Всеволод Заостровский, 409 группа

Отчёт по задаче "Решение уравнения типа теплопроводности с коэффициентами в дивергенции".

Содержание

1 Постановка задачи.

1.1 Одномерный Лаплас

Необходимо решить уравнение:

$$u_t(t, x) = \operatorname{div}(k(x) \operatorname{grad} u(t, x)).$$

Будем считать, что $0 \le t, x \le 1$. В моём варианте, краевые условия:

$$u(t,x)\big|_{x\in\partial\Omega} = 0, \quad \Omega = [0,1].$$
$$u(0,x) = u^0(x), \quad x \in \Omega.$$

1.2 Двумерный Лаплас

Необходимо решить уравнение:

$$u_t(t,x,y) = \operatorname{div}(k(x,y)\operatorname{grad} u(t,x,y)).$$

Будем считать, что $0 \le t, x, y \le 1$. В моём варианте, краевые условия:

$$u(t,x,y)\big|_{(x,y)\in\partial\Omega} = 0, \quad \Omega = [0,1]\times[0,1].$$
$$u(0,x,y) = u^0(x,y), \quad (x,y) \in \Omega.$$

2 Алгоритм решения одномерной схемы.

2.1 Дискретизация

Уравнение будем приближать посредством следующей схемы:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} = \frac{k(x_{i+\frac{1}{2}})\frac{u_{i+1}^{n+1}-u_i^{n+1}}{h} - k(x_{i-\frac{1}{2}})\frac{u_i^{n+1}-u_{i-1}^{n+1}}{h}}{h}.$$

Краевые условия:

$$u(t,x)\big|_{x\in\partial\Omega} = 0, \quad \Omega = [0,1].$$
$$u(0,x) = u^0(x), \quad x \in \Omega.$$

2.2 Общий вид матрицы уравнения.

Преобразуем схему:

$$u_i^{n+1} - u_i^n = \tau k(x_{i+\frac{1}{2}})\frac{u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1}}{h^2} - \tau k(x_{i-\frac{1}{2}})\frac{u_i^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{h^2}.$$

$$u_i^{n+1} - u_i^n = \tau k(x_{i+\frac{1}{2}})\frac{u_{i+1}^{n+1}}{h^2} - u_i^{n+1}\frac{\tau}{h^2}(k(x_{i+\frac{1}{2}}) + k(x_{i-\frac{1}{2}})) + \tau k(x_{i-\frac{1}{2}})\frac{u_{i-1}^{n+1}}{h^2}.$$

Таким образом, получим:

$$-u_{i+1}^{n+1}k(x_{i+\frac{1}{2}})\frac{\tau}{h^2} + u_i^{n+1}\left(1 + \frac{\tau}{h^2}(k(x_{i+\frac{1}{2}}) + k(x_{i-\frac{1}{2}}))\right) - u_{i-1}^{n+1}k(x_{i-\frac{1}{2}})\frac{\tau}{h^2} = u_i^n. \tag{1}$$

Матрица примет вид:

$$A = \begin{pmatrix} c & b_+ & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_- & c & b_+ & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_- & c & b_+ & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & b_- & c & b_+ & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_- & c & b_+ \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b_- & c \end{pmatrix}, \text{где} \begin{cases} c = 1 + \frac{\tau}{h^2}(k(x_{i+\frac{1}{2}}) + k(x_{i-\frac{1}{2}})), \\ b_+ = -k(x_{i+\frac{1}{2}})\frac{\tau}{h^2}, \\ b_- = -k(x_{i-\frac{1}{2}})\frac{\tau}{h^2}. \end{cases}$$

2.3 Решение схемы.

Итоговый вид интересующей нас системы:

$$Au^{n+1} = u^n, \quad u^n := (u_0^n, u_1^n, \dots u_{N_X}^n).$$

Как видно, эту системы легко решить методом прогонки: двигаясь от 0-го слоя к N-му. Несколько сложнее дела обстоят с двумерной схемой, которая описана ниже.

3 Алгоритм решения двумерной схемы.

3.1 Дискретизация.

