TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI
VIỆN TOÁN ỨNG DỤNG & TIN HỌC

BÙI XUÂN DIỆU

Bài Giảng

GIẢI TÍCH II

(lưu hành nội bộ)

CÁC ỨNG DỤNG CỦA PHÉP TÍNH VI PHÂN, TÍCH PHÂN BỘI, TÍCH PHÂN PHỤ THUỘC THAM SỐ, TÍCH PHÂN ĐƯỜNG, TÍCH PHÂN MẶT, LÝ THUYẾT TRƯỜNG

Tóm tắt lý thuyết, Các ví dụ, Bài tập và lời giải

Hà Nội- 2009

MỤC LỤC

CHƯƠNG 1

CÁC ỨNG DỤNG CỦA PHÉP TÍNH VI PHÂN TRONG HÌNH HỌC

§1. CÁC ỨNG DỤNG CỦA PHÉP TÍNH VI PHÂN TRONG HÌNH HỌC PHẲNG

1.1 Phương trình tiếp tuyến và pháp tuyến của đường cong tại một điểm.

1. Điểm chính quy.

    - Cho đường cong (L) xác định bởi phương trình $f(x,y) = 0$. Điểm $M(x_0, y_0)$ được gọi là điểm chính quy của đường cong (L) nếu tồn tại các đạo hàm riêng $f'_x(M), f'_y(M)$ không đồng thời bằng 0.
    - Cho đường cong (L) xác định bởi phương trình tham số $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$. Điểm $M(x(t_0), y(t_0))$ được gọi là điểm chính quy của đường cong (L) nếu tồn tại các đạo hàm $x'(t_0), y'(t_0)$ không đồng thời bằng 0.
    - Một điểm không phải là điểm chính quy được gọi là điểm kì dị.

2. Các công thức.

    - Phương trình tiếp tuyến và pháp tuyến của đường cong xác định bởi phương trình tại điểm chính quy:

- Tiếp tuyến

$$(d):\ f'_x(M).(x-x_0)+f'_y(M).(y-y_0)=0.$$

- Pháp tuyến

$$(d'):\ \frac{x-x_0}{f'_x(M)}=\frac{y-y_0}{f'_y(M)}.$$

Chú ý: Trường hợp đặc biệt, đường cong cho bởi phương trình $y=f(x)$ thì phương trình tiếp tuyến của đường cong tại điểm $M(x_0,y_0)$ chính quy là $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$. Đây là công thức mà học sinh đã biết trong chương trình phổ thông.

- Phương trình tiếp tuyến và pháp tuyến của đường cong (L) xác định bởi phương trình tham số $\begin{cases} x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}$ tại điểm $M(x(t_0),y(t_0))$ chính quy:

  - Tiếp tuyến

$$(d):\ \frac{x-x(t_0)}{x'(t_0)}=\frac{y-y(t_0)}{y'(t_0)}.$$

  - Pháp tuyến

$$(d'):\ x'(t_0).(x-x(t_0))+y'(t_0).(y-y(t_0))=0.$$

1.2 Độ cong của đường cong.

1. Định nghĩa.

2. Các công thức tính độ cong của đường cong tại một điểm.

- Nếu đường cong cho bởi phương trình $y=f(x)$ thì:

$$C(M)=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}$$

- Nếu đường cong cho bởi phương trình tham số $\begin{cases} x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}$ thì:

$$C(M)=\frac{\begin{vmatrix} x' & y'\\ x'' & y''\end{vmatrix}}{(x'^2+y'^2)^{3/2}}$$

- Nếu đường cong cho bởi phương trình trong toạ độ cực $r=r(\phi)$ thì:

$$C(M)=\frac{|r^2+2r'^2-rr''|}{(r^2+r'^2)^{3/2}}$$

1.3 Hình bao của họ đường cong phụ thuôc một tham số

1. Định nghĩa: Cho họ đường cong (L) phụ thuộc vào một hay nhiều tham số. Nếu mỗi đường cong trong họ (L) đều tiếp xúc với đường cong (E) tại một điểm nào đó trên E và ngược lại, tại mỗi điểm thuộc (E) đều tồn tại một đường cong của họ (L) tiếp xúc với (E) tại điểm đó thì (E) được gọi là hình bao của họ đường cong (L).

2. Quy tắc tìm hình bao của họ đường cong phụ thuộc một tham số.

   Định lý 1.1. *Cho họ đường cong $F(x,y,c) = 0$ phụ thuộc một tham số c. Nếu họ đường cong trên không có điểm kì dị thì hình bao của nó được xác định bằng cách khử c từ hệ phương trình*

$$\begin{cases} F(x,y,c) = 0 \\ F'_c(x,y,c) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

3. Nếu họ đường cong đã cho có điểm kì dị thì hệ phương trình (1) bao gồm hình bao (E) và quỹ tích các điểm kì dị thuộc họ các đường cong đã cho.

