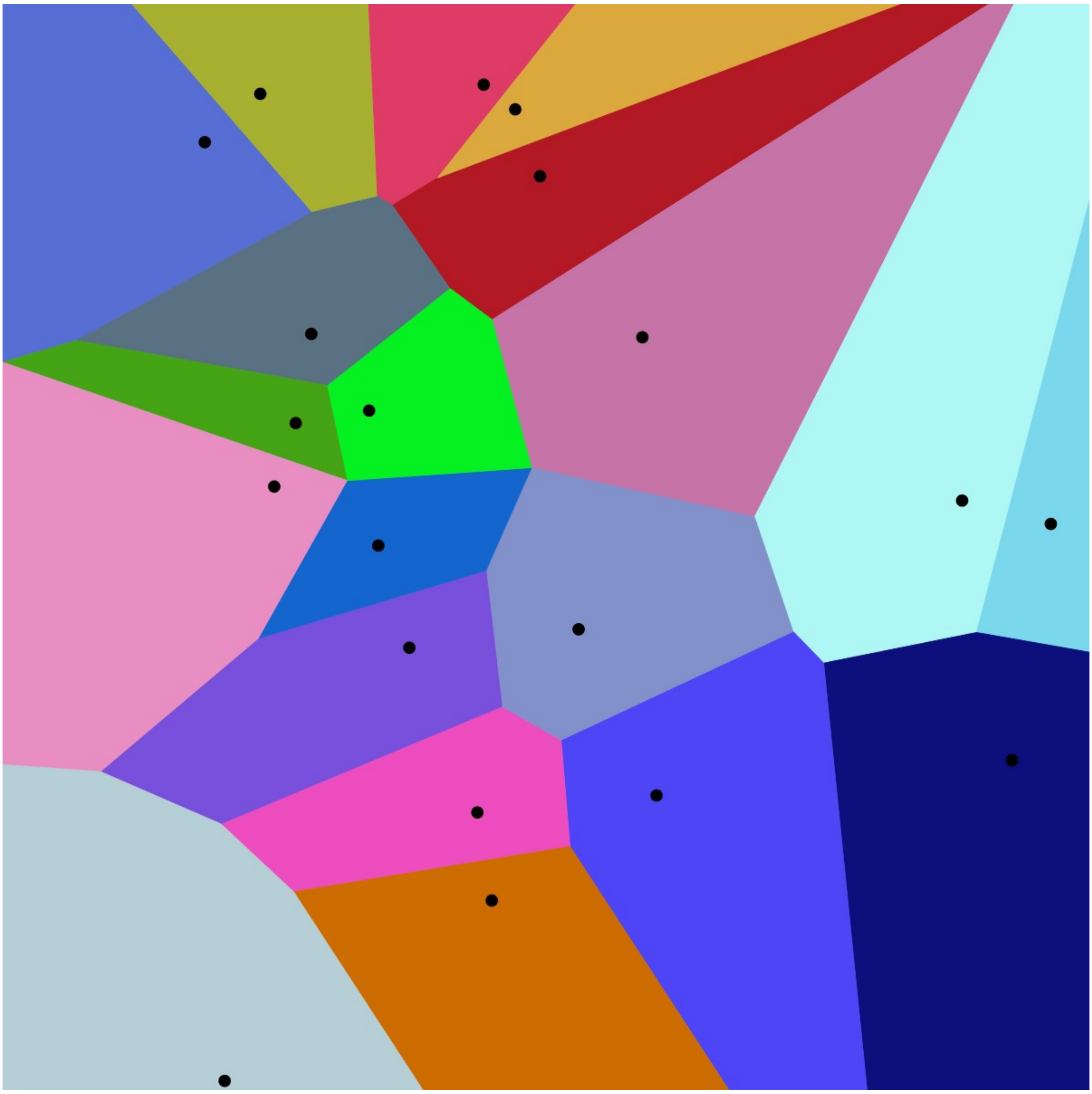
Υπολογιστική Γεωμετρία
Εργασία 1 (Voronoi)

