



Модель Обижаевой–Ванга

Всеволод Заостровский^{*1}

¹Московский Государственный университет имени М. В. Ломоносова

23 февраля 2024 г.

Аннотация

В нашем исследовании мы предлагаем новую методику оценки параметров в модели Обижаевой–Ванга, тестируем её на реальных данных и исследуем особенности торговли Московской биржи.

Ключевые слова: Модель Обижаевой–Ванга, оптимальное исполнение, market impact, resiliency

JEL коды: C81 · G1

MSC (2000) коды: 91G23

Введение

Модель Обижаевой–Ванга - это модель торговли на финансовом рынке, которая широко используется в количественных финансах. Разработанная Анной Обижаевой и Цзян Вангом в 2013 году, модель используется для анализа динамики финансовых рынков и принятия торговых решений. Модель привлекла значительное внимание в финансовой индустрии благодаря своему вниманию к свойству упругости (resiliency) стакана, описывающему важный эмпирический факт: спрос/ предложение финансовых ценных бумаг, как правило, не является идеально эластичным. Упругость — скорость, с которой спрос/предложение восстанавливается до устойчивого состояния после совершения сделки — характеризует начало нового этапа в разработке моделей оптимального исполнения. В нашем исследовании мы разрабатываем практический способ использования этой теории.

Этот факт справедлив даже для ликвидных европейских рынков, если же мы говорим о гораздо менее ликвидных российских рынках, пренебрежение им может привести к катастрофическим последствиям. Основное отличие модели Обижаевой–Ванга от других как раз в том, что в ней ключевую роль играет устойчивость.

Мы исследуем задачу оптимального исполнения. Иными словами, если кто-то хочет продать или купить определенное количество актива достаточно большое, чтобы оказать существенное влияние на рынок, что он должен делать? Чтобы сформулировать задачу на языке математики, нам нужно будет изучить основные принципы биржевой структуры.

1 Основные понятия

Определим несколько понятий, которые понадобятся нам в дальнейшем.

^{*}e-mail: vsevolodzaostrovsky@mail.ru



Рис. 1: Графическое представление лимитной книги заявок

Определение 1. *Бид (bid) — это самая высокая цена, которую покупатель готов заплатить за актив. Далее, бид в момент времени t будет обозначаться B_t . Аск (ask) — это самая низкая цена, за которую продавец готов предоставить актив. Далее, аск в момент времени t будет обозначаться A_t . Бид-аск спрэд (bid-ask spread) s : $s = A_t - B_t$. Мид (mid-quote price): $V_t = \frac{A_t + B_t}{2}$.*

Начнем с рассмотрения структуры лимитной книги заявок (Limit Order Book – LOB). В рамках этой парадигмы организации биржевых торгов, у каждого участника есть две возможности:

- выразить желание купить или продать определённое количество единиц актива по определенной цене. В этом случае, биржа запомнит пару цена–количество. Множество этих пар составляет лимитную книгу заявок. На рисунке 1 изображено традиционное представление лимитной книги заявок.
- выразить желание купить или продать определённое количество единиц актива немедленно. В этом случае он немедленно получит запрошенное количество акций (если на бирже есть необходимое количество) по лучшей возможной цене: к примеру, в случае покупки, если на верхнем ценовом уровне не будет достаточного количества единиц актива для удовлетворения заявки, то будут взяты активы из следующего ценового уровня. Таким образом, не гарантируется, что итоговая цена одной единицы актива будет совпадать с аском.

Таким образом, если опустить некоторые подробности, существует два вида заявок:

Определение 2. *Лимитная заявка (ордер) (limit order) представляет собой распоряжение на покупку или продажу ценной бумаги по определенной цене или выше. Этот тип заявки гарантирует цену исполнения, но не гарантирует само исполнение.*

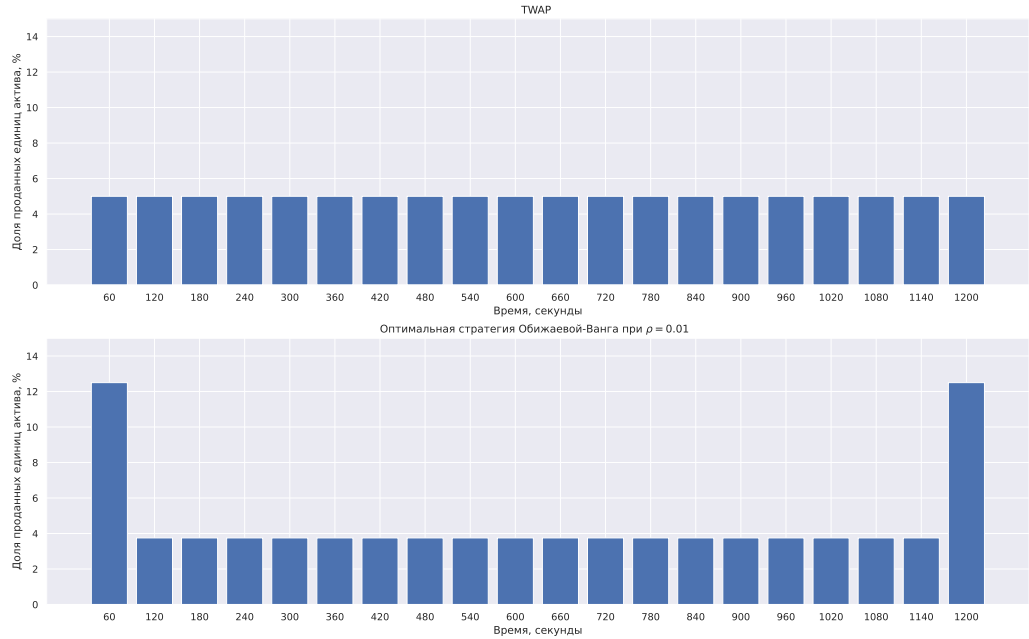


Рис. 2: Сравнение TWAP и стратегии из 2 для 20 моментов времени

Определение 3. Рыночная заявка (ордер) (market order) представляет собой распоряжение на немедленную покупку или продажу ценной бумаги. Этот тип заявки гарантирует, что она будет исполнена, но не гарантирует цену исполнения.

Теперь ясно, что если мы хотим продать или купить актив в количестве, достаточно большом, чтобы он мог оказать существенное влияние на рынок, мы не должны делать это одной заявкой: это было бы очень дорого, поскольку крупный ордер удалил бы все верхние уровни в лимитной книге заявок. Поэтому на практике все крупные заявки разбиваются на большое количество мелких. Например, можно просто разделить ордер на N равных частей и продавать их через равные промежутки времени (это называется TWAP, рис. 2). Но есть ли лучшее решение?

2 Подход Обижаевой и Ванга к формализации проблемы

В попытке найти лучшее решение, мы рассматриваем модель Обижаевой–Ванга, в терминах которой задача имеет следующий вид:

$$J_0 = \min_{\{x_0 \dots x_N\}} E_0 \left[\sum_{n=0}^N [A_{t_n} + x_n / (2q)] x_n \right],$$

$$A_{t_n} = F_{t_n} + \lambda(X_0 - X_{t_n}) + s/2 + \sum_{i=0}^{n-1} x_i \kappa e^{-\rho \tau(n-i)},$$

где

- трейдер должен купить X_0 единиц актива за фиксированный период времени $[0, T]$;
- x_{t_n} размер ордера в момент времени $t_n = \tau n$ (здесь, $\tau = T/N$);
- $X_{t_n} := X_0 - \sum_{t_k < t_n} x_{t_k}$;
- B_{t_n} и A_{t_n} — бид и аск в момент времени t_n ;
- $V_{t_n} = \frac{A_{t_n} + B_{t_n}}{2}$ — мид;
- s — бид-аск спрэд;
- F_t — фундаментальная (справедливая) цена актива;
- $q(P)$ распределение лимитной книги заявок P (по ценам $[a, b]$ доступно $\int_a^b q(p) dP$ единиц актива);
- параметр λ — постоянный маркет импакт (справдливая цена V_t в результате исполнения ордера объема x меняется по закону: $V_{t+} = V_t + \lambda x$);
- $\kappa = \frac{1}{q} - \lambda$;
- параметр ρ — упругость стакана (resiliency).

Данная задача была решена в статье [OW13]:

Теорема 1. *Решение задачи оптимального исполнения:*

$$x_n = -\frac{1}{2}\delta_{n+1}[D_{t_n}(1 - \beta_{n+1}e^{-\rho\tau} + 2\kappa\gamma_{n+1}e^{-2\rho\tau}) - X_{t_n}(\lambda + 2\alpha_{n+1} - \beta_{n+1}\kappa e^{-\rho\tau})],$$

где $x_N = X_N$ и $D_t = A_t - V_t - s/2$. Ожидаемая цена будущих сделок в рамках стратегии оптимального исполнения меняется по закону

$$J_{t_n} = (F_{t_n} + s/2)X_{t_n} + \lambda X_0 X_{t_n} + \alpha_n X_{t_n}^2 + \beta_n D_{t_n} X_{t_n} + \gamma_n D_{t_n}^2,$$

где коэффициенты α_{n+1} , β_{n+1} , γ_{n+1} и δ_{n+1} определяются рекурсивно по формулам:

$$\alpha_n = \alpha_{n+1} - \frac{1}{4}\delta_{n+1}(\lambda + 2\alpha_{n+1} - \beta_{n+1}\kappa e^{-\rho\tau})^2,$$

$$\beta_n = \beta_{n+1}e^{-\rho\tau} + \frac{1}{2}\delta_{n+1}(1 - \beta_{n+1}e^{-\rho\tau} + 2\kappa\gamma_{n+1}e^{-2\rho\tau})(\lambda + 2\alpha_{n+1} - \beta_{n+1}\kappa e^{-\rho\tau}),$$

$$\gamma_n = \gamma_{n+1}e^{-2\rho\tau} - \frac{1}{4}\delta_{n+1}(1 - \beta_{n+1}e^{-\rho\tau} + 2\kappa\gamma_{n+1}e^{-2\rho\tau})^2,$$

где $\delta_{n+1} = [1/(2q) + \alpha_{n+1} - \beta_{n+1}\kappa e^{-\rho\tau} + \gamma_{n+1}\kappa^2 e^{-2\rho\tau}]^{-1}$ и начальные условия

$$\alpha_N = 1/(2q) - \lambda, \quad \beta_N = 1, \quad \gamma_N = 0.$$

В нашем исследовании мы будем рассматривать предел этого решения.

Теорема 2. *При $N \rightarrow \infty$, стратегия оптимального исполнения принимает вид:*

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} x_0 = x_{t=0} &= \frac{X_0}{\rho T + 2}, \\ \lim_{N \rightarrow \infty} x_n/(T/N) = \dot{X}_t &= \frac{\rho X_0}{\rho T + 2}, \quad t \in (0, T), \\ \lim_{N \rightarrow \infty} x_0 = x_{t=0} = \lim_{N \rightarrow \infty} x_n/(T/N) &= x_{t=T} = \frac{X_0}{\rho T + 2}. \end{aligned}$$

где x_0 первая сделка за отведенный период, x_N — последняя, и \dot{X}_t скорость трейдинга между ними.

