

Всеволод Заостровский, 409 группа

Отчёт по задаче ”Численное решение дифференциальных уравнений с частными производными. Явная схема для уравнения теплопроводности”.

## 1 Постановка задачи.

Необходимо решить уравнение:

$$u_t(t, x) = u_{xx}(t, x) - p(x)u(t, x) + f(t, x). \quad (1)$$

В моём варианте, краевые условия:

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, \quad u(x, 0) = u_0(x). \quad (2)$$

## 2 Решение дифференциального уравнения (для тестов).

Будем искать решение в виде  $u(t, x) = X(x)T(t)$ . С учетом краевых условий, получим:

$$u(0, x) = T(t)X(0) = 0 \Rightarrow X(0) = 0,$$

$$u(1, x) = T(t)X(1) = 0 \Rightarrow X(1) = 0.$$

Разрешим уравнение с учетом  $u(t, x) = X(x)T(t)$ :

$$XT' = X''T,$$

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{T} = -\lambda.$$

Рассмотрим уравнение на  $X$ , чтобы найти значения  $\lambda$ , при которых решение нетривиально:

$$X'' = -\lambda X,$$

$$X = C_1 \sin(\sqrt{\lambda}x) + C_2 \cos(\sqrt{\lambda}x),$$

$$X(0) = C_1 \sin(\sqrt{\lambda}0) + C_2 \cos(\sqrt{\lambda}0) = C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = 0.$$

$$X(1) = C_1 \sin(\sqrt{\lambda}1) + 0 * \cos(\sqrt{\lambda}1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin(\sqrt{\lambda}) = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda} = \pi k, k \in Z \Rightarrow \lambda = \pi^2 k^2, k \in Z.$$

Случай  $C_1 = 0$  дает тривиальное решение. С учетом вычислений выше, можем записать общий вид для  $X$  и  $T$ :

$$X = C_1 \sin(\pi kx), \quad T = C_2 \exp(-\pi^2 k^2 t), \quad k \in Z.$$

Таким образом, общее решение дифференциального уравнения:

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(\pi nx) \exp(-\pi^2 n^2 t).$$

### 3 Дискретизация дифференциального уравнения.

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = \frac{u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1}}{h^2} - p(x_m)u_m^{n+1} + f(t_n, x_{m+1}), \quad (3)$$

$$m = 1 \dots M - 1, \quad (4)$$

$$n = 1 \dots N - 1. \quad (5)$$

$$(6)$$

В моём варианте, краевые условия:

$$\forall n, m : \quad u_0^n = 0, \quad u_1^n = 0, \quad u_m^0 = u_0(x_m). \quad (7)$$

## 4 Аппроксимация на решении.

Разложим значения решения в ряд Тейлора:

$$\begin{aligned}
 u(t_n, x_{m+1}) &= u(t_n, x_m) + hu_x(t_n, x_m) + \frac{h^2}{2}u_{xx}(t_n, x_m) + \frac{h^3}{6}u_{xxx}(t_n, x_m) \\
 &\quad + \frac{h^4}{24}u_{xxxx}(t_n, x_m) + O(h^5) \\
 u(t_n, x_{m-1}) &= u(t_n, x_m) - hu_x(t_n, x_m) + \frac{h^2}{2}u_{xx}(t_n, x_m) - \frac{h^3}{6}u_{xxx}(t_n, x_m) \\
 &\quad + \frac{h^4}{24}u_{xxxx}(t_n, x_m) + O(h^5) \\
 u(t_{n+1}, x_m) &= u(t_n, x_m) + \tau u_x(t_n, x_m) + \frac{\tau^2}{2}u_{tt}(t_n, x_m) + \frac{\tau^3}{6}u_{ttt}(t_n, x_m) \\
 &\quad + \frac{\tau^4}{24}u_{tttt}(t_n, x_m) + O(\tau^5) \\
 u(t_{n-1}, x_m) &= u(t_n, x_m) - \tau u_x(t_n, x_m) + \frac{\tau^2}{2}u_{tt}(t_n, x_m) - \frac{\tau^3}{6}u_{ttt}(t_n, x_m) \\
 &\quad + \frac{\tau^4}{24}u_{tttt}(t_n, x_m) + O(\tau^5)
 \end{aligned}$$

