# Introducción

#### **Deisy Chaves**

Oficina 10, 4<sup>rto</sup> Piso, Edificio B13 deisy.chaves@correounivalle.edu.co

# Universidad del Valle

#### Contenido

- Introducción
- Errores
  - Exactitud y precisión
- Errores de redondeo
  - Definición
  - Conversiones
  - Representación
- Errores de truncamiento
  - Definición
  - Series de Taylor
- Redes neuronales: motivación



#### Simulación

- La Simulación se define como la técnica que imita el funcionamiento de un sistema del mundo real evolucionando en el tiempo, WINSTON (1994)
- La simulación representa cada una de las características de un sistema real mediante la construcción de un modelo
- El proceso de simulación incluye la ejecución del modelo, en una computadora, permitiendo medir el desempeño del sistema



# Aplicaciones de la Simulación

- Problemas teóricos en áreas de ciencias básicas (Matemáticas, Física, Química)
  - Estimación del área encerrada por una curva, incluyendo la evaluación de integrales múltiples
  - Solución de ecuaciones diferenciales parciales
- Problemas prácticos en diversas áreas del conocimiento
  - Simulación de problemas comerciales y económicos, como la operación de una compañía, conducta de los clientes
  - Simulación de sistemas biomédicos, como distribución de electrolitos en el cuerpo humano

# Modelo Matemático

 Un modelo matemático se define generalmente como una ecuación que expresa las relaciones existentes entre las características/variables esenciales de un sistema

$$vd = f(vi, params, ie)$$

- Donde:
  - vd = variable dependiente
  - **vi** = variable independiente
  - params = parámetros
  - ie = influencias externas



# Modelo Matemático

- La solución de un modelo matemático puede ser:
  - Analítica que satisface la exactitud de la ecuación
  - Numérica que reformula el problema matemático para resolverlo mediante operaciones aritméticas

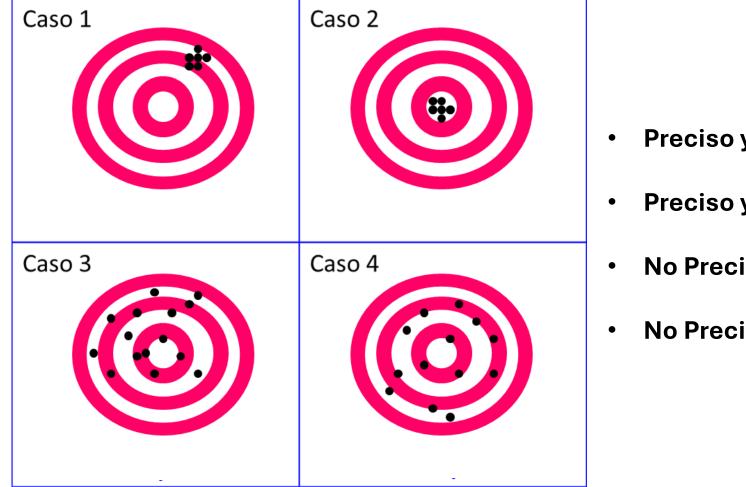


# Exactitud y Precisión

- Una aproximación numérica es un valor cercano a uno considerado como real o verdadero. Esta cercanía, o diferencia, se conoce como error
- La solución dada por un método numérico debe ser lo suficientemente exacta y precisa
  - **Exactitud** se refiere a la aproximación de un número o de una medida al valor verdadero que se supone representa
  - Precisión se refiere a qué tan cercanos se encuentran, unos de otros, diversos valores calculados o medidos y están relacionados al número de cifras significativas usadas para representar una cantidad

