Всеволод Заостровский, 409 группа

Отчёт по задаче " Метод Фурье для уравнения теплопроводности для двумерного оператора Лапласа".

Содержание

1 Постановка задачи.

Необходимо решить уравнение:

$$u_t(t,x) = u_{xx}(t,x,y) + u_{yy}(t,x,y) + f(t,x,y).$$

Будем считать, что $0 \le t, x, y \le 1$. В моём варианте, краевые условия:

$$u(t,x,y)\Big|_{(x,y)\in\partial\Omega} = 0, \quad \Omega = [0,1]\times[0,1].$$
$$u(0,x,y) = u^0(x,y), \quad (x,y)\in\Omega.$$

2 Дискретизация дифференциального уравнения.

Исходной задаче (см. раздел 1) предлагается сопоставлять следующую схему:

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^{n}}{\tau} = \frac{u_{i+1,j}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i-1,j}^{n+1}}{h_X^2} + \frac{u_{i,j+1}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i,j-1}^{n+1}}{h_Y^2} + f(t_{n+1}, x_{i+1}, y_{j+1}),$$

$i = 1\ldots N_X, \quad j = 1\ldots N_Y, \quad n = 1\ldots N-1.$

Краевые условия примут вид:

$$\forall i,j,n \in \{0,1,\ldots N_X\}\times\{0,1,\ldots N_Y\}\times\{0,1,\ldots N\},$$
$$u_h^n(1,j) = u_h^n(0,j) = u_h^n(i,0) = u_h^n(i,1) = 0,$$
$$u_h^0(i,j) = u_h^0(i,j).$$

3 Аппроксимация на решении.

Разложим значения решения в ряд Тейлора:

$$
\begin{aligned}
u(t_n, x_{i+1}, y_j) &= u(t_n, x_i, y_j) + h_X u_x(t_n, x_i, y_j) + \frac{h_X^2}{2} u_{xx}(t_n, x_i, y_j) \\
&+ \frac{h_X^3}{6} u_{xxx}(t_n, x_i, y_j) + \frac{h_X^4}{24} u_{xxxx}(t_n, x_i, y_j) + O(h_X^5) \\
u(t_n, x_{i-1}, y_j) &= u(t_n, x_i, y_j) - h_X u_x(t_n, x_i, y_j) + \frac{h_X^2}{2} u_{xx}(t_n, x_i, y_j) \\
&- \frac{h_X^3}{6} u_{xxx}(t_n, x_i, y_j) + \frac{h_X^4}{24} u_{xxxx}(t_n, x_i, y_j) + O(h_X^5) \\
u(t_n, x_i, y_{j+1}) &= u(t_n, x_i, y_j) + h_Y u_y(t_n, x_i, y_j) + \frac{h_Y^2}{2} u_{yy}(t_n, x_i, y_j) \\
&+ \frac{h_Y^3}{6} u_{yyy}(t_n, x_i, y_j) + \frac{h_Y^4}{24} u_{yyyy}(t_n, x_i, y_j) + O(h_Y^5) \\
u(t_n, x_i, y_{j-1}) &= u(t_n, x_i, y_j) - h_Y u_y(t_n, x_i, y_j) + \frac{h_Y^2}{2} u_{yy}(t_n, x_i, y_j) \\
&- \frac{h_Y^3}{6} u_{yyy}(t_n, x_i, y_j) + \frac{h_Y^4}{24} u_{yyyy}(t_n, x_i, y_j) + O(h_Y^5) \\
u(t_{n+1}, x_i, y_j) &= u(t_n, x_i, y_j) + \tau u_x(t_n, x_i, y_j) + \frac{\tau^2}{2} u_{tt}(t_n, x_i, y_j) + \frac{\tau^3}{6} u_{ttt}(t_n, x_i, y_j) \\
&+ \frac{\tau^4}{24} u_{tttt}(t_n, x_i, y_j) + O(\tau^5) \\
u(t_{n-1}, x_m) &= u(t_n, x_i, y_j) - \tau u_x(t_n, x_i, y_j) + \frac{\tau^2}{2} u_{tt}(t_n, x_i, y_j) - \frac{\tau^3}{6} u_{ttt}(t_n, x_i, y_j) \\
&+ \frac{\tau^4}{24} u_{tttt}(t_n, x_i, y_j) + O(\tau^5)
\end{aligned}
$$

Отсюда имеем:

