

Всеволод Заостровский, 409 группа

**Отчёт по задаче ” Метод Фурье для уравнения  
теплопроводности для двумерного оператора Лапласа”.**

## Содержание

<b>1</b>	<b>Постановка задачи.</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Дискретизация дифференциального уравнения.</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>Аппроксимация на решении.</b>	<b>3</b>
<b>4</b>	<b>Разложение функции в двумерный ряд Фурье</b>	<b>4</b>
<b>5</b>	<b>Алгоритм численного решения.</b>	<b>6</b>
5.1	Общая идея решения. . . . .	6
5.2	Получение $n + 1$ слоя из $n$ -го. . . . .	6
5.3	Практический алгоритм. . . . .	8
5.4	Практический алгоритм — вариант 2. . . . .	9
<b>6</b>	<b>Тесты</b>	<b>10</b>
6.1	Базисные функции. . . . .	10
6.2	Ненулевая правая часть. . . . .	11
6.3	Скорость сходимости. . . . .	13
6.4	Представление ответа в виде gif-изображения. . . . .	14

# 1 Постановка задачи.

Необходимо решить уравнение:

$$u_t(t, x) = u_{xx}(t, x, y) + u_{yy}(t, x, y) + f(t, x, y).$$

Будем считать, что  $0 \leq t, x, y \leq 1$ . В моём варианте, краевые условия:

$$u(t, x, y)|_{(x,y) \in \partial\Omega} = 0, \quad \Omega = [0, 1] \times [0, 1].$$

$$u(0, x, y) = u^0(x, y), \quad (x, y) \in \Omega.$$

# 2 Дискретизация дифференциального уравнения.

Исходной задаче (см. раздел 1) предлагается сопоставлять следующую схему:

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\tau} = \frac{u_{i+1,j}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i-1,j}^{n+1}}{h_X^2} + \frac{u_{i,j+1}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i,j-1}^{n+1}}{h_Y^2} + f(t_n, x_{i+1}, y_{j+1}),$$

$$i = 1 \dots N_X, \quad j = 1 \dots N_Y, \quad n = 1 \dots N - 1.$$

Краевые условия примут вид:

$$\forall i, j, n \in \{0, 1, \dots, N_X\} \times \{0, 1, \dots, N_Y\} \times \{0, 1, \dots, N\},$$

$$u_h^n(1, j) = u_h^n(0, j) = u_h^n(i, 0) = u_h^n(i, 1) = 0,$$

$$u_h^0(i, j) = u_h^0(i, j).$$

### 3 Аппроксимация на решении.

Разложим значения решения в ряд Тейлора:

$$\begin{aligned}u(t_n, x_{i+1}, y_j) &= u(t_n, x_i, y_j) + h_X u_x(t_n, x_i, y_j) + \frac{h_X^2}{2} u_{xx}(t_n, x_i, y_j) \\&\quad + \frac{h_X^3}{6} u_{xxx}(t_n, x_i, y_j) + \frac{h_X^4}{24} u_{xxxx}(t_n, x_i, y_j) + O(h_X^5) \\u(t_n, x_{i-1}, y_j) &= u(t_n, x_i, y_j) - h_X u_x(t_n, x_i, y_j) + \frac{h_X^2}{2} u_{xx}(t_n, x_i, y_j) \\&\quad - \frac{h_X^3}{6} u_{xxx}(t_n, x_i, y_j) + \frac{h_X^4}{24} u_{xxxx}(t_n, x_i, y_j) + O(h_X^5) \\u(t_n, x_i, y_{j+1}) &= u(t_n, x_i, y_j) + h_Y u_y(t_n, x_i, y_j) + \frac{h_Y^2}{2} u_{yy}(t_n, x_i, y_j) \\&\quad + \frac{h_Y^3}{6} u_{yyy}(t_n, x_i, y_j) + \frac{h_Y^4}{24} u_{yyyy}(t_n, x_i, y_j) + O(h_Y^5) \\u(t_n, x_i, y_{j-1}) &= u(t_n, x_i, y_j) - h_Y u_y(t_n, x_i, y_j) + \frac{h_Y^2}{2} u_{yy}(t_n, x_i, y_j) \\&\quad - \frac{h_Y^3}{6} u_{yyy}(t_n, x_i, y_j) + \frac{h_Y^4}{24} u_{yyyy}(t_n, x_i, y_j) + O(h_Y^5) \\u(t_{n+1}, x_i, y_j) &= u(t_n, x_i, y_j) + \tau u_x(t_n, x_i, y_j) + \frac{\tau^2}{2} u_{tt}(t_n, x_i, y_j) + \frac{\tau^3}{6} u_{ttt}(t_n, x_i, y_j) \\&\quad + \frac{\tau^4}{24} u_{tttt}(t_n, x_i, y_j) + O(\tau^5) \\u(t_{n-1}, x_m) &= u(t_n, x_i, y_j) - \tau u_x(t_n, x_i, y_j) + \frac{\tau^2}{2} u_{tt}(t_n, x_i, y_j) - \frac{\tau^3}{6} u_{ttt}(t_n, x_i, y_j) \\&\quad + \frac{\tau^4}{24} u_{tttt}(t_n, x_i, y_j) + O(\tau^5)\end{aligned}$$

