Всеволод Заостровский, 409 группа

Отчёт по задаче "Решение систем обыкновенных дифференциальных уравнений методами Рунге–Кутта".

Постановка задачи. Пусть дана задача Коши для системы m обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$y' = f(x, y), \qquad x_0 \leq x \leq x_0 + X. \tag{1}$$

которая имеет на заданном отрезке $[x_0, x_0 + X]$ единственное решение. Требуется найти приближенное решение этой задачи с заданной точностью при помощи явных методов Рунге–Кутта.

При решении указанной задачи применяются различные способы оценки погрешности приближенного решения, также различные способы автоматического выбора шага интегрирования. В данном случае, требуется реализовать схему:

$$\begin{aligned}
&y_1 = y_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_4 + k_5),\\
&k_1 = hf(x_0, y_0),\\
&k_2 = hf\left(x_0 + \frac{1}{3}h, y_0 + \frac{1}{3}k_1\right),\\
&k_3 = hf\left(x_0 + \frac{1}{3}h, y_0 + \frac{1}{6}k_1 + \frac{1}{6}k_2\right),\\
&k_4 = hf\left(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{8}k_1 + \frac{3}{8}k_3\right),\\
&k_5 = hf\left(x_0 + h, y_0 + \frac{1}{2}k_1 - \frac{3}{2}k_3 + 2k_4\right).
\end{aligned}$$

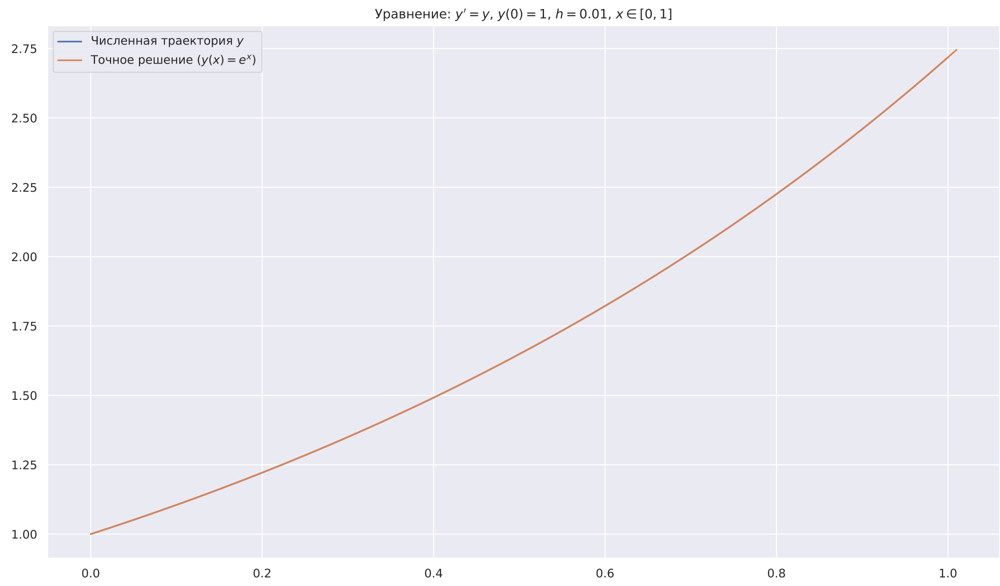

Рис. 1: Результаты теста 1

По условию задания,

$$E = \frac{1}{30}(2k_1 - 9k_3 + 8k_4 - k_5)$$

Решение. С реализацией кода можно ознакомиться в репозитории.

Было проделано две серии тестов: часть из них была визуализирована с помощью языка Python (см. графики в файле) и направлена на уточнение того, что схема даёт разумный ответ. Также была проверена точность на полиномах 4 степени и показано, что уже на полиномах 5 степени схема не точна (см. Code/stc/t4.c и Code/stc/t5.c).

