

Отчёт по задаче "Итерационные методы решения систем
линейных уравнений".

1 Задача 1.

Для решения системы линейных уравнений:

$$-\frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} + py_k = f_k, \quad k = 1, \dots, N-1;$$

$$y_0 = y_N = 0;$$

$$h = \frac{1}{N};$$

$$p \geq 0.$$

реализуйте метод Фурье (т.е. метод разложения по собственным векторам) для базисных функций:

$$\psi_k^{(n)} = \sin\left(\frac{\pi nk}{N}\right) \quad (1)$$

Решение. Сперва, найдём базисные функции:

$$-y_{k+1} + 2y_k - y_{k-1} + py_k h^2 = f_k h^2$$

$$y_{k+1} - 2\left(1 + \frac{ph^2}{2}\right)y_k + y_{k-1} = -f_k h^2$$

Выпишем характеристическое уравнение и решим его однородный вариант:

$$y_{k+1} - 2\left(1 + \frac{ph^2}{2}\right)y_k + y_{k-1} = 0.$$

$$y_{k+1} - 2qy_k + y_{k-1} = 0$$

$$\mu^2 - 2q\mu + 1 = 0$$

$$\mu_{1,2} = q \pm \sqrt{q^2 - 1}$$

Пусть $\mu_1 = \mu_2$. Тогда:

$$y_k = C_1 + kC_2$$

$$y_0 = C_1 + 0 \cdot C_2 = 0 \rightarrow C_1 = 0$$

$$y_N = 0 + N \cdot C_2 = 0 \rightarrow C_2 = 0$$

Этот случай даёт тривиальное решение. Далее считаем, что $\mu_1 \neq \mu_2$.

$$y_k = C_1\mu_1^k + C_2\mu_2^k$$

$$y_0 = C_1 + C_2 = 0 \rightarrow C_1 = -C_2$$

$$y_N = C_1\mu_1^N + C_2\mu_2^N \rightarrow C_1(\mu_1^N - \mu_2^N) = 0 \rightarrow (\text{случай } C_1 = 0 \text{ тривиален})$$

$$\rightarrow \left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^N = 1 \rightarrow \frac{\mu_1}{\mu_2} = e^{\frac{2\pi ik}{N}} \rightarrow$$

из характеристического уравнения и теоремы Виета имеем $\mu_1\mu_2 = 1$

$$\rightarrow \mu_1^2 = e^{\frac{2\pi ik}{N}}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \mu_1 = e^{\frac{\pi ik}{N}}, k \in \{1 \dots N-1\} \\ \mu_2 = e^{-\frac{\pi ik}{N}}, k \in \{1 \dots N-1\} \end{cases}$$

Отсюда получаем ответ¹:

$$y_k^{(n)} = C_1(e^{\frac{\pi ik}{N}} - e^{-\frac{\pi ik}{N}}) = \hat{C}_1 \sin\left(\frac{\pi nk}{N}\right).$$

Вычислим λ_n и заодно проверим, является ли найденная функция собственной:

$$\begin{aligned} A\psi_k^{(n)} &= -\frac{\psi_{k+1}^{(n)} - 2\psi_k^{(n)} + \psi_{k-1}^{(n)}}{h^2} + p\psi_k^{(n)} \\ &= -\frac{\sin\left(\frac{\pi n(k+1)}{N}\right) - 2\sin\left(\frac{\pi nk}{N}\right) + \sin\left(\frac{\pi n(k-1)}{N}\right)}{h^2} + p\sin\left(\frac{\pi nk}{N}\right) \\ &= -\frac{\sin\left(\frac{\pi nk}{N}\right)\cos\left(\frac{\pi n}{N}\right) + \cos\left(\frac{\pi nk}{N}\right)\sin\left(\frac{\pi n}{N}\right) - 2\sin\left(\frac{\pi nk}{N}\right) + \sin\left(\frac{\pi nk}{N}\right)\cos\left(\frac{\pi n}{N}\right) - \cos\left(\frac{\pi nk}{N}\right)\sin\left(\frac{\pi n}{N}\right)}{h^2} + p\sin\left(\frac{\pi nk}{N}\right) \\ &= -\frac{\sin\left(\frac{\pi nk}{N}\right)\cos\left(\frac{\pi n}{N}\right) - 2\sin\left(\frac{\pi nk}{N}\right) + \sin\left(\frac{\pi nk}{N}\right)\cos\left(\frac{\pi n}{N}\right)}{h^2} + p\sin\left(\frac{\pi nk}{N}\right) \\ &= -\frac{2\sin\left(\frac{\pi nk}{N}\right)(\cos\left(\frac{\pi n}{N}\right) - 1)}{h^2} + p\sin\left(\frac{\pi nk}{N}\right) = \sin\left(\frac{\pi nk}{N}\right)\left(-\frac{2(\cos\left(\frac{\pi n}{N}\right) - 1)}{h^2} + p\right). \end{aligned}$$

Отсюда:

$$\lambda_n = p - 2N^2\left(\cos\left(\frac{\pi n}{N}\right) - 1\right). \quad (2)$$

¹Ранее мы пренебрегли корнем $-e^{\frac{\pi ik}{N}}$, но он даёт тот же ответ, поскольку минус съедает константа.

Эти значения были проверены численно (см. /NumCheck). Кроме того, из указания к задаче:

$$c_n = \frac{(f, \psi^{(n)})}{\lambda_n (\psi^{(n)}, \psi^{(n)})} = \frac{2 (f, \psi^{(n)})}{\lambda_n}. \quad (3)$$

Решение же можно найти в виде:

$$y_k = \sum_{n=1}^{N-1} c_n \psi_k^{(n)}. \quad (4)$$

Огромные проблемы возникли всвязи с тем, что матрицей Фурье порядка N предлагается называть матрицу, размерность которой $N+1$, при этом, подматрица из ненулевых элементов, для которой осмысленно ставить задачу решения СЛУ имеет размерность $N-1$. Об этом стоит помнить, во избежание изнурительной отладки.

Реализацию см. в файле "solution.h", незамысловатая система тестирования реализована в "test1.c".

2 Задача 2.

Для решения системы линейных уравнений из **Задачи 1.** реализуйте метод Ричардсона. Проведите тестирование программы, сравнив теоретическую и реальную скорость сходимости. Для этого на каждом k -ом шаге, $k = 0, 1, \dots$ итерационного процесса сохраните в некоторый файл очередную тройку.

Решение. Реализацию см. в файле "solution.h", незамысловатая система тестирования реализована в "test2.c".

Фактически реализован функционал (правда, не самый эффективный), позволяющий применить метод к любой матрице. Очень остро здесь стоит вопрос определения m и M (см. файл "../LinAlg.pdf"). Для

матрицы из задачи 1 есть явная формула собственных значений, благодаря чему удалось добиться хорошего приближения к теоретической сходимости. Однако, если бы не было известной формы, то найти их с приемлемой точностью представлялось бы задачей, вычислительная сложность которой сравнима со сложностью решения всей системы. При этом, неправильное τ , как показали многочисленные отладочные тесты, не включенные в отчет, может очень сильно испортить сходимость.

По результатам тестирования был построен график (для вывода ./LS2 50 1000 100 out.txt, те матрица порядка 50, до 1000 итераций с $p = 100$). См. рисунок.

3 Задача 3.

Для решения системы линейных уравнений:

$$\begin{aligned}
 -\frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} + p_k y_k &= f_k, \quad k = 1, \dots, N-1; \\
 y_0 = y_N &= 0; \\
 h &= \frac{\pi}{N}; \\
 p_k &= 1 + \sin^2(\pi k h).
 \end{aligned}$$

реализуйте метод с предобуславливателем.

Решение. Реализацию см. в файле "solution.h", незамысловатая система тестирования реализована в "test3.c".