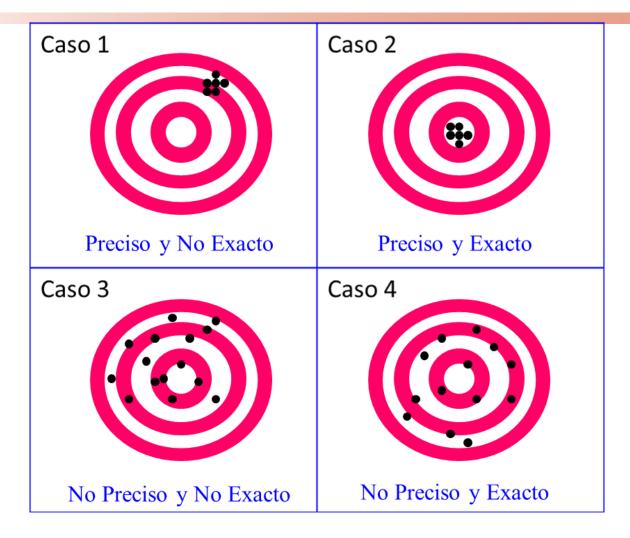


# A qué corresponde cada caso?



- **Preciso y Exacto**
- **Preciso y No Exacto**
- No Preciso y Exacto
- No Preciso y No Exacto





#### **Error**

 Los errores surgen del uso de aproximaciones para representar operaciones y cantidades matemáticas exactas

 $Valor\ Verdadero = Valor\ Aproximado + Error\ Absoluto$ 

Error Absoluto = ?

Error Relativo = ?

#### Error

 Los errores surgen del uso de aproximaciones para representar operaciones y cantidades matemáticas exactas

 $Valor\ Verdadero = Valor\ Aproximado + Error\ Absoluto$ 

 $Error\ Absoluto = Valor\ Verdadero - Valor\ Aproximado$ 

$$Error \ Relativo = \left| \frac{Error \ Absoluto}{Valor \ Verdadero} \right| \times 100\%$$



## Ejercicio

- La longitud de un puente peatonal es de 10m y al realizar su medición se obtuvo 9.99 m. Por otra parte,
  - la longitud de un tornillo es de 10 cm y al realizar la medición se obtuvo 9 cm.
- ✓ Calcule el error absoluto en cada caso y el error relativo asociado

## Ejercicio

- La longitud de un puente peatonal es de 10m y al realizar su medición se obtuvo 9.99 m. Por otra parte,
  - la longitud de un tornillo es de 10 cm y al realizar la medición se obtuvo 9 cm.
- ✓ Calcule el error absoluto en cada caso y el error relativo asociado

Error Absoluto Puente = 10m-9.99m = 0.01m = 1cm

Error Absoluto Tornillo = 10cm - 9cm = 1cm

### Ejercicio

- La longitud de un puente peatonal es de 10m y al realizar su medición se obtuvo 9.99 m. Por otra parte,
  - la longitud de un tornillo es de 10 cm y al realizar la medición se obtuvo 9 cm.
- ✓ Calcule el error absoluto en cada caso y el error relativo asociado

Error Absoluto Puente = 10m-9.99m = 0.01m = 1cm

Error Absoluto Tornillo = 10cm - 9cm = 1cm

Error Relativo Puente = (1/1000)\*100% = **0.1**% Error Relativo Tornillo = (1/10)\*100% = **10**%

#### Error con Métodos Iterativos

 Los métodos iterativos son aquellos que encuentran la solución mediante una serie de aproximaciones hasta cumplir un criterio de convergencia o de parada

$$Error\ Aproximado = \left| \frac{Solucion_{i} - Solucion_{i-1}}{Solucion_{i}} \right| \times 100\%$$



#### Error con Métodos Iterativos

• El criterio de parada consiste en encontrar un error de aproximación dentro de un rango o nivel de tolerancia para el error, tol

• Para calcular tol, se puede usar el criterio

$$tol = \left(0.5 \times 10^{2-n}\right)\%$$

donde n es la cantidad de cifras significativas correctas deseadas en la aproximación

 Las cifras significativas de un número son aquellas que pueden utilizarse en forma confiable



