UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS

Lista N° 2
Espaços Vetoriais (Base, Dimensão, Posto, Mudança de Base)

---

1. Seja $V = \{a_0 + a_1 t + a_2 \cos 2t + a_3 e^{3t} \,/\, a_i \in \mathbb{R}\,,\, t \in \mathbb{R}\}$
   Demonstrar que as funções: $f_1(t) = 2t - 1$ $\quad f_2(t) = t + \cos 2t$
   $f_3(t) = 3 - e^{3t}$ $\quad f_4(t) = -t + e^{3t}$
   Conformam uma base de V.

2. Seja $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 / x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$
   Demonstrar que os vetores: (2, 0, 0, -2), (2, 0, -2, 0) e (8, -2, -4, -2) conformam uma base de W.

3. Dados os subespaços de $\mathbb{R}^3$
   $S_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0\}$
   $S_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$
   Calcule: $dim\,(S_1 + S_2)$
   [Dica: $dim\,(U + V) = dim\,(U) + dim\,(V) - dim\,(U \cap V)$]

4. Sejam:
   $V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,/\, x - y + z - t = 0\}$
   $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,/\, 2x + y + 2z + t = 0\}$
   Calcule a dimensão dos subespaços: $U \cap V$, $U + V$, $\frac{U \cap V}{U + V}$
   [Dica: $dim\left(\frac{U}{V}\right) = dim\,(V) - dim(U)$]

5. Mostre que $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 9 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -3 & -4 \\ 7 & 12 & 17 \end{pmatrix}$, tem o mesmo espaço coluna.

6. Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$,
   Calcule: $pos(A) + pos(B)$, $nul(A)$ e $nul(B)$

7. Suponha que os eixos x e y no plano $\mathbb{R}^2$ sejam rotacionados em 45° no sentido anti-horário, de tal forma que o novo eixo x' se encontre na reta $x = y$ e o novo eixo y' na reta $x = -y$.
   Calcule:
   a) A matriz de mudança de base P;
   b) As novas coordenadas do ponto $A(5, 6)$ após a rotação indicada.

8. Sejam as bases $S = \{1, j\}$ e $S' = \{1 + j, 1 + 2j\}$ nos complexos $\mathbb{C}$ sobre os reais $\mathbb{R}$.
   Calcule:
   a) A matriz de mudança de base P da base S para S′;
   b) A matriz de mudança de base Q da base S′ para S.