Фактически, приведенная реализация поддерживает любой предобуславливатель. В том числе, как требовалось в задаче, реализовано обращение матрицы методом Фурье.

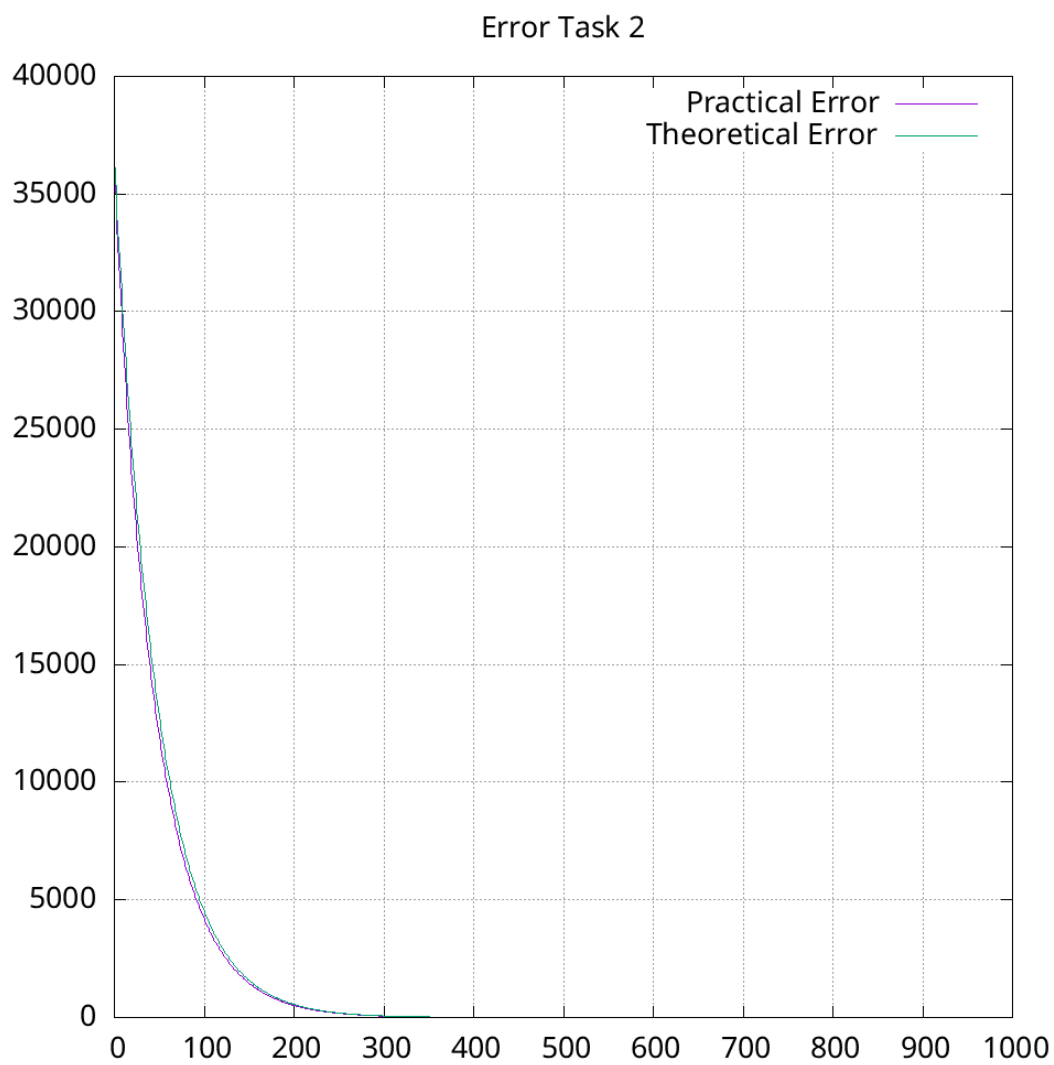


Рис. 1: Ошибка метода Рунге-Кутты решения СЛУ, определяемого матрицей типа Фурье (задача 1).

