Biểu thức chính quy

Trần Vĩnh Đức

Trường Đại Học Bách Khoa Hà Nội

Ngày 3 tháng 3 năm 2019

Thuật ngữ

- Regular Expression (RE) : Biểu thức chính quy
- Finite Automaton (FA): Otomat hữu hạn
- Deterministic Finite Automaton (DFA) : Otomat hữu hạn đơn định
- Nondeterministic Finite Automaton (NFA): Otomat hữu hạn đa định

Nội dung

Nội dung

Giới thiệu

- Trong số học, người ta dùng các phép toán $+$ và $\times$ để xây dựng các biểu thức, ví dụ

$$(5+3)\times 4.$$

  Giá trị của biểu thức trên là số 32.

- Tương tự, ta có thể dùng các phép toán chính quy để mô tả ngôn ngữ, gọi là Biểu thức chính quy, ví dụ

$$(1 \cup 0)0^*.$$

  Giá trị của biểu thức chính quy trên là ngôn ngữ

$$(\{0\} \cup \{1\})\,\{0\}^*.$$

Ví dụ

- Xét biểu thức chính quy

$$(0 \cup 1)^*.$$

  Giá trị của biểu thức này là ngôn ngữ gồm mọi xâu nhị phân.
- Giá trị của biểu thức chính quy

$$\Sigma^* 1$$

  là mọi xâu kết thúc bởi 1 trên bảng chữ Σ.
- Ngôn ngữ

$$(0\Sigma^*) \cup (\Sigma^* 1)$$

  bao gồm mọi xâu bắt đầu bởi 0 hoặc kết thúc bởi 1 trên bảng chữ Σ.

Ứng dụng của biểu thức chính quy

- Trong các ứng dụng liên quan tới xử lý văn bản.
- Tìm kiếm các xâu thỏa mãn một mẫu nào đó.
- Công cụ như AWK, GREP trong UNIX, và ngôn ngữ hiện đại như PERL cung cấp mẫu dùng biểu thức chính quy.

Nội dung

Biểu thức chính quy

Định nghĩa

*Ta nói R là **biểu thức chính quy** nếu R là*

1. a *với* $a \in \Sigma$,
2. ε,
3. $\emptyset$,
4. $(R_1 \cup R_2)$ *với* R_1 *và* R_2 *là các biểu thức chính quy,*
5. $(R_1 R_2)$ *với* R_1 *và* R_2 *là các biểu thức chính quy,*
6. $(R_1{}^*)$ *với* R_1 *là biểu thức chính quy.*

Giá trị của biểu thức chính quy

Biểu thức R	*biểu diễn ngôn ngữ* R
a	$\{a\}$
ε	$\{\varepsilon\}$
$\emptyset$	$\emptyset$
$(R_1 \cup R_2)$	$R_1 \cup R_2$
$(R_1 R_2)$	$R_1 R_2$
$(R_1{}^*)$	$(R_1)^*$

Các dấu ngoặc có thể bỏ qua. Khi đó, biểu thức chính quy được đánh giá theo thứ tự ưu tiên:

Phép sao rồi đến *Phép ghép* rồi đến *Phép hợp*.

Một vài ký hiệu

- R^* tập mọi xâu tạo được bằng cách ghép 0 xâu hoặc nhiều xâu của R
- $R^+ = RR^*$ tập mọi xâu tạo được bằng cách ghép 1 hoặc nhiều lần các xâu của R. Vậy

$$R^+ \cup \varepsilon = R^*$$

- $R^k = \underbrace{RR \dots R}_{k \text{ lần}}$

Ví dụ

Giả sử $\Sigma = \{0, 1\}$.

- $0^*10^* = \{w \mid w$ chứa chỉ một $1\}$
- $\Sigma^*1\Sigma^* = \{w \mid w$ chứa ít nhất một $1\}$
- $\Sigma^*001\Sigma^* = \{w \mid w$ chứa xâu con $001\}$
- $1^*(01^+)^* = \{w \mid$ sau mỗi 0 của w phải có ít nhất một $1\}$
- $(\Sigma\Sigma)^* = \{w \mid$ độ dài w là số chẵn$\}$
- $(\Sigma\Sigma\Sigma)^* = \{w \mid$ độ dài w chia hết cho $3\}$
- $0\Sigma^*0 \cup 1\Sigma^*1 \cup 0 \cup 1 = \{w \mid$
  w bắt đầu và kết thúc bởi cùng một ký tự$\}$

Ví dụ (tiếp)

- $01 \cup 10 = \{01, 10\}$
- $(0 \cup \varepsilon)1^* = 01^* \cup 1^*$
- $(0 \cup \varepsilon)(1 \cup \varepsilon) = \{\varepsilon, 0, 1, 01\}$
- $1^*\emptyset = \emptyset$
  Ghép mọi tập với tập rỗng đều bằng tập rỗng.
- $\emptyset^* = \{\varepsilon\}$

Chú ý

- $R \cup \emptyset = R$.
- $R \cup \varepsilon$ có thể không bằng R.
- $R\,\varepsilon = R$.
- $R\,\emptyset$ có thể không bằng R.

