Задачи по курсу «Вариационное исчисление и оптимальное управление»

Осенний семестр 2023

Аннотация

В документе собраны решения задач к экзамену по вариационному исчислению и оптимальному управлению осеннего семестра 2023 года. Лектор: Васильева А. А. Задачи могут содержать ошибки и опечатки. Исходники, материалы и информацию по участию в дополнении теха можно найти тут.

Задача 1. Предварительный материал из лекции (Гармонический осциллятор):
Рассмотрим задачу:

$$\mathcal{L}(x) := \int_0^{T_0} \left(\dot{x}^2 - x^2\right) dt \to \inf, \quad x(0) = x(T_0) = 0$$

Тогда $L_{\dot{x}} = 2\dot{x}, L_x = -2x$; уравнение Эйлера имеет вид $-\frac{d}{dt}(2\dot{x}) - 2x = 0$, т.е. $\ddot{x} + x = 0$.

Заметим, что $\hat{x} = 0$ является допустимой экстремалью. Выясним, является ли она точкой локального или глобального минимума. Для этого используем следующий прием.

Пусть $\omega \in C^1[0, T_0]$. Тогда

$$\int_0^{T_0} \left(\dot{\omega}x^2 + 2\omega x\dot{x}\right) dt = \int_0^{T_0} \frac{d}{dt}\left(\omega x^2\right) dt = \omega x^2\Big|_0^{T_0} = 0\,, \text{ если } x \in C^1_{0,0}[0, T_0]\,.$$

Значит, можно добавить этот ноль к интегралу:

$$\int_0^{T_0} \left(\dot{x}^2 - x^2\right) dt = \int_0^{T_0} \left(\dot{x}^2 - x^2 - \dot{\omega}x^2 - 2\omega x\dot{x}\right) dt$$

Подберем ω так, чтобы $\dot{x}^2 - x^2 - \dot{\omega}x^2 - 2\omega x\dot{x}$ было полным квадратом: $\dot{x}^2 - x^2 - \dot{\omega}x^2 - 2\omega x\dot{x} = (\dot{x} - \omega x)^2$, т.е. $-1 - \dot{\omega} = \omega^2$. (Тогда $\int_0^{T_0}\left(\dot{x}^2 - x^2\right) dt = \int_0^{T_0}(\dot{x} - \omega x)^2 dt \geq 0.\Big)$ Получаем, что $\omega = \operatorname{ctg}(t - t_*)$.

Задача

1) Пусть $T_0 > \pi$, $x(t) = c\sin\frac{\pi t}{T_0}$. Показать, что $\mathcal{L}(x) < 0$ при $c \neq 0$. Почему проведенные выше рассуждения не проходят при $T_0 > \pi$ и проходят при $T_0 < \pi$?
2) Показать, что $\int_0^{\pi}\left(\dot{x}^2 - x^2\right) dt = \int_0^{\pi}(\dot{x} - x\cdot\operatorname{ctg} t)^2 dt \geqslant 0$.

Решение. 1) Вычисляем:

$$\int_0^{T_0} \left(\dot{x}^2 - x^2\right) dt = c^2 \int_0^{T_0} \left(\frac{\pi^2}{T_0}\cos^2\frac{\pi t}{T_0} - \sin^2\frac{\pi t}{T_0}\right) dt =$$

$$= \frac{c^2}{2}\left(\frac{\pi^2}{T_0^2}\int_0^{T_0}\left(1 + \cos\frac{2\pi t}{T_0}\right) dt - \int_0^{T_0}\left(1 - \cos\frac{2\pi t}{T_0}\right) dt\right) = \frac{c^2 T_0}{2}\left(\frac{\pi^2}{T_0^2} - 1\right) < 0.$$

Напомним, что мы подбирали гладкую функцию ω так, чтобы

$$\int_0^{T_0} \left(\dot{x}^2 - x^2\right) dt = \int_0^{T_0}(\dot{x} - \omega x)^2 dt$$

при этом ω была решением дифференциального уравнения $\dot{\omega} = -1 - \omega^2$. Значит, $\omega(t) = \operatorname{ctg}(t - a)$.

Если $T_0 < \pi$, то можно подобрать a (в данном случае подойдет $a = 0$) так, чтобы $\operatorname{ctg}(t - a)$ была гладкой на $[0, T_0]$. Если $T_0 > \pi$, то для любого a функция ω будет иметь точку разрыва в интервале $(0, T_0)$, т.к. ctg гладко определен на $(\pi n,\ \pi n + \pi)$ и имеет разрывы в точках πn.

2) Преобразуем правую часть условия:

$$0 \leq \int_0^{\pi}(\dot{x} - x\cdot\operatorname{ctg} t)^2 dt = \int_0^{\pi}\left(\dot{x}^2 - 2x\dot{x}\operatorname{ctg} t + x^2\operatorname{ctg}^2 t\right) dt =$$

интегрируем среднее слагаемое по частям и используем $\dot{ctg} + ctg^2 = -1$:

$$= \int_0^{\pi}\left(\dot{x}^2 + x^2(\operatorname{ctg} t)' + x^2\operatorname{ctg}^2 t\right) dt + x^2(t)\operatorname{ctg} t\Big|_0^{\pi} = \int_0^{\pi}\left(\dot{x}^2 - x^2\right) dt + x^2(t)\operatorname{ctg} t\Big|_0^{\pi}.$$

Так как $x \in C^1[0, \pi]$ и $x(0) = 0$, то $x(t) = O(t)$ в окрестности нуля; так как $\operatorname{ctg} t = O(1/t)$ в окрестности нуля, то $x^2(t)\operatorname{ctg} t = O(t) \underset{t\to 0}{\to} 0$. Аналогично $x^2(t)\operatorname{ctg} t = O(\pi - t) \underset{t\to\pi}{\to} 0$. Значит, $x^2(t)\operatorname{ctg} t\Big|_0^{\pi} = 0$ и равенство доказано.

Задача 2. Доказать, что в задаче

$$\int_0^1 t^{1/2}\dot{x}^2 dt \to \inf, \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 1$$

точки локального минимума в пространстве $C^1[0,1]$ не существует; найти точку глобального минимума для той же задачи в пространстве

$$W = \left\{ f \in AC[0,1] : \int_0^1 t^{1/2}\dot{x}^2 dt < \infty \right\}$$

Решение. Напишем уравнение Эйлера: $\frac{d}{dt}\left(2t^{1/2}\dot{x}\right) = 0$, откуда $t^{1/2}\dot{x} = c$. Значит, $x = 2ct^{1/2} + b$. Подставляя граничные условия, получаем $x = t^{1/2} \notin C^1[0,1]$.

Пусть $h \in W, h(0) = h(1) = 0$. Тогда

$$\int_0^1 t^{1/2}(\dot{x} + \dot{h})^2 dt - \int_0^1 t^{1/2}\dot{x}^2 dt = \int_0^1 t^{1/2}\left(2\dot{x}\dot{h} + \dot{h}^2\right) dt = \int_0^1 t^{1/2}\left(t^{-1/2}\dot{h} + \dot{h}^2\right) dt =$$
$$= \int_0^1 \dot{h} dt + \int_0^1 t^{1/2}\dot{h}^2 dt = \int_0^1 t^{1/2}\dot{h}^2 dt \geqslant 0.$$

Задача 3. Доказать, что в задаче

$$\int_0^1 \left(1-\dot{x}^2\right)^2 dt \to \inf, \quad x(0)=0, \quad x(1)=0$$

точки локального минимума в пространстве $C^1[0,1]$ не существует, при этом точная нижняя грань функционала равна 0.

Решение. Заметим, что $\int_0^1 \left(1-\dot{x}^2\right)^2 dt \geqslant 0$. Если $\int_0^1 \left(1-\dot{x}^2\right)^2 dt = 0$, то $\dot{x}^2(t) \equiv 1$, откуда $\dot{x}(t) = \pm 1$ для любого t. Так как $\dot{x}$ непрерывна, то $\dot{x} \equiv 1$ или $\dot{x} \equiv -1$. Получаем противоречие с граничными условиями. Значит, нулевое значение не достигается.

Теперь покажем, что для любого $\varepsilon > 0$ существует допустимая функция $x \in C^1[0,1]$ такая, что $\int_0^1 \left(1-\dot{x}^2\right)^2 dt \leqslant \varepsilon$. Положим

$$z(t) = \begin{cases} 1, \quad 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}-\delta \\ \frac{1}{\delta}\left(\frac{1}{2}-t\right), \quad \frac{1}{2}-\delta \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}+\delta, \\ -1, \quad \frac{1}{2}+\delta \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

$x(t) = \int_0^t z(s)ds$. Тогда $x \in C^1[0,1], x(0)=x(1)=0$. При этом $|\dot{x}| \leqslant 1$. Значит,

$$\int_0^1 \left(1-\dot{x}^2\right)^2 dt = \int_{\frac{1}{2}-\delta}^{\frac{1}{2}+\delta} \left(1-\dot{x}^2\right)^2 dt \leqslant 2\delta.$$

Значит, достаточно взять $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$.

Задача 4. (задача о геодезических на плоскости Лобачевского.) Найти допустимые экстремали в задаче

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\sqrt{1+\dot{x}^2}}{x} dt \rightarrow \operatorname{extr}, x\left(t_0\right)=x_0, \quad x\left(t_1\right)=x_1, \quad x>0$$

Решение. Имеем $L_{\dot{x}}=\frac{\dot{x}}{x \sqrt{1+\dot{x}^2}}, L_{\dot{x} \dot{x}}=\frac{1}{x\left(1+\dot{x}^2\right)^{3 / 2}}>0$. Значит, $\hat{x} \in C^2\left[t_0, t_1\right]$ и $\dot{\hat{x}}(t) L_{\dot{x}}(\hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t))-L(\hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t))=$ const.