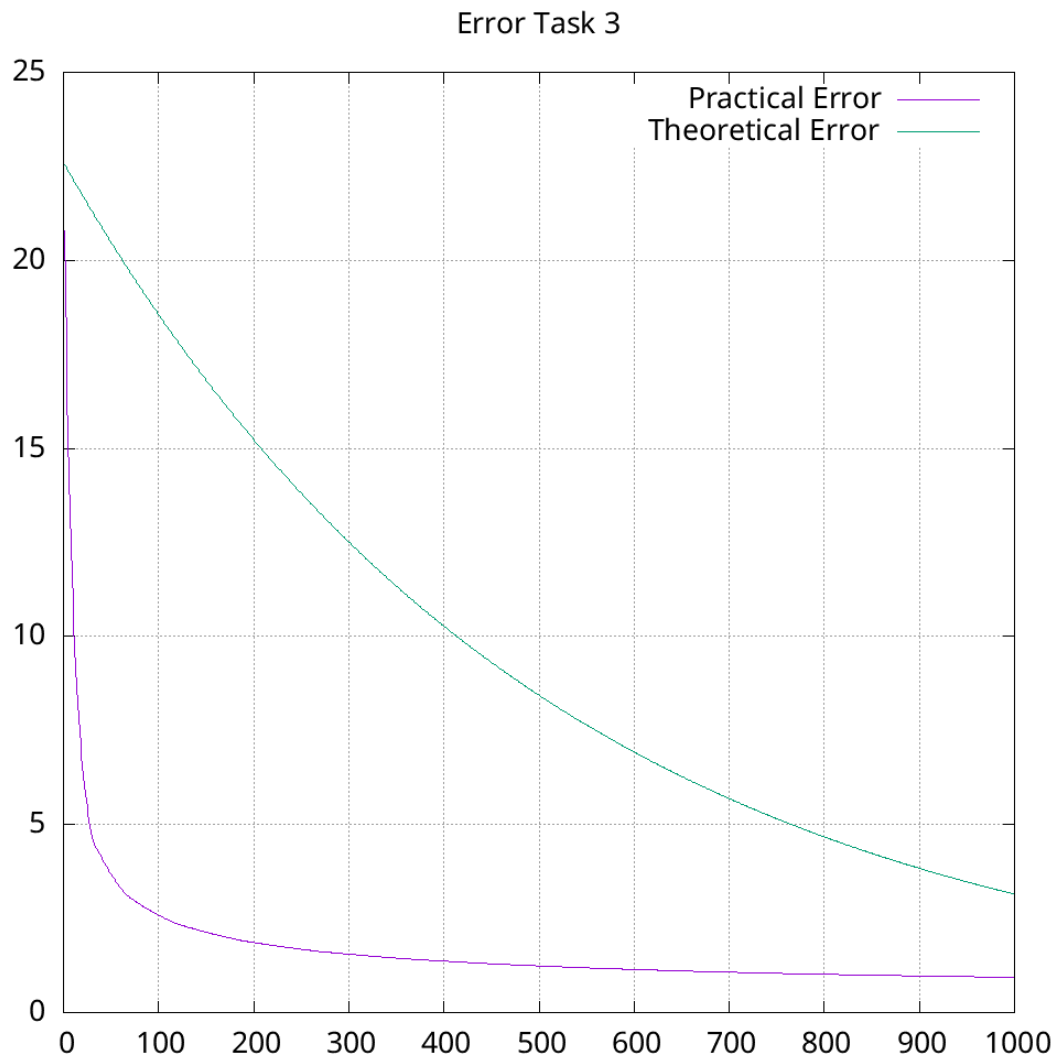


Рис. 2: Ошибка метода решения СЛУ, определяемого матрицей типа Фурье (задача 3), с предобуславливателем.

По результатам тестирования был построен график (для вывода `./LS3 50 1000 100 out.txt`, те матрица порядка 50, до 1000 итераций с $p = 100$). См. рисунок.