- Redondeo: asociado con el numero limitado de dígitos con que se representan los números en una computadora
- Truncamiento: debido a las aproximaciones utilizadas en la formula matemática del modelo.
  - Las soluciones numéricas son en su mayoría aproximaciones de las soluciones exactas, las series de Taylor es el medio mas importante usado para obtener modelos numéricos
- Otros: error humano, errores de formulación del modelo



 Redondeo: asociado con el numero limitado de dígitos con que se representan los números en una computadora

• **Ejemplo:** Aproxime a 4 dígitos

 $\leftarrow$  0.17354 99

 $\leftarrow$  0.99995 00

 $\leftarrow$  0.4321609



 Redondeo: asociado con el numero limitado de dígitos con que se representan los números en una computadora

• Ejemplo: Aproxime a 4 dígitos

```
0.1735 \leftarrow 0.1735499
```

$$1.000 \leftarrow 0.9999500$$

$$0.4322 \leftarrow 0.4321609$$



- Redondeo: asociado con el numero limitado de dígitos con que se representan los números en una computadora
- **Ejemplo:** Suponga que un ordenador sólo almacenara cuatro cifras decimales. Entonces almacenaría 1/3 como 0.3333 y 2/3 como 0.6667, donde el ordenador ha "redondeado" el último dígito de 2/3

$$2\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{2}{3} = ?$$



- Redondeo: asociado con el numero limitado de dígitos con que se representan los números en una computadora
- **Ejemplo:** Suponga que un ordenador sólo almacenara cuatro cifras decimales. Entonces almacenaría 1/3 como 0.3333 y 2/3 como 0.6667, donde el ordenador ha "redondeado" el último dígito de 2/3

$$2\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{2}{3} = 0.6666 - 0.6667 = -0.0001$$



• Estudio sobre errores desarrollado por McCracken y Dorn, 1984

Ejemplo. Sumar las cantidades siguientes, primero en orden ascendente y luego en orden descendente, considerando una mantisa normalizada de cuatro dígitos así como redondeo simétrico en cada operación intermedia; por otra parte, realice la suma exacta (con todos los dígitos posibles en un calculadora) y considere este valor como exacto. Calcule el error relativo que se comete en cada caso.

- 1.  $0.2685x10^4$
- 2.  $0.9567x10^3$
- 3.  $0,0053x10^2$
- 4.  $0,1111x10^1$



• Estudio sobre errores desarrollado por McCracken y Dorn, 1984

Cuadro 2: Suma descendente

Cantidad	Cantidad Normalizada	Subtotal
$0,2685x10^4$	$0,2685x10^4$	
$0,9567x10^3$	$0,09567x10^4$	$0,3642x10^4$
$0,0053x10^2$	$0,0001x10^4$	$0,3643x10^4$
$0,1111x10^1$	$0,0001x10^4$	$0,3644x10^4$

Cuadro 3: Suma ascendente

Cantidad	Cantidad Normalizada	Subtotal
$0,1111x10^1$	$0,1111x10^1$	
$0,0053x10^2$	$0,0530x10^{1}$	$0,1614x10^{1}$
$0.9567x10^3$	$95,67.x10^{1}$	$95,8341x10^{1}$
$0,2685x10^4$	$268,5x10^{1}$	$363,3341x10^1$

Cuadro 4: Comparación de resultados

	Resultado	Error absoluto	Error relativo
Valor exacto	3643,341		
Suma descendente	$0,3664x10^4$	20,659	$0,\!56703\%$
Suma ascendente	$363,3341x10^{1}$	10	$0,\!27447\%$



Estudio sobre errores desarrollado por McCracken y Dorn, 1984

Cuadro 2: Suma descendente

Cantidad	Cantidad Normalizada	Subtotal
$0,2685x10^4$	$0,2685x10^4$	
$0,9567x10^3$	$0,09567x10^4$	$0,3642x10^4$
$0,0053x10^2$	$0,0001x10^4$	$0,3643x10^4$
$0,1111x10^1$	$0,0001x10^4$	$0,3644x10^4$

