

Отчёт по задаче "Итерационные методы решения систем  
линейных уравнений".

## 1 Задача 1.

Для решения системы линейных уравнений:

$$-\frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} + py_k = f_k, \quad k = 1, \dots, N-1;$$

$$y_0 = y_N = 0;$$

$$h = \frac{1}{N};$$

$$p \geq 0.$$

реализуйте метод Фурье (т.е. метод разложения по собственным векторам) для базисных функций:

$$\psi_k^{(n)} = \sin\left(\frac{\pi nk}{N}\right) \quad (1)$$

**Решение.**

Вычислим  $\lambda_n$ :

$$\begin{aligned} A\psi_k^{(n)} &= -\frac{\psi_{k+1}^{(n)} - 2\psi_k^{(n)} + \psi_{k-1}^{(n)}}{h^2} + p\psi_k^{(n)} \\ &= -\frac{\sin\left(\frac{\pi n(k+1)}{N}\right) - 2\sin\left(\frac{\pi nk}{N}\right) + \sin\left(\frac{\pi n(k-1)}{N}\right)}{h^2} + p\sin\left(\frac{\pi nk}{N}\right) \\ &= -\frac{\sin\left(\frac{\pi nk}{N}\right)\cos\left(\frac{\pi n}{N}\right) + \cos\left(\frac{\pi nk}{N}\right)\sin\left(\frac{\pi n}{N}\right) - 2\sin\left(\frac{\pi nk}{N}\right) + \sin\left(\frac{\pi nk}{N}\right)\cos\left(\frac{\pi n}{N}\right) - \cos\left(\frac{\pi nk}{N}\right)\sin\left(\frac{\pi n}{N}\right)}{h^2} + p\sin\left(\frac{\pi nk}{N}\right) \\ &= -\frac{\sin\left(\frac{\pi nk}{N}\right)\cos\left(\frac{\pi n}{N}\right) - 2\sin\left(\frac{\pi nk}{N}\right) + \sin\left(\frac{\pi nk}{N}\right)\cos\left(\frac{\pi n}{N}\right)}{h^2} + p\sin\left(\frac{\pi nk}{N}\right) \\ &= -\frac{2\sin\left(\frac{\pi nk}{N}\right)(\cos\left(\frac{\pi n}{N}\right) - 1)}{h^2} + p\sin\left(\frac{\pi nk}{N}\right) = \sin\left(\frac{\pi nk}{N}\right)\left(-\frac{2(\cos\left(\frac{\pi n}{N}\right) - 1)}{h^2} + p\right). \end{aligned}$$

Отсюда:

$$\lambda_n = p - N^2 2(\cos\left(\frac{\pi n}{N}\right) - 1). \quad (2)$$

Кроме того, из указания к задаче:

$$c_n = \frac{(f, \psi^{(n)})}{\lambda_n (\psi^{(n)}, \psi^{(n)})} = \frac{2 (f, \psi^{(n)})}{\lambda_n}. \quad (3)$$

Решение же можно найти в виде:

$$y_k = \sum_{n=1}^{N-1} c_n \psi_k^{(n)}. \quad (4)$$