



Модель Обижаевой–Ванга

Всеволод Заостровский^{*1}

¹Московский Государственный университет имени М. В. Ломоносова

4 февраля 2024 г.

Аннотация

В нашем исследовании мы предлагаем новую методику оценки параметров в модели Обижаевой–Ванга. Кроме того, мы тестируем её на реальных данных и исследуем особенности торговли Московской биржи.

Ключевые слова: Модель Обижаевой–Ванга, оптимальное исполнение, market impact, resiliency

JEL коды: C81 · G1

MSC (2000) коды: 91G23

Введение

Модель Обижаевой–Ванга - это модель торговли на финансовом рынке, которая широко используется в количественных финансах. Разработанная Анной Обижаевой и Цзян Вангом в 2013 году, модель используется для анализа динамики финансовых рынков и принятия торговых решений. Модель привлекла значительное внимание в финансовой индустрии благодаря своему вниманию к свойству упругости (resiliency) стакана, описывающему важный эмпирический факт: спрос/ предложение финансовых ценных бумаг, как правило, не является идеально эластичным. Упругость — скорость, с которой спрос/предложение восстанавливается до устойчивого состояния после совершения сделки — характеризует начало нового этапа в разработке моделей оптимального исполнения. В нашем исследовании мы разрабатываем практический способ использования этой теории.

Этот факт справедлив даже для ликвидных европейских рынков, если же мы говорим о гораздо менее ликвидных российских рынках, пренебрежение им может привести к катастрофическим последствиям. Основное отличие модели Обижаевой–Ванга от других как раз в том, что в ней ключевую роль играет устойчивость.

Мы исследуем задачу оптимального исполнения. Иными словами, если кто-то хочет продать или купить определенное количество актива достаточно большое, чтобы оказать существенное влияние на рынок, что он должен делать? Чтобы сформулировать задачу на языке математики, нам нужно будет изучить основные принципы биржевой структуры.

1 Основные понятия

Определим несколько понятий, которые понадобятся нам в дальнейшем.

^{*}e-mail: vsevolodzaostrovsky@mail.ru



Рис. 1: Графическое представление лимитной книги заявок

Определение 1. *Бид (bid) — это самая высокая цена, которую покупатель готов заплатить за актив. Далее, бид в момент времени t будет обозначаться B_t . Аск (ask) — это самая низкая цена, за которую продавец готов предоставить актив. Далее, аск в момент времени t будет обозначаться A_t . Бид-аск спрэд (bid-ask spread) s : $s = A_t - B_t$. Мид (mid-quote price): $V_t = \frac{A_t + B_t}{2}$.*

Начнем с рассмотрения структуры лимитной книги заявок (Limit Order Book – LOB). В рамках этой парадигмы организации биржевых торгов, у каждого участника есть две возможности:

- выразить желание купить или продать определённое количество единиц актива по определенной цене. В этом случае, биржа запомнит пару цена–количество. Множество этих пар составляет лимитную книгу заявок. На рисунке 1 изображено традиционное представление лимитной книги заявок.
- выразить желание купить или продать определённое количество единиц актива немедленно. В этом случае он немедленно получит запрошенное количество акций (если на бирже есть необходимое количество) по лучшей возможной цене: к примеру, в случае покупки, если на верхнем ценовом уровне не будет достаточного количества единиц актива для удовлетворения заявки, то будут взяты активы из следующего ценового уровня. Таким образом, не гарантируется, что итоговая цена одной единицы актива будет совпадать с аском.

Таким образом, если опустить некоторые подробности, существует два вида заявок:

Определение 2. *Лимитная заявка (ордер) (limit order) представляет собой распоряжение на покупку или продажу ценной бумаги по определенной цене или выше. Этот тип заявки гарантирует цену исполнения, но не гарантирует само исполнение.*

Определение 3. Рыночная заявка (ордер) (market order) представляет собой распоряжение на немедленную покупку или продажу ценной бумаги. Этот тип заявки гарантирует, что она будет исполнена, но не гарантирует цену исполнения.

Теперь ясно, что если мы хотим продать или купить актив в количестве, достаточно большом, чтобы он мог оказать существенное влияние на рынок, мы не должны делать это одной заявкой: это было бы очень дорого, поскольку крупный ордер удалил бы все верхние уровни в лимитной книге заявок. Поэтому на практике все крупные заявки разбиваются на большое количество мелких. Например, можно просто разделить ордер на N равных частей и продавать их через равные промежутки времени (это называется TWAP). Но есть ли лучшее решение?

2 Подход Обижаевой и Ванга к формализации проблемы

В попытке найти лучшее решение, мы рассматриваем модель Обижаевой–Ванга, в терминах которой задача имеет следующий вид:

$$J_0 = \min_{\{x_0 \dots x_N\}} E_0 \left[\sum_{n=0}^N [A_{t_n} + x_n / (2q)] x_n \right],$$

$$A_{t_n} = F_{t_n} + \lambda(X_0 - X_{t_n}) + s/2 + \sum_{i=0}^{n-1} x_i \kappa e^{-\rho \tau (n-i)},$$

где

- трейдер должен купить X_0 единиц актива за фиксированный период времени $[0, T]$;
- x_{t_n} размер ордера в момент времени $t_n = \tau n$ (здесь, $\tau = T/N$);
- $X_{t_n} := X_0 - \sum_{t_k < t_n} x_{t_k}$;
- B_{t_n} и A_{t_n} — бид и аск в момент времени t_n ;
- $V_{t_n} = \frac{A_{t_n} + B_{t_n}}{2}$ — мид;
- s — бид-аск спрэд;
- F_t — фундаментальная (справедливая) цена актива;
- $q(P)$ распределение лимитной книги заявок P (по ценам $[a, b]$ доступно $\int_a^b q(p) dP$ единиц актива);
- параметр λ — постоянный маркет импакт (справдливая цена V_t в результате исполнения ордера объема x меняется по закону: $V_{t+} = V_t + \lambda x$);
- $\kappa = \frac{1}{q} - \lambda$;
- параметр ρ — упругость стакана (resiliency).

Данная задача была решена в статье [OW13]:

Теорема 1. Решение задачи оптимального исполнения:

$$x_n = -\frac{1}{2} \delta_{n+1} [D_{t_n} (1 - \beta_{n+1} e^{-\rho \tau} + 2\kappa \gamma_{n+1} e^{-2\rho \tau}) - X_{t_n} (\lambda + 2\alpha_{n+1} - \beta_{n+1} \kappa e^{-\rho \tau})],$$

где $x_N = X_N$ и $D_t = A_t - V_t - s/2$. Ожидаемая цена будущих сделок в рамках стратегии оптимального исполнения меняется по закону

$$J_{t_n} = (F_{t_n} + s/2) X_{t_n} + \lambda X_0 X_{t_n} + \alpha_n X_{t_n}^2 + \beta_n D_{t_n} X_{t_n} + \gamma_n D_{t_n}^2,$$

где коэффициенты α_{n+1} , β_{n+1} , γ_{n+1} и δ_{n+1} определяются рекурсивно по формулам:

$$\alpha_n = \alpha_{n+1} - \frac{1}{4}\delta_{n+1}(\lambda + 2\alpha_{n+1} - \beta_{n+1}\kappa e^{-\rho\tau})^2,$$

$$\beta_n = \beta_{n+1}e^{-\rho\tau} + \frac{1}{2}\delta_{n+1}(1 - \beta_{n+1}e^{-\rho\tau} + 2\kappa\gamma_{n+1}e^{-2\rho\tau})(\lambda + 2\alpha_{n+1} - \beta_{n+1}\kappa e^{-\rho\tau}),$$

$$\gamma_n = \gamma_{n+1}e^{-2\rho\tau} - \frac{1}{4}\delta_{n+1}(1 - \beta_{n+1}e^{-\rho\tau} + 2\kappa\gamma_{n+1}e^{-2\rho\tau})^2,$$

где $\delta_{n+1} = [1/(2q) + \alpha_{n+1} - \beta_{n+1}\kappa e^{-\rho\tau} + \gamma_{n+1}\kappa^2 e^{-2\rho\tau}]^{-1}$ и начальные условия

$$\alpha_N = 1/(2q) - \lambda, \quad \beta_N = 1, \quad \gamma_N = 0.$$

В нашем исследовании мы будем рассматривать предел этого решения.