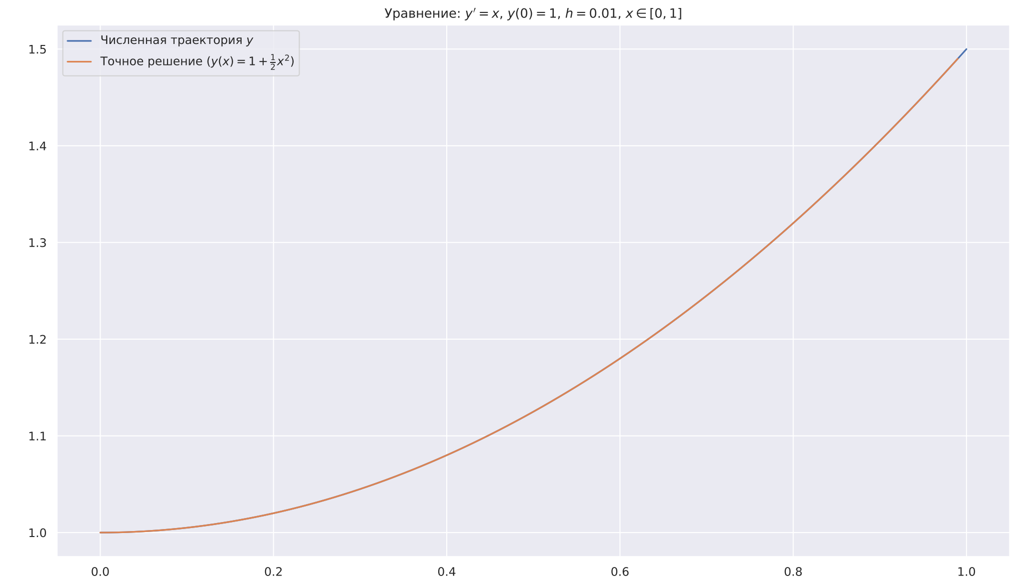

Рис. 2: Результаты теста 2

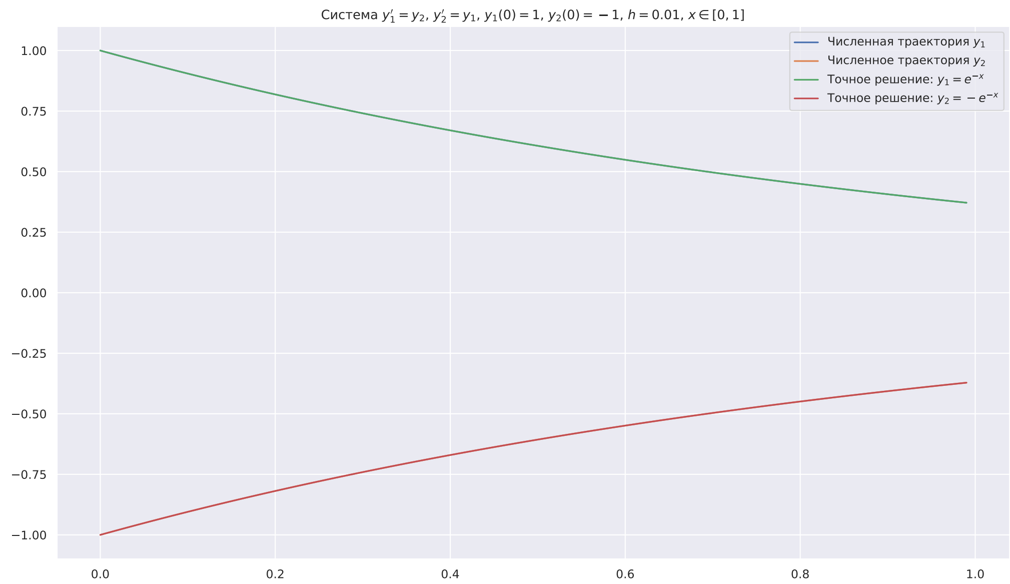

Рис. 3: Результаты теста 3