		Диапазоны ликвидности (среднедневное число сделок)						
Диапазоны цены		0	3	30	150	500	3000	25000
		3	30	150	500	3000	25000	
0	0,002	0,00001	0,000005	0,000002	0,000001	0,000001	0,000001	0,000001
0,002	0,005	0,00002	0,00001	0,000005	0,000002	0,000001	0,000001	0,000001
0,005	0,01	0,00005	0,00002	0,00001	0,000005	0,000002	0,000001	0,000001
0,01	0,02	0,0001	0,00005	0,00002	0,00001	0,000005	0,000002	0,000001
0,02	0,05	0,0002	0,0001	0,00005	0,00002	0,00001	0,000005	0,000002
0,05	0,1	0,0005	0,0002	0,0001	0,00005	0,00002	0,00001	0,000005
0,1	0,2	0,001	0,0005	0,0002	0,0001	0,00005	0,00002	0,00001
0,2	0,5	0,002	0,001	0,0005	0,0002	0,0001	0,00005	0,00002
0,5	1	0,005	0,002	0,001	0,0005	0,0002	0,0001	0,00005
1	2	0,01	0,005	0,002	0,001	0,0005	0,0002	0,0001
2	5	0,02	0,01	0,005	0,002	0,001	0,0005	0,0002
5	10	0,05	0,02	0,01	0,005	0,002	0,001	0,0005
10	20	0,1	0,05	0,02	0,01	0,005	0,002	0,001
20	50	0,2	0,1	0,05	0,02	0,01	0,005	0,002
50	100	0,5	0,2	0,1	0,05	0,02	0,01	0,005
100	200	1	0,5	0,2	0,1	0,05	0,02	0,01
200	500	2	1	0,5	0,2	0,1	0,05	0,02
500	1000	5	2	1	0,5	0,2	0,1	0,05
1000	2000	10	5	2	1	0,5	0,2	0,1
2000	5000	20	10	5	2	1	0,5	0,2
5000	10000	50	20	10	5	2	1	0,5
10000	20000	100	50	20	10	5	2	1
20000	50000	200	100	50	20	10	5	2
50000	100000	500	200	100	50	20	10	5
100000		1000	500	200	100	50	20	10

Рис. 3: Правила определения расчетного шага цены (сайт московской биржи).

Таким образом, мы имеем явную формулу для стратегии оптимального исполнения. Но нам необходимо каким-либо образом найти параметр ρ для того, чтобы применить её на практике.

Другое возможное приложение параметра ρ даёт формула, определяющая динамику аска после исполнения ордера глубины x :

$$A_t = \bar{p}_t + \frac{s}{2} + x\kappa e^{-\rho t}.$$

Поскольку, к примеру, на Московской Бирже, минимальный шаг цены составляет, в основном, около 0.05% от спотовой цены (см. 3), согласно модели стакан будет полностью восстанавливаться после исполнения "большого" ордера (для которого $x\kappa \approx 0.01 * A_t$) примерно за $t = \frac{10}{\rho}$. ордера

3 Как подобрать ρ ?

3.1 Теоретическая идея

Из модели Обижаевой–Ванга прямо вытекает следующее соотношение.

Лемма 3. В модели Обижаевой–Ванга:

$$\Delta A_k = D_{t_k}(e^{-\rho \Delta t_k} - 1) + x_{t_k} \kappa e^{-\rho \Delta t_k} + \lambda x_{t_k}.$$

Мы предлагаем рассмотреть новую модель, в которой:

$$A_{t_k} = \frac{s}{2} + V_{t_k} + D_{t_k},$$

где $V_{t_{k+1}} = V_{t_k} + \hat{\lambda}x_{t_k}$, а $D_{t_{k+1}} = -\hat{\rho}D_{t_k}\Delta t_k + x_{t_k}\hat{\kappa}(1 - \hat{\rho}\Delta t_k)$.

Теорема 4. Гиперпараметры введённой выше модели удовлетворяют регрессионному соотношению

$$\frac{\Delta A_{k+1}}{\Delta t_{k+1}} - \frac{\Delta A_k}{\Delta t_k} = -\hat{\rho}\Delta A_k + \hat{\rho}\hat{\lambda}x_{t_k} - \hat{\rho}\hat{\kappa}\Delta x_k + (\hat{\lambda} + \hat{\kappa})\left(\frac{x_{t_{k+1}}}{\Delta t_{k+1}} - \frac{x_{t_k}}{\Delta t_k}\right). \quad (1)$$

Теорема 5. Если $\rho O(\rho\Delta t) \rightarrow 0$, то $\rho \rightarrow \hat{\rho}$.

Все доказательства представлены в 6.

3.2 Практическая интерпретация модели

Задача исполнения большого ордера на практике может делиться на очень большое число подзадач, как можно видеть из примера ниже.

Пример 1. Пусть трейдеру дано задание купить N единиц актива за неделю.

На первом этапе, он решает сколько единиц актива он желает приобретать каждый день. Например, можно учитывать, то, будут ли на неделе праздники, а также чисто эмпирические соображения: в середине недели торги обычно более интенсивны, распределение объема торгов может быть разумно сместить в начало недели, чтобы точно успеть исполнить поручение и так далее.

Затем, нужно понять, сколько единиц актива нужно продавать каждый час. К примеру, известно, что график объема торгов часто образует определенную фигуру, так что можно довольно точно предсказать объём торгов на каждом часу, пользуясь временными рядами, и исполнять ордер при помощи алгоритма VWAP.

Теперь возникают вопросы: сколько единиц актива нужно продавать каждую минуту и как конкретно распределять ордера внутри секунды. Здесь могут возникнуть сложности с предсказанием объёмов, так что, возможно, придётся использовать TWAP.

Таким образом, ясно, что природа задачи оптимального исполнения может существенно меняться, в зависимости от закладываемого времени. Более того, рекомендацию алгоритма продать x_n единиц актива в момент времени t_n , можно (а иногда и нужно) интерпретировать как рекомендацию каким-либо образом продать x_n единиц актива в промежутке $[t_{n-1}, t_n]$. В связи с этим первостепенную важность приобретает вопрос интерпретации рекомендаций модели Обижаевой–Ванга. Записывая положения рынка в моменты времени t_{n-1} и t_n и формально считая проторгованный за это время объём объёмом одного большого ордера, мы можем, не меняя математической модели, фактически перейти к несколько иной задаче.

3.3 Эмпирическая инструкция по подбору ρ

Таким образом, мы предлагаем следующий эмпирический путь подбора параметра ρ :

1. Подготавливаем и очищаем данные¹.
2. Оцениваем по данным регрессию

$$\frac{\Delta A_{k+1}}{\Delta t_{k+1}} - \frac{\Delta A_k}{\Delta t_k} = -\hat{\rho}\Delta A_k + \hat{\rho}\hat{\lambda}x_{t_k} - \hat{\rho}\hat{\kappa}\Delta x_k + (\hat{\lambda} + \hat{\kappa})\left(\frac{x_{t_{k+1}}}{\Delta t_{k+1}} - \frac{x_{t_k}}{\Delta t_k}\right).$$

где

¹Вообще говоря, это тема для отдельного исследования. Ниже мы демонстрируем лишь некоторые подходы из множества возможных.

- ΔA_k изменение аска в следствие исполнения заявки размера x_k в момент времени t_k .
 - Δt_k время между k и $k + 1$ заявками.
3. Если $\rho^2 \Delta t$ (или Δt) мало, то считаем, что $\hat{\rho} \approx \rho$ и исполняем заявку в соответствии с (2).

Если последнее условие не выполнено, то можно попытаться применить подход, изложенный в приложении А. Однако, если мы решаем практическую задачу оптимального исполнения заявки за, например, 10 минут, то при $\rho > 0.5$ в соответствии с формулой (2) получаем, что, de facto, модель рекомендует продать менее, чем $\approx 0.3\%$ объема ордера за первую и последнюю сделки, а остальное равномерно продавать внутри временного промежутка, что практически мало отличимо от алгоритма TWAP.

Таким образом, мы считаем, что наш подход при всей простоте, полностью описывает алгоритм практической торговли.

4 Данные

4.1 Источники и предобработка

Мы работали с ордерлогами (спецификация). Было написано несколько программ, которые, в совокупности, распаршивали исходные записи в таблицу из четвёрок (время, аск до исполнения ордера, аск после исполнения ордера, глубина ордера). Следует обратить внимание на то, что заявки, поглощающие несколько уровней, представляются в данных в виде последовательности заявок, поэтому перед началом обработки их следует объединить: объем ордера есть сумма объемов, аск до исполнения — аск до исполнения первого ордера, аск после исполнения — аск после исполнения последнего ордера. Фрагмент таблицы, на котором представлен фрагмент обработанных данных и схематичное изображение изложенной выше операции, изображен на рисунке 4. Рассматривались данные за 03.03.2021 (середина недели, месяц максимально удаленный от праздников, год, удаленный от начала СВО и начала эпидемии COVID.)

4.2 Выбор инструмента и начальный анализ данных

В целом, известно, что российский рынок характеризуется низким уровнем ликвидности и низкой интенсивностью торгов. Для подбора параметров и статистических исследований нам нужно относительно большое количество данных, по этой причине для очень существенной части активов, торгуемых на Московской Бирже, исследование в духе нашего было бы невозможно: даже в категориях активов, считающихся ликвидными, встречается немало инструментов², по которым совершается порядка нескольких десятков сделок в день (и даже меньше). Поэтому мы решили рассмотреть две категории активов: самые ликвидные валютные пары и несколько наиболее ликвидных акций (мы исключили из рассмотрения акции ВТБ, поскольку их сильное дробление создаёт численные проблемы).

При этом, почти у всех активов подавляющее большинство сделок не поглощает ни одного уровня (те фактическая цена совершения сделки равна аску, см. таблицы 1 и 2). На наш взгляд, это серьезный аргумент против применимости модели Обижаевой–Ванга на микроуровне. На рынке нет больших ордеров, исполняемых в один тик, они равномерно распределяются по промежутку торговли, так что мы не можем делать прогнозов насчёт поведения рынка в случае мгновенного исполнения большого ордера, сметающего много ценовых уровней. В связи с этим, создавать такие заявки практически рискованно.

²Даже среди валютных пар большая часть имеет очень низкую интенсивность торгов, например, CHF RUB_TOM, HKD RUB_TOM, JPY RUB_TOM, KZT RUB_TOM.

	<u>Time</u>	<u>AskBefore</u>	<u>AskAfter</u>	<u>Volume</u>
0	1.0006099849997554	61.782	61.87	40000.0
1	2.0004541379967122	61.84	61.84	48000.0
2	2.0004635579971364	61.84	61.84	48000.0
3	2.000483832001919	61.842	61.842	13000.0
4	2.0004864069996984	61.842	61.847	87000.0
5	2.0004864069996984	61.847	61.847	7000.0
6	2.0005590279979515	61.792	61.845	10000.0
7	2.00059898699692	61.79	61.842	100000.0
8	2.000793077997514	61.835	61.835	11000.0
9	2.0008411289963988	61.815	61.815	11000.0
10	3.0002688890017453	61.822	61.822	1000.0
11	3.000301476000459	61.83	61.83	16000.0
12	3.0003054539993173	61.83	61.83	1000.0

Рис. 4: Данные после первого этапа парсинга

Заметим, что при изучении данных мы подтвердили широко известную закономерность: распределение времени между сделками очень похоже для всех активов и напоминает экспоненциальное (см. В).

