

Отчёт по задаче ”Численное решение дифференциальных уравнений второго порядка методами Фурье и прогонки”.

1 Постановка задачи.

Необходимо решить уравнение:

$$-y'' + p(x)y(x) = f(x). \quad (1)$$

В моём варианте, краевые условия:

$$y_0 = 0, \quad y_N = 0, \quad h = \frac{1}{N}. \quad (2)$$

$$(3)$$

2 Численная схема и её сходимость.

Будем аппроксимировать дифференциальное уравнение схемой:

$$-\frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} + py_k = f_k, \quad k = 1, \dots, N-1; \quad (4)$$

с краевыми условиями:

$$y_0 = y_N = 0, \quad h = \frac{1}{N}, \quad p \geq 0. \quad (5)$$

Исследуем сходимость схемы с помощью теоремы Филлипова.

Теорема 1. 1. (3.2) и (4) — линейны.

2. Существует единственное решение задачи (3.2) с краевыми условиями (2).

3. Разностная схема (4) аппроксимирует задачу на решении с порядком 2:

$$\|L_h[y]_h - f_h\|_{2,h} + \|l_h[y]_h - \phi_h\|_{2,h} \leq Ch^2,$$

где первое слагаемое отвечает норме разности схемы на решении, а вторая описывает точность приближения начальных условий.

Кроме того, требуется, чтобы

$$\|f(x_k) - f_{k,h}\|_{2,h} \rightarrow 0 \text{ при } h \rightarrow 0.$$

4. Разностная схема устойчива в норме $\|\cdot\|_{2,h}$:

$$\|A^{-1}\|_{2,h} \leq \text{const}.$$

Утверждение 1. Теорема Филлипова выполняется для задачи (3.2)–(2) и схемы (4)–(5).

Доказательство. 1. (3.2) и (4) — линейны по определению.

2. Из теории дифференциальных уравнений известно, что такой тип уравнений имеет единственное решение.

3. По определению аппроксимации на решении,

$$\begin{aligned} \|L_h[y]_h - f_h\|_{2,h} &= \left\| -\frac{y(x_{k+1}) - 2y(x_k) + y(x_{k-1}))}{h^2} + py_k - f(x_k) \right\|_{2,h} = \\ &= \left\| -\frac{1}{h^2} \left(y(x_k) + hy'(x_k) + \frac{h^2}{2}y''(x_k) + \frac{h^3}{6}y'''(x_k) + O(h^4) \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{h^2} \left(y(x_k) - hy'(x_k) + \frac{h^2}{2}y''(x_k) - \frac{h^3}{6}y'''(x_k) + O(h^4) \right) \right. \\ &\quad \left. + py_k + \frac{2}{h^2}y(x_k) - f(x_k) \right\|_{2,h} = \|O(h^2) + \underbrace{(-y''(x_k) + py_k - f(x_k))}_{=0, \text{ поскольку } y - \text{ решение}}\|_{2,h} \leq Ch^2 \end{aligned}$$

При этом краевые условия даны точно. Таким образом, имеем 2 порядок аппроксимации на решении.

4. В отчёте к задаче по итерационным методам решения систем уравнений (см. каталог LinAlg) были найдены собственные значения (и собственные векторы) задачи выше (при условии, что $p = \text{const}$):

$$\lambda_n = p - 2N^2(\cos(\frac{\pi n}{N}) - 1) = \frac{4}{h^2} \sin^2(\frac{\pi n h}{2}) + p, \quad n = 1 \dots N - 1.$$

Поскольку $\sin x \geq \frac{2}{\pi}x$ при $x \leq \frac{\pi}{2}$, для собственных значений имеем оценку:

$$\lambda_n = \frac{4}{h^2} \sin^2(\frac{\pi n h}{2}) + p \geq \frac{4}{h^2} \frac{4}{\pi^2} \frac{\pi^2 n^2 h^2}{4} + p > \text{const} > 0.$$

Тогда

$$\|A^{-1}\|_{2,h} = \max \frac{1}{\lambda(A)} \leq \text{const}.$$

Таким образом, по теореме Филлипова, схема имеет порядок сходимости равный двум. □

3 Программная реализация решения дифференциального уравнения.

Для численной реализации схемы фактически необходимо решить систему уравнений (4)–(5). В случае постоянного p это можно сделать методом Фурье. В более общем случае — методом прогонки. Были реализованы оба метода. См. папку `../Code/src`.