Проверим, что допустимая экстремаль не может обращаться в константу ни на каком невырожденном интервале. Это видно из уравнения Эйлера:

$$-\frac{d}{d t} \frac{\dot{x}}{x \sqrt{1+\dot{x}^2}}-\frac{\sqrt{1+\dot{x}^2}}{x^2}=0$$

(тогда бы получилось равенство $1 / \hat{x}^2(t) \equiv 0$).

Из уравнения $\dot{x} L_{\dot{x}}-L=$ const получаем

$$\dot{x} \cdot \frac{\dot{x}}{x \sqrt{1+\dot{x}^2}}-\frac{\sqrt{1+\dot{x}^2}}{x}= \text { const. }$$

Значит, $\frac{1}{x \sqrt{1+\dot{x}^2}}=$ const. Получаем $1+\dot{x}^2=\frac{c^2}{x^2}$, или $\dot{x}= \pm \sqrt{\frac{c^2}{x^2}-1}$. На промежутках, где $\dot{x} \neq 0$, решаем это дифференциальное уравнение и получаем

$$t-a= \pm \int \frac{d x}{\sqrt{\frac{c^2}{x^2}-1}}= \pm \frac{1}{2} \int \frac{d x^2}{\sqrt{c^2-x^2}}= \pm \sqrt{c^2-x^2}$$

Возводим в квадрат и получаем $x^2+(t-a)^2=c^2$. Это уравнение окружности с центром на горизонтальной оси.

Если в какой-то точке $\dot{x}$ обращается в 0 , то условия теоремы единственности нарушаются, но всё равно экстремаль задается уравнением окружности (склеивается из двух дуг окружностей; в силу гладкости обе дуги принадлежат одной и той же окружности; горизонтальных "вставок"быть не может, т.к. экстремаль не равна константе на интервалах).

Итак, геодезические - дуги окружности с центром на горизонтальной оси.

Утверждается, что найденная допустимая экстремаль будет точкой глобального минимума. В самом деле, $L_{\dot{x} \dot{x}}>0$ при $x>0$, так что L выпукла по $\dot{x}$.

Задача 5. Найти допустимые экстремали в задаче

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\sqrt{1+\dot{x}^2}}{\sqrt{x}} dt \to \max, \quad x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1, \quad x > 0$$

Решение. L явно не зависит от t. Если $\hat{x}$ - экстремаль, $\hat{x} \in C^2$, то

$$\dot{x} L_{\dot{x}} - L = const$$

Так как $L \in C^2$, достаточно доказать, что $L_{\dot{x}\dot{x}} \neq 0$
$L_{\dot{x}\dot{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}(1+\dot{x}^2)^{3/2}}$
$\hat{x} \in C^2, L \in C^2$ удовлетворяют $\dot{x} L_{\dot{x}} = const$
$\hat{x}$ не равна константе ни на каком интервале $\Longrightarrow$ $\hat{x}$ удовлетворяет уравнению Эйлера
$\hat{x} = c$ на интервале
$-\frac{d}{dt} \frac{\dot{x}}{\sqrt{x}\sqrt{1+\dot{x}^2}} + \frac{1}{2} x^{-3/2} \sqrt{1+\dot{x}^2} = 0$
Первое слагаемое ноль, второе - ненулевая константа. Противоречие.

$$\dot{x} L_{\dot{x}} - L = const$$

$$\dot{x} \frac{\dot{x}}{\sqrt{x}\sqrt{1+\dot{x}^2}} - \frac{\sqrt{1+\dot{x}^2}}{\sqrt{x}} = const$$

$$x(1+\dot{x}^2) = const$$

$$\dot{x}^2 = \frac{c}{x} - 1$$

$$\dot{x} = \pm\sqrt{\frac{c}{x} - 1}$$

$$x = c \sin^2 \frac{\tau}{2} = \frac{c}{2}(1 - \cos\tau)$$

$$t + a = \pm \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{c}{x} - 1}} = \pm \int \frac{2c \sin\frac{\tau}{2} \cos\frac{\tau}{2} d\tau}{\sqrt{\frac{1}{\sin^2\frac{\tau}{2}} - 1}} = \pm c \int \sin\frac{\tau}{2} \cos\frac{\tau}{2} \left|\tan\frac{\tau}{2}\right| d\tau$$

$$c \int \sin^2 \frac{\tau}{2} d\tau = \frac{c}{2} \int (1 - \cos\tau) d\tau = \frac{c}{2}(\tau - \sin\tau)$$

Задача 6. Найти допустимые экстремали в задаче

$$\int_{-T_0}^{T_0} x\sqrt{1+\dot{x}}\,dt \to extr,\ x(-T_0) = x(T_0) = \xi,\ x > 0$$

В зависимости от $\xi > 0$ установить, сколько может быть допустимых экстремалей.
Решение.

$$L_{\dot{x}} = \frac{x\dot{x}}{\sqrt{1+\dot{x}^2}}$$

$$L_{\dot{x}\dot{x}} = (\frac{x}{(1+\dot{x}^2)})^{3/2} > 0,$$

Решение уравнения Эйлера $\hat{x} \in C^2[-T_0, T_0]$ и $\hat{x}(t)\dot{L_x}(\hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)) - L(\hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)) = const$.
Проверим, что допустимая экстремаль не может обращаться в константу ни на каком невырожденном отрезке. Это видно из уравнения Эйлера:

$$-\frac{d}{dt}\frac{x\dot{x}}{\sqrt{1+\dot{x}^2}} + \sqrt{1+\dot{x}^2} = 0$$

Решений нет.
Из уравнения $\dot{x}L_{\dot{x}} - L = const$ получаем:

$$\dot{x}\frac{x\dot{x}}{\sqrt{1+\dot{x}^2}} - x\sqrt{1+\dot{x}^2} = const$$

$$\frac{x}{\sqrt{1+\dot{x}^2}} = const = C \Rightarrow 1+\dot{x}^2 = \frac{x^2}{C^2} \Rightarrow \dot{x} = \pm\sqrt{\frac{x^2}{C^2}-1} \Rightarrow dt = \pm\frac{dx}{\sqrt{\frac{x^2}{C^2}-1}}$$

$$t + a = \pm\int \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{C^2}-1}}\,dx = |x = Cch(\tau)| = \pm\int \frac{Csh(\tau)}{|sh(\tau)|}\,d\tau$$

$$t + a = \pm C\tau \Rightarrow \frac{t+a}{C} = \pm\tau \Rightarrow ch\left(\frac{t+a}{C}\right) = ch(\tau) = \frac{x}{C} \Rightarrow x = Cch\left(\frac{t+a}{C}\right)$$

$$x(-T_0) = x(T_0) \Rightarrow x = Cch\left(\frac{t}{C}\right)$$

C — решение уравнения $Cch\left(\frac{T_0}{C}\right) = \xi$. Пусть $b = \frac{1}{C}$, тогда $ch(T_0 b) = \xi b$. $ch(T_0 b)$ — выпуклая вниз функция, а ξb — линейная $\Rightarrow$ может быть 0, 1 или 2 решениия.

$$\xi_* > 0 \text{ — случай касания.}$$

$$\xi > \xi_* \text{ — два решения.}$$

$$\xi < \xi_* \text{ — нет решений.}$$

$ch(T_0 b) = \xi_* b$, $T_0 sh(T_0 b) = \xi_*$. Исключаем ξ_*.

$$ch(T_0 b) = T_0 b sh(T_0 b)$$

Отсюда находим b, а потом ξ_*.

Задача 7. 1) Пусть $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ задано равенством $F(x_1, x_2) = \sqrt[3]{x_1^2 x_2}$. Показать, что F имеет вариацию по Лагранжу, но не дифференцируемо по Гато в нуле.
2) Пусть X — бесконечномерное нормированное пространство, $F : X \to \mathbb{R}$ — линейный неограниченный функционал. Показать, что F имеет вариацию по Лагранжу в нуле, но не дифференцируемо по Гато.

Решение. 1) Пусть $h = (h_1, h_2)$. Тогда $F(th_1, th_2) = \sqrt[3]{(th_1)^2\, th_2} = t\sqrt[3]{h_1^2 h_2}$. Значит,

$$\frac{F(th_1, th_2) - F(0,0)}{t} = \sqrt[3]{h_1^2 h_2}, \quad F'(0,0)\left[(h_1, h_2)\right] = \sqrt[3]{h_1^2 h_2}$$

легко видеть, что это отображение нелинейно.
2) Если функционал F линеен, то $F(th) - F(0) = tF(h)$; значит, $F'(0)[h] = F(h)$. Это отображение линейно, но разрывно.

Задача 8. Пусть $M=\left\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 : x_1>0, x_2=x_1^2\right\}, f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$,

$$f\left(x_1,x_2\right)=\begin{cases}1, & \left(x_1,x_2\right)\in M\\ 0, & \left(x_1,x_2\right)\notin M\end{cases}$$

Показать, что f дифференцируемо по Гато, но не дифференцируемо по Фреше в т. $(0,0)$.

Решение. Вычислим вариацию по Лагранжу в нуле. Пусть $h\in\mathbb{R}^2$. Заметим, что прямая $\{th : t\in\mathbb{R}\}$ пересекается с множеством M не более, чем в одной точке. Значит, при малых t выполнено $th\notin M, F(th)-F(0)=0$. Поэтому $F'(0)[h]=0$. Это линейный непрерывный функционал. Значит, F дифференцируемо по Гато в 0 . При этом F в нуле разрывно и, следовательно, не дифференцируемо по Фреше.

Задача 9. Построить пример отображений $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ таких, что F дифференцируемо по Фреше в т. 0, G дифференцируемо по Гато в т. $(0, 0)$, $F(0) = (0, 0)$, при этом $G \circ F$ не имеет вариации по Лагранжу в т. 0.

Решение.

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad x \to (x, x^2)$$

$$G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x_1, x_2) \to \begin{cases} 1, (x_1, x_2) \in M \\ 0, (x_1, x_2) \notin M \end{cases}$$

Где $M = \{(x_1, x_2) | x_2 = x_1, x_1 > 0\}$, уже знаем что G дифференцируемо по Гато в т. $(0, 0)$ (но не по Фреше). Покажем, что F дифференцируемо по Фреше в т. 0.

