Всеволод Заостровский, 409 группа

Отчёт по задаче "Приближение с помощью построения двумерного ряда Фурье".

1 Постановка задачи.

Для функции $u(x) \in C^{\infty}[0,1]$, удовлетворяющей краевым условиям:

$$u|_{\Omega} = 0,$$

необходимо выписать двумерный тригонометрический ряд Фурье и сформулировать теорему сходимости. Затем, на сетке:

$$x_0 = \frac{-h_x}{2},\ y_0 = \frac{-h_y}{2},$$
$$x_N = 1,\ y_N = 1,$$
$$h_x = h_y = h = \frac{1}{N-0.5},$$

выписать двумерный дискретный тригонометрический ряд Фурье.

Найти дискретное скалярное произведение, сохраняющее ортогональность базисных функций. Нормировать базисные функции.

И, наконец, для некоторой тестовой функции из указанного класса численно найти порядок скодимости её дискретного ряда Фурье.

2 Тригонометрический ряд Фурье.

Функцию $u(x,y) \in C^\infty[0,1]^2$ можно разложить в ряд Фурье, взяв синусы в качестве базисных функций:

$$u(x) = \sum_{m,n=1}^{\infty} c_{mn} \sin \pi m x \sin \pi n y.$$

Перейдём к рассмотрению конечного числа узлов. Выпишем условия на сетку:

$$u_{ij} := u(x_i, y_j),\ h = \frac{1}{N-0.5},\ x_i = y_i := \frac{-h}{2} + ih$$
$$u_{ij} = \sum_{c_{mn}} c_{mn} \phi_i^m \phi_j^n,$$
$$\phi_i^m := \sin \pi m (\frac{-h_x}{2} + ih_x) = \sin \pi m (\frac{-h}{2} + ih)$$
$$\phi_j^n := \sin \pi n (\frac{-h_y}{2} + jh_y) = \sin \pi n (\frac{-h}{2} + jh)$$
$$\phi^m := (\phi_1^m ... \phi_{N-1}^m).$$

Убедимся, что указанные функции ортогональны относительно скалярного произведения $(\phi^k, \phi^j) = \sum_{m=1}^{N-1} \phi_m^k \phi_m^j h$:

$$(\phi^k, \phi^j) = \sum_{m=1}^{N-1} \phi_m^k \phi_m^j h = \sum_{m=1}^{N-1} \sin \pi k (\frac{-h}{2} + mh) \sin \pi j (\frac{-h}{2} + mh) h$$
$$= \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{N-1} [\cos(\pi h (m - \frac{1}{2})(k-j)) - \cos(\pi h (m - \frac{1}{2})(k+j))] h.$$

Заметим, что при $\alpha \neq 0$ справедливо:

$$\sum_{m=1}^{N-1} \cos(\alpha m - \frac{\alpha}{2}) = Re \sum_{m=1}^{N-1} e^{i(\alpha m - \frac{\alpha}{2})} = Re \frac{e^{\frac{i\alpha}{2}(e^{i\alpha(N-1)} - 1)}}{e^{i\alpha - 1}} = \frac{Im[-1 + e^{i(N-1)\alpha}]}{2\sin(\alpha/2)}$$
$$= \frac{\sin(N-1)\alpha}{2\sin(\alpha/2)}.$$

Отсюда при $k \neq j$:

$$(\phi^k, \phi^j) = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{N-1}[\cos(\pi h(m-\frac{1}{2})(k-j)) - \cos(\pi h(m-\frac{1}{2})(k+j))]h$$
$$= h\left[\frac{\sin(N-1)\pi h(k-j)}{4\sin(\pi h(k-j)/2)} - \frac{\sin(N-1)\pi h(k+j)}{4\sin(\pi h(k+j)/2)}\right]$$
$$= h\left[\frac{\sin(\pi(k-j) - \pi h(k-j))}{4\sin(\pi h(k-j)/2)} - \frac{\sin(\pi(k+j) - \pi h(k+j))}{4\sin(\pi h(k+j)/2)}\right]$$
$$= h\left[\frac{(-1)^{k-j}\sin(\pi h(k-j))}{4\sin(\pi h(k-j)/2)} - \frac{(-1)^{k+j}\sin(\pi h(k+j))}{4\sin(\pi h(k+j)/2)}\right]$$
$$= \frac{h}{2}[(-1)^{k-j}\sin(\pi h(k-j)/2) - (-1)^{k+j}\sin(\pi h(k+j)/2)] = 0.$$

В ином случае,

$$(\phi^k, \phi^k) = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{N-1}[\cos(\pi h(m-\frac{1}{2})(k-k)) - \cos(\pi h(m-\frac{1}{2})(k+k))]h$$
$$= h\left[\frac{N-1}{2} - \frac{\sin 2(N-1)\pi hk}{4\sin(\pi hk)}\right] = \frac{2N-1}{4}\frac{2}{2N-1} = \frac{1}{2}.$$

Отсюда, очевидно, система функций $\psi_{ij}^{mn} := \phi_i^m \phi_j^n$.

Искать коэффициенты будем по следующему алгоритму:

1. Вычислим матрицу u_{ij}.

2. Разложим u_{ij} в одномерный ряд Фурье:

   $$u_{ij} = \sum_{m=1}^{N-1} \phi_i^m d_m^j.$$

   Полученные коэффициенты запишем в новую матрицу.

3. По вектору d_m^j восстановим коэффициенты c_{mn} посредством ещё одного разложения в ряд:

   $$d_m^j = \sum_{n=1}^{N-1} c_{mn}\phi_j^n.$$

3 Тесты.