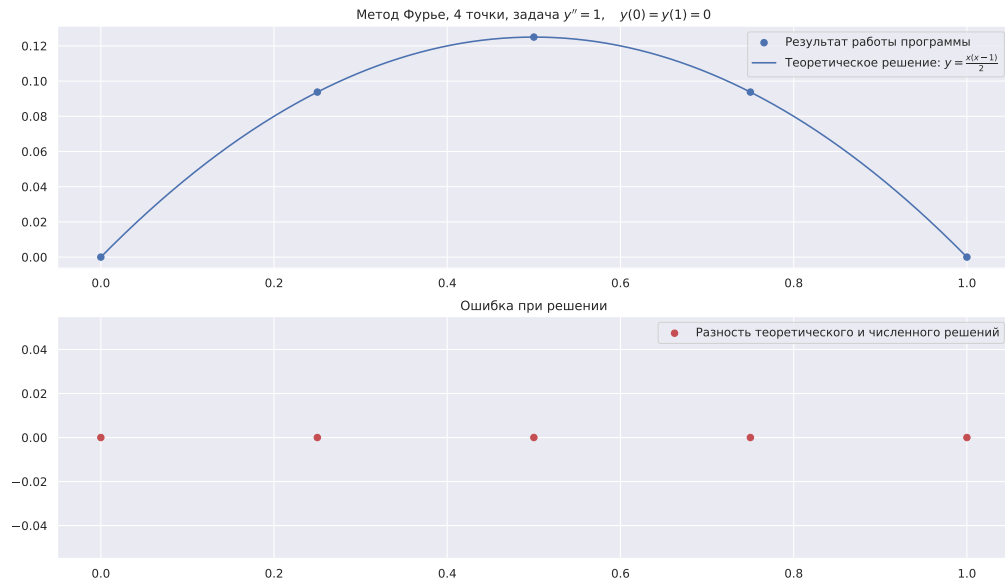


Рис. 1: Результаты теста на порядок сходимости для $p = 0$, метод Фурье

3.1 Порядок сходимости схемы.

Поскольку схема имеет второй порядок сходимости, она должна быть точна на полиномах до 2 степени включительно. Рассмотрим задачу

$$-y'' = 1,$$

с краевыми условиями:

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0.$$

Её решение: $y = \frac{-x(x-1)}{2}$. Решим эту задачу численно на небольшом количестве точек. Как видно из рисунков, графики точно совпали (это проверено численно, точки совпадают с машинной точностью).

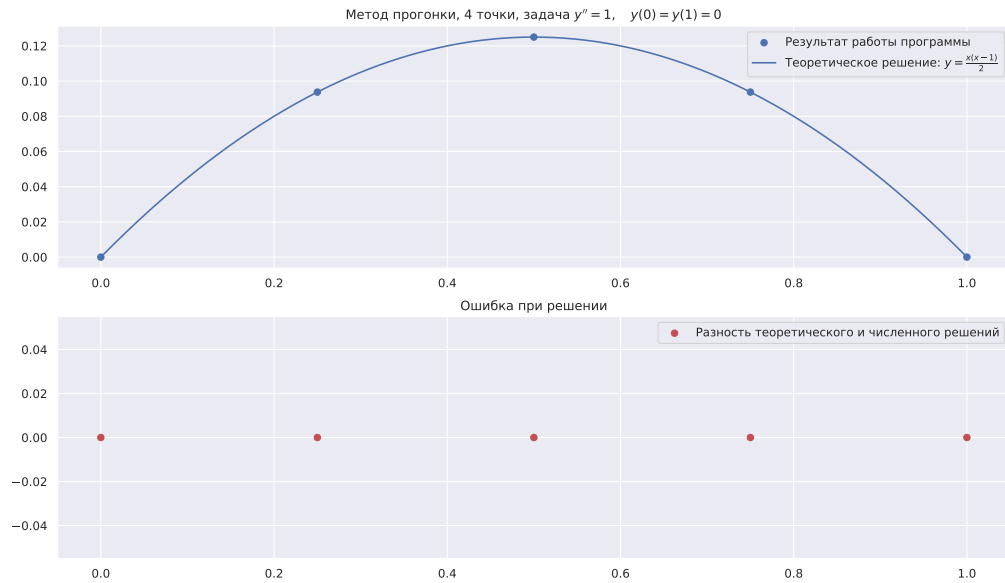


Рис. 2: Результаты теста на порядок сходимости для $p = 0$, метод прогонки

3.2 Корректность работы с $p \neq 0$.