Отсюда имеем:

$$\begin{aligned}
\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\tau} &= \frac{u(t_{n+1}, x_i, y_j) - u(t_n, x_i, y_j)}{\tau} = u_t(t_n, x_i, y_j) \\
&\quad + \frac{\tau}{2} u_{tt}(t_n, x_i, y_j) + \frac{\tau^2}{6} u_{ttt}(t_n, x_i, y_j) + \frac{\tau^3}{24} u_{tttt}(t_n, x_i, y_j) + O(\tau^4) \\
\frac{u_{i+1,j}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i-1,j}^{n+1}}{h_X^2} &= \frac{u(t_{n+1}, x_{i+1}, y_j) - 2u(t_{n+1}, x_i, y_j) + u(t_{n+1}, x_{i-1}, y_j)}{h_X^2} = \\
&= u_{xx}(t_n, x_i, y_j) + \frac{h_X^2}{12} u_{xxxx}(t_n, x_i, y_j) + O(h_X^4) \\
\frac{u_{i,j+1}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i,j-1}^{n+1}}{h_Y^2} &= \frac{u(t_{n+1}, x_i, y_{j+1}) - 2u(t_{n+1}, x_i, y_j) + u(t_{n+1}, x_i, y_{j-1})}{h_Y^2} = \\
&= u_{yy}(t_n, x_i, y_j) + \frac{h_Y^2}{12} u_{yyyy}(t_n, x_i, y_j) + O(h_Y^4)
\end{aligned}$$

Подставив эти выражения в дифференциальное уравнение, получим:

$$\begin{aligned}
&\left\| \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\tau} - \frac{u_{i+1,j}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i-1,j}^{n+1}}{h_X^2} - \frac{u_{i,j+1}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i,j-1}^{n+1}}{h_Y^2} - f(t_n, x_{i+1}, y_{j+1}) \right\| = \\
&= \left\| -u_{xx}(t_n, x_i, y_j) - u_{yy}(t_n, x_i, y_j) + u_t(t_n, x_i, y_j) - f(t_n, x_{i+1}, y_{j+1}) + O(\dots) \right\| = \\
&= O(\tau + h_X^2 + h_Y^2).
\end{aligned}$$

С учетом того, что начальные условия даны точно и, очевидно,  $|f(t_n, x_i, y_j) - f_{i,j}^n| \rightarrow 0$ , получаем, что порядок аппроксимации на решении данной схемы составляет  $O(\tau + h_X^2 + h_Y^2)$ .

## 4 Разложение функции в двумерный ряд Фурье

Функцию  $u(x, y) \in C^\infty[0, 1]^2$  можно разложить в ряд Фурье, взяв синусы в качестве базисных функций:

$$u(x) = \sum_{m,n=1}^{\infty} c_{mn} \sin \pi m x \sin \pi n y.$$

Перейдём к рассмотрению конечного числа узлов. Выпишем условия на сетку:

$$\begin{aligned}
u_{ij} &:= u(x_i, y_j), \quad x_i = \frac{i}{N_X}, \quad y_j := \frac{j}{N_Y} \\
u_{ij} &= \sum_{n,m=1}^{N_X-1, N_Y-1} c_{nm} \phi_i^{(n)} \psi_j^{(m)}, \\
\phi_i^{(n)} &:= \sin \pi n i h_X = \sin \left( \frac{\pi n i}{N_X} \right) \\
\psi_j^{(m)} &:= \sin \pi m j h_Y = \sin \left( \frac{\pi m j}{N_Y} \right) \\
\phi^n &:= (\phi_1^n \dots \phi_{N_X-1}^n), \quad \psi^m := (\psi_1^m \dots \psi_{N_Y-1}^m).
\end{aligned}$$

Искать коэффициенты будем по следующему алгоритму:

1. Вычислим матрицу  $u_{ij} := u(x_i, y_j)$ .
2. Зафиксируем  $j$  и разложим  $u^j(i) := u_{ij}$  в одномерный ряд Фурье:

$$u^j(i) = \sum_{n=1}^{N_X-1} \phi_i^{(n)} d_n^j.$$

Полученные коэффициенты запишем в новую матрицу.