Bài tập 1.1. Viết phương trình tiếp tuyến và pháp tuyến với đường cong:

a) $y = x^3 + 2x^2 - 4x - 3$ tại $(-2, 5)$.

Lời giải. $\begin{cases} \text{Phương trình tiếp tuyến } y = 5 \\ \text{Phương trình pháp tuyến } x = -2 \end{cases}$ ■

b) $y = e^{1-x^2}$ tại giao điểm của đường cong với đường thẳng $y = 1$.

Lời giải. – Tại $M_1(-1,1)$, $\begin{cases} \text{Phương trình tiếp tuyến } 2x - y + 3 = 0 \\ \text{Phương trình pháp tuyến } x + 2y - 1 = 0 \end{cases}$

– Tại $M_2(-1,1)$, $\begin{cases} \text{Phương trình tiếp tuyến } 2x + y - 3 = 0 \\ \text{Phương trình pháp tuyến } x - 2y + 1 = 0 \end{cases}$ ■

c. $\begin{cases} x = \frac{1+t}{t^3} \\ y = \frac{3}{2t^3} + \frac{1}{2t} \end{cases}$ tại $A(2,2)$.

Lời giải. – Phương trình tiếp tuyến $y = x$.

– Phương trình pháp tuyến $x + y - 4 = 0$. ■

d. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ tại $M(8,1)$.

Lời giải. – Phương trình tiếp tuyến $x + 2y - 10 = 0$.

– Phương trình pháp tuyến $2x - y - 15 = 0$. ■

Bài tập 1.2. Tính độ cong của:

a. $y = -x^3$ tại điểm có hoành độ $x = \frac{1}{2}$.

Lời giải.

$$C(M) = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{3/2}} = ... = \frac{192}{125}$$

■

b. $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(t - \cos t) \end{cases}$ $(a > 0)$ tại điểm bất kì.

Lời giải.

$$C(M) = \frac{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}} = ... = \frac{1}{2a\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - \cos x}}$$

■

c. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ tại điểm bất kì $(a > 0)$.

Lời giải. Phương trình tham số: $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$, nên

$$C(M) = \frac{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}} = ... = \frac{1}{3a|\sin t \cos t|}$$

■

d. $r = ae^{b\phi}, (a, b > 0)$

Lời giải.

$$C(M) = \frac{|r^2 + 2r'^2 - rr''|}{(r^2 + r'^2)^{3/2}} = \frac{1}{ae^{b\phi}\sqrt{1 + b^2}}$$

■

Bài tập 1.3. Tìm hình bao của họ đường cong sau:

a. $y = \frac{x}{c} + c^2$

b. $cx^2 + c^2y = 1$

c. $y = c^2(x-c)^2$

Lời giải. a. Đặt $F(x,y,c) := y - \frac{x}{c} - c^2 = 0$.

Điều kiện: $c \neq 0$.

Xét hệ phương trình: $\begin{cases} F'_x(x,y,c) = 0 \\ F'_y(x,y,c) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F'_x(x,y,c) = 0 \\ 1 = 0 \end{cases}$, hệ phương trình vô nghiệm nên họ đường cong không có điểm kì dị. Ta có

$$\begin{cases} F(x,y,c) = 0 \\ F'_c(x,y,c) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - \frac{x}{c} - c^2 = 0 \\ -2c + \frac{x}{c^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2c^3 \\ y = 3c^2 \end{cases}$$

nên $\left(\frac{x}{2}\right)^2 - \left(\frac{y}{3}\right)^3 = 0$. Do điều kiện $c \neq 0$ nên $x, y \neq 0$. Vậy ta có hình bao của họ đường cong là đường $\left(\frac{x}{2}\right)^2 - \left(\frac{y}{3}\right)^3 = 0$ trừ điểm $O(0,0)$.

b. Đặt $F(x,y,c) := cx^2 + c^2y - 1 = 0$. Nếu $c = 0$ thì không thoả mãn phương trình đã cho nên điều kiện: $c \neq 0$.

Xét hệ phương trình: $\begin{cases} F'_x(x,y,c) = 0 \\ F'_y(x,y,c) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2cx = 0 \\ c^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = c = 0$, nhưng điểm kì dị đó không thuộc họ đường cong đã cho nên họ đường cong đã cho không có điểm kì dị. Ta có

$$\begin{cases} F(x,y,c) = 0 \\ F'_c(x,y,c) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} cx^2 + c^2y = 1 \\ x^2 + 2cx = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{c} \\ y = \frac{-1}{c^2} \end{cases}$$

Do đó $x, y \neq 0$ và ta có hình bao của họ đường cong là đường $y = -\frac{x^4}{4}$ trừ điểm $O(0,0)$.

c. Đặt $F(x,y,c) := c^2(x-c)^2 - y = 0$.

Xét hệ phương trình: $\begin{cases} F'_x(x,y,c) = 0 \\ F'_y(x,y,c) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F'_x = 0 \\ -1 = 0 \end{cases}$, hệ phương trình vô nghiệm nên họ đường cong đã cho không có điểm kì dị.