Cuadro 3: Suma ascendente

Cantidad	Cantidad Normalizada	Subtotal
$0,1111x10^1$	$0,1111x10^{1}$	
$0,0053x10^2$	$0,0530x10^{1}$	$0,1614x10^{1}$
$0,9567x10^3$	$95,67.x10^{1}$	$95,8341x10^{1}$
$0,2685x10^4$	$268,5x10^{1}$	$363,3341x10^{1}$

Cuadro 4: Comparación de resultados

	Resultado	Error absoluto	Error relativo
Valor exacto	$3643,\!341$		
Suma descendente	$0,3664x10^4$	20,659	0,56703%
Suma ascendente	$363,3341x10^{1}$	10	$0,\!27447\%$

- Cuando se van a sumar y/o restar números, se debe trabajar siempre con los más pequeños primero
- De ser posible, evitar la sustracción de dos números aproximadamente iguales
- Una expresión del tipo a(b c) puede reescribirse de la forma ab - ac. Si hay números aproximadamente iguales dentro del paréntesis, ejecutar la resta antes que la multiplicación
- Cuando no se aplica ninguna de las reglas anteriores, debe minimizarse el número de operaciones aritméticas



- Redondeo: asociado con el numero limitado de dígitos con que se representan los números en una computadora
- Truncamiento: debido a las aproximaciones utilizadas en la formula matemática del modelo.
- **Ejemplo:** Trunque a 5 dígitos

```
0.17354 \leftarrow 0.1735499
```

$$0.99995 \leftarrow 0.9999500$$

$$0.43216 \leftarrow 0.4321609$$



#### Sistema Binario

- El sistema binario, o base 2, es el mas apropiado para representar números en un computador, pues utiliza solo DOS dígitos: 0 y 1
- Convertir el número decimal (69)<sub>10</sub> a formato binario

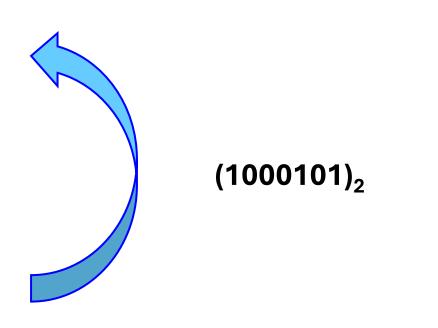


#### Conversión de Decimal a Binario

 El sistema binario, o base 2, es el mas apropiado para representar números en un computador, pues utiliza solo DOS dígitos: 0 y 1

Convertir el número decimal (69)<sub>10</sub> a formato binario







• Convertir el número binario (1000101)<sub>2</sub> al formato decimal

 Convertir el número binario (1000101)<sub>2</sub> al formato decimal

$$1x2^{6} + 0x2^{5} + 0x2^{4} + 0x2^{3} + 1x2^{2} + 0x2^{1} + 1x2^{0}$$
 $64 + 4 + 1$ 
 $(69)_{10}$ 

 Convertir el número binario (1000101)<sub>2</sub> al formato decimal

$$1x2^{6} + 0x2^{5} + 0x2^{4} + 0x2^{3} + 1x2^{2} + 0x2^{1} + 1x2^{0}$$
 $64 + 4 + 1$ 
 $(69)_{10}$ 

 Este tipo de representación se llama notación posicional

 Convertir el numero binario (1000101)<sub>2</sub> al formato decimal

$$1x2^{6} + 0x2^{5} + 0x2^{4} + 0x2^{3} + 1x2^{2} + 0x2^{1} + 1x2^{0}$$
 $64 + 4 + 1$ 
 $(69)_{10}$ 

 ¿Cuántos bits son necesarios para representar el número binario (1000101)<sub>2</sub>



- Los computadores representan los números reales, de una forma muy similar a como lo hacen las calculadoras científicas, llamada, representación en punto flotante.
- Generalmente, se usa el estándar establecido por el IEEE (Institute of Electrical and Electronics Engineers)



