

Всеволод Заостровский, 409 группа

Отчёт по задаче ”Численное решение дифференциальных уравнений с частными производными. Явная схема для уравнения теплопроводности”.

1 Постановка задачи.

Необходимо решить уравнение:

$$u_t(t, x) = u_{xx}(t, x) - p(x)u(t, x) + f(t, x). \quad (1)$$

В моём варианте, краевые условия:

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, \quad u(x, 0) = u_0(x). \quad (2)$$

2 Решение дифференциального уравнения (для тестов).

Будем искать решение в виде $u(t, x) = X(x)T(t)$. С учетом краевых условий, получим:

$$u(0, x) = T(t)X(0) = 0 \Rightarrow X(0) = 0,$$

$$u(1, x) = T(t)X(1) = 0 \Rightarrow X(1) = 0.$$

Разрешим уравнение с учетом $u(t, x) = X(x)T(t)$:

$$XT' = X''T,$$

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{T} = -\lambda.$$

Рассмотрим уравнение на X , чтобы найти значения λ , при которых решение нетривиально:

$$X'' = -\lambda X,$$

$$X = C_1 \sin(\sqrt{\lambda}x) + C_2 \cos(\sqrt{\lambda}x),$$

$$X(0) = C_1 \sin(\sqrt{\lambda}0) + C_2 \cos(\sqrt{\lambda}0) = C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = 0.$$

$$X(1) = C_1 \sin(\sqrt{\lambda}1) + 0 * \cos(\sqrt{\lambda}1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin(\sqrt{\lambda}) = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda} = \pi k, k \in Z \Rightarrow \lambda = \pi^2 k^2, k \in Z.$$

Случай $C_1 = 0$ дает тривиальное решение. С учетом вычислений выше, можем записать общий вид для X и T :

$$X = C_1 \sin(\pi kx), \quad T = C_2 \exp(-\pi^2 k^2 t), \quad k \in Z.$$

Таким образом, общее решение дифференциального уравнения:

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(\pi nx) \exp(-\pi^2 n^2 t).$$

3 Дискретизация дифференциального уравнения.

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = \frac{u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1}}{h^2} - p(x_m)u_m^{n+1} + f(t_n, x_{m+1}), \quad (3)$$

$$m = 1 \dots M - 1, \quad (4)$$

$$n = 1 \dots N - 1. \quad (5)$$

$$(6)$$

В моём варианте, краевые условия:

$$\forall n, m : \quad u_0^n = 0, \quad u_1^n = 0, \quad u_m^0 = u_0(x_m). \quad (7)$$

Заметим также, что существует схема Кранка–Николсона, формально дающая сходимость $O(h^2 + \tau^2)$. Однако, во-первых, задание требует неявную схему (а не полунеявную), а, во-вторых, такая сходимость недостижима в этой схеме практически из-за численных проблем.

4 Аппроксимация на решении.

Разложим значения решения в ряд Тейлора:

$$\begin{aligned} u(t_n, x_{m+1}) &= u(t_n, x_m) + hu_x(t_n, x_m) + \frac{h^2}{2}u_{xx}(t_n, x_m) + \frac{h^3}{6}u_{xxx}(t_n, x_m) \\ &\quad + \frac{h^4}{24}u_{xxxx}(t_n, x_m) + O(h^5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u(t_n, x_{m-1}) &= u(t_n, x_m) - hu_x(t_n, x_m) + \frac{h^2}{2}u_{xx}(t_n, x_m) - \frac{h^3}{6}u_{xxx}(t_n, x_m) \\ &\quad + \frac{h^4}{24}u_{xxxx}(t_n, x_m) + O(h^5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u(t_{n+1}, x_m) &= u(t_n, x_m) + \tau u_x(t_n, x_m) + \frac{\tau^2}{2}u_{tt}(t_n, x_m) + \frac{\tau^3}{6}u_{ttt}(t_n, x_m) \\ &\quad + \frac{\tau^4}{24}u_{tttt}(t_n, x_m) + O(\tau^5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u(t_{n-1}, x_m) &= u(t_n, x_m) - \tau u_x(t_n, x_m) + \frac{\tau^2}{2}u_{tt}(t_n, x_m) - \frac{\tau^3}{6}u_{ttt}(t_n, x_m) \\ &\quad + \frac{\tau^4}{24}u_{tttt}(t_n, x_m) + O(\tau^5) \end{aligned}$$