Ta có

$$\begin{cases} F(x,y,c) = 0 \\ F'_c(x,y,c) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c^2(x-c)^2 - y = 0\ (1) \\ 2c(x-c) - 2c^2(x-c) = 0\ (2) \end{cases}$$

$(2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c = 0 \\ c = x \\ c = \frac{x}{2} \end{array}\right.$, thế vào (1) ta được $y = 0, y = \frac{x^4}{16}$.

Vậy hình bao của họ đường cong là $y = 0, y = \frac{x^4}{16}$. ∎

§2. CÁC ỨNG DỤNG CỦA PHÉP TÍNH VI PHÂN TRONG HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

2.1 Hàm véctơ

Giả sử I là một khoảng trong $\mathbb{R}$.

- Ánh xạ $\begin{array}{l} I \to \mathbb{R}^n \\ t \mapsto \overrightarrow{r(t)} \in \mathbb{R}^n \end{array}$ được gọi là hàm véctơ của biến số t xác định trên $\mathbb{R}$. Nếu $n = 3$, ta viết $\overrightarrow{r(t)} = x(t).\overrightarrow{i} + y(t).\overrightarrow{j} + z(t).\overrightarrow{k}$. Đặt $M(x(t), y(t), z(t))$, quỹ tích M khi t biến thiên trong I được gọi là tốc đồ của hàm véctơ $\overrightarrow{r(t)}$.
- Giới hạn: Người ta nói hàm véctơ có giới hạn là $\overrightarrow{a}$ khi $t \to t_0$ nếu $\lim\limits_{t \to t_0} \left|\overrightarrow{r(t)} - \overrightarrow{a}\right| = \overrightarrow{0}$, kí hiệu $\lim\limits_{t \to t_0} \overrightarrow{r(t)} = \overrightarrow{a}$.
- Liên tục: Hàm véctơ $\overrightarrow{r(t)}$ xác định trên I được gọi là liên tục tại $t_0 \in I$ nếu $\lim\limits_{t \to t_0} \overrightarrow{r(t)} = \overrightarrow{r(t_0)}$. (tương đương với tính liên tục của các thành phần tương ứng $x(t), y(t), z(t)$)
- Đạo hàm: Giới hạn, nếu có, của tỉ số $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\Delta \overrightarrow{r}}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{\overrightarrow{r}(t_0+h) - \overrightarrow{r}(t_0)}{h}$ được gọi là đạo hàm của hàm véctơ $\overrightarrow{r(t)}$ tại t_0, kí hiệu $\overrightarrow{r}'(t_0)$ hay $\frac{d\overrightarrow{r}(t_0)}{dt}$, khi đó ta nói hàm véctơ $\overrightarrow{r(t)}$ khả vi tại t_0.
  Nhận xét rằng nếu $x(t), y(t), z(t)$ khả vi tại t_0 thì $\overrightarrow{r(t)}$ cũng khả vi tại t_0 và $\overrightarrow{r}'(t_0) = x'(t_0).\overrightarrow{i} + y'(t_0).\overrightarrow{j} + z'(t_0).\overrightarrow{k}$.

2.2 Phương trình tiếp tuyến và pháp diện của đường cong cho dưới dạng tham số

Cho đường cong $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$ và $M(x_0, y_0, z_0)$ là một điểm chính quy.

- Phương trình tiếp tuyến tại M

$$(d): \frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)} = \frac{z - z(t_0)}{z'(t_0)}.$$

- Phương trình pháp diện tại M.

$$(P): x'(t_0).(x - x(t_0)) + y'(t_0).(y - y(t_0)) + z'(t_0).(z - z(t_0)) = 0.$$

2.3 Phương trình pháp tuyến và tiếp diện của mặt cong.

Cho mặt cong S xác định bởi phương trình $f(x,y,z) = 0$ và $M(x_0,y_0,z_0)$ là một điểm chính quy của S.

- Phương trình pháp tuyến tại M

$$(d) : \frac{x-x_0}{f'_x(M)} = \frac{y-y_0}{f'_y(M)} = \frac{z-z_0}{f'_z(M)}.$$

- Phương trình tiếp diện tại M

$$(P) : f'_x(M).(x-x_0) + f'_y(M).(y-y_0) + f'_z(M).(z-z_0) = 0.$$

Đặc biệt, nếu mặt cong cho bởi phương trình $z = z(x,y)$ thì phương trình tiếp diện tại M là $(P) : z - z_0 = z'_x(M).(x-x_0) + z'_y(M).(y-y_0)$.

2.4 Phương trình tiếp tuyến và pháp diện của đường cong cho dưới dạng giao của hai mặt cong

Cho đường cong xác định bởi giao của hai mặt cong như sau $\begin{cases} f(x,y,z) = 0 \\ g(x,y,z) = 0 \end{cases}$.

Đặt $\overrightarrow{n_f} = \left(f'_x(M), f'_y(M), f'_z(M)\right)$, là véctơ pháp tuyến của mặt phẳng tiếp diện của mặt cong $f(x,y,z) = 0$ tại M.