Un número en punto flotante tiene 3 componentes:

$$(-1)^{Signo} \times Mantisa \times Base^{Exponente}$$

Signo | Exponente (con signo) | Mantisa(numero positivo)

- El **signo** determina si el numero es positivo o negativo, y corresponde a un único bit al inicio de la representación
- La mantisa como el exponente pueden codificarse de distintas maneras. La cantidad de bits que se utilizan para cada uno determina el rango de números reales que se podrá representar



 Cuando se usa 2 como la base de la representación, que es lo mas común, el numero representado puede interpretarse como:

$$(-1)^{Signo} \times (1 + Mantisa) \times 2^{Exponente}$$

La *Mantisa*, corresponde a la parte fraccionaria

Por ejemplo, si el bit de signo es un uno, el exponente es 2 y la mantisa es 1.625, el numero representado es:

 Cuando se usa 2 como la base de la representación, que es lo mas común, el numero representado puede interpretarse como:

$$(-1)^{Signo} \times (1 + Mantisa) \times 2^{Exponente}$$

La *Mantisa*, corresponde a la parte fraccionaria

Por ejemplo, si el bit de signo es un uno, el exponente es 2 y la mantisa es 1.625, el numero representado es:

$$(-1)\times 1.625\times 2^2 = -6.5$$



# Épsilon de la Maquina

El épsilon de la máquina es el número x positivo más pequeño tal que 1 + x puede representarse de manera precisa en la máquina

En el sistema binario, el épsilon de la máquina es igual a  $2^{-n}$  donde n es la longitud de la mantisa sin tomar en cuenta el dígito del punto flotante

```
import sys
sys.float_info.epsilon
2.220446049250313e-16
```



## Overflow y Underflow

 Desbordamiento (overflow): Se representa como NaN. Ejemplo: https://www.youtube.com/watch?v=5tJPXYA0Nec

```
print("Simple program for showing overflow error")
import math
print("The exponential value is")
print(math.exp(1000))
```

 Subdesbordamiento (underflow): Se redondea el valor a cero



## Cero, Infinito y NaN

- El estándar IEEE hay
  - Dos formas de cero +0 y -0
  - Dos formas de infinito +∞ y -∞
  - NaN (Not a Number) se asigna a operaciones indeterminadas, como 0/0



## Aritmética con Redondeo

- El estándar IEEE-754 exige que el resultado de las operaciones sea el mismo que se obtendrá si se realizan con precisión absoluta y después se redondean
- Hay 4 modos de redondeo:
  - 1. redondeo a cero (truncamiento)
  - 2. redondeo al entero más cercano, llamado brevemente redondeo
  - 3. redondeo a más infinito (techo)
  - 4. redondeo a menos infinito (piso)



# Causas Principales de Errores en los Métodos Numéricos

- Redondeo: asociado con el numero limitado de dígitos con que se representan los números en una computadora
- <u>Truncamiento</u>: debido a las aproximaciones utilizadas en la formula matemática del modelo.

Las soluciones numéricas son en su mayoría aproximaciones de las soluciones exactas, las **Series de Taylor** es el medio mas importante usado para obtener modelos numéricos

 Otros: error humano, errores de formulación del modelo

- Gran parte de los métodos numéricos se basan en la aproximación de funciones por medio de polinomios
- Por tanto, el error estará asociado con la precisión con la que el polinomio aproxima la función verdadera
- La serie de Taylor es una serie infinita de potencias que representa de manera exacta a una función dentro de un cierto radio alrededor de un punto dado

 Serie de Taylor Truncada: Si ignoramos todos los términos de la serie de Taylor, excepto unos pocos, se puede obtener un polinomio que se aproxima a la función verdadera

 El error del método numérico se origina en el truncamiento y se conoce como error de truncamiento

- La aplicación del teorema de Taylor permite aproximar una función con un polinomio y estimar el error
- Una serie de Taylor es una serie de potencias dada por:

$$f(x) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \frac{h^3}{3!}f'''(a) + \dots$$