Ví dụ: Mô tả Hằng số của ngôn ngữ lập trình

- Các hằng số trong một số ngôn ngữ lập trình có thể mô tả bởi biểu thức chính quy sau:

$$(+ \cup - \cup \varepsilon)(D^+ \cup D^+.D^* \cup D^*.D^+)$$

  với $D = \{0, 1, \ldots, 9\}$.
- Ví dụ: 72 3.14159 +7. −.01

Nội dung

Sự tương đương giữa RE và FA

Định lý

*Một ngôn ngữ là chính quy **nếu và chỉ nếu** có một biểu thức chính quy mô tả nó.*

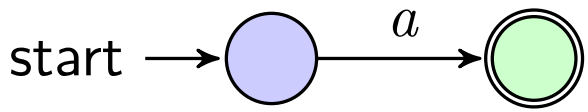
Chứng minh định lý dựa vào hai cách xây dựng sau:

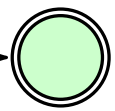
1. RE $\Rightarrow$ NFA
2. DFA $\Rightarrow$ RE.

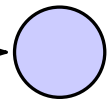
Bổ đề

Nếu một ngôn ngữ được mô tả bởi một biểu thức chính quy, vậy nó là ngôn ngữ chính quy.

Ta sẽ xây dựng NFA N từ biểu thức chính quy R.

