

Всеволод Заостровский, 409 группа

**Отчёт по задаче "Приближение с помощью построения
двумерного ряда Фурье".**

1 Постановка задачи.

Для функции $u(x) \in C^\infty[0, 1]$, удовлетворяющей краевым условиям:

$$u|_\Omega = 0,$$

необходимо выписать двумерный тригонометрический ряд Фурье и сформулировать теорему сходимости. Затем, на сетке:

$$\begin{aligned}x_0 &= \frac{-h_x}{2}, \quad y_0 = \frac{-h_y}{2}, \\x_N &= 1, \quad y_N = 1, \\h_x &= h_y = h = \frac{1}{N - 0.5},\end{aligned}$$

выписать двумерный дискретный тригонометрический ряд Фурье.

Найти дискретное скалярное произведение, сохраняющее ортогональность базисных функций. Нормировать базисные функции.

И, наконец, для некоторой тестовой функции из указанного класса численно найти порядок сходимости её дискретного ряда Фурье.

2 Тригонометрический ряд Фурье.

Функцию $u(x, y) \in C^\infty[0, 1]^2$ можно разложить в ряд Фурье, взяв синусы в качестве базисных функций:

$$u(x) = \sum_{m,n=1}^{\infty} c_{mn} \sin \pi m x \sin \pi n y.$$

Перейдём к рассмотрению конечного числа узлов. Выпишем условия на сетку:

$$u_{ij} := u(x_i, y_j), \quad h = \frac{1}{N-0.5}, \quad x_i = y_i := \frac{-h}{2} + ih$$

$$u_{ij} = \sum_{c_{mn}} c_{mn} \phi_i^m \phi_j^n,$$

$$\phi_i^m := \sin \pi m \left(\frac{-h_x}{2} + ih_x \right) = \sin \pi m \left(\frac{-h}{2} + ih \right)$$

$$\phi_j^n := \sin \pi n \left(\frac{-h_y}{2} + jh_y \right) = \sin \pi n \left(\frac{-h}{2} + jh \right)$$

$$\phi^m := (\phi_1^m \dots \phi_{N-1}^m).$$

Убедимся, что указанные функции ортогональны относительно скалярного произведения $(\phi^k, \phi^j) = \sum_{m=1}^{N-1} \phi_m^k \phi_m^j h$:

$$\begin{aligned} (\phi^k, \phi^j) &= \sum_{m=1}^{N-1} \phi_m^k \phi_m^j h = \sum_{m=1}^{N-1} \sin \pi k \left(\frac{-h}{2} + mh \right) \sin \pi j \left(\frac{-h}{2} + mh \right) h \\ &= \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{N-1} [\cos(\pi h(m - \frac{1}{2})(k - j)) - \cos(\pi h(m - \frac{1}{2})(k + j))] h. \end{aligned}$$

Заметим, что при $\alpha \neq 0$ справедливо:

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{N-1} \cos(\alpha m - \frac{\alpha}{2}) &= \operatorname{Re} \sum_{m=1}^{N-1} e^{i(\alpha m - \frac{\alpha}{2})} = \operatorname{Re} \frac{e^{\frac{i\alpha}{2}(e^{i\alpha(N-1)} - 1)}}{e^{i\alpha} - 1} = \frac{\operatorname{Im}[-1 + e^{i(N-1)\alpha}]}{2 \sin(\alpha/2)} \\ &= \frac{\sin(N-1)\alpha}{2 \sin(\alpha/2)}. \end{aligned}$$

Отсюда при $k \neq j$:

$$\begin{aligned}
(\phi^k, \phi^j) &= \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{N-1} [\cos(\pi h(m - \frac{1}{2})(k - j)) - \cos(\pi h(m - \frac{1}{2})(k + j))]h \\
&= h \left[\frac{\sin(N-1)\pi h(k - j)}{4 \sin(\pi h(k - j)/2)} - \frac{\sin(N-1)\pi h(k + j)}{4 \sin(\pi h(k + j)/2)} \right] \\
&= h \left[\frac{\sin(\pi(k - j) - \pi h(k - j))}{4 \sin(\pi h(k - j)/2)} - \frac{\sin(\pi(k + j) - \pi h(k + j))}{4 \sin(\pi h(k + j)/2)} \right] \\
&= h \left[\frac{(-1)^{k-j} \sin(\pi h(k - j))}{4 \sin(\pi h(k - j)/2)} - \frac{(-1)^{k+j} \sin(\pi h(k + j))}{4 \sin(\pi h(k + j)/2)} \right] \\
&= \frac{h}{2} [(-1)^{k-j} \sin(\pi h(k - j)/2) - (-1)^{k+j} \sin(\pi h(k + j)/2)] = 0.
\end{aligned}$$

