Всеволод Заостровский, 409 группа

Отчёт по задаче "Численное решение дифференциальных уравнений с частными производными. Нявная схема для уравнения теплопроводности".

1 Постановка задачи.

Необходимо решить уравнение:

$$u_t(t,x) = u_{xx}(t,x) - p(x)u(t,x) + f(t,x). \tag{1}$$

В моём варианте, краевые условия:

$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \quad u(x,0) = u_0(x). \tag{2}$$

2 Решение дифференциального уравнения (для тестов).

Будем искать решение в виде $u(t,x) = X(x)T(t)$. С учетом краевых условий, получим:

$$u(0,x) = T(t)X(0) = 0 \Rightarrow X(0) = 0,$$
$$u(1,x) = T(t)X(1) = 0 \Rightarrow X(1) = 0.$$

Разрешим уравнение с учетом $u(t,x) = X(x)T(t)$:

$$XT' = X''T,$$
$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{T} = -\lambda.$$

Рассмотрим уравнение на X, чтобы найти значения λ, при которых решение нетривиально:

$$X'' = -\lambda X,$$
$$X = C_1 \sin(\sqrt{\lambda} x) + C_2 \cos(\sqrt{\lambda} x),$$
$$X(0) = C_1 \sin(\sqrt{\lambda} 0) + C_2 \cos(\sqrt{\lambda} 0) = C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = 0.$$
$$X(1) = C_1 \sin(\sqrt{\lambda} 1) + 0 * \cos(\sqrt{\lambda} 1) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sin(\sqrt{\lambda}) = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda} = \pi k, k \in Z \Rightarrow \lambda = \pi^2 k^2, k \in Z.$$

Случай $C_1 = 0$ дает тривиальное решение. С учетом вычислений выше, можем записать общий вид для X и T:

$$X = C_1 \sin(\pi k x), \quad T = C_2 \exp\left(-\pi^2 k^2 t\right), \quad k \in Z.$$

Таким образом, общее решение дифференциального уравнения:

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(\pi n x) \exp\left(-\pi^2 n^2 t\right).$$

3 Дискретизация дифференциального уравнения.

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = \frac{u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1}}{h^2} - p(x_m) u_m^{n+1} + f(t_n, x_{m+1}), \tag{3}$$
$$m = 1 \dots M - 1, \tag{4}$$
$$n = 1 \dots N - 1. \tag{5}$$
$$\tag{6}$$

В моём варианте, краевые условия:

$$\forall n, m: \quad u_0^n = 0, \quad u_1^n = 0, \quad u_m^0 = u_0(x_m). \tag{7}$$

4 Аппроксимация на решении.

Разложим значения решения в ряд Тейлора:

$$\begin{aligned}
u(t_n, x_{m+1}) &= u(t_n, x_m) + hu_x(t_n, x_m) + \frac{h^2}{2}u_{xx}(t_n, x_m) + \frac{h^3}{6}u_{xxx}(t_n, x_m) \\
&+ \frac{h^4}{24}u_{xxxx}(t_n, x_m) + O(h^5) \\
u(t_n, x_{m-1}) &= u(t_n, x_m) - hu_x(t_n, x_m) + \frac{h^2}{2}u_{xx}(t_n, x_m) - \frac{h^3}{6}u_{xxx}(t_n, x_m) \\
&+ \frac{h^4}{24}u_{xxxx}(t_n, x_m) + O(h^5) \\
u(t_{n+1}, x_m) &= u(t_n, x_m) + \tau u_x(t_n, x_m) + \frac{\tau^2}{2}u_{tt}(t_n, x_m) + \frac{\tau^3}{6}u_{ttt}(t_n, x_m) \\
&+ \frac{\tau^4}{24}u_{tttt}(t_n, x_m) + O(\tau^5) \\
u(t_{n-1}, x_m) &= u(t_n, x_m) - \tau u_x(t_n, x_m) + \frac{\tau^2}{2}u_{tt}(t_n, x_m) - \frac{\tau^3}{6}u_{ttt}(t_n, x_m) \\
&+ \frac{\tau^4}{24}u_{tttt}(t_n, x_m) + O(\tau^5)
\end{aligned}$$

Отсюда имеем:

$$\begin{aligned}
\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} &= \frac{u(t_{n+1}, x_m) - u(t_n, x_m)}{\tau} = u_t(t_n, x_m) \\
&+ \frac{\tau}{2}u_{tt}(t_n, x_m) + \frac{\tau^2}{6}u_{ttt}(t_n, x_m) + \frac{\tau^3}{24}u_{tttt}(t_n, x_m) + O(\tau^4) \\
\frac{u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1}}{h^2} &= \frac{u(t_{n+1}, x_{m+1}) - 2u(t_{n+1}, x_m) + u(t_{n+1}, x_{m-1})}{h^2} = \\
&= u_{xx}(t_n, x_m) + \frac{h^2}{12}u_{xxxx}(t_n, x_m) + O(h^4)
\end{aligned}$$

