

Отчёт по задаче "Итерационные методы решения систем
линейных уравнений".

1 Задача 1.

Для решения системы линейных уравнений:

$$-\frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} + py_k = f_k, \quad k = 1, \dots, N-1;$$

$$y_0 = y_N = 0;$$

$$h = \frac{1}{N};$$

$$p \geq 0.$$

реализуйте метод Фурье (т.е. метод разложения по собственным векторам) для базисных функций:

$$\psi_k^{(n)} = \sin\left(\frac{\pi nk}{N}\right) \quad (1)$$

Решение.

Вычислим λ_n :

$$\begin{aligned} A\psi_k^{(n)} &= -\frac{\psi_{k+1}^{(n)} - 2\psi_k^{(n)} + \psi_{k-1}^{(n)}}{h^2} + p\psi_k^{(n)} \\ &= -\frac{\sin\left(\frac{\pi n(k+1)}{N}\right) - 2\sin\left(\frac{\pi nk}{N}\right) + \sin\left(\frac{\pi n(k-1)}{N}\right)}{h^2} + p\sin\left(\frac{\pi nk}{N}\right) \\ &= -\frac{\sin\left(\frac{\pi nk}{N}\right)\cos\left(\frac{\pi n}{N}\right) + \cos\left(\frac{\pi nk}{N}\right)\sin\left(\frac{\pi n}{N}\right) - 2\sin\left(\frac{\pi nk}{N}\right) + \sin\left(\frac{\pi nk}{N}\right)\cos\left(\frac{\pi n}{N}\right) - \cos\left(\frac{\pi nk}{N}\right)\sin\left(\frac{\pi n}{N}\right)}{h^2} + p\sin\left(\frac{\pi nk}{N}\right) \\ &= -\frac{\sin\left(\frac{\pi nk}{N}\right)\cos\left(\frac{\pi n}{N}\right) - 2\sin\left(\frac{\pi nk}{N}\right) + \sin\left(\frac{\pi nk}{N}\right)\cos\left(\frac{\pi n}{N}\right)}{h^2} + p\sin\left(\frac{\pi nk}{N}\right) \\ &= -\frac{2\sin\left(\frac{\pi nk}{N}\right)(\cos\left(\frac{\pi n}{N}\right) - 1)}{h^2} + p\sin\left(\frac{\pi nk}{N}\right) = \sin\left(\frac{\pi nk}{N}\right)\left(-\frac{2(\cos\left(\frac{\pi n}{N}\right) - 1)}{h^2} + p\right). \end{aligned}$$

Отсюда:

$$\lambda_n = p - 2N^2(\cos\left(\frac{\pi n}{N}\right) - 1). \quad (2)$$

Кроме того, из указания к задаче:

$$c_n = \frac{(f, \psi^{(n)})}{\lambda_n (\psi^{(n)}, \psi^{(n)})} = \frac{2 (f, \psi^{(n)})}{\lambda_n}. \quad (3)$$

Решение же можно найти в виде:

$$y_k = \sum_{n=1}^{N-1} c_n \psi_k^{(n)}. \quad (4)$$

Огромные проблемы возникли в связи с тем, что матрицей Фурье порядка N предлагается называть матрицу, размерность которой $N+1$, при этом, подматрица из ненулевых элементов, для которой осмысленно ставить задачу решения СЛУ имеет размерность $N-1$. Об этом стоит помнить, во избежание изнурительной отладки.

Реализацию см. в файле "solution.h", незамысловатая система тестирования реализована в "test1.c".

2 Задача 2.

Для решения системы линейных уравнений из **Задачи 1.** реализуйте метод Рундсона. Проведите тестирование программы, сравнив теоретическую и реальную скорость сходимости. Для этого на каждом k -ом шаге, $k = 0, 1, \dots$ итерационного процесса сохраните в некоторый файл очередную тройку.

Решение. Реализацию см. в файле "solution.h", незамысловатая система тестирования реализована в "test2.c".

Фактически реализован функционал (правда, не самый эффективный), позволяющий применить метод к любой матрице. Очень остро здесь стоит вопрос определения m и M (см. файл "../LinAlg.pdf"). Для

матрицы из задачи 1 есть явная формула собственных значений, благодаря чему удалось добиться хорошего приближения к теоретической сходимости. Однако, если бы не было известной формы, то найти их с приемлемой точностью представлялось бы задачей, вычислительная сложность которой сравнима со сложностью решения всей системы. При этом, неправильное τ , как показали многочисленные отладочные тесты, не включенные в отчет, может очень сильно испортить сходимость.