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^{n}}{\tau} = \frac{u(t_{n+1}, x_i, y_j) - u(t_n, x_i, y_j)}{\tau} = u_t(t_n, x_i, y_j)$$
$$+ \frac{\tau}{2} u_{tt}(t_n, x_i, y_j) + \frac{\tau^2}{6} u_{ttt}(t_n, x_i, y_j) + \frac{\tau^3}{24} u_{tttt}(t_n, x_i, y_j) + O(\tau^4$$
$$\frac{u_{i+1,j}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i-1,j}^{n+1}}{h_X^2} = \frac{u(t_{n+1}, x_{i+1}, y_j) - 2u(t_{n+1}, x_i, y_j) + u(t_{n+1}, x_{i-1}, y_j)}{h_X^2} =$$
$$= u_{xx}(t_n, x_i, y_j) + \frac{h_X^2}{12} u_{xxxx}(t_n, x_i, y_j) + O(h_X^4)$$
$$\frac{u_{i,j+1}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i,j-1}^{n+1}}{h_Y^2} = \frac{u(t_{n+1}, x_i, y_{j+1}) - 2u(t_{n+1}, x_i, y_j) + u(t_{n+1}, x_i, y_{j-1})}{h_Y^2} =$$
$$= u_{yy}(t_n, x_i, y_j) + \frac{h_Y^2}{12} u_{yyyy}(t_n, x_i, y_j) + O(h_Y^4)$$

Подставив эти выражения в дифференциальное уравнение, получим:

$$|| \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^{n}}{\tau} - \frac{u_{i+1,j}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i-1,j}^{n+1}}{h_X^2} - \frac{u_{i,j+1}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i,j-1}^{n+1}}{h_Y^2} - f(t_{n+1}, x_{i+1}, y_{j+1})|$$
$$= || - u_{xx}(t_{n+1}, x_i, y_j) - u_{yy}(t_{n+1}, x_i, y_j) + u_t(t_{n+1}, x_i, y_j) - f(t_{n+1}, x_{i+1}, y_{j+1}) + O($$
$$= O(\tau + h_X^2 + h_Y^2).$$

С учетом того, что начальные условия даны точно и, очевидно, $|f(t_{n+1}, x_i, y_j) - f_{i,j}^{n+1}| \to 0$, получаем, что порядок аппроксимации на решении данной схемы составляет $O(\tau + h_X^2 + h_Y^2)$.

4 Устойчивость

Выше получили, что для коэффициентов Фурье функции u справедливо:

$$u_{nm}^{G+1} = \frac{u_{nm}^{G} + d_{nm}\tau}{\frac{4\tau}{h_X^2}\sin^2\left(\frac{\pi n h_X}{2}\right) + \frac{4\tau}{h_Y^2}\sin^2\left(\frac{\pi m h_Y}{2}\right) + 1}.$$

Будем подниматься от $G = 0$ до $G = N$:

$$u_{nm}^1 = \frac{u_{nm}^0 + d_{nm}\tau}{\frac{4\tau}{h_X^2}\sin^2\left(\frac{\pi n h_X}{2}\right) + \frac{4\tau}{h_Y^2}\sin^2\left(\frac{\pi m h_Y}{2}\right) + 1} = l_{nm}(u_{nm}^0 + d_{nm}\tau),$$

$$u_{nm}^2 = l_{nm}(u_{nm}^1 + d_{nm}\tau) = l_{nm}(l_{nm}(u_{nm}^0 + d_{nm}\tau) + d_{nm}\tau),$$

$$\ldots$$

$$u_{nm}^N = l_{nm}^N u_{nm}^0 + d_{nm}\tau\sum_{i=0}^{N-1} l_{nm}^i.$$

Здесь

$$l_{nm} = \frac{1}{\frac{4\tau}{h_X^2}\sin^2\left(\frac{\pi n h_X}{2}\right) + \frac{4\tau}{h_Y^2}\sin^2\left(\frac{\pi m h_Y}{2}\right) + 1} \leq a < 1.$$

Отсюда, получаем оценку для нормы решения:

$$||u||_{L_2}^2 \leq \sum_{G,n,m}\left[a^G u_{nm}^0 + \frac{d_{nm}\tau}{1-a}\right]^2 \leq \sum_{n,m}\left[\frac{u_{nm}^0}{1-a} + \frac{d_{nm}\frac{1}{\tau}\tau}{1-a}\right]^2.$$

Отсюда, пользуясь неравенством треугольника и положительной однородностью меры, а также домножив неравенство на $h_x h_y$, получим:

$$||u||_{L_{2,h}} \leq \frac{1}{1-a}\left(||u^0||_{L_{2,h}} + ||f||_{L_{2,h}}\right).$$

Значит, схема устойчива, поскольку мы явно получили априорную оценку.

Устойчивость и аппроксимация доказаны для разных метрик, что, формально, не позволяет сделать вывод о порядке сходимости схемы. Однако, эта проблема легко преодолевается: из оценок в равномерной метрике мгновенно следуют оценки в L_2-метрике. Таким образом, имеем сходимость схемы в L_2-метрике.

5 Разложение функции в двумерный ряд Фурье.

