Всеволод Заостровский, 409 группа

Отчёт по задаче "Численное интегрирование".

1 Задача 1.

Задача 1. Реализуйте метод Симпсона и метод Гаусса в виде функции с прототипом

```
double Integral (double a, double b, double (*f)(double));
```

где f — указатель на подинтегральную функцию. Проверьте выполнение указанных оценок погрешности для $f(x) = x^n, n = 0, 1, 2, 3, 5, 9, a = 1, b = 1.1$.

Решение. Реализацию программы см в разделе 1d. Ниже приведены результаты вычислений, выполненных в среде Wolfram Mathematica, и результаты работы программы.

Выражение	Wolfram Mathematica	Формула Симсона	Формула Гаусса
$\int_1^{1.1} dx$	0.1	0.100000000000000	0.100000000000000
$\int_1^{1.1} xdx$	0.105	0.105000000000000	0.105000000000000
$\int_1^{1.1} x^2dx$	0.110333	0.110333333333333	0.110250000000000
$\int_1^{1.1} x^3dx$	0.116025	0.116025000000000	0.115762500000000
$\int_1^{1.1} x^5dx$	0.128594	0.128593937500000	0.127628156250000
$\int_1^{1.1} x^9dx$	0.159374	0.159387675915235	0.155132821597852

2 Задача 2.

Задача 2. Реализуйте составную квадратуру Симпсона и квадратуру Гаусса в виде функции

```
double Integral (double a, double b, double (*f)(double), int N);
```

где N — число разбиений отрезка интегрирования $[a, b]$ на равные подотрезки. Выпишите явную асимптотику для погрешности составных квадратур Симпсона и Гаусса в форме $R_{N,n}^{[a,b]}(f) \approx C/N^p$. Сравните теоретические оценки с численными расчетами для следующих функций:

$$\int_0^\pi \cos 100x dx = 0, \qquad \int_0^1 \exp -1000x dx \approx 10^{-3}, \qquad \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \pi.$$

Решение. Для формул Симпсона и Гаусса имеем соответственно:

$$R_n^S(f) = |I^{[a,b]}(f) - S_n^{[a,b]}(f)| \le \frac{||f^{(4)}||}{2880}(b-a)^5.$$
$$R_n^G(f) = |I^{[a,b]}(f) - S_n^{[a,b]}(f)| \le \frac{||f^{(6)}||}{2016000}(b-a)^7.$$

Пусть $a_k := a + \frac{(b-a)k}{N}$. Тогда:

$$R_{N,n}^S(f) = |I^{[a,b]}(f) - S_{N,n}^{[a,b]}(f)| \le \sum_{k=1}^N |I^{[a_k, a_{k+1}]}(f) - S_n^{[a_k, a_k+1]}(f)|$$
$$\le \sum_{k=1}^N \frac{||f^{(4)}||}{2880}(a_{k+1}-a_k)^5 \le \frac{||f^{(4)}||}{2880}\sum_{k=1}^N (\frac{(b-a)}{N})^5 = \frac{(b-a)^5||f^{(4)}||}{2880}\sum_{k=1}^N \frac{1}{N^5}$$
$$= \frac{(b-a)^5||f^{(4)}||}{2880N^4}.$$

Аналогично, для квадратуры Гаусса имеем:

$$R_{N,n}^G(f) = |I^{[a,b]}(f) - S_{N,n}^{[a,b]}(f)| \le \sum_{k=1}^N |I^{[a_k, a_{k+1}]}(f) - S_n^{[a_k, a_k+1]}(f)|$$
$$\le \sum_{k=1}^N \frac{||f^{(6)}||}{2016000}(a_{k+1}-a_k)^7 \le \frac{||f^{(6)}||}{2016000}\sum_{k=1}^N (\frac{(b-a)}{N})^7 = \frac{(b-a)^7||f^{(6)}||}{2016000}\sum_{k=1}^N \frac{1}{N^7}$$
$$= \frac{(b-a)^7||f^{(6)}||}{2016000N^6}.$$

