



Модель Обижаевой–Ванга

Всеволод Заостровский^{*1}

¹Московский Государственный университет имени М. В. Ломоносова

29 января 2024 г.

Аннотация

В нашем исследовании мы предлагаем новую методику оценки параметров в модели Обижаевой–Ванга. Кроме того, мы тестируем её на реальных данных и исследуем особенности торговли Московской биржи.

Ключевые слова: Модель Обижаевой–Ванга, оптимальное исполнение, market impact, resiliency

JEL коды: C81 · G1

MSC (2000) коды: 91G23

Введение

Модель Обижаевой–Ванга - это модель торговли на финансовом рынке, которая широко используется в количественных финансах. Разработанная Анной Обижаевой и Цзян Вангом в 2013 году, модель используется для анализа динамики финансовых рынков и принятия торговых решений. Модель привлекла значительное внимание в финансовой индустрии благодаря своему вниманию к свойству упругости (resiliency) стакана, описывающему важный эмпирический факт: спрос/ предложение финансовых ценных бумаг, как правило, не является идеально эластичным. Упругость — скорость, с которой спрос/предложение восстанавливается до устойчивого состояния после совершения сделки — характеризует начало нового этапа в разработке моделей оптимального исполнения. В нашем исследовании мы разрабатываем практический способ использования этой теории.

Этот факт справедлив даже для ликвидных европейских рынков, если же мы говорим о гораздо менее ликвидных российских рынках, пренебрежение им может привести к катастрофическим последствиям. Основное отличие модели Обижаевой–Ванга от других как раз в том, что в ней ключевую роль играет устойчивость.

Мы исследуем задачу оптимального исполнения. Иными словами, если кто-то хочет продать или купить определенное количество актива достаточно большое, чтобы оказать существенное влияние на рынок, что он должен делать? Чтобы сформулировать задачу на языке математики, нам нужно будет изучить основные принципы биржевой структуры.

1 Основные понятия

Определим несколько понятий, которые понадобятся нам в дальнейшем.

^{*}e-mail: vsevolodzaostrovsky@mail.ru



Рис. 1: Графическое представление лимитной книги заявок

Определение 1. *Бид (bid) — это самая высокая цена, которую покупатель готов заплатить за актив. Далее, бид в момент времени t будет обозначаться B_t . Аск (ask) — это самая низкая цена, за которую продавец готов предоставить актив. Далее, аск в момент времени t будет обозначаться A_t . Бид-аск спрэд (bid-ask spread) s : $s = A_t - B_t$. Мид (mid-quote price): $V_t = \frac{A_t + B_t}{2}$.*

Начнем с рассмотрения структуры лимитной книги заявок (Limit Order Book – LOB). В рамках этой парадигмы организации биржевых торгов, у каждого участника есть две возможности:

- выразить желание купить или продать определённое количество единиц актива по определенной цене. В этом случае, биржа запомнит пару цена–количество. Множество этих пар составляет лимитную книгу заявок. На рисунке 1 изображено традиционное представление лимитной книги заявок.
- выразить желание купить или продать определённое количество единиц актива немедленно. В этом случае он немедленно получит запрошенное количество акций (если на бирже есть необходимое количество) по лучшей возможной цене: к примеру, в случае покупки, если на верхнем ценовом уровне не будет достаточного количества единиц актива для удовлетворения заявки, то будут взяты активы из следующего ценового уровня. Таким образом, не гарантируется, что итоговая цена одной единицы актива будет совпадать с аском.

Таким образом, если опустить некоторые подробности, существует два вида заявок:

Определение 2. *Лимитная заявка (ордер) (limit order) представляет собой распоряжение на покупку или продажу ценной бумаги по определенной цене или выше. Этот тип заявки гарантирует цену исполнения, но не гарантирует само исполнение.*

Определение 3. Рыночная заявка (ордер) (market order) представляет собой распоряжение на немедленную покупку или продажу ценной бумаги. Этот тип заявки гарантирует, что она будет исполнена, но не гарантирует цену исполнения.

Теперь ясно, что если мы хотим продать или купить актив в количестве, достаточно большом, чтобы он мог оказать существенное влияние на рынок, мы не должны делать это одной заявкой: это было бы очень дорого, поскольку крупный ордер удалил бы все верхние уровни в лимитной книге заявок. Поэтому на практике все крупные заявки разбиваются на большое количество мелких. Например, можно просто разделить ордер на N равных частей и продавать их через равные промежутки времени (это называется TWAP). Но есть ли лучшее решение?

