Всеволод Заостровский, 409 группа

Отчёт по задаче "Численное решение дифференциальных уравнений второго порядка методами Фурье и прогонки".

1 Постановка задачи.

Необходимо решить уравнение:

$$-y'' + p(x)y(x) = f(x). \tag{1}$$

В моём варианте, краевые условия:

$$y(0) = 0, \quad y_N = 0, \quad h = \frac{1}{N}. \tag{2}$$

2 Численная схема и её сходимость.

Будем аппроксимировать дифференциальное уравнение схемой:

$$-\frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} + py_k = f_k, \quad k = 1, \ldots, N-1; \tag{3}$$

с краевыми условиями:

$$y_0 = y_N = 0, \quad h = \frac{1}{N}, \quad p \geq 0. \tag{4}$$

Исследуем сходимость схемы с помощью теоремы Филлипова.

Теорема 1. *1.* (1) *и* (3) *— линейны.*

2. Существует единственное решение задачи (1) *с краевыми условиями* (2)*.*

3. *Разностная схема (3) аппроксимирует задачу на решении с порядком 2:*

$$||L_h[y]_h - f_h||_{2,h} + ||l_h[y]_h - \phi_h||_{2,h} \leq Ch^2,$$

где первое слагаемое отвечает норме разности схемы на решении, а вторая описывает точность приближения начальных условий. Кроме того, требуется, чтобы

$$||f(x_k) - f_{k,h}||_{2,h} \to 0 \text{ при } h \to 0.$$

4. *Разностная схема устойчива в норме $||\cdot||_{2,h}$:*

$$||A^{-1}||_{2,h} \leq const.$$

Утверждение 1. *Теорема Филлипова выполняется для задачи (1)–(2) и схемы (3)–(4).*

Доказательство. 1. (1) и (3) — линейны по определению.

2. Из теории дифференциальных уравнений известно, что такой тип уравнений имеет единственное решение.

3. По определению аппроксимации на решении,

$$\begin{aligned}
&||L_h[y]_h - f_h||_{2,h} = || - \frac{y(x_{k+1}) - 2y(x_k) + y(x_{k-1})}{h^2} + py_k - f(x_k)||_{2,h} = \\
&= || - \frac{1}{h^2}\left(y(x_k) + hy'(x_k) + \frac{h^2}{2}y''(x_k) + \frac{h^3}{6}y'''(x_k) + O(h^4)\right) \\
&- \frac{1}{h^2}\left(y(x_k) - hy'(x_k) + \frac{h^2}{2}y''(x_k) - \frac{h^3}{6}y'''(x_k) + O(h^4)\right) \\
&+ py_k + \frac{2}{h^2}y(x_k) - f(x_k)||_{2,h} = ||O(h^2) + \underbrace{(-y''(x_k) + py_k - f(x_k))}_{=0,\text{ поскольку } y \text{ — решение}}||_{2,h} \leq Ch^2
\end{aligned}$$

.

При этом краевые условия даны точно. Таким образом, имеем 2 порядок аппроксимации на решении.

4. В отчёте к задаче по итерационным методам решения систем уравнений (см. каталог LinAlg) были найдены собственные значения (и собственные векторы) задачи выше (при условии, что $p = \text{const}$):

$$\lambda_n = p - 2N^2(\cos(\frac{\pi n}{N}) - 1) = \frac{4}{h^2}\sin^2(\frac{\pi n h}{2}) + p, \quad n = 1 \ldots N-1.$$

Поскольку $\sin x \geq \frac{2}{\pi}x$ при $x \leq \frac{\pi}{2}$, для собственных значений имеем оценку:

$$\lambda_n = \frac{4}{h^2}\sin^2(\frac{\pi n h}{2}) + p \geq \frac{4}{h^2}\frac{4}{\pi^2}\frac{\pi^2 n^2 h^2}{4} + p > \text{const} > 0.$$

Тогда

$$||A^{-1}||_{2,h} = max\frac{1}{\lambda(A)} \leq \text{const}.$$

Таким образом, по теореме Филлипова, схема имеет порядок сходимости равный двум. □

3 Програмная релизация решения дифференциального уравнения.

Для численной реализации схемы фактически необходимо решить систему уравнений (3)–(4). В случае постоянного p это можно сделать методом Фурье. В более общем случае — методом прогонки. Были реализованы оба метода. См. папку /../Code/src .