Отсюда имеем:

$$\begin{aligned}
 \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} &= \frac{u(t_{n+1}, x_m) - u(t_n, x_m)}{\tau} = u_t(t_n, x_m) \\
 &\quad + \frac{\tau}{2}u_{tt}(t_n, x_m) + \frac{\tau^2}{6}u_{ttt}(t_n, x_m) + \frac{\tau^3}{24}u_{tttt}(t_n, x_m) + O(\tau^4) \\
 \frac{u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1}}{h^2} &= \frac{u(t_{n+1}, x_{m+1}) - 2u(t_{n+1}, x_m) + u(t_{n+1}, x_{m-1}))}{h^2} = \\
 &= u_{xx}(t_n, x_m) + \frac{h^2}{12}u_{xxxx}(t_n, x_m) + O(h^4)
 \end{aligned}$$

Подставив эти выражения в дифференциальное уравнение, получим:

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} - \frac{u_{m+1}^{n+1} + 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1}}{h^2} + p(x_m)u_m^{n+1} - f(t_n, x_{m+1}) \right\| = \\ & = \left\| -u_{xx}(t_n, x_m) + O(h^2) + u_t(t_n, x_m) + O(\tau) + p(x_m)u_m^{n+1} - f(t_n, x_{m+1}) \right\| = \\ & = O(h^2 + \tau). \end{aligned}$$

С учетом того, что начальные условия даны точно и, очевидно,  $|f(t_n, x_m) - f_m^n| \rightarrow 0$ , получаем, что порядок аппроксимации на решении данной схемы составляет  $O(\tau + h^2)$ .

## 5 Устойчивость схемы.

Удобная для анализа форма записи схемы имеет вид:

$$u_m^{n+1} - u_m^n = \rho(u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1}) - \tau p(x_m)u_m^{n+1} + \tau f(t_n, x_{m+1}), \quad \rho = \frac{\tau}{h^2}.$$

Выбирая из всех значений  $u_m^{n+1}$ , по модулю равных  $\|u^{n+1}\|$ , такое, у которого индекс  $m$  принимает наименьшее значение, имеем

$$|u_m^{n+1}| > |u_{m-1}^{n+1}| \text{ и } |u_m^{n+1}| \geq |u_{m+1}^{n+1}|.$$

Отсюда  $|2u_m^{n+1}| > |u_{m-1}^{n+1}| + |u_{m+1}^{n+1}|$ , и знак выражения  $2u_m^{n+1} - u_{m-1}^{n+1} - u_{m+1}^{n+1}$  совпадает со знаком  $u_m^{n+1}$ , т. е. справедлива оценка снизу

$$\|u^{n+1}\| = |u_m^{n+1}| \leq |u_m^{n+1} + \rho(2u_m^{n+1} - u_{m-1}^{n+1} - u_{m+1}^{n+1})| = |u_m^n + \tau f_m^{n+1}|.$$

Таким образом, при любых шагах сетки  $\tau$  и  $h$  справедливо неравенство

$\|u^{n+1}\| \leq \|u^n\| + \tau \|f^{n+1}\|$ . Из него получаем:

$$\begin{aligned} \|u^{n+1}\| & \leq \|u^n\| + \tau \|f^n\| \leq \|u^{n-1}\| + \tau (\|f^n\| + \|f^{n-1}\|) \leq \dots \leq \\ & \leq \|u^0\| + \sum_{k=0}^n \tau \|f^k\| \leq \|u^0\| + (n+1)\tau \max_k \|f^k\|. \end{aligned}$$

Таким образом, схема безусловно устойчива.

