Всеволод Заостровский, 409 группа

Отчёт по задаче "Итерационные методы решения систем линейных уравнений".

1 Задача 1.

Для решения системы линейных уравнений:

$$-\frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} + py_k = f_k, \qquad k = 1, \ldots, N-1;$$
$$y_0 = y_N = 0;$$
$$h = \frac{1}{N};$$
$$p \geq 0.$$

реализуйте метод Фурье (т.е. метод разложения по собственным векторам) для базисных функций:

$$\psi_k^{(n)} = \sin(\frac{\pi nk}{N}) \tag{1}$$

Решение.

Вычислим λ_n:
$A\psi^{(n)}{}_k = -\frac{\psi_{k+1}^{(n)} - 2\psi_k^{(n)} + \psi_{k-1}^{(n)}}{h^2} + p\psi_k^{(n)}$
$= -\frac{\sin(\frac{\pi n(k+1)}{N}) - 2\sin(\frac{\pi nk}{N}) + \sin(\frac{\pi n(k-1)}{N})}{h^2} + p\sin(\frac{\pi nk}{N})$
$= -\frac{\sin(\frac{\pi nk}{N})\cos(\frac{\pi n}{N}) + \cos(\frac{\pi nk}{N})\sin(\frac{\pi n}{N}) - 2\sin(\frac{\pi nk}{N}) + \sin(\frac{\pi nk}{N})\cos(\frac{\pi n}{N}) - \cos(\frac{\pi nk}{N})\sin(\frac{\pi n}{N})}{h^2} + p\sin(\frac{\pi nk}{N})$
$= -\frac{\sin(\frac{\pi nk}{N})\cos(\frac{\pi n}{N}) - 2\sin(\frac{\pi nk}{N}) + \sin(\frac{\pi nk}{N})\cos(\frac{\pi n}{N})}{h^2} + p\sin(\frac{\pi nk}{N})$
$= -\frac{2\sin(\frac{\pi nk}{N})(\cos(\frac{\pi n}{N}) - 1)}{h^2} + p\sin(\frac{\pi nk}{N}) = \sin(\frac{\pi nk}{N})(-\frac{2(\cos(\frac{\pi n}{N}) - 1)}{h^2} + p).$
Отсюда:

$$\lambda_n = N^2(2(\cos(\frac{\pi n}{N}) - 1)) + p. \tag{2}$$

Кроме того, из указания к задаче:

$$c_n = \frac{\left(f, \psi^{(n)}\right)}{\lambda_n \left(\psi^{(n)}, \psi^{(n)}\right)} = \frac{2\left(f, \psi^{(n)}\right)}{\lambda_n}. \tag{3}$$

Решение же можно найти в виде:

$$y_k = \sum_{n=1}^{N-1} c_n \psi_k^{(m)}. \tag{4}$$