В ином случае,

$$\begin{aligned}
(\phi^k, \phi^k) &= \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{N-1} [\cos(\pi h(m - \frac{1}{2})(k - k)) - \cos(\pi h(m - \frac{1}{2})(k + k))]h \\
&= h \left[\frac{N-1}{2} - \frac{\sin 2(N-1)\pi h k}{4 \sin(\pi h k)} \right] = \frac{2N-1}{4} \frac{2}{2N-1} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Отсюда, очевидно, система функций $\psi_{ij}^{mn} := \phi_i^m \phi_j^n$.

Искать коэффициенты будем по следующему алгоритму:

1. Вычислим матрицу u_{ij} .
2. Разложим u_{ij} в одномерный ряд Фурье:

$$u_{ij} = \sum_{m=1}^{N-1} \phi_i^m d_m^j.$$

Полученные коэффициенты запишем в новую матрицу.

3. По вектору d_m^j восстановим коэффициенты c_{mn} посредством ещё одного разложения в ряд:

$$d_m^j = \sum_{n=1}^{N-1} c_{mn} \phi_j^n.$$

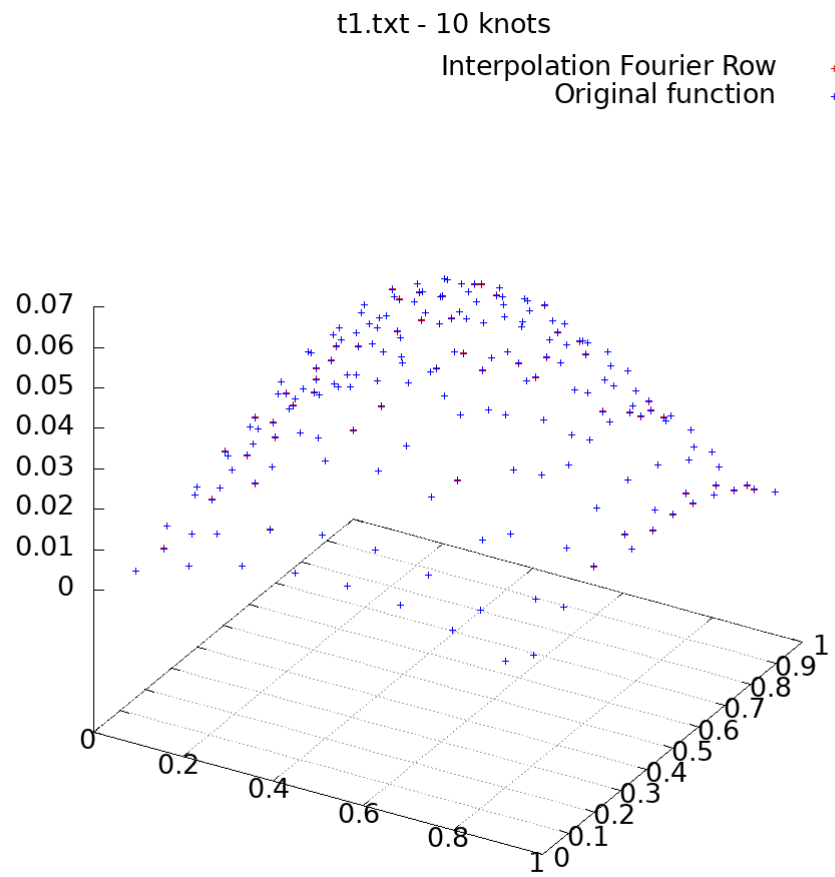


Рис. 1: Результаты теста функции $x * (1 - x) * y * (1 - y)$.

3 Тесты

3.1 Тест 1

Рассматривалась функция:

```
double u(double x)
{
    return x * (1 - x) * y * (1 - y);
}
```

Результат определения порядка: $p = 0.864876065683578$.