3. По вектору  $d_n^j$  восстановим коэффициенты  $c_{nm}$  посредством ещё одного разложения в ряд:

$$d_n^j = \sum_{m=1}^{N_Y-1} c_{nm} \psi_j^m.$$

## 5 Алгоритм численного решения.

### 5.1 Общая идея решения.

Запишем схему в виде:

$$\begin{aligned} & -\frac{u_{i+1,j}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i-1,j}^{n+1}}{h_X^2} - \frac{u_{i,j+1}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i,j-1}^{n+1}}{h_Y^2} + \frac{u_{i,j}^{n+1}}{\tau} = \\ & = \frac{u_{i,j}^n}{\tau} + f(t_n, x_{i+1}, y_{j+1}). \end{aligned}$$

Фактически, это трехмерная система уравнений. Первый слой  $u_{i,j}^0|_{0 \leq i,j \leq 1}^{n+1}$  известен из начального условия. Если, располагая этими данными, удастся вычислить следующий слой, то, повторяя процесс шаг за шагом мы вычислим всю матрицу. Это возможно, поскольку, если считать  $u^n = \text{const}$  схема выше представляет собой систему линейных уравнений относительно  $u_{i,j}^{n+1}$ . Далее подробно описан процесс нахождения сети методом Фурье.

### 5.2 Получение $n + 1$ слоя из $n$ -го.

Если нам известен слой  $u_{i,j}^n|_{0 \leq i,j \leq 1}^{n=\text{const}}$ , то для определения слоя  $u_{i,j}^n|_{0 \leq i,j \leq 1}^{n+1}$  необходимо решить систему уравнений выше. Проще всего сделать это методом Фурье. Заметим, что эта система образует схему для дифференциальной задачи:

$$-\Delta u(x, y) + pu(x, y) = \hat{f}(x, y),$$

где  $p = \frac{1}{\tau}$ , а  $\hat{f} = \frac{u}{\tau} + f(x, y)$ .

Функции  $u(x, y), f(x, y) \in C_0^\infty[0, 1]^2$  можно разложить в ряд Фурье, взяв синусы в качестве базисных функций:

$$u(x, y) = \sum_{n,m=1}^{\infty} \hat{c}_{nm} \phi^{(n)}(x) \psi^{(m)}(y),$$

$$\hat{f}(x, y) = \sum_{n,m=1}^{\infty} \hat{d}_{nm} \phi^{(n)}(x) \psi^{(m)}(y),$$

где

$$\phi^{(n)}(x) = \sin \pi n x, \quad \psi^{(m)}(y) = \sin \pi m y.$$

Перейдем в дискретное время:

$$u(x_i, y_j) = u_h(i, j) = \sum_{n,m=1}^{N_X-1, N_Y-1} c_{nm} \phi_i^{(n)} \psi_j^{(m)},$$

$$\hat{f}(x_i, y_j) = \hat{f}_h(i, j) = \sum_{n,m=1}^{N_X-1, N_Y-1} d_{nm} \phi_i^{(n)} \psi_j^{(m)},$$

где

$$\phi_i^{(n)} := \phi^{(n)}(x_i) = \sin \pi n i h_X, \quad \psi_j^{(m)} := \psi^{(m)}(x_j) = \sin \pi m j h_Y.$$

В отчете по задаче по линейной алгебре (см. директорию "LinAlg") были вычислены собственные значения этой функции для дискретизации оператора Лапласа:

$$-\Delta_h^X \phi_i^{(n)} = \lambda_n^X \phi_i^{(n)}, \quad \lambda_n^X = \frac{4}{h_X^2} \sin^2 \left( \frac{\pi n h_X}{2} \right),$$

$$-\Delta_h^Y \psi_j^{(m)} = \lambda_m^Y \psi_j^{(m)}, \quad \lambda_m^Y = \frac{4}{h_Y^2} \sin^2 \left( \frac{\pi m h_Y}{2} \right).$$

С учетом этого, для схемы

$$-\Delta_h^X u_h(i, j) - \Delta_h^Y u_h(i, j) + p u_h(i, i) = \hat{f}_h(i, j)$$

справедливо представление в виде ряда:

$$\begin{aligned}
& -(\Delta_h^X + \Delta_h^Y) \sum_{n,m=1}^{N_X-1, N_Y-1} c_{nm} \phi_i^{(n)} \psi_j^{(m)} + p \sum_{n,m=1}^{N_X-1, N_Y-1} c_{nm} \phi_i^{(n)} \psi_j^{(m)} = \\
& = \sum_{n,m=1}^{N_X-1, N_Y-1} d_{nm} \phi_i^{(n)} \psi_j^{(m)}.
\end{aligned}$$