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{F(\lambda h) - F(0)}{\lambda} = \lim_{\lambda \to 0} \frac{(\lambda h, \lambda^2 h^2) - (0, 0)}{\lambda} = (h, 0) = F'(0)[h]$$

$$F(\lambda h) = (\lambda h, \lambda^2 h^2) = (0, 0) + (h, 0) + ((\lambda - 1)h, \lambda^2 h^2)$$

Последнее слагаемое это $\bar{o}(\|h\|)$.

$\Rightarrow$ F дифференцируемо по Фреше в 0. $G \circ F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$x \to \begin{cases} 1, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{\lambda \to 0} = \frac{G \circ F(\lambda h) - G \circ F(0)}{\lambda} = \lim_{\lambda \to 0} \left(\frac{1}{\lambda} \right)$$

$\Rightarrow$ нет вариации по Лагранжу.

Задача 10. Привести пример функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, всюду дифференцируемой по Фреше, но не строго дифференцируемой в нуле.

Доказательство: Рассмотрим функцию f:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x=0\\ x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right), & x\neq 0\end{cases}$$

f дифференцируема по Фреше в $x\neq 0$ (по правилу Лейбница):

$$\begin{aligned}&(x+h)^2=x^2+2xh+\bar{o}(|h|)\\ &\sin\frac{1}{x+h}=\sin\frac{1}{x}+\frac{-1}{x^2}\cos\frac{1}{x}h+\bar{o}(|h|)\end{aligned}$$

$|f(x)|\leq x^2 \implies f'(0)=0$ и $f(x)-f(0)=f(x)=\bar{o}(|x|), |x|\to 0$ то есть f диф. по Фреше в 0, тогда и на всем $\mathbb{R}$

Предположим противное: f строго дифференцируемо в 0.

По определению, для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$ такое, что для любых $x_1,x_2\in O_\delta(x_0)$ выполнено

$$\begin{aligned}&|f(x_1)-f(x_2)-A(x_1-x_2)|\leq\varepsilon|x_1-x_2|\\ &f'(0)=0\implies|f(x_1)-f(x_2)|\leq\varepsilon|x_1-x_2|\leq 2\varepsilon\delta\\ &x\neq 0: f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}+x^2\cos\frac{1}{x}\left(-1\cdot\frac{1}{x^2}\right)=2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)-\cos\frac{1}{x}\nrightarrow 0, x\to 0\\ &\text{потому что }\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0\text{ и }\lim_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}\text{ не существует.}\\ &\text{Тогда }\exists\xi_n\to 0\quad|f'(\xi_n)|\geqslant c>0\\ &f(\xi_n+h_n)-f(\xi_n)=f'(\xi_n)h_n+\bar{o}(h_n)\ \text{(по опр. диф. по Фреше)}\\ &h_n\longrightarrow 0:\\ &|f(\xi_n+h_n)-f(\xi_n)|\geqslant C|h_n|\end{aligned}$$

Получили противоречие. f не является строго дифференцируемой в нуле.

Задача 11. 1) Если $F : X \to \mathbb{R}$, то существует $x \in [x_0, x_1]$ такое, что $F(x_1) - F(x_0) = F'(x)[x_1 - x_0]$.
2) Если $F : X \to Y, \dim Y > 1$, то утверждение из п. 1 может быть неверным.

Решение. 1) Положим $\varphi(t) = F((1-t)x_0 + tx_1)$. Тогда $\varphi'(t) = F'((1-t)x_0 + tx_1)[x_1 - x_0]$. По теореме Лагранжа, существует $\tau \in (0,1)$ такое, что $\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\tau)$. Значит,

$$F(x_1) - F(x_0) = \varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\tau) = F'((1-\tau)x_0 + \tau x_1)[x_1 - x_0].$$

2) Пусть $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, F(t) = (\cos t, \sin t)$. Тогда $F(2\pi) - F(0) = (0,0), F'(t) = (-\sin t, \cos t)$; значит, если $F(2\pi) - F(0) = 2\pi F'(t)$ для некоторого t, то $(0,0) = 2\pi(-\sin t, \cos t)$ - противоречие.

Задача 12. Показать, что если отображение F строго дифференцируемо в нуле и дифференцируемо по Гато в окрестности 0 , то производная по Гато $F_G(x) : h \mapsto F_G(x)[h]$ непрерывна в 0 .

Решение.

Если F строго дифференцируемо в 0 , т.е.

$$\|F(x) - F(y) - F'(0)(x - y)\| \leq \varepsilon\|x - y\| \quad \Longrightarrow \quad \|F(x) - F(y) - F'_G(0)(x - y)\| \leq \varepsilon\|x - y\|$$

при $\|x\| \leq \delta(\varepsilon)$ и $\|y\| \leq \delta(\varepsilon)$, то константа Липшица отображения $x \mapsto F(x) - F'(0)[x]$, обозначенная здесь через ε стремится к 0 в дельта-окрестности 0 при дельта стремящемся к 0 .

Поскольку отображение $\Phi : h \mapsto (F'_G(x) - F'_G(0))\,[h]$ липшицево с константой эпсилон в окрестности 0 , то в каждой точке этой окрестности норма производной Φ не больше эпсилон. Поэтому приходим к заключению: $\|F'_G(x) - F'_G(0)\|$ не больше эпсилон, если x в маленькой окрестности нуля. Требуемая непрерывность установлена.

Задача 13. Пусть $T: L^2(0,1) \to L^2(0,1), Tx(t) = \sin x(t)$. Показать, что T дифференцируемо по Гато в каждой гочке, но нигде не дифференцируемо по Фреше.
Решение.

1. Дифференцируемость по Гато.
Сначала зафиксируем вектор $h \in L^2(0,1)$. Нусть $\lambda \in \mathbb{R}$. Для любого t

$$\lim_{\lambda\to 0} \frac{\sin[x(t)+\lambda h(t)] - \sin x(t)}{\lambda} \overset{(\sin x)'=\cos x}{=} \cos x(t) \cdot h(t).$$

Таким же будет предел в $L^2(0,1)$, т.е.

$$\lim_{\lambda\to 0} \int_0^1 \left(\frac{\sin[x(t)+\lambda h(t)] - \sin x(t)}{\lambda} - \cos x h(t) \right)^2 dt = 0,$$

поскольку поточечная сходимость есть, а подинтегральная функция мажорируется функцией из L^1,

$$\left| \frac{\sin[x(t)+\lambda h(t)] - \sin x(t)}{\lambda} \right| \leq |h(t)|.$$

2. Однако нет дифференцируемости по Фреше.
Следуя указанию А.А. Васильевой, рассмотрим два случая.
A) Если $\mu\{t : |\cos x(t)| \neq 0\} > 0$, то существует $\varepsilon > 0$ и $E = \{t : |\cos x(t)| \geq \varepsilon\} > 0$. Пусть $E_n \subset E$, что $\mu E_n \to 0$ при $n \to \infty$. Возьмем $h_n = 2\pi \cdot 1_{E_n}$. Тогда $\sin(x(t) + h_n(t)) - \sin x(t) \equiv 0$. Поэтому

$$\frac{\|\cos x(\cdot) h_n(\cdot)\|_{L^2}}{\|h_{\mathrm{n}}(\cdot)\|_{L^2}} \geq \frac{\varepsilon\,(\mu E_n)^{1/2}}{(\mu E_n)^{1/2}} = \varepsilon.$$

B). Если $\mu\{t : |\cos x(t)| \neq 0\} > 0$, то возьмем $h_n = \pi \cdot 2 \cdot 1_{E_n}$. Далее аналогично. Получается, что T не дифференцируемо и по Фреше.

Задача 14. Пусть $A : l_2 \to l_2$,
$$A(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) = (x_1, x_2/2, \ldots, x_n/n, \ldots),$$
$(y_1, \ldots, y_n, \ldots) \in l_2 \setminus \operatorname{Im} A$ (почему такая точка существует?). Рассмотрим задачу

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n x_n \to \inf, \quad A(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) = 0.$$

Какая точка будет точкой минимума в этой задаче? Показать, что для этой задачи принцип Лагранжа неверен. Какое из условий теоремы о необходимом условии локального минимума здесь не выполнено?

Решение.

1) В качестве точки y можно взять последовательность $(1, 1/2, \ldots, 1/n, \ldots) \in l_2$. Если $Ax = y$, то $x_n = 1$ для любого $n \in \mathbb{N}$, но $(1, \ldots, 1, \ldots) \notin l_2$.

2) Если $A(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) = 0$, то $\frac{x_n}{n} = 0$ для любого n. Значит, $x = 0$-единственная допустимая точка, она же и будет точкой минимума.

3) Пусть $f_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n x_n, F(x) = A(x)$. Тогда $f_0'(x)[h] = \sum_{n=1}^{\infty} y_n h_n, F'(x)[h] = A'(h) = (h_1, h_2/2, \ldots, h_n/n, \ldots)$. Если z^* - линейный непрерывный функционал на l_2, то существует вектор $z = (z_1, \ldots, z_n, \ldots) \in l_2$ такой, что $z^*(x) = \sum_{n=1}^{\infty} z_n x_n$.

Таким образом, если принцип Лагранжа выполнен, то существуют $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ и $z \in l_2$, одновременно не равные нулю, такие, что для любого $h \in l_2$ выполнено
$$\lambda_0 \sum_{n=1}^{\infty} y_n h_n + \sum_{n=1}^{\infty} z_n \frac{h_n}{n} = 0.$$

Значит, $\lambda_0 y_n + \frac{z_n}{n} = 0, n \in \mathbb{N}$. Если $\lambda_0 \neq 0$, то $y_n = -\frac{z_n}{\lambda_0 n}$, то есть $y = A(-z/\lambda_0)$. Но $y \notin \operatorname{Im} A$ - противоречие. Если $\lambda_0 = 0$, то $\frac{z_n}{n} = 0$ для любого n, поэтому $z = 0$. Получили, что оба множителя Лагранжа нулевые.