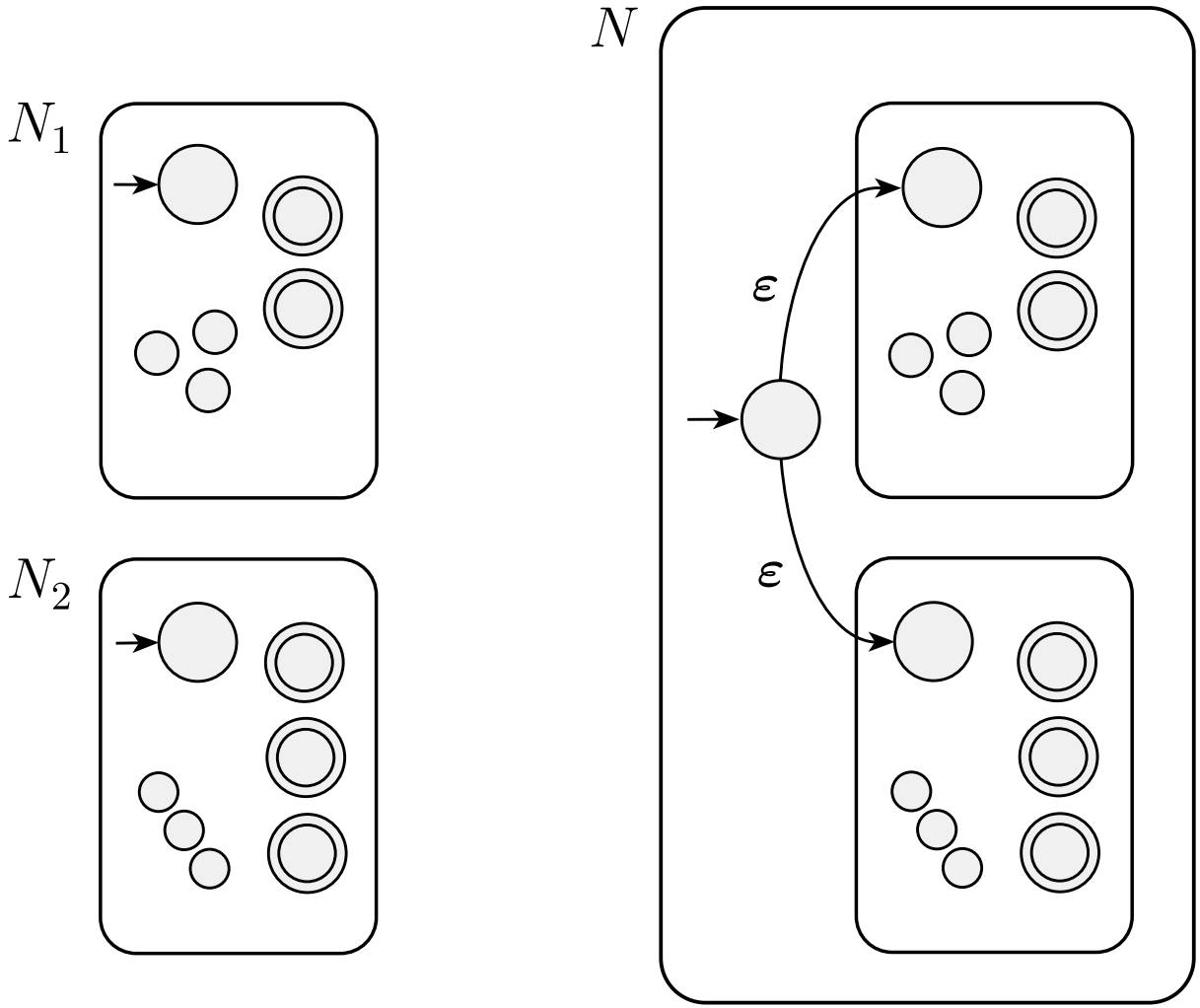
1. $R = a$ với $a \in \Sigma$ 

2. $R = \varepsilon$ 

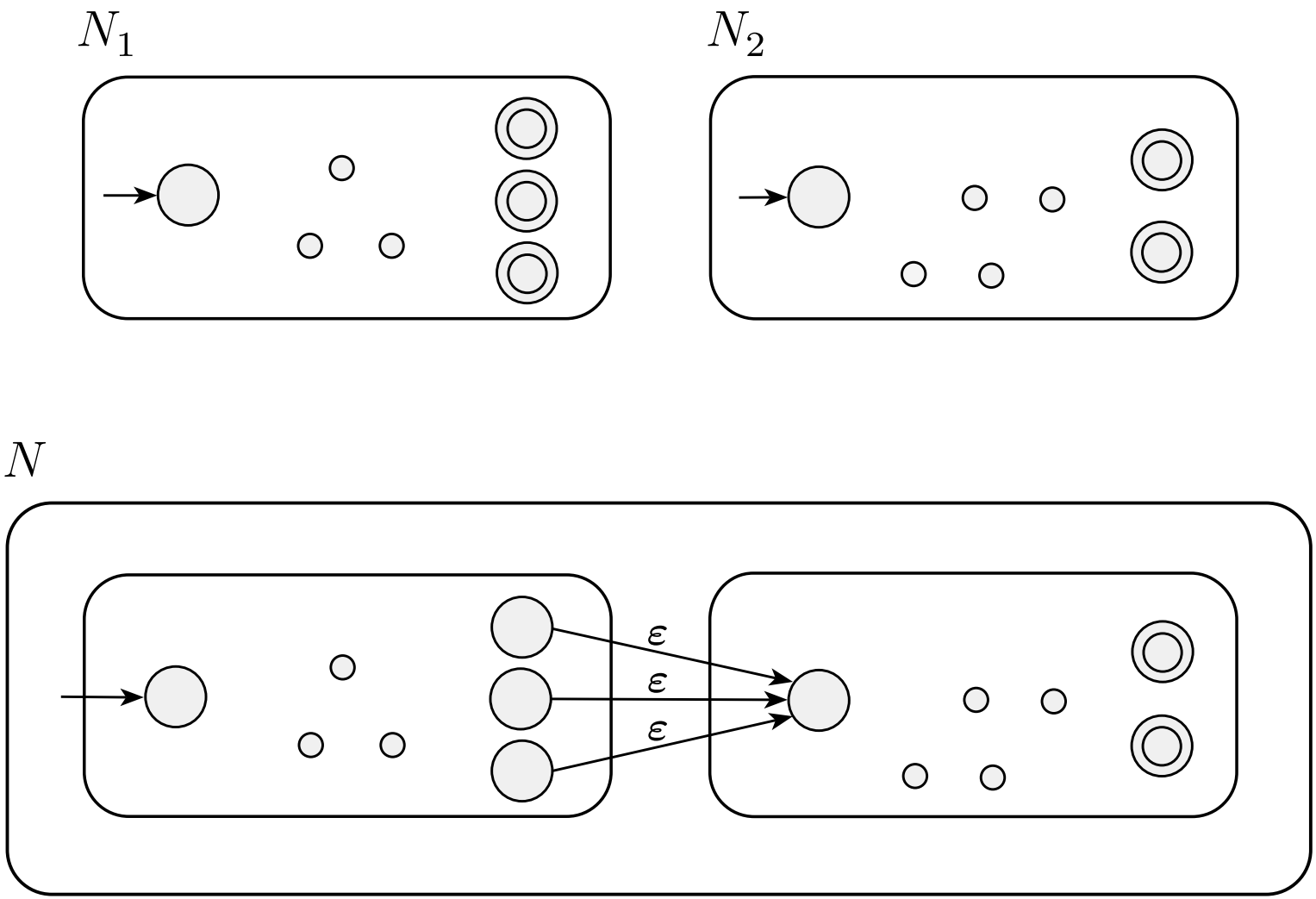
3. $R = \emptyset$ 

4. $R = R_1 \cup R_2$
5. $R = R_1 R_2$
6. $R = {R_1}^*$

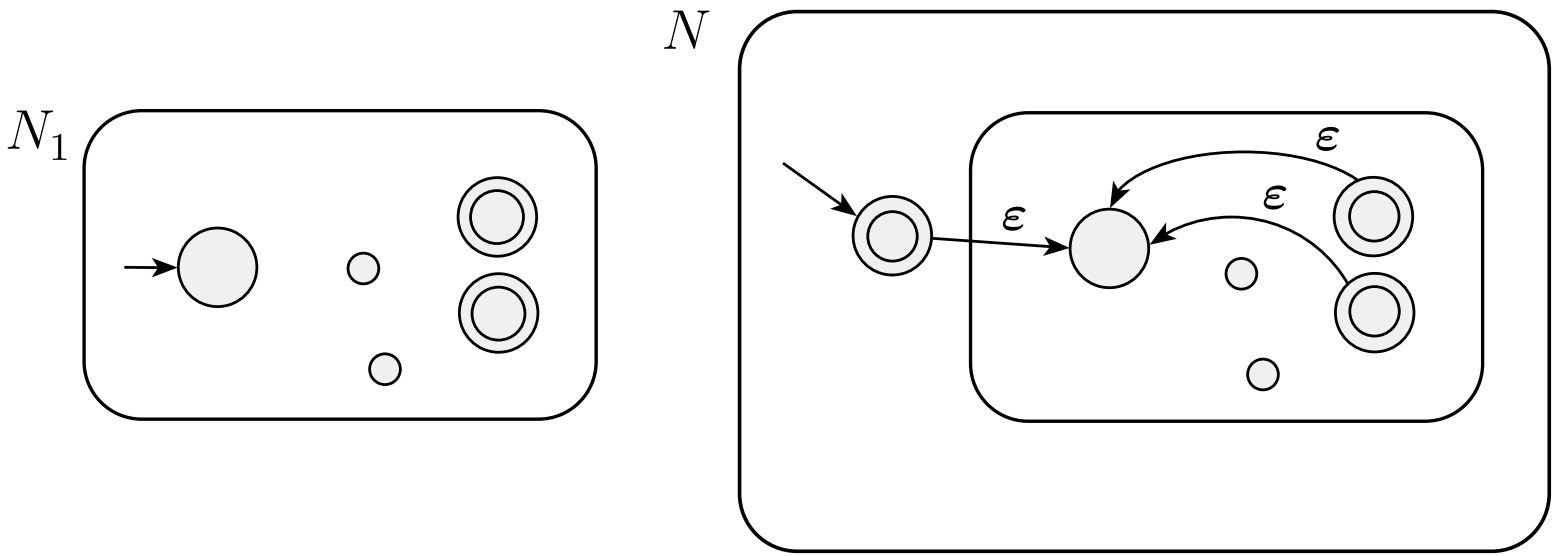
Xây dựng $R = R_1 \cup R_2$



