

**Отчёт по задаче "Итерационные методы решения систем
линейных уравнений".**

Постановка задачи. Для построения приближенного решения задачи

$$y'(x) + Ay(x) = 0, \quad y(0) = 1, \quad x \in [0, 1]$$

с известным точным решением $y(x) = e^{-Ax}$ рассматриваются следующие схемы:

- 1) $\frac{y_{k+1}-y_k}{h} + Ay_k = 0, y_0 = 1.$
- 2) $\frac{y_{k+1}-y_k}{h} + Ay_{k+1} = 0, y_0 = 1.$
- 3) $\frac{y_{k+1}-y_k}{h} + A\frac{y_{k+1}+y_k}{2} = 0, y_0 = 1.$
- 4) $\frac{y_{k+1}-y_{k-1}}{2h} + Ay_k = 0, y_0 = 1, y_1 = 1 - Ah.$
- 5) $\frac{1.5y_k - 2y_{k-1} + 0.5y_{k-2}}{h} + Ay_k = 0, y_0 = 1, y_1 = 1 - Ah.$
- 6) $\frac{-0.5y_{k+2} + 2y_{k+1} - 1.5y_k}{h} + Ay_k = 0, y_0 = 1, y_1 = 1 - Ah.$

Найти порядок аппроксимации, исследовать α -устойчивость предложенных схем. Реализовать указанные схемы и заполнить таблицу.

Решение. Реализацию кода см. тут. Для реализации численного решения необходимо в каждом случае выразить последний y_k через предыдущие, заодно проверим α -устойчивость:

$$1) \frac{y_{k+1}-y_k}{h} + Ay_k = 0$$

$$y_{k+1} = y_k(1 - Ah).$$

$$\lambda = 1 - Ah < 1.$$

$$2) \frac{y_{k+1}-y_k}{h} + Ay_{k+1} = 0$$

$$y_{k+1} = \frac{y_k}{1+Ah}.$$

$$\lambda = \frac{1}{1+Ah} < 1.$$

$$3) \frac{y_{k+1}-y_k}{h} + A \frac{y_{k+1}+y_k}{2} = 0$$

$$y_{k+1} = \frac{y_k(2-Ah)}{2+Ah}.$$

$$\lambda = \frac{2-Ah}{2+Ah} < 1.$$

$$4) \frac{y_{k+1}-y_{k-1}}{2h} + Ay_k = 0$$

$$y_{k+2} = y_k - 2Ahy_{k+1}.$$

$$\lambda^2 + 2Ah\lambda - 1 = 0.$$

$$\lambda_{+,-} = Ah \pm \sqrt{A^2h^2 + 1}.$$

$$|\lambda_+| > 1.$$

$$5) \frac{1.5y_k - 2y_{k-1} + 0.5y_{k-2}}{h} + Ay_k = 0$$

$$y_{k+2} = \frac{2y_{k+1} - 0.5y_k}{Ah + 1.5}.$$

$$\lambda^2 - \frac{2}{1.5+Ah}\lambda + \frac{0.5}{1.5+Ah} = 0.$$

$$2\lambda_{+,-} = \frac{2}{1.5+Ah} \pm \sqrt{\frac{4}{(1.5+Ah)^2} - \frac{2}{1.5+Ah}}.$$

α -устойчивость есть не всегда.

$$6) \frac{-0.5y_{k+2} + 2y_{k+1} - 1.5y_k}{h} + Ay_k = 0$$

$$y_{k+2} = (2Ah - 3)y_k + 4y_{k+1}.$$

$$\lambda^2 - 4\lambda - (2Ah - 3) = 0.$$

$$\lambda_{+,-} = 2 \pm \sqrt{1 - 2Ah}.$$

$$|\lambda_+| > 1.$$

В таблице 1 в первом столбце указывается номер схемы; $E_n = \max_{x_k} |y(x_k) - y_k|$, y_k - решение соответствующей схемы при $h = 10^{-n}$; m - порядок сходимости, т.е. $E_n \sim O(h^m)$; параметр задачи $A = 1, 10, 1000$.

Видно, что схемы обладающие α -устойчивостью дают хорошее приближение при достаточно малом h .

Номер	E_1	E_2	E_3	E_6	m	A
1	0.019149	0.001847	0.000184	0.000000	1	1
1	0.367879	0.019201	0.001847	0.000002	1	10
1	∞	∞	0.367879	0.000184	1	1000
2	0.017528	0.001832	0.000184	0.000000	1	1
2	0.132121	0.017664	0.001832	0.000002	1	10
2	0.009901	0.090864	0.132121	0.000184	1	1000
3	0.000305	0.000003	0.000000	0.000000	2	1
3	0.034546	0.000307	0.000003	0.000000	2	10
3	0.960784	0.666712	0.034546	0.000000	2	1000
4	1.573393	1.546693	1.543448	1.543081	0	1
4	∞	∞	∞	∞	0	10
4	∞	∞	∞	∞	0	1000
5	0.431269	0.483764	0.497316	0.499994	0	1
5	0.432121	0.431269	0.483764	0.499952	0	10
5	0.019704	0.173868	0.432121	0.497316	0	1000
6	∞	∞	∞	∞	0	1
6	∞	∞	∞	∞	0	10
6	∞	∞	∞	∞	0	1000

Таблица 1: Результаты вычислений