ΒΛΑΣΣΗΣ ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ
1115201400022

Εαρινό εξάμηνο
Ακαδ. Έτος: 2018-19



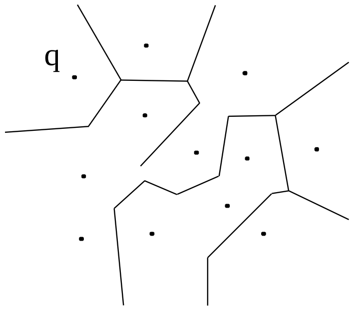
ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικό και Καποδιστριακό
Πανεπιστήμιο Αθηνών

ΤΜΗΜΑ
ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ & ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ

Περιεχόμενα

1. Σχεδιασμός διαγράμματος Voronoi

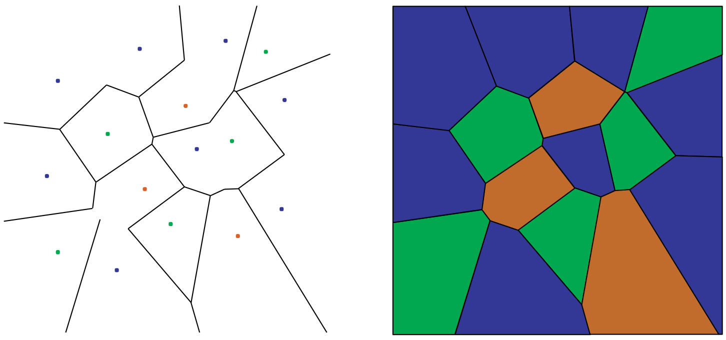
Έστω ένα σύνολο σημείων ***P***={***p***$_1$, ***p***$_2$,…}, στο επίπεδο, που ονομάζονται *γεννήτριες* (*generators*). Το διάγραμμα Voronoi (<u>*Εικόνα 1.1*</u>) αποτελείται από υποσύνολα του επιπέδου **V**={***V***$_1$, ***V***$_2$,…}, όπου V_i είναι μία περιοχή του επιπέδου, η οποία περιέχει όλα τα σημεία που βρίσκονται πλησιέστερα στο p_i από κάθε άλλο μέλος του συνόλου *P*.



Εικόνα 1.1. *Απλό διάγραμμα Voronoi*

$$q \in V(p_i) \Leftrightarrow \text{dist}(q, p_i) \leq \text{dist}(q, p_j), \forall p_j \in P, j \neq i.$$

Επειδή κάθε περιοχή $\boldsymbol{V_i}$ περιέχει ακριβώς μία γεννήτρια, μπορεί να χρωματιστεί με ένα χρώμα το οποίο θα αντιστοιχεί στη γεννήτρια $\boldsymbol{p_i}$ (<u>*Εικόνα 1.2*</u>)



Εικόνα 1.2. *Χρωματισμός διαγράμματος Voronoi*

Ο υπολογισμός των αποστάσεων μεταξύ των σημείων-γεννήτριων μπορεί να γίνει, για παράδειγμα, είτε με χρήση <u>*Ευκλείδιας απόστασης*</u> (*Euclidean distance*) είτε με <u>*Μανχάταν απόσταση*</u> (*Manhattan distance*).

Euclidean distance: $$\ell_2 = d\left[(a_1, a_2), (b_1, b_2)\right] = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$$

Manhattan distance: $$d\left[(a_1, a_2), (b_1, b_2)\right] = |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2|.$$

2. Εφαρμογή διαγραμμάτων Voronoi

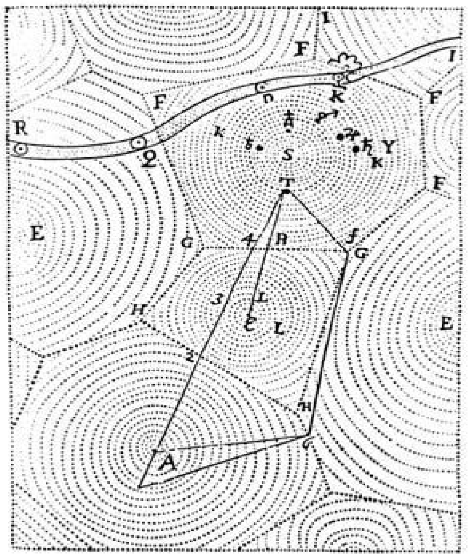
Η βασική ιδέα των διαγραμμάτων Voronoi έχει εφαρμογή σε πολλά πεδία εντός κι εκτός των μαθηματικών. Μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως μέθοδος για την επίλυση προβλημάτων ή ως μοντέλο για δείγματα που ήδη υπάρχουν.