Уравнение будем приближать посредством следующей схемы:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} = \frac{k(x_{i+\frac{1}{2},j})\frac{u_{i+1,j}^{n+1} - u_{i,j}^{n+1}}{h_X} - k(x_{i-\frac{1}{2},j})\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i-1,j}^{n+1}}{h_X}}{h_X} + \\ + \frac{k(x_{i,j+\frac{1}{2}})\frac{u_{i,j+1}^{n+1} - u_{i,j}^{n+1}}{h_Y} - k(x_{i,j-\frac{1}{2}})\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j-1}^{n+1}}{h_Y}}{h_Y}.$$

Краевые условия:

$$u(t,x,y)\big|_{(x,y)\in\partial\Omega} = 0, \quad \Omega = [0,1]\times[0,1].$$
$$u(0,x,y) = u^0(x,y), \quad x \in \Omega.$$

3.2 Общий вид матрицы уравнения.

Для придания выкладкам хоть сколько-нибудь приемлемого вида, здесь и далее считаем $h_X = h_Y = h = \frac{1}{N_X - 1}, \quad N_X = N_Y$. Пользуясь вычислениями из предыдущего раздела, получим:

$$u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n = \tau k(x_{i+\frac{1}{2}}, y_j)\frac{u_{i+1,j}^{n+1} - u_{i,j}^{n+1}}{h^2} - \tau k(x_{i-\frac{1}{2}}, y_j)\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i-1,j}^{n+1}}{h^2} + \\ + \tau k(x_{i,y_{j+\frac{1}{2}}})\frac{u_{i,j+1}^{n+1} - u_{i,j}^{n+1}}{h^2} - \tau k(x_i, y_{j-\frac{1}{2}})\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j-1}^{n+1}}{h^2}.$$

$$u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n = -u_{i,j}^{n+1}\frac{\tau}{h^2}\Big(k(x_{i+\frac{1}{2}}, y_j) + k(x_{i-\frac{1}{2}}, y_j) + k(x_i, y_{j+\frac{1}{2}}) + k(x_i, y_{j-\frac{1}{2}})\Big) + \\ + \tau k(x_{i+\frac{1}{2}}, y_j)\frac{u_{i+1,j}^{n+1}}{h^2} + \tau k(x_{i-\frac{1}{2}}, y_j)\frac{u_{i-1,j}^{n+1}}{h^2} + \tau k(x_i, y_{j+\frac{1}{2}})\frac{u_{i,j+1}^{n+1}}{h^2} + \tau k(x_i, y_{j-\frac{1}{2}})\frac{u_{i,j-1}^{n+1}}{h^2}.$$

Итоговая схема выглядит следующим образом:

$$u_{i,j}^{n+1}\left(\frac{1}{\tau}+\frac{1}{h^2}\left(k(x_{i+\frac{1}{2}},y_j)+k(x_{i-\frac{1}{2}},y_j)+k(x_i,y_{j+\frac{1}{2}})+k(x_i,y_{j-\frac{1}{2}})\right)\right)-$$
$$+\frac{1}{h^2}\left[-u_{i+1,j}^{n+1}k(x_{i+\frac{1}{2}},y_j)-u_{i-1,j}^{n+1}k(x_{i-\frac{1}{2}},y_j)-u_{i,j+1}^{n+1}k(x_i,y_{j+\frac{1}{2}})-u_{i,j-1}^{n+1}k(x_i,y_{j-\frac{1}{2}})\right]$$
$$=\frac{u_{i,j}^n}{\tau}.$$

Эту схему можно записать в огромную ($\mathbb{R}^{N_X^4}$) разреженную блочную матрицу вида:

$$A=\begin{pmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ D_- & C & D_+ & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_- & C & D_+ & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & D_- & C & D_+ & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & D_- & C & D_+ \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & I \end{pmatrix},$$

описание блоков:

Блок C:

$$C=\begin{pmatrix} c & b_+ & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_- & c & b_+ & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_- & c & b_+ & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & b_- & c & b_+ & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_- & c & b_+ \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b_- & c \end{pmatrix},$$

в матрице C:

$$\begin{cases} c = \frac{1}{\tau} + \frac{1}{h^2}\left(k(x_{i+\frac{1}{2}}, y_j) + k(x_{i-\frac{1}{2}}, y_j) + k(x_i, y_{j+\frac{1}{2}}) + k(x_i, y_{j-\frac{1}{2}})\right), \\ b_+ = -k(x_{i+\frac{1}{2}}, y_j)\frac{1}{h^2}, \\ b_- = -k(x_{i-\frac{1}{2}}, y_j)\frac{1}{h^2}; \end{cases}$$

Блок I: I — единичная матрица размера $N_X \times N_X$;

Блок D_-: $D_- = -k(x_i, y_{j-\frac{1}{2}})\frac{\tau}{h^2}I =: d_-I$;

Блок D_+: $D_- = -k(x_i, y_{j+\frac{1}{2}})\frac{\tau}{h^2}I =: d_+I$.