• La serie de Taylor es única. Es decir, no existe otra serie de potencias en h=x-a para representar f(x)



- Sea n un entero positivo y  $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ : una función diferenciable n veces en el punto a, entonces
- Una serie de Taylor se expresa generalmente por un número finito de términos

$$f(x) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \dots + \frac{h^n}{n!}f^n(a) + R_n(x)$$

donde

$$R_n(x) = \int_{a}^{x} \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{n+1}(t) dt$$

$$R_{n}(x) = \int_{a}^{x} \frac{(x-t)^{n}}{n!} f^{n+1}(t) dt$$

 Bajo las condiciones del Teorema de Taylor, el residuo puede expresarse como

$$R_n(x) = \frac{f^{n+1}(\xi_x)}{(n+1)!}h^{n+1}$$

• Donde  $\xi_x$  es un punto en el intervalo a y x que depende de x



## **Ejemplo:**

Desarrolle la serie de Taylor de exp(-x) alrededor de a=1

#### **Ejemplo:**

Desarrolle la serie de Taylor de exp(-x) alrededor de a=1

$$\exp(-x) = \exp(-1) + \dots$$

## **Ejemplo:**

Desarrolle la serie de Taylor de exp(-x) alrededor de a=1

$$\exp(-x) = \exp(-1) - h \exp(-1) + \frac{h^2}{2!} \exp(-1) - \frac{h^3}{3!} \exp(-1) + \frac{h^4}{4!} \exp(-1) - \frac{h^5}{5!} \exp(-1) + \dots$$

## Serie de MacLaurin

 El desarrollo de Taylor de una función alrededor de a=0 se conoce como serie de MacLaurin, la serie de MacLaurin de exp(-x) esta dada por:

$$\exp(-x) = 1 - h + \frac{h^2}{2!} - \frac{h^3}{3!} + \frac{h^4}{4!} - \frac{h^5}{5!} + \dots$$



# Serie de Taylor Truncada

- En las aplicaciones reales, es imposible incluir un número infinito de términos de un desarrollo de Taylor
- Si la serie de Taylor se trunca después de un termino de orden *n*, se expresa como

$$f(x) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \dots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a) + O(h^n)$$

donde  $O(h^n)$  representa el error debido al truncamiento de los términos n+1 y superiores

# Serie de Taylor Truncada

• El error global se representa como

$$O(h^n) = R_{n-1}(x) = \frac{f^n(a + \xi_x h)}{n!}h^n$$

• Puesto que  $\xi$  no se puede calcular con exactitud, frecuentemente se supone  $\xi=0$  , entonces

$$O(h^n) \cong f^n(a) \frac{h^n}{n!}; \qquad \xi = 0$$

que es el termino dominante de los términos truncados



# Serie de Taylor Truncada

• Si n=1 la serie de Taylor truncada esta dada por

$$f(x) = f(a) + R_1(x)$$

• Siguiendo el ejemplo, el desarrollo de la serie de Taylor de la función exp(-x) al rededor de a=1, truncada en n=1, esta dada por

$$\exp(-x) = \exp(-1) + R_1(x)$$

• El error esta dado por

$$O(h^1) \cong f^1(a) \frac{h^1}{1!}; \qquad \xi = 0$$

$$O(h^1) \cong -\exp(-1)\frac{(x-1)}{1!}$$

# **Ejercicios**

 Desarrolle las siguientes funciones en serie de Maclaurin truncando en N=3 y exprese el termino de error

a) 
$$\frac{1}{1+x^2}$$

$$b)$$
 tan( $x$ )

$$c) \frac{1}{1-x}$$

$$d$$
)  $ln(1+x)$ 

e) 
$$sen(x)$$

## **Ejercicios**

 Desarrolle las siguientes funciones en serie de Maclaurin truncando en N=3 y exprese el termino de error