4) Пространства $X = Y = l_2$ банаховы, f_0 и F непрерывно дифференцируемы (это линейные непрерывные отображения). Но $\operatorname{Im} F'(0) = \operatorname{Im} A$ незамкнут (он всюду плотен в l_2, но не совпадает с l_2).

Задача 15. Привести пример гладких функций $f_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ таких, что в задаче $f_0(x) \to \min, f_1(x) = 0$ будет существовать точка локального минимума и в принципе Лагранжа будет $\lambda_0 = 0$ (а с $\lambda_0 \neq 0$ принцип Лагранжа не выполнен).

Решение. Рассмотрим задачу

$$x \to \inf, \quad x^2 = 0$$

Единственная допустимая точка $-\hat{x} = 0$. Значит, она и будет точкой минимума. Запишем функцию Лагранжа: $\mathcal{L} = \lambda_0 x + \lambda_1 x^2$. Приравнивая ее производную в $\hat{x}$ к нулю, получаем $\lambda_0 = 0$.

Задача 16. Пусть $\hat{x} \in M$ - точка локального минимума в задаче

$$\begin{cases} f_0(x) \to \inf \\ x \in M \end{cases}$$

функция f_0 дифференцируема по Гато в точке $\hat{x}$.
Верно ли, что тогда $f_0'(\hat{x})[h] = 0$ для любого $h \in T_{\hat{x}}M$?
Ответ: нет, неверно.
Пример: Пусть $M = \{(x, y) : y = x^2\}$ (т.е. парабола на плоскости),

$$f_0(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } y = x^2 \\ x, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Тогда $f_0 = 0$ на М, поэтому $(0, 0)$ - точка минимума f_0 на M. При $f_0(th, tg) = th$ при малых t (если t $< \frac{g}{h}$, то $t^2h^2 < tg$), поэтому $f_0'(0, 0)[(h, g)] = h$.
Касательный вектор в $(0, 0)$ к параболе M имеет вид $(h, 0)$, так что на нем производная равна $h \neq 0$.

Задача 17. Пусть $l > 0$. Доказать, что допустимые экстремали в задаче

$$\int_0^1 (y\dot{x} - x\dot{y})dt \to \max, \quad \int_0^1 \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}dt = l, \quad x(0) = x(1) = y(0) = y(1) = 0, \quad \dot{x}^2 + \dot{y}^2 > 0$$

являются параметризацией окружности.

Решение. Функция Лагранжа имеет вид

$$\int_0^1 \left(\lambda_0(-y\dot{x} + x\dot{y}) + \lambda_1\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\right) dt$$

Значит, уравнения Эйлера имеют вид

$$-\frac{d}{dt}\left(\lambda_1 \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} - \lambda_0 y\right) + \lambda_0 \dot{y} = 0,$$
$$-\frac{d}{dt}\left(\lambda_1 \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} + \lambda_0 x\right) - \lambda_0 \dot{x} = 0.$$

Если $\lambda_1 = 0$, то $\lambda_0\dot{y} = 0, \lambda_0\dot{x} = 0$. Так как $\lambda_0 \neq 0$, то $\dot{y} = 0, \dot{x} = 0$, что противоречит условию $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 > 0$.
Пусть $\lambda_1 \neq 0$. Можно считать, что $\lambda_1 = 2$. Тогда

$$-\frac{d}{dt}\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} + \lambda_0 \dot{y} = 0$$
$$-\frac{d}{dt}\frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} - \lambda_0 \dot{x} = 0$$

откуда

$$\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} = \lambda_0 y + a, \quad \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} = -\lambda_0 x + b$$

Возведем обе части равенств в квадрат и получим

$$1 = (-\lambda_0 y + a)^2 + (\lambda_0 x + b)^2$$

Заметим, что $\lambda_0 \neq 0$, иначе $\frac{dy}{dx} = \mathrm{const}$ или $\frac{dx}{dy} = \mathrm{const}$, при этом $(\dot{x}, \dot{y})$ нигде не обращается в $(0, 0)$. Тогда будет движение по отрезку всё время в одном направлении, что противоречит граничным условиям. А если $\lambda_0 \neq 0$, то (3) - уравнение окружности.

Задача 18. Привести пример такой задачи выпуклого программирования, что допустимая $\hat{x}-$ не есть точка минимума, но существует ненулевой набор $(\lambda_0, \ldots, \lambda_m)$, удовлетворяющий условиям a)-c) теоремы Куна-Таккера.

Теорема 1. *(Каруш - Кун - Таккер). Пусть X — линейное пространство, $f_0, \ldots, f_m : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ — выпуклые функции.*

1. *(необходимое условие). Пусть $\hat{x}$ - точка минимума в задаче:*
   $$\begin{cases} f_0(x) \to \inf \\ f_j(x) \leq 0, \quad 1 \leq j \leq m \end{cases}$$

   Тогда существует ненулевой набор чисел $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$ со следующими свойствами:
   (a) $\lambda_j \geq 0, 0 \leq j \leq m$ (условие неотрицательности);
   (b) $\lambda_j f_j(\hat{x}) = 0, 1 \leq j \leq m$ (условие дополняющей нежесткости);
   (c) $\hat{x}$ является точкой минимума функции $\mathcal{L}(x) := \sum_{j=0}^{m} \lambda_j f_j(x)$ (условие минимума).

2. *(достаточное условие). Пусть $\hat{x}-$ допустимая точка. Пусть существует набор чисел $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$ со свойствами a)-c), при этом $\lambda_0 > 0$. Тогда $\hat{x}-$ точка минимума в рассматриваемой задаче.*

3. *Пусть существует точка $\bar{x} \in X$ такая, что $f_j(\bar{x}) < 0, 1 \leq j \leq m$ (условие Слейтера). Тогда, если $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$ - ненулевой набор чисел со свойствами a)-c), то $\lambda_0 > 0$.*

Пример. Если $\hat{x}$ - решение задачи на минимум $f_0(x)$ при условии $f_1(\hat{x}) = 0, f_2(\hat{x}) = 0$, где функционалы выпуклы, то для функции Лагранжа $\mathcal{L}(x) = \sum_{j \geq 0} \lambda_j f_j(x)$ справедливы условия

a) минимум функции Лагранжа достигается на решении;
b) $\lambda_j f_j(\hat{x}) = 0, j \geq 1$;
c) $\lambda_j \geq 0, j \geq 0$.

Пусть $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, f_1(x) = x_1, f_2(x) = x_2$, а $f_0(x) = x_1^2 + (x_2 - 1)^2$. Тогда для функции Лагранжа $\mathcal{L}(x) = f_1(x) + f_2(x)$ имеем: точка $\hat{x} = (0, 0)$ - допустимая, условия a)-c) выполнены, но минимум $f_0(x)$ достигается в точке $(0, 1)$.

Задача 19. (распределение с максимальной энтропией; см. тему про достаточное условие глобального минимума в задаче с равенствами и неравенствами). Пусть $\rho : [0, +\infty) \to (0, +\infty), \int_0^\infty \rho(x)dx = 1$ (функция ρ имеет смысл плотности распределения). Энтропией называется величина $S = -\int_0^\infty \rho(x)\ln\rho(x)dx$. Найти функцию ρ, для которой энтропия максимальна при заданном среднем (т.е. задано ограничение $\int_0^\infty x\rho(x)dx = C_1$).

Решение. Напишем задачу на экстремум:

$$\int_0^\infty \rho(x)\ln\rho(x)dx \to \inf, \quad \int_0^\infty \rho(x)dx = 1, \quad \int_0^\infty x\rho(x)dx = C_1$$

Составим функцию Лагранжа с $\lambda_0 = 1$:

$$\mathcal{L} = \int_0^\infty \rho(x)\ln\rho(x)dx + \lambda_1\int_0^\infty \rho(x)dx + \lambda_2\int_0^\infty x\rho(x)dx =$$
$$= \int_0^\infty \left(\rho(x)\ln\rho(x) + \lambda_1\rho(x) + \lambda_2 x\rho(x)\right)dx.$$

Найдем минимум у функции $\mathcal{L}$. Для этого при каждом фиксированном $x \in [0, \infty)$ найдем точку минимума у $f(v) = v\ln v + \lambda_1 v + \lambda_2 xv$. Вычислим производную: $f'(v) = \ln v + 1 + \lambda_1 + \lambda_2 x$. Эта функция строго возрастает по $v; f'(v) = 0$ в точке $\hat\rho(x) = e^{-1-\lambda_1-\lambda_2 x}$. Значит, $\hat\rho(x) = e^{-1-\lambda_1-\lambda_2 x}$ является точкой минимума $v\ln v + \lambda_1 v + \lambda_2 xv$.

Из условий $\int_0^\infty e^{-1-\lambda_1-\lambda_2 x}dx = 1$ и $\int_0^\infty xe^{-1-\lambda_1-\lambda_2 x}dx = C_1$ находим λ_1 и λ_2 :

$$e^{\lambda_1+1} = \frac{1}{\lambda_2}, \quad C_1 e^{\lambda_1+1} = \frac{1}{\lambda_2^2}$$

Докажем, что найденная функция будет точкой минимума в задаче. В самом деле, пусть $\rho(x)$ - допустимая функция. Тогда для любого $x \in [0, \infty)$ получаем

$$\rho(x)\ln\rho(x) + \lambda_1\rho(x) + \lambda_2 x\rho(x) \geq \hat\rho(x)\ln\hat\rho(x) + \lambda_1\hat\rho(x) + \lambda_2 x\hat\rho(x).$$

Интегрируем это неравенство и получаем $\mathcal{L}(\rho) \geq \mathcal{L}(\hat\rho)$, т.е.

$$\int_0^\infty \rho(x)\ln\rho(x)dx + \lambda_1\int_0^\infty \rho(x)dx + \lambda_2\int_0^\infty x\rho(x)dx \geq$$
$$\geq \int_0^\infty \hat\rho(x)\ln\hat\rho(x)dx + \lambda_1\int_0^\infty \hat\rho(x)dx + \lambda_2\int_0^\infty x\hat\rho(x)dx.$$

Воспользуемся ограничениями в задаче и получим, что $\int_0^\infty \rho(x)\ln\rho(x)dx \geq \int_0^\infty \hat\rho(x)\ln\hat\rho(x)dx$.

