Всеволод Заостровский, 409 группа

**Отчёт по задаче "Решение страшного уравнения".**

# Содержание



# 1 Постановка задачи.

## 1.1 Одномерный Лаплас

Необходимо решить уравнение:

$$u_t(t,x) = \operatorname{div}(k(x)\operatorname{grad} u(t,x)).$$

Будем считать, что $0 \le t, x \le 1$. В моём варианте, краевые условия:

$$u(t,x)\big|_{x\in\partial\Omega} = 0, \quad \Omega = [0,1].$$
$$u(0,x) = u^0(x), \quad x \in \Omega.$$

## 1.2 Двумерный Лаплас

Необходимо решить уравнение:

$$u_t(t,x,y) = \operatorname{div}(k(x,y)\operatorname{grad} u(t,x,y)).$$

Будем считать, что $0 \le t, x, y \le 1$. В моём варианте, краевые условия:

$$u(t,x,y)\Big|_{(x,y)\in\partial\Omega} = 0, \quad \Omega = [0,1]\times[0,1].$$
$$u(0,x,y) = u^0(x,y), \quad (x,y)\in\Omega.$$

# 2 Алгоритм решения одномерной схемы.

## 2.1 Дискретизация

Уравнение будем приближать посредством следующей схемы:

$$\frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\tau} = \frac{k(x_{i+\frac{1}{2}})\frac{u_{i+1}^{n+1}-u_i^{n+1}}{h} - k(x_{i-\frac{1}{2}})\frac{u_i^{n+1}-u_{i-1}^{n+1}}{h}}{h}.$$

Краевые условия:

$$u(t,x)\Big|_{x\in\partial\Omega} = 0, \quad \Omega = [0,1].$$
$$u(0,x) = u^0(x), \quad x\in\Omega.$$

## 2.2 Общий вид матрицы уравнения.

Приведем схему к матричному виду:

$$u_i^{n+1}-u_i^n = \tau k(x_{i+\frac{1}{2}})\frac{u_{i+1}^{n+1}-u_i^{n+1}}{h^2} - \tau k(x_{i-\frac{1}{2}})\frac{u_i^{n+1}-u_{i-1}^{n+1}}{h^2}.$$
$$u_i^{n+1}-u_i^n = \tau k(x_{i+\frac{1}{2}})\frac{u_{i+1}^{n+1}}{h^2} - u_i^{n+1}\frac{\tau}{h^2}(k(x_{i+\frac{1}{2}})+k(x_{i-\frac{1}{2}})) + \tau k(x_{i-\frac{1}{2}})\frac{u_{i-1}^{n+1}}{h^2}.$$

Таким образом, получим:

$$-u_{i+1}^{n+1}k(x_{i+\frac{1}{2}})\frac{\tau}{h^2}+u_i^{n+1}\left(1+\frac{\tau}{h^2}(k(x_{i+\frac{1}{2}})+k(x_{i-\frac{1}{2}}))\right)-u_{i-1}^{n+1}k(x_{i-\frac{1}{2}})\frac{\tau}{h^2}=u_i^n. \tag{1}$$

Матрица примет вид:

$$A=\begin{pmatrix} C & B_- & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ B_+ & C & B_- & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B_+ & C & B_- & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & B_+ & C & B_- & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & B_+ & C & B_- \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & B_+ & C \end{pmatrix}, \text{где} \begin{cases} C=1+\frac{\tau}{h^2}(k(x_{i+\frac{1}{2}})+k(x_{i-\frac{1}{2}})), \\ B_+=k(x_{i+\frac{1}{2}})\frac{\tau}{h^2}, \\ B_-=k(x_{i-\frac{1}{2}})\frac{\tau}{h^2}. \end{cases}$$

## 2.3 Решение.

Методом прогонки...

# 3 Алгоритм решения двумерной схемы.

## 3.1 Дискретизация.

$$\frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\tau}=\frac{k(x_{i+\frac{1}{2},j})\frac{u_{i+1,j}^{n+1}-u_{i,j}^{n+1}}{h}-k(x_{i-\frac{1}{2},j})\frac{u_{i,j}^{n+1}-u_{i-1,j}^{n+1}}{h}}{h}+$$
$$+\frac{k(x_{i,j+\frac{1}{2}})\frac{u_{i,j+1}^{n+1}-u_{i,j}^{n+1}}{h}-k(x_{i,j-\frac{1}{2}})\frac{u_{i,j}^{n+1}-u_{i,j-1}^{n+1}}{h}}{h}.$$