Всеволод Заостровский, 409 группа

Отчёт по задаче "Итерационные методы решения систем линейных уравнений".

Постановка задачи. Для построения приближенного решения задачи

$$y'(x) + Ay(x) = 0, \quad y(0) = 1, \quad x \in [0, 1]$$

с известным точным решением $y(x) = e^{-Ax}$ рассматриваются следующие схемы:

1) $\frac{y_{k+1}-y_k}{h} + Ay_k = 0, y_0 = 1.$
2) $\frac{y_{k+1}-y_k}{h} + Ay_{k+1} = 0, y_0 = 1.$
3) $\frac{y_{k+1}-y_k}{h} + A\frac{y_{k+1}+y_k}{2} = 0, y_0 = 1.$
4) $\frac{y_{k+1}-y_{k-1}}{2h} + Ay_k = 0, y_0 = 1, y_1 = 1 - Ah.$
5) $\frac{1.5y_k-2y_{k-1}+0.5y_{k-2}}{h} + Ay_k = 0, y_0 = 1, y_1 = 1 - Ah.$
6) $\frac{-0.5y_{k+2}+2y_{k+1}-1.5y_k}{h} + Ay_k = 0, y_0 = 1, y_1 = 1 - Ah.$

Найти порядок аппроксимации, исследовать α-устойчивость предложенных схем. Реализовать указанные схемы и заполнить таблицу.

Решение. Реализацию кода см. тут. Для реализации численного решения необходимо в каждом случае выразить последний y_k через предыдущие, заодно проверим α-устойчивость и A-устойчивость:

Схема 1. $\frac{y_{k+1}-y_k}{h} = -Ay_k$

Сходимость:

$y_{k+1} - y_k$ vs $y'(x_k)h$

$y_k + hy'(x_k) + O(h^2) - y_k$ vs $y'(x_k)h \Rightarrow |\frac{y_{k+1}-y_k}{h} - y'(x_k)| = O(h)$

A-устойчивость:

$y_{k+1} = y_k(1 - Ah)$.

$\lambda = 1 - Ah$.

α-устойчивость:

$y_{k+1} - y_k = 0$.

$\lambda = 1$.

Вывод: α-устойчивость есть, A-устойчивость есть не всегда, $m = 1$.

Схема 2. $\frac{y_{k+1}-y_k}{h} = -Ay_{k+1}$

Сходимость:

$y_{k+1} - y(x_{k+1} - h)$ vs $y'(x_{k+1})h$

$y_{k+1} - (y(x_{k+1}) - hy'(x_{k+1}) + O(h^2))$ vs $y'(x_{k+1})h \Rightarrow |\frac{y_{k+1}-y_k}{h} - y'(x_{k+1})| = O(h)$

A-устойчивость:

$y_{k+1} = \frac{y_k}{1+Ah}$.

$\lambda = \frac{1}{1+Ah} < 1$.

α-устойчивость:

$y_{k+1} - y_k = 0$.

$\lambda = 1$.

Вывод: α-устойчивость есть, A-устойчивость есть, $m = 1$.

Схема 3. $\frac{y_{k+1}-y_k}{h} = -A\frac{y_{k+1}+y_k}{2}$

Сходимость:

$y(x_k + \frac{h}{2} + \frac{h}{2}) - y(x_k + \frac{h}{2} - \frac{h}{2})$ vs $y'(\frac{x_{k+1}+x_k}{2})h = y'(\frac{x_k+h+x_k}{2})h$

$y(x_k + \frac{h}{2} + \frac{h}{2}) = y(x_k + \frac{h}{2}) + y'(x_k + \frac{h}{2})\frac{h}{2} + \frac{1}{2}y''(x_k + \frac{h}{2})\frac{h^2}{4} + O(h^3)$

$y(x_k - \frac{h}{2} + \frac{h}{2}) = y(x_k + \frac{h}{2}) - y'(x_k + \frac{h}{2})\frac{h}{2} + \frac{1}{2}y''(x_k + \frac{h}{2})\frac{h^2}{4} - O(h^3)$

$|\frac{y_{k+1}-y_k}{h} - y'(x_k + \frac{h}{2})| = O(h^2)$

A-устойчивость:

$y_{k+1} = \frac{y_k(2-Ah)}{2+Ah}$.

$\lambda = \frac{2-Ah}{2+Ah} < 1$.

α-устойчивость:

$y_{k+1} - y_k = 0.$

$\lambda = 1.$

Вывод: α-устойчивость есть, A-устойчивость есть, $m = 2$.