По результатам тестирования был построен график (для вывода ./LS2 50 1000 100 out.txt, те матрица порядка 50, до 1000 итераций с $p = 100$). См. рисунок.

3 Задача 3.

Для решения системы линейных уравнений:

$$-\frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} + p_k y_k = f_k, \quad k = 1, \dots, N-1;$$

$$y_0 = y_N = 0;$$

$$h = \frac{\pi}{N};$$

$$p_k = 1 + \sin^2(\pi k h).$$

реализуйте метод с предобуславливателем.

Решение. Реализацию см. в файле "solution.h", незамысловатая система тестирования реализована в "test3.c".

Фактически, приведенная реализация поддерживает любой предобуславливатель. В том числе, как требовалось в задаче, реализовано обращение матрицы методом Фурье.

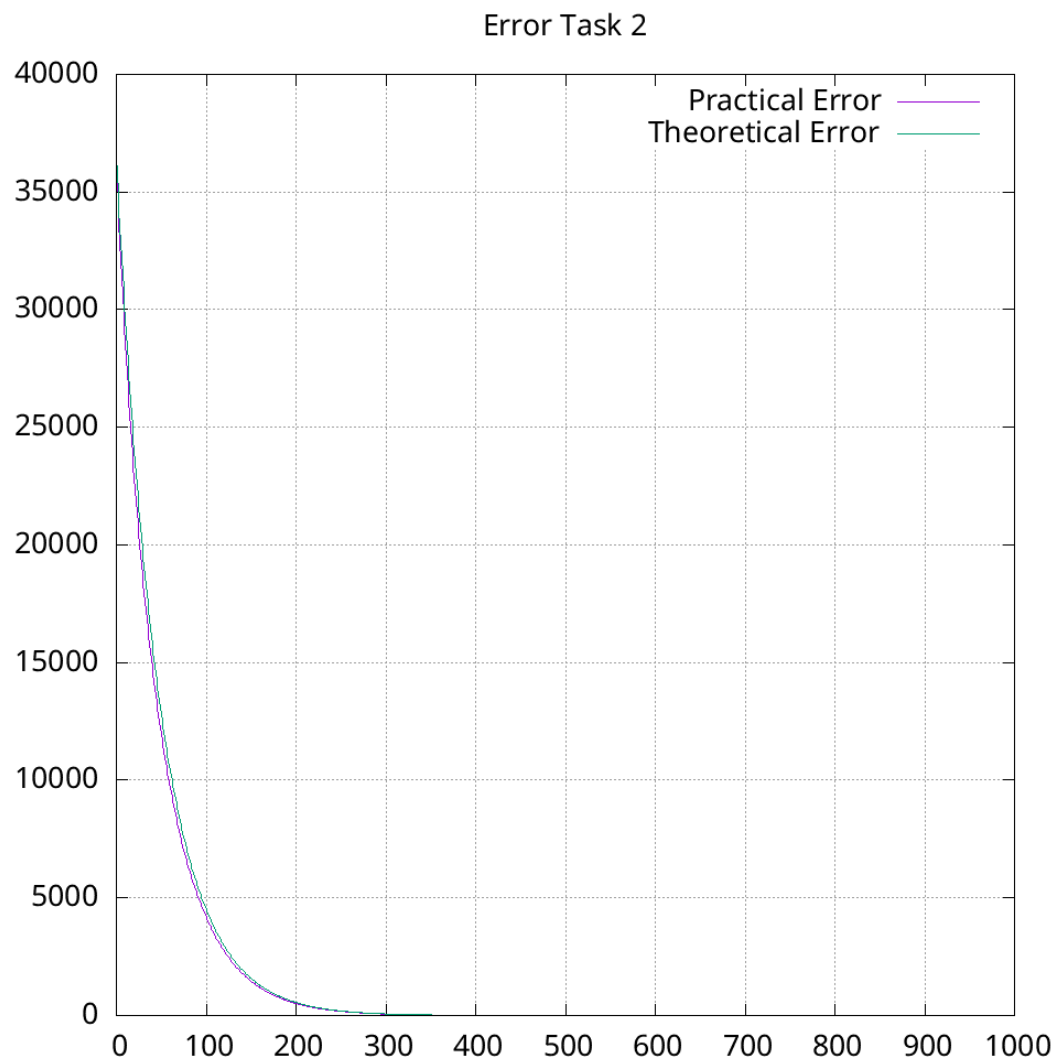


Рис. 1: Ошибка метода Ричардсона решения СЛУ, определяемого матрицей типа Фурье (задача 1).

