



## Модель Обижаевой–Ванга

---

Всеволод Заостровский<sup>\*1</sup>

<sup>1</sup>Московский Государственный университет имени М. В. Ломоносова

12 февраля 2024 г.

### Аннотация

В нашем исследовании мы предлагаем новую методику оценки параметров в модели Обижаевой–Ванга, тестируем её на реальных данных и исследуем особенности торговли Московской биржи.

**Ключевые слова:** Модель Обижаевой–Ванга, оптимальное исполнение, market impact, resiliency

**JEL коды:** C81 · G1

**MSC (2000) коды:** 91G23

## Введение

Модель Обижаевой–Ванга - это модель торговли на финансовом рынке, которая широко используется в количественных финансах. Разработанная Анной Обижаевой и Цзян Вангом в 2013 году, модель используется для анализа динамики финансовых рынков и принятия торговых решений. Модель привлекла значительное внимание в финансовой индустрии благодаря своему вниманию к свойству упругости (resiliency) стакана, описывающему важный эмпирический факт: спрос/ предложение финансовых ценных бумаг, как правило, не является идеально эластичным. Упругость — скорость, с которой спрос/предложение восстанавливается до устойчивого состояния после совершения сделки — характеризует начало нового этапа в разработке моделей оптимального исполнения. В нашем исследовании мы разрабатываем практический способ использования этой теории.

Этот факт справедлив даже для ликвидных европейских рынков, если же мы говорим о гораздо менее ликвидных российских рынках, пренебрежение им может привести к катастрофическим последствиям. Основное отличие модели Обижаевой–Ванга от других как раз в том, что в ней ключевую роль играет устойчивость.

Мы исследуем задачу оптимального исполнения. Иными словами, если кто-то хочет продать или купить определенное количество актива достаточно большое, чтобы оказать существенное влияние на рынок, что он должен делать? Чтобы сформулировать задачу на языке математики, нам нужно будет изучить основные принципы биржевой структуры.

## 1 Основные понятия

Определим несколько понятий, которые понадобятся нам в дальнейшем.

---

<sup>\*</sup>e-mail: vsevolodzaostrovsky@mail.ru



Рис. 1: Графическое представление лимитной книги заявок

**Определение 1.** *Бид (bid) — это самая высокая цена, которую покупатель готов заплатить за актив. Далее, бид в момент времени  $t$  будет обозначаться  $B_t$ . Аск (ask) — это самая низкая цена, за которую продавец готов предоставить актив. Далее, аск в момент времени  $t$  будет обозначаться  $A_t$ . Бид-аск спрэд (bid-ask spread)  $s$ :  $s = A_t - B_t$ . Мид (mid-quote price):  $V_t = \frac{A_t + B_t}{2}$ .*

Начнем с рассмотрения структуры лимитной книги заявок (Limit Order Book – LOB). В рамках этой парадигмы организации биржевых торгов, у каждого участника есть две возможности:

- выразить желание купить или продать определённое количество единиц актива по определенной цене. В этом случае, биржа запомнит пару цена–количество. Множество этих пар составляет лимитную книгу заявок. На рисунке 1 изображено традиционное представление лимитной книги заявок.
- выразить желание купить или продать определённое количество единиц актива немедленно. В этом случае он немедленно получит запрошенное количество акций (если на бирже есть необходимое количество) по лучшей возможной цене: к примеру, в случае покупки, если на верхнем ценовом уровне не будет достаточного количества единиц актива для удовлетворения заявки, то будут взяты активы из следующего ценового уровня. Таким образом, не гарантируется, что итоговая цена одной единицы актива будет совпадать с аском.

Таким образом, если опустить некоторые подробности, существует два вида заявок:

**Определение 2.** *Лимитная заявка (ордер) (limit order) представляет собой распоряжение на покупку или продажу ценной бумаги по определенной цене или выше. Этот тип заявки гарантирует цену исполнения, но не гарантирует само исполнение.*

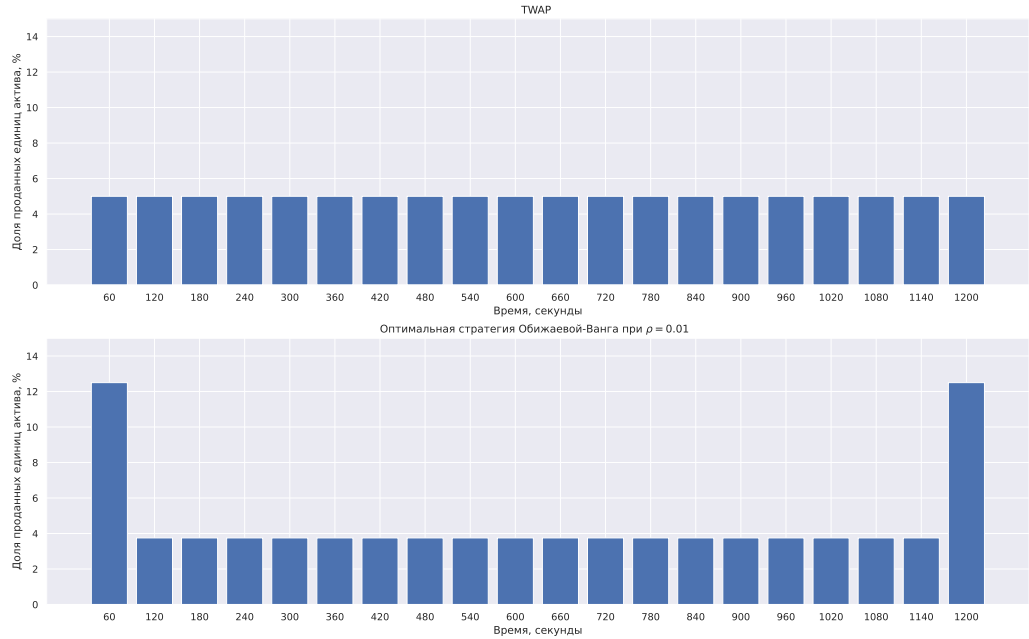


Рис. 2: Сравнение TWAP и стратегии из 2 для 20 моментов времени

**Определение 3. Рыночная заявка (ордер) (market order)** представляет собой распоряжение на немедленную покупку или продажу ценной бумаги. Этот тип заявки гарантирует, что она будет исполнена, но не гарантирует цену исполнения.

Теперь ясно, что если мы хотим продать или купить актив в количестве, достаточно большом, чтобы он мог оказать существенное влияние на рынок, мы не должны делать это одной заявкой: это было бы очень дорого, поскольку крупный ордер удалил бы все верхние уровни в лимитной книге заявок. Поэтому на практике все крупные заявки разбиваются на большое количество мелких. Например, можно просто разделить ордер на  $N$  равных частей и продавать их через равные промежутки времени (это называется TWAP, рис. 2). Но есть ли лучшее решение?

## 2 Подход Обижаевой и Ванга к формализации проблемы

В попытке найти лучшее решение, мы рассматриваем модель Обижаевой–Ванга, в терминах которой задача имеет следующий вид:

$$J_0 = \min_{\{x_0 \dots x_N\}} E_0 \left[ \sum_{n=0}^N [A_{t_n} + x_n / (2q)] x_n \right],$$

$$A_{t_n} = F_{t_n} + \lambda(X_0 - X_{t_n}) + s/2 + \sum_{i=0}^{n-1} x_i \kappa e^{-\rho \tau(n-i)},$$

где

- трейдер должен купить  $X_0$  единиц актива за фиксированный период времени  $[0, T]$ ;
- $x_{t_n}$  размер ордера в момент времени  $t_n = \tau n$  (здесь,  $\tau = T/N$ );
- $X_{t_n} := X_0 - \sum_{t_k < t_n} x_{t_k}$ ;
- $B_{t_n}$  и  $A_{t_n}$  — бид и аск в момент времени  $t_n$ ;
- $V_{t_n} = \frac{A_{t_n} + B_{t_n}}{2}$  — мид;
- $s$  — бид-аск спрэд;
- $F_t$  — фундаментальная (справедливая) цена актива;
- $q(P)$  распределение лимитной книги заявок  $P$  (по ценам  $[a, b]$  доступно  $\int_a^b q(p) dP$  единиц актива);
- параметр  $\lambda$  — постоянный маркет импакт (справдливая цена  $V_t$  в результате исполнения ордера объема  $x$  меняется по закону:  $V_{t+} = V_t + \lambda x$ );
- $\kappa = \frac{1}{q} - \lambda$ ;
- параметр  $\rho$  — упругость стакана (resiliency).

Данная задача была решена в статье [OW13]:

**Теорема 1.** *Решение задачи оптимального исполнения:*

$$x_n = -\frac{1}{2}\delta_{n+1}[D_{t_n}(1 - \beta_{n+1}e^{-\rho\tau} + 2\kappa\gamma_{n+1}e^{-2\rho\tau}) - X_{t_n}(\lambda + 2\alpha_{n+1} - \beta_{n+1}\kappa e^{-\rho\tau})],$$

где  $x_N = X_N$  и  $D_t = A_t - V_t - s/2$ . Ожидаемая цена будущих сделок в рамках стратегии оптимального исполнения меняется по закону

$$J_{t_n} = (F_{t_n} + s/2)X_{t_n} + \lambda X_0 X_{t_n} + \alpha_n X_{t_n}^2 + \beta_n D_{t_n} X_{t_n} + \gamma_n D_{t_n}^2,$$

где коэффициенты  $\alpha_{n+1}$ ,  $\beta_{n+1}$ ,  $\gamma_{n+1}$  и  $\delta_{n+1}$  определяются рекурсивно по формулам:

$$\alpha_n = \alpha_{n+1} - \frac{1}{4}\delta_{n+1}(\lambda + 2\alpha_{n+1} - \beta_{n+1}\kappa e^{-\rho\tau})^2,$$

$$\beta_n = \beta_{n+1}e^{-\rho\tau} + \frac{1}{2}\delta_{n+1}(1 - \beta_{n+1}e^{-\rho\tau} + 2\kappa\gamma_{n+1}e^{-2\rho\tau})(\lambda + 2\alpha_{n+1} - \beta_{n+1}\kappa e^{-\rho\tau}),$$

$$\gamma_n = \gamma_{n+1}e^{-2\rho\tau} - \frac{1}{4}\delta_{n+1}(1 - \beta_{n+1}e^{-\rho\tau} + 2\kappa\gamma_{n+1}e^{-2\rho\tau})^2,$$

где  $\delta_{n+1} = [1/(2q) + \alpha_{n+1} - \beta_{n+1}\kappa e^{-\rho\tau} + \gamma_{n+1}\kappa^2 e^{-2\rho\tau}]^{-1}$  и начальные условия

$$\alpha_N = 1/(2q) - \lambda, \quad \beta_N = 1, \quad \gamma_N = 0.$$

В нашем исследовании мы будем рассматривать предел этого решения.

**Теорема 2.** *При  $N \rightarrow \infty$ , стратегия оптимального исполнения принимает вид:*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} x_0 = x_{t=0} = \frac{X_0}{\rho T + 2},$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} x_n/(T/N) = \dot{X}_t = \frac{\rho X_0}{\rho T + 2}, \quad t \in (0, T),$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} x_0 = x_{t=0} = \lim_{N \rightarrow \infty} x_n/(T/N) = x_{t=T} = \frac{X_0}{\rho T + 2}.$$

где  $x_0$  первая сделка за отведенный период,  $x_N$  — последняя, и  $\dot{X}_t$  скорость трейдинга между ними.