Теперь рассмотрим задачу

$$-y'' + y = 1,$$

с краевыми условиями:

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0.$$

Её решение: $y = Ce^x - (1 + C)e^{-x} + 1$, где $C = -\frac{1}{e+1}$. Погрешность численного решения не видна на графике. Она составляет примерно $3e - 6$.

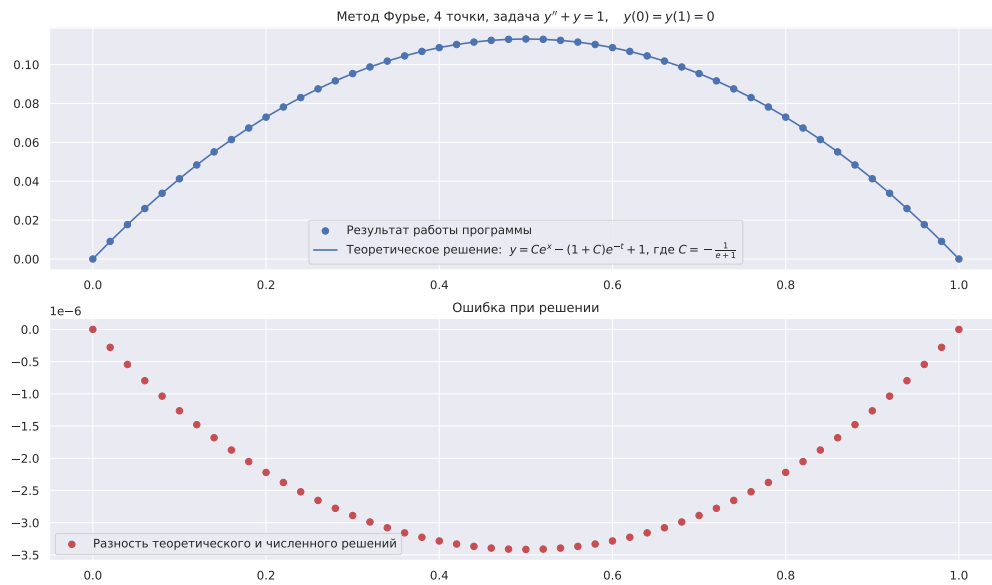


Рис. 3: Результаты теста на корректность для $p = 1$, метод Фурье

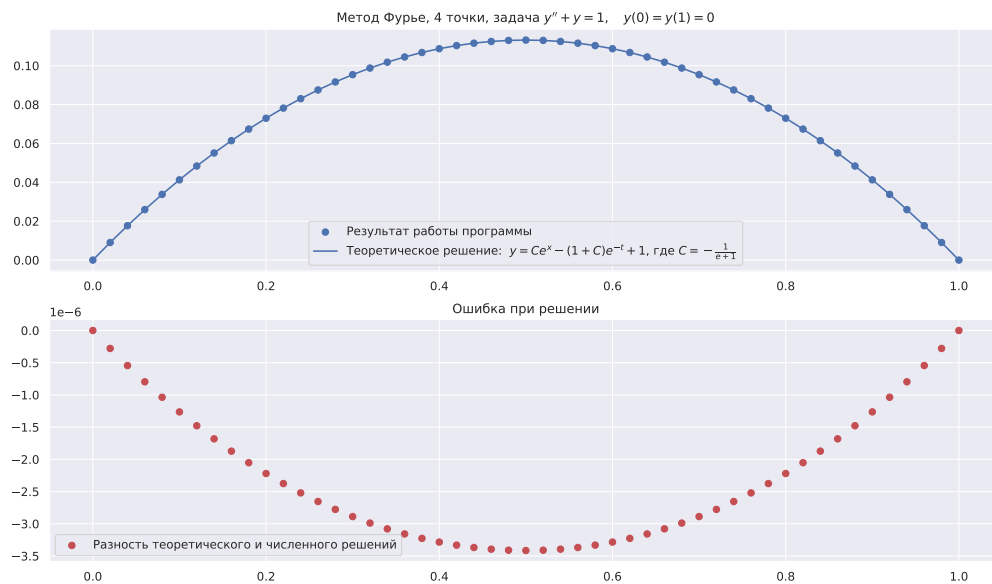


Рис. 4: Результаты теста на корректность для $p = 1$, метод прогонки