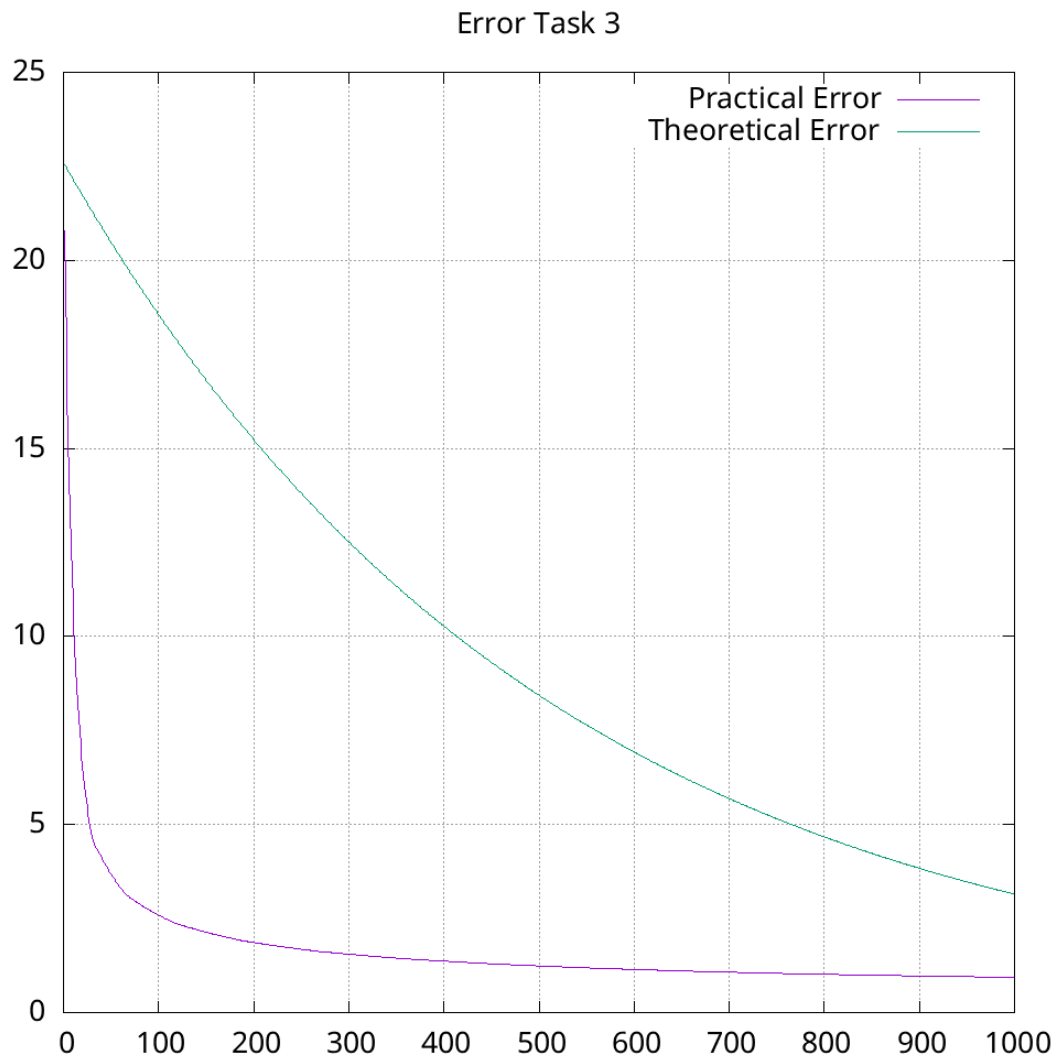


Рис. 2: Ошибка метода Рундсона решения СЛУ, определяемого матрицей типа Фурье (задача 1).

По результатам тестирования был построен график (для вывода `./LS3 50 1000 100 out.txt`, те матрица порядка 50, до 1000 итераций с $p = 100$). См. рисунок.