Теорема 2. При $N \rightarrow \infty$, стратегия оптимального исполнения принимает вид:

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} x_0 = x_{t=0} &= \frac{X_0}{\rho T + 2}, \\ \lim_{N \rightarrow \infty} x_n/(T/N) &= \dot{X}_t = \frac{\rho X_0}{\rho T + 2}, \quad t \in (0, T), \\ \lim_{N \rightarrow \infty} x_0 = x_{t=0} &= \lim_{N \rightarrow \infty} x_n/(T/N) = x_{t=T} = \frac{X_0}{\rho T + 2}. \end{aligned}$$

где x_0 первая сделка за отведенный период, x_N — последняя, и \dot{X}_t скорость трейдинга между ними.

Таким образом, мы имеем явную формулу для стратегии оптимального исполнения. Но нам необходимо каким-либо образом найти параметр ρ для того, чтобы применить её на практике.

Другое возможное приложение параметра ρ даёт формула, определяющая динамику аска после исполнения ордера глубины x :

$$A_t = \bar{p}_t + \frac{s}{2} + x\kappa e^{-\rho t}.$$

Поскольку, к примеру, на московской бирже, минимальный шаг цены составляет, в основном, около 0.05% от спотовой цены (см. 2), согласно модели стакан будет полностью восстанавливаться после исполнения "большого" ордера (для которого $x\kappa \approx 0.01 * A_t$) примерно за $t = \frac{10}{\rho}$.

3 Как подобрать ρ ?

Предлагаемая нами методология основана на следующей теореме.

Теорема 3. Для упрощения записей введём обозначения:

$$\Delta t_k := t_k - t_{k-1}, \quad \Delta A_k := A_k - A_{k-1}.$$

В регрессии

$$\frac{\Delta A_{k+1}}{\Delta t_{k+1}} - \frac{\Delta A_k}{\Delta t_k} = -B\Delta A_k + B(\lambda + \kappa)x_{t_k} - B\kappa x_{t_{k+1}} + (\lambda + \kappa)\left(\frac{x_{t_{k+1}}}{\Delta t_{k+1}} - \frac{x_{t_k}}{\Delta t_k}\right),$$

где x_{t_k} и A_{t_k} — глубина ордера и аск в момент времени t_k , соответственно, $\rho = B + O(\rho^2 \Delta t)$.

		Диапазоны ликвидности (среднедневное число сделок)						
Диапазоны цены		0	3	30	150	500	3000	25000
		3	30	150	500	3000	25000	
0	0,002	0,00001	0,000005	0,000002	0,000001	0,000001	0,000001	0,000001
0,002	0,005	0,00002	0,00001	0,000005	0,000002	0,000001	0,000001	0,000001
0,005	0,01	0,00005	0,00002	0,00001	0,000005	0,000002	0,000001	0,000001
0,01	0,02	0,0001	0,00005	0,00002	0,00001	0,000005	0,000002	0,000001
0,02	0,05	0,0002	0,0001	0,00005	0,00002	0,00001	0,000005	0,000002
0,05	0,1	0,0005	0,0002	0,0001	0,00005	0,00002	0,00001	0,000005
0,1	0,2	0,001	0,0005	0,0002	0,0001	0,00005	0,00002	0,00001
0,2	0,5	0,002	0,001	0,0005	0,0002	0,0001	0,00005	0,00002
0,5	1	0,005	0,002	0,001	0,0005	0,0002	0,0001	0,00005
1	2	0,01	0,005	0,002	0,001	0,0005	0,0002	0,0001
2	5	0,02	0,01	0,005	0,002	0,001	0,0005	0,0002
5	10	0,05	0,02	0,01	0,005	0,002	0,001	0,0005
10	20	0,1	0,05	0,02	0,01	0,005	0,002	0,001
20	50	0,2	0,1	0,05	0,02	0,01	0,005	0,002
50	100	0,5	0,2	0,1	0,05	0,02	0,01	0,005
100	200	1	0,5	0,2	0,1	0,05	0,02	0,01
200	500	2	1	0,5	0,2	0,1	0,05	0,02
500	1000	5	2	1	0,5	0,2	0,1	0,05
1000	2000	10	5	2	1	0,5	0,2	0,1
2000	5000	20	10	5	2	1	0,5	0,2
5000	10000	50	20	10	5	2	1	0,5
10000	20000	100	50	20	10	5	2	1
20000	50000	200	100	50	20	10	5	2
50000	100000	500	200	100	50	20	10	5
100000		1000	500	200	100	50	20	10

Рис. 2: Правила определения расчетного шага цены (сайт московской биржи).

Таким образом, мы предлагаем следующий эмпирический путь подбора параметра ρ :

1. Подготавливаем и очищаем данные, проверяем их на соответствие модели Обижаевой–Ванга.
2. Оцениваем по данным регрессию

$$\frac{\Delta A_{k+1}}{\Delta t_{k+1}} - \frac{\Delta A_k}{\Delta t_k} = -B\Delta A_k + B(\lambda + \kappa)x_{t_k} - B\kappa x_{t_{k+1}} + (\lambda + \kappa) \left(\frac{x_{t_{k+1}}}{\Delta t_{k+1}} - \frac{x_{t_k}}{\Delta t_k} \right),$$

где

- ΔA_k изменение аска в следствие исполнения заявки размера x_k в момент времени t_k .
- Δt_k время между k и $k + 1$ заявками.

3. Если $\rho^2 \Delta t$ мало, то считаем, что $B \approx \rho$ и исполняем заявку в соответствии с (2).

Если последнее условие не выполнено, то можно попытаться применить подход, изложенный в приложении В. Однако, если мы решаем практическую задачу оптимального исполнения заявки за, например, 10 минут, то при $\rho > 0.5$ в соответствии с формулой (2) получаем, что, de facto, модель рекомендует продать менее, чем $\approx 0.3\%$ объема ордера за первую и последнюю сделки, а остальное равномерно продавать внутри временного промежутка, что практически мало отличимо от алгоритма TWAP.

Таким образом, мы считаем, что наш подход при всей простоте, полностью описывает алгоритм практической торговли.

	<u>Time</u>	<u>AskBefore</u>	<u>AskAfter</u>	<u>Volume</u>
0	1.0006099849997554	61.782	61.87	40000.0
1	2.0004541379967122	61.84	61.84	48000.0
2	2.0004635579971364	61.84	61.84	48000.0
3	2.000483832001919	61.842	61.842	13000.0
4	2.0004864069996984	61.842	61.847	87000.0
5	2.0004864069996984	61.847	61.847	7000.0
6	2.0005590279979515	61.792	61.845	10000.0
7	2.00059898699692	61.79	61.842	100000.0
8	2.000793077997514	61.835	61.835	11000.0
9	2.0008411289963988	61.815	61.815	11000.0
10	3.0002688890017453	61.822	61.822	1000.0
11	3.000301476000459	61.83	61.83	16000.0
12	3.0003054539993173	61.83	61.83	1000.0

Рис. 3: Данные после первого этапа парсинга

4 Данные

4.1 Источники и предобработка

Мы работали с ордерлогами ([спецификация](#)). Было написано несколько [программ](#), которые, в совокупности, распаршивали исходные записи в таблицу из четвёрок (время, аск до исполнения ордера, аск после исполнения ордера, глубина ордера). Следует обратить внимание на то, что заявки, поглощающие несколько уровней, представляются в данных в виде последовательности заявок, поэтому перед началом обработки их следует объединить: объем ордера есть сумма объемов, аск до исполнения — аск до исполнения первого ордера, аск после исполнения — аск после исполнения последнего ордера. Фрагмент таблицы, на котором представлен фрагмент обработанных данных и схематичное изображение изложенной выше операции, изображен на рисунке 3. Рассматривались данные за 03.03.2021 (середина недели, месяц максимально удаленный от праздников, год, удаленный от начала СВО и начала эпидемии COVID.)

4.2 Выбор инструмента и начальный анализ данных

В целом, известно, что российский рынок характеризуется низким уровнем ликвидности и низкой интенсивностью торгов. Для подбора параметров и статистических исследований нам нужно относительно большое количество данных, по этой причине для очень существенной части активов, торгуемых на московской бирже, исследование в духе нашего было бы невозможно: даже в категориях активов, считающихся ликвидными, встречается

ся немало инструментов¹, по которым совершается порядка нескольких десятков сделок в день (и даже меньше). Поэтому мы решили рассмотреть две категории активов: самые ликвидные валютные пары и несколько наиболее ликвидных акций (мы исключили из рассмотрения акции ВТБ, поскольку их сильное дробление создаёт численные проблемы).

При этом, почти у всех активов подавляющее большинство сделок не поглощает ни одного уровня (те фактическая цена совершения сделки равна аску, см. таблицы 4.3 и 4.3).

Заметим, что при изучении данных мы подтвердили широко известную закономерность: распределение времени между сделками очень похоже для всех активов и напоминает экспоненциальное (см. С).