		Диапазоны ликвидности (среднедневное число сделок)						
Диапазоны цены		0	3	30	150	500	3000	25000
		3	30	150	500	3000	25000	
0	0,002	0,00001	0,000005	0,000002	0,000001	0,000001	0,000001	0,000001
0,002	0,005	0,00002	0,00001	0,000005	0,000002	0,000001	0,000001	0,000001
0,005	0,01	0,00005	0,00002	0,00001	0,000005	0,000002	0,000001	0,000001
0,01	0,02	0,0001	0,00005	0,00002	0,00001	0,000005	0,000002	0,000001
0,02	0,05	0,0002	0,0001	0,00005	0,00002	0,00001	0,000005	0,000002
0,05	0,1	0,0005	0,0002	0,0001	0,00005	0,00002	0,00001	0,000005
0,1	0,2	0,001	0,0005	0,0002	0,0001	0,00005	0,00002	0,00001
0,2	0,5	0,002	0,001	0,0005	0,0002	0,0001	0,00005	0,00002
0,5	1	0,005	0,002	0,001	0,0005	0,0002	0,0001	0,00005
1	2	0,01	0,005	0,002	0,001	0,0005	0,0002	0,0001
2	5	0,02	0,01	0,005	0,002	0,001	0,0005	0,0002
5	10	0,05	0,02	0,01	0,005	0,002	0,001	0,0005
10	20	0,1	0,05	0,02	0,01	0,005	0,002	0,001
20	50	0,2	0,1	0,05	0,02	0,01	0,005	0,002
50	100	0,5	0,2	0,1	0,05	0,02	0,01	0,005
100	200	1	0,5	0,2	0,1	0,05	0,02	0,01
200	500	2	1	0,5	0,2	0,1	0,05	0,02
500	1000	5	2	1	0,5	0,2	0,1	0,05
1000	2000	10	5	2	1	0,5	0,2	0,1
2000	5000	20	10	5	2	1	0,5	0,2
5000	10000	50	20	10	5	2	1	0,5
10000	20000	100	50	20	10	5	2	1
20000	50000	200	100	50	20	10	5	2
50000	100000	500	200	100	50	20	10	5
100000		1000	500	200	100	50	20	10

Рис. 3: Правила определения расчетного шага цены (сайт московской биржи).

Таким образом, мы имеем явную формулу для стратегии оптимального исполнения. Но нам необходимо каким-либо образом найти параметр  $\rho$  для того, чтобы применить её на практике.

Другое возможное приложение параметра  $\rho$  даёт формула, определяющая динамику аска после исполнения ордера глубины  $x$ :

$$A_t = \bar{p}_t + \frac{s}{2} + x\kappa e^{-\rho t}.$$

Поскольку, к примеру, на Московской Бирже, минимальный шаг цены составляет, в основном, около 0.05% от спотовой цены (см. 3), согласно модели стакан будет полностью восстанавливаться после исполнения "большого" ордера (для которого  $x\kappa \approx 0.01 * A_t$ ) примерно за  $t = \frac{10}{\rho}$ .

### 3 Как подобрать $\rho$ ?

#### 3.1 Теоретическая идея

Из модели Обижаевой–Ванга прямо вытекает следующее соотношение.

**Лемма 3.** В модели Обижаевой–Ванга:

$$\Delta A_k = D_{t_k}(e^{-\rho \Delta t_k} - 1) + x_{t_k}\kappa e^{-\rho \Delta t_k} + \lambda x_{t_k}.$$

Мы предлагаем рассмотреть новую модель, в которой:

$$A_{t_k} = \frac{s}{2} + V_{t_k} + D_{t_k},$$

где  $V_{t_{k+1}} = V_{t_k} + \hat{\lambda}x_{t_k}$ , а  $D_{t_{k+1}} = -\hat{\rho}D_{t_k}\Delta t_k + x_{t_k}\hat{\kappa}(1 - \hat{\rho}\Delta t_k)$ .

**Теорема 4.** Гиперпараметры введенной выше модели удовлетворяют регрессионному соотношению

$$\frac{\Delta A_{k+1}}{\Delta t_{k+1}} - \frac{\Delta A_k}{\Delta t_k} = -\hat{\rho}\Delta A_k + \hat{\rho}\hat{\lambda}x_{t_k} - \hat{\rho}\hat{\kappa}\Delta x_k + (\hat{\lambda} + \hat{\kappa})\left(\frac{x_{t_{k+1}}}{\Delta t_{k+1}} - \frac{x_{t_k}}{\Delta t_k}\right). \quad (1)$$

**Теорема 5.** Если  $\rho O(\rho\Delta t) \rightarrow 0$ , то  $\rho \rightarrow \hat{\rho}$ .

Все доказательства представлены в 6.

## 3.2 Эмпирическая инструкция по подбору $\rho$

Таким образом, мы предлагаем следующий эмпирический путь подбора параметра  $\rho$ :

1. Подготавливаем и очищаем данные<sup>1</sup>.
2. Оцениваем по данным регрессию

$$\frac{\Delta A_{k+1}}{\Delta t_{k+1}} - \frac{\Delta A_k}{\Delta t_k} = -\hat{\rho}\Delta A_k + \hat{\rho}\hat{\lambda}x_{t_k} - \hat{\rho}\hat{\kappa}\Delta x_k + (\hat{\lambda} + \hat{\kappa})\left(\frac{x_{t_{k+1}}}{\Delta t_{k+1}} - \frac{x_{t_k}}{\Delta t_k}\right).$$

где

- $\Delta A_k$  изменение аска в следствие исполнения заявки размера  $x_k$  в момент времени  $t_k$ .
  - $\Delta t_k$  время между  $k$  и  $k + 1$  заявками.
3. Если  $\rho^2\Delta t$  (или  $\Delta t$ ) мало, то считаем, что  $\hat{\rho} \approx \rho$  и исполняем заявку в соответствии с (2).

Если последнее условие не выполнено, то можно попытаться применить подход, изложенный в приложении А. Однако, если мы решаем практическую задачу оптимального исполнения заявки за, например, 10 минут, то при  $\rho > 0.5$  в соответствии с формулой (2) получаем, что, de facto, модель рекомендует продать менее, чем  $\approx 0.3\%$  объема ордера за первую и последнюю сделки, а остальное равномерно продавать внутри временного промежутка, что практически мало отличимо от алгоритма TWAP.

Таким образом, мы считаем, что наш подход при всей простоте, полностью описывает алгоритм практической торговли.

## 4 Данные

### 4.1 Источники и предобработка

Мы работали с ордерлогами (спецификация). Было написано несколько программ, которые, в совокупности, распаршивали исходные записи в таблицу из четвѐрок (время, аск до исполнения ордера, аск после исполнения ордера, глубина ордера). Следует обратить внимание на то, что заявки, поглощающие несколько уровней, представляются в данных в виде последовательности заявок, поэтому перед началом обработки их следует объединить: объем ордера есть сумма объемов, аск до исполнения — аск до исполнения первого ордера, аск после исполнения — аск после исполнения последнего ордера. Фрагмент таблицы, на котором представлен фрагмент обработанных данных и схематичное изображение изложенной выше операции, изображен на рисунке 4. Рассматривались данные за 03.03.2021 (середина недели, месяц максимально удаленный от праздников, год, удаленный от начала СВО и начала эпидемии COVID.)

<sup>1</sup> Например, как это сделано в следующем разделе, хотя конкретные действия сильно зависят от данных.

	<u>Time</u>	<u>AskBefore</u>	<u>AskAfter</u>	<u>Volume</u>
0	1.0006099849997554	61.782	61.87	40000.0
1	2.0004541379967122	61.84	61.84	48000.0
2	2.0004635579971364	61.84	61.84	48000.0
3	2.000483832001919	61.842	61.842	13000.0
4	2.0004864069996984	61.842	61.847	87000.0
5	2.0004864069996984	61.847	61.847	7000.0
6	2.0005590279979515	61.792	61.845	10000.0
7	2.00059898699692	61.79	61.842	100000.0
8	2.000793077997514	61.835	61.835	11000.0
9	2.0008411289963988	61.815	61.815	11000.0
10	3.0002688890017453	61.822	61.822	1000.0
11	3.000301476000459	61.83	61.83	16000.0
12	3.0003054539993173	61.83	61.83	1000.0

Рис. 4: Данные после первого этапа парсинга



## 4.2 Выбор инструмента и начальный анализ данных

В целом, известно, что российский рынок характеризуется низким уровнем ликвидности и низкой интенсивностью торгов. Для подбора параметров и статистических исследований нам нужно относительно большое количество данных, по этой причине для очень существенной части активов, торгуемых на Московской Бирже, исследование в духе нашего было бы невозможно: даже в категориях активов, считающихся ликвидными, встречается немало инструментов<sup>2</sup>, по которым совершается порядка нескольких десятков сделок в день (и даже меньше). Поэтому мы решили рассмотреть две категории активов: самые ликвидные валютные пары и несколько наиболее ликвидных акций (мы исключили из рассмотрения акции ВТБ, поскольку их сильное дробление создаёт численные проблемы).

При этом, почти у всех активов подавляющее большинство сделок не поглощает ни одного уровня (те фактическая цена совершения сделки равна аску, см. таблицы 1 и 2).

Заметим, что при изучении данных мы подтвердили широко известную закономерность: распределение времени между сделками очень похоже для всех активов и напоминает экспоненциальное (см. В).

## 4.3 Спайки

Данные характеризуются очень большим числом количеством резких и коротких скачков аска. Пересечение множеств сотни самых больших сделок и сотни сделок, сдвинувших аск сильнее всего, пусто. Таким образом, похоже, что ордеров, которые существенно двигают аск за счёт своего размера на рынке мало, то есть цена двигается, в основном, по фундаментальным причинам. На наш взгляд, такая структура данных может послужить основанием для того, чтобы усомниться в валидности модели Обижаевой–Ванга для российских данных, однако и не дает возможности с уверенностью сказать, что модель не применима.

Откуда же берутся эти скачки и что они из себя представляют? В стакане в каждый момент времени поддерживается тонкий баланс, любой маленький ордер, более выгодный, чем лучшая цена, будет почти мгновенно поглощён рынком. Конечно, если возникает необходимость в продаже или покупке небольшого количества актива, этим разумно воспользоваться.

**Пример 1.** Пусть аск равен 10, а бид — 9. Если мы хотим продать небольшое количество актива, то можно, например, разместить ордер на продажу актива по цене 9.1, тогда пока ордер не будет исполнен, аск станет равным 9.1, однако, скорее всего, лот очень быстро выкупят, поскольку он намного лучше аска и даже мида. Таким образом, мы продадим актив по цене 9.1 вместо 9, расплатившись за это довольно несущественным риском.

Мы проанализировали несколько конкретных спайков в ручную и оказалось, что происходит именно то, что описано в примере. Ясно, что эти скачки, в целом, не характеризуют динамику рискованного актива, поэтому целесообразно исключить их из исследуемого датасета.

<sup>2</sup>Даже среди валютных пар большая часть имеет очень низкую интенсивность торгов, например, CHF RUB\_TOM, HKD RUB\_TOM, JPY RUB\_TOM, KZT RUB\_TOM.



Инструмент	Число сделок	Не повлияли на аск
USD000UTSTOM	28361	95%
USD000000TOD	9624	92%
EUR_RUB_TOM	4021	79%
EUR_RUB_TOD	2535	57%
USD000TODTOM	546	55%
EURUSD000TOM	409	93%
GBPRUB_TOM	220	60%
EUR000TODTOM	168	89%

Таблица 1: Анализ сделок по наиболее торгуемым валютным парам (03.03.2021).