Πέρα από τον κλάδο της Υπολογιστικής Γεωμετρίας, τα διαγράμματα αυτά χρησιμοποιούνται και στους εξής τομείς:

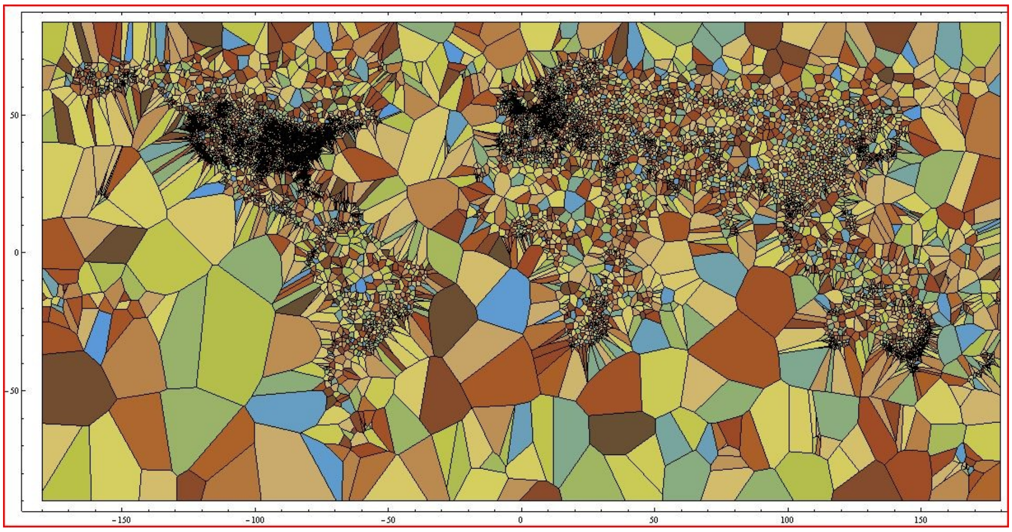
- *Ρομποτική*: δημιουργία πρωτοκόλλων για την ανίχνευση εμποδίων
- *Περιβάλλον*: μοντελοποίηση και αντιμετώπιση φυσικών φαινομένων (π.χ. πυρκαγιά)
- *Ζωολογία*: μοντελοποίηση και ανάλυση των επικρατειών των ζώων
- *Γεωγραφία*: ανάλυση προτύπων αστικών οικισμών
- *Αστρονομία*: αναγνώριση συμπλεγμάτων αστεριών και γαλαξιών.
- *Πληροφορική*: χρήση σε 3D γραφικά και μοντελοποίηση δικτύων

Εικόνα 2.1. *Διάγραμμα Voronoi σε χάρτη για πυρκαγιά*

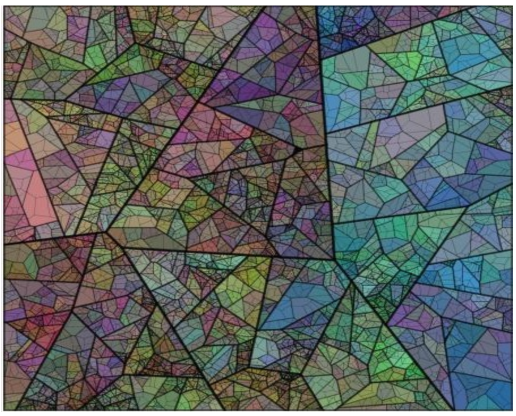
Εικόνα 2.2. *Tube Station Map – London Underground [Source]*