Đặt $\overrightarrow{n_g} = \left(g'_x(M), g'_y(M), g'_z(M)\right)$, là véctơ pháp tuyến của mặt phẳng tiếp diện của mặt cong $g(x,y,z) = 0$ tại M.

Khi đó $\overrightarrow{n_f} \wedge \overrightarrow{n_g}$ là véctơ chỉ phương của tiếp tuyến của đường cong đã cho tại M. Vậy phương trình tiếp tuyến là:

$$\begin{cases} \text{PTTQ} : \begin{cases} f'_x(M).(x-x_0) + f'_y(M).(y-y_0) + f'_z(M).(z-z_0) = 0. \\ g'_x(M).(x-x_0) + g'_y(M).(y-y_0) + g'_z(M).(z-z_0) = 0. \end{cases} \\ \text{PTCT} : \dfrac{x-x_0}{\begin{vmatrix} f'_y(M) & f'_z(M) \\ g'_y(M) & g'_z(M) \end{vmatrix}} = \dfrac{y-y_0}{\begin{vmatrix} f'_z(M) & f'_x(M) \\ g'_z(M) & g'_x(M) \end{vmatrix}} = \dfrac{z-z_0}{\begin{vmatrix} f'_x(M) & f'_y(M) \\ g'_x(M) & g'_y(M) \end{vmatrix}} \end{cases}$$

Bài tập 1.4. Giả sử $\overrightarrow{p}(t), \overrightarrow{q}(t), \overrightarrow{\alpha}(t)$ là các hàm véctơ khả vi. Chứng minh rằng:

a. $\frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{p}(t) + \overrightarrow{q}(t)\right) = \frac{d\overrightarrow{p}(t)}{dt} + \frac{d\overrightarrow{q}(t)}{dt}$

b. $\frac{d}{dt}\left(\alpha(t)\overrightarrow{p}(t)\right) = \alpha(t)\frac{d\overrightarrow{p}(t)}{dt} + \alpha'(t)\overrightarrow{p}(t)$

c. $\frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{p}(t)\overrightarrow{q}(t)\right) = \overrightarrow{p}(t)\frac{d\overrightarrow{q}(t)}{dt} + \frac{d\overrightarrow{p}(t)}{dt}\overrightarrow{q}(t)$

d. $\frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{p}(t)\wedge\overrightarrow{q}(t)\right) = \overrightarrow{p}(t)\wedge\frac{d\overrightarrow{q}(t)}{dt} + \frac{d\overrightarrow{p}(t)}{dt}\wedge\overrightarrow{q}(t)$

Lời giải. a. Giả sử $\overrightarrow{p}(t) = (p_1(t), p_2(t), p_3(t))$, $\overrightarrow{q}(t) = (q_1(t), q_2(t), q_3(t))$, khi đó:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{p}(t)+\overrightarrow{q}(t)\right) &= \frac{d}{dt}(p_1(t)+q_1(t), p_2(t)+q_2(t), p_3(t)+q_3(t)) \\
&= \left(p_1'(t)+q_1'(t), p_2'(t)+q_2'(t), p_3'(t)+q_3'(t)\right) \\
&= \left(p_1'(t), p_2'(t), p_3'(t)\right) + \left(q_1'(t), q_2'(t), q_3'(t)\right) \\
&= \frac{d\overrightarrow{p}(t)}{dt} + \frac{d\overrightarrow{q}(t)}{dt}
\end{aligned}$$

b.

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(\alpha(t)\overrightarrow{p}(t)\right) \\
&= \left([\alpha(t)p_1(t)]', [\alpha(t)p_2(t)]', [\alpha(t)p_3(t)]'\right) \\
&= \left(\alpha'(t)p_1(t)+\alpha(t)p_1'(t), \alpha'(t)p_2(t)+\alpha(t)p_2'(t), \alpha'(t)p_3(t)+\alpha(t)p_3'(t)\right) \\
&= \left(\alpha'(t)p_1(t), \alpha'(t)p_2(t), \alpha'(t)p_3(t)\right) + \left(\alpha(t)p_1'(t), \alpha(t)p_2'(t), \alpha(t)p_3'(t)\right) \\
&= \alpha(t)\frac{d\overrightarrow{p}(t)}{dt} + \alpha'(t)\overrightarrow{p}(t)
\end{aligned}$$

c. Chứng minh tương tự như câu b, sử dụng công thức đạo hàm của hàm hợp.

d.