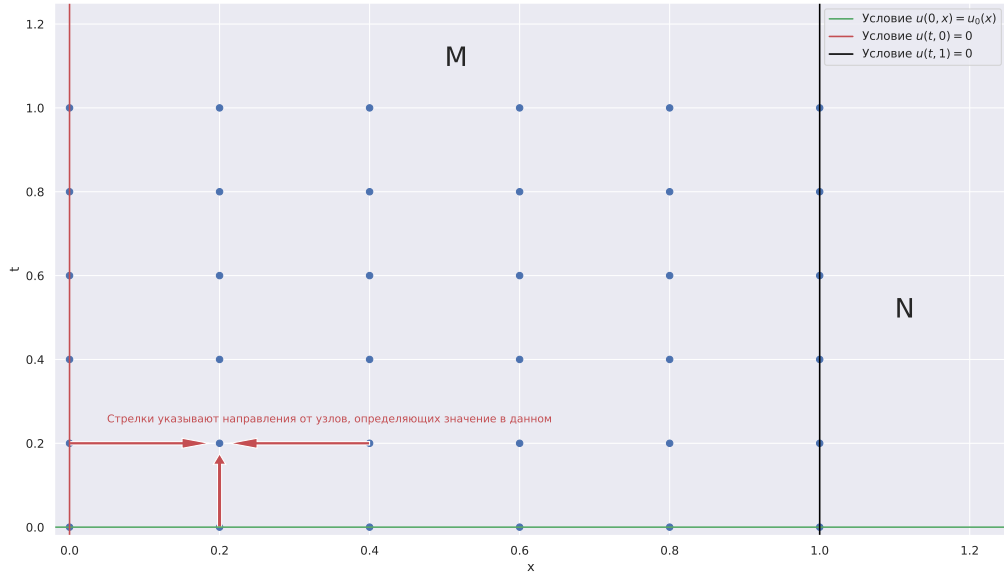


Рис. 1: Графическое представление задачи и порядка вычисления значений в узлах сетки

## 6 Алгоритм построения сети.

Отсюда имеем:

$$-\frac{u_{m+1}^{n+1}}{h^2} + u_m^{n+1} \left( \frac{1}{\tau} + \frac{2}{h^2} + p(x_m) \right) - \frac{u_{m-1}^{n+1}}{h^2} = f(t_n, x_{m+1}) + \frac{u_m^n}{\tau}.$$

Фактически, требуется построить значения функции на сети. Процесс построения описывается рисунком 1: известны значения в левой, правой и нижней границах квадрата  $[0, 1] \times [0, 1]$ . Значение в каждом узле определяется значениями соседних узлов: слева, справа и непосредственно под ним.

Таким образом, зная вектор  $\{u_m^n\}_{m=1, \dots, N-1}$  для нахождения вектора  $\{u_m^{n+1}\}_{m=1, \dots, M-1}$  необходимо решить систему:

$$F = \begin{pmatrix} \frac{1}{\tau} + \frac{2}{h^2} + p(x_m) & -\frac{1}{h^2} & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{1}{h^2} & \frac{1}{\tau} + \frac{2}{h^2} + p(x_m) & -\frac{1}{h^2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 - \frac{1}{h^2} & \frac{1}{\tau} + \frac{2}{h^2} + p(x_m) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^{n+1} \\ u_2^{n+1} \\ \dots \\ u_{M-2}^{n+1} \\ u_{M-1}^{n+1} \end{pmatrix}$$

где

$$F = \begin{pmatrix} f(t_1, x_{m+1}) + \frac{u_1^n}{\tau} \\ f(t_2, x_{m+1}) + \frac{u_2^n}{\tau} \\ \dots \\ f(t_{n-2}, x_{m+1}) + \frac{u_{M-2}^n}{\tau} \\ f(t_{n-1}, x_{m+1}) + \frac{u_{M-1}^n}{\tau} \end{pmatrix}.$$

Сделать это можно, к примеру, методом прогонки.

## 7 Тесты

В разделе 2 найдено представление решения в виде ряда, коэффициенты которого определяются из условия  $u(x, 0) = u_0(x)$ . Для тестов возьмём

$$u_0(x) = u(x, 0) = \sin(\pi n x).$$

В этом случае легко видеть из разложения общего решения в ряд, что

$$u(t, x) = \sin(\pi x) \exp(-\pi^2 t).$$

Было проведено два теста скорости сходимости:

1.  $(N, M) = \{(i, i), \quad i \in \{100, 200, 300, 400, 500\}\}$  — для проверки сходимости  $O(\tau)$ .
2.  $(N, M) = \{(i^2, i), \quad i \in \{10, 20, 30\}\}$  — для проверки сходимости  $O(h^2)$ .