2 Подход Обижаевой и Ванга к формализации проблемы

В попытке найти лучшее решение, мы рассматриваем модель Обижаевой–Ванга, в терминах которой задача имеет следующий вид:

$$J_0 = \min_{\{x_0 \dots x_N\}} E_0 \left[\sum_{n=0}^N [A_{t_n} + x_n / (2q)] x_n \right],$$

$$A_{t_n} = F_{t_n} + \lambda(X_0 - X_{t_n}) + s/2 + \sum_{i=0}^{n-1} x_i \kappa e^{-\rho \tau (n-i)},$$

где

- трейдер должен купить X_0 единиц актива за фиксированный период времени $[0, T]$;
- x_{t_n} размер ордера в момент времени $t_n = \tau n$ (здесь, $\tau = T/N$);
- $X_{t_n} := X_0 - \sum_{t_k < t_n} x_{t_k}$;
- B_{t_n} и A_{t_n} — бид и аск в момент времени t_n ;
- $V_{t_n} = \frac{A_{t_n} + B_{t_n}}{2}$ — мид;
- s — бид-аск спрэд;
- F_t — фундаментальная (справедливая) цена актива;
- $q(P)$ распределение лимитной книги заявок P (по ценам $[a, b]$ доступно $\int_a^b q(p) dP$ единиц актива);
- параметр λ — постоянный маркет импакт (справдливая цена V_t в результате исполнения ордера объема x меняется по закону: $V_{t+} = V_t + \lambda x$);
- $\kappa = \frac{1}{q} - \lambda$;
- параметр ρ — упругость стакана (resiliency).

Данная задача была решена в статье [OW13]:

Теорема 1. Решение проблемы оптимального исполнения:

$$x_n = -\frac{1}{2} \delta_{n+1} [D_{t_n} (1 - \beta_{n+1} e^{-\rho \tau} + 2\kappa \gamma_{n+1} e^{-2\rho \tau}) - X_{t_n} (\lambda + 2\alpha_{n+1} - \beta_{n+1} \kappa e^{-\rho \tau})],$$

где $x_N = X_N$ и $D_t = A_t - V_t - s/2$. Ожидаемая цена будущих сделок в рамках стратегии оптимального исполнения меняется по закону

$$J_{t_n} = (F_{t_n} + s/2) X_{t_n} + \lambda X_0 X_{t_n} + \alpha_n X_{t_n}^2 + \beta_n D_{t_n} X_{t_n} + \gamma_n D_{t_n}^2,$$

где коэффициенты α_{n+1} , β_{n+1} , γ_{n+1} и δ_{n+1} определяются рекурсивно по формулам:

$$\alpha_n = \alpha_{n+1} - \frac{1}{4}\delta_{n+1}(\lambda + 2\alpha_{n+1} - \beta_{n+1}\kappa e^{-\rho\tau})^2,$$

$$\beta_n = \beta_{n+1}e^{-\rho\tau} + \frac{1}{2}\delta_{n+1}(1 - \beta_{n+1}e^{-\rho\tau} + 2\kappa\gamma_{n+1}e^{-2\rho\tau})(\lambda + 2\alpha_{n+1} - \beta_{n+1}\kappa e^{-\rho\tau}),$$

$$\gamma_n = \gamma_{n+1}e^{-2\rho\tau} - \frac{1}{4}\delta_{n+1}(1 - \beta_{n+1}e^{-\rho\tau} + 2\kappa\gamma_{n+1}e^{-2\rho\tau})^2,$$

где $\delta_{n+1} = [1/(2q) + \alpha_{n+1} - \beta_{n+1}\kappa e^{-\rho\tau} + \gamma_{n+1}\kappa^2 e^{-2\rho\tau}]^{-1}$ и начальные условия

$$\alpha_N = 1/(2q) - \lambda, \quad \beta_N = 1, \quad \gamma_N = 0.$$

В нашем исследовании мы будем рассматривать предел этого решения.

Теорема 2. При $N \rightarrow \infty$, стратегия оптимального исполнения принимает вид:

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} x_0 = x_{t=0} &= \frac{X_0}{\rho T + 2}, \\ \lim_{N \rightarrow \infty} x_n/(T/N) &= \dot{X}_t = \frac{\rho X_0}{\rho T + 2}, \quad t \in (0, T), \\ \lim_{N \rightarrow \infty} x_0 = x_{t=0} &= \lim_{N \rightarrow \infty} x_n/(T/N) = x_{t=T} = \frac{X_0}{\rho T + 2}. \end{aligned}$$

где x_0 первая сделка за отведенный период, x_N — последняя, и \dot{X}_t скорость трейдинга между ними.