Инструмент	Число сделок	Не повлияли на аск
SBER	41647	96%
GAZP	21566	86%
VTBR	17100	99%
YNDX	14110	68%
MGNT	10929	64%
LKOH	9759	75%
ROSN	8648	74%
PLZL	7121	56%
SNGSP	6032	60%
MTLR	5985	46%

Таблица 2: Анализ сделок по наиболее торгуемым акциям (03.03.2021).

## 5 Результаты регрессий

### 5.1 Регрессионное уравнение на данных

В терминах нашего датасета (см. вид данных на 4), регрессия на  $B$  выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} & \frac{\text{AskAfter}(k+1) - \text{AskBefore}(k+1)}{\text{Time}(k+2) - \text{Time}(k+1)} - \frac{\text{AskAfter}(k) - \text{AskBefore}(k)}{\text{Time}(k+1) - \text{Time}(k)} = \\ & = -B(\text{AskAfter}(k) - \text{AskBefore}(k)) + B(\lambda + \kappa)\text{Volume}(k) - B\kappa\text{Volume}(k+1) + \\ & + (\lambda + \kappa) \left( \frac{\text{Volume}(k+1)}{\text{Time}(k+2) - \text{Time}(k+1)} - \frac{\text{Volume}(k)}{\text{Time}(k+1) - \text{Time}(k)} \right). \end{aligned}$$

Фактически, это просто формула (8), где мы полагаем:

- $\Delta A_k = \text{AskAfter}(k) - \text{AskBefore}(k)$ , а  $x_k = \text{Volume}(k)$ ,
- $\Delta t_k = \text{Time}(k+1) - \text{Time}(k)$ .

### 5.2 Результаты регрессий на неагрегированных данных

Как видно из таблицы 3, разные метрики ликвидности довольно сильно коррелированы друг с другом, поэтому мы решили выводить лишь одну из них, чтобы не загромождать таблицу.

В данном случае нет формальных оснований полагать, что полученные числа (таблицы 4–7) имеют какое бы то ни было отношение к модели Обижаевой–Ванга. Особой связи

Инструмент	Число сделок	Объем	Объем (рубли)
USD000UTSTOM	34295	$2.94 \cdot 10^9$	$2.15 \cdot 10^{11}$
USD000000TOD	10942	$5.75 \cdot 10^8$	$4.22 \cdot 10^{10}$
EUR_RUB_TOM	4394	$2.21 \cdot 10^8$	$1.96 \cdot 10^{10}$
EUR_RUB_TOD	2729	$1.19 \cdot 10^8$	$1.06 \cdot 10^{10}$
GBPRUB_TOM	220	$3.51 \cdot 10^6$	$3.62 \cdot 10^8$
GBPRUB_TOD	39	$1.54 \cdot 10^6$	$1.58 \cdot 10^8$
SBER	49885	$5.66 \cdot 10^7$	$1.58 \cdot 10^{10}$
GAZP	25711	$2.85 \cdot 10^7$	$6.38 \cdot 10^9$
YNDX	16725	$6.91 \cdot 10^5$	$3.50 \cdot 10^9$
MGNT	12339	$4.30 \cdot 10^5$	$2.18 \cdot 10^9$
LKOH	11777	$7.79 \cdot 10^5$	$4.43 \cdot 10^9$
ROSN	9994	$5.23 \cdot 10^6$	$2.78 \cdot 10^9$
PLZL	9683	$2.06 \cdot 10^5$	$2.99 \cdot 10^9$
NGSP	6367	$1.79 \cdot 10^7$	$7.20 \cdot 10^8$

Таблица 3: Связь между разными метриками ликвидности.

Инструмент	Число сделок	$B$	$B^*$
USD000UTSTOM	34295	$29.15 \pm 11.63$	$242.77 \pm 48.6$
USD000000TOD	10942	$602.06 \pm 167.92$	$1122.36 \pm 246.63$
EUR_RUB_TOM	4394	$59.05 \pm 68.86$	$716.39 \pm 193.34$
EUR_RUB_TOD	2729	$49.61 \pm 123.36$	$759.4 \pm 255.97$
GBPRUB_TOM	220	$0.02 \pm 0.45$	$0.28 \pm 0.12$
GBPRUB_TOD	39	$-147.87 \pm 59.83$	$-72.73 \pm 22.79$

Таблица 4:  $B$  и  $B^*$ , вычисленные для разных валютных пар на сырых данных.

Инструмент	Число сделок	$B$	$B^*$
USD000UTSTOM	34295	$28.79 \pm 12.28$	$240.86 \pm 48.42$
USD000000TOD	10942	$599.15 \pm 165.91$	$1046.61 \pm 239.82$
EUR_RUB_TOM	4394	$60.99 \pm 65.66$	$668.33 \pm 174.84$
EUR_RUB_TOD	2729	$72.95 \pm 85.5$	$664.34 \pm 206.73$
GBPRUB_TOM	220	$0.04 \pm 0.39$	$0.26 \pm 0.1$
GBPRUB_TOD	39	$-79.47 \pm 39.05$	$-15.54 \pm 7.25$

Таблица 5:  $B$  и  $B^*$ , вычисленные для разных валютных пар на данных с нормированным аском (деленным на матожидание).

с ликвидностью тоже не прослеживаются. Мы считаем, что это связано с тем, что в данной ситуации  $B$  слишком велико и модель искажается достаточно сильно для того, чтобы экономический смысл коэффициентов изменился. Тем не менее отсюда можно извлечь содержательный вывод: модель считает рынок достаточно ликвидным, чтобы оптимальным решением был TWAP. Отметим, что, возможно, развитие идей, высказанных в разделе А, помогло бы установить точную связь между вычисленным в регрессии коэффициентом  $B$  и теоретическим  $\rho$ .

Инструмент	Число сделок	$B$	$B^*$
SBER	49885	$97.59 \pm 4.65$	$199.03 \pm 18.78$
GAZP	25711	$103.38 \pm 19.25$	$2771.92 \pm 208.66$
YNDX	16725	$99.75 \pm 7.64$	$2809.52 \pm 188.44$
MGNT	12339	$461.94 \pm 65.29$	$17496.02 \pm 789.35$
LKOH	11777	$497.53 \pm 58.96$	$10904.32 \pm 427.26$
ROSN	9994	$100.62 \pm 12.02$	$1768.38 \pm 112.76$
PLZL	9683	$17.41 \pm 18.54$	$10693.13 \pm 612.48$
MTLR	6608	$5.39 \pm 4.15$	$882.87 \pm 106.06$
SNGSP	6367	$363.34 \pm 101.0$	$1936.82 \pm 117.78$

Таблица 6:  $B$  и  $B^*$ , вычисленные для разных активов на сырых данных.

Инструмент	Число сделок	$B$	$B^*$
SBER	49885	$102.86 \pm 6.5$	$197.02 \pm 18.11$
GAZP	25711	$107.01 \pm 19.31$	$2792.09 \pm 208.18$
YNDX	16725	$109.09 \pm 15.07$	$2646.28 \pm 184.27$
MGNT	12339	$471.03 \pm 64.08$	$17862.93 \pm 794.49$
LKOH	11777	$490.07 \pm 57.61$	$10791.39 \pm 428.35$
ROSN	9994	$106.45 \pm 16.37$	$1818.0 \pm 112.42$
PLZL	9683	$19.46 \pm 23.41$	$11013.95 \pm 615.74$
MTLR	6608	$6.33 \pm 11.14$	$829.09 \pm 103.04$
SNGSP	6367	$406.29 \pm 104.48$	$1917.79 \pm 109.8$

Таблица 7:  $B$  и  $B^*$ , вычисленные для разных активов на данных с нормированным аском (деленным на матожидание).

### 5.3 Результаты регрессий на агрегированных данных

Мы обнаружили, что на сырых данных  $\rho$  получается очень большим (см. 5). Поэтому мы протестировали разные варианты агрегации данных: иными словами, объединяли мелкие ордера в более крупные в попытках сформировать ситуацию, более близкую к предположениям модели Обижаевой–Ванга. Следующие результаты были получены на датасете, в котором мы записывали аск в начале и в конце скунды, а за объем ордера считали общий объем сделок за секунду.

Для  $B^*$  всё аналогично, но меняется методология расчёта аска. Теперь это не лучшая цена покупки одной единицы актива, а лучшая цена покупки миллиона единиц актива.

Инструмент	Число сделок	$B$	$B^*$
SBER	41600	$0.7744 \pm 0.0063$	$0.9337 \pm 0.0072$
GAZP	21500	$0.8641 \pm 0.0086$	$0.7051 \pm 0.0082$
YNDX	14100	$0.773 \pm 0.0095$	$0.435 \pm 0.0072$
MGNT	10900	$0.7336 \pm 0.0113$	$0.4186 \pm 0.0095$
LKOH	9750	$0.4757 \pm 0.0078$	$0.433 \pm 0.009$
ROSN	8640	$0.3116 \pm 0.0076$	$0.7418 \pm 0.012$
PLZL	7120	$0.2234 \pm 0.0056$	$0.4871 \pm 0.0122$
NGSP	6030	$0.1842 \pm 0.0084$	$0.3528 \pm 0.0099$

Таблица 8:  $B$  и  $B^*$ , вычисленные для разных акций в агрегированном датасете.

Как видно, для валют абсолютно чётко прослеживается связь между разными метриками ликвидности и  $B$ , что даёт основания считать вычисленный коэффициент валидной мерой ликвидности актива. Кроме того, во всех случаях  $B$  довольно мал по модулю, так что можно считать, что  $B = \rho$ . Этого достаточно, чтобы практически осуществить оптимальное исполнение в соответствии с моделью Обижаевой–Ванга. Последние две валютных пары существенно выбиваются из общей колеи. Однако в их случае выборки ничтожно малы, так что, вероятно, методика просто напросто "переобучилась".

Инструмент	Число сделок	$B$	$B^*$
SBER	41600	$0.7744 \pm 0.0063$	$0.9337 \pm 0.0072$
GAZP	21500	$0.8641 \pm 0.0086$	$0.7051 \pm 0.0082$
YNDX	14100	$0.773 \pm 0.0095$	$0.435 \pm 0.0072$
MGNT	10900	$0.7336 \pm 0.0113$	$0.4186 \pm 0.0095$
LKOH	9750	$0.4757 \pm 0.0078$	$0.433 \pm 0.009$
ROSN	8640	$0.3116 \pm 0.0076$	$0.7418 \pm 0.012$
PLZL	7120	$0.2234 \pm 0.0056$	$0.4871 \pm 0.0122$
NGSP	6030	$0.1842 \pm 0.0084$	$0.3528 \pm 0.0099$

Таблица 9:  $B$  и  $B^*$ , вычисленные для разных акций в агрегированном датасете.

У акций также есть чёткая связь между разными метриками ликвидности и  $B$ , что даёт основания считать вычисленный коэффициент валидной мерой ликвидности актива. Кроме того, во всех случаях  $B$  довольно мал по модулю, так что можно считать, что  $B = \rho$ . Этого достаточно, чтобы практически осуществить оптимальное исполнение в соответствии с моделью Обижаевой–Ванга.

Стоит отметить, что эти выводы, при всей привлекательности, не очень робастны по отношению к изменению промежутка агрегации (C). Любопытно, что при с увеличением промежутка уменьшается  $\rho$ , что логично: при таком преобразовании, датасет, вообще говоря, становится менее ликвидным.