Функцию $u(x,y) \in C^\infty[0,1]^2$ можно разложить в ряд Фурье, взяв синусы в качестве базисных функций:

$$u(x) = \sum_{m,n=1}^{\infty} c_{mn} \sin \pi m x \sin \pi n y.$$

Перейдём к рассмотрению конечного числа узлов. Выпишем условия на сетку:

$$u_{ij} := u(x_i, y_j), \quad x_i = \frac{i}{N_X}, \quad y_j := \frac{j}{N_Y}$$
$$u_{ij} = \sum_{n,m=1}^{N_X-1, N_Y-1} c_{nm} \phi_i^{(n)} \psi_j^{(m)},$$
$$\phi_i^{(n)} := \sin \pi n i h_X = \sin \left(\frac{\pi n i}{N_X}\right)$$
$$\psi_j^{(m)} := \sin \pi m j h_Y = \sin \left(\frac{\pi m j}{N_Y}\right)$$
$$\phi^n := (\phi_1^n ... \phi_{N_X-1}^n), \quad \psi^m := (\psi_1^m ... \psi_{N_Y-1}^m).$$

Искать коэффициенты будем по следующему алгоритму:

1. Вычислим матрицу $u_{ij} := u(x_i, y_j)$.

2. Зафиксируем j и разложим $u^j(i) := u_{ij}$ в одномерный ряд Фурье:

$$u^j(i) = \sum_{n=1}^{N_X-1} \phi_i^{(n)} d_n^j.$$

Полученные коэффициенты запишем в новую матрицу.

3. По вектору d_n^j восстановим коэффициенты c_{nm} посредством ещё одного разложения в ряд:
$$d_n^j = \sum_{m=1}^{N_Y-1} c_{nm}\psi_j^m.$$

6 Алгоритм численного решения.

6.1 Общая идея решения.

Запишем схему в виде:
$$-\frac{u_{i+1,j}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i-1,j}^{n+1}}{h_X^2} - \frac{u_{i,j+1}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i,j-1}^{n+1}}{h_Y^2} + \frac{u_{i,j}^{n+1}}{\tau} =$$
$$= \frac{u_{i,j}^n}{\tau} + f(t_n, x_{i+1}, y_{j+1}).$$

Фактически, это трехмерная система уравнений. Первый слой $u_{i,j}^0\big|_{0\le i,j,\le 1}^{n+1}$ известен из начального условия. Если, располагая этими данными, удастся вычислить следующий слой, то, повторяя процесс шаг за шагом мы вычислим всю матрицу. Это возможно, поскольку, если считать $u^n = \text{const}$ схема выше представляет собой систему линейных уравнений относительно $u_{i,j}^{n+1}$. Далее подробно описан процесс нахождения сети методом Фурье.

6.2 Получение $n+1$ слоя из n-го.

Если нам известен слой $u_{i,j}^n\big|_{0\le i,j,\le 1}^{n=\text{const}}$, то для определения слоя $u_{i,j}^n\big|_{0\le i,j,\le 1}^{n+1}$ необходимо решить систему уравнений выше. Проще всего сделать это методом Фурье. Заметим, что эта система образует схему для дифференциальной задачи:
$$-\Delta u(x,y) + pu(x,y) = \hat{f}(x,y),$$

где $p = \frac{1}{\tau}$, а $\hat{f} = \frac{u}{\tau} + f(x, y)$.

Функции $u(x, y), f(x, y) \in C_0^\infty[0, 1]^2$ можно разложить в ряд Фурье, взяв синусы в качестве базисных функций:

$$u(x, y) = \sum_{n,m=1}^{\infty} \hat{c}_{nm}\phi^{(n)}(x)\psi^{(m)}(y),$$
$$\hat{f}(x, y) = \sum_{n,m=1}^{\infty} \hat{d}_{nm}\phi^{(n)}(x)\psi^{(m)}(y),$$

где

$$\phi^{(n)}(x) = \sin \pi n x, \quad \psi^{(m)}(y) = \sin \pi m y.$$

Перейдем в дискретное время:

$$u(x_i, y_j) = u_h(i, j) = \sum_{n,m=1}^{N_X-1, N_Y-1} c_{nm}\phi_i^{(n)}\psi_j^{(m)},$$
$$\hat{f}(x_i, y_j) = \hat{f}_h(i, j) = \sum_{n,m=1}^{N_X-1, N_Y-1} d_{nm}\phi_i^{(n)}\psi_j^{(m)},$$

где

$$\phi_i^{(n)} := \phi^{(n)}(x_i) = \sin \pi n i h_X, \quad \psi_j^{(m)} := \psi^{(m)}(x_j) = \sin \pi m j h_Y.$$

