

## Отчёт по задаче "Численное интегрирование".

### 1 Задача 1.

**Задача 1.** Реализуйте метод Симпсона и метод Гаусса в виде функции с прототипом

```
double Integral (double a, double b, double (*f)(double));
```

где  $f$  — указатель на подинтегральную функцию. Проверьте выполнение указанных оценок погрешности для  $f(x) = x^n$ ,  $n = 0, 1, 2, 3, 5, 9$ ,  $a = 1$ ,  $b = 1.1$ .

**Решение.** Реализацию программы см в разделе 1d. Ниже приведены результаты вычислений, выполненных в среде Wolfram Mathematica, и результаты работы программы.

Выражение	Wolfram Mathematica	Формула Симсона	Формула Гаусса
$\int_1^{1.1} dx$	0.1	0.1	0.1
$\int_1^{1.1} x dx$	0.105	0.105	0.105
$\int_1^{1.1} x^2 dx$	0.1103333333333333	0.1103333333333333	0.11025
$\int_1^{1.1} x^3 dx$	0.116025	0.116025	0.1157625
$\int_1^{1.1} x^5 dx$	0.1285935	0.1285939375	0.12762815625
$\int_1^{1.1} x^9 dx$	0.159374246	0.159387675915235	0.155132821597852

### 2 Задача 2.

**Задача 2.** Реализуйте составную квадратуру Симпсона и квадратуру Гаусса в виде функции

```
double Integral (double a, double b, double (*f)(double), int N);
```

где  $N$  — число разбиений отрезка интегрирования  $[a, b]$  на равные подотрезки. Выпишите явную асимптотику для погрешности составных квадратур Симпсона и Гаусса в форме  $R_{N,n}^{[a,b]}(f) \approx C/N^p$ . Сравните теоретические оценки с численными расчетами для следующих функций:

$$\int_0^\pi \cos 100x dx = 0, \quad \int_0^1 \exp -1000x dx \approx 10^{-3}, \quad \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi.$$

**Решение.** Для формул Симпсона и Гаусса имеем соответственно:

$$R_n^S(f) = |I^{[a,b]}(f) - S_n^{[a,b]}(f)| \leq \frac{\|f^{(4)}\|}{2880}(b-a)^5.$$

$$R_n^G(f) = |I^{[a,b]}(f) - S_n^{[a,b]}(f)| \leq \frac{\|f^{(6)}\|}{2016000}(b-a)^7.$$

Пусть  $a_k := a + \frac{(b-a)k}{N}$ . Тогда:

$$\begin{aligned} R_{N,n}^S(f) &= |I^{[a,b]}(f) - S_{N,n}^{[a,b]}(f)| \leq \sum_{k=1}^N |I^{[a_k, a_{k+1}]}(f) - S_n^{[a_k, a_{k+1}]}(f)| \\ &\leq \sum_{k=1}^N \frac{\|f^{(4)}\|}{2880} (a_{k+1} - a_k)^5 \leq \frac{\|f^{(4)}\|}{2880} \sum_{k=1}^N \left(\frac{b-a}{N}\right)^5 = \frac{(b-a)^5 \|f^{(4)}\|}{2880} \sum_{k=1}^N \frac{1}{N^5} \\ &= \frac{(b-a)^5 \|f^{(4)}\|}{2880N^4}. \end{aligned}$$

Аналогично, для квадратуры Гаусса имеем:

$$\begin{aligned} R_{N,n}^G(f) &= |I^{[a,b]}(f) - S_{N,n}^{[a,b]}(f)| \leq \sum_{k=1}^N |I^{[a_k, a_{k+1}]}(f) - S_n^{[a_k, a_{k+1}]}(f)| \\ &\leq \sum_{k=1}^N \frac{\|f^{(6)}\|}{2016000} (a_{k+1} - a_k)^7 \leq \frac{\|f^{(6)}\|}{2016000} \sum_{k=1}^N \left(\frac{b-a}{N}\right)^7 = \frac{(b-a)^7 \|f^{(6)}\|}{2016000} \sum_{k=1}^N \frac{1}{N^7} \\ &= \frac{(b-a)^7 \|f^{(6)}\|}{2016000N^6}. \end{aligned}$$