Схема 4. $\frac{y_{k+1}-y_{k-1}}{2h} = -Ay_k$

Сходимость:

$|\frac{y_{k+1}-y_{k-1}}{2h} - y'(x_k)| = \frac{1}{2h}|y(x_k+h) - y(x_k-h) - 2y'(x_k)h| =$
$= \frac{1}{2h}|y(x_k) + y'(x_k)h + y''(x_k)\frac{h^2}{2} + y'''(x_k)\frac{h^3}{6} + O(h^4)$
$-(y(x_k) - y'(x_k)h + y''(x_k)\frac{h^2}{2} - y'''(x_k)\frac{h^3}{6} + O(h^4)) - 2y'(x_k)h| = O(h^2).$

A-устойчивость:

$y_{k+2} = y_k - 2Ahy_{k+1}.$

$\lambda^2 + 2Ah\lambda - 1 = 0.$

$\lambda_{+,-} = Ah \pm \sqrt{A^2h^2+1}.$

$|\lambda_+| > 1.$

α-устойчивость:

$y_{k+1} - y_{k-1} = 0.$

$\lambda = \pm 1.$

Вывод: α-устойчивости нет, A-устойчивость есть не всегда, $m = 2$.

Схема 5. $\frac{1.5y_k-2y_{k-1}+0.5y_{k-2}}{h} = -Ay_k$

Сходимость:

$|\frac{1.5y_k-2y_{k-1}+0.5y_{k-2}}{h} - y'(x_k)| = \frac{1}{h}|1.5y_k - 2(y(x_k) - y'(x_k)h + \frac{1}{2}y''(x_k)h^2 + O(h^3)) + 0.5((y(x_k) - 2y'(x_k)h + 2y''(x_k)h^2 + O(h^3))) - y'(x_k)h| = O(h^2)$

A-устойчивость:

$y_{k+2} = \frac{2y_{k+1}-0.5y_k}{Ah+1.5}.$
$\lambda^2 - \frac{2}{1.5+Ah}\lambda + \frac{0.5}{1.5+Ah} = 0.$
$\lambda_\pm = \frac{1}{1.5+Ah} \pm \sqrt{\frac{1}{(1.5+Ah)^2} - \frac{1}{3+2Ah}}.$
α-устойчивость:

$1.5y_k - 2y_{k-1} + 0.5y_{k-2} = 0$

$\lambda_{\pm} = \frac{2 \pm 1}{3} = \{1, \frac{1}{3}\}$

Вывод: α-устойчивость есть, A-устойчивость есть не всегда, $m = 2$.

Схема 6. $\frac{-0.5y_{k+2}+2y_{k+1}-1.5y_k}{h} = -Ay_k$

Сходимость:

$|\frac{-0.5y_k+2y_{k-1}-1.5y_{k-2}}{h} - y'(x_k)| = \frac{1}{h}| - 0.5y_k + 2(y(x_k) - y'(x_k)h + \frac{1}{2}y''(x_k)h^2 + O(h^3))\ -1.5((y(x_k) - 2y'(x_k)h + 2y''(x_k)h^2 + O(h^3))) - y'(x_k)h| = O(h)$

A-устойчивость:

$y_{k+2} = (2Ah - 3)y_k + 4y_{k+1}.$

$\lambda^2 - 4\lambda - (2Ah - 3) = 0.$

$\lambda_{\pm} = 2 \pm \sqrt{1 - 2Ah}.$

α-устойчивость:

$-0.5y_k + 2y_{k-1} - 1.5y_{k-2} = 0$

$\lambda_{\pm} = \frac{-2 \pm 1}{-1} = \{3, 1\}$

Вывод: α-устойчивости нет, A-устойчивости нет, $m = 1$.

В таблице 1 в первом столбце указывается номер схемы; $E_n = \max_{x_k} |y(x_k) - y_k|$, y_k - решение соответствующей схемы при $h = 10^{-n}$; m - порядок сходимости, т.е. $E_n \sim O(h^m)$; параметр задачи $A = 1, 10, 1000$.

Видно, что схемы обладающие α-устойчивостью дают хорошее приближение при достаточно малом h.

Номер	E_1	E_2	E_3	E_6	m	A
1	0.019149	0.001847	0.000184	0.000000	1	1.000000
1	0.367879	0.019201	0.001847	0.000002	1	10.000000
1	$> 1e5$	$> 1e5$	0.367879	0.000184	1	1000.000000
2	0.017528	0.001832	0.000184	0.000000	1	1.000000
2	0.132121	0.017664	0.001832	0.000002	1	10.000000
2	0.009901	0.090864	0.132121	0.000184	1	1000.000000
3	0.000305	0.000003	0.000000	0.000000	2	1.000000
3	0.034546	0.000307	0.000003	0.000000	2	10.000000
3	0.960784	0.666712	0.034546	0.000000	2	1000.000000
4	0.006497	0.000070	0.000001	0.000000	2	1.000000
4	408.000123	48.649591	0.545051	0.000001	2	10.000000
4	$> 1e5$	$> 1e5$	$> 1e5$	$> 1e5$	2	1000.000000
5	0.006443	0.000073	0.000001	0.000000	2	1.000000
5	0.367879	0.006443	0.000073	0.000000	2	10.000000
5	99.000000	9.000045	0.367879	0.000001	2	1000.000000
6	3388.023670	$> 1e5$	$> 1e5$	$> 1e5$	1	1.000000
6	4096.000123	$> 1e5$	$> 1e5$	$> 1e5$	1	10.000000
6	$> 1e5$	$> 1e5$	$> 1e5$	$> 1e5$	1	1000.000000

Таблица 1: Результаты вычислений