4.3 Спайки

Данные характеризуются очень большим числом количеством резких и коротких скачков аска. Пересечение множеств сотни самых больших сделок и сотни сделок, сдвинувших аск сильнее всего, пусто. Таким образом, похоже, что ордеров, которые существенно двигают аск за счёт своего размера на рынке мало, то есть цена двигается, в основном, по фундаментальным причинам. На наш взгляд, такая структура данных может послужить основанием для того, чтобы усомниться в валидности модели Обижаевой–Ванга для российских данных, однако и не дает возможности с уверенностью сказать, что модель не применима.

Откуда же берутся эти скачки и что они из себя представляют? В стакане в каждый момент времени поддерживается тонкий баланс, любой маленький ордер, более выгодный, чем лучшая цена, будет почти мгновенно поглощён рынком. Конечно, если возникает необходимость в продаже или покупке небольшого количества актива, этим разумно воспользоваться.

Пример 2. Пусть аск равен 10, а бид — 9. Если мы хотим продать небольшое количество актива, то можно, например, разместить ордер на продажу актива по цене 9.1, тогда пока ордер не будет исполнен, аск станет равным 9.1, однако, скорее всего, лот очень быстро выкупят, поскольку он намного лучше аска и даже мида. Таким образом, мы продадим актив по цене 9.1 вместо 9, расплатившись за это довольно несущественным риском.

Мы проанализировали несколько конкретных спайков в ручную и оказалось, что происходит именно то, что описано в примере. Ясно, что эти скачки, в целом, не характеризуют динамику рискованного актива, поэтому целесообразно исключить их из исследуемого датасета.

Инструмент	Число сделок	Не повлияли на аск
USD000UTSTOM	28361	95%
USD000000TOD	9624	92%
EUR_RUB__TOM	4021	79%
EUR_RUB__TOD	2535	57%
USD000TODTOM	546	55%
EURUSD000TOM	409	93%
GBPRUB__TOM	220	60%
EUR000TODTOM	168	89%

Таблица 1: Анализ сделок по наиболее торгуемым валютным парам (03.03.2021).

Инструмент	Число сделок	Не повлияли на аск
SBER	41647	96%
GAZP	21566	86%
VTBR	17100	99%
YNDX	14110	68%
MGNT	10929	64%
LKOH	9759	75%
ROSN	8648	74%
PLZL	7121	56%
SNGSP	6032	60%
MTLR	5985	46%

Таблица 2: Анализ сделок по наиболее торгуемым акциям (03.03.2021).

5 Результаты регрессий

5.1 Регрессионное уравнение на данных

В терминах нашего датасета (см. вид данных на 4), регрессия на B выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} & \frac{\text{AskAfter}(k+1) - \text{AskBefore}(k+1)}{\text{Time}(k+2) - \text{Time}(k+1)} - \frac{\text{AskAfter}(k) - \text{AskBefore}(k)}{\text{Time}(k+1) - \text{Time}(k)} = \\ & = -B(\text{AskAfter}(k) - \text{AskBefore}(k)) + B(\lambda + \kappa)\text{Volume}(k) - B\kappa\text{Volume}(k+1) + \\ & + (\lambda + \kappa) \left(\frac{\text{Volume}(k+1)}{\text{Time}(k+2) - \text{Time}(k+1)} - \frac{\text{Volume}(k)}{\text{Time}(k+1) - \text{Time}(k)} \right). \end{aligned}$$

Фактически, это просто формула (8), где мы полагаем:

- $\Delta A_k = \text{AskAfter}(k) - \text{AskBefore}(k)$, а $x_k = \text{Volume}(k)$,
- $\Delta t_k = \text{Time}(k+1) - \text{Time}(k)$.

5.2 Результаты регрессий на неагрегированных данных

Как видно из таблицы 3, разные метрики ликвидности довольно сильно коррелированы друг с другом, поэтому мы решили выводить лишь одну из них, чтобы не загромождать таблицу.

Здесь и далее, $\hat{\rho}^*$ — это ρ^* , полученное при другой методологии подсчёта аска: мы называем аском не лучшую цену, а среднюю цену покупки актива на 10 миллионов рублей.

Фактически, прогоняя регрессии по всем данным за день мы предполагаем, что ρ не меняется в течение дня, что, конечно, неверно. Скорее всего, разумнее исследовать ρ в более коротком промежутке, когда можно принять предположение о постоянстве ρ , однако в этом случае перед исследователем может встать проблема нехватки данных для значимой оценки параметра.

В данном случае нет формальных оснований полагать, что полученные числа (таблицы 4–7) имеют какое бы то ни было отношение к модели Обижаевой–Ванга. Особой связи с ликвидностью тоже не прослеживаются. Мы считаем, что это связано с тем, что в данной ситуации ρ^* слишком велико и модель искажается достаточно сильно для того, чтобы экономический смысл коэффициентов изменился. Тем не менее отсюда можно извлечь содержательный вывод: в среднем, модель считает рынок достаточно ликвидным, чтобы

Инструмент	Число сделок	Объем	Объем (рубли)
USD000UTSTOM	34295	$2.94 \cdot 10^9$	$2.15 \cdot 10^{11}$
USD000000TOD	10942	$5.75 \cdot 10^8$	$4.22 \cdot 10^{10}$
EUR_RUB_TOM	4394	$2.21 \cdot 10^8$	$1.96 \cdot 10^{10}$
EUR_RUB_TOD	2729	$1.19 \cdot 10^8$	$1.06 \cdot 10^{10}$
GBPRUB_TOM	220	$3.51 \cdot 10^6$	$3.62 \cdot 10^8$
GBPRUB_TOD	39	$1.54 \cdot 10^6$	$1.58 \cdot 10^8$
SBER	49885	$5.66 \cdot 10^7$	$1.58 \cdot 10^{10}$
GAZP	25711	$2.85 \cdot 10^7$	$6.38 \cdot 10^9$
YNDX	16725	$6.91 \cdot 10^5$	$3.50 \cdot 10^9$
MGNT	12339	$4.30 \cdot 10^5$	$2.18 \cdot 10^9$
LKOH	11777	$7.79 \cdot 10^5$	$4.43 \cdot 10^9$
ROSN	9994	$5.23 \cdot 10^6$	$2.78 \cdot 10^9$
PLZL	9683	$2.06 \cdot 10^5$	$2.99 \cdot 10^9$
NGSP	6367	$1.79 \cdot 10^7$	$7.20 \cdot 10^8$

Таблица 3: Связь между разными метриками ликвидности.

Инструмент	Число сделок	ρ^*	$\hat{\rho}^*$
USD000UTSTOM	34295	29.15 ± 11.63	242.77 ± 48.6
USD000000TOD	10942	602.06 ± 167.92	1122.36 ± 246.63
EUR_RUB_TOM	4394	59.05 ± 68.86	716.39 ± 193.34
EUR_RUB_TOD	2729	49.61 ± 123.36	759.4 ± 255.97
GBPRUB_TOM	220	0.02 ± 0.45	0.28 ± 0.12
GBPRUB_TOD	39	-147.87 ± 59.83	-72.73 ± 22.79

Таблица 4: ρ^* и $\hat{\rho}^*$, вычисленные для разных валютных пар на сырых данных.

Инструмент	Число сделок	ρ^*	$\hat{\rho}^*$
USD000UTSTOM	34295	28.79 ± 12.28	240.86 ± 48.42
USD000000TOD	10942	599.15 ± 165.91	1046.61 ± 239.82
EUR_RUB_TOM	4394	60.99 ± 65.66	668.33 ± 174.84
EUR_RUB_TOD	2729	72.95 ± 85.5	664.34 ± 206.73
GBPRUB_TOM	220	0.04 ± 0.39	0.26 ± 0.1
GBPRUB_TOD	39	-79.47 ± 39.05	-15.54 ± 7.25

Таблица 5: ρ^* и $\hat{\rho}^*$, вычисленные для разных валютных пар на данных с нормированным аском (деленным на матожидание).

оптимальным решением был TWAP. Отметим, что, возможно, развитие идей, высказанных в разделе А, помогло бы установить точную связь между вычисленным в регрессии коэффициентом ρ^* и теоретическим ρ .

5.3 Результаты регрессий на агрегированных данных

Мы обнаружили, что на сырых данных ρ получается очень большим (см. 5), к тому же в разделе 4.2 были описаны эмпирические причины, по которым применение модели Обижаевой–Ванга на микроуровне может быть не целесообразным. Поэтому мы протестировали разные варианты агрегации данных: иными словами, объединяли мелкие ор-

Инструмент	Число сделок	ρ^*	$\hat{\rho}^*$
SBER	49885	97.59 ± 4.65	199.03 ± 18.78
GAZP	25711	103.38 ± 19.25	2771.92 ± 208.66
YNDX	16725	99.75 ± 7.64	2809.52 ± 188.44
MGNT	12339	461.94 ± 65.29	17496.02 ± 789.35
LKOH	11777	497.53 ± 58.96	10904.32 ± 427.26
ROSN	9994	100.62 ± 12.02	1768.38 ± 112.76
PLZL	9683	17.41 ± 18.54	10693.13 ± 612.48
MTLR	6608	5.39 ± 4.15	882.87 ± 106.06
SNGSP	6367	363.34 ± 101.0	1936.82 ± 117.78

Таблица 6: ρ^* и $\hat{\rho}^*$, вычисленные для разных активов на сырых данных.

Инструмент	Число сделок	ρ^*	$\hat{\rho}^*$
SBER	49885	102.86 ± 6.5	197.02 ± 18.11
GAZP	25711	107.01 ± 19.31	2792.09 ± 208.18
YNDX	16725	109.09 ± 15.07	2646.28 ± 184.27
MGNT	12339	471.03 ± 64.08	17862.93 ± 794.49
LKOH	11777	490.07 ± 57.61	10791.39 ± 428.35
ROSN	9994	106.45 ± 16.37	1818.0 ± 112.42
PLZL	9683	19.46 ± 23.41	11013.95 ± 615.74
MTLR	6608	6.33 ± 11.14	829.09 ± 103.04
SNGSP	6367	406.29 ± 104.48	1917.79 ± 109.8

Таблица 7: ρ^* и $\hat{\rho}^*$, вычисленные для разных активов на данных с нормированным аском (деленным на матожидание).

дета в более крупные, "записав" состояние рынка на начало и конец соответствующей секунды.

Инструмент	Число сделок	ρ^*	$\hat{\rho}^*$
SBER	41600	0.7744 ± 0.0063	0.9337 ± 0.0072
GAZP	21500	0.8641 ± 0.0086	0.7051 ± 0.0082
YNDX	14100	0.773 ± 0.0095	0.435 ± 0.0072
MGNT	10900	0.7336 ± 0.0113	0.4186 ± 0.0095
LKOH	9750	0.4757 ± 0.0078	0.433 ± 0.009
ROSN	8640	0.3116 ± 0.0076	0.7418 ± 0.012
PLZL	7120	0.2234 ± 0.0056	0.4871 ± 0.0122
NGSP	6030	0.1842 ± 0.0084	0.3528 ± 0.0099

Таблица 8: ρ^* и $\hat{\rho}^*$, вычисленные для разных акций в агрегированном датасете.

Как видно, для валют абсолютно чётко прослеживается связь между разными метриками ликвидности и B , что даёт основания считать вычисленный коэффициент валидной мерой ликвидности актива. Кроме того, во всех случаях ρ^* довольно мал по модулю, так что можно считать, что $\rho^* = \rho$. Этого достаточно, чтобы практически осуществить оптимальное исполнение в соответствии с моделью Обижаевой–Ванга. Последние две валютных пары существенно выбиваются из общей колеи. Однако в их случае выборки ничтожно малы, так что, вероятно, методика просто напросто "переобучилась".