Таким образом, мы имеем явную формулу для стратегии оптимального исполнения. Но нам необходимо каким-либо образом найти параметры ρ , κ и λ для того, чтобы применить её на практике.

3 Как подобрать параметры?

Мы предлагаем наш метод для их нахождения:

Теорема 3. Для упрощения записей введём обозначения:

$$A_k := A_{t_k}, \quad x_k := x_{t_k}, \quad \Delta t_{k+1} := t_{k+1} - t_k, \quad \Delta A_{k+1} := A_{k+1} - A_k.$$

Если $\rho \Delta t \ll 1$, то в регрессии

$$\frac{\Delta A_{k+2}}{\Delta t_{k+2}} - \frac{\Delta A_{k+1}}{\Delta t_{k+1}} = -\rho \Delta A_k + \rho(\lambda + \kappa)x_{t_k} - \rho\kappa x_{t_{k+1}} + (\lambda + \kappa) \left(\frac{x_{t_{k+1}}}{\Delta t_{k+1}} - \frac{x_{t_k}}{\Delta t_k} \right),$$

где x_k и A_k глубина ордера и аск в момент времени t_k , соответственно,

коэффициенты ρ , κ и λ примерно те же, что в модели Обижаевой–Ванга, описывающей рынок, характеризуемый временными рядами: $A_k, \Delta t_k, x_k$.

Вся требуемая информация может быть получена из 13 данных:

- ΔA_k изменение аска в следствие исполнения заявки размера x_k в момент времени t_k .
- Δt_k время между k и $k + 1$ заявками.

	<u>Time</u>	<u>AskBefore</u>	<u>AskAfter</u>	<u>Volume</u>
0	1.0006099849997554	61.782	61.87	40000.0
1	2.0004541379967122	61.84	61.84	48000.0
2	2.0004635579971364	61.84	61.84	48000.0
3	2.000483832001919	61.842	61.842	13000.0
4	2.0004864069996984	61.842	61.847	87000.0
5	2.0004864069996984	61.847	61.847	7000.0
6	2.0005590279979515	61.792	61.845	10000.0
7	2.00059898699692	61.79	61.842	100000.0
8	2.000793077997514	61.835	61.835	11000.0
9	2.0008411289963988	61.815	61.815	11000.0
10	3.0002688890017453	61.822	61.822	1000.0
11	3.000301476000459	61.83	61.83	16000.0
12	3.0003054539993173	61.83	61.83	1000.0

Рис. 2: Данные после первого этапа парсинга

Другая идея связана с рассмотрением уравнения, задающего динамику изменения аска после исполнения крупного ордера (глубины x_1):

$$A_t = \bar{p}_t + \frac{s}{2} + x_1 \kappa e^{-\rho t}.$$

Она выглядит хорошо, но сопряжена с существенными численными сложностями: мы протестировали несколько подходов, связанных с этой идеей, но нам не удалось извлечь адекватные параметры.

4 Данные

4.1 Источники и обработка

Мы работали с ордерлогами ([спецификация](#)). Было написано несколько [программ](#), которые, в совокупности, распаршивали исходные записи в таблицу из четвёрок (время, аск до исполнения ордера, аск после исполнения ордера, глубина ордера). Следует обратить внимание на то, что заявки, поглощающие несколько уровней, представляются в данных в виде последовательности заявок, поэтому перед началом обработки их следует объединить: объем ордера есть сумма объемов, аск до исполнения — аск до исполнения первого ордера, аск после исполнения — аск после исполнения последнего ордера. Фрагмент таблицы изображен на рисунке [2](#).

4.2 Выбор инструмента

Для очень существенной части активов, торгуемых на московской бирже, модель неприменима: в частности, встречается немало инструментов, по которым совершается порядка нескольких десятков сделок в день (и даже меньше). При этом, почти у всех активов подавляющее большинство сделок не поглощает ни одного уровня (те фактическая цена совершения сделки равна аску). В целом, известно, что российский рынок характеризуется низким уровнем ликвидности и низким уровнем интенсивности торгов. Для подбора параметров и статистических исследований нам нужно относительно большое количество данных, к тому же в выводе регрессии мы пользовались малостью промежутков времени, поэтому мы остановили выбор на исследовании валютных рынков. Однако, и среди валютных пар большая часть имеет очень низкую интенсивность торгов, например, CHF RUB_TOM, CNY RUB_TOM, HKD RUB_TOM, JPY RUB_TOM, KZT RUB_TOM.

