Всеволод Заостровский, 409 группа

Отчёт по задаче "Численное решение дифференциальных уравнений с частными производными. Нявная схема для уравнения теплопроводности".

1 Постановка задачи.

Необходимо решить уравнение:

$$u_t(t,x) = u_{xx}(t,x) - p(x)u(t,x) + f(t,x). \tag{1}$$

В моём варианте, краевые условия:

$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \quad u(x,0) = u_0(x). \tag{2}$$

2 Дискретизация дифференциального уравнения.

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = \frac{u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1}}{h^2} - p(x_n)u_m^{n+1} + f(t_{n+1}, x_n), \tag{3}$$

$$m = 1 \dots M-1, \tag{4}$$

$$n = 1 \dots N-1. \tag{5}$$

$$\tag{6}$$

В моём варианте, краевые условия:

$$\forall n, m: \quad u_0^n = 0, \quad u_1^n = 0, \quad u_m^0 = u_0(x_m). \tag{7}$$

Отсюда имеем:

$$-\frac{u_{m+1}^{n+1}}{h^2} + u_m^{n+1}(\frac{1}{\tau} + \frac{2}{h^2} + p(x_n)) - \frac{u_{m-1}^{n+1}}{h^2} = f(t_m, x_n) + \frac{u_m^n}{\tau}.$$

Таким образом, зная вектор $\{u_m^n\}_{m=1,...N-1}$ для нахождения вектора $\{u_m^{n+1}\}_{m=1,...M-1}$ необходимо решить систему:

$$F = \begin{pmatrix} \frac{1}{\tau} + \frac{2}{h^2} + p(x_n) & -\frac{1}{h^2} & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{1}{h^2} & \frac{1}{\tau} + \frac{2}{h^2} + p(x_n) & -\frac{1}{h^2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 - \frac{1}{h^2} & \frac{1}{\tau} + \frac{2}{h^2} + p(x_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^{n+1} \\ u_2^{n+1} \\ \dots \\ u_{M-2}^{n+1} \\ u_{M-1}^{n+1} \end{pmatrix},$$

где

$$F = \begin{pmatrix} f(t_1, x_n) + u_1^n \\ f(t_2, x_n) + u_2^n \\ \dots \\ f(t_{M-2}, x_n) + u_{M-2}^n \\ f(t_{M-1}, x_n) + u_{M-1}^n \end{pmatrix}.$$

Сделать это можно, к примеру, методом прогонки.