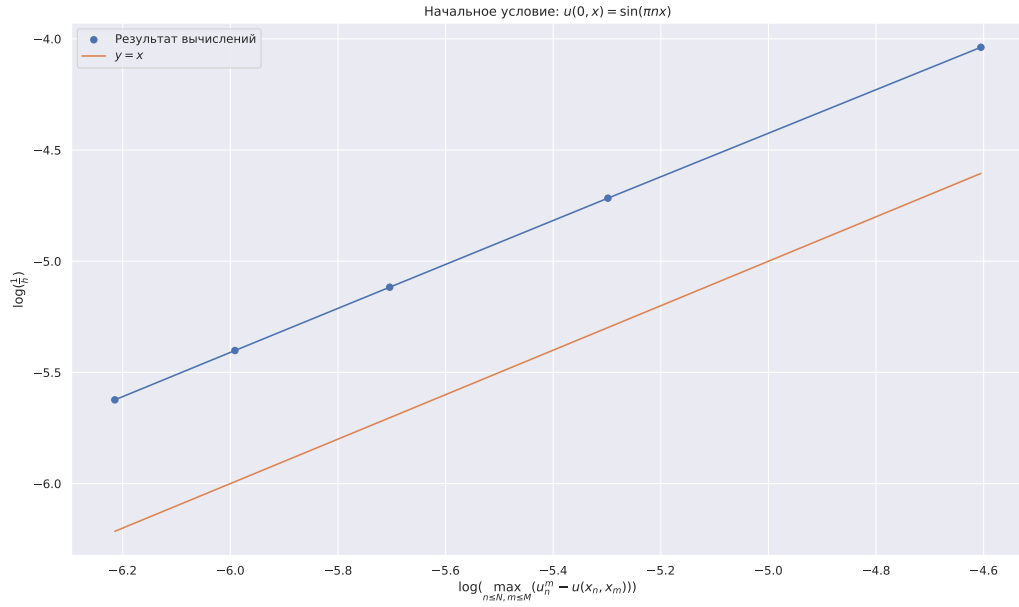


Рис. 2: Зависимость погрешности от размера сетки в первой серии тестов

Если  $\delta(N, M) = \max_{n \leq N, m \leq M} |u(t_n, x_m) - u_h(t_n, x_m)| = O(h^2 + \tau)$ , то:

1. при хорошем  $h$  (в тесте взято  $h = \tau$ ):  $\ln(\delta(N, M)) \approx \ln(\tau) + \text{const}$ ,
2. при плохом  $h$  (в тесте взято  $h = \sqrt{\tau}$ ):  $\ln(\delta(N, M)) \approx \ln(h) + \text{const}$ .

Из графиков 2 и 3 видно, что эти условия выполнены.