Данные при таком подходе очень сильно отфильтрованы и нетривиальным является вопрос того, репрезентуют ли они после всех изменений экономику рынка. Результаты на неагрегированных данных оказались совсем другими, так что, вероятнее всего, ответ отрицательный. Однако мы включили эти результаты в основную часть исследования, во-первых, чтобы показать, что бывают случаи, когда  $\rho^2 \Delta t$  мало. Во-вторых, здесь мы смогли выжать нетривиальную стратегию оптимального исполнения из данных, не располагающих к этому. Нельзя исключать вероятности того, что она окажется удачной.

## 6 Доказательства утверждений

Из определения модели имеем три уравнения:

$$A_{t_k} = V_{t_k} + \frac{s}{2} + \sum_{i=0}^{k-1} x_{t_i} \kappa e^{-\rho(t_k - t_i)} \quad (2)$$

$$V_{t_{k+1}} = V_{t_k} + \lambda x_{t_k} \rightarrow V_{t_{k+1}} - V_{t_k} = \lambda x_{t_k} \quad (3)$$

$$D_{t_k} = A_{t_k} - V_{t_k} - \frac{s}{2} \quad (4)$$

Здесь и далее  $\Delta t_k := t_{k+1} - t_k$ ,  $\Delta A_k := A_{t_{k+1}} - A_{t_k}$ ,  $\Delta x_k := x_{t_{k+1}} - x_{t_k}$ .

**Лемма 6.** В модели Обижаевой–Ванга:

$$\Delta A_k = D_{t_k} (e^{-\rho \Delta t_k} - 1) + x_{t_k} \kappa e^{-\rho \Delta t_k} + \lambda x_{t_k}.$$

*Доказательство.* Сперва покажем, что

$$\Delta D_k = D_{t_k}(e^{-\rho\Delta t_k} - 1) + x_{t_k}\kappa e^{-\rho\Delta t_k}. \quad (5)$$

Пользуясь (2) и (4), получаем

$$\begin{aligned} D_{t_k} &= \sum_{i=0}^{k-1} x_{t_i}\kappa e^{-\rho(t_k-t_i)} \\ \Delta D_k &= \sum_{i=0}^k x_{t_i}\kappa e^{-\rho(t_{k+1}-t_i)} - \sum_{i=0}^{k-1} x_{t_i}\kappa e^{-\rho(t_k-t_i)} = \sum_{i=0}^{k-1} x_{t_i}\kappa(e^{-\rho(t_{k+1}-t_i)} - e^{-\rho(t_k-t_i)}) + x_{t_k}\kappa e^{-\rho(t_{k+1}-t_k)} = \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} x_{t_i}\kappa e^{-\rho(t_k-t_i)}(e^{-\rho(t_{k+1}-t_k)} - 1) + x_{t_k}\kappa e^{-\rho(t_{k+1}-t_k)} = D_{t_k}(e^{-\rho\Delta t_k} - 1) + x_{t_k}\kappa e^{-\rho\Delta t_k}. \end{aligned}$$

Теперь покажем, что

$$\Delta A_k = D_{t_k}(e^{-\rho\Delta t_k} - 1) + x_{t_k}\kappa e^{-\rho\Delta t_k} + \lambda x_{t_k}.$$

Из (3) и (4) имеем

$$\Delta D_k = D_{t_{k+1}} - D_{t_k} = A_{t_{k+1}} + V_{t_{k+1}} - A_{t_k} - V_{t_k} = \Delta A_k - \Delta V_k.$$

Отсюда имеем, что

$$\Delta A_k = \Delta D_k + \Delta V_k.$$

Подставив сюда (5), получаем утверждение леммы.  $\square$

Теперь рассмотрим новую модель, в которой:

$$A_{t_k} = \frac{s}{2} + V_{t_k} + D_{t_k},$$

где  $V_{t_{k+1}} = V_{t_k} + \hat{\lambda}x_{t_k}$ , а  $D_{t_{k+1}} = -\hat{\rho}D_{t_k}\Delta t_k + x_{t_k}\hat{\kappa}(1 - \hat{\rho}\Delta t_k)$ .

**Теорема 7.** *Гиперпараметры введённой выше модели удовлетворяют регрессионному соотношению*

$$\frac{\Delta A_{k+1}}{\Delta t_{k+1}} - \frac{\Delta A_k}{\Delta t_k} = -\hat{\rho}\Delta A_k + \hat{\rho}\hat{\lambda}x_{t_k} - \hat{\rho}\hat{\kappa}\Delta x_k + (\hat{\lambda} + \hat{\kappa})\left(\frac{x_{t_{k+1}}}{\Delta t_{k+1}} - \frac{x_{t_k}}{\Delta t_k}\right). \quad (6)$$

*Доказательство.* По определению модели имеем

$$\Delta A_k = -\hat{\rho}D_{t_k}\Delta t_k + x_{t_k}\hat{\kappa}(1 - \hat{\rho}\Delta t_k) + \hat{\lambda}x_{t_k}.$$

Тогда

$$\frac{\Delta A_k}{\Delta t_k} = -\hat{\rho}D_{t_k} + x_{t_k}\hat{\kappa}\left(\frac{1}{\Delta t_k} - \hat{\rho}\right) + \hat{\lambda}\frac{x_{t_k}}{\Delta t_k}.$$

В этом случае, рассматривая разность делённых на время асков, можно исключить из уравнения ненаблюдаемый временной ряд  $D_{t_k}$ , пользуясь тем, что  $\Delta D_k = \Delta A_k - \Delta V_k$ :

$$\begin{aligned} \frac{\Delta A_{k+1}}{\Delta t_{k+1}} - \frac{\Delta A_k}{\Delta t_k} &= -\hat{\rho}D_{t_{k+1}} + x_{t_{k+1}}\hat{\kappa}\left(\frac{1}{\Delta t_{k+1}} - \hat{\rho}\right) + \hat{\lambda}\frac{x_{t_{k+1}}}{\Delta t_{k+1}} + \hat{\rho}D_{t_k} - x_{t_k}\hat{\kappa}\left(\frac{1}{\Delta t_k} - \hat{\rho}\right) - \hat{\lambda}\frac{x_{t_k}}{\Delta t_k} = \\ &= -\hat{\rho}\Delta D_k + (\hat{\lambda} + \hat{\kappa})\left(\frac{x_{t_{k+1}}}{\Delta t_{k+1}} - \frac{x_{t_k}}{\Delta t_k}\right) - \hat{\rho}\hat{\kappa}(x_{t_{k+1}} - x_{t_k}) = \\ &= -\hat{\rho}(\Delta A_k - \Delta V_k) + (\hat{\lambda} + \hat{\kappa})\left(\frac{x_{t_{k+1}}}{\Delta t_{k+1}} - \frac{x_{t_k}}{\Delta t_k}\right) - \hat{\rho}\hat{\kappa}(x_{t_{k+1}} - x_{t_k}) = \\ &= -\hat{\rho}\Delta A_k + \hat{\rho}(\hat{\lambda} + \hat{\kappa})x_{t_k} - \hat{\rho}\hat{\kappa}x_{t_{k+1}} + (\hat{\lambda} + \hat{\kappa})\left(\frac{x_{t_{k+1}}}{\Delta t_{k+1}} - \frac{x_{t_k}}{\Delta t_k}\right) \\ &= -\hat{\rho}\Delta A_k + \hat{\rho}\hat{\lambda}x_{t_k} - \hat{\rho}\hat{\kappa}\Delta x_k + (\hat{\lambda} + \hat{\kappa})\left(\frac{x_{t_{k+1}}}{\Delta t_{k+1}} - \frac{x_{t_k}}{\Delta t_k}\right). \end{aligned}$$

□

**Теорема 8.** Если  $\rho O(\rho \Delta t) \rightarrow 0$ , то  $\rho \rightarrow \hat{\rho}$ .

*Доказательство.* Разложим экспоненту в ряд Тейлора:

$$e^{-\rho \Delta t_k} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-\rho \Delta t_k)^i}{i!} = 1 - \rho \Delta t_k + O((\rho \Delta t_k)^2),$$

Тогда, подставив разложение в (6), имеем

$$\frac{\Delta A_k}{\Delta t_k} = -\rho D_{t_k} + x_{t_k} \kappa \left( \frac{1}{\Delta t_k} - \rho \right) + \lambda \frac{x_{t_k}}{\Delta t_k} + \frac{(D_{t_k} + \kappa x_{t_k})}{\Delta t_k} O((\rho \Delta t_k)^2).$$

И, аналогично доказательству предыдущей теоремы:

$$R := (D_{t_k} + \kappa x_{t_k}) \rho O(\rho \Delta t_k) + (D_{t_{k+1}} + \kappa x_{t_{k+1}}) \rho O(\rho \Delta t_{k+1})$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta A_{k+1}}{\Delta t_{k+1}} - \frac{\Delta A_k}{\Delta t_k} &= -\rho \Delta A_k + \rho(\lambda + \kappa)x_{t_k} - \rho \kappa x_{t_{k+1}} + (\lambda + \kappa) \left( \frac{x_{t_{k+1}}}{\Delta t_{k+1}} - \frac{x_{t_k}}{\Delta t_k} \right) + R = \\ &= -\rho \Delta A_k + \rho \lambda x_{t_k} - \rho \kappa \Delta x_k + (\lambda + \kappa) \left( \frac{x_{t_{k+1}}}{\Delta t_{k+1}} - \frac{x_{t_k}}{\Delta t_k} \right) + R \end{aligned}$$

□

## Заключение

На наш взгляд, предложенная методика обладает очень важным для индустрии достоинством: она очень проста как теоретически, так и вычислительно. Более того, она настолько проста теоретически, что кажется невозможным, чтобы что-то пошло не так. В первом приближении, она неплохо себя зарекомендовала, результаты оценки параметров согласуются, как минимум, с предположениями модели.

К тому же, в данных было обнаружено несколько примечательных закономерностей. Во-первых, данных очень распространены спайки. Это вполне резонно, поскольку на российском рынке к бирже имеет доступ очень большое количество физических лиц, которые не располагают огромными средствами (по сравнению с институционалами) и нуждаются в проведении небольших сделок.

Во-вторых, создается ощущение, будто бы даже при исполнении большого ордера, институциональный игрок старается не сбивать больше одного ценового уровня, как будто торгуя лимитными ордерами с лимитом, равным аску.

В-третьих, на русском рынке довольно много активов с чрезвычайно низкой интенсивностью торгов. Их изучение, как будто, стоит производить средствами макроэкономики и теории игр, а не статистики и численных методов.

В-четвертых, похоже, что время между сделками распределено экспоненциально.

В данном случае обычная "виртуальная" методика бэк-тестирования категорически не подходит. Полученные в следствие её результаты не будут иметь никакого смысла, поскольку невозможно учесть одно из ключевых предположений модели Обижаевой–Ванга: большой ордер определенным образом изменяет характер восстановления стакана. Для полноценного тестирования необходим очень хорошо настроенный симулятор рынка. Его создание — это тема для отдельного исследования. К тому же, мы получили, что для всех исследуемых активов оптимальная стратегия — это TWAP. На наш взгляд, TWAP действительно выглядит лучше конкретно для российского рынка: здесь фактически нет больших ордеров, поэтому сложно предсказать, как поведёт себя рынок в этом случае. Такой

результат мы связываем не с высокой ликвидностью российского рынка (что, конечно, не является правдой), но со спецификой торгов: ордера очень маленькие, так что стакан восстанавливается после их исполнения почти мгновенно.