Отсюда имеем:

$$\begin{aligned}
\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} &= \frac{u(t_{n+1}, x_m) - u(t_n, x_m)}{\tau} = u_t(t_n, x_m) \\
&\quad + \frac{\tau}{2} u_{tt}(t_n, x_m) + \frac{\tau^2}{6} u_{ttt}(t_n, x_m) + \frac{\tau^3}{24} u_{tttt}(t_n, x_m) + O(\tau^4) \\
\frac{u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1}}{h^2} &= \frac{u(t_{n+1}, x_{m+1}) - 2u(t_{n+1}, x_m) + u(t_{n+1}, x_{m-1}))}{h^2} = \\
&= u_{xx}(t_n, x_m) + \frac{h^2}{12} u_{xxxx}(t_n, x_m) + O(h^4)
\end{aligned}$$

Подставив эти выражения в дифференциальное уравнение, получим:

$$\begin{aligned}
&\left\| \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} - \frac{u_{m+1}^{n+1} + 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1}}{h^2} + p(x_m)u_m^{n+1} - f(t_n, x_{m+1}) \right\| = \\
&= \left\| -u_{xx}(t_n, x_m) + O(h^2) + u_t(t_n, x_m) + O(\tau) + p(x_m)u_m^{n+1} - f(t_n, x_{m+1}) \right\| = \\
&= O(h^2 + \tau).
\end{aligned}$$

С учетом того, что начальные условия даны точно и, очевидно, $|f(t_n, x_m) - f_m^n| \rightarrow 0$, получаем, что порядок аппроксимации на решении данной схемы составляет $O(\tau + h^2)$.

5 Устойчивость схемы.

Удобная для анализа форма записи схемы имеет вид:

$$u_m^{n+1} - u_m^n = \rho(u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1}) - \tau p(x_m)u_m^{n+1} + \tau f(t_n, x_{m+1}), \quad \rho = \frac{\tau}{h^2}.$$

Выбирая из всех значений u_m^{n+1} , по модулю равных $\|u^{n+1}\|$, такое, у которого индекс m принимает наименьшее значение, имеем

$$|u_m^{n+1}| > |u_{m-1}^{n+1}| \quad \text{и} \quad |u_m^{n+1}| \geq |u_{m+1}^{n+1}|.$$

Отсюда $|2u_m^{n+1}| > |u_{m-1}^{n+1}| + |u_{m+1}^{n+1}|$, и знак выражения $2u_m^{n+1} - u_{m-1}^{n+1} - u_{m+1}^{n+1}$ совпадает со знаком u_m^{n+1} , т. е. справедлива оценка снизу

$$\|u^{n+1}\| = |u_m^{n+1}| \leq |u_m^{n+1} + \rho(2u_m^{n+1} - u_{m-1}^{n+1} - u_{m+1}^{n+1})| = |u_m^n + \tau f_m^{n+1}|.$$

Таким образом, при любых шагах сетки τ и h справедливо неравенство $\|u^{n+1}\| \leq \|u^n\| + \tau \|f^{n+1}\|$. Из него получаем:

$$\begin{aligned} \|u^{n+1}\| &\leq \|u^n\| + \tau \|f^n\| \leq \|u^{n-1}\| + \tau (\|f^n\| + \|f^{n-1}\|) \leq \dots \leq \\ &\leq \|u^0\| + \sum_{k=0}^n \tau \|f^k\| \leq \|u^0\| + (n+1)\tau \max_k \|f^k\|. \end{aligned}$$

Таким образом, схема безусловно устойчива.

6 Алгоритм построения сети.

Отсюда имеем:

$$-\frac{u_{m+1}^{n+1}}{h^2} + u_m^{n+1}(\frac{1}{\tau} + \frac{2}{h^2} + p(x_m)) - \frac{u_{m-1}^{n+1}}{h^2} = f(t_n, x_{m+1}) + \frac{u_m^n}{\tau}.$$

Фактически, требуется построить значения функции на сети. Процесс построения описывается рисунком 1: известны значения в левой, правой и нижней границах квадрата $[0, 1] \times [0, 1]$. Значение в каждом узле определяется значениями соседних узлов: слева, справа и непосредственно под ним.