Для выбора инструмента мы исследовали все, имеющиеся валютные пары и сформировали список наиболее ликвидных (данные за 02.03.2020):

Инструмент	Общее число сделок	Не повлияли на аск	Спайки, среди сдвинувших аск
USD000UTSTOM	41963	95%	21%
USD000000TOD	13391	86%	31%
EUR RUB_TOM	13383	93%	32%
EUR RUB_TOD	4134	58%	42%
USD000TODTOM	1343	72%	89%
EURUSD000TOM	915	91%	26%
EUR000TODTOM	265	72%	89%
GBPRUB_TOM	234	64%	0%
CNYRUB_TOM	167	51%	51%

Таблица 1: Анализ сделок по наиболее торгуемым валютным парам (03.02.2020).

Инструмент	Общее число сделок	Не повлияли на аск	Спайки, среди сдвинувших аск
USD000UTSTOM	28361	95%	69%
USD000000TOD	9624	92%	61%
EUR RUB_TOM	4021	79%	73%
EUR RUB_TOD	2535	57%	52%
USD000TODTOM	546	55%	95%
EURUSD000TOM	409	93%	82%
GBPRUB_TOM	220	60%	73%
EUR000TODTOM	168	89%	100%

Таблица 2: Анализ сделок по наиболее торгуемым валютным парам (03.03.2021).

4.3 Аномалии

Данные характеризуются очень большим числом количеством резких односторонних скачков аска (см. график 3). В то же время, эти скачки, в целом, не характеризуют динамику рискованного актива, поэтому целесообразно исключить их из исследуемого датасета.

Пересечение множеств сотни самых больших сделок и сотни сделок, сдвинувших аск сильнее всего, пусто. Таким образом, похоже, что ордеров, которые существенно двигают

Инструмент	Общее число сделок	Не повлияли на аск	Спайки, среди сдвинувших аск
SBER	41647	96%	48%
GAZP	21566	86%	50%
VTBR	17100	99%	34%
YNDX	14110	68%	39%
MGNT	10929	64%	30%
LKOH	9759	75%	35%
ROSN	8648	74%	39%
PLZL	7121	56%	27%
SNGSP	6032	60%	24%
MTLR	5985	46%	75%

Таблица 3: Анализ сделок по наиболее торгуемым акциям (03.03.2021).

аск за счёт своего размера на рынке нет, те цена двигается, в основном, по фундаментальным причинам. В то же время, эти скачки, в целом, не характеризуют динамику рискового актива, поэтому целесообразно исключить их из исследуемого датасета.

5 Результаты регрессий на реальных данных

Инструмент	Общее число сделок	ρ	ρ^*
USD000UTSTOM	41963	63550***	18345***
USD000000TOD	13391	69906***	14649***
EUR_RUB_TOM	13383	62892***	2483***
EUR_RUB_TOD	4134	47462***	1675**
USD000TODTOM	1343	19322***	23534***
EURUSD000TOM	915	9673**	4417*
EUR000TODTOM	265	6446	3750
GBPRUB_TOM	234	0.0053	-0.0132
CNYRUB_TOM	167	11214	1193

Таблица 4: Упругость стакана ρ , вычисленная для разных валютных пар.

5.1 Регрессия USD000UTSTOM

Как видно из таблицы 4, по порядку и знаку коэффициенты λ и κ выглядят правдоподобно (из модели Обижаевой–Ванга следует, что они положительны и много меньше единицы). В то же время, ρ очень велико по модулю, так что стратегия оптимального исполнения вырождается в TWAP.

5.2 Регрессия EURUSD000TOM

Как видно из таблицы 5, по порядку и знаку коэффициенты λ и κ вновь выглядят правдоподобно (из модели Обижаевой–Ванга следует, что они положительны и много меньше единицы). В этот раз, ρ довольно мал, так что стратегия оптимального исполнения отлична от TWAP. Она будет состоять в разделении большей части ордера на две равные доли, остаток же будет продаваться в промежутке.