**e)** sen(x)
$$f(x) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + ... + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + O(h^n)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\sin x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\sin x$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -\cos x$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -\cos x$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \sin x.$$

$$y = \operatorname{sen} x$$

$$\frac{dy}{dx} = \cos x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\operatorname{sen} x$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -\cos x$$

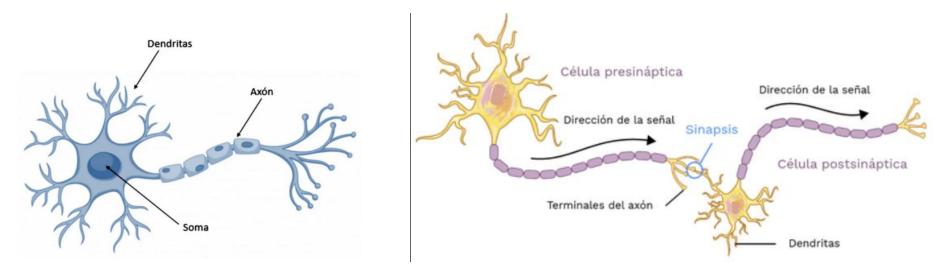
$$\frac{d^4y}{dx^4} = \operatorname{sen} x$$



- El cerebro es un ordenador (sistema de procesamiento de información) sumamente complejo, no lineal y paralelo.
- Organiza sus componentes estructurales, conocidos como **neuronas**, para realizar determinados cálculos
- Por ejemplo, reconocimiento de patrones, percepción y control motor



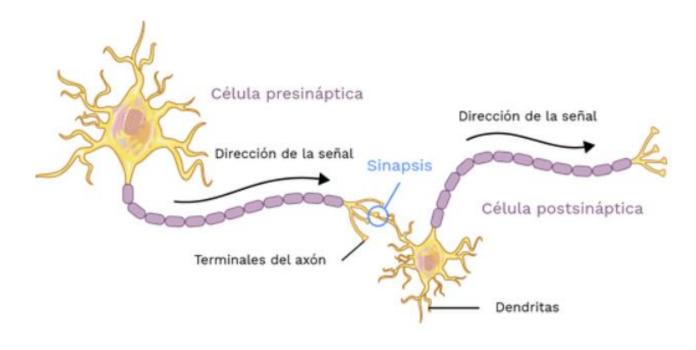
 Neurona biológica es la base del funcionamiento del cerebro. Las neuronas constituyen procesadores de información sencillos



 Elementos de que consta: sinapsis, axón, dentritas y soma o cuerpo



- Sinapsis se le denomina a la unión entre dos neuronas
  - neuronas presinápticas (las que envían las señales)
  - postsinápticas (las que las reciben)
- Las sinapsis son direccionales, es decir, la información fluye siempre en un único sentido.

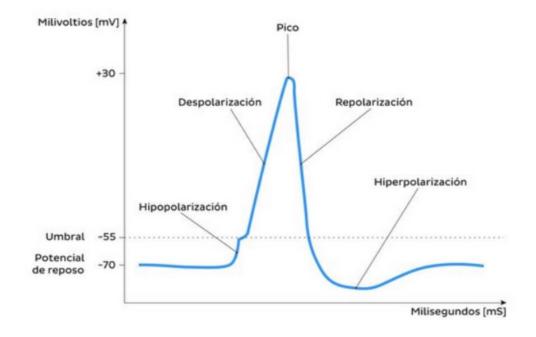




- Aprendizaje se produce a través de la comunicación entre neuronas. Las conexiones entre neuronas, que se fortalecen durante el aprendizaje, son la base de la memoria y la adquisición de nuevas habilidades
- El cerebro es altamente adaptable y puede cambiar su estructura en respuesta al aprendizaje e información que recibe (neuroplasticidad)
- Las señales nerviosas se pueden transmitir eléctrica o químicamente