Теперь докажем, что других точек минимума в задаче нет. Пусть ρ_1 и ρ_2 - две разные точки минимума. Обозначим минимальное значение через m; тогда $\int_0^\infty \rho_1(x)\ln\rho_1(x)dx = \int_0^\infty \rho_2(x)\ln\rho_2(x)dx = m$. Функции ρ_1 и ρ_2 различаются на множестве положительной меры. Заметим, что функция $\rho = (\rho_1 + \rho_2)/2$ также является допустимой. Покажем, что $\int_0^\infty \rho(x)\ln\rho(x)dx < m$.

В самом деле, функция $\varphi(v) = v\ln v$ строго выпукла, т.е. для любых $u \neq w, \lambda \in (0,1)$ выполнено $\varphi((1-\lambda)u + \lambda w) < (1-\lambda)\varphi(u) + \lambda\varphi(w)$. Это верно, так как $\varphi''(v) > 0$ для любого $v > 0$.

Значит, на множестве положительной меры

$$\frac{\rho_1(x) + \rho_2(x)}{2}\ln\left(\frac{\rho_1(x) + \rho_2(x)}{2}\right) < \frac{1}{2}\rho_1(x)\ln\rho_1(x) + \frac{1}{2}\rho_2(x)\ln\rho_2(x),$$

поэтому

$$\int_0^\infty \rho(x)\ln\rho(x)dx < \frac{1}{2}\int_0^\infty \rho_1(x)\ln\rho_1(x)dx + \frac{1}{2}\int_0^\infty \rho_2(x)\ln\rho_2(x)dx = m.$$

Задача 20. (аэродинамическая задача Ньютона). Найти допустимые экстремали в задаче

$$\begin{cases}\int_0^{T_0} \frac{t}{1+u^2} dt \rightarrow \inf \\ x(0)=0, x\left(T_0\right)=\xi \\ \dot{x}=u \\ u \geq 0\end{cases}$$

здесь $T_0>0, \xi>0$ - заданные параметры. (Ответ для $\hat{x}(t)$ записывается в параметрическом виде: $x=x(v), t=t(v)$.) Доказать, что допустимая экстремаль существует и единственна, и что она будет точкой глобального минимума в данной задаче.

Решение.

Составим функцию Лагранжа:

$$\mathcal{L}=\lambda_0 \int_0^{T_0} \frac{t}{1+u^2} d t+\int_0^{T_0} p(t)(\dot{x}-u) d t+\lambda_1 x(0)+\lambda_2\left(x\left(T_0\right)-\xi\right).$$

Необходимые условия локального минимума имеют вид $\lambda_0 \geq 0$ (условие неотрицательности), $\dot{p}=0$ (уравнение Эйлера), $p(0)=\lambda_1, p\left(T_0\right)=-\lambda_2$ (условие трансверсальности),

$$\min _{v \geq 0}\left(\frac{\lambda_0 t}{1+v^2}-p(t) v\right)=\frac{\lambda_0 t}{1+\hat{u}(t)^2}-p(t) \hat{u}(t)$$

(принцип максимума Понтрягина).

Из уравнения Эйлера получаем, что $p(t)=c$. Пусть $\lambda_0=0$. Тогда $\min_{v \geq 0}(-c v)=-c \hat{u}(t)$. Если $c=0$, то $p(t) \equiv 0$; из условия трансверсальности следует, что $\lambda_1=\lambda_2=0$, то есть все множители Лагранжа нулевые. Если $c>0$, то у функции $-c v$ на $[0,+\infty$) точки минимума нет. Если $c<0$, то $\hat{u}(t) \equiv 0$. В силу граничного условия в нуле, $\hat{x}(t) \equiv 0$, что прогиворечиг с условием $x\left(T_0\right)=\xi>0$.

Пусть $\lambda_0>0$. Без ограничения общности можно взять $\lambda_0=1$. Также обозначим $q=-c$. Получаем

$$\min _{v \geq 0}\left(\frac{t}{1+v^2}+q v\right)=\frac{t}{1+\hat{u}(t)^2}+q \hat{u}(t).$$

Для фиксированного $t \in\left[0, T_0\right]$ положим $f(v)=\frac{t}{1+v^2}+q v$. Если $q \leq 0$, то минимум функции f не достигается, так как она строго убывает. Значит, остается случай $q>0$. Найдем участки монотонности функции f на $\mathbb{R}_{+}$. Имеем: $f^{\prime}(v)=-\frac{2 t v}{\left(1+v^2\right)^2}+q$. Условие $f^{\prime}(v)=0$ эквивалентно уравнению

$$q\left(1+v^2\right)^2-2 t v=0. \tag{1}$$

В левой части стоит строго выпуклая функция, поэтому у нее количество нулей не больше 2. Также заметим, что максимальный корень строго возрастает по t. В самом деле, если $t_1<t_2$, $q\left(1+u_1^2\right)^2-2 t_1 u_1=0$, то $q\left(1+u_1^2\right)^2-2 t_2 u_1<0$. Кроме того, максимальный корень стремится к $+\infty$ при $t \rightarrow+\infty$.

Игак, либо f строго возрастаег (тогда 0 гочка минимума), либо сначала возрастаег, погом убывает и затем снова возрастает. Во втором случае минимум либо при $v=0$, либо в точке u_*, являющейся максимальным корнем уравнения (1). Сравним значения $f(0)$ и $f\left(u_*\right)$. Запишем неравенство $f(0) \leq f\left(u_*\right)$, получим $\frac{t u_*}{1+u_*^2} \leq q$; подставим из (1) $t=\frac{q\left(1+u_*^2\right)^2}{2 u_*}$ и получим после вычислений $u_* \leq 1$.

Итак, если f строго возрастает или $u_*<1$, то минимум достигается в 0 ; если $u_*>1$, то минимум достигается в u_*. Заметим, что $u_*=1$ при $t=2 q$. Так как u_* строго возрастает по t, то при $t<2 q$ минимум функции f достигается в 0 , а при $t>2 q$ в u_*. Итак,

$$\hat{u}(t)= \begin{cases}0, & t<2 q, \\ u_*(t), & t>2 q.\end{cases}$$

В силу условия $x(0)=0$, при $0 \leq t \leq 2 q$ получаем $\hat{x}(t)=0$. При $t \geq 2 q$ функцию $x(t)$ запишем параметрически. Выражая t через v из (2), получаем $t(v)=\frac{q}{2}\left(\frac{1}{v}+2 v+v^3\right)$. Далее, $\frac{d x}{d v}=\frac{d x}{d t} \cdot \frac{d t}{d v}=v \cdot \frac{q}{2}\left(-\frac{1}{v^2}+2+3 v^2\right)=\frac{q}{2}\left(-\frac{1}{v}+2 v+3 v^3\right)$. Значит, $x(v)=\frac{q}{2}\left(-\ln v+v^2+\frac{3}{4} v^4\right)+C$; константа C находится из условия $x(1)=0$ (здесь мы вос пользовались тем, что x непрерывна по t и $u_*(2 q)=1$), т.е. $x(v)=\frac{q}{2}\left(-\ln v+v^2+\frac{3}{4} v^4-\frac{7}{4}\right)$. Игак,

$$t(v)=\frac{q}{2}\left(\frac{1}{v}+2 v+v^3\right), \quad x(v)=\frac{q}{2}\left(-\ln v+v^2+\frac{3}{4} v^4-\frac{7}{4}\right).$$

Теперь покажем, что для любых $T_0>0, \xi>0$ найдется $q>0$ такое, что $x\left(T_0\right)=\xi$. Пусть $a=\frac{\xi}{T_0}$. Возьмем $q=2$. Покажем, что если $x_0(t)=0$ при $t \leq 2 q=4$, а при $t>4$ задано парамегрически :

$$t(v)=\frac{1}{v}+2 v+v^3, \quad x_0(v)=-\ln v+v^2+\frac{3}{4} v^4-\frac{7}{4},$$

то найдется такое $t_*>4$, что $x_0\left(t_*\right)=a t_*$. Затем определим q из равенства $\frac{q t_*}{2}=T_0$. Мы уже говорили, что $\dot{x}_0(t)$ строго возрастает при $t>4$ и $\dot{x}_0(t) \underset{t \rightarrow \infty}{\rightarrow}+\infty$. Значит, $x_0(t)-$ at $\underset{t \rightarrow+\infty}{\rightarrow}+\infty$. Кроме того, $x_0(4)-4 a<0$. Поэтому уравнение $x_0(t)=a t$ имеет корень на $(4,+\infty)$. Единственность корня следует из строгой выпуклости x_0 на $[4,+\infty)$.

Теперь покажем, что найденная экстремаль является точкой минимума. Достаточно показать, что она является точкой минимума функции $\mathcal{L}$. Из условий трансверсальности следует, что $\lambda_1 = -q, \lambda_2 = q$. Имеем: $\mathcal{L}(x,u) = \mathcal{L}_1(x) + \mathcal{L}_2(u)$, где

$$\mathcal{L}_1(x) = -\int_0^{T_0} q\dot{x}dt - qx(0) + q\left(x\left(T_0\right) - \xi\right) \equiv -q\xi T_0, \quad \mathcal{L}_2(u) = \int_0^{T_0} \left(\frac{t}{1+u^2} + qu\right) dt.$$

Из принципа максимума Понтрягина следует, что $\mathcal{L}_2(u) \geq \mathcal{L}_2(\hat{u})$. Значит, $\mathcal{L}(x,u) \geq \mathcal{L}(\hat{x},\hat{u})$ для любой допустимой пары (x,u).