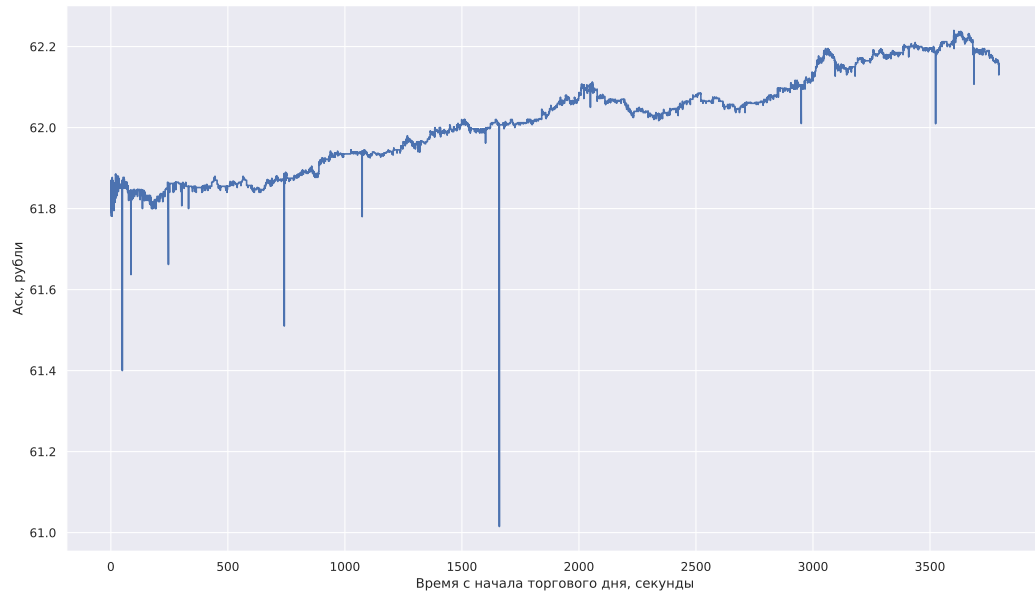


Рис. 3: График аска USD000UTSTOM в первый час торгового дня

Инструмент	Общее число сделок	ρ	ρ^*
SBER	41647	43257	357819
GAZP	21566	31240***	298196***
VTBR	17100	$2.44e - 23$	$1.49e - 23$
YNDX	14110	24715***	65218***
MGNT	10929	19207***	181582***
LKOH	9759	307474***	151761***
ROSN	8648	65814***	92876***
PLZL	7121	11072***	267550***
SNGSP	6032	8652***	137911***
MTLR	5985	5031***	59414***

Таблица 5: Упругость стакана ρ , вычисленная для разных акций.

5.3 Интерпретация результатов

Ликвидная пара рубль–доллар оказалась достаточно ликвидной для вырождения стратегии в TWAP. Впрочем, мы полагаем, что причина тому не высокая интенсивность торгов и упругость стакана, но особенность торгов: исчезающе малое количество крупных ордеров. Причем те немногие крупные ордера, что присутствуют в данных исполняются, в основном, тогда, когда могут поглотить ровно один ценовой уровень. Таким образом, стакану, в некотором смысле, "не дают повод восстанавливаться": не разрушают его структуру.

Мы считаем, что, вероятнее всего, те же рассуждения верны и для пары евро–доллар. Но выборка небольшая и неотфильтрованная, аск в ней почти не двигается, этим мы объясняем менее тривиальный результат регрессии. При фильтрации ρ тоже становится


```

=====
                        OLS Regression Results
=====
Dep. Variable:          SUM      R-squared (uncentered):      0.194
Model:                  OLS      Adj. R-squared (uncentered):    0.193
Method:                 Least Squares      F-statistic:                200.4
Date:                  Sun, 21 Jan 2024      Prob (F-statistic):         3.70e-154
Time:                  12:20:50      Log-Likelihood:             -27271.
No. Observations:      3327      AIC:                        5.455e+04
Df Residuals:          3323      BIC:                        5.457e+04
Df Model:              4
Covariance Type:       nonrobust
=====
                        coef      std err      t      P>|t|      [0.025      0.975]
-----
-rho      -1385.4527      2252.250      -0.615      0.539      -5801.389      3030.484
-rho kappa      -0.0001      5.79e-05      -1.764      0.078      -0.000      1.14e-05
rho (lambda + kappa)      0.0002      5.75e-05      2.699      0.007      4.24e-05      0.000
kappa + lambda      3.942e-09      1.5e-10      26.322      0.000      3.65e-09      4.24e-09
=====
Omnibus:              1035.880      Durbin-Watson:              2.904
Prob(Omnibus):        0.000      Jarque-Bera (JB):           181042.638
Skew:                 -0.160      Prob(JB):                   0.00
Kurtosis:             39.137      Cond. No.                   1.69e+13
=====
...
rho = 1385.4527027803597
lambda = 3.827814439009852e-08
kappa = 7.371651566219547e-08