В отчете по задаче по линейной алгебре (см. директорию "LinAlg") были вычислены собственные значения этой функции для дискретизации оператора Лапласа:

$$-\Lambda_h^X \phi_i^{(n)} = \lambda_n^X \phi_i^{(n)}, \quad \lambda_n^X = \frac{4}{h_X^2} \sin^2\left(\frac{\pi n h_X}{2}\right),$$
$$-\Lambda_h^Y \psi_j^{(m)} = \lambda_m^Y \psi_j^{(m)}, \quad \lambda_m^Y = \frac{4}{h_Y^2} \sin^2\left(\frac{\pi m h_Y}{2}\right).$$

С учетом этого, для схемы

$$-\Lambda_h^X u_h(i, j) - \Lambda_h^Y u_h(i, j) + p u_h(i, i) = \hat{f}_h(i, j)$$

справедливо представление в виде ряда:

$$-\left(\Lambda_h^X+\Lambda_h^Y\right)\sum_{n,m=1}^{N_X-1,N_Y-1} c_{nm}\phi_i^{(n)}\psi_j^{(m)}+p\sum_{n,m=1}^{N_X-1,N_Y-1} c_{nm}\phi_i^{(n)}\psi_j^{(m)}= \\ =\sum_{n,m=1}^{N_X-1,N_Y-1} d_{nm}\phi_i^{(n)}\psi_j^{(m)}.$$

Отсюда, учитывая то, что $\phi_i^{(n)}$ и $\psi_j^{(m)}$ — собственные функции, имеем:

$$\sum_{n,m=1}^{N_X-1,N_Y-1} c_{nm}(\lambda_n^X+\lambda_m^Y+p)\phi_i^{(n)}\psi_j^{(m)}=\sum_{n,m=1}^{N_X-1,N_Y-1} d_{nm}\phi_i^{(n)}\psi_j^{(m)},$$

а значит

$$c_{nm}=\frac{d_{nm}}{\lambda_n^X+\lambda_m^Y+p},\quad 1\le n\le N_X-1,\quad 1\le m\le N_Y-1.$$

7 Практические алгоритмы.

7.1 Вариант 1.

Решить схему из раздела 2 можно по следующему алгоритму:

1. На этапе G известен слой $G: \ u_{i,j}^G\Big|_{0\le i,j\le N_x,N_y}^{G=\text{const}}$ и все слои до него.

2. Найдем коэффициенты d_{nm} разложения функции $\hat{f}(x,y)$ в дискретный ряд Фурье:

$$\frac{u_{i,j}^G}{\tau}+f(t_G,x_i,y_j)=:\hat{f}(x_i,y_j)=:\hat{f}_h(i,j)=\sum_{n,m=1}^{N_X-1,N_Y-1}\hat{d}_{nm}\phi_i^{(n)}\psi_j^{(m)}.$$

3. Найдем коэффициенты c_{nm} разложения функции $u^{G+1}(x,y)$ в дискретный ряд Фурье:

$$u(t_{G+1},x_i,y_j)=u_h^{G+1}(i,j)=\sum_{n,m=1}^{N_X-1,N_Y-1} c_{nm}\phi_i^{(n)}\psi_j^{(m)},$$

пользуясь формулой:

$$c_{nm} = \frac{\hat{d}_{nm}}{\frac{4}{h_X^2}\sin^2\left(\frac{\pi n h_X}{2}\right) + \frac{4}{h_Y^2}\sin^2\left(\frac{\pi m h_Y}{2}\right) + \frac{1}{\tau}},$$
$$1 \le n \le N_X - 1, \quad 1 \le m \le N_Y - 1.$$

4. Вычислить значения
$$u^{G+1}(i,j) = \sum_{n,m=1}^{N_X-1, N_Y-1} c_{nm}\phi_i^{(n)}\psi_j^{(m)}$$
и записать их в соответсвующий слой матрицы решения.

7.2 Вариант 2.

Решить схему из раздела 2 можно по следующему алгоритму:

1. На этапе G известны коэффициенты Фурье–разложения решения для фиксированного t_G : $u_{i,j}^G\Big|_{0\le i,j,\le N_x,N_y}^{G=\text{const}} = \sum u_{nm}^G\phi_i^{(n)}\psi_j^{(m)}$ и все слои до него.

2. Найдем коэффициенты d_{nm} разложения функции $f(x,y)$ в дискретный ряд Фурье:
$$f(t_G, x_i, y_j) = \sum_{n,m=1}^{N_X-1, N_Y-1} d_{nm}\phi_i^{(n)}\psi_j^{(m)}.$$