## Список литературы

- [Alm+05] Robert Almgren и др. «Direct estimation of equity market impact». В: *Risk* 18.7 (2005), с. 58–62.
- [Gre05] Robin Greenwood. «Short-and long-term demand curves for stocks: theory and evidence on the dynamics of arbitrage». В: *Journal of Financial Economics* 75.3 (2005), с. 607–649.
- [OW13] Anna A Obizhaeva и Jiang Wang. «Optimal trading strategy and supply/demand dynamics». В: *Journal of Financial markets* 16.1 (2013), с. 1–32.
- [KO18] Albert S Kyle и Anna A Obizhaeva. «The market impact puzzle». В: *Anna A., The Market Impact Puzzle (February 4, 2018)* (2018).
- [Vel20] Raja Velu. *Algorithmic trading and quantitative strategies*. CRC Press, 2020.
- [Web23] Kevin T Webster. *Handbook of Price Impact Modeling*. CRC Press, 2023.

## Приложение А Что делать, если $\rho$ получается большим?

Теорема 8 даёт указание к действию, когда  $\rho^2 \Delta t$  мал. Но что делать, если это условие систематически нарушается, например, актив настолько ликвиден, что  $\rho$  существенно превосходит единицу?

**Теорема 9.** Если считать, что при большом  $\rho \Delta t$  регрессия решает задачу

$$\min_{B \in \mathbb{R}} \max_{x \in [0, t_0]} |e^{-\rho x} - 1 + Bx|,$$

где  $t_0$  некоторое "среднее" время между двумя соседними ордерами, то  $B$  и  $\rho$  связаны уравнением:

$$2 - \frac{B}{\rho} \left( 1 - \ln \frac{B}{\rho} \right) = e^{-\rho t_0} + B t_0.$$

**Доказательство.** Очевидно, разность под модулем обращается в ноль в двух точках (0 и  $x_0$ ), если только прямая не является касательной к экспоненте. При этом, функция выпукла в промежутке  $[0, x_0]$ , а значит имеет там единственную точку экстремума. Из свойств функции ясно, что  $B$  является решением задачи в том и только в том случае, когда:

$$-extr\{e^{-\rho x} - 1 + Bx\}_{x \in [0, x_0]} = e^{-\rho t_0} - 1 + B t_0.$$

Легко найти точку экстремума  $x_*$ :

$$\left. \frac{d}{dx} \right|_{x=x_*} (e^{-\rho x} - 1 + Bx) = 0 \rightarrow -\rho e^{-\rho x_*} + B = 0 \rightarrow x_* = -\frac{1}{\rho} \ln \frac{B}{\rho}.$$

Отсюда получаем уравнение, связывающее  $\rho$  и  $B$ :

$$2 - \frac{B}{\rho} \left( 1 - \ln \frac{B}{\rho} \right) = e^{-\rho t_0} + B t_0.$$

□



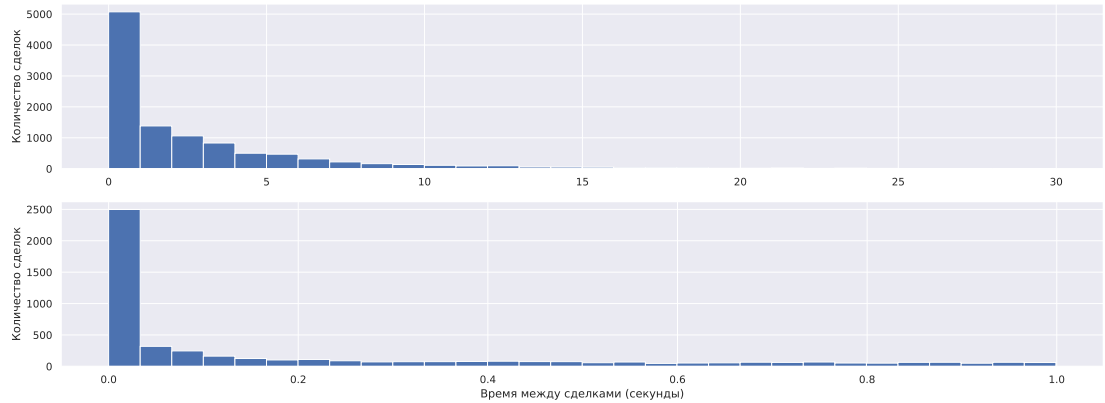


Рис. 5: Распределение времени между сделками для USD000000TOD

*Замечание.* Сделаем замены  $\rho x = B, t_0 B = y$ , тогда уравнение примет вид:

$$2 - x(1 - \ln x) = e^{-\frac{y}{x}} + y.$$

После замен  $\rho x = B, t_0 \rho = y$  уравнение примет вид:

$$2 - x(1 - \ln x) = e^{-y} + xy.$$

Такие представления уравнений могут быть использованы для исследования связи  $\rho$  и  $B$ . Например, в случае когда  $B$  велико и, как следствие, не выполнено условие теоремы 8, в некоторых случаях благодаря предположениям на  $y$  мы можем получить оценку  $x$ . Если  $B/x$  велико, то можно утверждать, что  $\rho$  велико по модулю. В этом случае, стратегия оптимального исполнения вырождается в TWAP.

## Приложение В Время между сделками

Здесь, на рисунках 8–20, представлены распределения времён между сделками для всех исследуемых активов.