```

Рис. 4: Регрессия USD000UTSTOM на фильтрованном от скачков датасете

```

=====
                        OLS Regression Results
=====
Dep. Variable:          SUM      R-squared:                0.002
Model:                  OLS      Adj. R-squared:           -0.032
Method:                 Least Squares      F-statistic:           0.06802
Date:                   Sat, 20 Jan 2024    Prob (F-statistic):      0.991
Time:                   21:31:54          Log-Likelihood:          921.39
No. Observations:       122              AIC:                   -1833.
Df Residuals:           117              BIC:                   -1819.
Df Model:                4
Covariance Type:        nonrobust
=====
                        coef      std err          t      P>|t|      [0.025      0.975]
-----
-rho                   -0.0052      0.030      -0.172      0.864      -0.065      0.055
-rho kappa             -2.283e-11     7.7e-11     -0.297      0.767     -1.75e-10     1.3e-10
rho (lambda + kappa)   3.559e-11     7.74e-11     0.460      0.647     -1.18e-10     1.89e-10
kappa + lambda         9.925e-18     3.12e-16     0.032      0.975     -6.08e-16     6.28e-16
const                  -2.998e-07     1.53e-05     -0.020      0.984     -3.06e-05     3e-05
=====
Omnibus:                68.568      Durbin-Watson:           2.987
Prob(Omnibus):           0.000      Jarque-Bera (JB):        16742.835
Skew:                    -0.116      Prob(JB):                 0.00
Kurtosis:                60.390      Cond. No.                 9.77e+13
=====
...
rho = 0.00521113821041267
lambda = 2.4481608500550057e-09
kappa = 4.381797041533125e-09

```

Рис. 5: Регрессия EURUSD000TOM на сыром датасете

большим. Хотя в этом случае датасет становится настолько малым, что утрачивает даже намёк на репрезентативность.

Заключение

На наш взгляд, предложенная методика обладает очень важным для индустрии достоинством: она очень проста как теоретически, так и вычислительно. Более того, она настолько проста теоретически, что кажется невозможным, чтобы что-то пошло не так. Тем не менее, она предполагает существенное требование — достаточно высокую частоту торгов, что выполнено не для всех активов. В ином случае, корректность её работы ничем не гарантируется.

Мы считаем, что модель Обижаевой–Ванга неприменима для российских рынков, поскольку активы в нём как будто подразделены на две категории:

1. Активы с настолько низкой интенсивностью торгов, что для них, пожалуй, бессмысленна любая стратегия оптимального исполнения более сложная, чем TWAP или VWAP.
2. Активы с относительно высокой интенсивностью торгов (хотя несопоставимой с европейскими рынками). Они, в силу особенностей проведения торгов, в частности, отсутствия больших ордеров,двигающих рынок и наличия скачков аска, в парадигме модели являются активами с очень большой упругостью, хотя не похоже, что они являются таковыми de facto.

Из-за этого, мы фактически не смогли полноценно протестировать методику на российских данных. Тем не менее, мы верим, что она сработает для рынков с более высокой интенсивностью торгов.

Эти же особенности, вероятно, делают невалидной любую модель с существенными теоретическими предпосылками. Таким образом, на наш взгляд, оптимальным рецептом для индустрии является исследование алгоритмов не накладывающих обременительных предпосылок, таких как, к примеру, VWAP и TWAP.

Список литературы

- [Alm+05] Robert Almgren и др. «Direct estimation of equity market impact». В: *Risk* 18.7 (2005), с. 58—62.
- [Gre05] Robin Greenwood. «Short-and long-term demand curves for stocks: theory and evidence on the dynamics of arbitrage». В: *Journal of Financial Economics* 75.3 (2005), с. 607—649.
- [OW13] Anna A Obizhaeva и Jiang Wang. «Optimal trading strategy and supply/demand dynamics». В: *Journal of Financial markets* 16.1 (2013), с. 1—32.
- [KO18] Albert S Kyle и Anna A Obizhaeva. «The market impact puzzle». В: *Anna A., The Market Impact Puzzle (February 4, 2018)* (2018).
- [Vel20] Raja Velu. *Algorithmic trading and quantitative strategies*. CRC Press, 2020.
- [Web23] Kevin T Webster. *Handbook of Price Impact Modeling*. CRC Press, 2023.