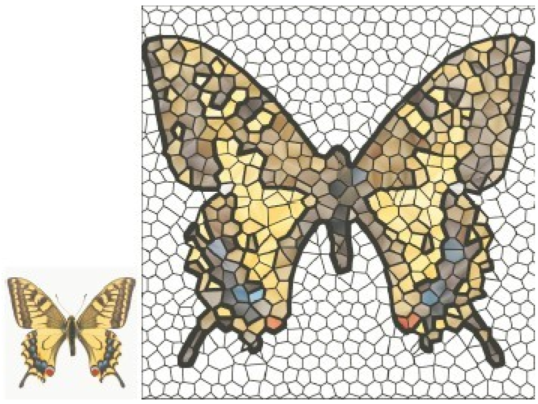
Εικόνα 2.3*. Σχεδιασμός ηλιακού συστήματος από Rene Descartes 1644 Wiki*



Εικόνα 2.4. *Αναπαράσταση 17.168 μετεωρολογικών σταθμών*



Εικόνα 2.5



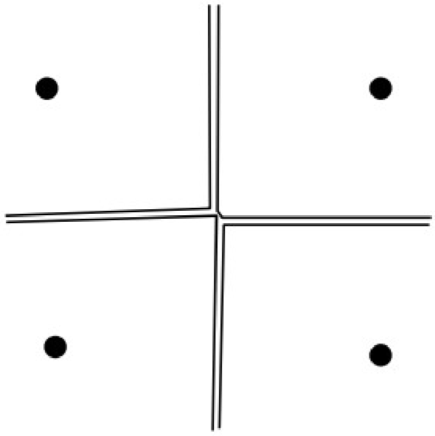
Εικόνα 2.6

3. Αλγόριθμοι για δημιουργία διαγράμματος Voronoi

3.1. Άπληστος αλγόριθμος (Naive Algorithm)

Για κάθε σημείο p_i κατασκευάζουμε τη περιοχή Vononoi V_i .

- Προβλήματα ακρίβειας → ασυνέπεια διαγράμματος (***Εικόνα 3.1.1***)
- Δεν παράγει άμεσες πληροφορίες για τις γειτονικές περιοχές.
- Για την κατασκευή κάθε περιοχής απαιτείται χρόνος *Θ(nlogn)*
- Χρόνος για τη δημιουργία ολόκληρου του διαγράμματος: $O(n^2 logn)$

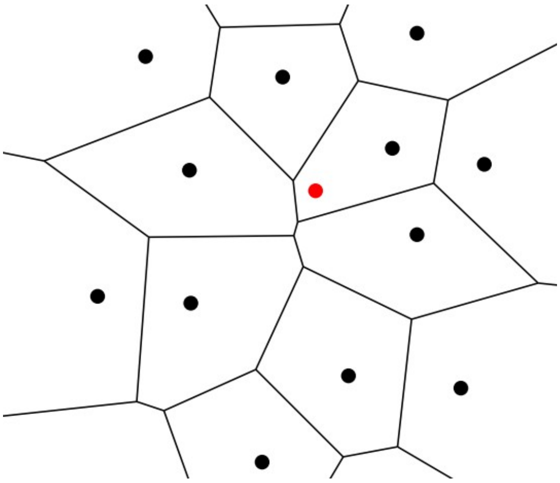


Εικόνα 3.1.1 *Σχεδιασμός διαγράμματος Voronoi με άπληστο αλγόριθμο*

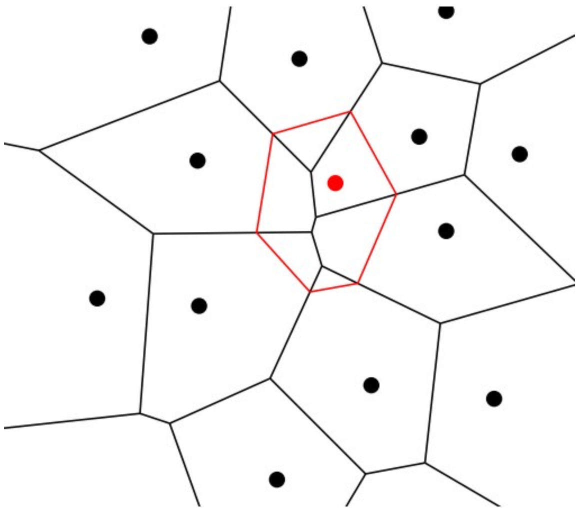
3.2. Αυξητικός αλγόριθμος (Incremental Algorithm)