Xây dựng $R = R_1 R_2$

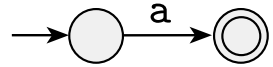


Xây dựng $R = {R_1}^*$

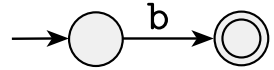


$(\mathtt{ab} \cup \mathtt{a})^*$

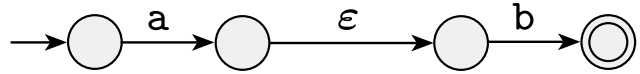
$\mathtt{a}$



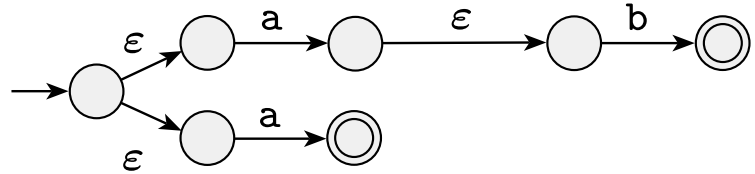
$\mathtt{b}$



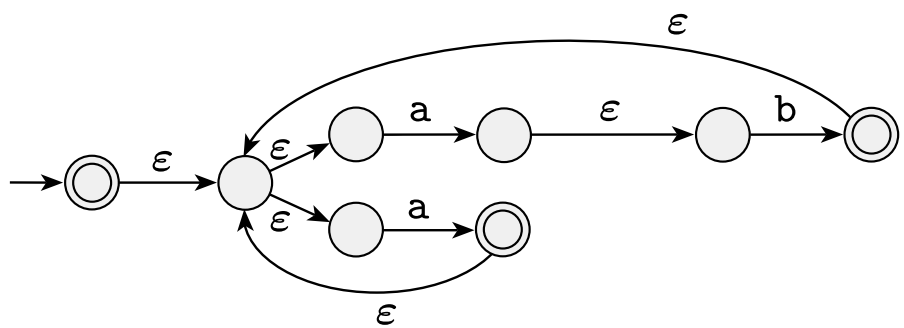