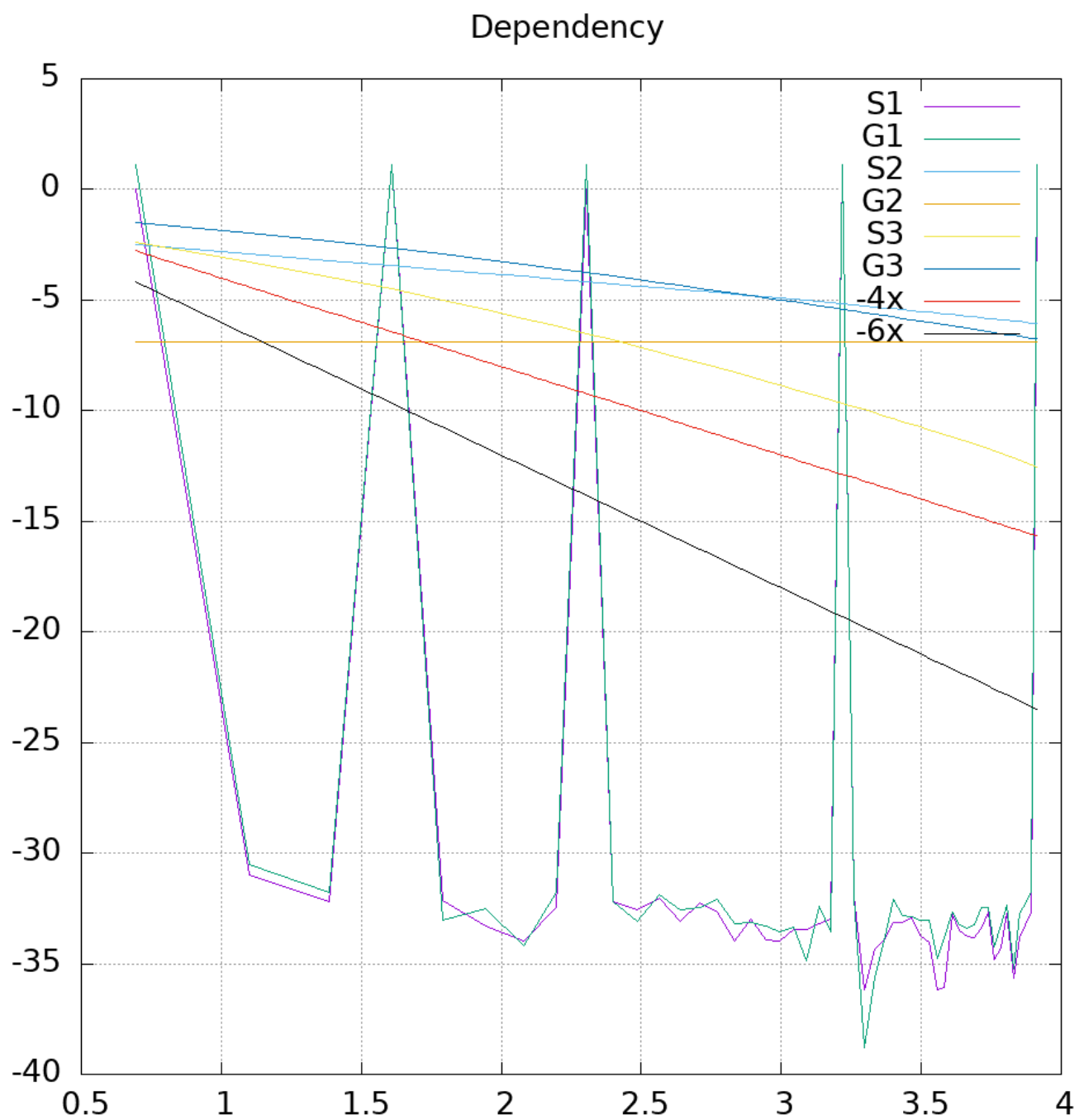


Рис. 1: Результаты тестов квадратур.

### 3    Задача 4.

**Задача 4.** Численно найдите на примере задачи

$$I(f) = \int_{[0,1]} \int_{[0,1]} (x_1^4 + x_1^2 x_2^2 + x_2^4) dx$$

асимптотику  $R_N^{[0,1]^2}(f) = |I(f) - S_N(f)| \approx C/N^p$  для погрешности полученной составной квадратур.