- Αρχίζουμε με το διάγραμμα Voronoi με σημεία $\boldsymbol{P=\{p_1,.., p_i\}}$.
- Προσθέτουμε το σημείο $\boldsymbol{p_{i+1}}$ και εξερευνούμε όλα τα υποψήφια σημεία, ώστε να βρούμε το σημείο $\boldsymbol{p_j}$ (1 ≤ j ≤ i) που βρίσκεται πιο κοντά στο σημείο $\boldsymbol{p_{i+1}}$ (***Εικόνα 3.2.1***)
- Υπολογισμός της περιοχής - κατασκευή των συνόρων (***Εικόνα 3.2.2***)
- Περικοπή-αλλαγή του αρχικού διαγράμματος (***Εικόνα 3.2.3***)

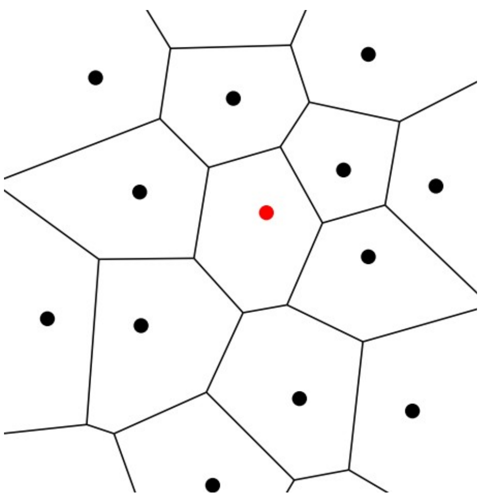
➢ Κάθε βήμα απαιτεί χρόνο *O(i)* →*Συνολικός χρόνος* $O(n^2)$



Εικόνα 3.2.1



Εικόνα 3.2.2

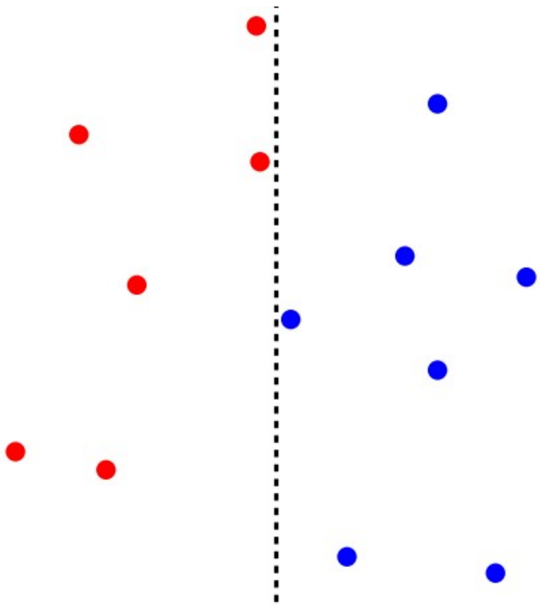


Εικόνα 3.2.3

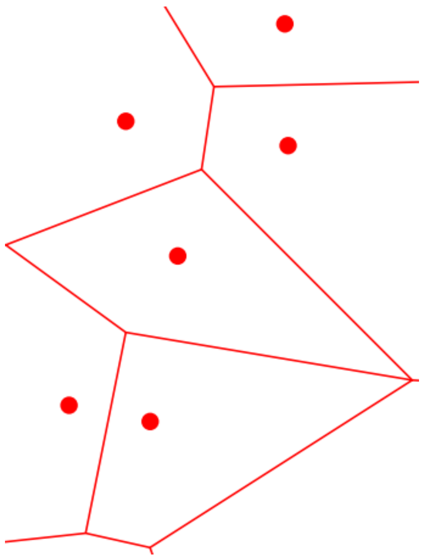
3.3. Διαίρει και βασίλευε (Divide and Conquer Algorithm)