Таким образом, зная вектор $\{u_m^n\}_{m=1, \dots, N-1}$ для нахождения вектора $\{u_m^{n+1}\}_{m=1, \dots, M-1}$ необходимо решить систему:

$$F = \begin{pmatrix} \frac{1}{\tau} + \frac{2}{h^2} + p(x_m) & -\frac{1}{h^2} & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{1}{h^2} & \frac{1}{\tau} + \frac{2}{h^2} + p(x_m) & -\frac{1}{h^2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 - \frac{1}{h^2} & \frac{1}{\tau} + \frac{2}{h^2} + p(x_m) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^{n+1} \\ u_2^{n+1} \\ \dots \\ u_{M-2}^{n+1} \\ u_{M-1}^{n+1} \end{pmatrix},$$

где

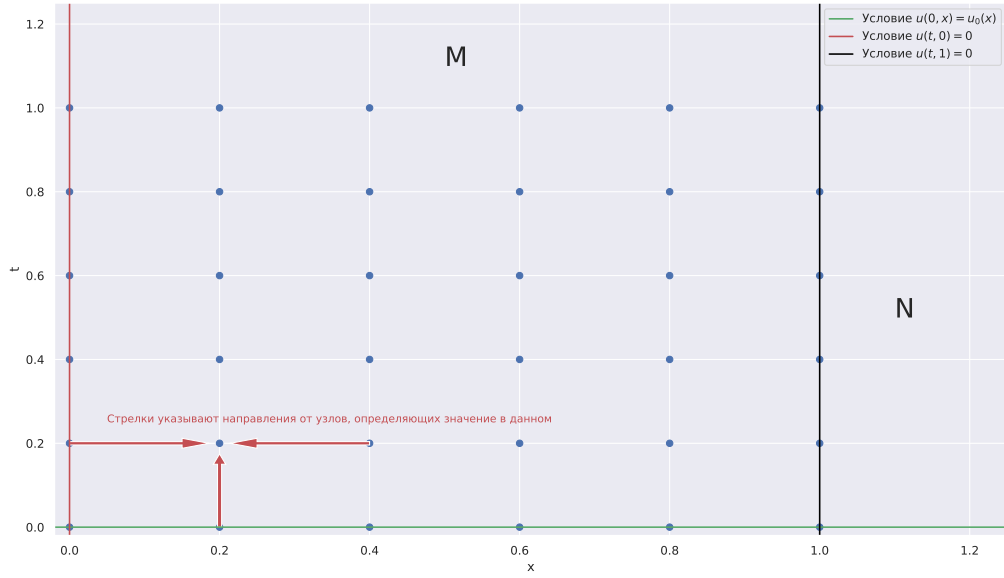


Рис. 1: Графическое представление задачи и порядка вычисления значений в узлах сетки

$$F = \begin{pmatrix} f(t_1, x_{m+1}) + \frac{u_1^n}{\tau} \\ f(t_2, x_{m+1}) + \frac{u_2^n}{\tau} \\ \dots \\ f(t_{n-2}, x_{m+1}) + \frac{u_{M-2}^n}{\tau} \\ f(t_{n-1}, x_{m+1}) + \frac{u_{M-1}^n}{\tau} \end{pmatrix}.$$

Сделать это можно, к примеру, методом прогонки.

7 Тесты

В разделе 2 найдено представление решения в виде ряда, коэффициенты которого определяются из условия $u(x, 0) = u_0(x)$. Для тестов возьмём