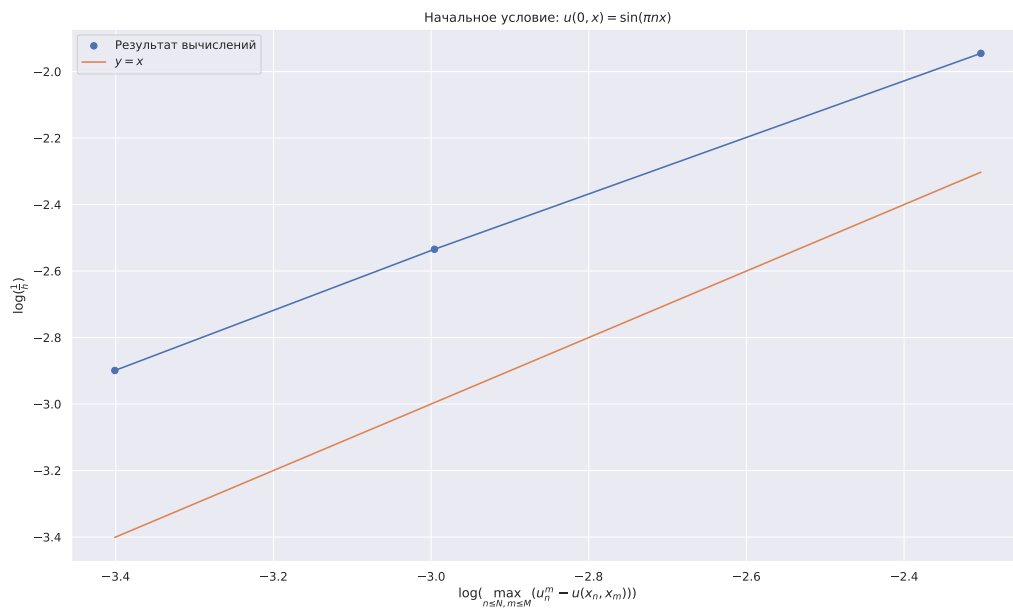
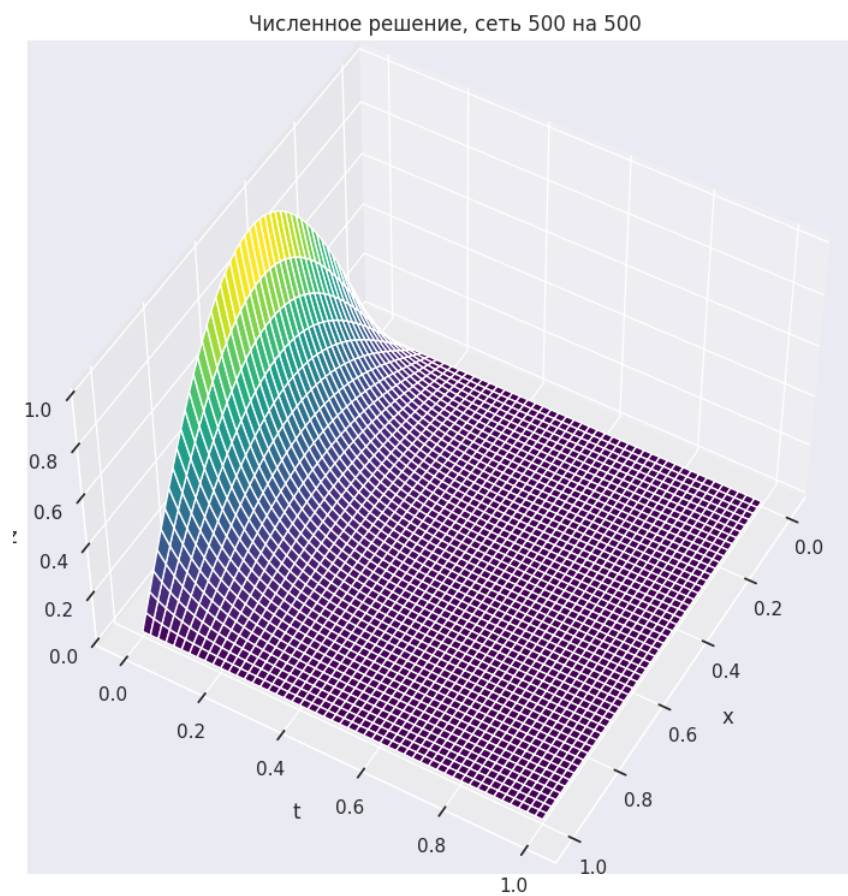
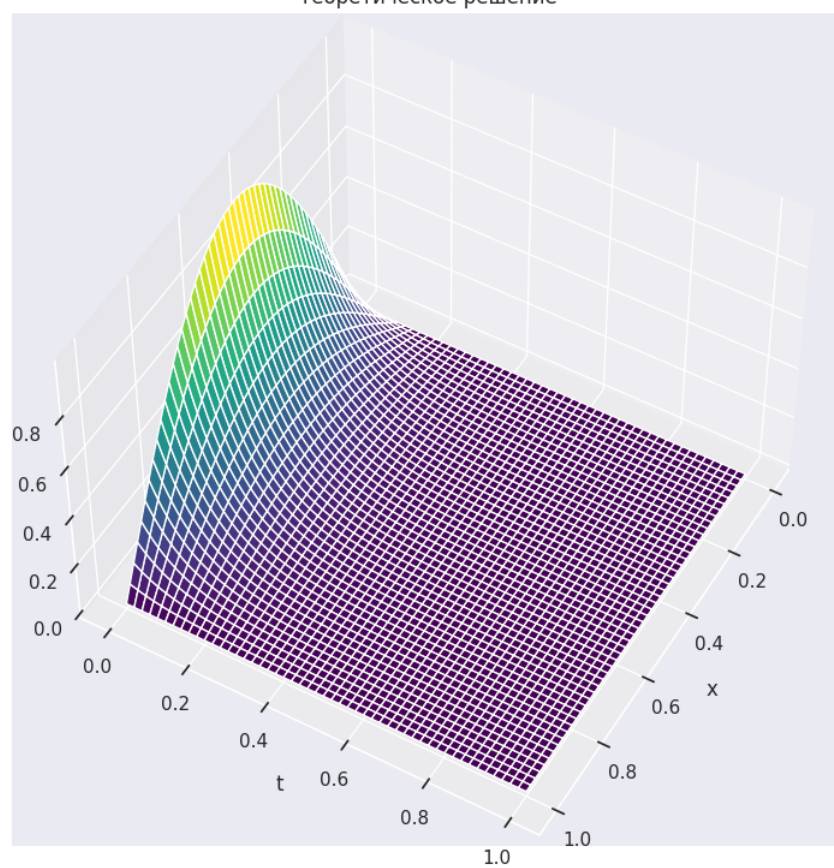


Рис. 3: Зависимость погрешности от размера сетки во второй серии тестов





Теоретическое решение



Численное решение, сеть 100 на 10