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{p}(t)\wedge\overrightarrow{q}(t)\right) \\
&= \frac{d}{dt}\left(\begin{vmatrix} p_2(t) & p_3(t) \\ q_2(t) & q_3(t)\end{vmatrix}, \begin{vmatrix} p_3(t) & p_1(t) \\ q_3(t) & q_1(t)\end{vmatrix}, \begin{vmatrix} p_1(t) & p_2(t) \\ q_1(t) & q_2(t)\end{vmatrix}\right) \\
&= \ldots \\
&= \left(\begin{vmatrix} p_2(t) & p_3'(t) \\ q_2(t) & q_3'(t)\end{vmatrix}, \begin{vmatrix} p_3(t) & p_1'(t) \\ q_3(t) & q_1'(t)\end{vmatrix}, \begin{vmatrix} p_1(t) & p_2'(t) \\ q_1(t) & q_2'(t)\end{vmatrix}\right) \\
&+ \left(\begin{vmatrix} p_2'(t) & p_3(t) \\ q_2'(t) & q_3(t)\end{vmatrix}, \begin{vmatrix} p_3'(t) & p_1(t) \\ q_3'(t) & q_1(t)\end{vmatrix}, \begin{vmatrix} p_1'(t) & p_2(t) \\ q_1'(t) & q_2(t)\end{vmatrix}\right) \\
&= \overrightarrow{p}(t)\wedge\frac{d\overrightarrow{q}(t)}{dt} + \frac{d\overrightarrow{p}(t)}{dt}\wedge\overrightarrow{q}(t)
\end{aligned}$$

■

Bài tập 1.5. Viết phương trình tiếp tuyến và pháp diện của đường:

a. $\begin{cases} x = a\sin^2 t \\ y = b\sin t\cos t \\ z = c\cos^2 t \end{cases}$ tại điểm ứng với $t = \frac{\pi}{4}, (a, b, c > 0)$.

b. $\begin{cases} x = \frac{e^t \sin t}{\sqrt{2}} \\ y = 1 \\ z = \frac{e^t \cos t}{\sqrt{2}} \end{cases}$ tại điểm ứng với $t = 2$.

Lời giải. a. – Phương trình tiếp tuyến: $(d) : \frac{x-\frac{a}{2}}{a} = \frac{y-\frac{b}{2}}{0} = \frac{z-\frac{c}{2}}{-c}$

– Phương trình pháp diện: $(P) : a\left(x - \frac{a}{2}\right) - c\left(z - \frac{c}{2}\right) = 0$.

b. – Phương trình tiếp tuyến: $(d) : \frac{x}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$.

– Phương trình pháp diện: $(P) : \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(z - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$. ■

Bài tập 1.6. Viết phương trình pháp tuyến và tiếp diện của mặt cong:

a) $x^2 - 4y^2 + 2z^2 = 6$ tại điểm $(2, 2, 3)$.

b) $z = 2x^2 + 4y^2$ tại điểm $(2, 1, 12)$.

c) $z = \ln(2x + y)$ tại điểm $(-1, 3, 0)$

Lời giải. a. – Phương trình pháp tuyến: $(d) : \frac{x-2}{4} = \frac{y-2}{-16} = \frac{z-3}{12}$

– Phương trình tiếp diện: $(P) : 4(x-2) - 16(y-2) + 12(z-3) = 0$

b. – Phương trình pháp tuyến: $(d) : \frac{x-2}{8} = \frac{y-1}{8} = \frac{z-12}{-1}$

– Phương trình tiếp diện: $(P) : 8(x-2) + 8(y-1) - (z-12) = 0$.

c. – Phương trình pháp tuyến: $(d) : \frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{-1}$

– Phương trình tiếp diện: $(P) : 2(x+1) + (y-3) - z = 0$. ■

Bài tập 1.7. Viết phương trình tiếp tuyến và pháp diện của đường:

a. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ y^2 + z^2 = 25 \end{cases}$ tại điểm $A(1, 3, 4)$

b. $\begin{cases} 2x^2 + 3y^2 + z^2 = 47 \\ x^2 + 2y^2 = z \end{cases}$ tại điểm $B(-2, 6, 1)$

Lời giải. a. Ta có $\begin{cases} f(x,y,z) := x^2+y^2-10=0 \\ g(x,y,z) := y^2+z^2-25=0 \end{cases}$ nên $\begin{cases} n_f=(2,6,0) \\ n_g=(0,6,8) \end{cases}$.

Do đó $n_f \wedge n_g = 2(21,-8,3)$. Vậy:

- Phương trình tiếp tuyến $(d) : \frac{x-1}{21} = \frac{y-3}{-8} = \frac{z-4}{3}$
- Phương trình pháp diện $(P) : 21(x-1) - 8(y-3) + 3(z-4) = 0$

b. Tương tự, $\begin{cases} n_f=(-8,6,12) \\ n_g=(-4,4,-1) \end{cases}$, $n_f \wedge n_g = -2(27,27,4)$ nên

- Phương trình tiếp tuyến $(d) : \frac{x+2}{27} = \frac{y-1}{27} = \frac{z-6}{4}$
- Phương trình pháp diện $(P) : 27(x+2) + 27(y-1) + 4(z-6) = 0$ ∎