## Приложение С Разные промежутки агрегации данных

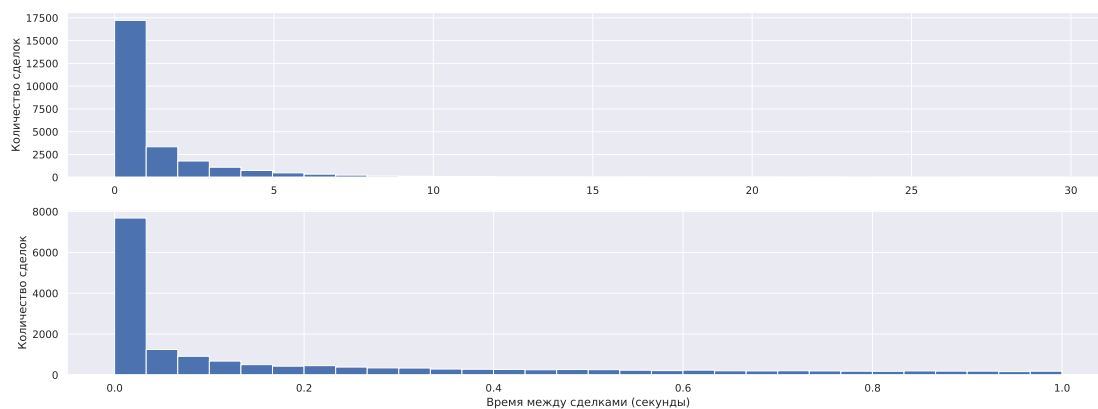


Рис. 6: Распределение времени между сделками для GAZP

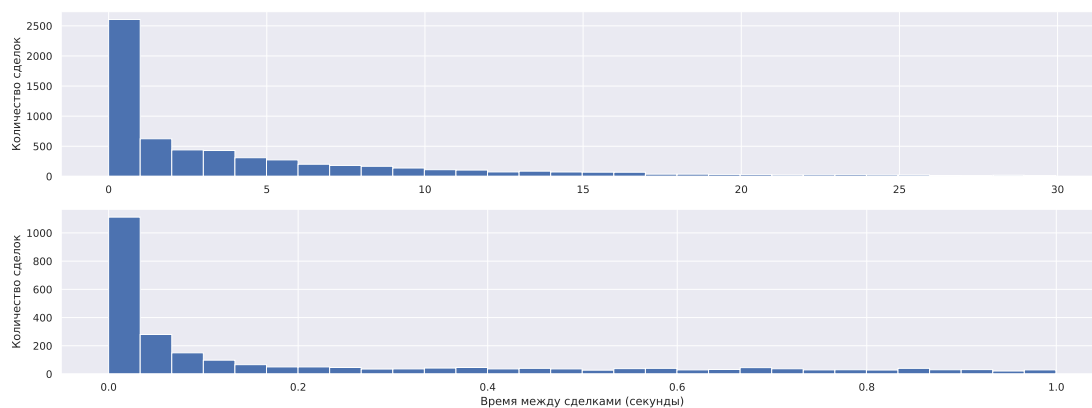


Рис. 7: Распределение времени между сделками для SNGSP

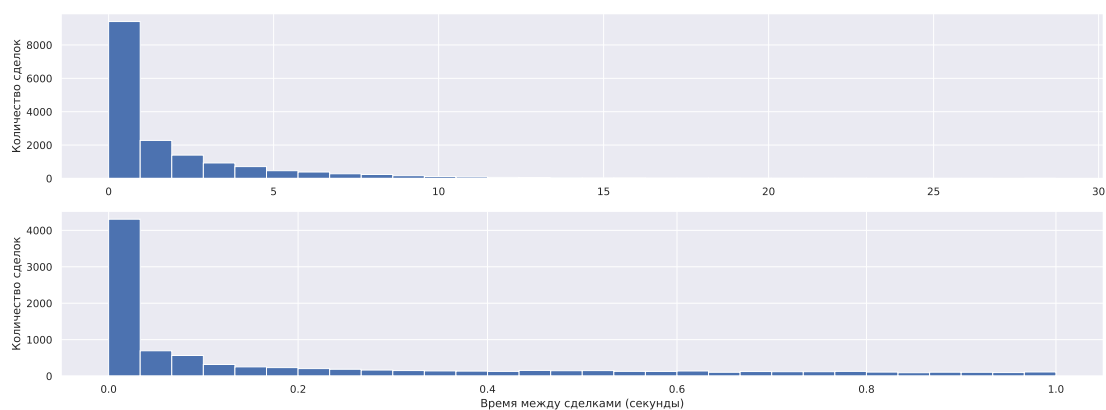


Рис. 8: Распределение времени между сделками для YNDX

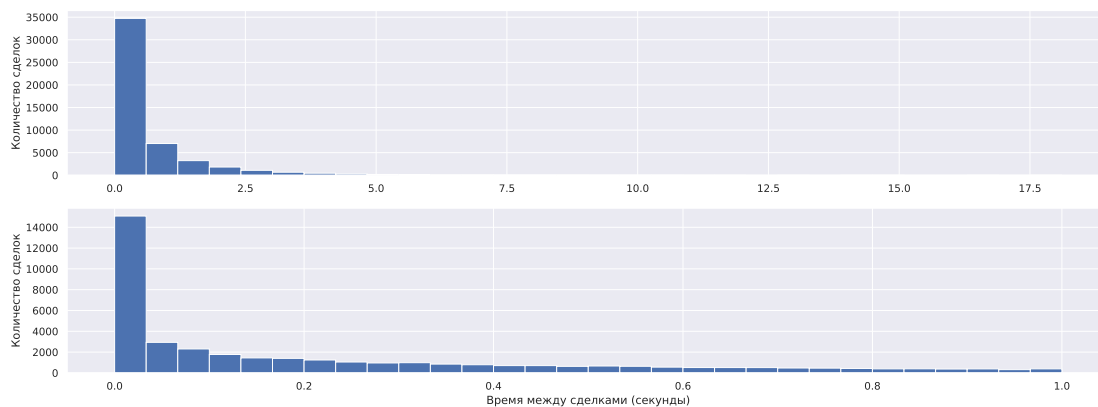


Рис. 9: Распределение времени между сделками для SBER

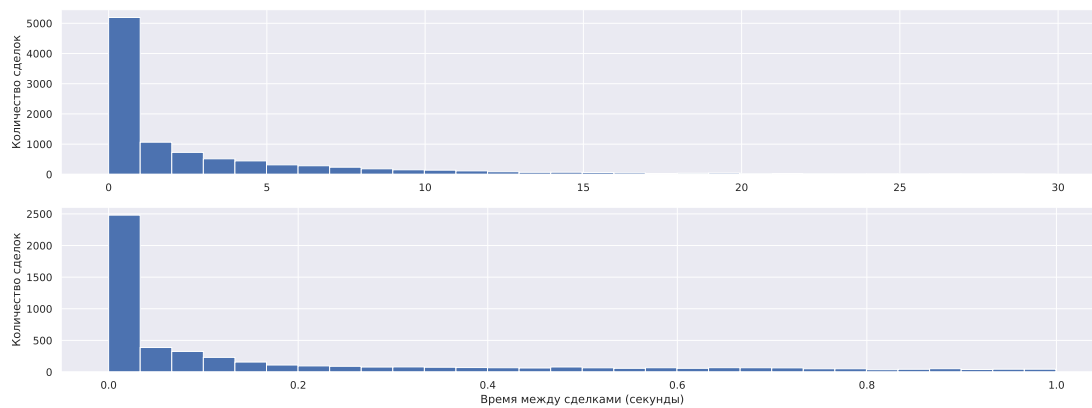


Рис. 10: Распределение времени между сделками для ROSN

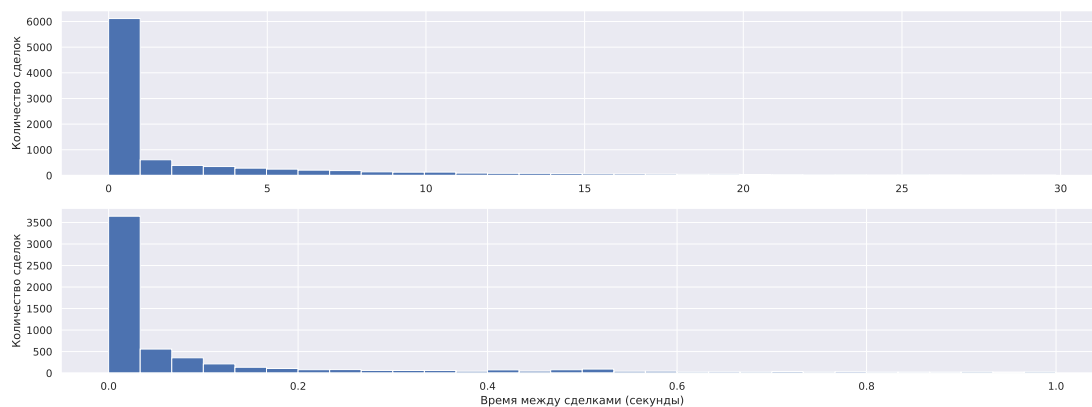


Рис. 11: Распределение времени между сделками для PLZL

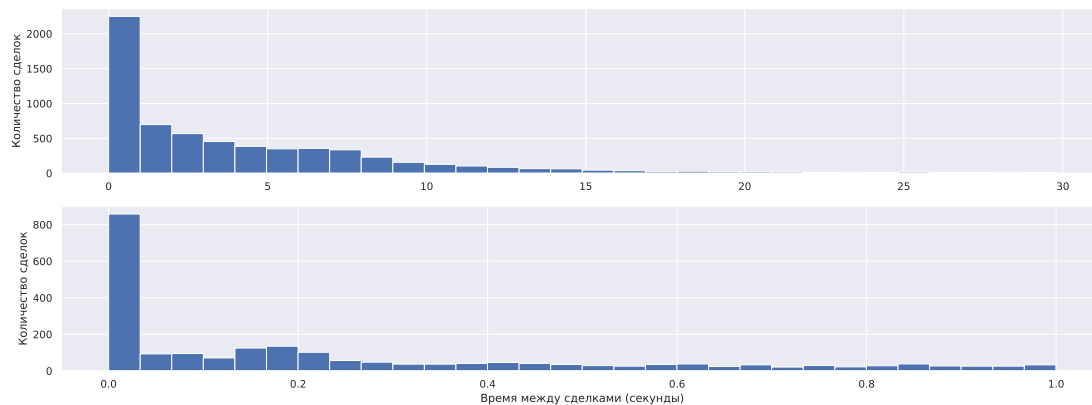


Рис. 12: Распределение времени между сделками для MTLR

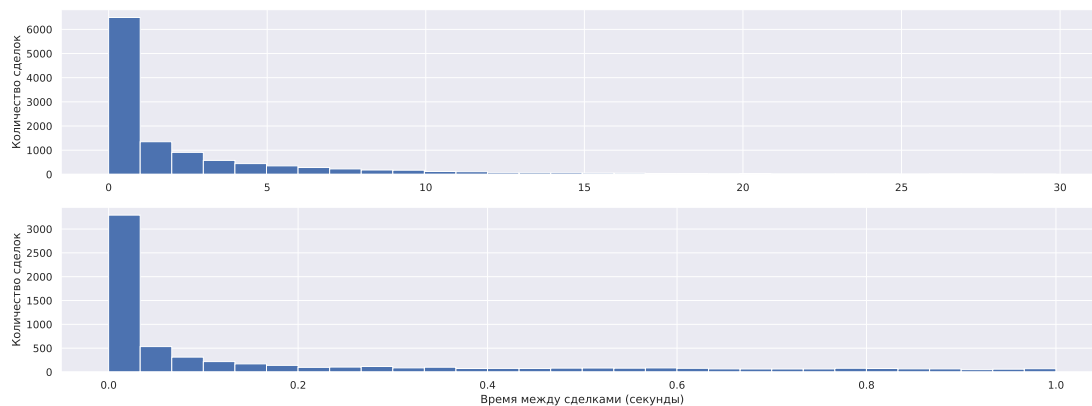


Рис. 13: Распределение времени между сделками для LKON

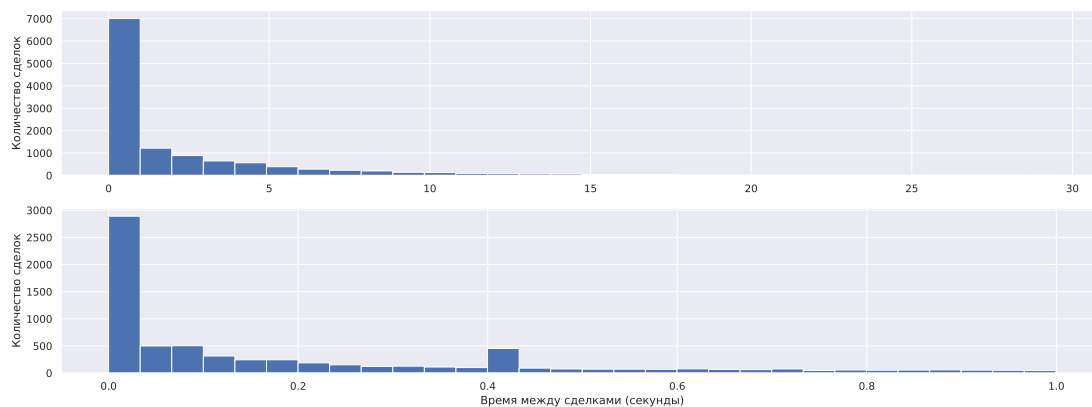


Рис. 14: Распределение времени между сделками для MGNT

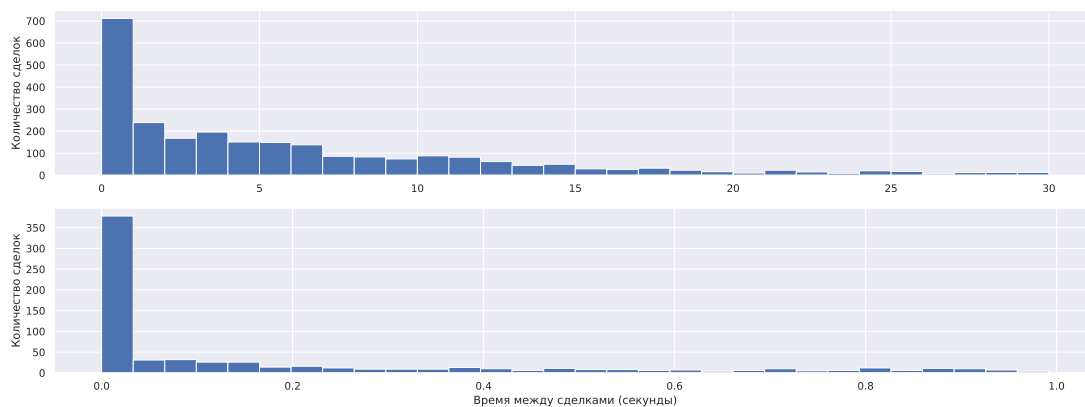


Рис. 15: Распределение времени между сделками для EUR\_RUB\_TOD

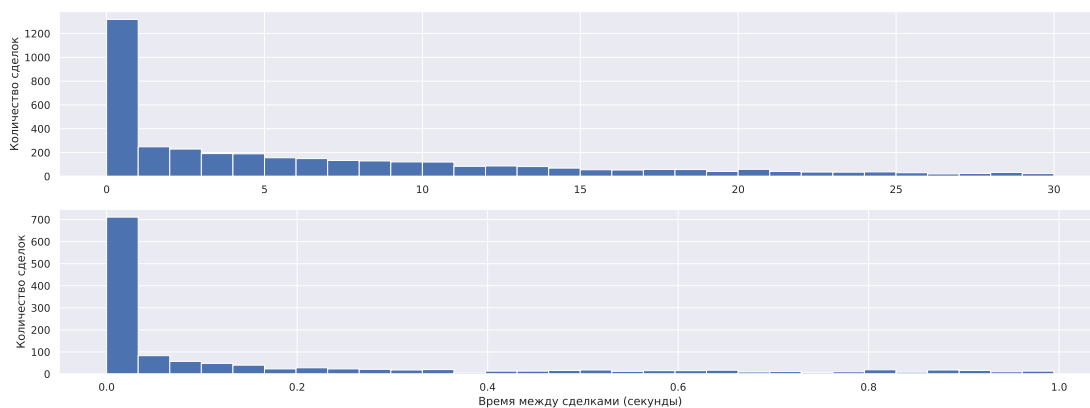


Рис. 16: Распределение времени между сделками для EUR\_RUB\_TOM

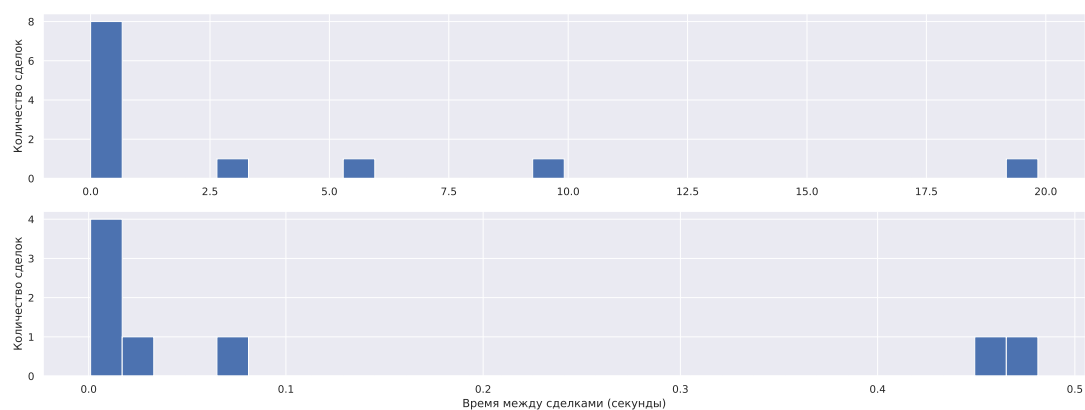


Рис. 17: Распределение времени между сделками для GBPRUB\_TOD

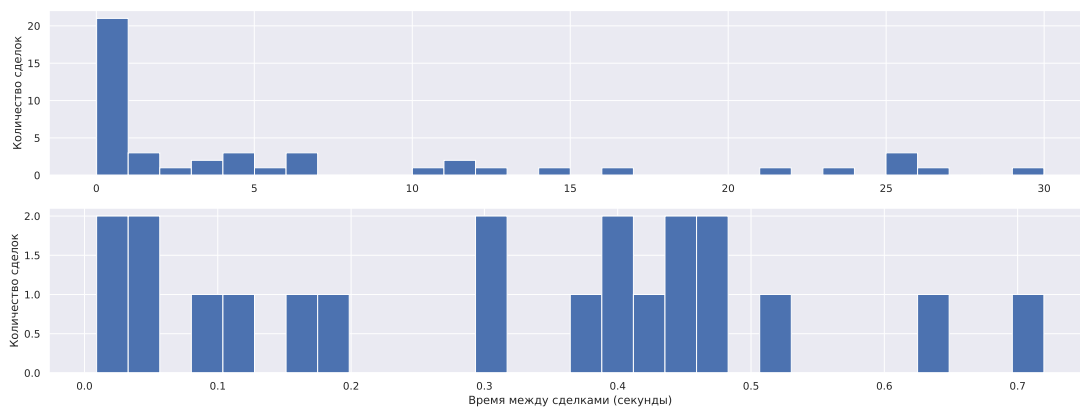


Рис. 18: Распределение времени между сделками для GBPRUB\_TOM

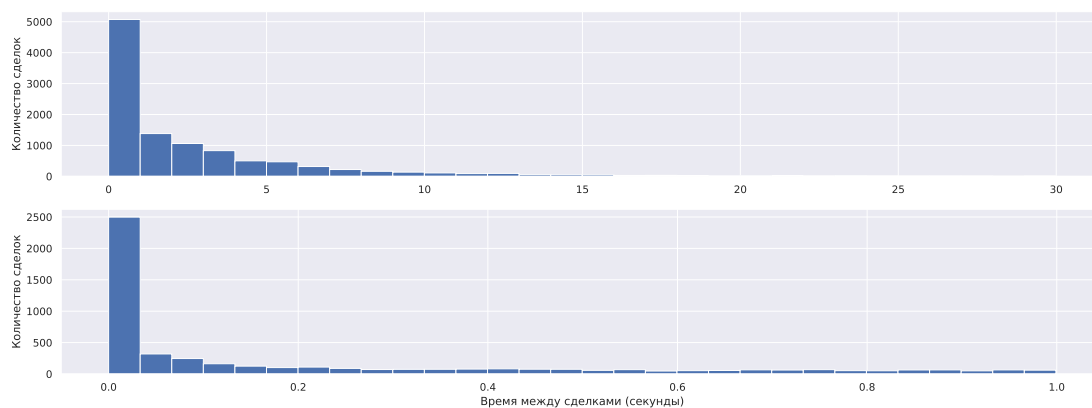


Рис. 19: Распределение времени между сделками для USD000000TOD

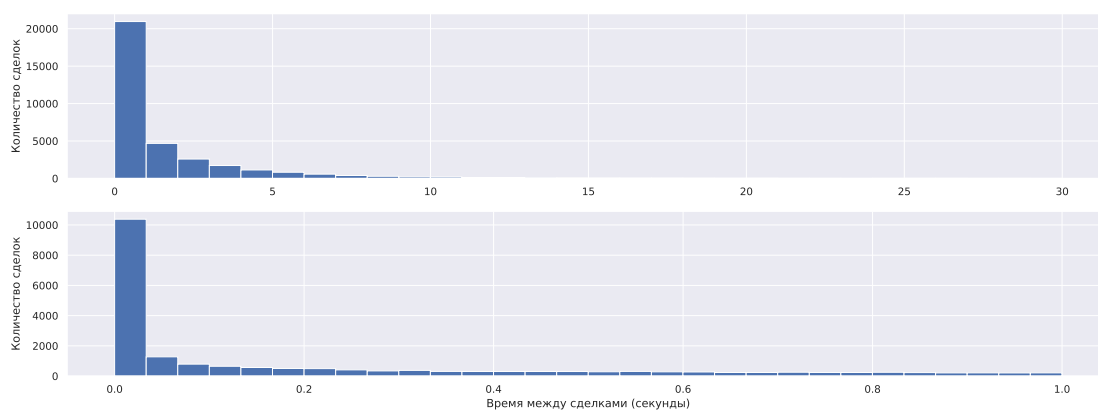


Рис. 20: Распределение времени между сделками для USD000UTSTOM

Инструмент	Число сделок	$B$	$B^*$
USD000UTSTOM	32078	$10.163 \pm 0.907$	$59.132 \pm 4.504$
USD000000TOD	10426	$66.455 \pm 6.97$	$144.279 \pm 13.76$
EUR_RUB__TOM	4278	$8.731 \pm 3.047$	$73.1 \pm 10.54$
EUR_RUB__TOD	2680	$6.082 \pm 5.482$	$43.073 \pm 10.308$
GBPRUB__TOM	220	$0.023 \pm 0.447$	$0.277 \pm 0.12$
GBPRUB__TOD	39	$-147.873 \pm 59.829$	$-72.733 \pm 22.793$

Таблица 10:  $B$  и  $B^*$ , вычисленные для разных валютных пар в агрегированном датасете (величина промежутка 0.0001).

Инструмент	Число сделок	$B$	$B^*$
USD000UTSTOM	28361	$8.044 \pm 0.169$	$19.359 \pm 0.717$
USD000000TOD	9628	$25.878 \pm 1.58$	$44.206 \pm 2.357$
EUR_RUB__TOM	4022	$2.588 \pm 0.606$	$11.265 \pm 1.776$
EUR_RUB__TOD	2535	$1.908 \pm 0.993$	$10.471 \pm 2.474$
GBPRUB__TOM	220	$0.023 \pm 0.447$	$0.277 \pm 0.12$
GBPRUB__TOD	38	$25.288 \pm 42.653$	$-10.039 \pm 13.83$

Таблица 11:  $B$  и  $B^*$ , вычисленные для разных валютных пар в агрегированном датасете (величина промежутка 0.001).

Инструмент	Число сделок	$B$	$B^*$
USD000UTSTOM	25089	$7.474 \pm 0.107$	$6.285 \pm 0.11$
USD000000TOD	8945	$1.759 \pm 0.194$	$4.851 \pm 0.189$