$\mathtt{ab}$



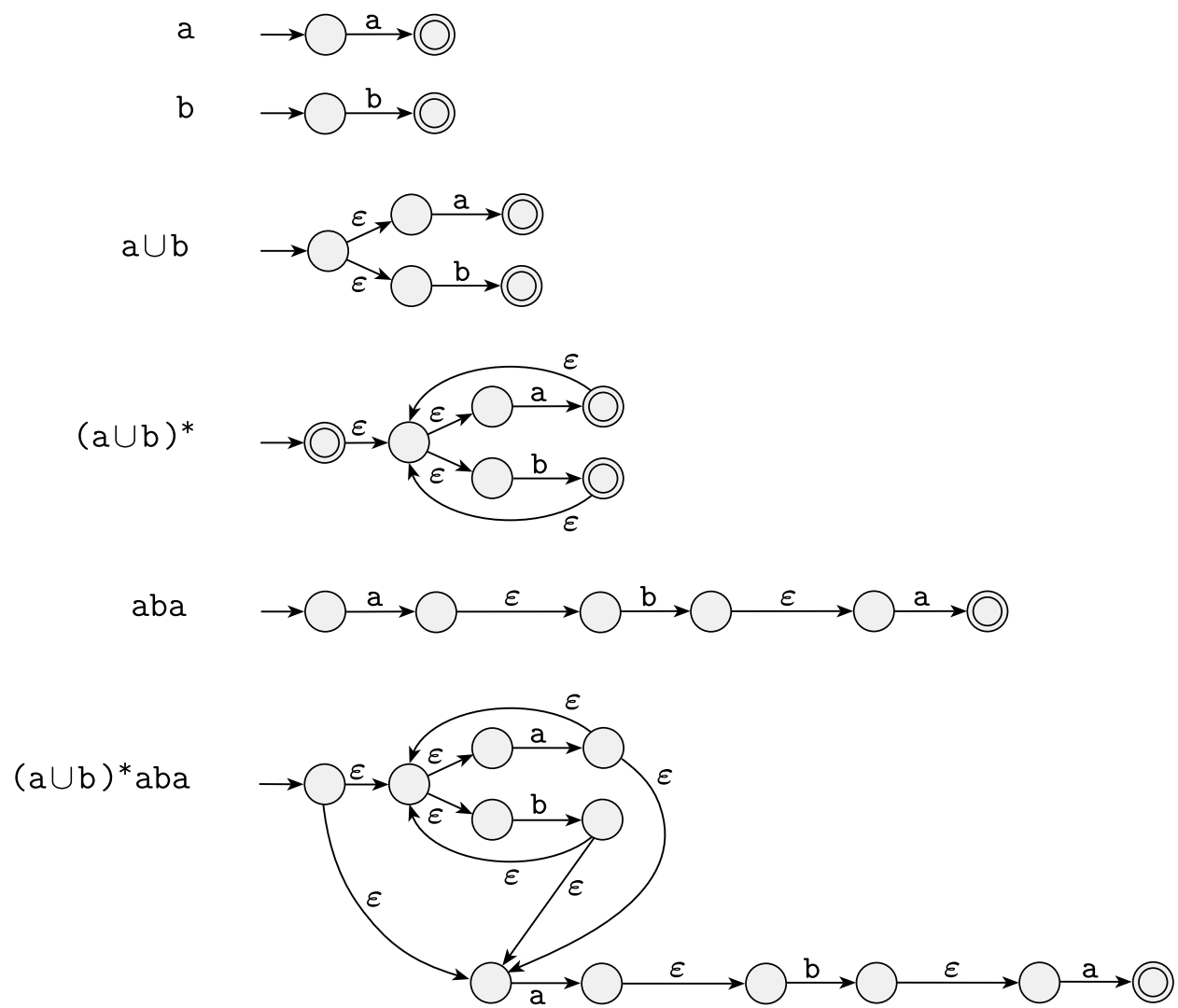
$\mathtt{ab} \cup \mathtt{a}$



$(\mathtt{ab} \cup \mathtt{a})^*$



$(\mathtt{a} \cup \mathtt{b})^*\mathtt{aba}$



Xây dựng RE từ DFA

Bổ đề

Nếu một ngôn ngữ là chính quy, vậy nó được mô tả bởi một biểu thức chính quy.