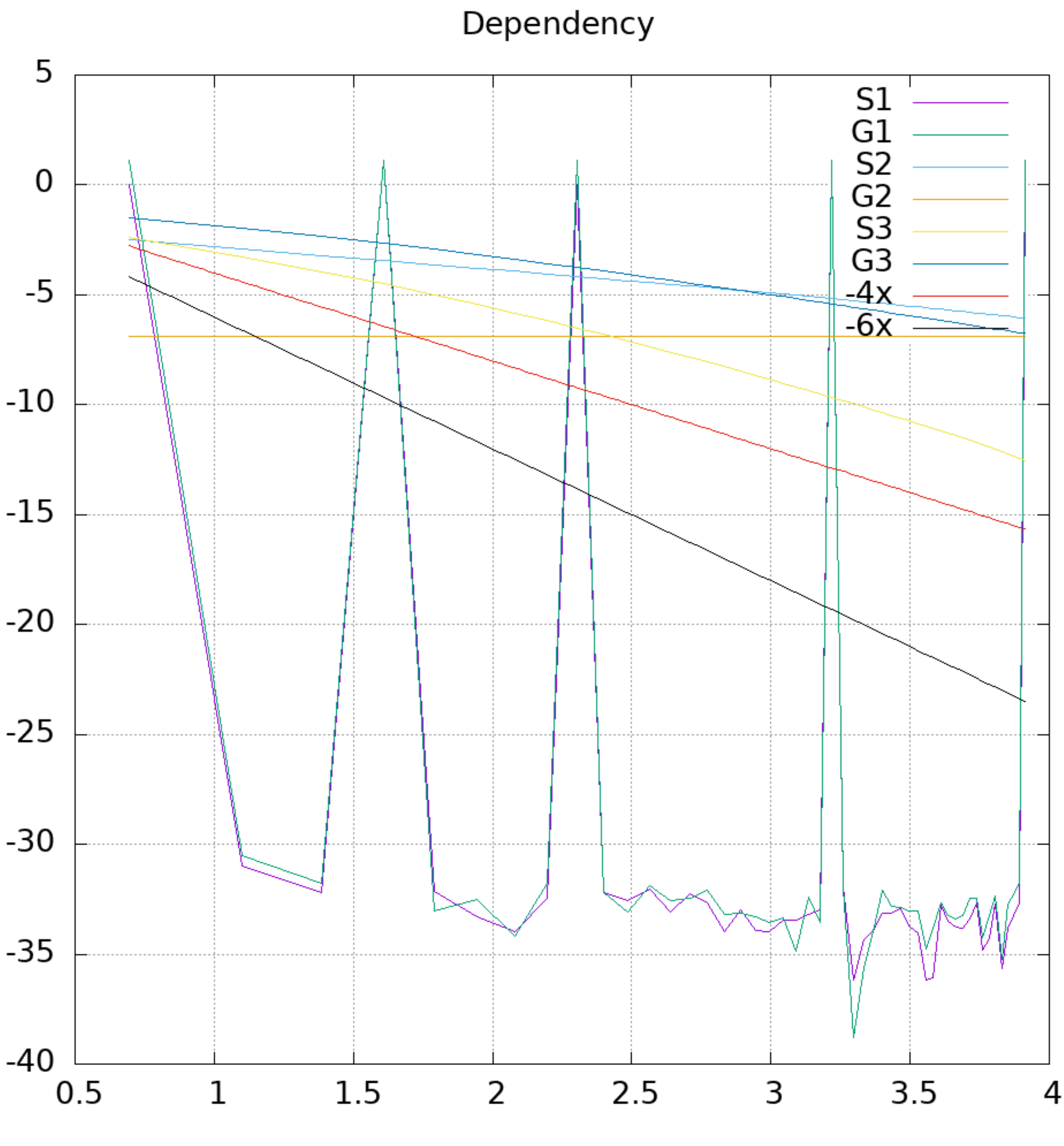

Рис. 1: Результаты тестов квадратур.

3 Задача 4.

Задача 4. Численно найдите на примере задачи

$$I(f) = \int_{[0,1]} \int_{[0,1]} (x_1^4 + x_1^2 x_2^2 + x_2^4) dx$$

асимптотику $R_N^{[0,1]^2}(f) = |I(f) - S_N(f)| \approx C/N^p$ для погрешности полученной составнной квадратур.