Инструмент	Число сделок	ρ^*	$\hat{\rho}^*$
SBER	41600	0.7744 ± 0.0063	0.9337 ± 0.0072
GAZP	21500	0.8641 ± 0.0086	0.7051 ± 0.0082
YNDX	14100	0.773 ± 0.0095	0.435 ± 0.0072
MGNT	10900	0.7336 ± 0.0113	0.4186 ± 0.0095
LKOH	9750	0.4757 ± 0.0078	0.433 ± 0.009
ROSN	8640	0.3116 ± 0.0076	0.7418 ± 0.012
PLZL	7120	0.2234 ± 0.0056	0.4871 ± 0.0122
NGSP	6030	0.1842 ± 0.0084	0.3528 ± 0.0099

Таблица 9: ρ^* и $\hat{\rho}^*$, вычисленные для разных акций в агрегированном датасете.

У акций также есть чёткая связь между разными метриками ликвидности и B , что даёт основания считать вычисленный коэффициент валидной мерой ликвидности актива. Кроме того, во всех случаях B довольно мал по модулю, так что можно считать, что $B = \rho$. Этого достаточно, чтобы практически осуществить оптимальное исполнение в соответствии с моделью Обижаевой–Ванга.

Стоит отметить, что эти выводы, при всей привлекательности, не очень робастны по отношению к изменению промежутка агрегации (C). Любопытно, что при с увеличением промежутка уменьшается ρ , что логично: при таком преобразовании, датасет, вообще говоря, становится менее ликвидным.

Данные при таком подходе очень сильно отфильтрованы и нетривиальным является вопрос того, репрезентуют ли они после всех изменений экономику рынка. Результаты на неагрегированных данных оказались совсем другими, так что, вероятнее всего, ответ отрицательный. Однако мы включили эти результаты в основную часть исследования, во-первых, чтобы показать, что бывают случаи, когда $\rho^2 \Delta t$ мало. Во-вторых, здесь мы смогли выжать нетривиальную стратегию оптимального исполнения из данных, не располагающих к этому. Нельзя исключать вероятности того, что она окажется удачной.

6 Доказательства утверждений

Из определения модели имеем три уравнения:

$$A_{t_k} = V_{t_k} + \frac{s}{2} + \sum_{i=0}^{k-1} x_{t_i} \kappa e^{-\rho(t_k - t_i)} \quad (2)$$

$$V_{t_{k+1}} = V_{t_k} + \lambda x_{t_k} \rightarrow V_{t_{k+1}} - V_{t_k} = \lambda x_{t_k} \quad (3)$$

$$D_{t_k} = A_{t_k} - V_{t_k} - \frac{s}{2} \quad (4)$$

Здесь и далее $\Delta t_k := t_{k+1} - t_k$, $\Delta A_k := A_{t_{k+1}} - A_{t_k}$, $\Delta x_k := x_{t_{k+1}} - x_{t_k}$.

Лемма 6. В модели Обижаевой–Ванга:

$$\Delta A_k = D_{t_k} (e^{-\rho \Delta t_k} - 1) + x_{t_k} \kappa e^{-\rho \Delta t_k} + \lambda x_{t_k}.$$

Доказательство. Сперва покажем, что

$$\Delta D_k = D_{t_k} (e^{-\rho \Delta t_k} - 1) + x_{t_k} \kappa e^{-\rho \Delta t_k}. \quad (5)$$

Пользуясь (2) и (4), получаем

$$\begin{aligned} D_{t_k} &= \sum_{i=0}^{k-1} x_{t_i} \kappa e^{-\rho(t_k - t_i)} \\ \Delta D_k &= \sum_{i=0}^k x_{t_i} \kappa e^{-\rho(t_{k+1} - t_i)} - \sum_{i=0}^{k-1} x_{t_i} \kappa e^{-\rho(t_k - t_i)} = \sum_{i=0}^{k-1} x_{t_i} \kappa (e^{-\rho(t_{k+1} - t_i)} - e^{-\rho(t_k - t_i)}) + x_{t_k} \kappa e^{-\rho(t_{k+1} - t_k)} = \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} x_{t_i} \kappa e^{-\rho(t_k - t_i)} (e^{-\rho(t_{k+1} - t_k)} - 1) + x_{t_k} \kappa e^{-\rho(t_{k+1} - t_k)} = D_{t_k} (e^{-\rho \Delta t_k} - 1) + x_{t_k} \kappa e^{-\rho \Delta t_k}. \end{aligned}$$

Теперь покажем, что

$$\Delta A_k = D_{t_k} (e^{-\rho \Delta t_k} - 1) + x_{t_k} \kappa e^{-\rho \Delta t_k} + \lambda x_{t_k}.$$

Из (3) и (4) имеем

$$\Delta D_k = D_{t_{k+1}} - D_{t_k} = A_{t_{k+1}} + V_{t_{k+1}} - A_{t_k} - V_{t_k} = \Delta A_k - \Delta V_k.$$

Отсюда имеем, что

$$\Delta A_k = \Delta D_k + \Delta V_k.$$

Подставив сюда (5), получаем утверждение леммы. \square

Теперь рассмотрим новую модель, в которой:

$$A_{t_k} = \frac{s}{2} + V_{t_k} + D_{t_k},$$

где $V_{t_{k+1}} = V_{t_k} + \hat{\lambda} x_{t_k}$, а $D_{t_{k+1}} = -\hat{\rho} D_{t_k} \Delta t_k + x_{t_k} \hat{\kappa} (1 - \hat{\rho} \Delta t_k)$.

Теорема 7. Гиперпараметры введённой выше модели удовлетворяют регрессионному соотношению

$$\frac{\Delta A_{k+1}}{\Delta t_{k+1}} - \frac{\Delta A_k}{\Delta t_k} = -\hat{\rho} \Delta A_k + \hat{\rho} \hat{\lambda} x_{t_k} - \hat{\rho} \hat{\kappa} \Delta x_k + (\hat{\lambda} + \hat{\kappa}) \left(\frac{x_{t_{k+1}}}{\Delta t_{k+1}} - \frac{x_{t_k}}{\Delta t_k} \right). \quad (6)$$

Доказательство. По определению модели имеем

$$\Delta A_k = -\hat{\rho} D_{t_k} \Delta t_k + x_{t_k} \hat{\kappa} (1 - \hat{\rho} \Delta t_k) + \hat{\lambda} x_{t_k}.$$

Тогда

$$\frac{\Delta A_k}{\Delta t_k} = -\hat{\rho} D_{t_k} + x_{t_k} \hat{\kappa} \left(\frac{1}{\Delta t_k} - \hat{\rho} \right) + \hat{\lambda} \frac{x_{t_k}}{\Delta t_k}.$$

В этом случае, рассматривая разность делённых на время асков, можно исключить из уравнения ненаблюдаемый временной ряд D_{t_k} , пользуясь тем, что $\Delta D_k = \Delta A_k - \Delta V_k$:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta A_{k+1}}{\Delta t_{k+1}} - \frac{\Delta A_k}{\Delta t_k} &= -\hat{\rho} D_{t_{k+1}} + x_{t_{k+1}} \hat{\kappa} \left(\frac{1}{\Delta t_{k+1}} - \hat{\rho} \right) + \hat{\lambda} \frac{x_{t_{k+1}}}{\Delta t_{k+1}} + \hat{\rho} D_{t_k} - x_{t_k} \hat{\kappa} \left(\frac{1}{\Delta t_k} - \hat{\rho} \right) - \hat{\lambda} \frac{x_{t_k}}{\Delta t_k} = \\ &= -\hat{\rho} \Delta D_k + (\hat{\lambda} + \hat{\kappa}) \left(\frac{x_{t_{k+1}}}{\Delta t_{k+1}} - \frac{x_{t_k}}{\Delta t_k} \right) - \hat{\rho} \hat{\kappa} (x_{t_{k+1}} - x_{t_k}) = \\ &= -\hat{\rho} (\Delta A_k - \Delta V_k) + (\hat{\lambda} + \hat{\kappa}) \left(\frac{x_{t_{k+1}}}{\Delta t_{k+1}} - \frac{x_{t_k}}{\Delta t_k} \right) - \hat{\rho} \hat{\kappa} (x_{t_{k+1}} - x_{t_k}) = \\ &= -\hat{\rho} \Delta A_k + \hat{\rho} (\hat{\lambda} + \hat{\kappa}) x_{t_k} - \hat{\rho} \hat{\kappa} x_{t_{k+1}} + (\hat{\lambda} + \hat{\kappa}) \left(\frac{x_{t_{k+1}}}{\Delta t_{k+1}} - \frac{x_{t_k}}{\Delta t_k} \right) \\ &= -\hat{\rho} \Delta A_k + \hat{\rho} \hat{\lambda} x_{t_k} - \hat{\rho} \hat{\kappa} \Delta x_k + (\hat{\lambda} + \hat{\kappa}) \left(\frac{x_{t_{k+1}}}{\Delta t_{k+1}} - \frac{x_{t_k}}{\Delta t_k} \right). \end{aligned}$$

\square

Теорема 8. Если $\rho O(\rho \Delta t) \rightarrow 0$, то $\rho \rightarrow \hat{\rho}$.

Доказательство. Разложим экспоненту в ряд Тейлора:

$$e^{-\rho \Delta t_k} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-\rho \Delta t_k)^i}{i!} = 1 - \rho \Delta t_k + O((\rho \Delta t_k)^2),$$

Тогда, подставив разложение в (6), имеем

$$\frac{\Delta A_k}{\Delta t_k} = -\rho D_{t_k} + x_{t_k} \kappa \left(\frac{1}{\Delta t_k} - \rho \right) + \lambda \frac{x_{t_k}}{\Delta t_k} + \frac{(D_{t_k} + \kappa x_{t_k})}{\Delta t_k} O((\rho \Delta t_k)^2).$$

И, аналогично доказательству предыдущей теоремы:

$$R := (D_{t_k} + \kappa x_{t_k}) \rho O(\rho \Delta t_k) + (D_{t_{k+1}} + \kappa x_{t_{k+1}}) \rho O(\rho \Delta t_{k+1})$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta A_{k+1}}{\Delta t_{k+1}} - \frac{\Delta A_k}{\Delta t_k} &= -\rho \Delta A_k + \rho(\lambda + \kappa)x_{t_k} - \rho \kappa x_{t_{k+1}} + (\lambda + \kappa) \left(\frac{x_{t_{k+1}}}{\Delta t_{k+1}} - \frac{x_{t_k}}{\Delta t_k} \right) + R = \\ &= -\rho \Delta A_k + \rho \lambda x_{t_k} - \rho \kappa \Delta x_k + (\lambda + \kappa) \left(\frac{x_{t_{k+1}}}{\Delta t_{k+1}} - \frac{x_{t_k}}{\Delta t_k} \right) + R \end{aligned}$$

□

Заключение

На наш взгляд, предложенная методика обладает очень важным для индустрии достоинством: она очень проста как теоретически, так и вычислительно. Более того, она настолько проста теоретически, что кажется невозможным, чтобы что-то пошло не так. В первом приближении, она неплохо себя зарекомендовала, результаты оценки параметров согласуются, как минимум, с предположениями модели.

К тому же, в данных было обнаружено несколько примечательных закономерностей. Во-первых, данных очень распространены спайки. Это вполне резонно, поскольку на российском рынке к бирже имеет доступ очень большое количество физических лиц, которые не располагают огромными средствами (по сравнению с институционалами) и нуждаются в проведении небольших сделок.