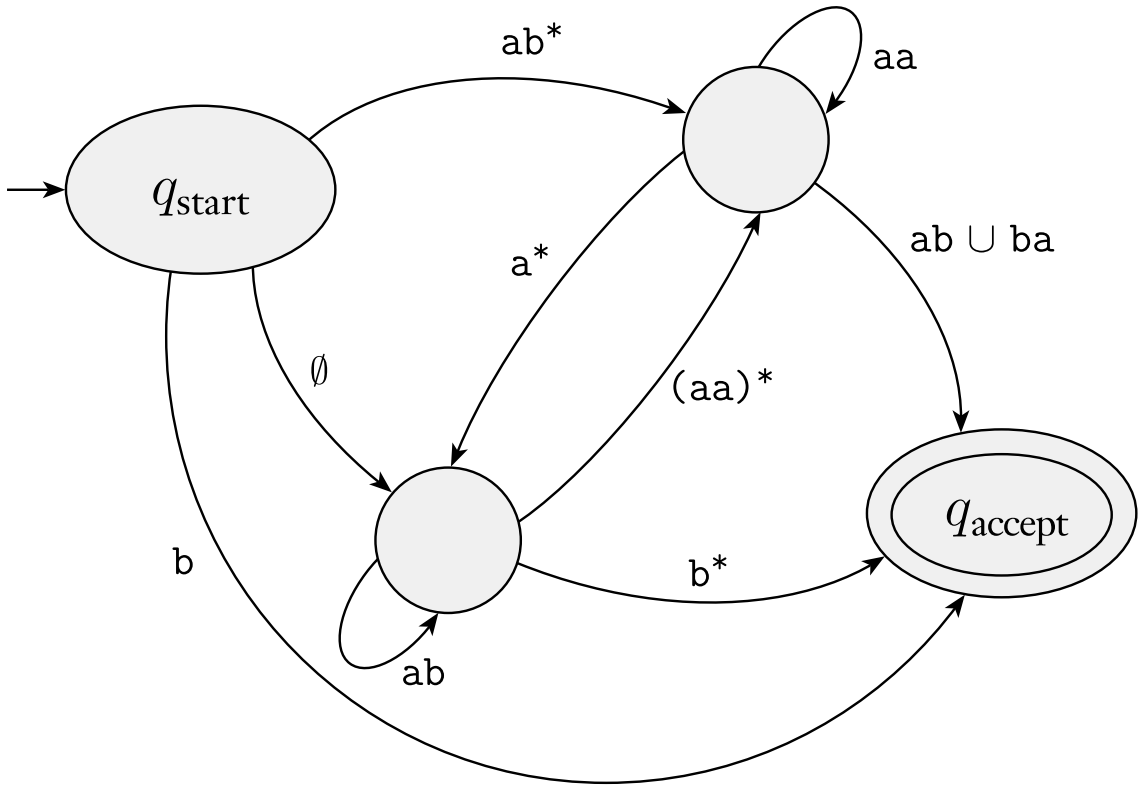
Xây dựng RE từ DFA gồm hai giai đoạn:

1. Chuyển từ DFA thành otomat đa định được tổng quát hóa (GNFA);
2. Chuyển từ GNFA thành RE.

Otomat đa định tổng quát hóa (GNFA)

- GNFA là một NFA ***với các chuyển được gán nhãn bởi một biểu thức chính quy*** thay vì chỉ ε hoặc a.
- Ta yêu cầu GNFA thỏa mãn ba điều sau:
  1. Từ trạng thái bắt đầu *có* mũi tên đi tới mọi trạng thái khác nhưng *không có* mũi tên nào *đến* nó;
  2. Chỉ có một trạng thái kết thúc; và *có mũi tên từ mọi trạng thái khác đi đến nó*, nhưng *không có mũi tên nào từ nó đi ra*. Hơn nữa, nó khác trạng thái bắt đầu.
  3. Trừ trạng thái bắt đầu và kết thúc, mỗi trạng thái có *một mũi tên tới mỗi trạng thái khác*, và cũng có một mũi tên *tới chính nó*.

Ví dụ: Một GNFA đặc biệt



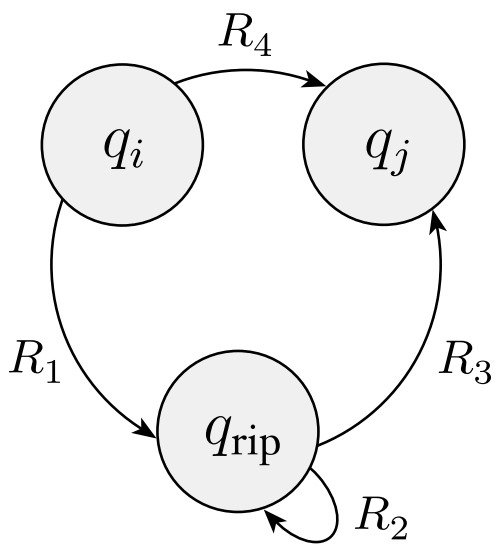
Chuyển từ DFA thành GNFA đặc biệt

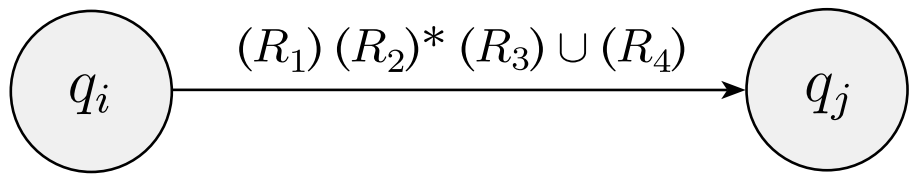
1. Thêm trạng thái mới với một ε-chuyển tới trạng thái bắt đầu cũ;
2. Thêm một trạng thái kết thúc mới và các ε-chuyển từ mỗi trạng thái kết thúc cũ đến nó;
3. Nếu có nhiều mũi tên (cùng hướng) giữa hai trạng thái, ta thay thế bởi một mũi tên với nhãn là hợp của các nhãn trước;
4. Ta có thể thêm mũi tên với nhãn $\emptyset$ giữa các cặp trạng thái không có mũi tên.