Решение. Ответ, полученный численно: p = 1.067138681040957

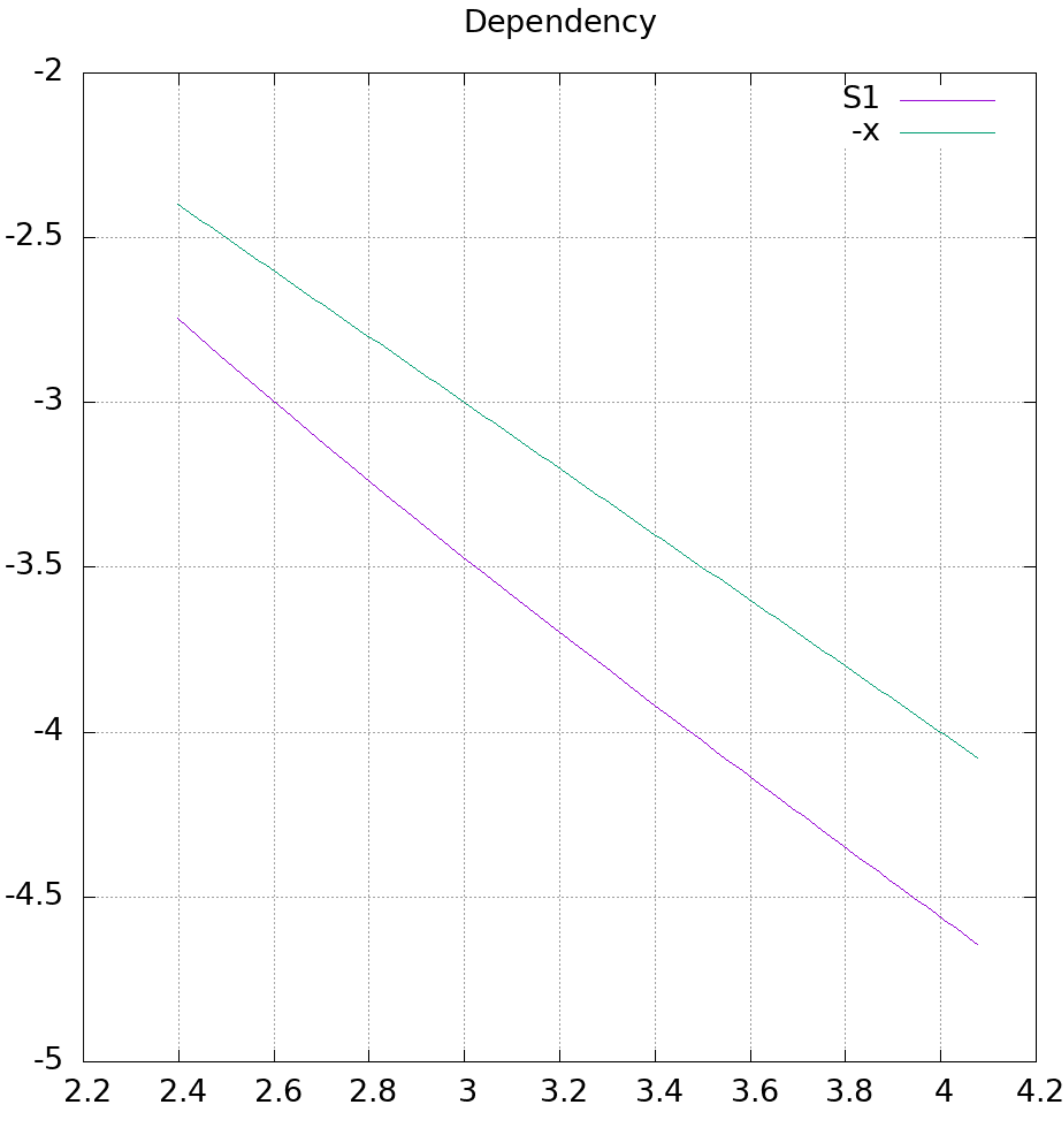

Рис. 2: Ассимптотика ошибки.