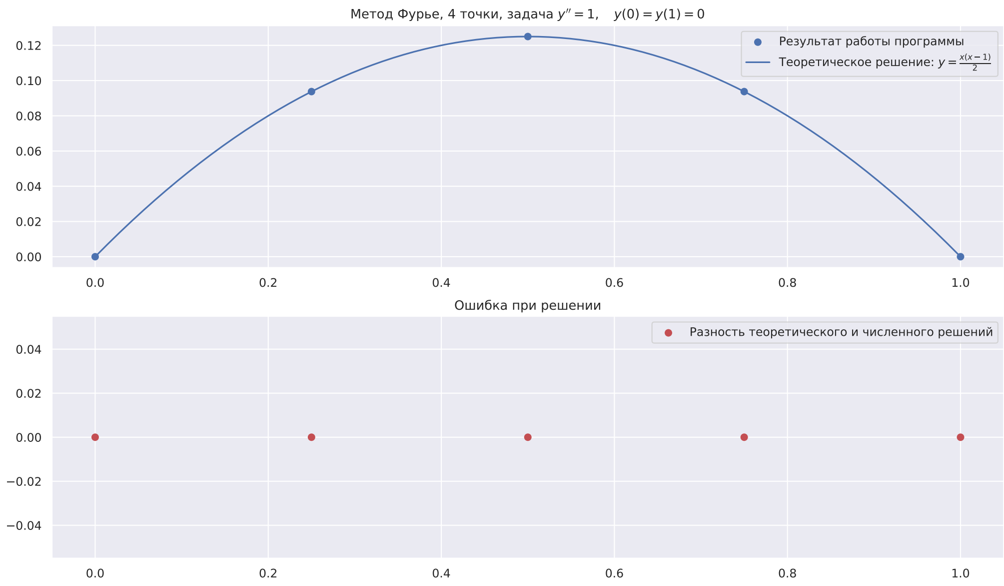

Рис. 1: Результаты теста на порядок сходимости для $p = 0$, метод Фурье

3.1 Порядок сходимости схемы.

Поскольку схема имеет второй порядок сходимости, она должна быть точна на полиномах до 2 степени включительно. Рассмотрим задачу

$$-y'' = 1,$$

с краевыми условиями:

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0.$$

Её решение: $y = \frac{-x(x-1)}{2}$. Решим эту задачу численно на небольшом количестве точек. Как видно из рисунков, графики точно совпали (это проверено численно, точки совпадают с машинной точностью).

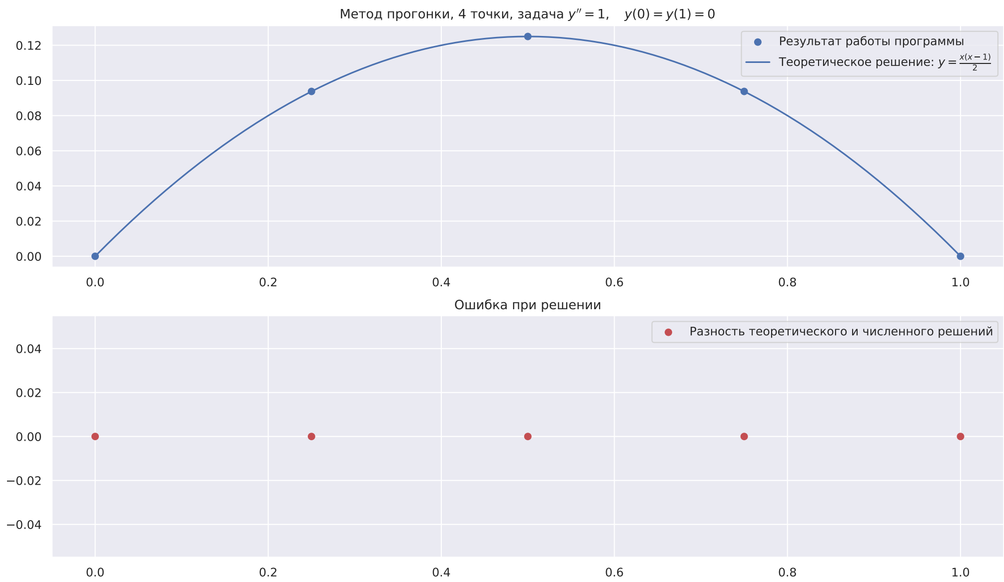

Рис. 2: Результаты теста на порядок сходимости для $p = 0$, метод прогонки

3.2 Корректность работы с $p \neq 0$.