EUR_RUB__TOM	3788	$0.622 \pm 0.115$	$3.072 \pm 0.329$
EUR_RUB__TOD	2422	$0.419 \pm 0.13$	$1.056 \pm 0.215$
GBPRUB__TOM	219	$0.21 \pm 0.348$	$0.29 \pm 0.109$
GBPRUB__TOD	35	$0.518 \pm 0.301$	$0.495 \pm 0.301$

Таблица 12:  $B$  и  $B^*$ , вычисленные для разных валютных пар в агрегированном датасете (величина промежутка 0.01).

Инструмент	Число сделок	$B$	$B^*$
USD000UTSTOM	21852	$0.792 \pm 0.01$	$0.848 \pm 0.015$
USD000000TOD	7878	$0.477 \pm 0.022$	$1.327 \pm 0.039$
EUR_RUB__TOM	3542	$0.28 \pm 0.013$	$0.183 \pm 0.022$
EUR_RUB__TOD	2287	$0.155 \pm 0.014$	$0.273 \pm 0.022$
GBPRUB__TOM	215	$0.017 \pm 0.041$	$0.284 \pm 0.113$
GBPRUB__TOD	33	$0.062 \pm 0.045$	$0.057 \pm 0.045$

Таблица 13:  $B$  и  $B^*$ , вычисленные для разных валютных пар в агрегированном датасете (величина промежутка 0.1).



Инструмент	Число сделок	$B$	$B^*$
USD000UTSTOM	18889	$0.459 \pm 0.005$	$0.496 \pm 0.006$
USD000000TOD	7218	$0.303 \pm 0.01$	$0.64 \pm 0.017$
EUR_RUB__TOM	3360	$0.27 \pm 0.011$	$0.088 \pm 0.006$
EUR_RUB__TOD	2184	$0.2 \pm 0.008$	$0.202 \pm 0.008$
GBPRUB_TOM	212	$0.023 \pm 0.04$	$0.034 \pm 0.02$
GBPRUB_TOD	33	$0.062 \pm 0.045$	$0.057 \pm 0.045$

Таблица 14:  $B$  и  $B^*$ , вычисленные для разных валютных пар в агрегированном датасете (величина промежутка 0.3).

Инструмент	Число сделок	$B$	$B^*$
USD000UTSTOM	15006	$0.333 \pm 0.004$	$0.362 \pm 0.005$
USD000000TOD	6310	$0.165 \pm 0.004$	$0.274 \pm 0.007$
EUR_RUB__TOM	3171	$0.263 \pm 0.011$	$0.069 \pm 0.003$
EUR_RUB__TOD	2075	$0.182 \pm 0.005$	$0.191 \pm 0.006$
GBPRUB_TOM	199	$0.011 \pm 0.006$	$0.002 \pm 0.001$
GBPRUB_TOD	31	$0.031 \pm 0.016$	$0.014 \pm 0.003$

Таблица 15:  $B$  и  $B^*$ , вычисленные для разных валютных пар в агрегированном датасете (величина промежутка 0.75).

Инструмент	Число сделок	$B$	$B^*$
USD000UTSTOM	13644	$0.279 \pm 0.004$	$0.338 \pm 0.005$
USD000000TOD	5961	$0.15 \pm 0.004$	$0.198 \pm 0.005$
EUR_RUB__TOM	3092	$0.112 \pm 0.003$	$0.068 \pm 0.003$
EUR_RUB__TOD	2024	$0.181 \pm 0.005$	$0.184 \pm 0.006$
GBPRUB_TOM	199	$0.011 \pm 0.006$	$0.002 \pm 0.001$
GBPRUB_TOD	31	$0.031 \pm 0.016$	$0.014 \pm 0.003$

Таблица 16:  $B$  и  $B^*$ , вычисленные для разных валютных пар в агрегированном датасете (величина промежутка 0.95).

Инструмент	Число сделок	$B$	$B^*$
USD000UTSTOM	13012	$0.237 \pm 0.003$	$0.333 \pm 0.005$
USD000000TOD	5791	$0.146 \pm 0.003$	$0.189 \pm 0.005$
EUR_RUB__TOM	3057	$0.068 \pm 0.002$	$0.068 \pm 0.003$
EUR_RUB__TOD	2007	$0.181 \pm 0.005$	$0.18 \pm 0.005$
GBPRUB_TOM	198	$0.012 \pm 0.006$	$0.002 \pm 0.001$
GBPRUB_TOD	31	$0.031 \pm 0.016$	$0.014 \pm 0.003$

Таблица 17:  $B$  и  $B^*$ , вычисленные для разных валютных пар в агрегированном датасете (величина промежутка 1.05).