Во-вторых, создается ощущение, будто бы даже при исполнении большого ордера, институциональный игрок старается не сбивать больше одного ценового уровня, как будто торгуя лимитными ордерами с лимитом, равным аску. В целом, это довольно разумная стратегия, явившаяся следствием разбиения большого ордера на огромное количество маленьких и равномерная торговля.

В-третьих, на русском рынке довольно много активов с чрезвычайно низкой интенсивностью торгов. Их изучение, как будто, стоит производить средствами макроэкономики и теории игр, а не статистики и численных методов.

В-четвертых, похоже, что время между сделками распределено экспоненциально.

В данном случае обычная "виртуальная" методика бэк-тестирования категорически не подходит. Полученные в следствие её результаты не будут иметь никакого смысла, поскольку невозможно учесть одно из ключевых предположений модели Обижаевой–Ванга: большой ордер определенным образом изменяет характер восстановления стакана. Для полноценного тестирования необходим очень хорошо настроенный симулятор рынка. Его создание — это тема для отдельного исследования. К тому же, мы получили, что для всех исследуемых активов оптимальная стратегия на микроуровне — это TWAP.

Список литературы

- [Alm+05] Robert Almgren и др. «Direct estimation of equity market impact». В: *Risk* 18.7 (2005), с. 58—62.
- [Gre05] Robin Greenwood. «Short-and long-term demand curves for stocks: theory and evidence on the dynamics of arbitrage». В: *Journal of Financial Economics* 75.3 (2005), с. 607—649.
- [OW13] Anna A Obizhaeva и Jiang Wang. «Optimal trading strategy and supply/demand dynamics». В: *Journal of Financial markets* 16.1 (2013), с. 1—32.
- [KO18] Albert S Kyle и Anna A Obizhaeva. «The market impact puzzle». В: *Anna A., The Market Impact Puzzle (February 4, 2018)* (2018).
- [Vel20] Raja Velu. *Algorithmic trading and quantitative strategies*. CRC Press, 2020.
- [Web23] Kevin T Webster. *Handbook of Price Impact Modeling*. CRC Press, 2023.

Приложение А Что делать, если ρ получается большим?

Теорема 8 даёт указание к действию, когда $\rho^2 \Delta t$ мал. Но что делать, если это условие систематически нарушается, например, актив настолько ликвиден, что ρ существенно превосходит единицу?

Теорема 9. Если считать, что при большом $\rho \Delta t$ регрессия решает задачу

$$\min_{B \in \mathbb{R}} \max_{x \in [0, t_0]} |e^{-\rho x} - 1 + Bx|,$$

где t_0 некоторое "среднее" время между двумя соседними ордерами, то B и ρ связаны уравнением:

$$2 - \frac{B}{\rho} \left(1 - \ln \frac{B}{\rho} \right) = e^{-\rho t_0} + B t_0.$$

Доказательство. Очевидно, разность под модулем обращается в ноль в двух точках (0 и x_0), если только прямая не является касательной к экспоненте. При этом, функция выпукла в промежутке $[0, x_0]$, а значит имеет там единственную точку экстремума. Из свойств функции ясно, что B является решением задачи в том и только в том случае, когда:

$$-extr\{e^{-\rho x} - 1 + Bx\}_{x \in [0, x_0]} = e^{-\rho t_0} - 1 + B t_0.$$

Легко найти точку экстремума x_* :

$$\left. \frac{d}{dx} \right|_{x=x_*} (e^{-\rho x} - 1 + Bx) = 0 \rightarrow -\rho e^{-\rho x_*} + B = 0 \rightarrow x_* = -\frac{1}{\rho} \ln \frac{B}{\rho}.$$

Отсюда получаем уравнение, связывающее ρ и B :

$$2 - \frac{B}{\rho} \left(1 - \ln \frac{B}{\rho} \right) = e^{-\rho t_0} + B t_0.$$

□

Замечание. Сделаем замены $\rho x = B, t_0 B = y$, тогда уравнение примет вид:

$$2 - x (1 - \ln x) = e^{-\frac{y}{x}} + y.$$

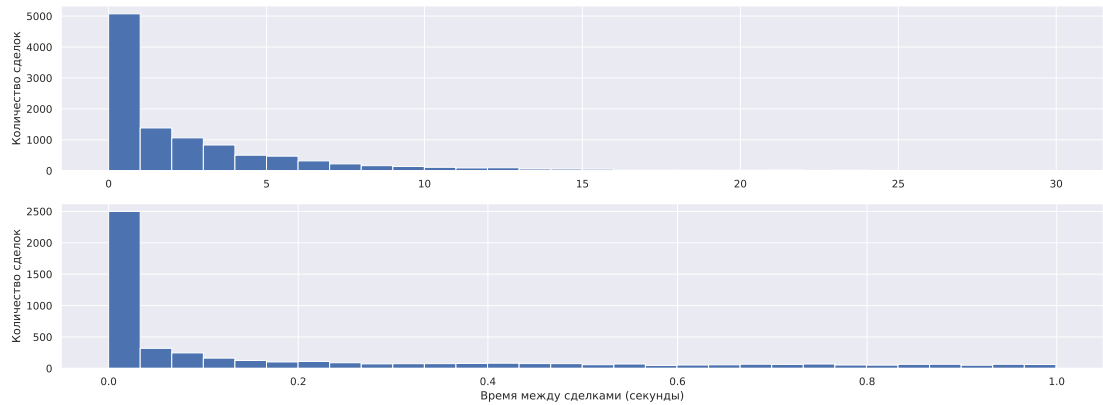


Рис. 5: Распределение времени между сделками для USD000000TOD

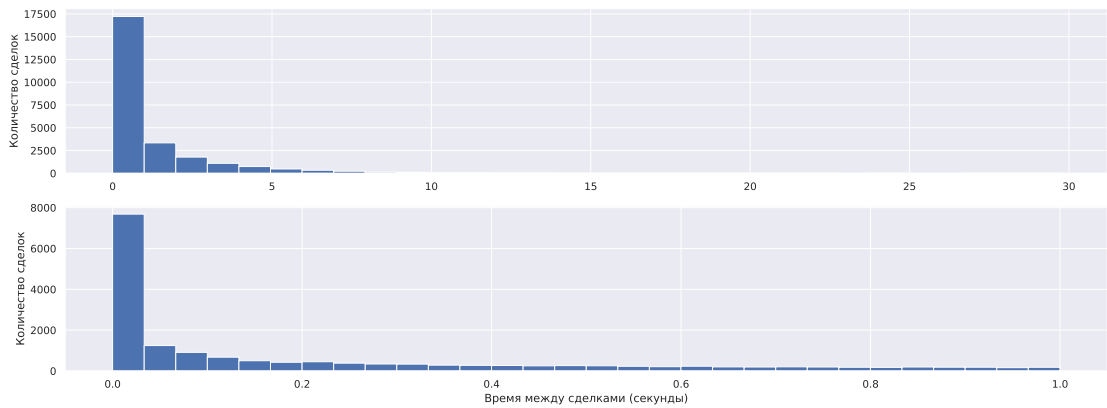


Рис. 6: Распределение времени между сделками для GAZP

После замен $\rho x = B, t_0 \rho = y$ уравнение примет вид:

$$2 - x(1 - \ln x) = e^{-y} + xy.$$

Такие представления уравнений могут быть использованы для исследования связи ρ и B . Например, в случае когда B велико и, как следствие, не выполнено условие теоремы 8, в некоторых случаях благодаря предположениям на y мы можем получить оценку x . Если B/x велико, то можно утверждать, что ρ велико по модулю. В этом случае, стратегия оптимального исполнения вырождается в TWAP.

Приложение В Время между сделками

Здесь, на рисунках 8–20, представлены распределения времён между сделками для всех исследуемых активов.