4.3 Спайки

Данные характеризуются очень большим числом количеством резких и коротких скачков аска. Пересечение множеств сотни самых больших сделок и сотни сделок, сдвинувших аск сильнее всего, пусто. Таким образом, похоже, что ордеров, которые существенно двигают аск за счёт своего размера на рынке мало, то есть цена двигается, в основном, по фундаментальным причинам. На наш взгляд, такая структура данных может послужить основанием для того, чтобы усомниться в валидности модели Обижаевой–Ванга для российских данных, однако и не дает возможности с уверенностью сказать, что модель не применима.

Откуда же берутся эти скачки и что они из себя представляют? В стакане в каждый момент времени поддерживается тонкий баланс, любой маленький ордер, более выгодный, чем лучшая цена, будет почти мгновенно поглощён рынком. Конечно, если возникает необходимость в продаже или покупке небольшого количества актива, этим разумно воспользоваться.

Пример 1. Пусть аск равен 10, а бид — 9. Если мы хотим продать небольшое количество актива, то можно, например, разместить ордер на продажу актива по цене 9.1, тогда пока ордер не будет исполнен, аск станет равным 9.1, однако, скорее всего, лот очень быстро выкупят, поскольку он намного лучше аска и даже мида. Таким образом, мы продадим актив по цене 9.1 вместо 9, расплатившись за это довольно несущественным риском.

Мы проанализировали несколько конкретных спайков в ручную и оказалось, что происходит именно то, что описано в примере. Ясно, что эти скачки, в целом, не характеризуют динамику рискованного актива, поэтому целесообразно исключить их из исследуемого датасета.

Инструмент	Число сделок	Не повлияли на аск
USD000UTSTOM	28361	95%
USD000000TOD	9624	92%
EUR_RUB_TOM	4021	79%
EUR_RUB_TOD	2535	57%
USD000TODTOM	546	55%
EURUSD000TOM	409	93%
GBPRUB_TOM	220	60%
EUR000TODTOM	168	89%

Таблица 1: Анализ сделок по наиболее торгуемым валютным парам (03.03.2021).

¹Даже среди валютных пар большая часть имеет очень низкую интенсивность торгов, например, CHF RUB_TOM, HKD RUB_TOM, JPY RUB_TOM, KZT RUB_TOM.

Инструмент	Число сделок	Не повлияли на аск
SBER	41647	96%
GAZP	21566	86%
VTBR	17100	99%
YNDX	14110	68%
MGNT	10929	64%
LKOH	9759	75%
ROSN	8648	74%
PLZL	7121	56%
SNGSP	6032	60%
MTLR	5985	46%

Таблица 2: Анализ сделок по наиболее торгуемым акциям (03.03.2021).

5 Результаты регрессий

5.1 Регрессионное уравнение на данных

В терминах нашего датасета (см. вид данных на 3), регрессия на B выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} & \frac{\text{AskAfter}(k+1) - \text{AskBefore}(k+1)}{\text{Time}(k+2) - \text{Time}(k+1)} - \frac{\text{AskAfter}(k) - \text{AskBefore}(k)}{\text{Time}(k+1) - \text{Time}(k)} = \\ & = -B(\text{AskAfter}(k) - \text{AskBefore}(k)) + B(\lambda + \kappa)\text{Volume}(k) - B\kappa\text{Volume}(k+1) + \\ & + (\lambda + \kappa) \left(\frac{\text{Volume}(k+1)}{\text{Time}(k+2) - \text{Time}(k+1)} - \frac{\text{Volume}(k)}{\text{Time}(k+1) - \text{Time}(k)} \right). \end{aligned}$$

Фактически, это просто формула (6), где мы полагаем:

- $\Delta A_k = \text{AskAfter}(k) - \text{AskBefore}(k)$, а $x_k = \text{Volume}(k)$,
- $\Delta t_k = \text{Time}(k+1) - \text{Time}(k)$.

5.2 Результаты регрессий на неагрегированных данных

Как видно из таблицы 5.2, разные метрики ликвидности довольно сильно коррелированы друг с другом, поэтому мы решили выводить лишь одну из них, чтобы не загромождать таблицу.

В данном случае нет формальных оснований полагать, что полученные числа (таблицы 5.2–5.2) имеют какое бы то ни было отношение к модели Обижаевой–Ванга. Особой связи с ликвидностью тоже не прослеживаются. Мы считаем, что это связано с тем, что в данной ситуации B слишком велико и модель искажается достаточно сильно для того, чтобы экономический смысл коэффициентов изменился. Тем не менее отсюда можно извлечь содержательный вывод: модель считает рынок достаточно ликвидным, чтобы оптимальным решением был TWAP. Отметим, что, возможно, развитие идей, высказанных в разделе В, помогло бы установить точную связь между вычисленным в регрессии коэффициентом B и теоретическим ρ .

5.3 Результаты регрессий на агрегированных данных

Мы обнаружили, что на сырых данных ρ получается очень большим (см. 5). Поэтому мы тестировали разные варианты агрегации данных: иными словами, объединяли мелкие

Инструмент	Число сделок	Объем	Объем (рубли)
USD000UTSTOM	34295	$2.94 \cdot 10^9$	$2.15 \cdot 10^{11}$
USD000000TOD	10942	$5.75 \cdot 10^8$	$4.22 \cdot 10^{10}$
EUR_RUB_TOM	4394	$2.21 \cdot 10^8$	$1.96 \cdot 10^{10}$
EUR_RUB_TOD	2729	$1.19 \cdot 10^8$	$1.06 \cdot 10^{10}$
GBPRUB_TOM	220	$3.51 \cdot 10^6$	$3.62 \cdot 10^8$
GBPRUB_TOD	39	$1.54 \cdot 10^6$	$1.58 \cdot 10^8$
SBER	49885	$5.66 \cdot 10^7$	$1.58 \cdot 10^{10}$
GAZP	25711	$2.85 \cdot 10^7$	$6.38 \cdot 10^9$
YNDX	16725	$6.91 \cdot 10^5$	$3.50 \cdot 10^9$
MGNT	12339	$4.30 \cdot 10^5$	$2.18 \cdot 10^9$
LKOH	11777	$7.79 \cdot 10^5$	$4.43 \cdot 10^9$
ROSN	9994	$5.23 \cdot 10^6$	$2.78 \cdot 10^9$
PLZL	9683	$2.06 \cdot 10^5$	$2.99 \cdot 10^9$
NGSP	6367	$1.79 \cdot 10^7$	$7.20 \cdot 10^8$

Таблица 3: Связь между разными метриками ликвидности.

Инструмент	Число сделок	B	B^*
USD000UTSTOM	34295	29.15 ± 11.63	242.77 ± 48.6
USD000000TOD	10942	602.06 ± 167.92	1122.36 ± 246.63
EUR_RUB_TOM	4394	59.05 ± 68.86	716.39 ± 193.34
EUR_RUB_TOD	2729	49.61 ± 123.36	759.4 ± 255.97
GBPRUB_TOM	220	0.02 ± 0.45	0.28 ± 0.12
GBPRUB_TOD	39	-147.87 ± 59.83	-72.73 ± 22.79

Таблица 4: B и B^* , вычисленные для разных валютных пар на сырых данных.

Инструмент	Число сделок	B	B^*
USD000UTSTOM	34295	28.79 ± 12.28	240.86 ± 48.42
USD000000TOD	10942	599.15 ± 165.91	1046.61 ± 239.82
EUR_RUB_TOM	4394	60.99 ± 65.66	668.33 ± 174.84
EUR_RUB_TOD	2729	72.95 ± 85.5	664.34 ± 206.73
GBPRUB_TOM	220	0.04 ± 0.39	0.26 ± 0.1
GBPRUB_TOD	39	-79.47 ± 39.05	-15.54 ± 7.25

Таблица 5: B и B^* , вычисленные для разных валютных пар на данных с нормированным аском (деленным на матожидание).

ордера в более крупные в попытках сформировать ситуацию, более близкую к предположениям модели Обижаевой–Ванга. Следующие результаты были получены на датасете, в котором мы записывали аск в начале и в конце скунды, а за объем ордера считали общий объем сделок за секунду.

Для B^* всё аналогично, но меняется методология расчёта аска. Теперь это не лучшая цена покупки одной единицы актива, а лучшая цена покупки миллиона единиц актива.

