Всеволод Заостровский, 409 группа

Отчёт по задаче "Итерационные методы решения систем линейных уравнений".

1 Задача 1.

Для решения системы линейных уравнений:

$$-\frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} + py_k = f_k, \qquad k = 1, \dots, N-1;$$
$$y_0 = y_N = 0;$$
$$h = \frac{1}{N};$$
$$p \geq 0.$$

реализуйте метод Фурье (т.е. метод разложения по собственным векторам) для базисных функций:

$$\psi_k^{(n)} = \sin(\frac{\pi n k}{N}) \tag{1}$$

Решение. Сперва, найдём базисные функции:

$-y_{k+1} + 2y_k - y_{k-1} + py_k h^2 = f_k h^2$

$y_{k+1} - 2(1 + \frac{ph^2}{2})y_k + y_{k-1} = -f_k h^2$

Выпишем характеристическое уравнение и решим его однородный вариант:

$y_{k+1} - 2(1 + \frac{ph^2}{2})y_k + y_{k-1} = 0.$

$y_{k+1} - 2qy_k + y_{k-1} = 0$

$\mu^2 - 2q\mu + 1 = 0$

$\mu_{1,2} = q \pm \sqrt{(}q^2 - 1)$

Пусть $\mu_1 = \mu_2$. Тогда:

$y_k = C_1 + kC_2$

$y_0 = C_1 + 0 \cdot C_2 = 0 \to C_1 = 0$

$y_N = 0 + N \cdot C_2 = 0 \to C_2 = 0$

Этот случай даёт тривиальное решение. Далее считаем, что $\mu_1 \neq \mu_2$.

$y_k = C_1\mu_1^k + C_2\mu_2^k$

$y_0 = C_1 + C_2 = 0 \to C_1 = -C_2$

$y_N = C_1\mu_1^N + C_2\mu_2^N \to C_1(\mu_1^N - \mu_2^N) = 0 \to$ (случай $C_1 = 0$ тривиален)

$\to (\frac{\mu_1}{\mu_2})^N = 1 \to \frac{\mu_1}{\mu_2} = e^{\frac{2\pi ik}{N}} \to$

из характеристического уравнения и теоремы Виета имеем $\mu_1\mu_2 = 1$

$\to \mu_1^2 = e^{\frac{2\pi ik}{N}}$

$\to \begin{cases} \mu_1 &= e^{\frac{\pi ik}{N}}, k \in \{1 \cdots N-1\} \\ \mu_2 &= e^{\frac{-\pi ik}{N}}, k \in \{1 \cdots N-1\} \end{cases}$

Отсюда получаем ответ[1]:

$y_k^{(n)} = C_1(e^{\frac{\pi ik}{N}} - e^{\frac{-\pi ik}{N}}) = \hat{C}_1 \sin(\frac{\pi nk}{N})$.

Вычислим λ_n и заодно проверим, является ли найденная функция собственной:

$A\psi^{(n)}{}_k = -\frac{\psi_{k+1}^{(n)} - 2\psi_k^{(n)} + \psi_{k-1}^{(n)}}{h^2} + p\psi_k^{(n)}$

$= -\frac{\sin(\frac{\pi n(k+1)}{N}) - 2\sin(\frac{\pi nk}{N}) + \sin(\frac{\pi n(k-1)}{N})}{h^2} + p\sin(\frac{\pi nk}{N})$

$= -\frac{\sin(\frac{\pi nk}{N})\cos(\frac{\pi n}{N}) + \cos(\frac{\pi nk}{N})\sin(\frac{\pi n}{N}) - 2\sin(\frac{\pi nk}{N}) + \sin(\frac{\pi nk}{N})\cos(\frac{\pi n}{N}) - \cos(\frac{\pi nk}{N})\sin(\frac{\pi n}{N})}{h^2} + p\sin(\frac{\pi nk}{N})$

$= -\frac{\sin(\frac{\pi nk}{N})\cos(\frac{\pi n}{N}) - 2\sin(\frac{\pi nk}{N}) + \sin(\frac{\pi nk}{N})\cos(\frac{\pi n}{N})}{h^2} + p\sin(\frac{\pi nk}{N})$

$= -\frac{2\sin(\frac{\pi nk}{N})(\cos(\frac{\pi n}{N}) - 1)}{h^2} + p\sin(\frac{\pi nk}{N}) = \sin(\frac{\pi nk}{N})(-\frac{2(\cos(\frac{\pi n}{N}) - 1)}{h^2} + p)$.