**Решение.** Ответ, полученный численно:  $p = 1.067138681040957$

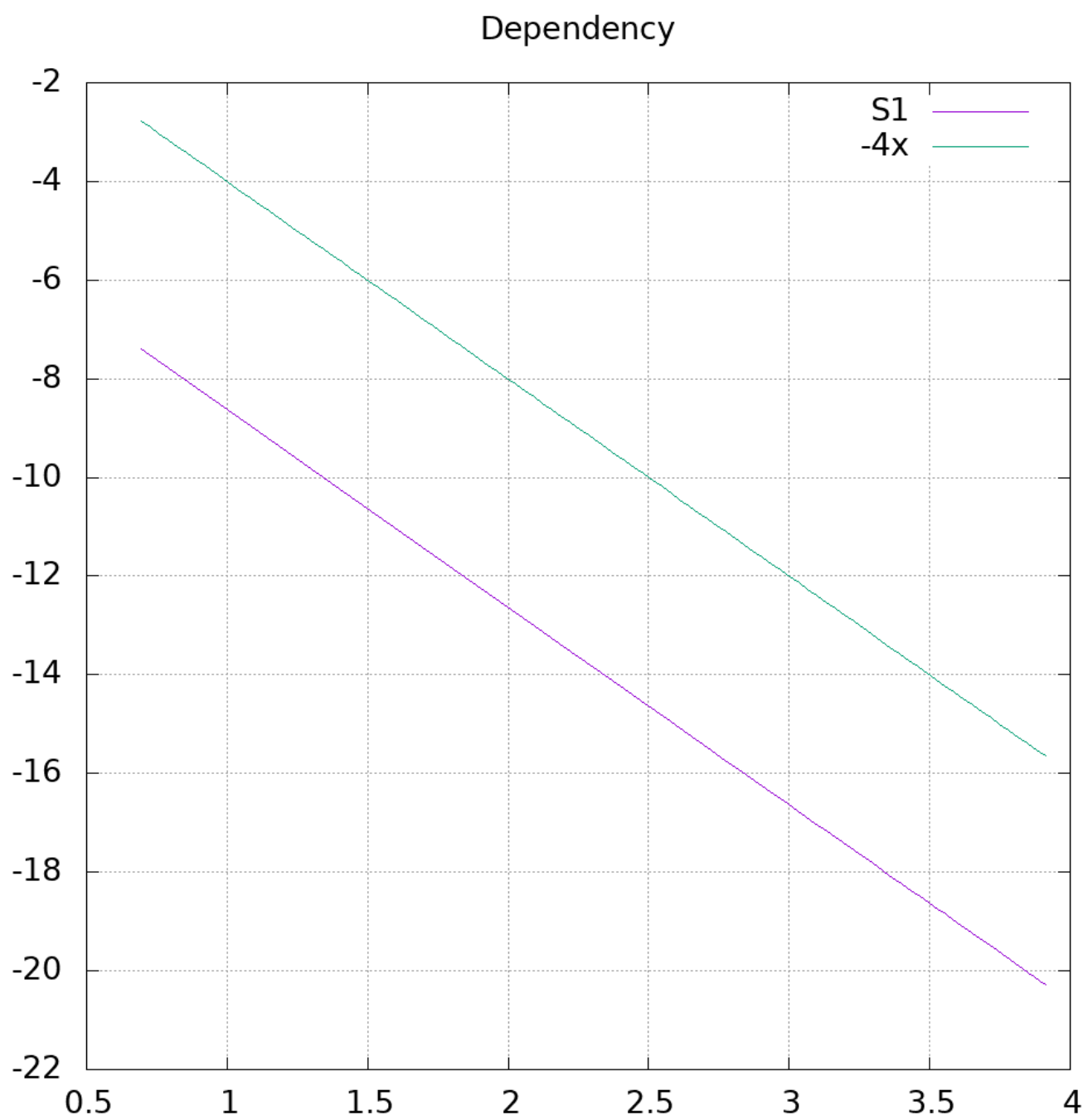


Рис. 2: Ассимптотика ошибки.