Как видно, для валют абсолютно чётко прослеживается связь между разными метриками ликвидности и B , что даёт основания считать вычисленный коэффициент валидной мерой ликвидности актива. Кроме того, во всех случаях B довольно мал по модулю, так что можно считать, что $B = \rho$. Этого достаточно, чтобы практически осуществить опти-

Инструмент	Число сделок	B	B^*
SBER	49885	97.59 ± 4.65	199.03 ± 18.78
GAZP	25711	103.38 ± 19.25	2771.92 ± 208.66
YNDX	16725	99.75 ± 7.64	2809.52 ± 188.44
MGNT	12339	461.94 ± 65.29	17496.02 ± 789.35
LKOH	11777	497.53 ± 58.96	10904.32 ± 427.26
ROSN	9994	100.62 ± 12.02	1768.38 ± 112.76
PLZL	9683	17.41 ± 18.54	10693.13 ± 612.48
MTLR	6608	5.39 ± 4.15	882.87 ± 106.06
SNGSP	6367	363.34 ± 101.0	1936.82 ± 117.78

Таблица 6: B и B^* , вычисленные для разных активов на сырых данных.

Инструмент	Число сделок	B	B^*
SBER	49885	102.86 ± 6.5	197.02 ± 18.11
GAZP	25711	107.01 ± 19.31	2792.09 ± 208.18
YNDX	16725	109.09 ± 15.07	2646.28 ± 184.27
MGNT	12339	471.03 ± 64.08	17862.93 ± 794.49
LKOH	11777	490.07 ± 57.61	10791.39 ± 428.35
ROSN	9994	106.45 ± 16.37	1818.0 ± 112.42
PLZL	9683	19.46 ± 23.41	11013.95 ± 615.74
MTLR	6608	6.33 ± 11.14	829.09 ± 103.04
SNGSP	6367	406.29 ± 104.48	1917.79 ± 109.8

Таблица 7: B и B^* , вычисленные для разных активов на данных с нормированным аском (деленным на матожидание).

Инструмент	Число сделок	B	B^*
SBER	41600	0.7744 ± 0.0063	0.9337 ± 0.0072
GAZP	21500	0.8641 ± 0.0086	0.7051 ± 0.0082
YNDX	14100	0.773 ± 0.0095	0.435 ± 0.0072
MGNT	10900	0.7336 ± 0.0113	0.4186 ± 0.0095
LKOH	9750	0.4757 ± 0.0078	0.433 ± 0.009
ROSN	8640	0.3116 ± 0.0076	0.7418 ± 0.012
PLZL	7120	0.2234 ± 0.0056	0.4871 ± 0.0122
NGSP	6030	0.1842 ± 0.0084	0.3528 ± 0.0099

Таблица 8: B и B^* , вычисленные для разных акций в агрегированном датасете.

мальное исполнение в соответствии с моделью Обижаевой–Ванга. Последние две валютных пары существенно выбиваются из общей колеи. Однако в их случае выборки ничтожно малы, так что, вероятно, методика просто напросто "переобучилась".

У акций также есть чёткая связь между разными метриками ликвидности и B , что даёт основания считать вычисленный коэффициент валидной мерой ликвидности актива. Кроме того, во всех случаях B довольно мал по модулю, так что можно считать, что $B = \rho$. Этого достаточно, чтобы практически осуществить оптимальное исполнение в соответствии с моделью Обижаевой–Ванга.

Стоит отметить, что эти выводы, при всей привлекательности, не робастны по отношению к изменению промежутка агрегации.

Инструмент	Число сделок	B	B^*
SBER	41600	0.7744 ± 0.0063	0.9337 ± 0.0072
GAZP	21500	0.8641 ± 0.0086	0.7051 ± 0.0082
YNDX	14100	0.773 ± 0.0095	0.435 ± 0.0072
MGNT	10900	0.7336 ± 0.0113	0.4186 ± 0.0095
LKOH	9750	0.4757 ± 0.0078	0.433 ± 0.009
ROSN	8640	0.3116 ± 0.0076	0.7418 ± 0.012
PLZL	7120	0.2234 ± 0.0056	0.4871 ± 0.0122
NGSP	6030	0.1842 ± 0.0084	0.3528 ± 0.0099

Таблица 9: B и B^* , вычисленные для разных акций в агрегированном датасете.

Данные при таком подходе очень сильно отфильтрованы и нетривиальным является вопрос того, репрезентуют ли они после всех изменений экономику рынка. Результаты на неагрегированных данных оказались совсем другими, так что, вероятнее всего, ответ отрицательный.

Заключение

На наш взгляд, предложенная методика обладает очень важным для индустрии достоинством: она очень проста как теоретически, так и вычислительно. Более того, она настолько проста теоретически, что кажется невозможным, чтобы что-то пошло не так.

В первом приближении, она очень неплохо себя зарекомендовала, результаты оценки параметров согласуются как с метриками ликвидности, так и с экономической интуицией. Порядок параметров согласуется с теоретическими предположениями Обижаевой и Ванга.

К тому же, в данных было обнаружено несколько примечательных закономерностей. Во-первых, данных очень распространены спайки. Это вполне резонно, поскольку на российском рынке к бирже имеет доступ очень большое количество физических лиц, которые не располагают огромными средствами (по сравнению с институционалами) и нуждаются в проведении небольших сделок.

Во-вторых, создается ощущение, будто бы даже при исполнении большого ордера, институциональный игрок старается не сбивать больше одного ценового уровня, как будто торгуя лимитными ордерами с лимитом, равным аску.

В-третьих, на русском рынке довольно много активов с чрезвычайно низкой интенсивностью торгов. Их изучение, как будто, стоит производить средствами макроэкономики и теории игр, а не статистики и численных методов.

В-четвертых, похоже, что время между сделками распределено экспоненциально.

В данном случае обычная "виртуальная" методика бэк-тестирования категорически не подходит. Полученные в следствие её результаты не будут иметь никакого смысла, поскольку невозможно учесть одно из ключевых предположений модели Обижаевой–Ванга: большой ордер определенным образом изменяет характер восстановления стакана. Для полноценного тестирования необходим очень хорошо настроенный симулятор рынка. Его создание — это тема для отдельного исследования.

Список литературы

- [Alm+05] Robert Almgren и др. «Direct estimation of equity market impact». В: *Risk* 18.7 (2005), с. 58—62.

- [Gre05] Robin Greenwood. «Short-and long-term demand curves for stocks: theory and evidence on the dynamics of arbitrage». В: *Journal of Financial Economics* 75.3 (2005), с. 607–649.
- [OW13] Anna A Obizhaeva и Jiang Wang. «Optimal trading strategy and supply/demand dynamics». В: *Journal of Financial markets* 16.1 (2013), с. 1–32.
- [KO18] Albert S Kyle и Anna A Obizhaeva. «The market impact puzzle». В: *Anna A., The Market Impact Puzzle (February 4, 2018)* (2018).
- [Vel20] Raja Velu. *Algorithmic trading and quantitative strategies*. CRC Press, 2020.
- [Web23] Kevin T Webster. *Handbook of Price Impact Modeling*. CRC Press, 2023.

Приложение А Обоснование метода

Из определения модели имеем три уравнения:

$$A_{t_k} = V_{t_k} + \frac{s}{2} + \sum_{i=0}^{k-1} x_{t_i} \kappa e^{-\rho(t_k - t_i)} \quad (1)$$

$$V_{t_{k+1}} = V_{t_k} + \lambda x_{t_k} \rightarrow V_{t_{k+1}} - V_{t_k} = \lambda x_{t_k} \quad (2)$$

$$D_{t_k} = A_{t_k} - V_{t_k} - \frac{s}{2} \quad (3)$$

Следующее замечание является основополагающим в нашей методологии подбора параметра ρ . Здесь и далее $\Delta t_{k+1} := t_{k+1} - t_k$, $\Delta A_{k+1} := A_{k+1} - A_k$.