$$u_0(x) = u(x, 0) = \sin(\pi nx).$$

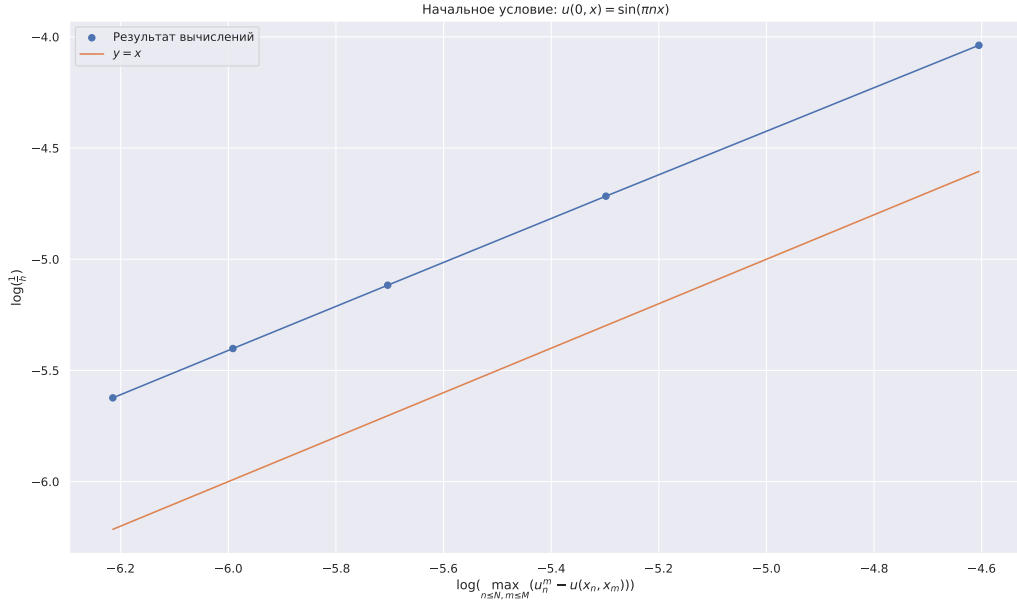


Рис. 2: Зависимость погрешности от размера сетки в первой серии тестов

В этом случае легко видеть из разложения общего решения в ряд, что

$$u(t, x) = \sin(\pi x) \exp(-\pi^2 t).$$

Было проведено два теста скорости сходимости:

1. $(N, M) = \{(i, i), \quad i \in \{100, 200, 300, 400, 500\}\}$ — для проверки сходимости $O(\tau)$.
2. $(N, M) = \{(i^2, i), \quad i \in \{10, 20, 30\}\}$ — для проверки сходимости $O(h^2)$.

Если $\delta(N, M) = \max_{n \leq N, m \leq M} |u(t_n, x_m) - u_h(t_n, x_m)| = O(h^2 + \tau)$, то:

1. при хорошем h (в тесте взято $h = \tau$): $\ln(\delta(N, M)) \approx \ln(\tau) + \text{const}$,
2. при плохом h (в тесте взято $h = \sqrt{\tau}$): $\ln(\delta(N, M)) \approx \ln(h) + \text{const}$.

Из графиков 2 и 3 видно, что эти условия выполнены.