Инструмент	Число сделок	$B$	$B^*$
SBER	48136	$96.827 \pm 2.701$	$129.621 \pm 3.838$
GAZP	24838	$35.508 \pm 1.533$	$511.041 \pm 11.515$
VTBR	18512	$50.288 \pm 2.303$	$0.0 \pm 0.0$
YNDX	16275	$99.55 \pm 4.399$	$796.895 \pm 18.511$
MGNT	12106	$39.604 \pm 3.709$	$733.161 \pm 16.629$
LKOH	11387	$361.395 \pm 7.811$	$958.857 \pm 20.375$
ROSN	9832	$85.504 \pm 4.384$	$1034.387 \pm 30.448$
PLZL	9085	$11.017 \pm 1.576$	$872.099 \pm 26.397$
MTLR	6545	$5.313 \pm 0.525$	$790.507 \pm 18.7$
SNGSP	6323	$30.917 \pm 5.989$	$1193.063 \pm 18.948$

Таблица 18:  $B$  и  $B^*$ , вычисленные для разных валютных пар в агрегированном датасете (величина промежутка 0.0001).

Инструмент	Число сделок	$B$	$B^*$
SBER	41657	$44.321 \pm 0.778$	$34.797 \pm 0.452$
GAZP	21568	$31.728 \pm 0.761$	$139.413 \pm 2.458$
VTBR	17099	$19.113 \pm 0.457$	$-0.0 \pm 0.0$
YNDX	14117	$25.074 \pm 0.795$	$67.086 \pm 1.93$
MGNT	10930	$19.565 \pm 0.932$	$85.107 \pm 3.25$
LKOH	9762	$307.579 \pm 6.53$	$149.375 \pm 3.688$
ROSN	8647	$65.859 \pm 2.59$	$79.067 \pm 3.266$
PLZL	7126	$11.55 \pm 0.586$	$124.837 \pm 4.499$
SNGSP	6032	$8.84 \pm 2.15$	$103.966 \pm 4.349$
MTLR	5986	$5.226 \pm 0.216$	$33.381 \pm 2.399$

Таблица 19:  $B$  и  $B^*$ , вычисленные для разных валютных пар в агрегированном датасете (величина промежутка 0.001).

Инструмент	Число сделок	$B$	$B^*$
SBER	37218	$11.922 \pm 0.135$	$22.191 \pm 0.223$
GAZP	19211	$11.42 \pm 0.161$	$4.986 \pm 0.103$
VTBR	15994	$6.057 \pm 0.129$	$4.136 \pm 0.129$
YNDX	12979	$11.225 \pm 0.255$	$7.883 \pm 0.178$
MGNT	9743	$14.141 \pm 0.333$	$2.767 \pm 0.126$
LKOH	8829	$14.183 \pm 0.311$	$6.804 \pm 0.235$
ROSN	7801	$4.754 \pm 0.188$	$10.097 \pm 0.33$
PLZL	6255	$15.633 \pm 0.582$	$9.545 \pm 0.36$
MTLR	5799	$3.875 \pm 0.116$	$4.157 \pm 0.177$
SNGSP	5401	$0.86 \pm 0.146$	$3.341 \pm 0.261$

Таблица 20:  $B$  и  $B^*$ , вычисленные для разных валютных пар в агрегированном датасете (величина промежутка 0.01).

Инструмент	Число сделок	$B$	$B^*$
SBER	29566	$3.263 \pm 0.028$	$1.51 \pm 0.015$
GAZP	15870	$1.744 \pm 0.023$	$1.889 \pm 0.028$
VTBR	14404	$1.864 \pm 0.025$	$1.446 \pm 0.027$
YNDX	11160	$2.389 \pm 0.034$	$1.734 \pm 0.03$
MGNT	8446	$3.233 \pm 0.057$	$0.897 \pm 0.032$
LKOH	7640	$2.204 \pm 0.037$	$0.943 \pm 0.028$
ROSN	6800	$0.928 \pm 0.023$	$1.081 \pm 0.03$
MTLR	5562	$1.216 \pm 0.027$	$0.862 \pm 0.029$
PLZL	5124	$0.917 \pm 0.021$	$1.304 \pm 0.048$
SNGSP	4825	$0.36 \pm 0.03$	$0.717 \pm 0.033$

Таблица 21:  $B$  и  $B^*$ , вычисленные для разных валютных пар в агрегированном датасете (величина промежутка 0.1).

Инструмент	Число сделок	$B$	$B^*$
SBER	21712	$1.18 \pm 0.011$	$1.111 \pm 0.009$
GAZP	13089	$1.066 \pm 0.015$	$0.998 \pm 0.011$
VTBR	12494	$1.017 \pm 0.013$	$0.798 \pm 0.011$
YNDX	9801	$0.953 \pm 0.012$	$0.77 \pm 0.011$
MGNT	7184	$0.693 \pm 0.013$	$0.519 \pm 0.018$
LKOH	6798	$0.779 \pm 0.016$	$0.551 \pm 0.015$
ROSN	6039	$0.339 \pm 0.01$	$0.725 \pm 0.016$
MTLR	5024	$0.389 \pm 0.006$	$0.617 \pm 0.013$
SNGSP	4480	$0.229 \pm 0.014$	$0.482 \pm 0.016$
PLZL	4450	$1.279 \pm 0.024$	$0.746 \pm 0.023$

Таблица 22:  $B$  и  $B^*$ , вычисленные для разных валютных пар в агрегированном датасете (величина промежутка 0.3).

Инструмент	Число сделок	$B$	$B^*$
SBER	17066	$0.645 \pm 0.006$	$1.05 \pm 0.009$
GAZP	11407	$0.865 \pm 0.01$	$0.876 \pm 0.009$
VTBR	11196	$0.766 \pm 0.009$	$0.676 \pm 0.009$
YNDX	8943	$0.688 \pm 0.01$	$0.533 \pm 0.008$
LKOH	6308	$0.517 \pm 0.01$	$0.348 \pm 0.008$
MGNT	6226	$0.626 \pm 0.012$	$0.501 \pm 0.013$
ROSN	5605	$0.295 \pm 0.009$	$0.612 \pm 0.014$
MTLR	4786	$0.385 \pm 0.006$	$0.567 \pm 0.012$
SNGSP	4244	$0.176 \pm 0.01$	$0.415 \pm 0.013$
PLZL	4089	$1.284 \pm 0.025$	$0.496 \pm 0.016$

Таблица 23:  $B$  и  $B^*$ , вычисленные для разных валютных пар в агрегированном датасете (величина промежутка 0.5).

Инструмент	Число сделок	$B$	$B^*$
SBER	12970	$0.587 \pm 0.006$	$1.048 \pm 0.011$
VTBR	9858	$0.642 \pm 0.007$	$0.528 \pm 0.006$
GAZP	9791	$0.557 \pm 0.008$	$0.765 \pm 0.009$
YNDX	7994	$0.578 \pm 0.008$	$0.291 \pm 0.005$
LKOH	5762	$0.372 \pm 0.007$	$0.286 \pm 0.007$
MGNT	5707	$0.486 \pm 0.008$	$0.393 \pm 0.009$
ROSN	5130	$0.213 \pm 0.005$	$0.371 \pm 0.008$
MTLR	4565	$0.382 \pm 0.006$	$0.408 \pm 0.009$
SNGSP	3981	$0.156 \pm 0.008$	$0.32 \pm 0.01$
PLZL	3772	$0.697 \pm 0.012$	$0.333 \pm 0.01$

Таблица 24:  $B$  и  $B^*$ , вычисленные для разных валютных пар в агрегированном датасете (величина промежутка 0.75).

Инструмент	Число сделок	$B$	$B^*$
SBER	11164	$0.528 \pm 0.006$	$0.292 \pm 0.003$
VTBR	9184	$0.642 \pm 0.008$	$0.494 \pm 0.006$
GAZP	8952	$0.259 \pm 0.004$	$0.477 \pm 0.007$
YNDX	7494	$0.555 \pm 0.008$	$0.275 \pm 0.005$
MGNT	5460	$0.409 \pm 0.007$	$0.294 \pm 0.007$
LKOH	5447	$0.3 \pm 0.005$	$0.221 \pm 0.005$
ROSN	4923	$0.196 \pm 0.005$	$0.354 \pm 0.007$
MTLR	4436	$0.374 \pm 0.006$	$0.385 \pm 0.009$
SNGSP	3839	$0.15 \pm 0.007$	$0.201 \pm 0.006$
PLZL	3642	$0.696 \pm 0.012$	$0.284 \pm 0.009$

Таблица 25:  $B$  и  $B^*$ , вычисленные для разных валютных пар в агрегированном датасете (величина промежутка 0.9).

Инструмент	Число сделок	$B$	$B^*$
SBER	10636	$0.526 \pm 0.006$	$0.291 \pm 0.003$
VTBR	8985	$0.642 \pm 0.008$	$0.487 \pm 0.006$
GAZP	8681	$0.244 \pm 0.004$	$0.452 \pm 0.007$
YNDX	7348	$0.358 \pm 0.005$	$0.274 \pm 0.005$
MGNT	5381	$0.403 \pm 0.007$	$0.27 \pm 0.007$
LKOH	5373	$0.296 \pm 0.005$	$0.216 \pm 0.005$
ROSN	4856	$0.194 \pm 0.005$	$0.352 \pm 0.007$
MTLR	4399	$0.374 \pm 0.006$	$0.364 \pm 0.008$
SNGSP	3798	$0.146 \pm 0.007$	$0.192 \pm 0.006$
PLZL	3593	$0.696 \pm 0.013$	$0.231 \pm 0.008$

Таблица 26:  $B$  и  $B^*$ , вычисленные для разных валютных пар в агрегированном датасете (величина промежутка 0.95).

Инструмент	Число сделок	$B$	$B^*$
SBER	10079	$0.466 \pm 0.006$	$0.274 \pm 0.003$
VTBR	8749	$0.642 \pm 0.008$	$0.484 \pm 0.006$
GAZP	8427	$0.242 \pm 0.004$	$0.45 \pm 0.007$
YNDX	7182	$0.356 \pm 0.005$	$0.296 \pm 0.005$
MGNT	5309	$0.402 \pm 0.007$	$0.262 \pm 0.006$
LKOH	5270	$0.294 \pm 0.005$	$0.214 \pm 0.005$
ROSN	4796	$0.188 \pm 0.004$	$0.3 \pm 0.007$
MTLR	4351	$0.374 \pm 0.006$	$0.356 \pm 0.008$
SNGSP	3758	$0.144 \pm 0.006$	$0.187 \pm 0.006$
PLZL	3556	$0.696 \pm 0.013$	$0.21 \pm 0.007$

Таблица 27:  $B$  и  $B^*$ , вычисленные для разных валютных пар в агрегированном датасете (величина промежутка 1.0).

Инструмент	Число сделок	$B$	$B^*$
SBER	9472	$0.463 \pm 0.006$	$0.274 \pm 0.003$
VTBR	8521	$0.609 \pm 0.008$	$0.479 \pm 0.006$
GAZP	8050	$0.262 \pm 0.004$	$0.441 \pm 0.007$
YNDX	6938	$0.354 \pm 0.005$	$0.292 \pm 0.005$
MGNT	5209	$0.391 \pm 0.007$	$0.26 \pm 0.006$
LKOH	5131	$0.292 \pm 0.005$	$0.211 \pm 0.005$
ROSN	4671	$0.186 \pm 0.004$	$0.31 \pm 0.007$
MTLR	4320	$0.373 \pm 0.006$	$0.34 \pm 0.008$
SNGSP	3685	$0.137 \pm 0.006$	$0.184 \pm 0.005$
PLZL	3502	$0.695 \pm 0.013$	$0.205 \pm 0.007$

Таблица 28:  $B$  и  $B^*$ , вычисленные для разных валютных пар в агрегированном датасете (величина промежутка 1.05).