Приложение А Обоснование метода

Теорема 4. Если $\rho\Delta t \ll 1$, то в регрессии

$$\frac{\Delta A_{k+1}}{\Delta t_{k+1}} - \frac{\Delta A_k}{\Delta t_k} = -\rho\Delta A_k + \rho(\lambda + \kappa)x_{t_k} - \rho\kappa x_{t_{k+1}} + (\lambda + \kappa) \left(\frac{x_{t_{k+1}}}{\Delta t_{k+1}} - \frac{x_{t_k}}{\Delta t_k} \right),$$

где x_k и A_k глубина ордера и аск в момент времени t_k , соответственно,

коэффициенты ρ, κ и λ примерно те же, что в модели Обижаевой–Ванга, описывающей рынок, характеризуемый временными рядами: $A_k, \Delta t_k, x_k$.

Доказательство. Из определения модели имеем три уравнения:

$$A_{t_k} = V_{t_k} + \frac{s}{2} + \sum_{i=0}^{k-1} x_{t_i} \kappa e^{-\rho(t_k - t_i)} \quad (1)$$

$$V_{t_{k+1}} = V_{t_k} + \lambda x_{t_k} \rightarrow V_{t_{k+1}} - V_{t_k} = \lambda x_{t_k} \quad (2)$$

$$D_{t_k} = A_{t_k} - V_{t_k} - \frac{s}{2} \quad (3)$$

Из (1) и (3),

$$\begin{aligned} D_{t_k} &= \sum_{i=0}^{k-1} x_{t_i} \kappa e^{-\rho(t_k - t_i)} \\ \Delta D_{t_k} &= \sum_{i=0}^k x_{t_i} \kappa e^{-\rho(t_{k+1} - t_i)} - \sum_{i=0}^{k-1} x_{t_i} \kappa e^{-\rho(t_k - t_i)} = \sum_{i=0}^{k-1} x_{t_i} \kappa (e^{-\rho(t_{k+1} - t_i)} - e^{-\rho(t_k - t_i)}) + x_{t_k} \kappa e^{-\rho(t_{k+1} - t_k)} = \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} x_{t_i} \kappa e^{-\rho(t_k - t_i)} (e^{-\rho(t_{k+1} - t_k)} - 1) + x_{t_k} \kappa e^{-\rho(t_{k+1} - t_k)} = D_{t_k} (e^{-\rho \Delta t_k} - 1) + x_{t_k} \kappa e^{-\rho \Delta t_k}. \end{aligned}$$

С другой стороны, из (2) и (3) имеем

$$\Delta D_k = D_{t_{k+1}} - D_{t_k} = A_{t_{k+1}} + V_{t_{k+1}} - A_{t_k} - V_{t_k} = \Delta A_k - \Delta V_k \rightarrow \Delta A_k = \Delta D_k + \Delta V_k.$$

Таким образом, получаем уравнение

$$\Delta A_k = D_{t_k} (e^{-\rho \Delta t_k} - 1) + x_{t_k} \kappa e^{-\rho \Delta t_k} + \lambda x_{t_k}. \quad (4)$$

Таким образом, рассматривая различные интерполяции $e^{-\rho \Delta t_k}$ мы можем получить различные варианты регрессий. Например, полагая, что

$$e^{-\rho \Delta t_k} = 1 - \rho \Delta t_k + O((\rho \Delta t_k)^2), \text{ где } O((\rho \Delta t_k)^2) := (\rho \Delta t_k)^2 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\rho \Delta t_k)^i}{(i+2)!}$$

имеем:

$$\Delta A_k = -\rho D_{t_k} \Delta t_k + x_{t_k} \kappa (1 - \rho \Delta t_k) + \lambda x_{t_k} + (x_{t_k} \kappa + D_{t_k}) O((\rho \Delta t_k)^2).$$