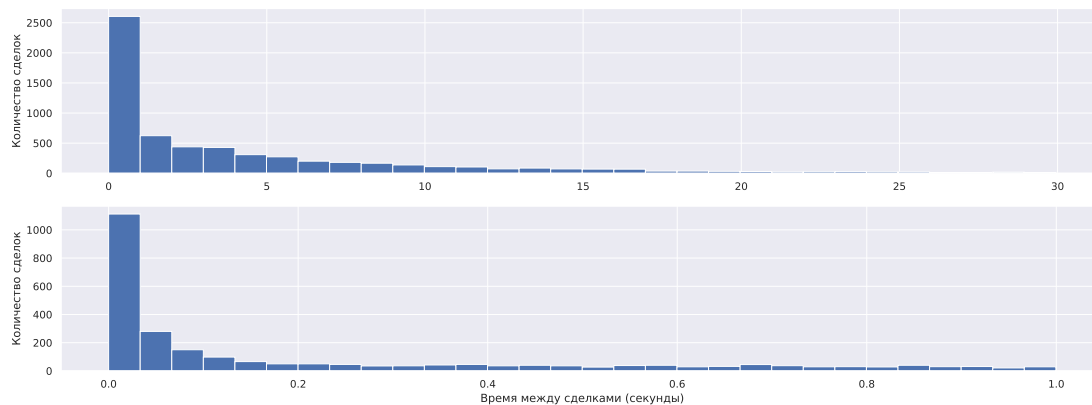


Рис. 7: Распределение времени между сделками для SNGSP

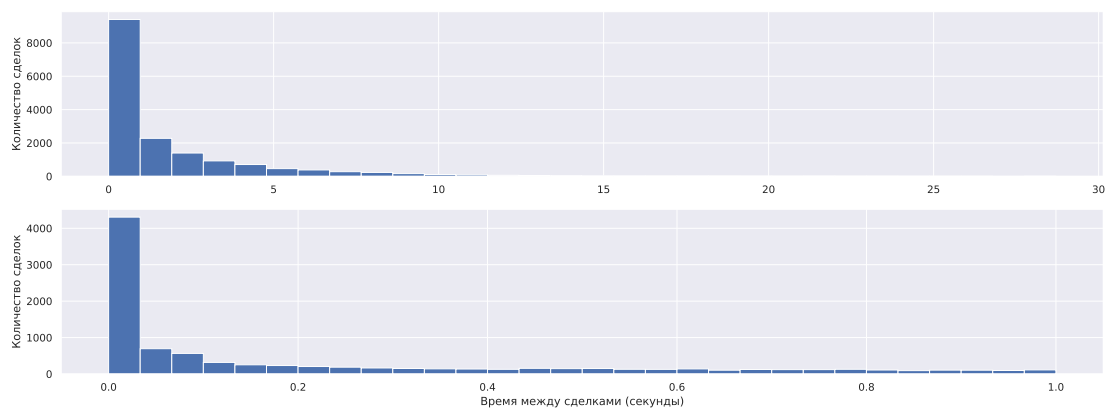


Рис. 8: Распределение времени между сделками для YNDX

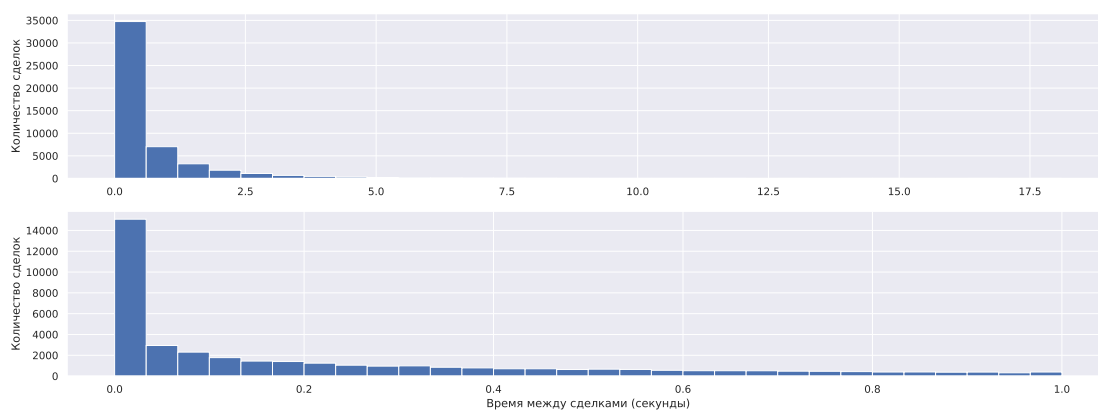


Рис. 9: Распределение времени между сделками для SBER

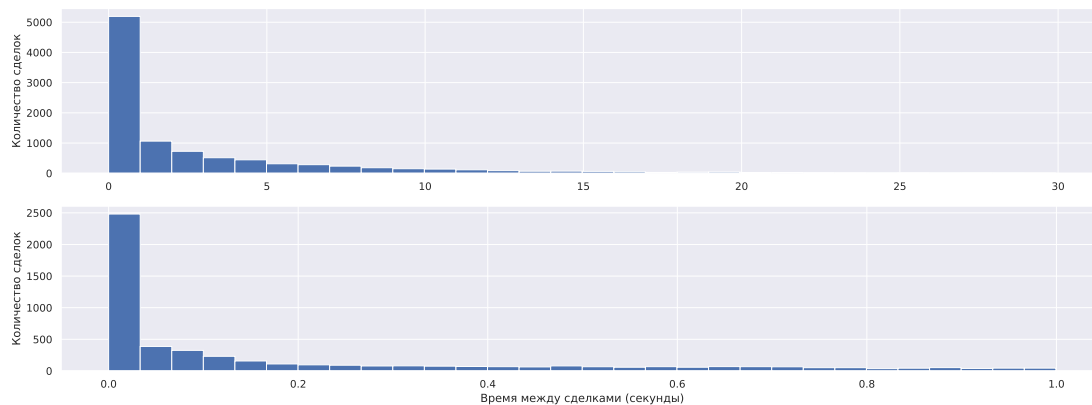


Рис. 10: Распределение времени между сделками для ROSN

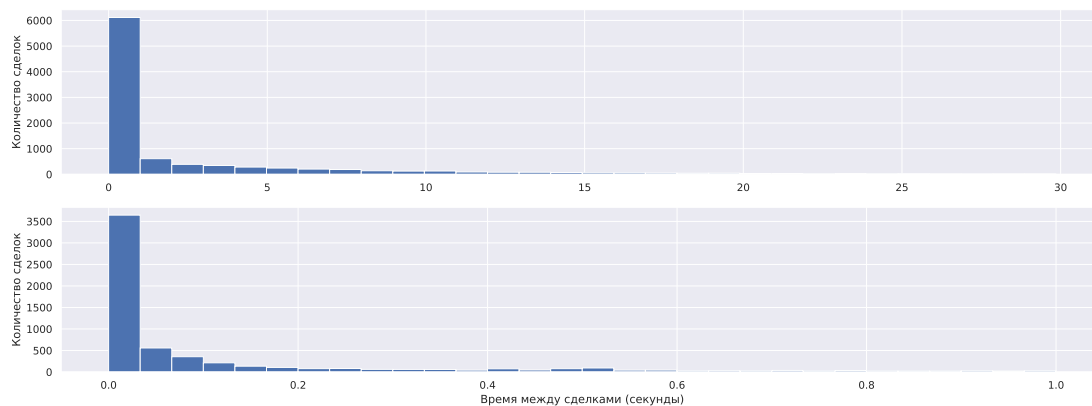


Рис. 11: Распределение времени между сделками для PLZL

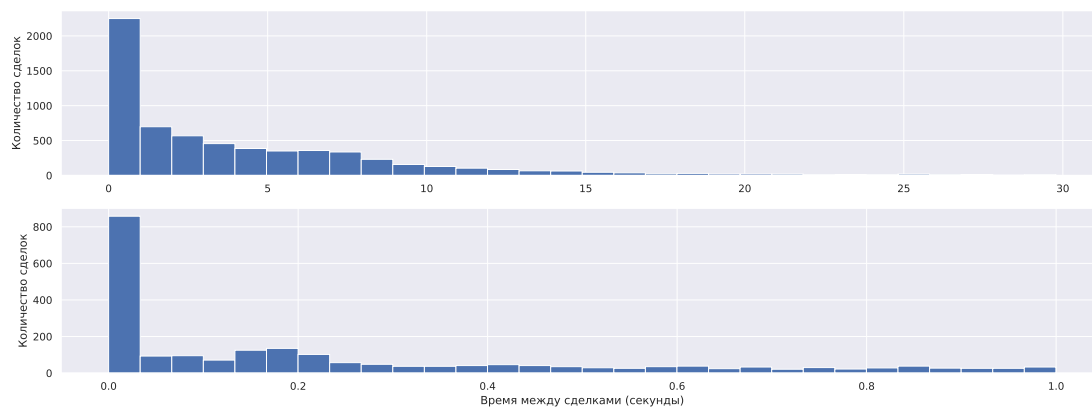


Рис. 12: Распределение времени между сделками для MTLR

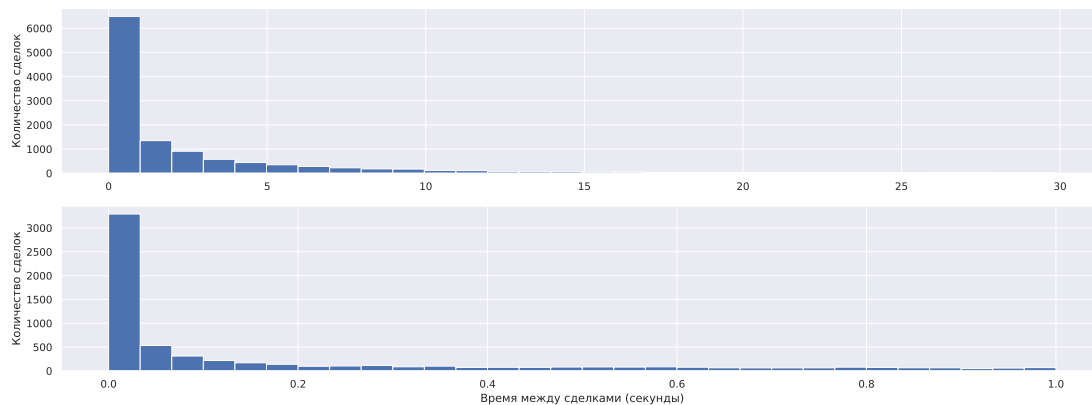


Рис. 13: Распределение времени между сделками для LKOH

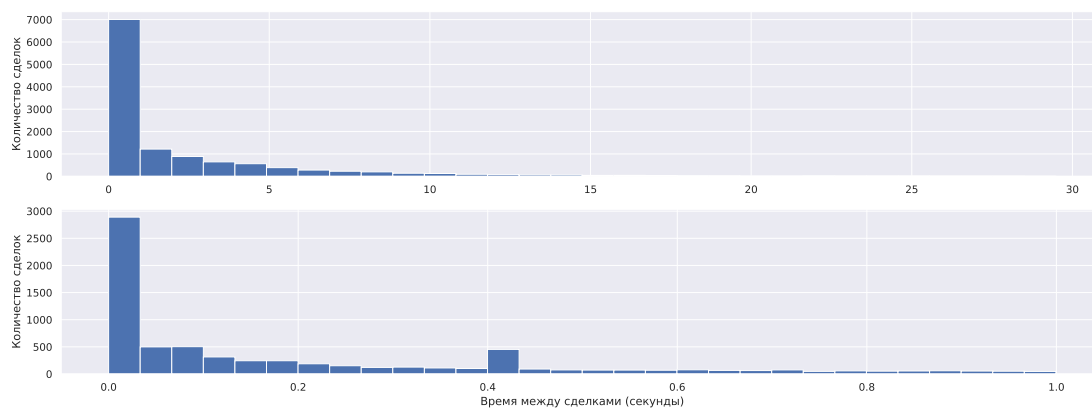


Рис. 14: Распределение времени между сделками для MGNT

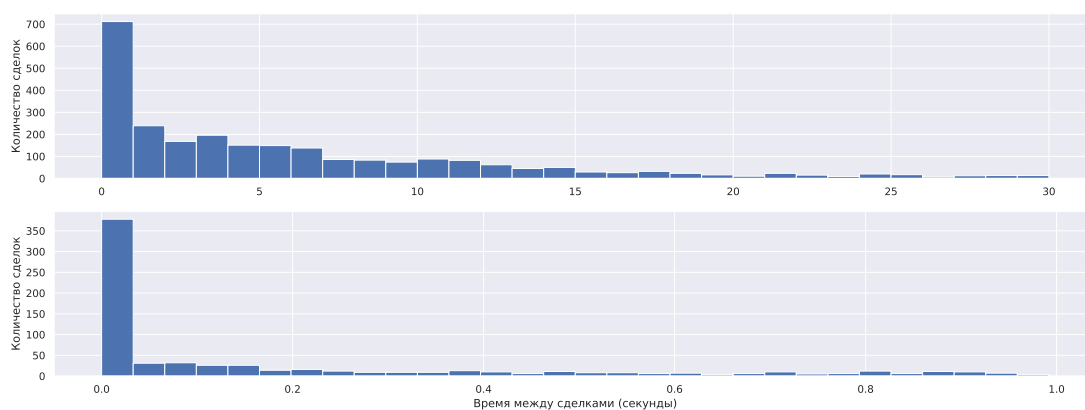


Рис. 15: Распределение времени между сделками для EUR_RUB_TOD

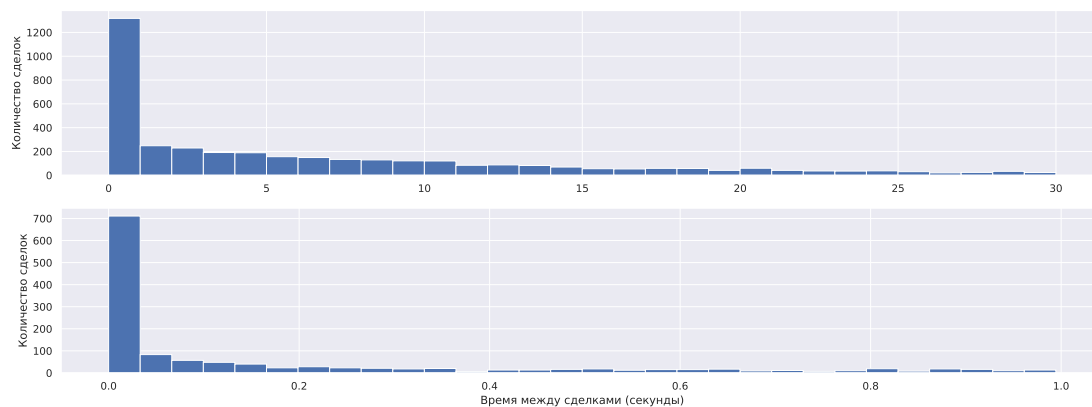


Рис. 16: Распределение времени между сделками для EUR_RUB_TOM

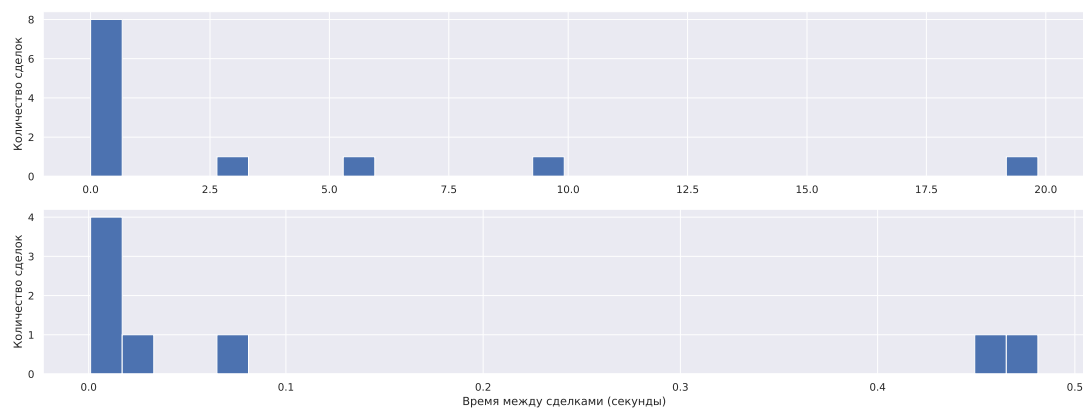


Рис. 17: Распределение времени между сделками для GBPRUB_TOD

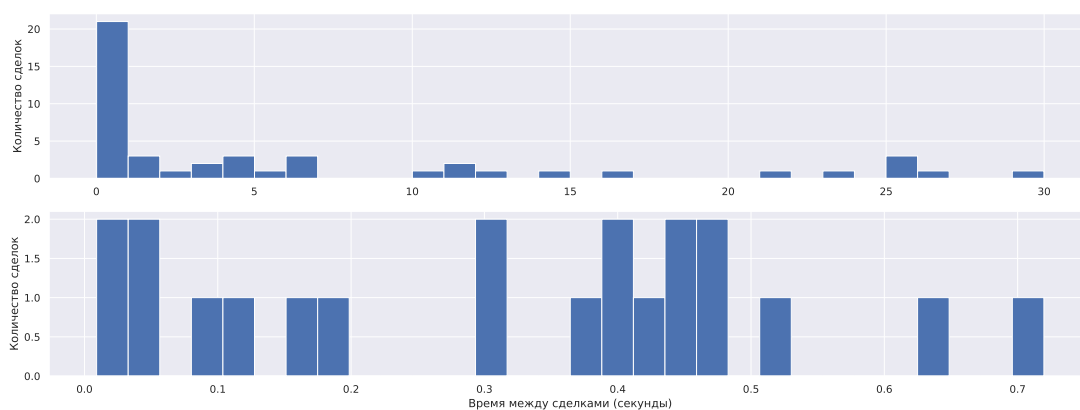


Рис. 18: Распределение времени между сделками для GBPRUB_TOM

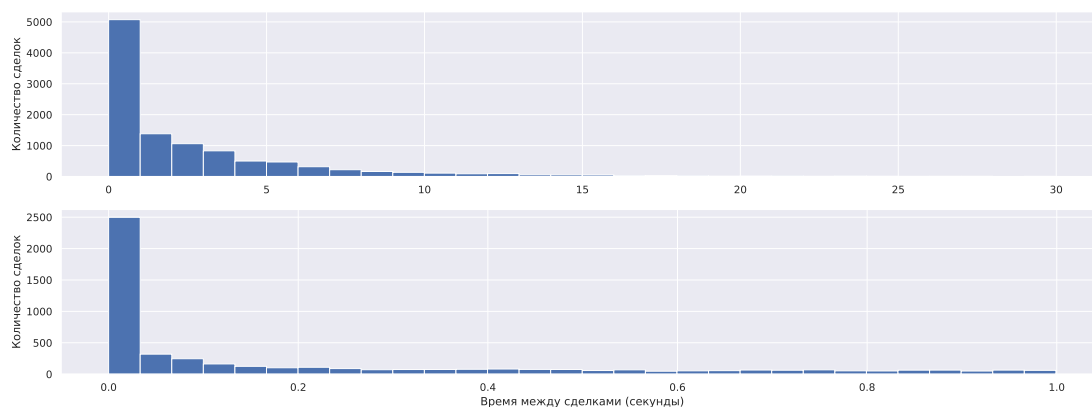


Рис. 19: Распределение времени между сделками для USD000000TOD

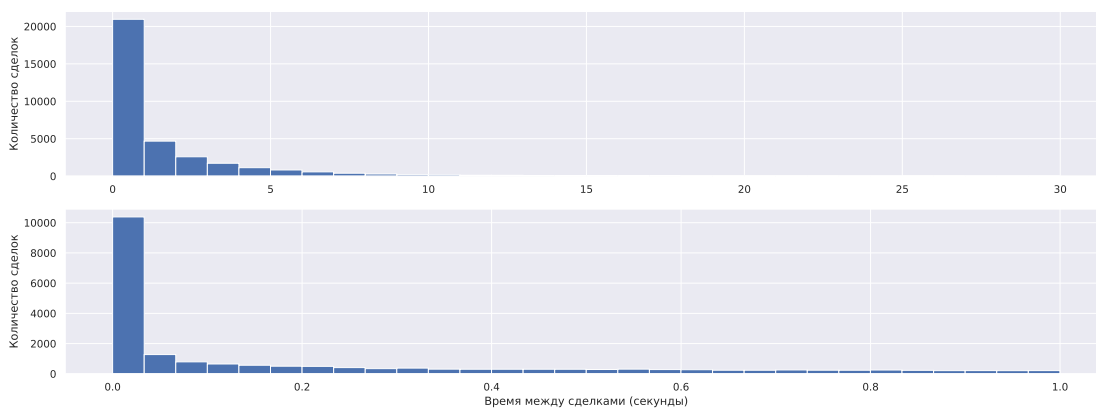


Рис. 20: Распределение времени между сделками для USD0000UTSTOM

Приложение С Разные промежутки агрегации данных

Инструмент	Число сделок	ρ^*	$\hat{\rho}^*$
USD000UTSTOM	32078	10.163 ± 0.907	59.132 ± 4.504
USD000000TOD	10426	66.455 ± 6.97	144.279 ± 13.76
EUR_RUB_TOM	4278	8.731 ± 3.047	73.1 ± 10.54
EUR_RUB_TOD	2680	6.082 ± 5.482	43.073 ± 10.308
GBPRUB_TOM	220	0.023 ± 0.447	0.277 ± 0.12
GBPRUB_TOD	39	-147.873 ± 59.829	-72.733 ± 22.793

Таблица 10: ρ^* и $\hat{\rho}^*$, вычисленные для разных валютных пар в агрегированном датасете (величина промежутка 0.0001).

Инструмент	Число сделок	ρ^*	$\hat{\rho}^*$
USD000UTSTOM	28361	8.044 ± 0.169	19.359 ± 0.717
USD000000TOD	9628	25.878 ± 1.58	44.206 ± 2.357
EUR_RUB_TOM	4022	2.588 ± 0.606	11.265 ± 1.776
EUR_RUB_TOD	2535	1.908 ± 0.993	10.471 ± 2.474
GBPRUB_TOM	220	0.023 ± 0.447	0.277 ± 0.12
GBPRUB_TOD	38	25.288 ± 42.653	-10.039 ± 13.83