Chuyển từ GNFA thành RE

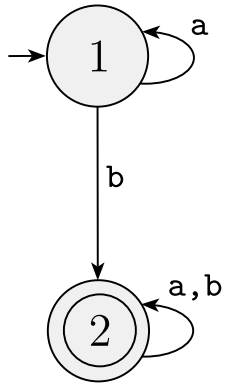
Giả sử GNFA có k trạng thái ($k \geq 2$).

- Nếu $k = 2$ vậy GNFA chỉ có một mũi tên từ trạng thái bắt đầu đến trạng thái kết thúc. Nhãn của mũi tên này chính là RE cần tìm.
- Nếu $k > 2$, ta chọn một trạng thái q_{rip} khác trạng thái bắt đầu và trạng thái kết thúc để loại bỏ, và với mỗi cặp trạng thái q_i, q_j ta sửa lại nhãn của nó theo quy tắc sau:

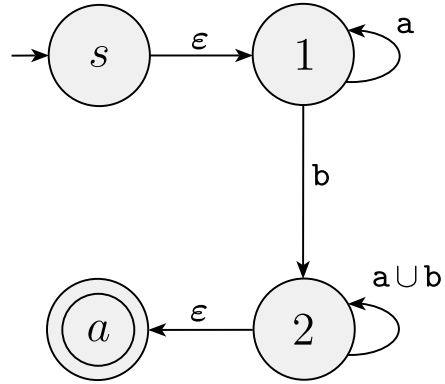




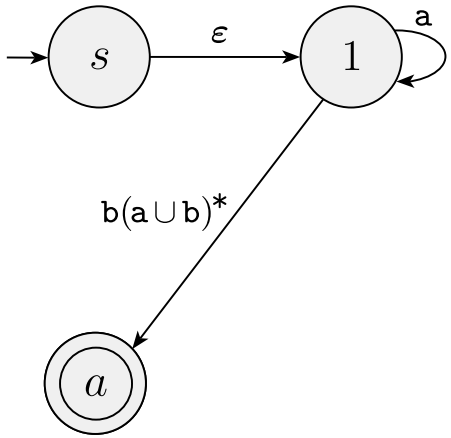
Ví dụ 1

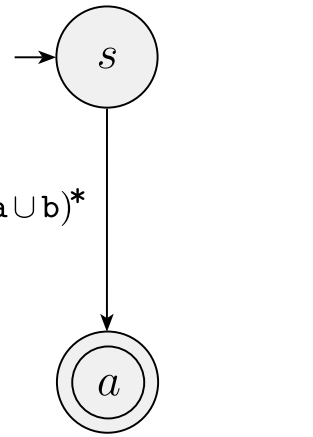


(a)

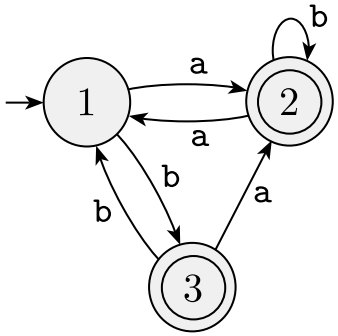


(b)