CHƯƠNG 2

TÍCH PHÂN BỘI

§1. TÍCH PHÂN KÉP

1.1 Định nghĩa

Định nghĩa 2.1. *Cho hàm số $f(x,y)$ xác định trong một miền đóng, bị chặn D. Chia miền D một cách tuỳ ý thành n mảnh nhỏ. Gọi các mảnh đó và diện tích của chúng là $\Delta S_1, \Delta S_2, ..., \Delta S_n$. Trong mỗi mảnh ΔS_i lấy một điểm tuỳ ý $M(x_i, y_i)$ và thành lập tổng tích phân $I_n = \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i$. Nếu khi $n \to \infty$ sao cho $\max\{\Delta S_i \to 0\}$ mà I_n tiến tới một giá trị hữu hạn I, không phụ thuộc vào cách chia miền D và cách chọn điểm $M(x_i, y_i)$ thì giới hạn ấy được gọi là tích phân kép của hàm số $f(x,y)$ trong miền D, kí hiệu là*

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dS$$

Khi đó ta nói rằng hàm số $f(x,y)$ khả tích trong miền D. Do tích phân kép không phụ thuộc vào cách chia miền D thành các mảnh nhỏ nên ta có thể chia D thành hai họ đường thẳng song song với các trục toạ độ, khi đó $dS = dxdy$ và ta có thể viết

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dS = \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$$

Tính chất cơ bản:

- Tính chất tuyến tính:

$$\iint\limits_D [f(x,y) + g(x,y)]\,dxdy = \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy + \iint\limits_D g(x,y)\,dxdy$$

$$\iint\limits_{D} kf\left(x,y\right)dxdy = k\iint\limits_{D} f\left(x,y\right)dxdy$$

- Tính chất cộng tính: Nếu $D = D_1 \cup D_2$ và $D_1 \cap D_2 = \varnothing$ thì

$$\iint\limits_{D} f\left(x,y\right)dxdy = \iint\limits_{D_1} f\left(x,y\right)dxdy + \iint\limits_{D_2} f\left(x,y\right)dxdy$$

1.2 Tính tích phân kép trong hệ toạ độ Descartes

Để tính các tích phân hai lớp, ta cần phải đưa về tính các tích phân lặp.

1. Phác thảo hình dạng của miền D.

2. Nếu D là miền hình chữ nhật $(D):\ a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant d$ thì ta có thể sử dụng một trong hai tích phân lặp

$$\iint\limits_{D} f\left(x,y\right)dxdy = \int\limits_{a}^{b} dx \int\limits_{c}^{d} f\left(x,y\right)dy = \int\limits_{c}^{d} dy \int\limits_{c}^{d} f\left(x,y\right)dx$$

3. Nếu D là hình thang cong có cách cạnh song song với Oy, $(D) : a \leqslant x \leqslant b, \varphi\left(x\right) \leqslant y \leqslant \psi\left(x\right)$ thì dùng tích phân lặp với thứ tự dy trước, dx sau.

$$\iint\limits_{D} f\left(x,y\right)dxdy = \int\limits_{a}^{b} dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f\left(x,y\right)dy$$

4. Nếu D là hình thang cong có cách cạnh song song với Ox, $(D) : c \leqslant y \leqslant d, \varphi\left(y\right) \leqslant x \leqslant \psi\left(y\right)$ thì dùng tích phân lặp với thứ tự dx trước, dy sau.

$$\iint\limits_{D} f\left(x,y\right)dxdy = \int\limits_{c}^{d} dy \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f\left(x,y\right)dx$$

5. Nếu D là miền có hình dáng phức tạp, không có dạng 3,4 thì thông thường ta sẽ chia miền D thành một số hữu hạn miền có dạng 3 hoặc 4 rồi sử dụng tính chất cộng tính để đưa về việc tính toán những tích phân lặp trên miền có dạng 3, 4.

Các dạng bài tập cơ bản

Dạng 1: Đổi thứ tự lấy tích phân.

Trong phần trên, chúng ta biết rằng thứ tự lấy tích phân và hình dáng của miền D có liên quan chặt chẽ đến nhau. Nếu thứ tự dy trước, dx sau thì miền D có dạng hình thang cong song song với trục Oy, và có biểu diễn là $(D) : a \leqslant x \leqslant b, \varphi(x) \leqslant y \leqslant \psi(x)$. Ngược lại, nếu thứ tự dx trước, dy sau thì miền D có dạng hình thang cong song song với trục Ox, và có biểu diễn là $(D) : c \leqslant y \leqslant d, \varphi(y) \leqslant x \leqslant \psi(y)$. Do vậy việc đổi thứ tự lấy tích phân trong tích phân lặp chẳng qua là việc biểu diễn miền D từ dạng này sang dạng kia.