3. Тогда коэффициенты Фурье правой части уравнения можно найти по формуле:
$$\hat{f}(x_i, y_j) = \frac{u_{i,j}^G}{\tau} + f(t_G, x_i, y_j)$$
$$\hat{f}(x_i, y_j) = \frac{1}{\tau}\sum_{n,m=1}^{N_X-1, N_Y-1} u_{nm}^G\phi_i^{(n)}\psi_j^{(m)} + \sum_{n,m=1}^{N_X-1, N_Y-1} d_{nm}\phi_i^{(n)}\psi_j^{(m)} =$$
$$= \sum_{n,m=1}^{N_X-1, N_Y-1}\left(\frac{u_{nm}^G}{\tau} + d_{nm}\right)\phi_i^{(n)}\psi_j^{(m)} \Rightarrow \hat{d}_{nm} = \frac{u_{nm}^G}{\tau} + d_{nm}.$$

4. Найдем коэффициенты u_{nm}^{G+1} разложения функции $u^{G+1}(x,y)$ в дискретный ряд Фурье:

$$u(t_{G+1}, x_i, y_j) = u_h^{G+1}(i,j) = \sum_{n,m=1}^{N_X-1, N_Y-1} u_{nm}^{G+1} \phi_i^{(n)} \psi_j^{(m)},$$

пользуясь формулой:

$$u_{nm}^{G+1} = \frac{\frac{u_{nm}^G}{\tau} + d_{nm}}{\frac{4}{h_X^2}\sin^2\left(\frac{\pi n h_X}{2}\right) + \frac{4}{h_Y^2}\sin^2\left(\frac{\pi m h_Y}{2}\right) + \frac{1}{\tau}},$$
$$1 \le n \le N_X - 1, \quad 1 \le m \le N_Y - 1.$$

5. После нахождения всей трехмерной матрицы коэффициентов Фурье, вычислить значения в каждой точке сетки по этой аппроксимации.

Был реализован этот вариант.

8 Тесты

8.1 Базисные функции.

При начальном условии вида

$$u(0,x,y) = \sin \pi n x \sin \pi m y.$$

Легко подобрать решение задачи 1:

$$u(t,x,y) = e^{-\pi^2(n^2+m^2)t} \sin \pi n x \sin \pi m y.$$

Таким образом, можно проверить правильность вычисления коэффициента Фурье: при этом, корректная работа на базисных функциях даёт

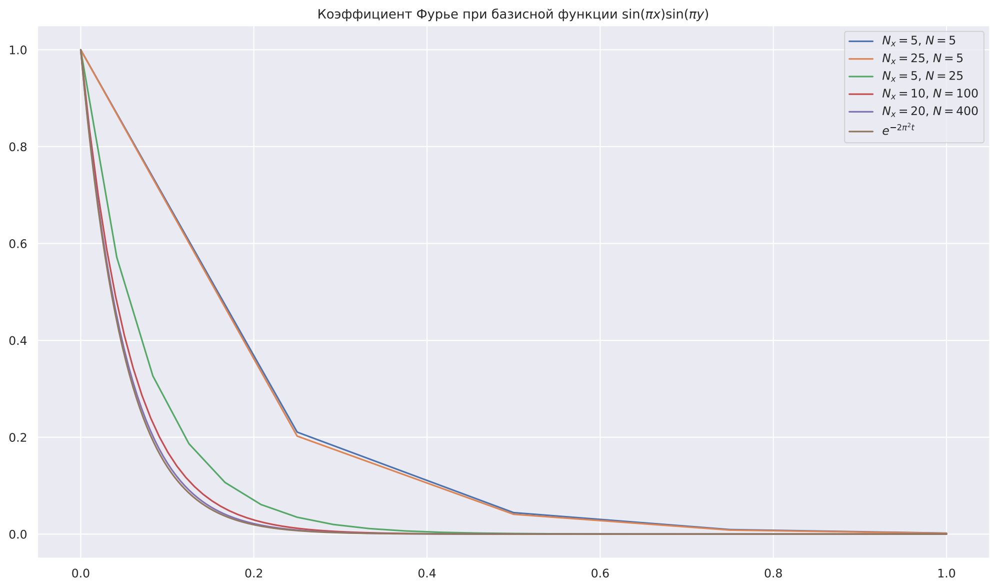

Рис. 1: Задача 1 при $f = 0$, $u(0, x, y) = \sin \pi n x \sin \pi m y$

существенные основания полагать, что и в общем случае программа будет работать корректно. На них же можно вычислить порядок сходимости (ясно, что домножение на произведение синусов происходит в самом конце и сходимость не испортит). Рассматриваются $1 \le n, m \le 2$. Результаты представлены на графиках 1–4.

8.2 Ненулевая правая часть.