Лемма 4. В модели Обижаевой–Ванга:

$$\Delta A_k = D_{t_k} (e^{-\rho \Delta t_k} - 1) + x_{t_k} \kappa e^{-\rho \Delta t_k} + \lambda x_{t_k}.$$

Доказательство. Сперва покажем, что

$$\Delta D_k = D_{t_k} (e^{-\rho \Delta t_k} - 1) + x_{t_k} \kappa e^{-\rho \Delta t_k}.$$

Пользуясь (1) и (3), получаем

$$\begin{aligned} D_{t_k} &= \sum_{i=0}^{k-1} x_{t_i} \kappa e^{-\rho(t_k - t_i)} \\ \Delta D_k &= \sum_{i=0}^k x_{t_i} \kappa e^{-\rho(t_{k+1} - t_i)} - \sum_{i=0}^{k-1} x_{t_i} \kappa e^{-\rho(t_k - t_i)} = \sum_{i=0}^{k-1} x_{t_i} \kappa (e^{-\rho(t_{k+1} - t_i)} - e^{-\rho(t_k - t_i)}) + x_{t_k} \kappa e^{-\rho(t_{k+1} - t_k)} = \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} x_{t_i} \kappa e^{-\rho(t_k - t_i)} (e^{-\rho(t_{k+1} - t_k)} - 1) + x_{t_k} \kappa e^{-\rho(t_{k+1} - t_k)} = D_{t_k} (e^{-\rho \Delta t_k} - 1) + x_{t_k} \kappa e^{-\rho \Delta t_k}. \end{aligned}$$

Теперь покажем, что

$$\Delta A_k = D_{t_k} (e^{-\rho \Delta t_k} - 1) + x_{t_k} \kappa e^{-\rho \Delta t_k} + \lambda x_{t_k}.$$

Из (2) и (3) имеем

$$\Delta D_k = D_{t_{k+1}} - D_{t_k} = A_{t_{k+1}} + V_{t_{k+1}} - A_{t_k} - V_{t_k} = \Delta A_k - \Delta V_k.$$

Отсюда имеем, что

$$\Delta A_k = \Delta D_k + \Delta V_k.$$

Подставив сюда (5), получаем утверждение леммы. \square

Мы считаем, что при всей своей простоте оно очень ценно, поскольку даёт путь к выводу регрессионного уравнения.

Теорема 5. Интерполируя экспоненту в выражении

$$\Delta D_k = D_{t_k}(e^{-\rho \Delta t_k} - 1) + x_{t_k} \kappa e^{-\rho \Delta t_k}.$$

функцией вида $e^{-\rho \Delta t_k} = 1 - B\rho \Delta t_k + E(\rho \Delta t_k)$, где $E(\rho \Delta t_k)$ — ошибка интерполяции, можно получить регрессионное уравнение вида:

$$\frac{\Delta A_{k+1}}{\Delta t_{k+1}} - \frac{\Delta A_k}{\Delta t_k} = -B\Delta A_k + B(\lambda + \kappa)x_{t_k} - B\kappa x_{t_{k+1}} + (\lambda + \kappa) \left(\frac{x_{t_{k+1}}}{\Delta t_{k+1}} - \frac{x_{t_k}}{\Delta t_k} \right) + E(\rho \Delta t_{k+1}) - E(\rho \Delta t_k).$$

Доказательство. Пусть $f(\rho \Delta t_k)$ — некоторая функция, приближающая экспоненту с ошибкой $(\rho \Delta t_k)$. Тогда, подставив эту функцию в уравнение (4), получаем

$$\frac{\Delta A_k}{\Delta t_k} = D_{t_k} \left(\frac{f(\rho \Delta t_k) - 1}{\Delta t_k} \right) + x_{t_k} \kappa \frac{f(\rho \Delta t_k)}{\Delta t_k} + \lambda \frac{x_{t_k}}{\Delta t_k}.$$

Потребуем, чтобы при рассмотрении разности $\frac{\Delta A_{k+1}}{\Delta t_{k+1}} - \frac{\Delta A_k}{\Delta t_k}$ выполнялось условие $\frac{f(\rho \Delta t_{k+1}) - 1}{\Delta t_{k+1}} = \frac{f(\rho \Delta t_k) - 1}{\Delta t_k}$. В этом случае, рассматривая разность делённых на время асков, можно исключить из уравнения ненаблюдаемый временной ряд D_{t_k} :

$$\begin{aligned} R &:= (x_{t_{k+1}} \kappa + D_{t_{k+1}}) \frac{E(\rho \Delta t_{k+1})}{\Delta t_{k+1}} - (x_{t_k} \kappa + D_{t_k}) \frac{E(\rho \Delta t_k)}{\Delta t_k} \\ \frac{\Delta A_{k+1}}{\Delta t_{k+1}} - \frac{\Delta A_k}{\Delta t_k} &= -BD_{t_{k+1}} + x_{t_{k+1}} \kappa \left(\frac{1}{\Delta t_{k+1}} - \rho \right) + \lambda \frac{x_{t_{k+1}}}{\Delta t_{k+1}} + BD_{t_k} - x_{t_k} \kappa \left(\frac{1}{\Delta t_k} - \rho \right) - \lambda \frac{x_{t_k}}{\Delta t_k} + R = \\ &= -B(\Delta A_k - \Delta V_k) + (\lambda + \kappa) \left(\frac{x_{t_{k+1}}}{\Delta t_{k+1}} - \frac{x_{t_k}}{\Delta t_k} \right) - B\kappa(x_{t_{k+1}} - x_{t_k}) + R = \\ &= -B\Delta A_k + B(\lambda + \kappa)x_{t_k} - B\kappa x_{t_{k+1}} + (\lambda + \kappa) \left(\frac{x_{t_{k+1}}}{\Delta t_{k+1}} - \frac{x_{t_k}}{\Delta t_k} \right) + R. \end{aligned}$$

□

Помимо всего прочего, в доказательстве показано, что такой подход к выводу регрессионного уравнения не работает ни для какого более широкого класса непрерывных или монотонных функций, чем двучлены вида $1 - B\rho \Delta t_k$, поскольку единственной непрерывной или монотонной функцией одной переменной, обладающей свойством однородности первой степени, необходимым для осуществления рассуждения выше, является функция $g(\rho \Delta t_k) = f(\rho \Delta t_k) - 1 = -B\rho \Delta t_k$.

Впрочем, это не исключает возможности того, что существует иной путь вывода регрессионного уравнения, позволяющий рассмотреть более точную интерполяцию. Это интересный вопрос для отдельного исследования.

Теорема 6. В регрессии

$$\frac{\Delta A_{k+1}}{\Delta t_{k+1}} - \frac{\Delta A_k}{\Delta t_k} = -B\Delta A_k + B(\lambda + \kappa)x_{t_k} - B\kappa x_{t_{k+1}} + (\lambda + \kappa) \left(\frac{x_{t_{k+1}}}{\Delta t_{k+1}} - \frac{x_{t_k}}{\Delta t_k} \right),$$

где x_k и A_k — глубина ордера и аск в момент времени t_k , соответственно, $\rho = B + O(\rho^2 \Delta t)$.

Доказательство. Разложим экспоненту в ряд Тейлора:

$$e^{-\rho \Delta t_k} = 1 - \rho \Delta t_k + (\rho \Delta t_k)^2 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\rho \Delta t_k)^i}{(i+2)!},$$

тогда из 5, получим:

$$R := (x_{t_{k+1}}\kappa + D_{t_{k+1}})\rho^2\Delta t_{k+1} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\rho\Delta t_{k+1})^i}{(i+2)!} - (x_{t_k}\kappa + D_{t_k})\rho^2\Delta t_k \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\rho\Delta t_k)^i}{(i+2)!}$$

$$\frac{\Delta A_{k+1}}{\Delta t_{k+1}} - \frac{\Delta A_k}{\Delta t_k} = -\rho\Delta A_k + \rho(\lambda + \kappa)x_{t_k} - \rho\kappa x_{t_{k+1}} + (\lambda + \kappa) \left(\frac{x_{t_{k+1}}}{\Delta t_{k+1}} - \frac{x_{t_k}}{\Delta t_k} \right) + R.$$

□

Приложение В Что делать, если ρ получается большим?

Теорема 6 даёт указание к действию, когда $\rho^2\Delta t$ мал. Но что делать, если это условие систематически нарушается, например, актив настолько ликвиден, что ρ существенно превосходит единицу?