Отсюда, учитывая то, что  $\phi_i^{(n)}$  и  $\psi_j^{(m)}$  — собственные функции, имеем:

$$\sum_{n,m=1}^{N_X-1, N_Y-1} c_{nm} (\lambda_n^X + \lambda_m^Y + p) \phi_i^{(n)} \psi_j^{(m)} = \sum_{n,m=1}^{N_X-1, N_Y-1} d_{nm} \phi_i^{(n)} \psi_j^{(m)},$$

а значит

$$c_{nm} = \frac{d_{nm}}{\lambda_n^X + \lambda_m^Y + p}, \quad 1 \leq n \leq N_X - 1, \quad 1 \leq m \leq N_Y - 1.$$

### 5.3 Практический алгоритм.

Решить схему из раздела 2 можно по следующему алгоритму:

1. На этапе  $G$  известен слой  $G$ :  $u_{i,j}^G|_{0 \leq i,j \leq N_x, N_y}^{G=\text{const}}$  и все слои до него.
2. Найдем коэффициенты  $d_{nm}$  разложения функции  $\hat{f}(x, y)$  в дискретный ряд Фурье:

$$\frac{u_{i,j}^G}{\tau} + f(t_G, x_i, y_j) =: \hat{f}(x_i, y_j) =: \hat{f}_h(i, j) = \sum_{n,m=1}^{N_X-1, N_Y-1} \hat{d}_{nm} \phi_i^{(n)} \psi_j^{(m)}.$$

3. Найдем коэффициенты  $c_{nm}$  разложения функции  $u^{G+1}(x, y)$  в дискретный ряд Фурье:

$$u(t_{G+1}, x_i, y_j) = u_h^{G+1}(i, j) = \sum_{n,m=1}^{N_X-1, N_Y-1} c_{nm} \phi_i^{(n)} \psi_j^{(m)},$$



пользуясь формулой:

$$c_{nm} = \frac{\hat{d}_{nm}}{\frac{4}{h_X^2} \sin^2\left(\frac{\pi n h_X}{2}\right) + \frac{4}{h_Y^2} \sin^2\left(\frac{\pi m h_Y}{2}\right) + \frac{1}{\tau}},$$

$$1 \leq n \leq N_X - 1, \quad 1 \leq m \leq N_Y - 1.$$

4. Вычислить значения

$$u^{G+1}(i, j) = \sum_{n,m=1}^{N_X-1, N_Y-1} c_{nm} \phi_i^{(n)} \psi_j^{(m)}$$

и записать их в соответствующий слой матрицы решения.

## 5.4 Практический алгоритм — вариант 2.

Решить схему из раздела 2 можно по следующему алгоритму:

1. На этапе  $G$  известны коэффициенты Фурье-разложения решения для фиксированного  $t_G$  :  $u_{i,j}^G|_{0 \leq i,j \leq N_x, N_y}^{G=\text{const}} = \sum u_{nm}^G \phi_i^{(n)} \psi_j^{(m)}$  и все слои до него.
2. Найдем коэффициенты  $d_{nm}$  разложения функции  $f(x, y)$  в дискретный ряд Фурье:

$$f(t_G, x_i, y_j) = \sum_{n,m=1}^{N_X-1, N_Y-1} d_{nm} \phi_i^{(n)} \psi_j^{(m)}.$$

3. Тогда коэффициенты Фурье правой части уравнения можно найти по формуле:

$$\begin{aligned} \hat{f}(x_i, y_j) &= \frac{u_{i,j}^G}{\tau} + f(t_G, x_i, y_j) \\ \hat{f}(x_i, y_j) &= \frac{1}{\tau} \sum_{n,m=1}^{N_X-1, N_Y-1} u_{nm}^G \phi_i^{(n)} \psi_j^{(m)} + \sum_{n,m=1}^{N_X-1, N_Y-1} d_{nm} \phi_i^{(n)} \psi_j^{(m)} = \\ &= \sum_{n,m=1}^{N_X-1, N_Y-1} \left( \frac{u_{nm}^G}{\tau} + d_{nm} \right) \phi_i^{(n)} \psi_j^{(m)} \Rightarrow \hat{d}_{nm} = \frac{u_{nm}^G}{\tau} + d_{nm}. \end{aligned}$$

4. Найдем коэффициенты  $u_{nm}^{G+1}$  разложения функции  $u^{G+1}(x, y)$  в дискретный ряд Фурье:

$$u(t_{G+1}, x_i, y_j) = u_h^{G+1}(i, j) = \sum_{n,m=1}^{N_X-1, N_Y-1} u_{nm}^{G+1} \phi_i^{(n)} \psi_j^{(m)},$$