Рассмотрим частный случай задачи 1, в котором легко угадать решение:

$$u_t(t, x) = u_{xx}(t, x, y) + u_{yy}(t, x, y) + e^{-2\pi^2 t} \sin \pi x \sin \pi y,$$

краевые условия:

$$u(t, x, y)\big|_{(x,y)\in\partial\Omega} = 0, \quad \Omega = [0, 1] \times [0, 1].$$
$$u(0, x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Omega.$$

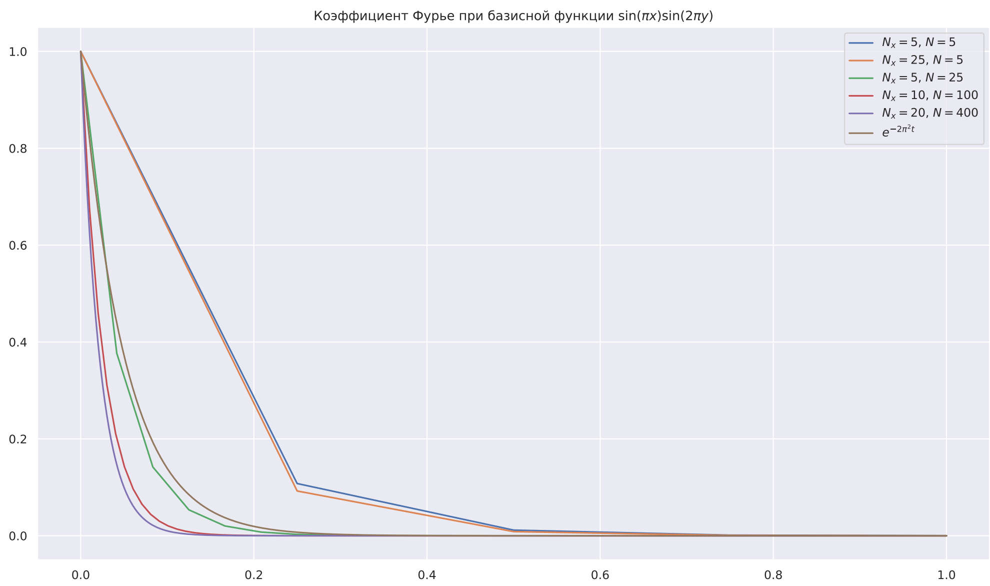

Рис. 2: Задача 1 при $f = 0$, $u(0, x, y) = \sin \pi n x \sin \pi m y$

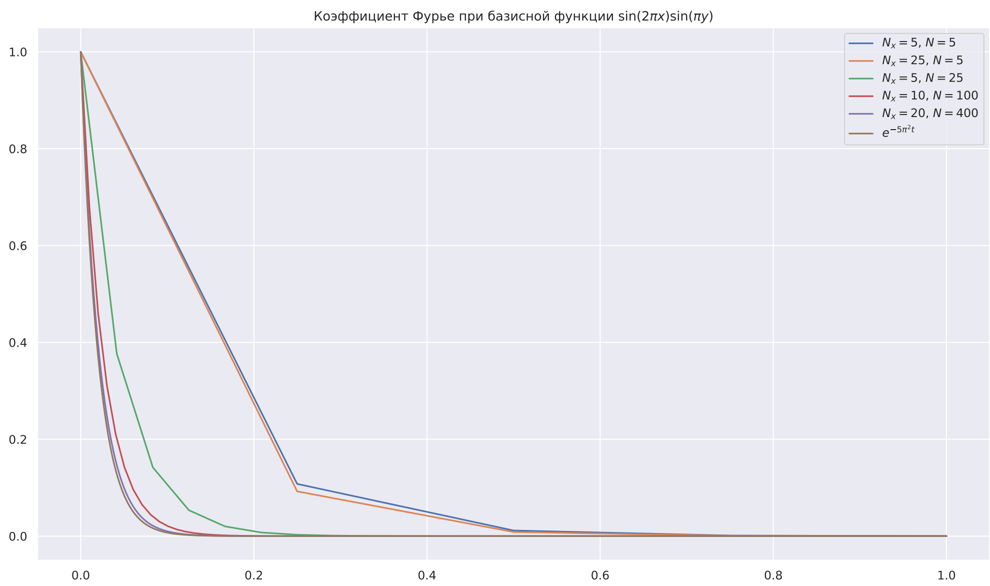

Рис. 3: Задача 1 при $f = 0$, $u(0, x, y) = \sin \pi n x \sin \pi m y$

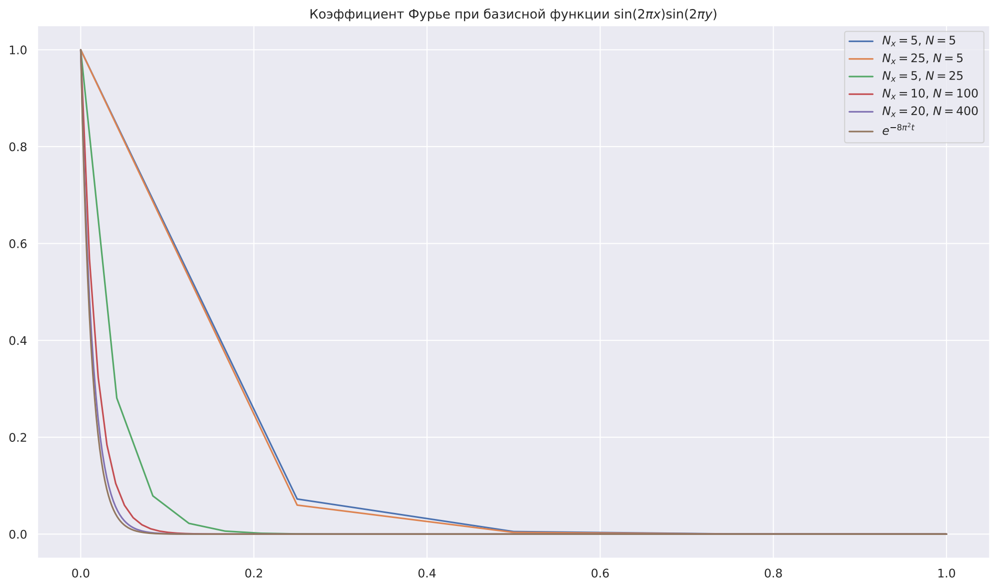

Рис. 4: Задача 1 при $f = 0$, $u(0, x, y) = \sin \pi n x \sin \pi m y$

Тогда видим, что функция

$$u(t, x, y) = te^{-2\pi^2 t} \sin \pi x \sin \pi y$$

является решением рассматриваемой задачи. Её единственный ненулевой коэффициент Фурье $u^t_{11} = te^{-2\pi^2 t}$, с этой функцией мы будем сравнивать численный результат (см. график 5).