Исключим отсюда ряд D_{t_k} , поделив на Δt_k и рассмотрев разность $A_{t_{k+1}}$ и A_{t_k} , получим:

$$\begin{aligned} R &:= (x_{t_{k+1}} \kappa + D_{t_{k+1}}) O(\rho^2 \Delta t_{k+1}) - (x_{t_k} \kappa + D_{t_k}) O(\rho^2 \Delta t_k) \\ \frac{\Delta A_{k+1}}{\Delta t_{k+1}} - \frac{\Delta A_k}{\Delta t_k} &= -\rho D_{t_{k+1}} + x_{t_{k+1}} \kappa \left(\frac{1}{\Delta t_{k+1}} - \rho \right) + \lambda \frac{x_{t_{k+1}}}{\Delta t_{k+1}} + \rho D_{t_k} - x_{t_k} \kappa \left(\frac{1}{\Delta t_k} - \rho \right) - \lambda \frac{x_{t_k}}{\Delta t_k} + R = \\ &= -\rho (\Delta A_k - \Delta V_k) + (\lambda + \kappa) \left(\frac{x_{t_{k+1}}}{\Delta t_{k+1}} - \frac{x_{t_k}}{\Delta t_k} \right) - \rho \kappa (x_{t_{k+1}} - x_{t_k}) + R = \\ &= -\rho \Delta A_k + \rho (\lambda + \kappa) x_{t_k} - \rho \kappa x_{t_{k+1}} + (\lambda + \kappa) \left(\frac{x_{t_{k+1}}}{\Delta t_{k+1}} - \frac{x_{t_k}}{\Delta t_k} \right) + R. \end{aligned}$$

Для произвольной интерполяции экспоненты полиномом первой степени эти рассуждения не проходят:

$$e^{-\rho \Delta t_k} = A - B \Delta t_k + E(\rho \Delta t_k).$$

Тогда имеем:

$$\begin{aligned}\Delta A_k &= D_{t_k}(A - B\Delta t_k + R(\rho\Delta t_k) - 1) + x_{t_k}\kappa(A - B\Delta t_k + R(\rho\Delta t_k)) + \lambda x_{t_k} = \\ &= D_{t_k}(A - 1) - BD_{t_k}\Delta t_k + x_{t_k}\kappa A - B\kappa x_{t_k}\Delta t_k + \lambda x_{t_k} + (x_{t_k}\kappa + D_{t_k})E(\rho\Delta t_k).\end{aligned}$$

И не ясно, как исключать ряд D_{t_k} . Однако, положив $A = 1$, мы всё же можем повторить рассуждения выше и получим возможность более точно интерполировать экспоненту. Все выкладки аналогичны таковым для ρ :

$$\begin{aligned}R^1 &:= E(\rho\Delta t_{k+1}) - E(\rho\Delta t_k) \\ \frac{\Delta A_{k+1}}{\Delta t_{k+1}} - \frac{\Delta A_k}{\Delta t_k} &= -B\Delta A_k + B(\lambda + \kappa)x_{t_k} - B\kappa x_{t_{k+1}} + (\lambda + \kappa)\left(\frac{x_{t_{k+1}}}{\Delta t_{k+1}} - \frac{x_{t_k}}{\Delta t_k}\right) + R^1.\end{aligned}$$

Если предположить, что данные действительно подчинены экспоненциальному закону, то, в такой постановке, метод наименьших квадратов фактически будет решать задачу:

$$\min_{B \in \mathcal{R}} \max_{x \in [0, t_0]} |e^{-\rho x} - 1 + Bx|$$

Очевидно, разность под модулем обращается в ноль в двух точках (0 и x_0), если только прямая не является касательной к экспоненте. При этом, функция выпукла в промежутке $[0, x_0]$, а значит имеет там единственную точку экстремума. Из свойств функции ясно, что B является решением задачи в том и только в том случае, когда:

$$-extr\{e^{-\rho x} - 1 + Bx\}_{x \in [0, x_0]} = e^{-\rho t_0} - 1 + Bt_0.$$

Легко найти точку экстремума x_* :

$$\left. \frac{d}{dx} \right|_{x=x_*} (e^{-\rho x} - 1 + Bx) = 0 \rightarrow -\rho e^{-\rho x_*} + B = 0 \rightarrow x_* = -\frac{1}{\rho} \ln \frac{B}{\rho}.$$

Отсюда получаем уравнение, связывающее ρ и B :

$$2 - \frac{B}{\rho} \left(1 - \ln \frac{B}{\rho}\right) = e^{-\rho t_0} + Bt_0.$$

□