Отсюда:

$$\lambda_n = p - 2N^2(\cos(\frac{\pi n}{N}) - 1). \tag{2}$$

[1] Ранее мы пренебрегли корнем $-e^{\frac{\pi ik}{N}}$, но он даёт тот же ответ, поскольку минус съедает константа.

Эти значения были проверены численно (см. /NumCheck). Кроме того, из указания к задаче:

$$c_n = \frac{\left(f, \psi^{(n)}\right)}{\lambda_n \left(\psi^{(n)}, \psi^{(n)}\right)} = \frac{2\left(f, \psi^{(n)}\right)}{\lambda_n}. \tag{3}$$

Решение же можно найти в виде:

$$y_k = \sum_{n=1}^{N-1} c_n \psi_k^{(n)}. \tag{4}$$

Огромные проблемы возникли всвязи с тем, что матрицей Фурье порядка N прадлагается называть матрицу, размерность которой $N+1$, при этом, подматрица из ненулевых элементов, для которой осмысленно ставить задачу решения СЛУ имеет размерность $N-1$. Об этом стоит помнить, во избежание изнурительной отладки.

Реализацию см. в файле "solution.h", незамысловатая система тестирования реализована в "test1.c".

2 Задача 2.

Для решения системы линейных уравнений из **Задачи 1.** реализуйте метод Ричардсона. Проведите тестирование программы, сравнив теоретическую и реальную скорость сходимости. Для этого на каждом k-ом шаге, $k = 0, 1, \ldots$ итерационного процесса сохраните в некоторый файл очередную тройку.

Решение. Реализацию см. в файле "solution.h", незамысловатая система тестирования реализована в "test2.c".

Фактически реализован функционал (правда, не самый эффективный), позволяющий применить метод к любой матрице. Очень остро здесь стоит вопрос определения m и M (см. файл "../LinAlg.pdf"). Для

Error2.png

Рис. 1: Ошибка метода Ричардсона решения СЛУ, определяемого матрицей типа Фурье (задача 1).

матрицы из задачи 1 есть явная формула собственных значений, благодаря чему удалось добиться хорошего приближения к теоретической сходимости. Однако, если бы не было известной формы, то найти их с приемлемой точностью представлялось бы задачей, вычислительная сложность которой сравнима со сложностью решения всей системы. При этом, неправильное τ, как показали многочисленные отладочные тесты, не включенные в отчет, может очень сильно испортить сходимость.

По результатам тестирования был построен график (для вывода ./LS2 50 1000 100 out.txt, те матрица порядка 50, до 1000 итераций с $p = 100$). См. рисунок.

3 Задача 3.

Для решения системы линейных уравнений:

$$\begin{aligned}
&-\frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} + p_k y_k = f_k, \qquad k = 1, \ldots, N-1;\\
&y_0 = y_N = 0;\\
&h = \frac{\pi}{N};\\
&p_k = 1 + \sin^2(\pi k h).
\end{aligned}$$

реализуйте метод с предобуславливателем.

Решение. Реализацию см. в файле "solution.h", незамысловатая система тестирования реализована в "test3.c".

Error3.png

Рис. 2: Ошибка метода решения СЛУ, определяемого матрицей типа Фурье (задача 3), с предобуславливателем.

Фактически, приведенная реализация поддерживает любой предобуславливатель. В том числе, как требовалось в задаче, реализовано обращение матрицы методом Фурье.

По результатам тестирования был построен график (для вывода ./LS3 50 1000 100 out.txt, те матрица порядка 50, до 1000 итераций с $p = 100$). См. рисунок.