрягина: для любого $v \in \mathbb{R}$

$$L(t, \hat{x}(t), v) - L_{\dot{x}}(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t))v \geq L(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t)) - L_{\dot{x}}(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t))\hat{u}(t)$$

Подставим $\hat{u} = \dot{\hat{x}}$, перенесем все в левую часть и получим условие Вейерштрасса.

Задача 18. Показать, что если L явно не зависит от x (т.е. $L = L(t, \dot{x}(t))$), то условие Вейерштрасса будет достаточным условием глобального минимума.

Решение. В силу уравнения Эйлера, $L_{\dot{x}}(t, \dot{x}(t)) \equiv c$.

Пусть x - произвольная допустимая функция. В силу условия Вейерштрасса

$$\int_{t_0}^{t_1} \mathcal{E}(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t), \dot{x}(t)) dt \geq 0$$

откуда

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(L(t, \dot{x}(t)) - L(t, \dot{\hat{x}}(t)) - L_{\dot{x}}(t, \dot{\hat{x}}(t))(\dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t)) \right) dt \geq 0$$

Значит,

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} L(t, \dot{x}(t)) dt &\geq \int_{t_0}^{t_1} L(t, \dot{\hat{x}}(t)) dt + \int_{t_0}^{t_1} c(\dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t)) dt = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} L(t, \dot{\hat{x}}(t)) dt + cx|_{t_0}^{t_1} - c\hat{x}|_{t_0}^{t_1} = \int_{t_0}^{t_1} L(t, \dot{\hat{x}}(t)) dt \end{aligned}$$

так как $x(t_0) = \hat{x}(t_0)$ и $x(t_1) = \hat{x}(t_1)$.

Задача 19. Рассмотрим задачу $\int_0^\pi (\dot{x}^2 - x^2 - x^4) dt \rightarrow \inf$, $x(0) = x(\pi) = 0$. Показать, что для $\hat{x} = 0$ выполнено усиленное условие Лежандра, условие Якоби, при этом $\hat{x} = 0$ не является точкой слабого минимума.

Решение. Имеем $\hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t) = 2$, $\hat{L}_{\dot{x}x} = 0$, $\hat{L}_{xx} = -2$. Значит, выполнено усиленное условие Лежандра. Уравнение Якоби имеет вид $\ddot{h} + h = 0$; его нетривиальное решение, зануляющееся при $t = 0$, имеет вид $h(t) = a \sin t$, $a \neq 0$. Тогда $h(t) \neq 0$ при $t \in (0, \pi)$, но $h(\pi) = 0$. Значит, выполнено условие Якоби, но не усиленное. Возьмем $x(t) = \varepsilon \sin t$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_0^\pi (\dot{x}^2 - x^2 - x^4) dt &= \varepsilon^2 \int_0^\pi (\cos^2 t - \sin^2 t) dt - \varepsilon^4 \int_0^\pi \sin^4 t dt = \\ &= \varepsilon^2 \int_0^\pi \cos 2t dt - \varepsilon^4 \int_0^\pi \sin^4 t dt = -\varepsilon^4 \int_0^\pi \sin^4 t dt < 0. \end{aligned}$$

Так как $\varepsilon > 0$ может быть сколь угодно мало, то слабого минимума нет.

Задача 20. Рассмотрим задачу

$$\int_{-T_0}^{T_0} x \sqrt{\dot{x}^2 + 1} dt \rightarrow \min, x(T_0) = x(-T_0) = \xi.$$

1. Выписать уравнение Якоби, подобрать одно из его решений, затем найти общее решение.
2. Пусть допустимых экстремалей две. Доказать, что одна из них является точкой сильного минимума, а вторая не является точкой слабого минимума.

Решение.

Определение 4. Скажем, что выполнено усиленное условие Лежандра, если $\hat{L}_{\dot{x}\dot{x}} > 0 \forall t \in [-T_0, T_0]$.

Определение 5. Скажем, что выполнено условие Якоби, если справедливо усиленное условие Лежандра, а решение уравнения Якоби

$$-\frac{d}{dt} \left(\hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t) \dot{h} + \hat{L}_{\dot{x}x}(t) h \right) + \left(\hat{L}_{xx}(t) \dot{h} + \hat{f}_{xx}(t) h \right) = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left(\hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t) \dot{h} \right) = \left(\hat{L}_{xx}(t) - \frac{d}{dt} \hat{L}_{\dot{x}x}(t) \right) h \quad (1)$$

не обращается в ноль на интервале (t_0, t_1) при начальных условиях: $h(t_0) = 0, \dot{h}(t_0) = 1$.