пользуясь формулой:

$$u_{nm}^{G+1} = \frac{\frac{u_{nm}^G}{\tau} + d_{nm}}{\frac{4}{h_X^2} \sin^2\left(\frac{\pi n h_X}{2}\right) + \frac{4}{h_Y^2} \sin^2\left(\frac{\pi m h_Y}{2}\right) + \frac{1}{\tau}},$$

$$1 \leq n \leq N_X - 1, \quad 1 \leq m \leq N_Y - 1.$$

5. После нахождения всей трехмерной матрицы коэффициентов Фурье, вычислить значения в каждой точке сетки по этой аппроксимации.

## 6 Тесты

### 6.1 Базисные функции.

При начальном условии вида

$$u(0, x, y) = \sin \pi n x \sin \pi m y.$$

Легко подобрать решение задачи 1:

$$u(t, x, y) = e^{-\pi^2(n^2+m^2)t} \sin \pi n x \sin \pi m y.$$

Таким образом, можно проверить правильность вычисления коэффициента Фурье: при этом, корректная работа на базисных функциях даёт существенные основания полагать, что и в общем случае программа будет работать корректно. На них же можно вычислить порядок сходимости (ясно, что домножение на произведение синусов происходит в самом

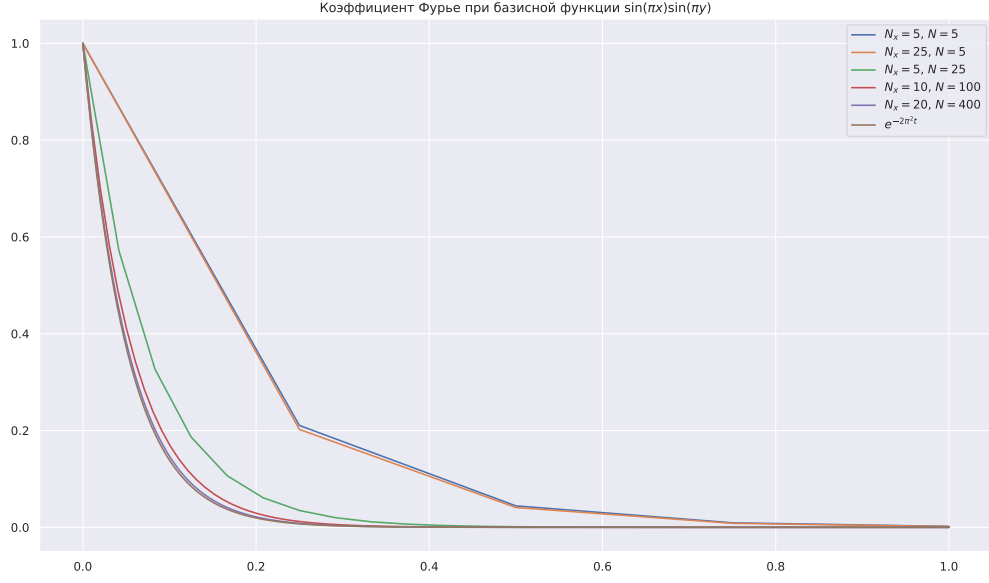


Рис. 1: Задача 1 при  $f = 0$ ,  $u(0, x, y) = \sin \pi n x \sin \pi m y$

конце и сходимость не испортит). Рассматриваются  $1 \leq n, m \leq 2$ . Результаты представлены на графиках 1–4.

## 6.2 Ненулевая правая часть.

Рассмотрим частный случай задачи 1, в котором легко угадать решение:

$$u_t(t, x) = u_{xx}(t, x, y) + u_{yy}(t, x, y) + e^{-2\pi^2 t} \sin \pi x \sin \pi y,$$

краевые условия:

$$u(t, x, y)|_{(x,y) \in \partial\Omega} = 0, \quad \Omega = [0, 1] \times [0, 1].$$