Задача 21. (из лекций) Сделав замену $\dot{x} = u$, вывести необходимое условие сильного минимума в простейшей задаче вариационного исчисления (условие Вейерштрасса и непрерывность $L_{\dot{x}}(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t))\Big)$ из принципа максимума Понтрягина.

Решение.

Определение 1. Функция Вейерштрасса определяется по формуле:

$$\mathcal{E}(t, x, u, v) = L(t, x, v) - L(t, x, u) - L_{\dot{x}}(t, x, u)(v - u).$$

Определение 2. Пусть $\widehat{x} \in PC^1([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ — допустимая экстремаль (т.е. решение уравнения Эйлера–Лагранжа). Скажем, что выполнено условие Вейерштрасса для $\widehat{x}$, если $\mathcal{E}(t, \widehat{x}(t), \dot{\widehat{x}}(t), v) \geq 0$ для любого $t \in [t_0, t_1], v \in \mathbb{R}^n$.

Задача записывается в виде

$$\int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), u(t)) dt \to \inf, \quad x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1, \quad \dot{x} = u.$$

Функция Лагранжа имеет вид

$$\mathcal{L} = \int_{t_0}^{t_1} \left(\lambda_0 L(t, x(t), u(t)) + p(t)(\dot{x}(t) - u(t)) \right) dt + \lambda_1 x(t_0) + \lambda_2 x(t_1).$$

Условие неотрицательности: $\lambda_0 \geq 0$.

Уравнение Эйлера: $-\dot{p}(t) + \lambda_0 L_x(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t)) = 0$.

Условие трансверсальности: $p(t_0) = \lambda_1, p(t_1) = -\lambda_2$.

Принцип максимума Понтрягина: $\min_{v \in \mathbb{R}} (\lambda_0 L(t, \hat{x}(t), v) - p(t)v) = \lambda_0 L(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t)) - p(t)\hat{u}(t)$.

Так как L гладкая и минимум берется по $v \in \mathbb{R}$, то получаем $\lambda_0 L_{\dot{x}}(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t)) - p(t) = 0$.

Если $\lambda_0 = 0$, то отсюда $p = 0$; в силу условий трансверсальности, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, то есть все множители Лагранжа нулевые.

Итак, $\lambda_0 > 0$. Можно считать, что $\lambda_0 = 1$. Так как $\dot{\hat{x}} = \hat{u}$, то $L_{\dot{x}}(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)) = p(t)$. В теореме о необходимом условии сильного минимума в задаче оптимального управления функция p кусочно непрерывно-дифференцируемая и, значит, непрерывная. Отсюда получаем непрерывность $t \mapsto L_{\dot{x}}(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t))$.

Еще раз запишем принцип максимума Понтрягина: для любого $v \in \mathbb{R}$

$$L(t, \hat{x}(t), v) - L_{\dot{x}}(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t))v \geq L(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t)) - L_{\dot{x}}(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t))\hat{u}(t)$$

Подставим $\hat{u} = \dot{\hat{x}}$, перенесем все в левую часть и получим условие Вейерштрасса.

Задача 22. Показать, что если L явно не зависит от x (т.е. $L = L(t, \dot{x}(t))$), то условие Вейерштрасса будет достаточным условием глобального минимума.

Решение. В силу уравнения Эйлера, $L_{\dot{x}}(t, \dot{\hat{x}}(t)) \equiv c$.

Пусть x - произвольная допустимая функция. В силу условия Вейерштрасса

$$\int_{t_0}^{t_1} \mathcal{E}(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t), \dot{x}(t))dt \geq 0$$

откуда

$$\int_{t_0}^{t_1} \Big(L(t, \dot{x}(t)) - L(t, \dot{\hat{x}}(t)) - L_{\dot{x}}(t, \dot{\hat{x}}(t))(\dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t)) \Big) \, dt \geq 0$$

Значит,

$$\int_{t_0}^{t_1} L(t, \dot{x}(t))dt \geq \int_{t_0}^{t_1} L(t, \dot{\hat{x}}(t))dt + \int_{t_0}^{t_1} c(\dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t))dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} L(t, \dot{\hat{x}}(t))dt + cx|_{t_0}^{t_1} - c\hat{x}|_{t_0}^{t_1} = \int_{t_0}^{t_1} L(t, \dot{\hat{x}}(t))dt$$

так как $x(t_0) = \hat{x}(t_0)$ и $x(t_1) = \hat{x}(t_1)$.

Задача 23.

Определение 3. Скажем, что выполнено условие Эйлера, если $\widehat{x}$ – экстремаль, т.е. решение уровнения Эйлера–Лагранжа.

Определение 4. Скажем, что выполнено условие Лежандра, если $\widehat{L}_{\dot{x}\dot{x}} \geq 0 \; \forall t \in [-T_0, T_0]$.

Определение 5. Скажем, что выполнено усиленное условие Лежандра, если $\widehat{L}_{\dot{x}\dot{x}} > 0 \; \forall t \in [-T_0, T_0]$.

Определение 6. Скажем, что выполнено условие Якоби, если справедливо усиленное условие Лежандра, а решение уравнения Якоби

$$-\frac{d}{dt}\left(\widehat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t)\dot{h} + \widehat{L}_{\dot{x}x}(t)h\right) + \left(\widehat{L}_{\dot{x}x}(t)\dot{h} + \widehat{L}_{xx}(t)h\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\widehat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t)\dot{h}\right) = \left(\widehat{L}_{xx}(t) - \frac{d}{dt}\widehat{L}_{\dot{x}x}(t)\right)h \tag{2}$$

не обращается в ноль на интервале $(-T_0, T_0)$ при начальных условиях: $h\left(-T_0\right) = 0, \quad \dot{h}\left(-T_0\right) = 1$.

Определение 7. Скажем, что выполнено усиленное условие Якоби, если справедливо усиленное условие Лежандра, а решение уравнения (2) не обращается в ноль на полусегменте $(-T_0, T_0]$ при начальных условиях: $h(-T_0) = 0, \; \dot{h}(-T_0) = 1$.

Определение 8. Скажем, что выполнено усиленное условие Вейерштрасса, если функиия $\dot{x} \mapsto L(t, x(t), \dot{x})$ выпукла в 'C'-окрестности экстремали $\widehat{x}$ при любом $t \in [-T_0, T_0]$, т.е. для любого $t \in [-T_0, T_0]$ u $x(t) \in \mathcal{O}(\widehat{x}, \varepsilon)$ (с некоторым $\varepsilon > 0$) функиия $\dot{x} \mapsto L(t, x(t), \dot{x})$ выпукла.

Теорема 2. *Если выполнены усиленное условие Якоби и усиленное условие Вейерштрасса, то экстремаль доставляет сильный максимум.*

Рассмотрим задачу $\int_0^\pi \left(\dot{x}^2 - x^2 - x^4\right) dt \to \inf$, $x(0) = x(\pi) = 0$. Показать, что для $\hat{x} = 0$ выполнено усиленное условие Лежандра, условие Якоби, при этом $\hat{x} = 0$ не является точкой слабого минимума.

Решение. Имеем $\hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t) = 2, \hat{L}_{\dot{x}x} = 0, \hat{L}_{xx} = -2$. Значит, выполнено усиленное условие Лежандра. Уравнение Якоби имеет вид $\ddot{h} + h = 0$; его нетривиальное решение, зануляющееся при $t = 0$, имеет вид $h(t) = a \sin t$, $a \neq 0$. Тогда $h(t) \neq 0$ при $t \in (0, \pi)$, но $h(\pi) = 0$. Значит, выполнено условие Якоби, но не усиленное. Возьмем $x(t) = \varepsilon \sin t$. Тогда

$$\int_0^\pi \left(\dot{x}^2 - x^2 - x^4\right) dt = \varepsilon^2 \int_0^\pi \left(\cos^2 t - \sin^2 t\right) dt - \varepsilon^4 \int_0^\pi \sin^4 t dt =$$
$$= \varepsilon^2 \int_0^\pi \cos 2t dt - \varepsilon^4 \int_0^\pi \sin^4 t dt = -\varepsilon^4 \int_0^\pi \sin^4 t dt < 0.$$

Так как $\varepsilon > 0$ может быть сколь угодно мало, то слабого минимума нет.

Задача 24.

$$F(x)=\int_0^{3/2}\left(\dot{x}^3+2x\right)dt\to\inf, x(0)=0, x(3/2)=1$$

.

Доказать, что выполнено (неусиленное) условие Лежандра, усиленное условие Якоби, а допустимая экстремаль не дает слабый минимум.

Примечание. Усиленное условие Якоби предполагает 2й порядок этого линейного уравнения. В моем файле TU усиленное условие Якоби трактовалось при выполнении усиленного условия Лежандра, которое обеспечивает 2й порядок уравнения Якоби.

Решение.