8.3 Скорость сходимости.

Было проведено две серии тестов скорости сходимости:

1. $(N, N_x, N_y) = \{(i, i), \quad i \in \{100, 200, 300, 400, 500\}\}$ — для проверки сходимоти $O(\tau)$.

2. $(N, N_x, N_y) = \{(i^2, i, i), \quad i \in \{10, 20, 30\}\}$ — для проверки сходимоти $O(h_x^2 + h_y^2)$.

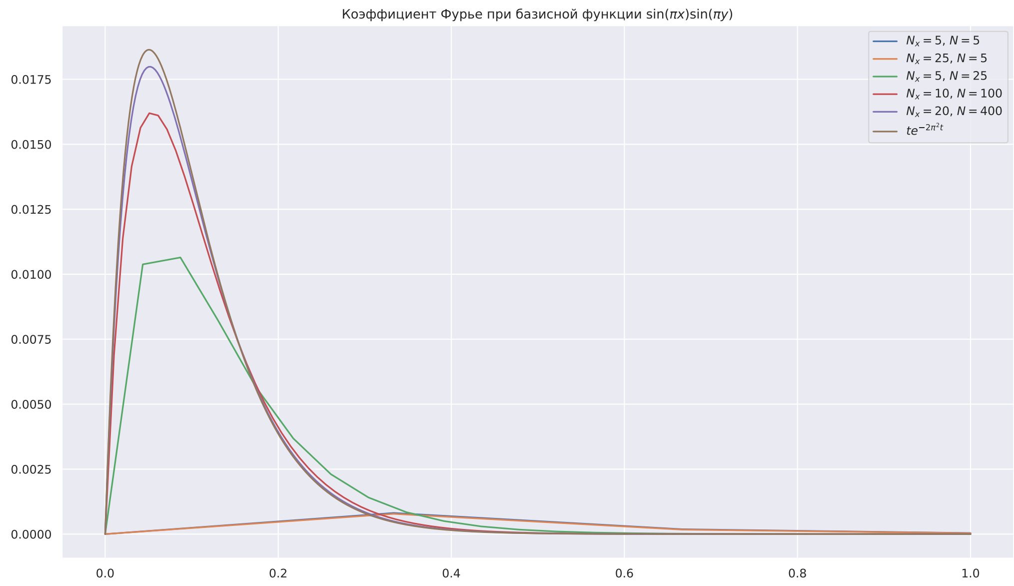

Рис. 5: Задача 1 при $f = \sin \pi n x \sin \pi m y$, $u(0, x, y) = 0$

Если

$$\delta(N, N_x, N_y) = \max_{n \le N, i \le N_x, j \le N_y} |u(t_n, x_i, y_j) - u_h(t_n, x_i, y_j)| = O(h_x^2 + h_y^2 + \tau),$$

то:

1. при хорошем h (в тесте взято $h_x = h_y = h = \tau$):

   $\ln(\delta(N, N_x, N_y)) \approx \ln(\tau) + \text{const},$

2. при плохом h (в тесте взято $h_x = h_y = h = \sqrt{\tau}$):

   $\ln(\delta(N, N_x, N_y)) \approx \ln(h) + \text{const}.$

Из графиков 6 и 7 видно, что эти условия выполнены.