1. Preprocess
   - Ταξινόμηση των σημείων $\boldsymbol{P}=\{\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{p_2}, \ldots\}$ με βάση την τετμήμενη τους
2. Διαίρεση (Division)
   - Κάθετη κατάτμηση (partition) του P σε 2 υποσύνολα R και B, περίπου ίδιου μεγέθους. ***(Εικόνα 3.3.1)***
3. Αναδρομή (Recursion)
   - Αναδρομικός υπολογισμός των περιοχών Voronoi για R και B ***(Εικόνα 3.3.2)***
4. Συγχώνευση (Merging)
   - Υπολογισμός της διαχωριστικής αλυσίδας ***(Εικόνα 3.3.3)***
   - “Κλάδεμα” της περιοχής Voronoi του R που βρίσκεται δεξιά της αλυσίδας και της περιοχής Voronoi του B που βρίσκεται στα αριστερά της αλυσίδας ***(Εικόνα 3.3.4)***

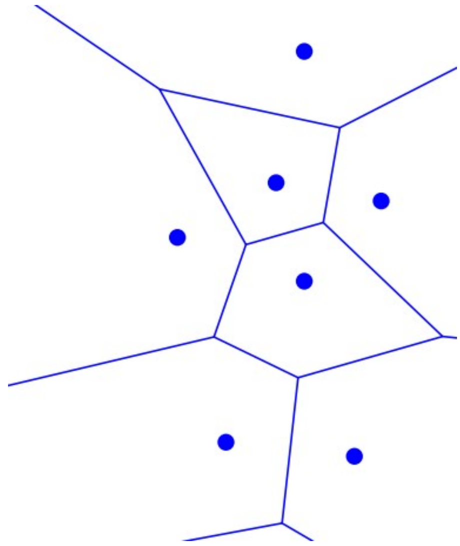
- Συνολικός χρόνος *O(nlogn)*



Εικόνα 3.3.1

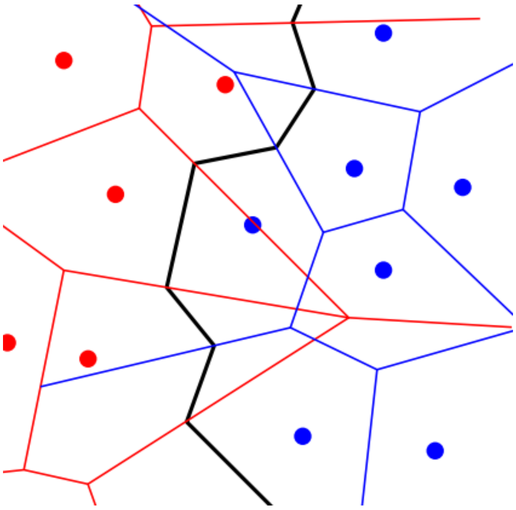


Εικόνα 3.3.2.a

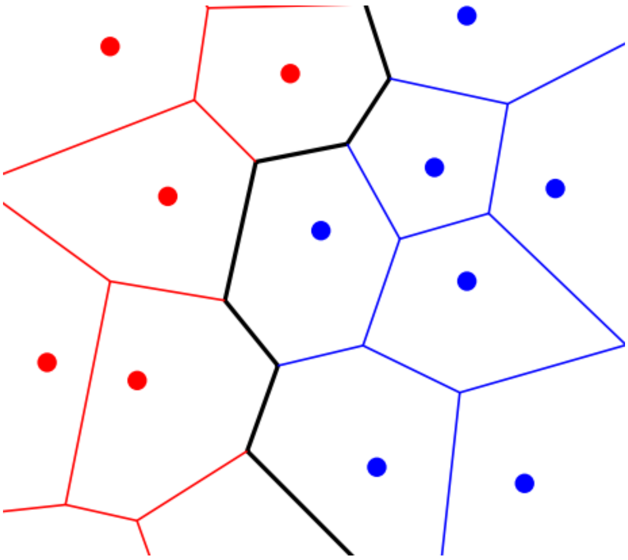


Εικόνα 3.3.2.b

Εικόνα 3.3.2



Εικόνα 3.3.3



Εικόνα 3.3.4

Βιβλιογραφία

[1] https://dccg.upc.edu/people/vera/wp-content/uploads/2013/06/GeoC-Voronoi-algorithms.pdf

[2] https://www.ics.uci.edu/~eppstein/gina/scot.drysdale.html

[3] https://en.wikipedia.org/wiki/Voronoi_diagram

[4] https://onionesquereality.wordpress.com/2008/12/13/voronoi-art/