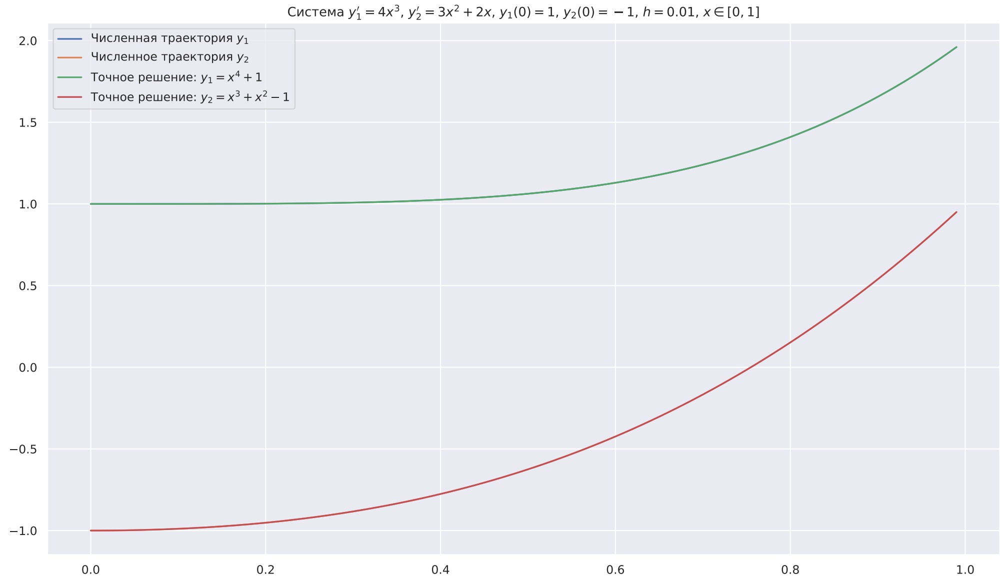

Рис. 4: Результаты теста 4

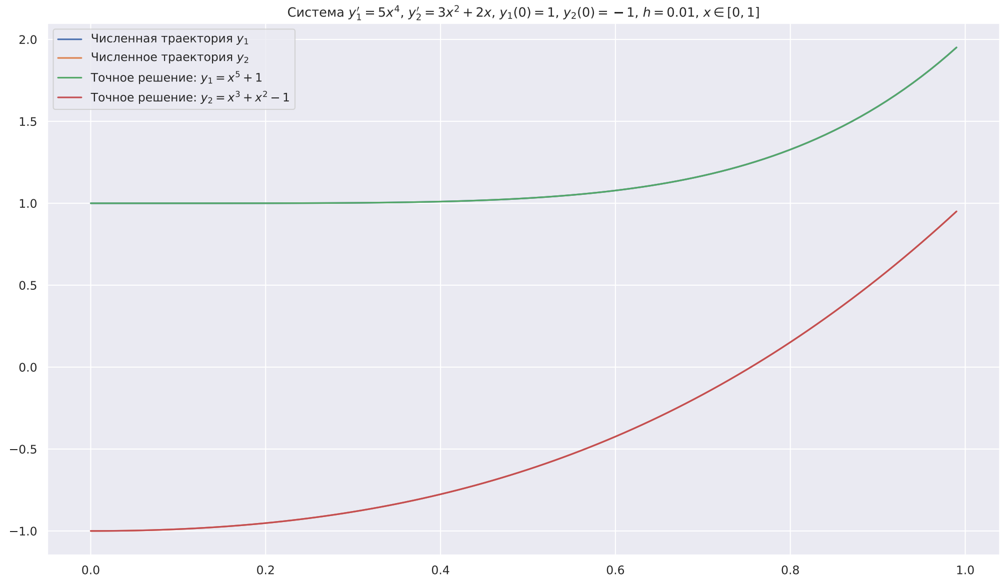

Рис. 5: Результаты теста 5