1. Từ biểu thức tích phân lặp, vẽ phác thảo miền D.

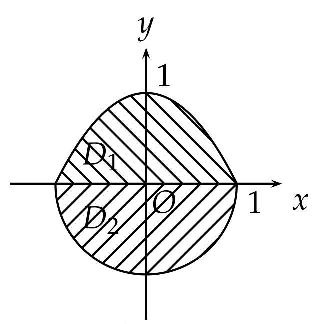
2. Nếu D là miền hình thang cong có các cạnh song song với Oy thì ta chia D thành các hình thang cong có các cạnh song song với Ox. Tìm biểu diễn giải tích của các miền con, ví dụ $(D_i) : c_i \leqslant y \leqslant d_i, \varphi_i(y) \leqslant x \leqslant \psi_i(y)$, sau đó viết

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\, dy = \sum_i \int\limits_{c_i}^{d_i} dy \int\limits_{\varphi_i(y)}^{\psi_i(y)} f(x,y)\, dx$$

3. Làm tương tự trong trường hợp D là hình thang cong có các cạnh song song với Ox.

Bài tập 2.1. Thay đổi thứ tự lấy tích phân của các tích phân sau:

a) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\, dy$



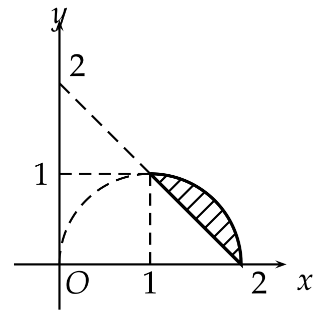
Hình 2.1 a)

Chia miền D thành hai miền con D_1, D_2 như hình vẽ,

$$D_1 : \begin{cases} -1 \leqslant y \leqslant 0 \\ -\sqrt{1-y^2} \leqslant x \leqslant \sqrt{1-y^2} \end{cases}, D_2 : \begin{cases} 0 \leqslant y \leqslant 1 \\ -\sqrt{1-y} \leqslant x \leqslant \sqrt{1-y} \end{cases}$$

$$I = \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\, dx + \int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} f(x,y)\, dx$$

b) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx$

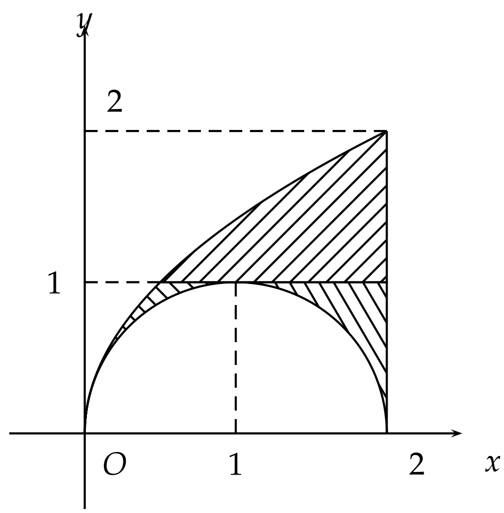


Hình 2.1 b)

Lời giải. Ta có: $D : \begin{cases} 1 \leqslant x \leqslant 2 \\ 2 - x \leqslant y \leqslant \sqrt{2x - x^2} \end{cases}$ nên:

$$I = \int\limits_1^2 dx \int\limits_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\,dy$$

c) $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x}} f(x,y)\,dx$



Hình 2.1 c)

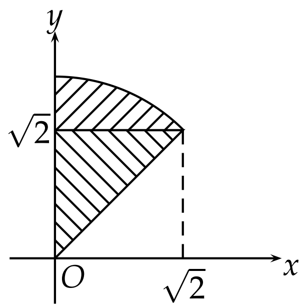
Lời giải. Chia D thành 3 miền như hình vẽ,

$$D_1 : \begin{cases} 0 \leqslant y \leqslant 1 \\ \frac{y^2}{2} \leqslant x \leqslant 1 - \sqrt{1 - y^2} \end{cases}, D_2 : \begin{cases} 0 \leqslant y \leqslant 1 \\ 1 + \sqrt{1 - y^2} \leqslant x \leqslant 2 \end{cases}, D_3 : \begin{cases} 1 \leqslant y \leqslant 2 \\ \frac{y^2}{2} \leqslant x \leqslant 2 \end{cases}$$

Vậy:

$$I = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{\frac{y^2}{2}}^{1-\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx + \int\limits_0^1 dy \int\limits_{1+\sqrt{1-y^2}}^{2} f(x,y)\,dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_{\frac{y^2}{2}}^{2} f(x,y)\,dx$$

d) $\int\limits_0^{\sqrt{2}} dy \int\limits_0^{y} f(x,y)\,dx + \int\limits_{\sqrt{2}}^{2} dy \int\limits_0^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)\,dx$



Hình 2.1 d)

Lời giải.