8.4 Представление ответа в виде гиф-изображения.

С помощью языка Python для случая ненулевой f было построено три гиф-изображения (см. файл solution_pict.ipynb):

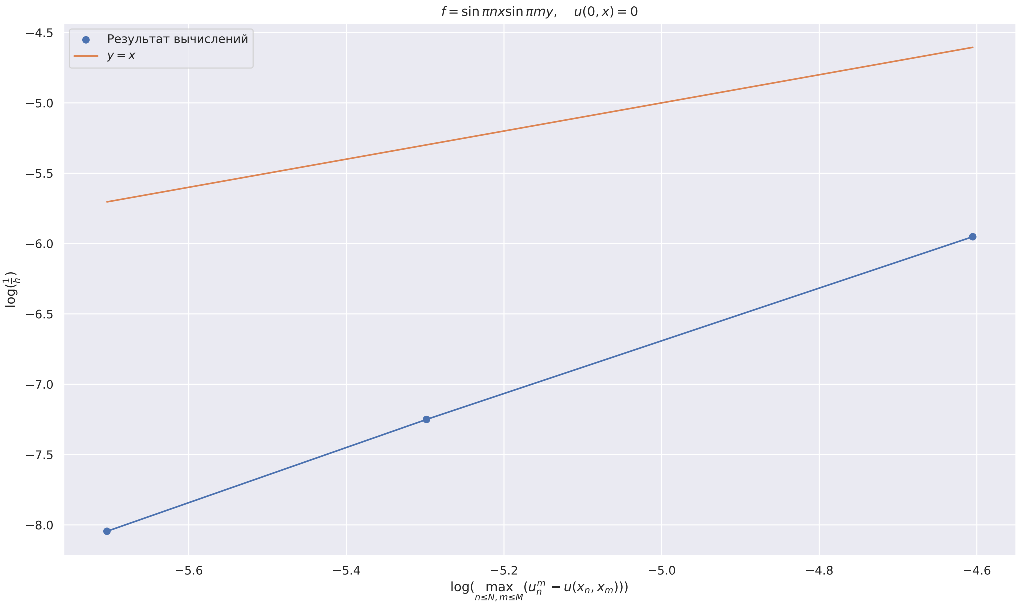

Рис. 6: Зависимость погрешности от размера сетки в первой серии тестов

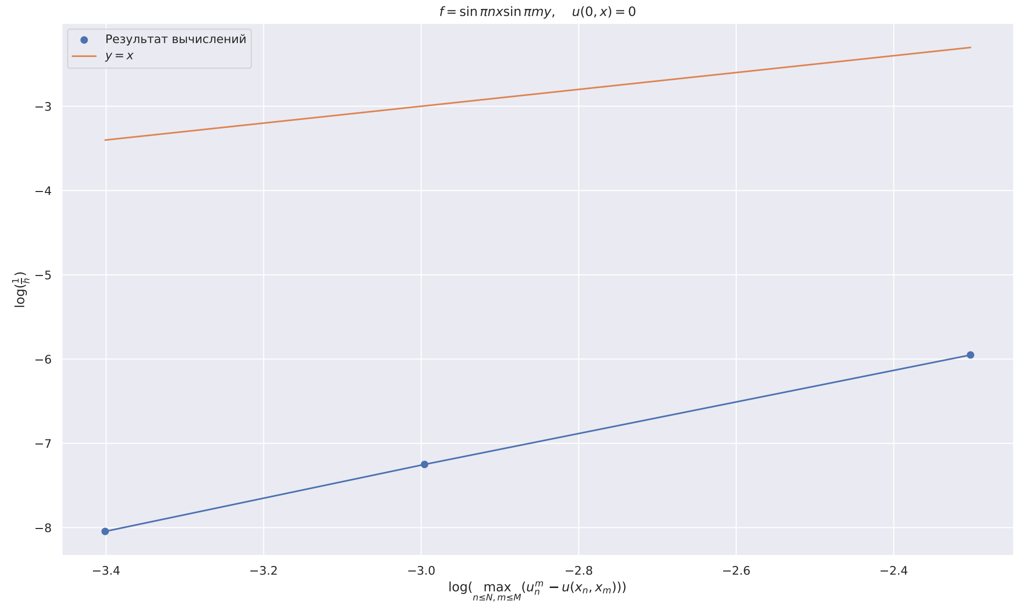

Рис. 7: Зависимость погрешности от размера сетки во второй серии тестов

1. Файл error.gif демонстрирует изменение ошибки схемы, по сравнению с аналитическим решением.

2. Файл numeric_vs_analitical.gif демонстрирует динамику численного и аналитического решения (численное решение соответствует красным точкам на графике).

3. Файл analitical.gif демонстрирует аналитическое решение в динамике.

4. Файл numerical.gif демонстрирует численное решение в динамике.