Итоговый вид уравнения:

$$Au^{n+1} = \frac{u^n}{\tau}.$$

По предыдущему слою мы будем находить следующий, начиная с 0-го слоя, который нам дан, по условию. Отметим, что мы хотим построить трёхмерную матрицу $U = (u^n_{i,j})^{0\le n\le N}_{0\le i,j\le N_X}$, но форма записи матрицы A предполагаем, что множество $(u^n_{i,j})^{n=\mathrm{const}}_{0\le i,j\le N_X}$ вытягивается в вектор u^n:

$$u^n = (u^n_{0,0}, u^n_{1,0}, u^n_{2,0}, \dots u^n_{0,1}, u^n_{0,2}, \dots u^n_{0,N_X}, u^n_{1,N_X}, \dots u^n_{N_X,N_X})^T$$

3.3 Решение схемы.

Для решения этой системы также можно применять прогонку (точнее, её более общую модификацию). Мы применим итеративный алгоритм решения с предобуславливателем, который подробно опишем ниже. Общий вид таких алгоритмов:

$$B\frac{u^{n+1,p+1} - u^{n+1,p+1}}{\theta} + Au^{n+1,p} = b^n.$$

В нашем случае,

A — матрица, описанная в разделе 3.2. Следует отметить, что эта матрица пятидиагональная, так что, несмотря на то, что формально она принадлежит пространству $\mathbb{R}^{(N_X+1)^4}$, для её хранения требуется лишь $5 * (N_X + 1)^2$ памяти (по массиву для каждой из 5 диагоналей), а умножение матрицы на вектор требует $10 * (N_X + 1)^2$ арифметических операций.

$u^{n,p}$ — результат после p-ой итерации процесса для n слоя ответа. Отметим, что мы считаем $u^{n,0} = u^n$.

θ — итерационный параметр. Наивысшая (в некотором смысле) скорость сходимости достигается при $\theta = \frac{2}{m+M}$, где M и m — соответственно, максимальное и минимальное собственные значения матрицы.

B — предобуславливатель, берётся разным для разных задач. Мы рассмотрим $B = A\Big|_{k(x_i,y_j)=\frac{k(x_0,y_0)+k(x_{N_X},y_{N_X})}{2}}$.

Итерироваться мы будем следующим образом:

1. Заметим, что:

$$B\frac{u^{n+1,p+1} - u^{n+1,p+1}}{\theta} + Au^{n+1,p} = \frac{u^n}{\tau} \Leftrightarrow \begin{cases} By^{p+1} = \frac{u^n}{\tau} - Au^{n+1,p}, \\ u^{n+1,p+1} = u^{n+1,p} + \theta y^{p+1}. \end{cases}$$

2. За $O(N^2)$ вычислим вектор $b - Ax^p$.

3. С помощью метода Фурье за $O(N^3)$ решим систему $By^{p+1} = b - Ax^p$. Схема при этом принимает вид:

$$\frac{u_{i,j}^{n+1}}{k\tau} - \frac{u_{i+1,j}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} - u_{i-1,j}^{n+1}}{h^2} - \frac{u_{i,j+1}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j-1}^{n+1}}{h^2} =$$
$$= \underbrace{f(x_i, y_j)}_{=(\frac{u^n}{\tau} - Au^{n+1,p})/k\Big|_{i,j}} = \frac{u^n}{k\tau} - \frac{1}{k}Au^{n+1,p}.$$

4. Следующий вектор в итеративной процедуре вычислим по формуле $x^{k+1} = x^k + \tau y^{k+1}$.

3.4 Алгоритм для программирования.

На шаге n нам известны слои вплоть до u^n (слой — матрица, вытянутая в вектор). u^0 задан изначально.

1. Нужно решить уравнение:

$$Au^{n+1} = \frac{u^n}{\tau}.$$

Для этого:

(a) Решаем уравнение

$$By^{k+1} = b - Ax^k,$$

где B — матрица Фурье с постоянным k.

(b) Вычисляем $x^{k+1} = x^k + \tau y^{k+1}$.

2. Повторяем процедуру пока не увидим сходимость.