Теорема 7. Если считать, что при большом $\rho\Delta t$ регрессия решает задачу

$$\min_{B \in \mathbb{R}} \max_{x \in [0, t_0]} |e^{-\rho x} - 1 + Bx|,$$

где t_0 некоторое "среднее" время между двумя соседними ордерами, то B и ρ связаны уравнением:

$$2 - \frac{B}{\rho} \left(1 - \ln \frac{B}{\rho} \right) = e^{-\rho t_0} + Bt_0.$$

Доказательство. Очевидно, разность под модулем обращается в ноль в двух точках (0 и x_0), если только прямая не является касательной к экспоненте. При этом, функция выпукла в промежутке $[0, x_0]$, а значит имеет там единственную точку экстремума. Из свойств функции ясно, что B является решением задачи в том и только в том случае, когда:

$$-extr\{e^{-\rho x} - 1 + Bx\}_{x \in [0, x_0]} = e^{-\rho t_0} - 1 + Bt_0.$$

Легко найти точку экстремума x_* :

$$\frac{d}{dx} \Big|_{x=x_*} (e^{-\rho x} - 1 + Bx) = 0 \rightarrow -\rho e^{-\rho x_*} + B = 0 \rightarrow x_* = -\frac{1}{\rho} \ln \frac{B}{\rho}.$$

Отсюда получаем уравнение, связывающее ρ и B :

$$2 - \frac{B}{\rho} \left(1 - \ln \frac{B}{\rho} \right) = e^{-\rho t_0} + Bt_0.$$

□

Замечание. Сделаем замены $\rho x = B$, $t_0 B = y$, тогда уравнение примет вид:

$$2 - x(1 - \ln x) = e^{-\frac{y}{x}} + y.$$

После замен $\rho x = B$, $t_0 \rho = y$ уравнение примет вид:

$$2 - x(1 - \ln x) = e^{-y} + xy.$$

Такие представления уравнений могут быть использованы для исследования связи ρ и B . Например, в случае когда B велико и, как следствие, не выполнено условие теоремы 6, в некоторых случаях благодаря предположениям на y мы можем получить оценку x . Если B/x велико, то можно утверждать, что ρ велико по модулю. В этом случае, стратегия оптимального исполнения вырождается в TWAP.

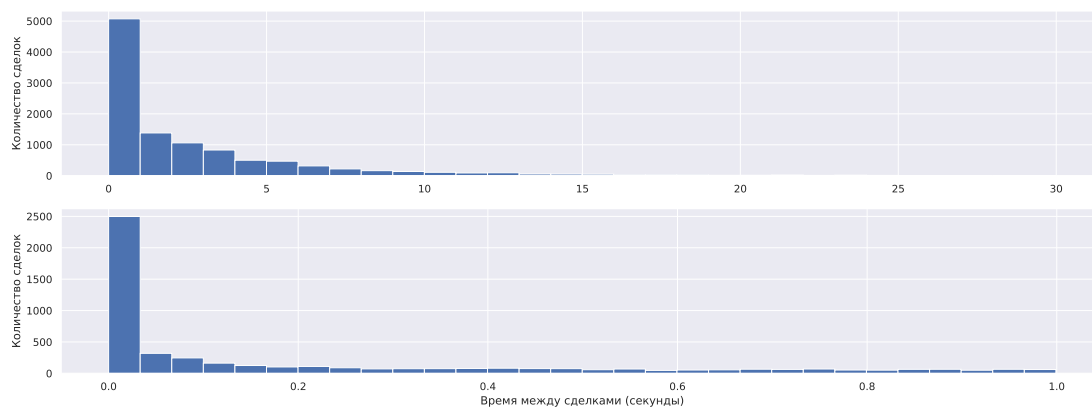


Рис. 4: Распределение времени между сделками для USD000000TOD

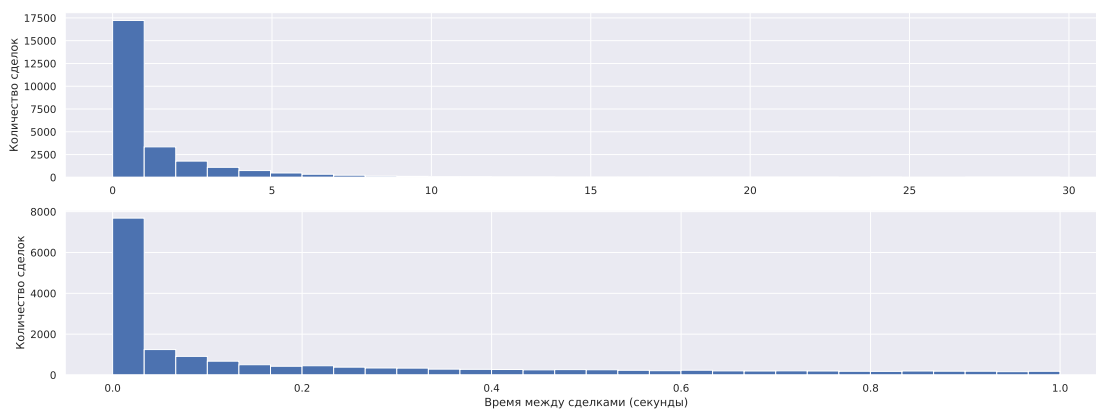


Рис. 5: Распределение времени между сделками для GAZP

Приложение С Время между сделками

Здесь, на рисунках 7–19, представлены распределения времён между сделками для всех исследуемых активов.