$$u(0, x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Omega.$$

Тогда видим, что функция

$$u(t, x, y) = t e^{-2\pi^2 t} \sin \pi x \sin \pi y$$

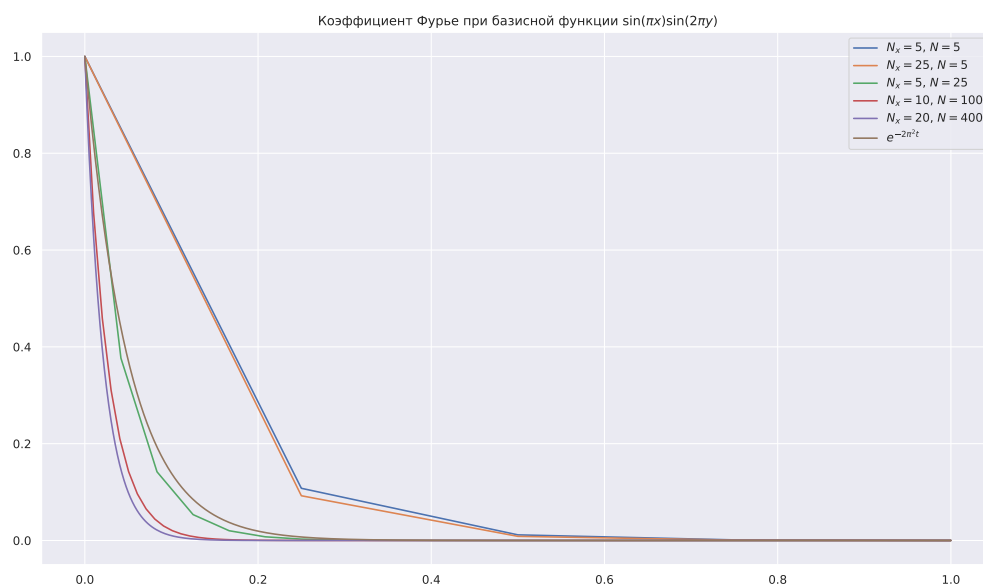


Рис. 2: Задача 1 при  $f = 0$ ,  $u(0, x, y) = \sin \pi n x \sin \pi m y$

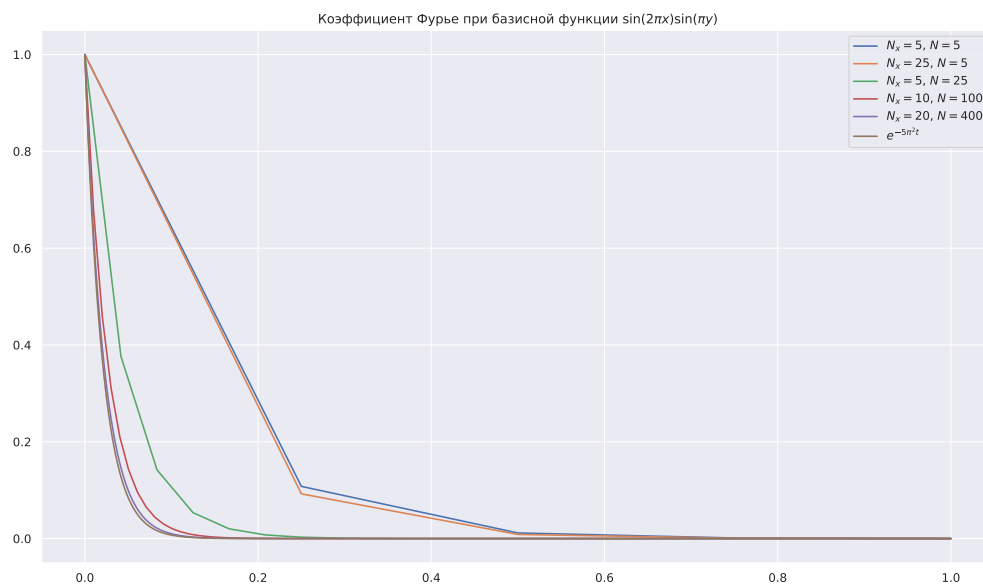


Рис. 3: Задача 1 при  $f = 0$ ,  $u(0, x, y) = \sin \pi n x \sin \pi m y$

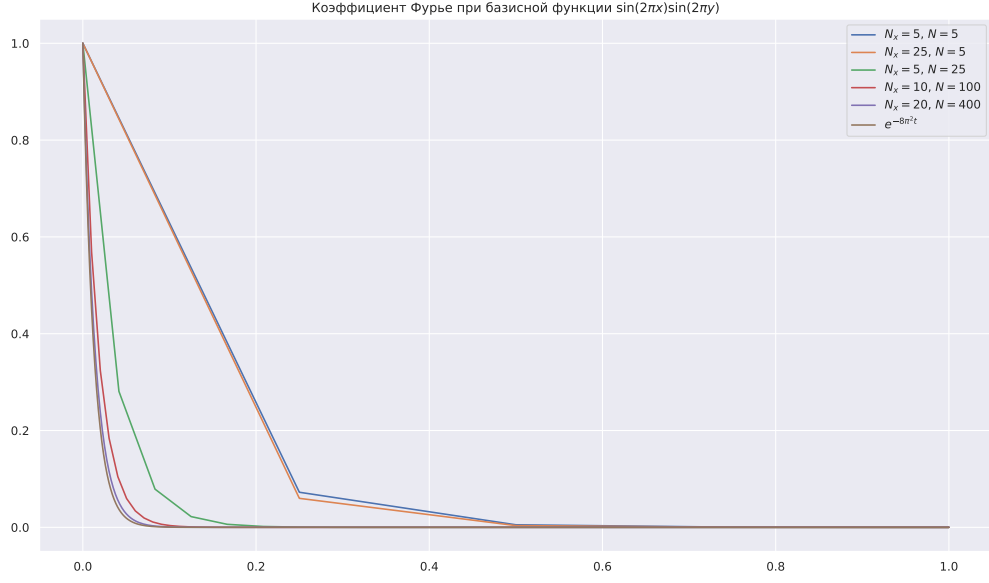


Рис. 4: Задача 1 при  $f = 0$ ,  $u(0, x, y) = \sin \pi n x \sin \pi m y$

является решением рассматриваемой задачи. Её единственный ненулевой коэффициент Фурье  $u_{11}^t = t e^{-2\pi^2 t}$ , с этой функцией мы будем сравнивать численный результат (см. график 5).

### 6.3 Скорость сходимости.

Было проведено две серии тестов скорости сходимости:

1.  $(N, N_x, N_y) = \{(i, i), \quad i \in \{100, 200, 300, 400, 500\}\}$  — для проверки сходимости  $O(\tau)$ .
2.  $(N, N_x, N_y) = \{(i^2, i, i), \quad i \in \{10, 20, 30\}\}$  — для проверки сходимости  $O(h_x^2 + h_y^2)$ .

Если  $\delta(N, N_x, N_y) = \max_{n \leq N, i \leq N_x, j \leq N_y} |u(t_n, x_i, y_j) - u_h(t_n, x_i, y_j)| = O(h_x^2 + h_y^2 + \tau)$ , то:

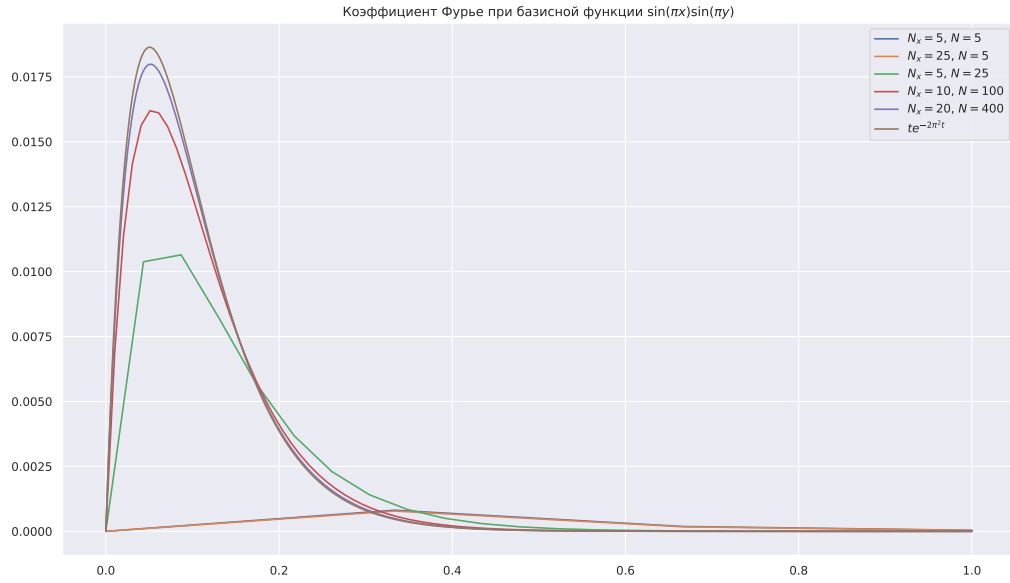


Рис. 5: Задача 1 при  $f = \sin \pi n x \sin \pi m y$ ,  $u(0, x, y) = 0$

1. при хорошем  $h$  (в тесте взято  $h_x = h_y = h = \tau$ ):  

$$\ln(\delta(N, M)) \approx \ln(\tau) + \text{const},$$
2. при плохом  $h$  (в тесте взято  $h_x = h_y = h = \sqrt{\tau}$ ):  

$$\ln(\delta(N, M)) \approx \ln(h) + \text{const}.$$

Из графиков 6 и 7 видно, что эти условия выполнены.

