Всеволод Заостровский, 409 группа

Отчёт по задаче "Итерационные методы решения систем линейных уравнений".

Постановка задачи. Для построения приближенного решения задачи

$$y'(x) + Ay(x) = 0, \quad y(0) = 1, \quad x \in [0, 1]$$

с известным точным решением $y(x) = e^{-Ax}$ рассматриваются следующие схемы:

1) $\frac{y_{k+1}-y_k}{h} + Ay_k = 0, y_0 = 1.$

2) $\frac{y_{k+1}-y_k}{h} + Ay_{k+1} = 0, y_0 = 1.$

3) $\frac{y_{k+1}-y_k}{h} + A\frac{y_{k+1}+y_k}{2} = 0, y_0 = 1.$

4) $\frac{y_{k+1}-y_{k-1}}{2h} + Ay_k = 0, y_0 = 1, y_1 = 1 - Ah.$

5) $\frac{1.5y_k-2y_{k-1}+0.5y_{k-2}}{h} + Ay_k = 0, y_0 = 1, y_1 = 1 - Ah.$

6) $\frac{-0.5y_{k+2}+2y_{k+1}-1.5y_k}{h} + Ay_k = 0, y_0 = 1, y_1 = 1 - Ah.$

Найти порядок аппроксимации, исследовать α-устойчивость предложенных схем. Реализовать указанные схемы и заполнить таблицу.

Решение. Реализацию кода см. тут. Для реализации численного решения необходимо в каждом случае выразить последний y_k через предыдущие, заодно проверим α-устойчивость:

1) $\frac{y_{k+1}-y_k}{h} + Ay_k = 0$

$y_{k+1} - y_k$ vs $y'(x_k)h$

$y_k + hy'(x_k) + O(h^2) - y_k$ vs $y'(x_k)h \Rightarrow |\frac{y_{k+1}-y_k}{h} - y'(x_k)| = O(h)$

$y_{k+1} = y_k(1 - Ah).$

$\lambda = 1 - Ah < 1.$

2) $\frac{y_{k+1}-y_k}{h}+Ay_{k+1}=0$

$y_{k+1}-y(x_{k+1}-h)$ vs $y'(x_{k+1})h$

$y_{k+1}-(y(x_{k+1})-hy'(x_{k+1})+O(h^2))$ vs $y'(x_{k+1})h \Rightarrow |\frac{y_{k+1}-y_k}{h}-y'(x_{k+1})|=O(h)$

$y_{k+1}=\frac{y_k}{1+Ah}$.

$\lambda=\frac{1}{1+Ah}<1$.

3) $\frac{y_{k+1}-y_k}{h}+A\frac{y_{k+1}+y_k}{2}=0$

$y(x_k+\frac{h}{2}+\frac{h}{2})-y(x_k+\frac{h}{2}-\frac{h}{2})$ vs $y'(\frac{x_{k+1}+x_k}{2})h=y'(\frac{x_k+h+x_k}{2})h$

$y(x_k+\frac{h}{2}+\frac{h}{2})=y(x_k+\frac{h}{2})+y'(x_k+\frac{h}{2})\frac{h}{2}+\frac{1}{2}y''(x_k+\frac{h}{2})\frac{h^2}{4}+O(h^3)$

$y(x_k-\frac{h}{2}+\frac{h}{2})=y(x_k+\frac{h}{2})-y'(x_k+\frac{h}{2})\frac{h}{2}+\frac{1}{2}y''(x_k+\frac{h}{2})\frac{h^2}{4}-O(h^3)$

$|\frac{y_{k+1}-y_k}{h}-y'(x_k+\frac{h}{2})|=O(h^2)$

$y_{k+1}=\frac{y_k(2-Ah)}{2+Ah}$.

$\lambda=\frac{2-Ah}{2+Ah}<1$.

4) $\frac{y_{k+1}-y_{k-1}}{2h}+Ay_k=0$

$y_{k+2}=y_k-2Ahy_{k+1}$.

$\lambda^2+2Ah\lambda-1=0$.

$\lambda_{+,-}=Ah\pm\sqrt{A^2h^2+1}$.

$|\lambda_+|>1$.

5) $\frac{1.5y_k-2y_{k-1}+0.5y_{k-2}}{h}+Ay_k=0$

$y_{k+2}=\frac{2y_{k+1}-0.5y_k}{Ah+1.5}$.

$\lambda^2-\frac{2}{1.5+Ah}\lambda+\frac{0.5}{1.5+Ah}=0$.

$2\lambda_{+,-}=\frac{2}{1.5+Ah}\pm\sqrt{\frac{4}{(1.5+Ah)^2}-\frac{2}{1.5+Ah}}$.

α-устойчивость есть не всегда.

6) $\frac{-0.5y_{k+2}+2y_{k+1}-1.5y_k}{h}+Ay_k=0$

$y_{k+2}=(2Ah-3)y_k+4y_{k+1}$.

$\lambda^2-4\lambda-(2Ah-3)=0$.

$\lambda_{+,-}=2\pm\sqrt{1-2Ah}$.

$|\lambda_+| > 1$.

Номер	E_1	E_2	E_3	E_6	m	A
1	0.019149	0.001847	0.000184	0.000000	1	1
1	0.367879	0.019201	0.001847	0.000002	1	10
1	> 100	> 100	0.367879	0.000184	1	1000
2	0.017528	0.001832	0.000184	0.000000	1	1
2	0.132121	0.017664	0.001832	0.000002	1	10
2	0.009901	0.090864	0.132121	0.000184	1	1000
3	0.000305	0.000003	0.000000	0.000000	2	1
3	0.034546	0.000307	0.000003	0.000000	2	10
3	0.960784	0.666712	0.034546	0.000000	2	1000
4	1.573393	1.546693	1.543448	1.543081	0	1
4	> 100	> 100	> 100	> 100	0	10
4	> 100	> 100	> 100	> 100	0	1000
5	0.431269	0.483764	0.497316	0.499994	0	1
5	0.432121	0.431269	0.483764	0.499952	0	10
5	0.019704	0.173868	0.432121	0.497316	0	1000
6	> 100	> 100	> 100	> 100	0	1
6	> 100	> 100	> 100	> 100	0	10
6	> 100	> 100	> 100	> 100	0	1000

Таблица 1: Результаты вычислений

В таблице 1 в первом столбце указывается номер схемы; $E_n = \max_{x_k} |y(x_k) - y_k|$, y_k - решение соответствующей схемы при $h = 10^{-n}$; m - порядок сходимости, т.е. $E_n \sim O(h^m)$; параметр задачи $A = 1, 10, 1000$.

Видно, что схемы обладающие α-устойчивостью дают хорошее приближение при достаточно малом h.