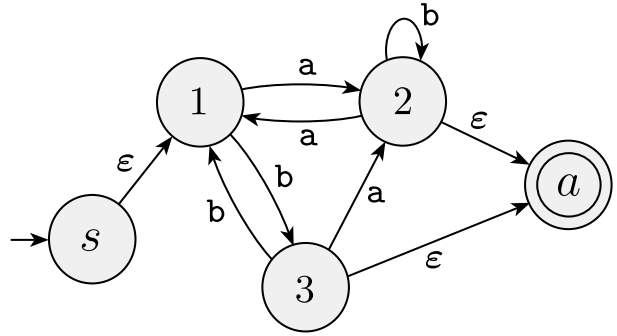




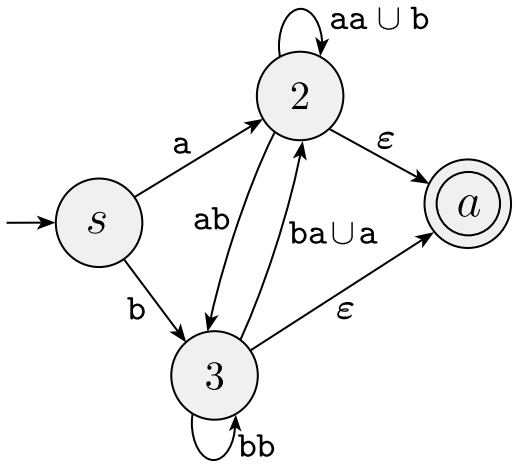
Ví dụ 2


1
2
3
a
a
b
b
a
b

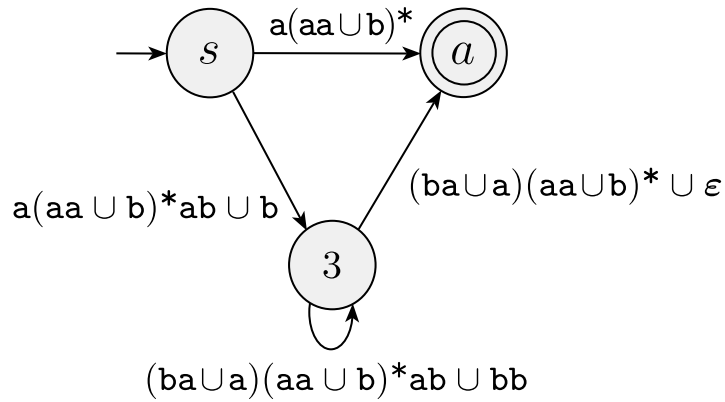
(a)


s
1
2
3
a
ε
a
b
b
a
b
ε
ε

(b)

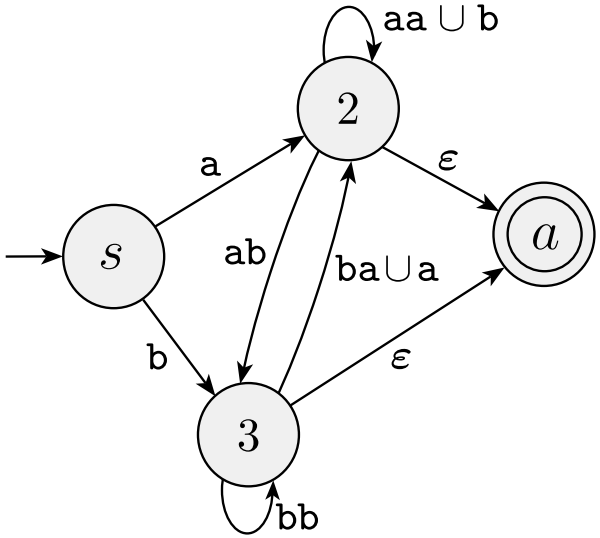

s
2
3
a
aa ∪ b
a
ε
ab
ba∪a
b
ε
bb

(c)

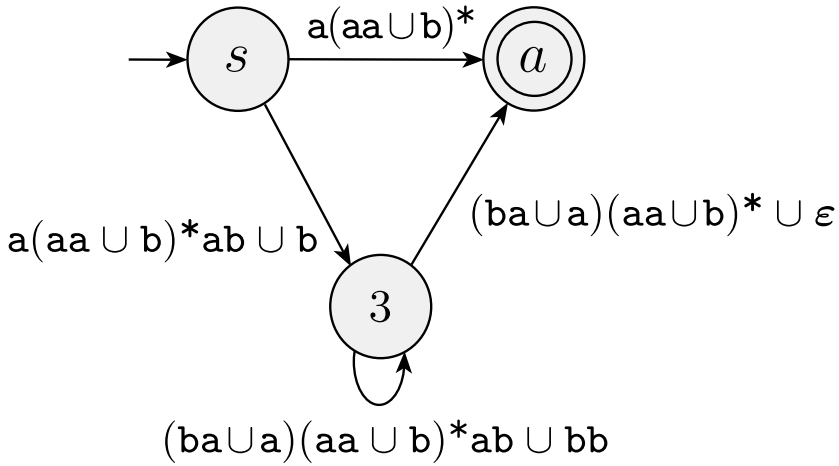

s
a
a(aa∪b)*
a(aa ∪ b)*ab ∪ b
(ba∪a)(aa∪b)* ∪ ε
(ba∪a)(aa ∪ b)*ab ∪ bb

(d)

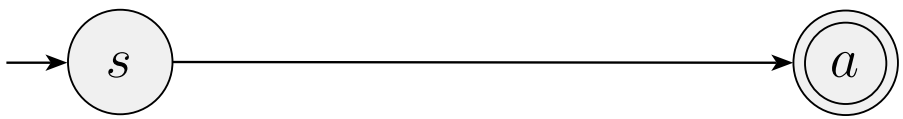
Ví dụ 2 (tiếp)



(c)



(d)



$(a(aa \cup b)^*ab \cup b)((ba \cup a)(aa \cup b)^*ab \cup bb)^*((ba \cup a)(aa \cup b)^* \cup \varepsilon) \cup a(aa \cup b)^*$