Таблица 11: ρ^* и $\hat{\rho}^*$, вычисленные для разных валютных пар в агрегированном датасете (величина промежутка 0.001).

Инструмент	Число сделок	ρ^*	$\hat{\rho}^*$
USD000UTSTOM	25089	7.474 ± 0.107	6.285 ± 0.11
USD000000TOD	8945	1.759 ± 0.194	4.851 ± 0.189
EUR_RUB_TOM	3788	0.622 ± 0.115	3.072 ± 0.329
EUR_RUB_TOD	2422	0.419 ± 0.13	1.056 ± 0.215
GBPRUB_TOM	219	0.21 ± 0.348	0.29 ± 0.109
GBPRUB_TOD	35	0.518 ± 0.301	0.495 ± 0.301

Таблица 12: ρ^* и $\hat{\rho}^*$, вычисленные для разных валютных пар в агрегированном датасете (величина промежутка 0.01).

Инструмент	Число сделок	ρ^*	$\hat{\rho}^*$
USD000UTSTOM	21852	0.792 ± 0.01	0.848 ± 0.015
USD000000TOD	7878	0.477 ± 0.022	1.327 ± 0.039
EUR_RUB_TOM	3542	0.28 ± 0.013	0.183 ± 0.022
EUR_RUB_TOD	2287	0.155 ± 0.014	0.273 ± 0.022
GBPRUB_TOM	215	0.017 ± 0.041	0.284 ± 0.113
GBPRUB_TOD	33	0.062 ± 0.045	0.057 ± 0.045

Таблица 13: ρ^* и $\hat{\rho}^*$, вычисленные для разных валютных пар в агрегированном датасете (величина промежутка 0.1).

Инструмент	Число сделок	ρ^*	$\hat{\rho}^*$
USD000UTSTOM	18889	0.459 ± 0.005	0.496 ± 0.006
USD000000TOD	7218	0.303 ± 0.01	0.64 ± 0.017
EUR_RUB__TOM	3360	0.27 ± 0.011	0.088 ± 0.006
EUR_RUB__TOD	2184	0.2 ± 0.008	0.202 ± 0.008
GBPRUB__TOM	212	0.023 ± 0.04	0.034 ± 0.02
GBPRUB__TOD	33	0.062 ± 0.045	0.057 ± 0.045

Таблица 14: ρ^* и $\hat{\rho}^*$, вычисленные для разных валютных пар в агрегированном датасете (величина промежутка 0.3).

Инструмент	Число сделок	ρ^*	$\hat{\rho}^*$
USD000UTSTOM	15006	0.333 ± 0.004	0.362 ± 0.005
USD000000TOD	6310	0.165 ± 0.004	0.274 ± 0.007
EUR_RUB__TOM	3171	0.263 ± 0.011	0.069 ± 0.003
EUR_RUB__TOD	2075	0.182 ± 0.005	0.191 ± 0.006
GBPRUB__TOM	199	0.011 ± 0.006	0.002 ± 0.001
GBPRUB__TOD	31	0.031 ± 0.016	0.014 ± 0.003

Таблица 15: ρ^* и $\hat{\rho}^*$, вычисленные для разных валютных пар в агрегированном датасете (величина промежутка 0.75).

Инструмент	Число сделок	ρ^*	$\hat{\rho}^*$
USD000UTSTOM	13644	0.279 ± 0.004	0.338 ± 0.005
USD000000TOD	5961	0.15 ± 0.004	0.198 ± 0.005
EUR_RUB__TOM	3092	0.112 ± 0.003	0.068 ± 0.003
EUR_RUB__TOD	2024	0.181 ± 0.005	0.184 ± 0.006
GBPRUB__TOM	199	0.011 ± 0.006	0.002 ± 0.001
GBPRUB__TOD	31	0.031 ± 0.016	0.014 ± 0.003

Таблица 16: ρ^* и $\hat{\rho}^*$, вычисленные для разных валютных пар в агрегированном датасете (величина промежутка 0.95).