Уравнение экстремалей $f_x=\frac{d}{dt}f_{\dot{x}}$ для $f=\dot{x}^3+2x$ имеет вид $2=6\dot{x}\ddot{x}$, т.е. $3y\dot{y}=1$ для $y=\dot{x}$. Имеем $3ydy=dt$, т.е. $\frac{3}{2}y^2=t+C$. При $C=0$ имеем $\dot{x}(t)=\left(\frac{2}{3}t\right)^{1/2}$, что при условии $x(0)=0$ дает

$$\hat{x}(t)=\left(\frac{2}{3}\right)^{1/2}t^{3/2}\cdot\frac{2}{3}=\left(\frac{2}{3}t\right)^{3/2}\Longrightarrow\hat{x}\left(\frac{3}{2}\right)=1$$

т.е. допустимую экстремаль $\hat{x}$. Имеем

$$F(\hat{x}+h)-F(\hat{x})=\int_0^{3/2}\left\{\left([\dot{\hat{x}}+\dot{h}]^3+2[\hat{x}+h]\right)-\left([\dot{\hat{x}}]^3+2[\hat{x}]\right)\right\}dt=$$
$$\int_0^{3/2}\left\{3(\dot{\hat{x}})^2\dot{h}+3\dot{\hat{x}}(\dot{h})^2+(\dot{h})^3+2h\right\}dt=\int_0^{3/2}\left\{3\dot{\hat{x}}(\dot{h})^2+(\dot{h})^3\right\}dt$$

Последнее равенство верно, т.к. на экстремали $\hat{x}$ линейная по h часть разности $F(\hat{x}+h)-F(\hat{x})$ равна нулю. Таким образом,

$$F(\hat{x}+h)-F(\hat{x})=\int_0^{3/2}\left\{3\dot{\hat{x}}(\dot{h})^2+(\dot{h})^3\right\}dt=\int_0^{3/2}\left\{3\left(\frac{2t}{3}\right)^{1/2}(\dot{h})^2+(\dot{h})^3\right\}dt$$

Заметим, что усиленное условие Лежандра $\hat{f}_{\dot{x}\dot{x}}(t)>0$ при $t\in[0,3/2]$ нарушается при $t=0$. Учитывая это есть резон быстро уйти от нуля, взяв функцию h кусочно-линейной, такую, что $h(0)=h(3/2)=0$, а $\dot{h}=-\varepsilon<0$ при $0<t<\delta\ll 1$ и $\dot{h}=a>0$ при $0<t<\delta$. Тогда $h(t)=a(t-3/2)$ при $t>\delta$ и $a\approx\frac{2}{3}\delta$. Отсюда получаем

$$F(\hat{x}+h)-F(\hat{x})\approx\int_0^{\delta}\sqrt{6}t^{1/2}\varepsilon^2dt-\varepsilon^3\delta+\int_0^{3/2}\sqrt{6}t^{1/2}a^2dt+\frac{3}{2}a^3=$$
$$\varepsilon^3\delta\left\{\frac{2}{3}\sqrt{6}\frac{\delta^{1/2}}{\varepsilon}+\left(\frac{3}{2}\right)^{3/2}(2/3)^2\frac{\delta}{\varepsilon}+\frac{3}{2}(2/3)^3\delta^2\right\}-\varepsilon^3\delta<0\quad\text{при}\quad\frac{\delta^{1/2}}{\varepsilon}\ll 1.$$

Задача 25. $F(x)=\int_0^1\left(\dot{x}^2-x\dot{x}^3\right)dt\to extr, x(0)=x(1)=0$. Показать, что для экстремали $\hat{x}=0$ выполнено усиленное условие Лежандра, усиленное условие Якоби, условие Вейерштрасса (не усиленное), и $\hat{x}$ не является точкой сильного минимума.

Решение.

Имеем $\hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t)=2, \hat{L}_{\dot{x}x}(t)=0, \hat{L}_{xx}(t)=0$. Значит, выполнено усиленное условие Лежандра. Уравнение Якоби имеет вид $\ddot{h}=0$. Если h - нетривиальное решение и $h(0)=0$, то $h(t)=at$, где $a\neq 0$. Эта функция зануляется только при $t=0$. Значит, выполнено усиленное условие Якоби.

Далее, $\mathcal{E}(t,\hat{x}(t),\dot{\hat{x}}(t),v)=v^2\geq 0$. Значит, выполнено условие Вейерштрасса.

Теперь покажем, что $\hat{x}$ не является точкой сильного минимума. Пусть $R>0, 0<\delta<\frac{1}{2}$. Положим

$$\dot{h}(t)=\begin{cases} R, & 0\leq t<\delta\\ -\frac{R\delta}{1-\delta}, & \delta<t\leq 1\end{cases}$$

$h(t)=\int_0^t\dot{h}(s)ds$. Тогда

$$h(t)=\begin{cases} Rt, & 0\leq t\leq\delta\\ \frac{R\delta}{1-\delta}(1-t), & \delta\leq t\leq 1\end{cases}$$

Получаем

$$\begin{aligned}\int_0^1\left(\dot{h}^2-h\dot{h}^3\right)dt&=\int_0^\delta\left(R^2-R^4t\right)dt+\\ &+\int_\delta^1\left(\frac{R^2\delta^2}{(1-\delta)^2}-\frac{R^4\delta^4}{(1-\delta)^4}(1-t)\right)dt\leq\\ &\leq R^2\delta-\frac{R^4\delta^2}{2}+C_1R^2\delta^2+C_2R^4\delta^4,\end{aligned}$$

где C_1,C_2 - положительные константы. Сделав замену $R\delta=\varepsilon$, получим

$$\int_0^1\left(\dot{h}^2-h\dot{h}^3\right)dt\leq R\varepsilon-\frac{R^2\varepsilon^2}{2}+C_1\varepsilon^2+C_2\varepsilon^4$$

Если $R=\frac{1}{\varepsilon^2}$, то при малых ε получим отрицательное число. При этом $\|h\|_C=\varepsilon$; это число можно выбрать сколь угодно малым, так что сильного минимума нет.

Задача 26. Доказать, используя поле экстремалей, что допустимая экстремаль в задаче

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\sqrt{1+\dot{x}^2}}{x} dt \rightarrow \operatorname{extr}, \quad x(t_0)=x_0, \quad x(t_1)=x_1, \quad x>0$$

является точкой глобального минимума (здесь $x_0>0, x_1>0$).

Решение. Напомним, что геодезические на плоскости Лобачевского - это дуги окружностей с центром на оси t.

Пусть $\hat{x}(t)=\sqrt{c^2-(t-a)^2}, t_*<t_0, c^2-(t_*-a)^2>0, x_*=\sqrt{c^2-(t_*-a)^2}$. Определим семейство экстремалей (решений уравнения Эйлера) $x(t, \alpha)$ таких, что $x(t_*, \alpha)=x_*, \dot{x}(t_*, \alpha)=\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$.

Сначала заметим, что для любого $\alpha \in \mathbb{R}$ геодезическая $x(t_*, \alpha)$ существует, при этом абсцисса центра окружности и ее радиус гладко зависят от α. В самом деле, центр окружности получается следующим образом: проводим к прямой $x=x_*+\alpha(t-t_*)$ перпендикуляр и находим его точку пересечения с осью t.

Если $\tau>t_*, \xi>0$, то существует единственная геодезическая, проходящая через (t_*, x_*) и (τ, ξ), при этом абсцисса центра окружности и радиус гладко зависит от (τ, ξ) (а значит, и α). Действительно, центр окружности получается следующим образом: проводим к отрезку с концами в (t_*, x_*) и (τ, ξ) серединный перпендикуляр и находим его точку пересечения с осью t.

Осталось заметить, что $L_{\dot{x}\dot{x}}>0$, поэтому L выпукла по $\dot{x}$. Значит, по достаточному условию, экстремаль будет точкой глобального минимума.

Задача 27. Доказать, используя поле экстремалей, что допустимая экстремаль в задаче

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\sqrt{1+\dot{x}^2}}{\sqrt{x}} dt \rightarrow \operatorname{extr}, \quad x\left(t_0\right)=x_0, \quad x\left(t_1\right)=x_1, \quad x>0$$

является точкой глобального минимума (здесь $x_0>0, x_1>0$).

Решение. . Мы уже вычисляли экстремали в параметрическом виде:

$$x=c(1-\cos \tau), \quad t-a=c(\tau-\sin \tau)$$

где $a \in \mathbb{R}, c>0, \tau \in[0,2 \pi]$. Будем их обозначать $x(t, a, c)$.

Наша цель доказать: допустимая экстремаль будет точкой глобального минимума.

Сначала покажем, что $\dot{x}(t, a, c)$ строго убывает, при этом принимает все вещественные значения. В самом деле, $t(\tau)$ строго возрастает; $\frac{dx}{dt}=\frac{dx}{d\tau} \cdot \frac{d\tau}{dt}=\frac{\sin \tau}{1-\cos \tau}$; при $\tau \rightarrow+0$ предел равен $+\infty$, при $\tau \rightarrow 2 \pi-0$ предел $-\infty$. Производная по τ от $\frac{\sin \tau}{1-\cos \tau}$ равна $-\frac{1}{1-\cos \tau}<0$, так что $\ddot{x}<0$.

Задача 28. Рассмотрим задачу

$$\int_{-T_0}^{T_0} x\sqrt{\dot{x}^2+1}dt \to \min, x\left(T_0\right)=x\left(-T_0\right)=\xi.$$

1) Выписать уравнение Якоби, подобрать одно из его решений, затем найти общее решение.

2) Пусть допустимых экстремалей две. Доказать, что одна из них является точкой сильного минимума, а вторая не является точкой слабого минимума.

Решение. У этой задачи мы уже нашли экстремали: $\hat{x}(t)=\frac{1}{c}\mathrm{ch}ct$, где $c>0$ находится из условия с $cT_0=c\xi$. Напомним, что существует $\xi_*>0$ такое, что при $\xi<\xi_*$ решений нет, при $\xi=\xi_*$ есть ровно одно решение, при $\xi>\xi_*$ есть ровно два решения. При этом в случае $\xi=\xi_*$ число $c=c_*$ удовлетворяет равенству

$$\operatorname{ch} c_* T_0-c_* T_0 \cdot \operatorname{sh} c_* T_0=0$$

В случае $\xi>\xi_*$ выполнено $\operatorname{ch} c_* T_0<\xi T_0$, поэтому одно из решений уравнения $\operatorname{ch} cT_0=c\xi$ будет больше c_*, а второе меньше.

Выпишем уравнение Якоби.