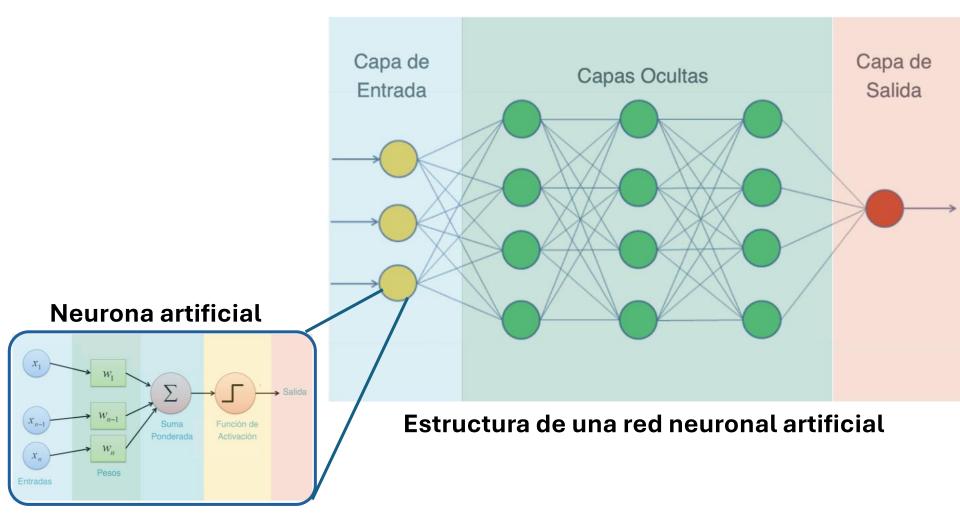
- La transmisión química prevalece fuera de la neurona, mientras que la eléctrica lo hace en el interior
- La transmisión química se basa en el intercambio de neurotransmisores, mientras que la eléctrica hace uso de descargas que se producen en el cuerpo celular, y que se propagan por el axón





## Redes Neuronales Artificiales: Estructura

 Las redes neuronales artificiales "imitan" la estructura jerárquica de redes neuronales biológicas





## Redes Neuronales Artificiales: Definiciones

- Forma de computación inspirada en modelos biológicos
- Un modelo matemático compuesto por un gran número de elementos procesales organizados en niveles
- ...un sistema de computación compuesto por un gran número de elementos simples, elementos de procesos muy interconectados, los cuales procesan información por medio de su estado dinámico como respuesta a entradas externas
- Redes neuronales artificiales son redes interconectadas masivamente en paralelo de elementos simples (neuronas artificiales) y con organización jerárquica, las cuales intentan interactuar con los objetos del mundo real del mismo modo que lo hace el sistema nervioso biológico



## Redes Neuronales Artificiales: Ventajas

 Debido a su constitución y a sus fundamentos, las redes neuronales artificiales presentan muchas características semejantes a las del cerebro, ofreciendo ventajas como:



## Redes Neuronales Artificiales: Ventajas

- Debido a su constitución y a sus fundamentos, las redes neuronales artificiales presentan muchas características semejantes a las del cerebro, ofreciendo ventajas como:
  - Aprendizaje adaptativo: Capacidad de aprender a realizar tareas basadas en un entrenamiento o en una experiencia inicial
  - Auto-organización: Una red neuronal puede crear su propia organización o representación de la información que recibe mediante una etapa de aprendizaje
  - Tolerancia a fallos: Las redes pueden aprender a reconocer patrones con ruido, distorsionados o incompletos (tolerancia a fallos respecto a los datos). Adicionalmente, las redes pueden seguir realizando su función (con cierta degradación) aunque se destruya parte de la red.
  - Operación en tiempo real



## Lecturas Complementarias

Chapra, Steven C. & Canale, Raymond P. Métodos Numéricos para Ingenieros,

- Capítulo 3: Aproximaciones y Errores de redondeo
- Capítulo 4: Errores de Truncamiento y la Serie de Taylor

Martín del Brío, B. & Sanz Molina, A. Redes neuronales y sistemas borrosos,

- Capítulo 1.1: Breve introducción biológica
- Capítulo 1.2: Estructura de un sistema neuronal artificial