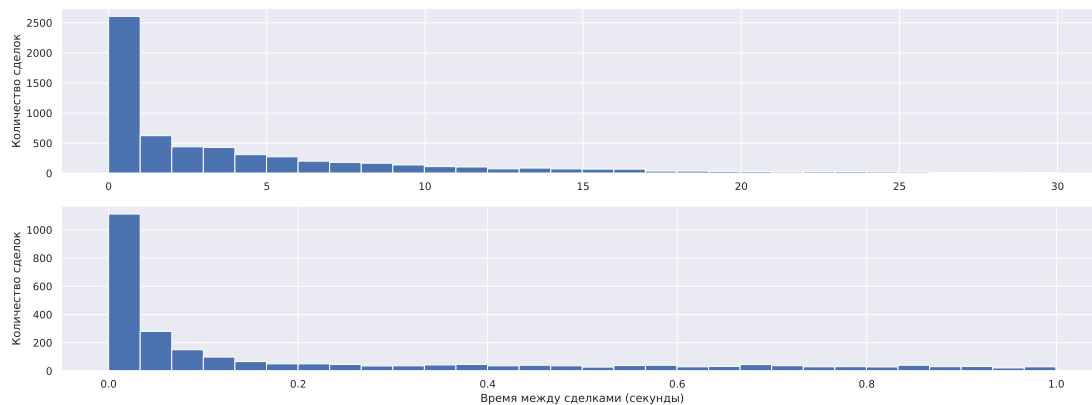


Рис. 6: Распределение времени между сделками для SNGSP

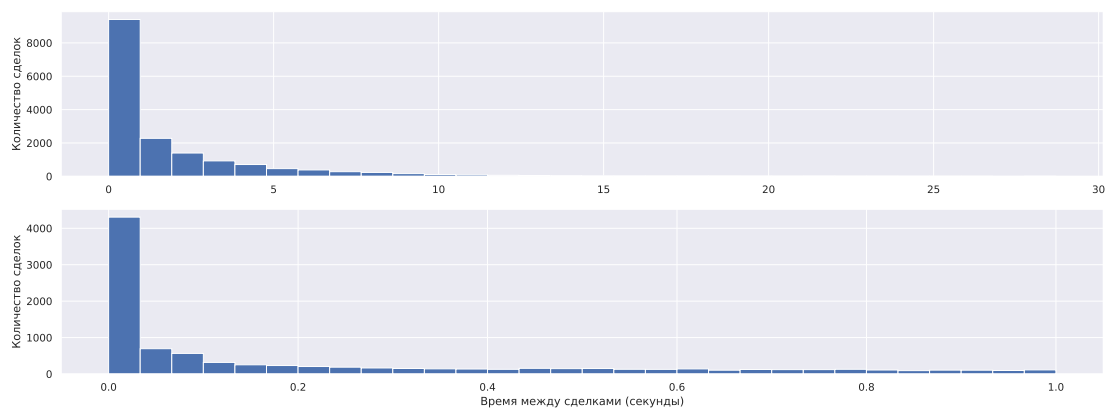


Рис. 7: Распределение времени между сделками для YNDX

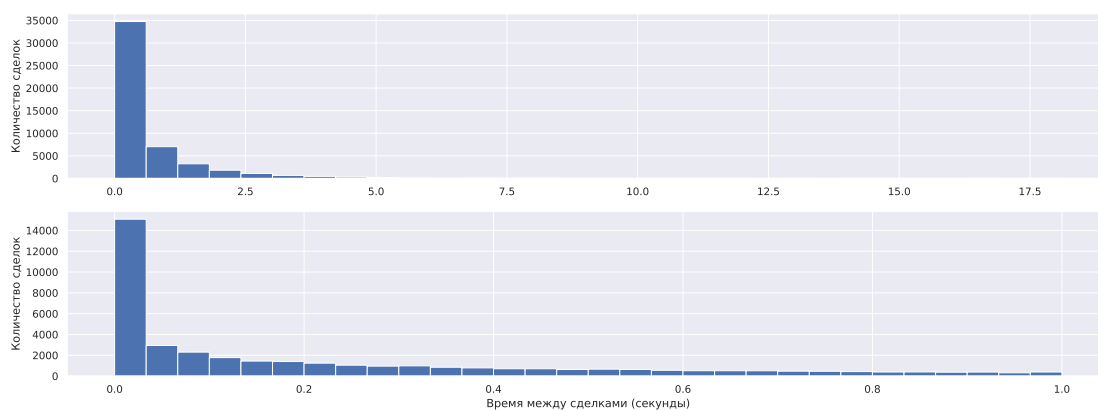


Рис. 8: Распределение времени между сделками для SBER

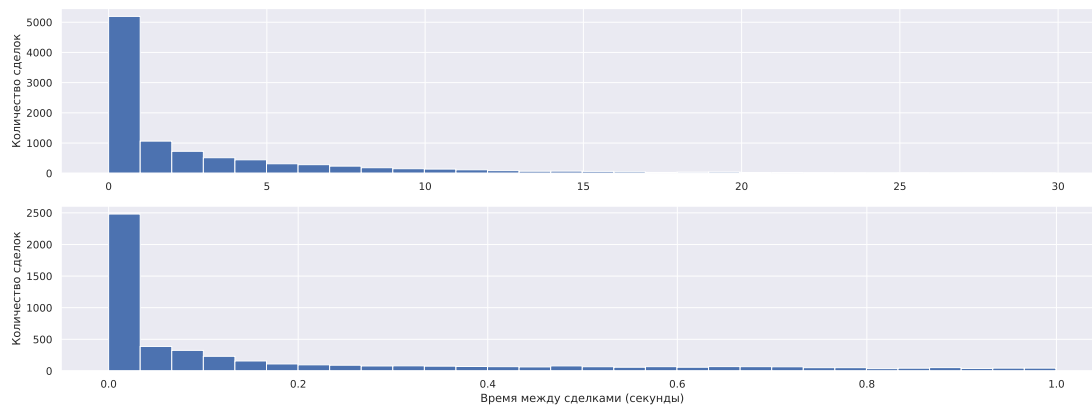


Рис. 9: Распределение времени между сделками для ROSN

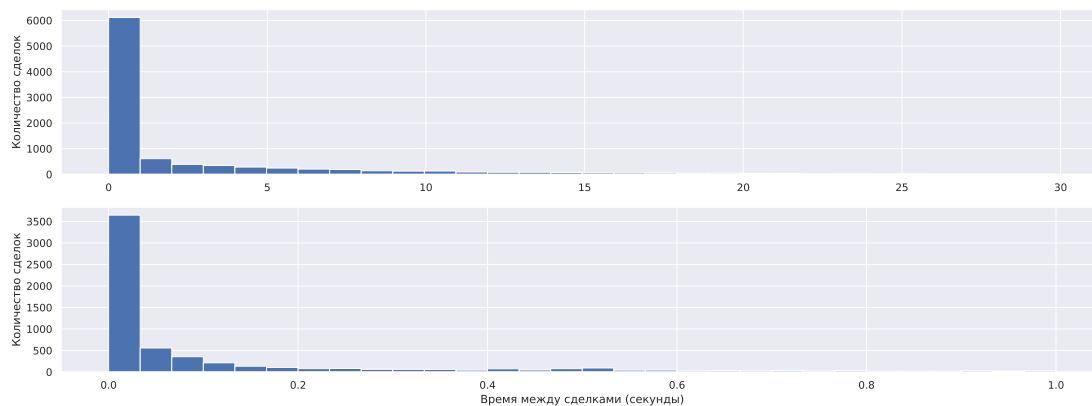


Рис. 10: Распределение времени между сделками для PLZL

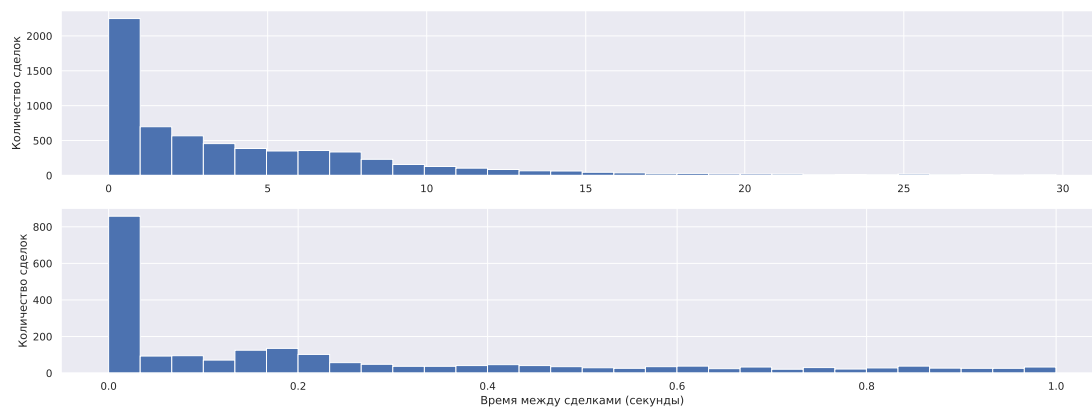


Рис. 11: Распределение времени между сделками для MTLR

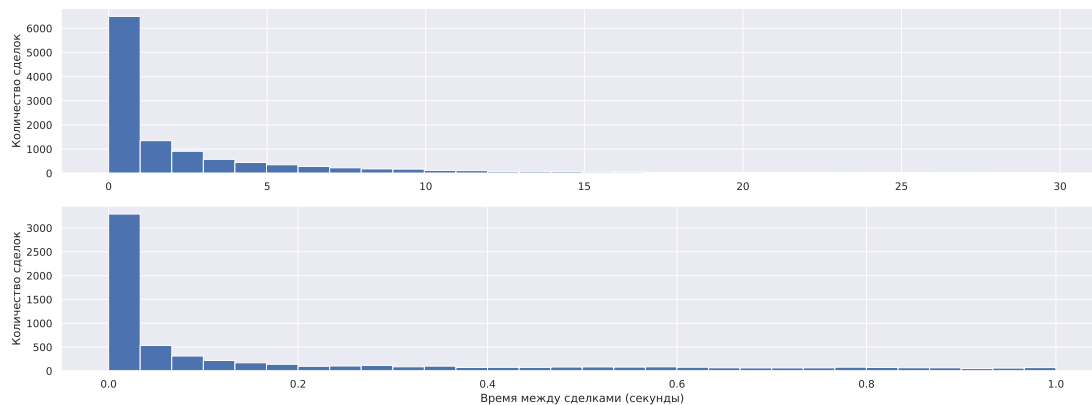


Рис. 12: Распределение времени между сделками для LKOH

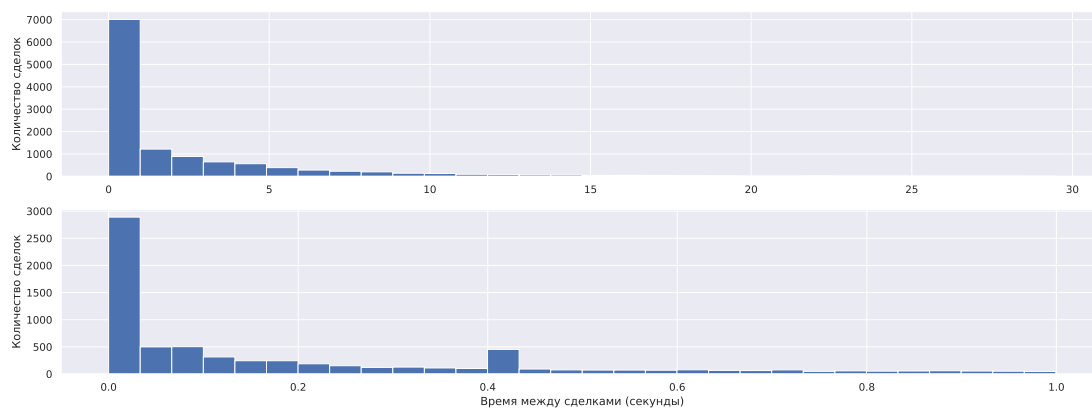