Имеем: $\dot{\hat{x}}(t)=\operatorname{sh} ct, \sqrt{1+\dot{\hat{x}}^2(t)}=\operatorname{ch} ct$. Отсюда

$$\hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t)=\frac{1}{c}\cdot\frac{1}{\operatorname{ch}^2 ct}, \quad \hat{L}_{x\dot{x}}(t)=\frac{\operatorname{sh} ct}{\operatorname{ch} ct}, \quad \hat{L}_{xx}(t)=0.$$

Значит, уравнение Якоби имеет вид

$$-\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{c}\cdot\frac{1}{\operatorname{ch}^2 ct}\dot{h}+\frac{\operatorname{sh} ct}{\operatorname{ch} ct}h\right)+\frac{\operatorname{sh} ct}{\operatorname{ch} ct}\dot{h}=0$$

После преобразований получаем

$$\ddot{h}-2c\frac{\operatorname{sh} ct}{\operatorname{ch} ct}\dot{h}+c^2h=0.$$

Одно из решений угадывается: $h_0(t)=\mathrm{sh}ct$.

Общее решение найдем через определитель Вронского. Напомним, что если h, w - два решения уравнения, то определитель Вронского - это

$$W=W(h,w)=\left|\begin{array}{cc} h & w \\ \dot{h} & \dot{w} \end{array}\right|=h\dot{w}-w\dot{h}.$$

Тогда $\dot{W}=h\ddot{w}-w\ddot{h}=2c\frac{\mathrm{sh}ct}{\mathrm{ch}ct}W$ (мы воспользовались тем, что h и $w-$ решения дифференциального уравнения). Решим это дифференциальное уравнение на W :

$$\dot{W}\cdot\operatorname{ch} ct-2(\operatorname{ch} ct)'W=0$$

поделив на ch^3ct, получим $\left(W\mathrm{ch}^{-2}ct\right)'=0$, откуда $W=a\mathrm{ch}^2ct$, где $a\in\mathbb{R}$.

Теперь найдем h через $W\left(h_0,h\right)$:

$$\dot{h}\operatorname{sh} ct-h(\operatorname{sh} ct)'=a\operatorname{ch}^2 ct$$

или

$$(h/\operatorname{sh} ct)'=a\frac{\operatorname{ch}^2 ct}{\operatorname{sh}^2 ct}$$

Если $h=z\operatorname{sh} ct$, то $\dot{z}=a\frac{\mathrm{ch}^2ct}{\mathrm{sh}^2ct}$. Заметим, что $(\operatorname{ch} s/\operatorname{sh} s)'=1-(\operatorname{ch} s/\operatorname{sh} s)^2$. Отсюда $z=\frac{a}{c}\left(ct-\frac{\mathrm{ch}ct}{\mathrm{sh}ct}\right)+b$, или $h=\frac{a}{c}(ct\mathrm{sh}ct-\mathrm{ch}ct)+b\operatorname{sh} ct$.

Итак, общее решение уравнения Якоби является линейной комбинацией

$$h_0(t)=\operatorname{sh} ct, \quad h_1=\operatorname{ch} ct-ct\operatorname{sh} ct.$$

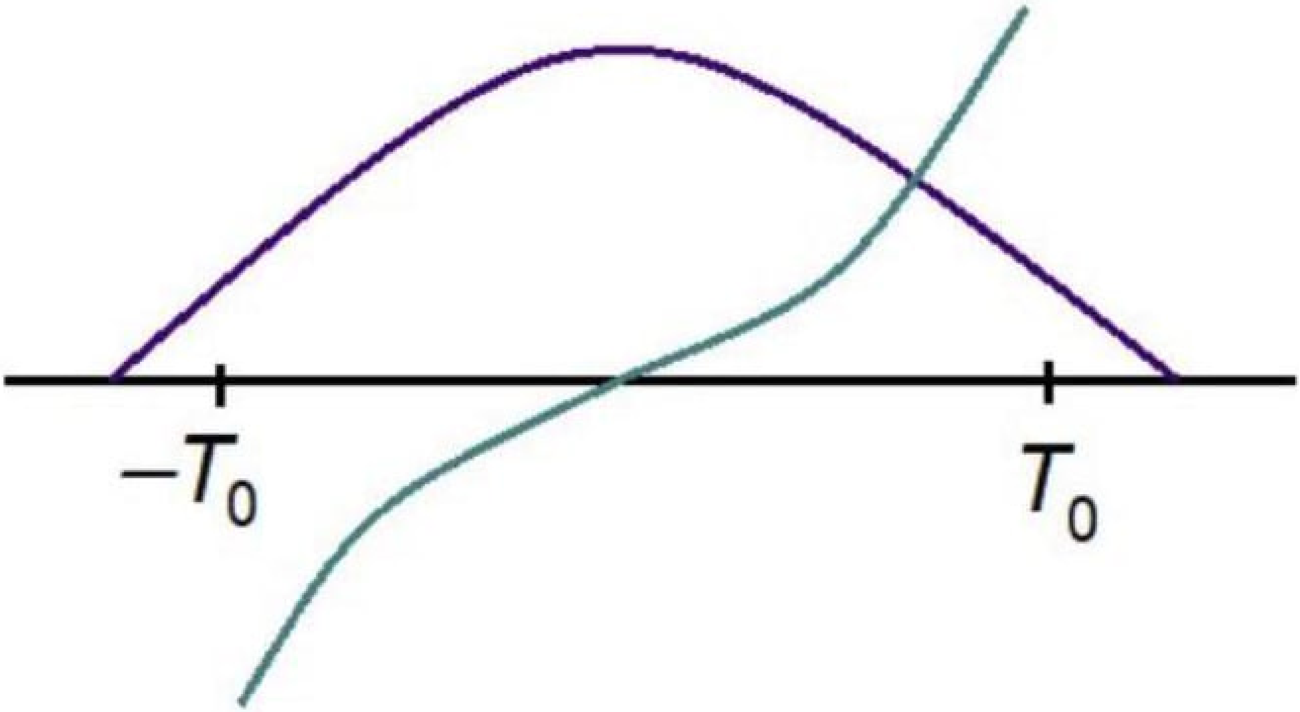
Функция h_0 нечетная и строго возрастающая, функция h_1 четная, $h_1(0)>0, h_1$ строго возрастает при $t\leq 0$ и строго убывает при $t\geq 0$.

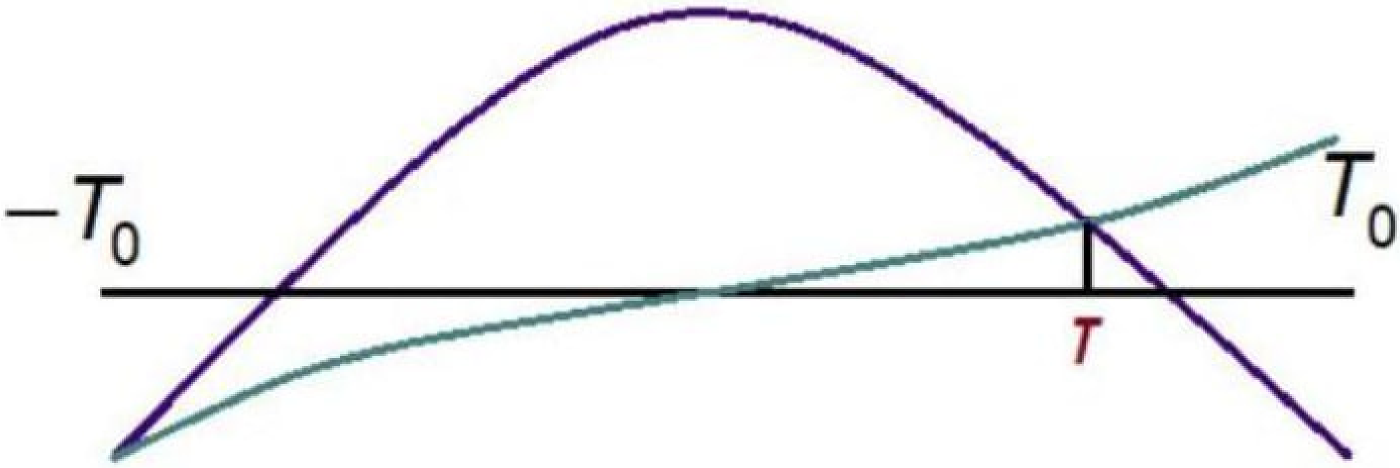
Напомним, что для одного из решений уравнения $\operatorname{ch} cT_0=c\xi$ выполнено $c_1<c_*$, а для другого выполнено $c_2>c_*$. Значит, при $c=c_1$ функция h_1 будет строго положительной на $[-T_0,T_0]$, а при $c=c_2$ выполнено $h_1\left(-T_0\right)<0$.

Пусть $c=c_1$. Докажем, что любая нетривиальная линейная комбинация h_0 и h_1 имеет не более одного нуля на $[-T_0,T_0]$. Для αh_0 и αh_1 это понятно. Учитывая четность и нечетность, получаем: достаточно доказать, что при $\alpha>0$ уравнение $h_1=\alpha h_0$ имеет не более одного корня на $[-T_0,T_0]$. В самом деле, $h_1(t)>0, h_0(t)\leq 0$ при $t\in[-T_0,0]$. На отрезке $[0,T_0]$ функция h_0 строго возрастает, а h_1 строго убывает. Значит, количество корней не более одного.

Таким образом, при $c=c_1$ выполнено усиленное условие Якоби.

Пусть $c=c_2$. Покажем, что условие Якоби не выполнено. Пусть $h=h_1-\alpha h_0, h\left(-T_0\right)=0$. Тогда $\alpha>0$. Значит, $h(0)>0, h\left(T_0\right)<0$. По теореме о промежуточных значениях, $h(\tau)=0$ для некоторого $\tau\in(0,T_0)$.





Осталось заметить, что при $x > 0$ будет выполнено $L_{\dot{x}\dot{x}} = \frac{x}{(1+\dot{x}^2)^{3/2}} > 0$. Значит, выполнено усиленное условие Лежандра и усиленное условие Вейерштрасса. Поэтому в первом случае будет сильный минимум, а во втором не будет слабого минимума.