Инструмент	Число сделок	ρ^*	$\hat{\rho}^*$
USD000UTSTOM	13012	0.237 ± 0.003	0.333 ± 0.005
USD000000TOD	5791	0.146 ± 0.003	0.189 ± 0.005
EUR_RUB__TOM	3057	0.068 ± 0.002	0.068 ± 0.003
EUR_RUB__TOD	2007	0.181 ± 0.005	0.18 ± 0.005
GBPRUB__TOM	198	0.012 ± 0.006	0.002 ± 0.001
GBPRUB__TOD	31	0.031 ± 0.016	0.014 ± 0.003

Таблица 17: ρ^* и $\hat{\rho}^*$, вычисленные для разных валютных пар в агрегированном датасете (величина промежутка 1.05).

Инструмент	Число сделок	ρ^*	$\hat{\rho}^*$
SBER	48136	96.827 ± 2.701	129.621 ± 3.838
GAZP	24838	35.508 ± 1.533	511.041 ± 11.515
VTBR	18512	50.288 ± 2.303	0.0 ± 0.0
YNDX	16275	99.55 ± 4.399	796.895 ± 18.511
MGNT	12106	39.604 ± 3.709	733.161 ± 16.629
LKOH	11387	361.395 ± 7.811	958.857 ± 20.375
ROSN	9832	85.504 ± 4.384	1034.387 ± 30.448
PLZL	9085	11.017 ± 1.576	872.099 ± 26.397
MTLR	6545	5.313 ± 0.525	790.507 ± 18.7
SNGSP	6323	30.917 ± 5.989	1193.063 ± 18.948

Таблица 18: ρ^* и $\hat{\rho}^*$, вычисленные для разных валютных пар в агрегированном датасете (величина промежутка 0.0001).

Инструмент	Число сделок	ρ^*	$\hat{\rho}^*$
SBER	41657	44.321 ± 0.778	34.797 ± 0.452
GAZP	21568	31.728 ± 0.761	139.413 ± 2.458
VTBR	17099	19.113 ± 0.457	-0.0 ± 0.0
YNDX	14117	25.074 ± 0.795	67.086 ± 1.93
MGNT	10930	19.565 ± 0.932	85.107 ± 3.25
LKOH	9762	307.579 ± 6.53	149.375 ± 3.688
ROSN	8647	65.859 ± 2.59	79.067 ± 3.266
PLZL	7126	11.55 ± 0.586	124.837 ± 4.499
SNGSP	6032	8.84 ± 2.15	103.966 ± 4.349
MTLR	5986	5.226 ± 0.216	33.381 ± 2.399

Таблица 19: ρ^* и $\hat{\rho}^*$, вычисленные для разных валютных пар в агрегированном датасете (величина промежутка 0.001).

Инструмент	Число сделок	ρ^*	$\hat{\rho}^*$
SBER	37218	11.922 ± 0.135	22.191 ± 0.223
GAZP	19211	11.42 ± 0.161	4.986 ± 0.103
VTBR	15994	6.057 ± 0.129	4.136 ± 0.129
YNDX	12979	11.225 ± 0.255	7.883 ± 0.178
MGNT	9743	14.141 ± 0.333	2.767 ± 0.126
LKOH	8829	14.183 ± 0.311	6.804 ± 0.235
ROSN	7801	4.754 ± 0.188	10.097 ± 0.33
PLZL	6255	15.633 ± 0.582	9.545 ± 0.36
MTLR	5799	3.875 ± 0.116	4.157 ± 0.177
SNGSP	5401	0.86 ± 0.146	3.341 ± 0.261

Таблица 20: ρ^* и $\hat{\rho}^*$, вычисленные для разных валютных пар в агрегированном датасете (величина промежутка 0.01).

Инструмент	Число сделок	ρ^*	$\hat{\rho}^*$
SBER	29566	3.263 ± 0.028	1.51 ± 0.015
GAZP	15870	1.744 ± 0.023	1.889 ± 0.028
VTBR	14404	1.864 ± 0.025	1.446 ± 0.027
YNDX	11160	2.389 ± 0.034	1.734 ± 0.03
MGNT	8446	3.233 ± 0.057	0.897 ± 0.032
LKOH	7640	2.204 ± 0.037	0.943 ± 0.028
ROSN	6800	0.928 ± 0.023	1.081 ± 0.03
MTLR	5562	1.216 ± 0.027	0.862 ± 0.029
PLZL	5124	0.917 ± 0.021	1.304 ± 0.048
SNGSP	4825	0.36 ± 0.03	0.717 ± 0.033

Таблица 21: ρ^* и $\hat{\rho}^*$, вычисленные для разных валютных пар в агрегированном датасете (величина промежутка 0.1).

Инструмент	Число сделок	ρ^*	$\hat{\rho}^*$
SBER	21712	1.18 ± 0.011	1.111 ± 0.009
GAZP	13089	1.066 ± 0.015	0.998 ± 0.011
VTBR	12494	1.017 ± 0.013	0.798 ± 0.011
YNDX	9801	0.953 ± 0.012	0.77 ± 0.011
MGNT	7184	0.693 ± 0.013	0.519 ± 0.018
LKOH	6798	0.779 ± 0.016	0.551 ± 0.015
ROSN	6039	0.339 ± 0.01	0.725 ± 0.016
MTLR	5024	0.389 ± 0.006	0.617 ± 0.013
SNGSP	4480	0.229 ± 0.014	0.482 ± 0.016
PLZL	4450	1.279 ± 0.024	0.746 ± 0.023

Таблица 22: ρ^* и $\hat{\rho}^*$, вычисленные для разных валютных пар в агрегированном датасете (величина промежутка 0.3).

Инструмент	Число сделок	ρ^*	$\hat{\rho}^*$
SBER	17066	0.645 ± 0.006	1.05 ± 0.009
GAZP	11407	0.865 ± 0.01	0.876 ± 0.009
VTBR	11196	0.766 ± 0.009	0.676 ± 0.009
YNDX	8943	0.688 ± 0.01	0.533 ± 0.008
LKOH	6308	0.517 ± 0.01	0.348 ± 0.008
MGNT	6226	0.626 ± 0.012	0.501 ± 0.013
ROSN	5605	0.295 ± 0.009	0.612 ± 0.014
MTLR	4786	0.385 ± 0.006	0.567 ± 0.012
SNGSP	4244	0.176 ± 0.01	0.415 ± 0.013
PLZL	4089	1.284 ± 0.025	0.496 ± 0.016

Таблица 23: ρ^* и $\hat{\rho}^*$, вычисленные для разных валютных пар в агрегированном датасете (величина промежутка 0.5).

Инструмент	Число сделок	ρ^*	$\hat{\rho}^*$
SBER	12970	0.587 ± 0.006	1.048 ± 0.011
VTBR	9858	0.642 ± 0.007	0.528 ± 0.006
GAZP	9791	0.557 ± 0.008	0.765 ± 0.009
YNDX	7994	0.578 ± 0.008	0.291 ± 0.005
LKOH	5762	0.372 ± 0.007	0.286 ± 0.007
MGNT	5707	0.486 ± 0.008	0.393 ± 0.009
ROSN	5130	0.213 ± 0.005	0.371 ± 0.008
MTLR	4565	0.382 ± 0.006	0.408 ± 0.009
SNGSP	3981	0.156 ± 0.008	0.32 ± 0.01
PLZL	3772	0.697 ± 0.012	0.333 ± 0.01

Таблица 24: ρ^* и $\hat{\rho}^*$, вычисленные для разных валютных пар в агрегированном датасете (величина промежутка 0.75).

Инструмент	Число сделок	ρ^*	$\hat{\rho}^*$
SBER	11164	0.528 ± 0.006	0.292 ± 0.003
VTBR	9184	0.642 ± 0.008	0.494 ± 0.006
GAZP	8952	0.259 ± 0.004	0.477 ± 0.007
YNDX	7494	0.555 ± 0.008	0.275 ± 0.005
MGNT	5460	0.409 ± 0.007	0.294 ± 0.007
LKOH	5447	0.3 ± 0.005	0.221 ± 0.005
ROSN	4923	0.196 ± 0.005	0.354 ± 0.007
MTLR	4436	0.374 ± 0.006	0.385 ± 0.009
SNGSP	3839	0.15 ± 0.007	0.201 ± 0.006
PLZL	3642	0.696 ± 0.012	0.284 ± 0.009

Таблица 25: ρ^* и $\hat{\rho}^*$, вычисленные для разных валютных пар в агрегированном датасете (величина промежутка 0.9).

Инструмент	Число сделок	ρ^*	$\hat{\rho}^*$
SBER	10636	0.526 ± 0.006	0.291 ± 0.003
VTBR	8985	0.642 ± 0.008	0.487 ± 0.006
GAZP	8681	0.244 ± 0.004	0.452 ± 0.007
YNDX	7348	0.358 ± 0.005	0.274 ± 0.005
MGNT	5381	0.403 ± 0.007	0.27 ± 0.007
LKOH	5373	0.296 ± 0.005	0.216 ± 0.005
ROSN	4856	0.194 ± 0.005	0.352 ± 0.007
MTLR	4399	0.374 ± 0.006	0.364 ± 0.008
SNGSP	3798	0.146 ± 0.007	0.192 ± 0.006
PLZL	3593	0.696 ± 0.013	0.231 ± 0.008

Таблица 26: ρ^* и $\hat{\rho}^*$, вычисленные для разных валютных пар в агрегированном датасете (величина промежутка 0.95).

Инструмент	Число сделок	ρ^*	$\hat{\rho}^*$
SBER	10079	0.466 ± 0.006	0.274 ± 0.003
VTBR	8749	0.642 ± 0.008	0.484 ± 0.006
GAZP	8427	0.242 ± 0.004	0.45 ± 0.007
YNDX	7182	0.356 ± 0.005	0.296 ± 0.005
MGNT	5309	0.402 ± 0.007	0.262 ± 0.006
LKOH	5270	0.294 ± 0.005	0.214 ± 0.005
ROSN	4796	0.188 ± 0.004	0.3 ± 0.007
MTLR	4351	0.374 ± 0.006	0.356 ± 0.008
SNGSP	3758	0.144 ± 0.006	0.187 ± 0.006
PLZL	3556	0.696 ± 0.013	0.21 ± 0.007

Таблица 27: ρ^* и $\hat{\rho}^*$, вычисленные для разных валютных пар в агрегированном датасете (величина промежутка 1.0).

Инструмент	Число сделок	ρ^*	$\hat{\rho}^*$
SBER	9472	0.463 ± 0.006	0.274 ± 0.003
VTBR	8521	0.609 ± 0.008	0.479 ± 0.006
GAZP	8050	0.262 ± 0.004	0.441 ± 0.007
YNDX	6938	0.354 ± 0.005	0.292 ± 0.005
MGNT	5209	0.391 ± 0.007	0.26 ± 0.006
LKOH	5131	0.292 ± 0.005	0.211 ± 0.005
ROSN	4671	0.186 ± 0.004	0.31 ± 0.007
MTLR	4320	0.373 ± 0.006	0.34 ± 0.008
SNGSP	3685	0.137 ± 0.006	0.184 ± 0.005
PLZL	3502	0.695 ± 0.013	0.205 ± 0.007

Таблица 28: ρ^* и $\hat{\rho}^*$, вычисленные для разных валютных пар в агрегированном датасете (величина промежутка 1.05).