Рис. 13: Распределение времени между сделками для MGNT

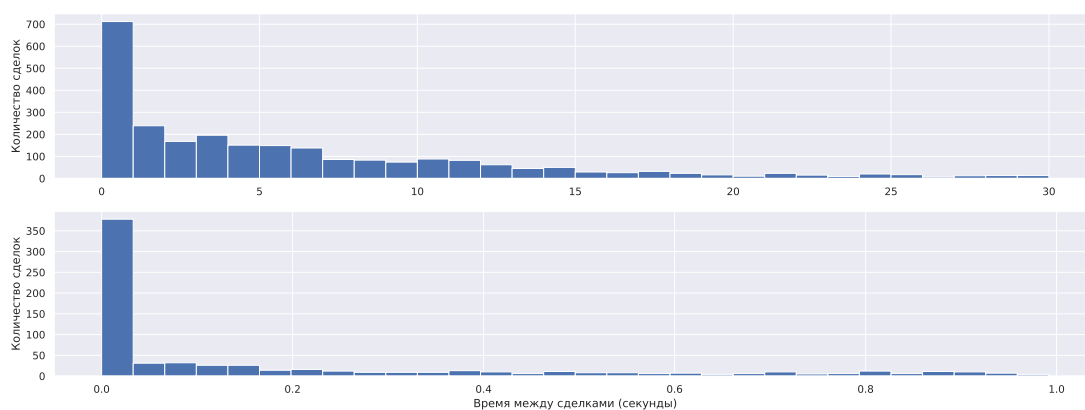


Рис. 14: Распределение времени между сделками для EUR_RUB_TOD

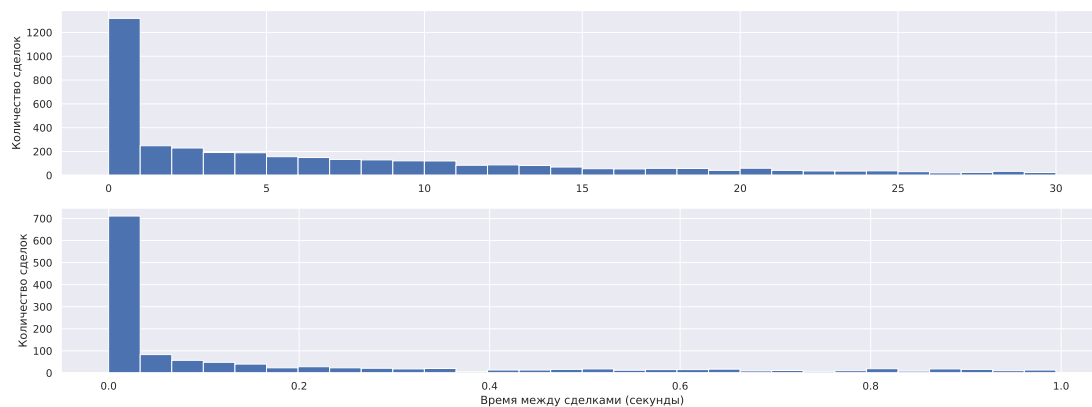


Рис. 15: Распределение времени между сделками для EUR_RUB_TOM

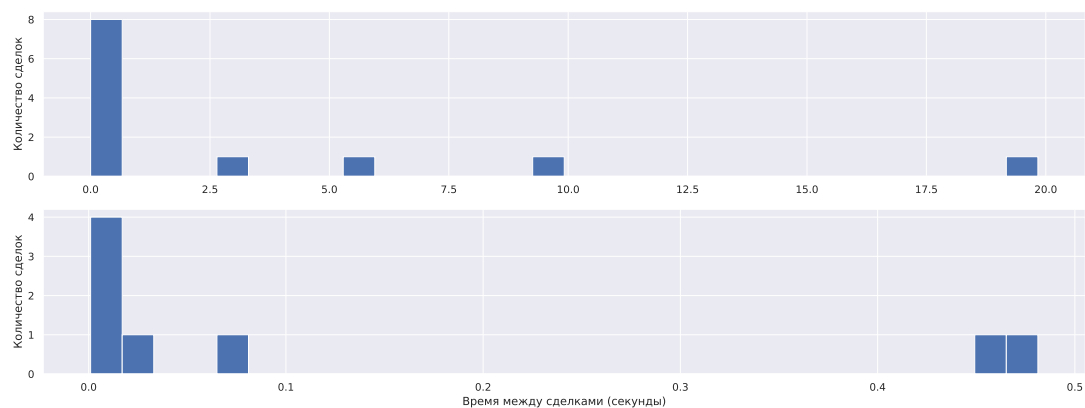


Рис. 16: Распределение времени между сделками для GBPRUB_TOD

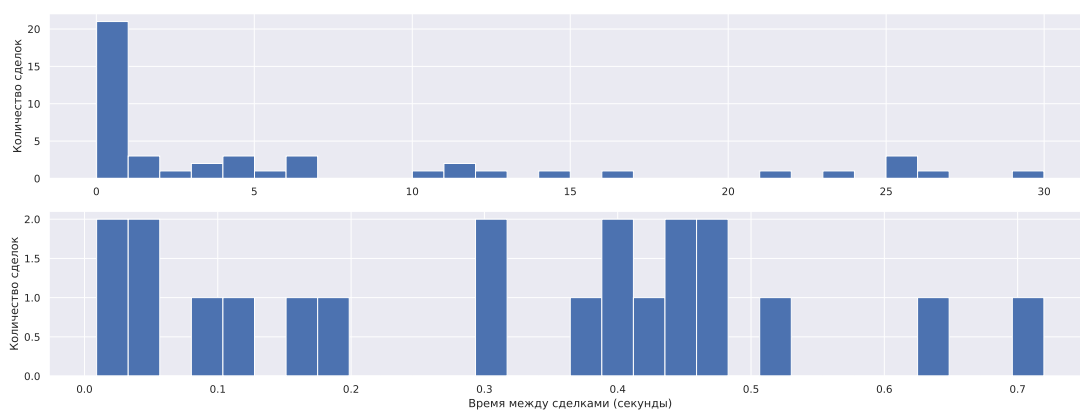


Рис. 17: Распределение времени между сделками для GBPRUB_TOM

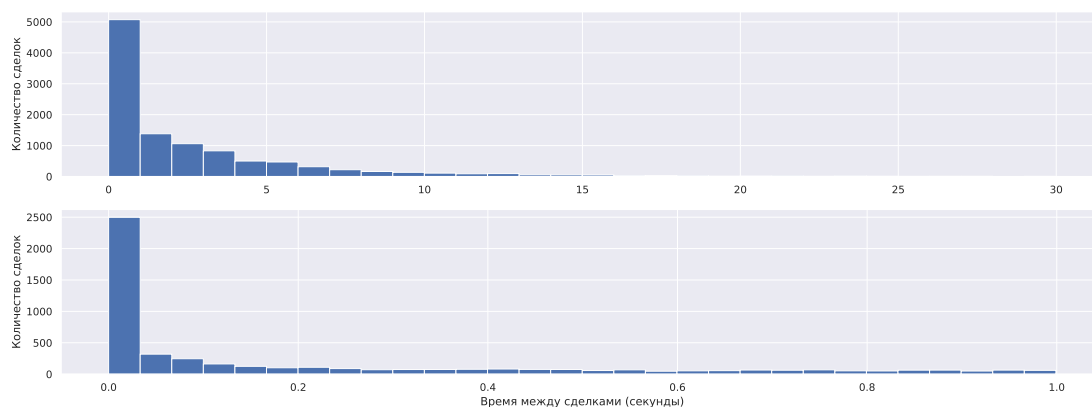


Рис. 18: Распределение времени между сделками для USD000000TOD

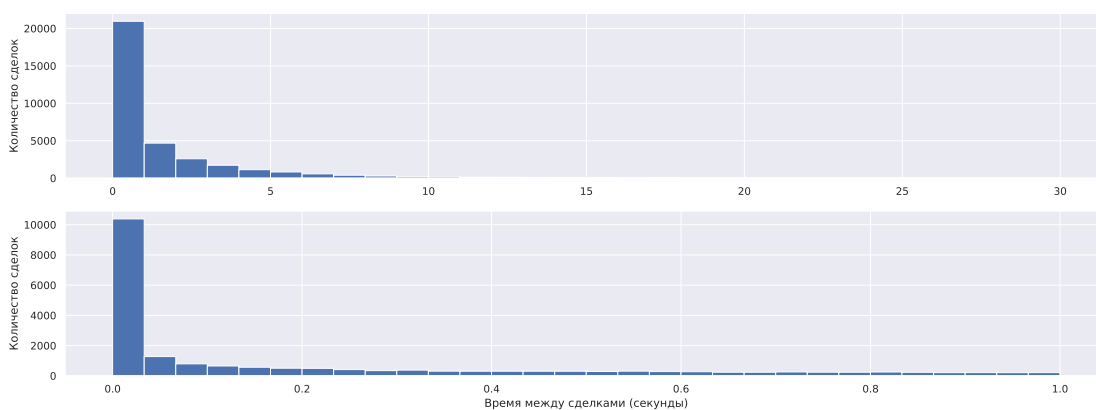


Рис. 19: Распределение времени между сделками для USD0000UTSTOM