Теперь рассмотрим задачу

$$-y'' + y = 1,$$

с краевыми условиями:

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0.$$

Её решение: $y = Ce^x - (1 + C)e^{-t} + 1$, где $C = -\frac{1}{e+1}$. Погрешность численного решения не видна на графике. Она составляет примерно $3e-6$.

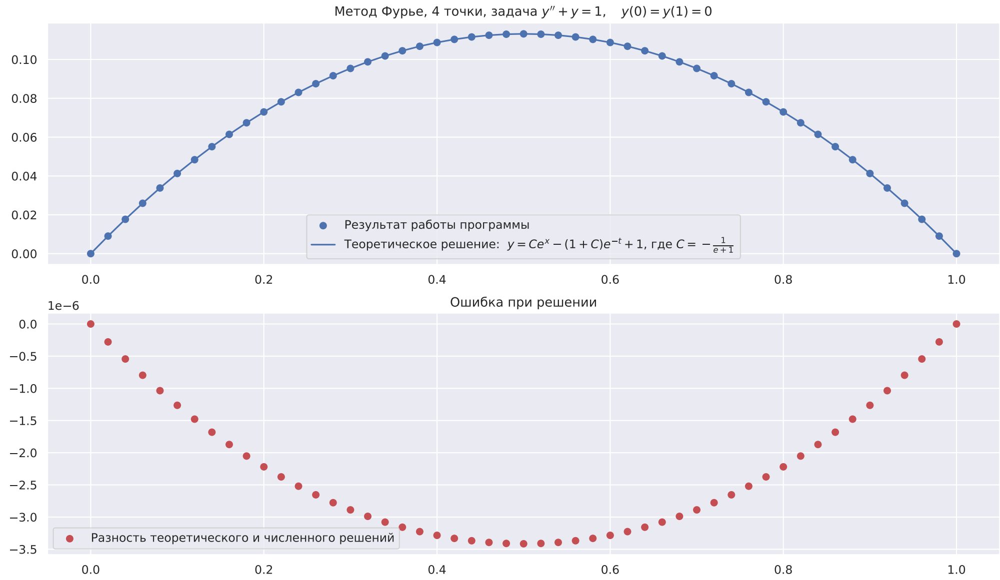

Рис. 3: Результаты теста на корректность для $p = 1$, метод Фурье

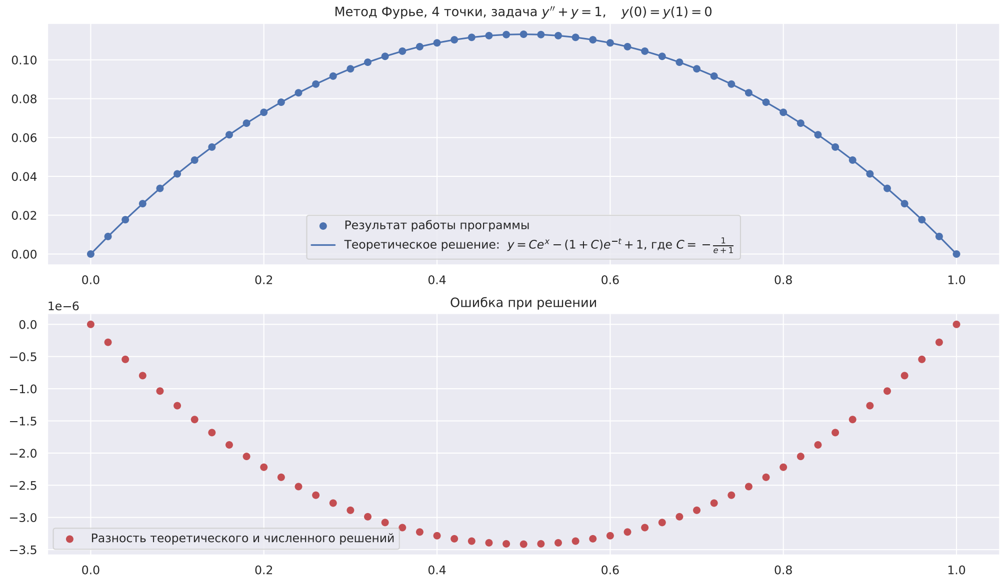

Рис. 4: Результаты теста на корректность для $p = 1$, метод прогонки