Подставив эти выражения в дифференциальное уравнение, получим:

$$||\frac{u_m^{n+1}-u_m^n}{\tau}-\frac{u_{m+1}^{n+1}+2u_m^{n+1}+u_{m-1}^{n+1}}{h^2}+p(x_m)u_m^{n+1}-f(t_n,x_{m+1})||=$$

$$=||-u_{xx}(t_n,x_m)+O(h^2)+u_t(t_n,x_m)+O(\tau)+p(x_m)u_m^{n+1}-f(t_n,x_{m+1})||=$$

$$=O(h^2+\tau).$$

С учетом того, что начальные условия даны точно и, очевидно, $|f(t_n,x_m)-f_m^n|\to 0$, получаем, что порядок аппроксимации на решении данной схемы составляет $O(\tau+h^2)$.

5 Устойчивость схемы.

Удобная для анализа форма записи схемы имеет вид:

$$u_m^{n+1}-u_m^n=\rho(u_{m+1}^{n+1}-2u_m^{n+1}+u_{m-1}^{n+1})-\tau p(x_m)u_m^{n+1}+\tau f(t_n,x_{m+1}),\quad \rho=\frac{\tau}{h^2}.$$

Выбирая из всех значений u_m^{n+1}, по модулю равных $\left\|u^{n+1}\right\|$, такое, у которого индекс m принимает наименьшее значение, имеем

$$\left|u_m^{n+1}\right|>\left|u_{m-1}^{n+1}\right| \text{ и } \left|u_m^{n+1}\right|\geqslant\left|u_{m+1}^{n+1}\right|.$$

Отсюда $\left|2u_m^{n+1}\right|>\left|u_{m-1}^{n+1}\right|+\left|u_{m+1}^{n+1}\right|$, и знак выражения $2u_m^{n+1}-u_{m-1}^{n+1}-u_{m+1}^{n+1}$ совпадает со знаком u_m^{n+1}, т. е. справедлива оценка снизу

$$\left\|u^{n+1}\right\|=\left|u_m^{n+1}\right|\le\left|u_m^{n+1}+\rho\left(2u_m^{n+1}-u_{m-1}^{n+1}-u_{m+1}^{n+1}\right)\right|=\left|u_m^n+\tau f_m^{n+1}\right|.$$

Таким образом, при любых шагах сетки τ и h справедливо неравенство $\left\|u^{n+1}\right\|\le\|u^n\|+\tau\left\|f^{n+1}\right\|$. Из него получаем:

$$\left\|u^{n+1}\right\|\le\|u^n\|+\tau\|f^n\|\le\left\|u^{n-1}\right\|+\tau\left(\|f^n\|+\left\|f^{n-1}\right\|\right)\le\ldots\le$$

$$\le\left\|u^0\right\|+\sum_{k=0}^{n}\tau\left\|f^k\right\|\le\left\|u^0\right\|+(n+1)\tau\max_k\left\|f^k\right\|.$$

Таким образом, схема бехусловно устойчива.

6 Алгоритм построения сети.

Отсюда имеем:

$$-\frac{u_{m+1}^{n+1}}{h^2}+u_m^{n+1}(\frac{1}{\tau}+\frac{2}{h^2}+p(x_m))-\frac{u_{m-1}^{n+1}}{h^2}=f(t_n,x_{m+1})+\frac{u_m^n}{\tau}.$$

Таким образом, зная вектор $\{u_m^n\}_{m=1,\dots N-1}$ для нахождения вектора $\{u_m^{n+1}\}_{m=1,\dots M-1}$ необходимо решить систему:

$$F=\begin{pmatrix} \frac{1}{\tau}+\frac{2}{h^2}+p(x_m) & -\frac{1}{h^2} & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{1}{h^2} & \frac{1}{\tau}+\frac{2}{h^2}+p(x_m) & -\frac{1}{h^2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0-\frac{1}{h^2} & \frac{1}{\tau}+\frac{2}{h^2}+p(x_m) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1^{n+1} \\ u_2^{n+1} \\ \dots \\ u_{M-2}^{n+1} \\ u_{M-1}^{n+1} \end{pmatrix},$$

где

$$F=\begin{pmatrix} f(t_1,x_{m+1})+\frac{u_1^n}{\tau} \\ f(t_2,x_{m+1})+\frac{u_2^n}{\tau} \\ \dots \\ f(t_{n-2},x_{m+1})+\frac{u_{M-2}^n}{\tau} \\ f(t_{n-1},x_{m+1})+\frac{u_{M-1}^n}{\tau} \end{pmatrix}.$$

Сделать это можно, к примеру, методом прогонки.