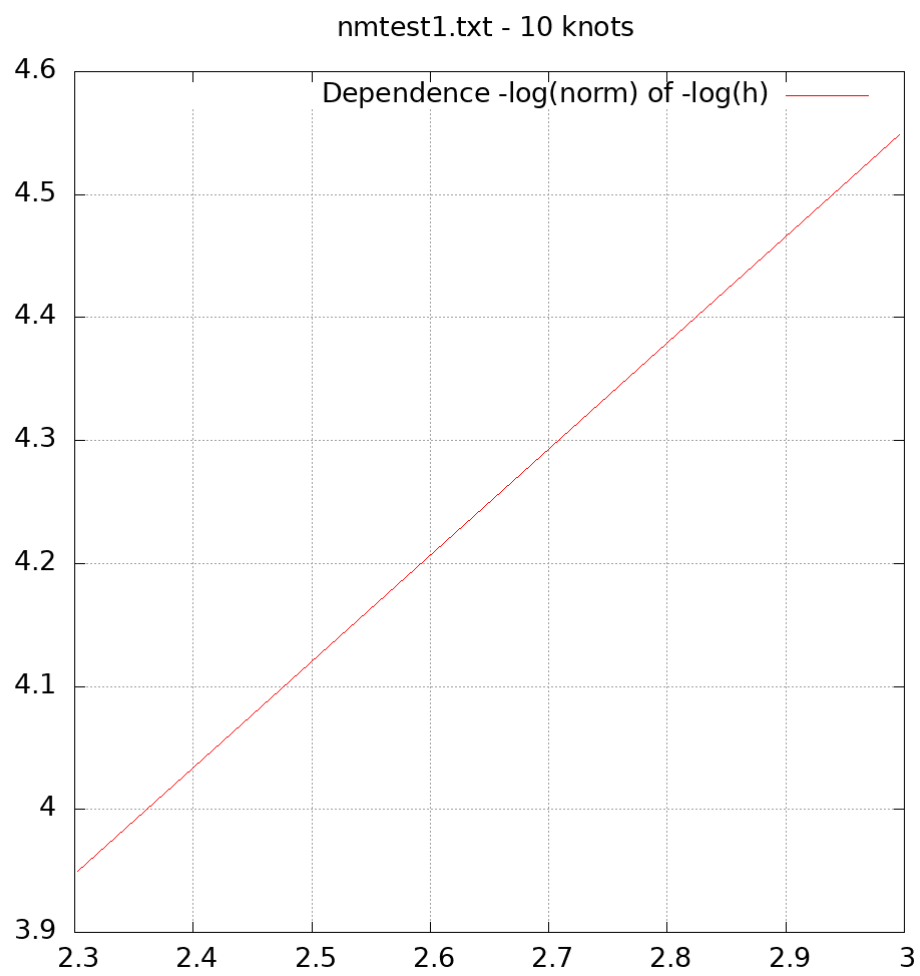


Рис. 2: Результаты теста функции $x * (1 - x) * y * (1 - y)$.