## 6.4 Представление ответа в виде гиф-изображения.

С помощью языка Python для случая ненулевой  $f$  было построено три гиф-изображения (см. файл `solution_pict.ipynb`):

1. Файл `error.gif` демонстрирует изменение ошибки схемы, по сравнению с аналитическим решением.

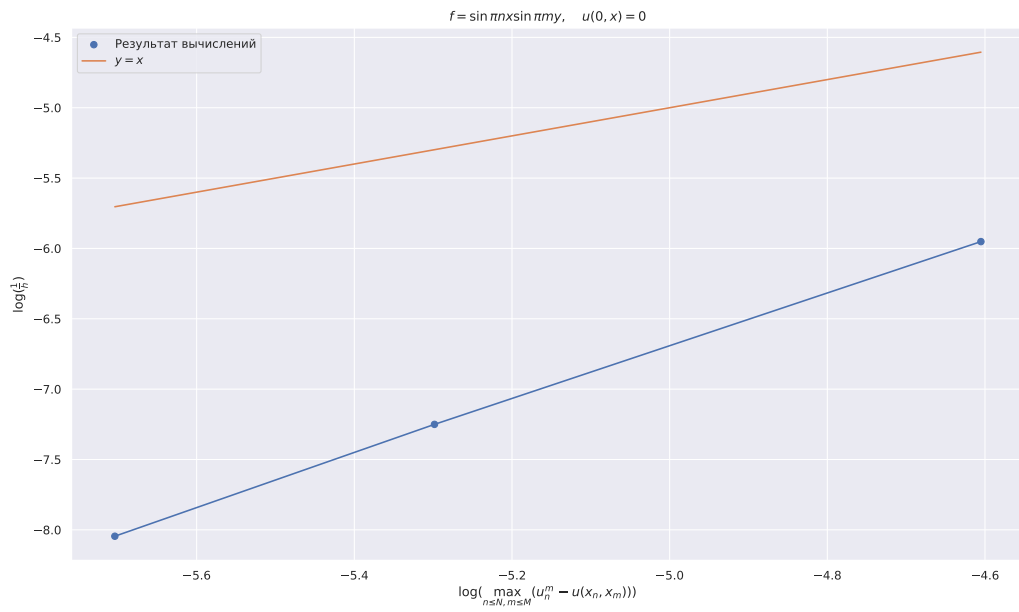


Рис. 6: Зависимость погрешности от размера сетки в первой серии тестов

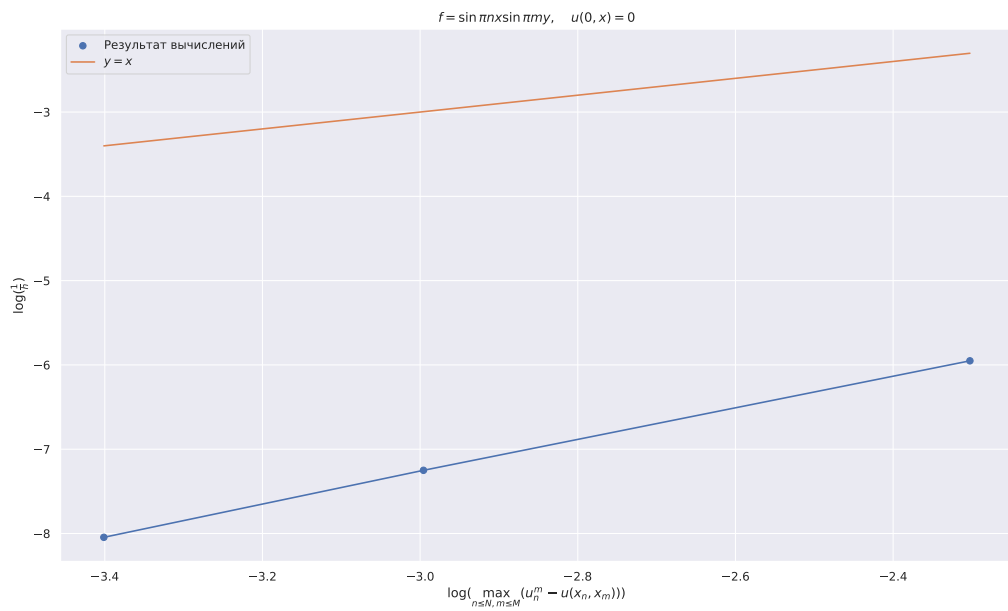


Рис. 7: Зависимость погрешности от размера сетки во второй серии тестов

2. Файл `numeric_vs_analitical.gif` демонстрирует динамику численного и аналитического решения (численное решение соответствует красным точкам на графике).
3. Файл `analitical.gif` демонстрирует аналитическое решение в динамике.
4. Файл `numerical.gif` демонстрирует численное решение в динамике.