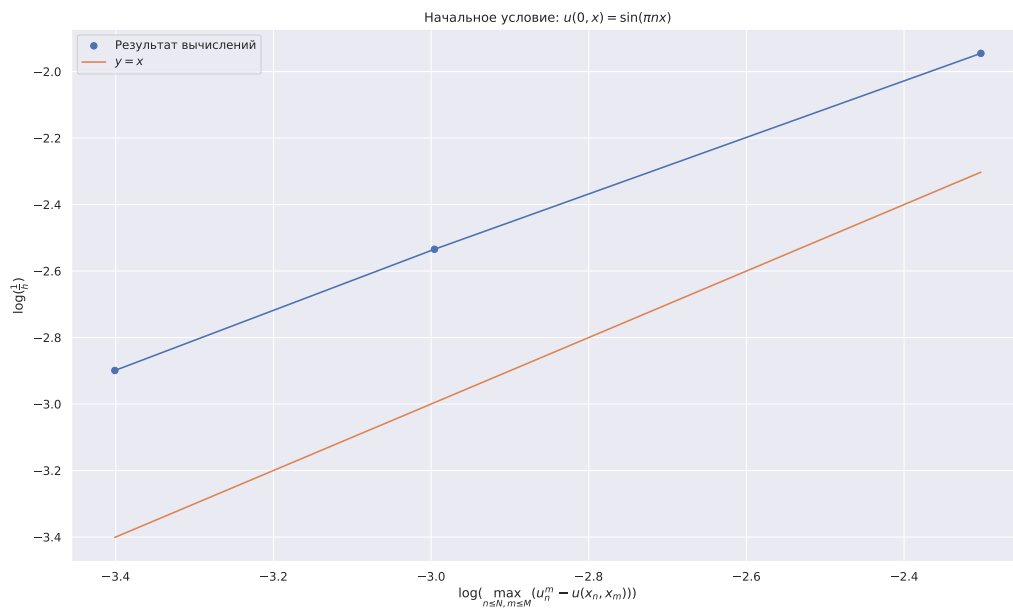
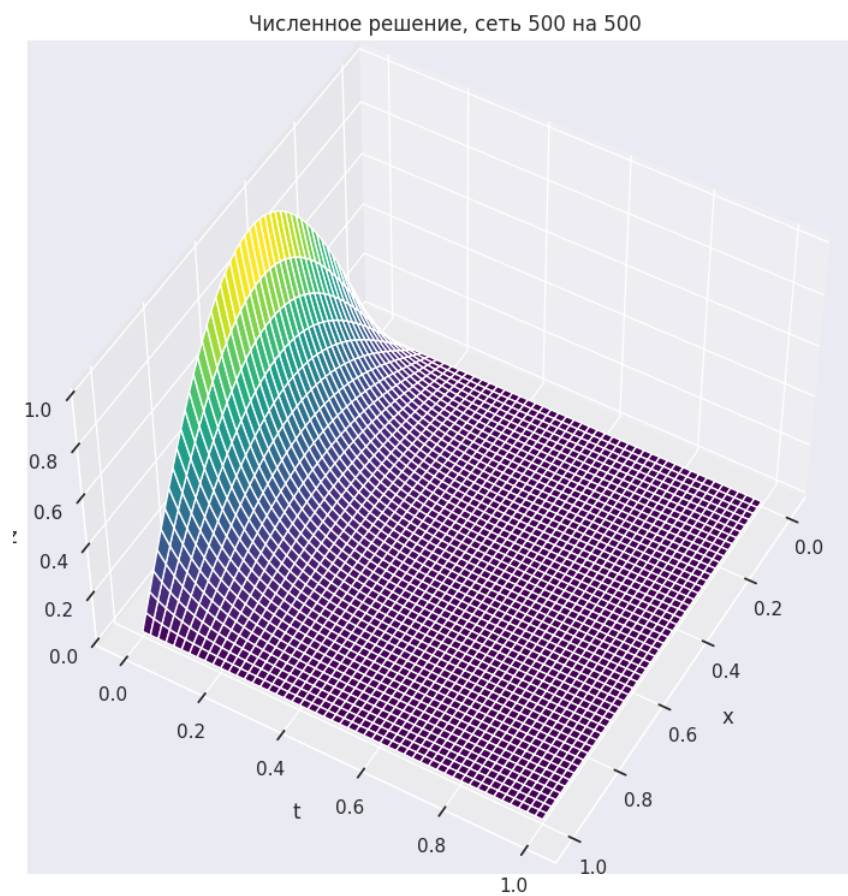
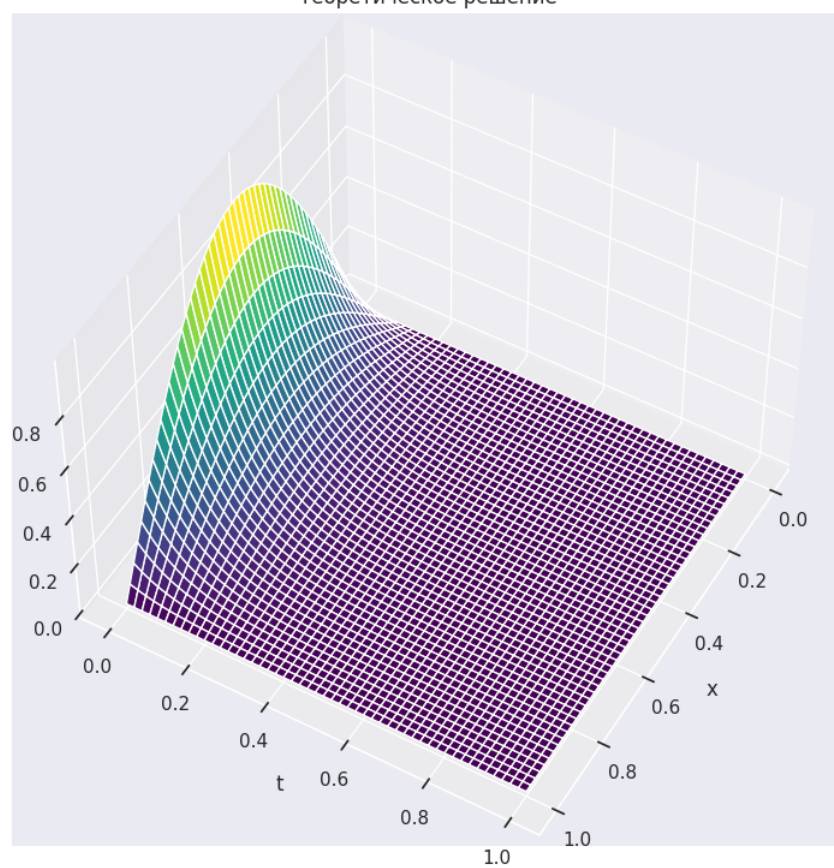


Рис. 3: Зависимость погрешности от размера сетки во второй серии тестов



Теоретическое решение



Численное решение, сеть 100 на 10