Определение 6. Скажем, что выполнено усиленное условие Якоби, если справедливо усиленное условие Лежандра, а решение уравнения (1) не обращается в ноль на полусегменте $(-T_0, T_0]$ при начальных условиях: $h(-T_0) = 0, \dot{h}(-T_0) = 1$.

Определение 7. Скажем, что выполнено усиленное условие Вейерштрасса, если функция $\dot{x} \mapsto L(t, x(t), \dot{x})$ выпукла в \mathcal{O} -окрестности экстремали \hat{x} при любом $t \in [-T_0, T_0]$, т.е. для любого $t \in [-T_0, T_0]$ и $x(t) \in \mathcal{O}(\hat{x}, \varepsilon)$ (с некоторым $\varepsilon > 0$) функция $\dot{x} \mapsto L(t, x(t), \dot{x})$ выпукла.

Теорема 2. Если выполнены усиленное условие Якоби и усиленное условие Вейерштрасса, то экстремаль доставляет сильный максимум.

1. Уравнение Якоби в данном случае имеет вид:

$$\ddot{h} - \frac{2}{C} \operatorname{th}\left(\frac{t}{C}\right) \dot{h} + \frac{1}{C^2} h = 0$$

Оно имеет два линейно независимых решения: $h_1(t) = \operatorname{sh} \frac{t}{C}$ и $h_2(t) = \operatorname{ch} \frac{t}{C} - \frac{t}{C} \operatorname{sh} \frac{t}{C}$. Общее решение, подчиненное условию $h(-1) = 0$, таково:

$$h(t) = \left(\operatorname{ch} \frac{t}{C} - \frac{t}{C} \operatorname{sh} \frac{t}{C} \right) \operatorname{sh} \frac{1}{C} + \left(\operatorname{ch} \frac{1}{C} - \frac{1}{C} \operatorname{sh} \frac{1}{C} \right) \operatorname{sh} \frac{t}{C}.$$

2. Было показано (см. 6), что экстремали существуют, если и только если $\xi \geq \xi_* = \operatorname{sh} \frac{1}{C_0}$, где $C_0 = \operatorname{th} \frac{1}{C_0} \approx 1.5088 \dots$. При этом, экстремаль задается формулой $x(t) = C \operatorname{ch} \frac{t}{C}$, а параметр $C > 0$ есть корень уравнения $\varphi(C) = \xi$, где $\varphi(C) \stackrel{\text{def}}{=} C \operatorname{ch} \frac{1}{C}$.

Функция $C \mapsto \varphi(C)$ выпукла, т.к. $\varphi''(C) = C^{-3} \operatorname{ch} \frac{1}{C}$. Ее минимум достигается в точке C_0 , где $\varphi'(C_0) = 0$. Отметим, что

$$\varphi'(C) = \left[\operatorname{ch} \frac{1}{C} - \frac{1}{C} \operatorname{sh} \frac{1}{C} \right]$$

Если $\xi > \xi_*$, то существуют ровно два значения $C_1 \in (0, C_0)$ и $C_2 > C_0$, которые удовлетворяют условию $\varphi(C) = \xi$. Покажем, что экстремаль $\hat{x}_2 = C_2 \operatorname{ch} \frac{1}{C_2}$ доставляет сильный (локальный) минимум, а экстремаль $\hat{x}_1 = C_1 \operatorname{ch} \frac{1}{C_1}$ не является ни слабым минимумом, ни слабым максимумом. Прежде всего, отметим, что для обеих экстремалей выполнено усиленное условие Лежандра, а именно: $\hat{f}_{\dot{x}\dot{x}}(t) = C \operatorname{ch}^{-2} \frac{t}{C} > 0$ и потому ни одна из них не является локальным максимумом.

Так как $h(0) = \operatorname{sh} \frac{1}{C} \neq 0$, то нули функции h совпадают с нулями функции

$$z : t \mapsto z(t) = \frac{h(t)}{\operatorname{sh} \frac{1}{C} \operatorname{sh} \frac{t}{C}} = \left(\operatorname{cth} \frac{t}{C} - \frac{t}{C} \right) + \left(\operatorname{cth} \frac{1}{C} - \frac{1}{C} \right)$$

Заметим, что $z'(t) < 0$, а $z(1) = \frac{2\varphi'(C)}{\operatorname{sh} \frac{1}{C}}$. Поэтому, если $z(1) < 0 \Leftrightarrow C = C_1$, то условие Якоби не выполнено, а если $z(1) > 0 \Leftrightarrow C = C_2$, то выполнено усиленное условие Якоби.