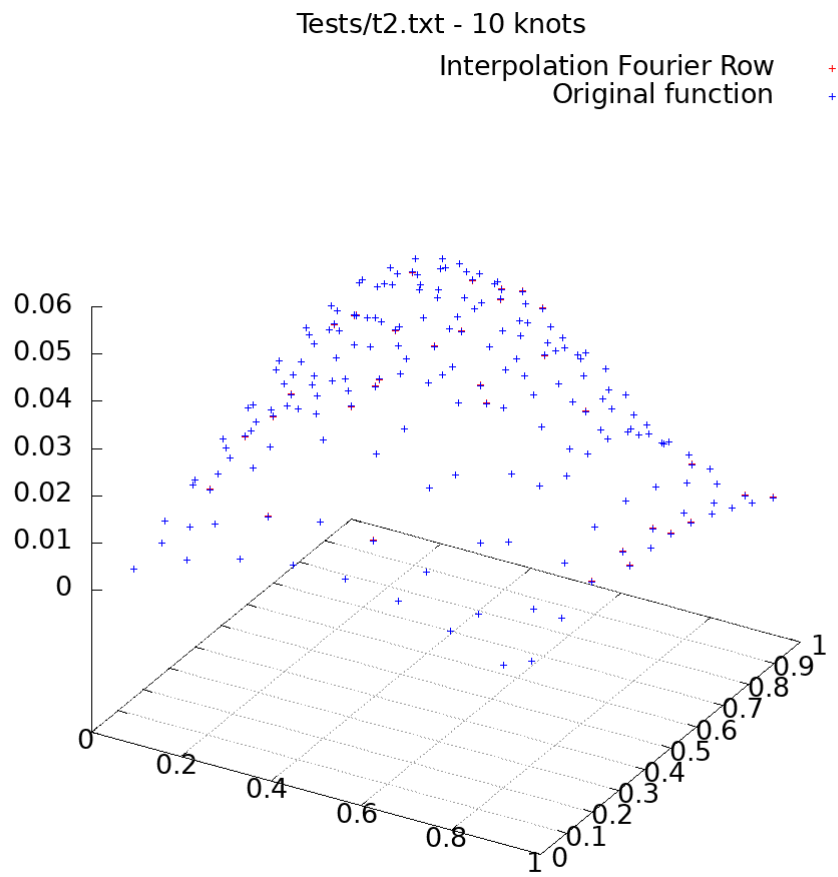


Рис. 3: Результаты теста функции $x * (1 - x) * y * (1 - y) * \cos(x * x) * \cos(y * y)$.

3.2 Тест 2

Рассматривалась функция:

```
double u(double x, double y)
{
    return x * (1 - x) * y * (1 - y) * cos(x * x) * cos(y * y)
}
```

Результат определения порядка: 0.973459824594227.

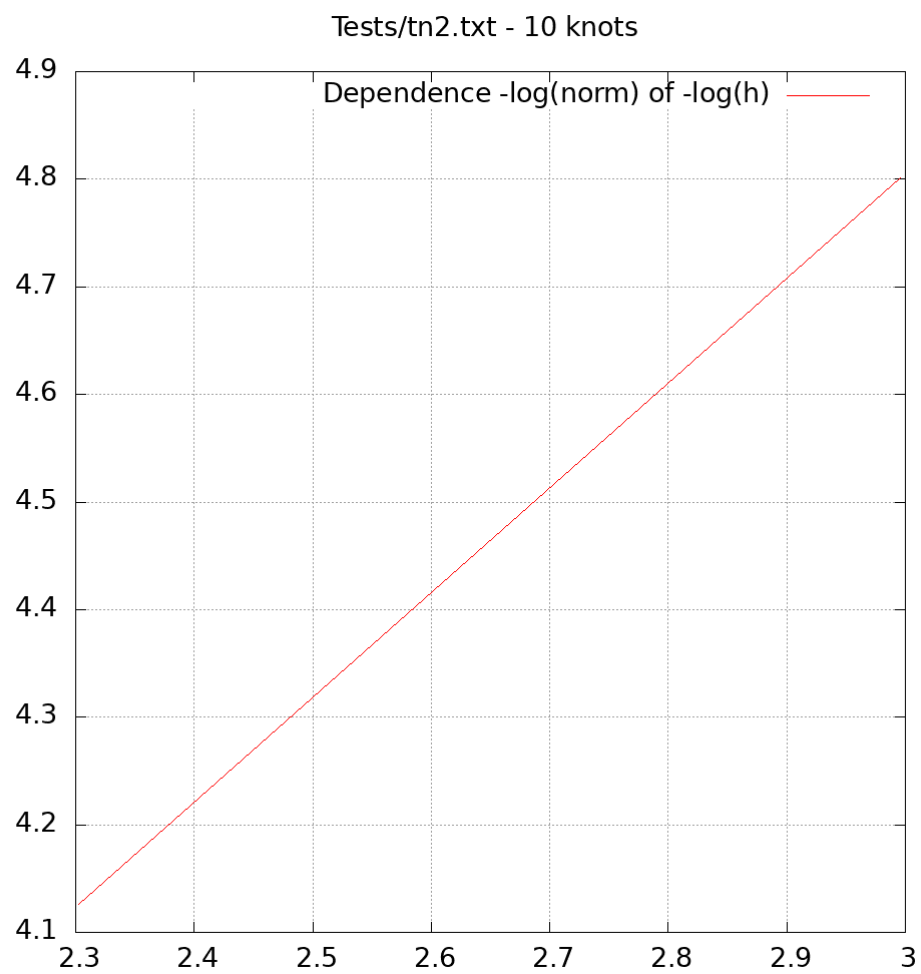


Рис. 4: Результаты теста функции $x * (1 - x) * y * (1 - y) * \cos(x * x) * \cos(y * y)$.