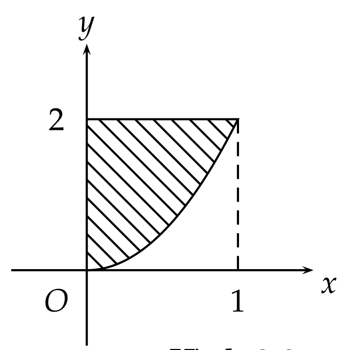
$$D: \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant \sqrt{2} \\ x \leqslant y \leqslant \sqrt{4-x^2} \end{cases}$$

nên:

$$I = \int\limits_0^{\sqrt{2}} dx \int\limits_x^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,dy$$

Một câu hỏi rất tự nhiên đặt ra là việc đổi thứ tự lấy tích phân trong các bài toán tích phân kép có ý nghĩa như thế nào? Hãy xét bài toán sau đây:

Bài tập 2.2. Tính $I = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^1 xe^{y^2} dy$.



Hình 2.2

Lời giải. Chúng ta biết rằng hàm số $f(x,y) = xe^{y^2}$ liên tục trên miền D nên chắc chắn khả tích trên D. Tuy nhiên các bạn có thể thấy rằng nếu tính tích phân trên mà làm theo thứ tự dy trước thì không thể tính được, vì hàm số e^{y^2} không có nguyên hàm sơ cấp! Còn nếu đổi thứ tự lấy tích phân thì:

$$I = \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} xe^{y^2} dx = \int_0^1 e^{y^2} \frac{x^2}{2} \Big|_{x=0}^{x=\sqrt{y}} dy = \frac{1}{2} \int_0^1 e^{y^2}.ydy = \frac{1}{4} e^{y^2} |_0^1 = \frac{1}{4}(e-1)$$

Dạng 2: Tính các tích phân kép thông thường.

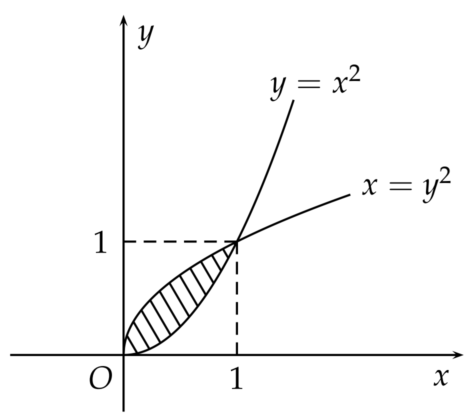
Bài tập 2.3. Tính các tích phân sau:

a) $\iint\limits_D x \sin(x+y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y, D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}, 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}\right\}$

Lời giải.

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin(x+y)\, dy = ... = \frac{\pi}{2} \text{ hoặc } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dy \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin(x+y)\, dx = ... = \frac{\pi}{2}$$

b) $I = \iint\limits_D x^2(y-x)\, dxdy, D$ giới hạn bởi $y = x^2 \& x = y^2$



Hình 2.3

Lời giải.

$$I = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} \left(x^2y - x^3\right) dy = ... = -\frac{1}{504}$$

Dạng 3: Tính các tích phân kép có chứa dấu giá trị tuyệt đối.

Mục đích của chúng ta là phá bỏ được dấu giá trị tuyệt đối trong các bài toán tính tích phân kép có chứa dấu giá trị tuyệt đối. Ví dụ, để tính các tích phân kép dạng $\iint\limits_D |f(x,y)|\,dxdy$. Khảo sát dấu của hàm $f(x,y)$, do tính liên tục của hàm $f(x,y)$ nên đường cong $f(x,y)=0$ sẽ chia miền D thành hai miền, D^+, D^-. Trên $D^+, f(x,y)\geqslant 0$, và trên $D^-, f(x,y)\leqslant 0$. Ta có công thức:

$$\boxed{\iint\limits_D |f(x,y)|\,dxdy = \iint\limits_{D^+} f(x,y)\,dxdy - \iint\limits_{D^-} f(x,y)\,dxdy \;\; (1)} \qquad (1)$$

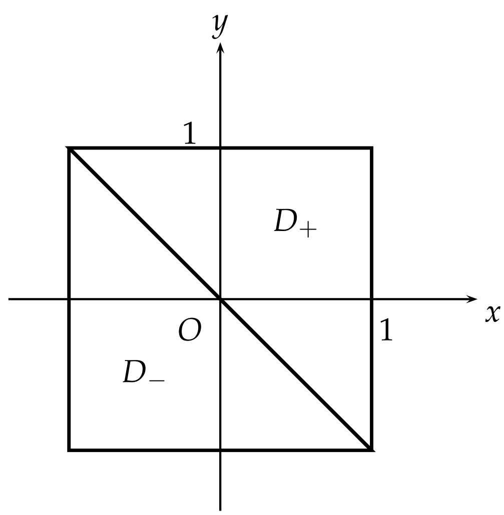
Các bước để làm bài toán tính tích phân kép có chứa dấu giá trị tuyệt đối:

1. Vẽ đường cong $f(x,y)=0$ để tìm đường cong phân chia miền D.

2. Giả sử đường cong tìm được chia miền D thành hai miền. Đề xác định xem miền nào là D^+ , miền nào là D^-, ta xét một điểm (x_0,y_0) bất kì, sau đó tính giá trị $f(x_0,y_0)$. Nếu $f(x_0,y_0)>0$ thì miền chứa (x_0,y_0) là D^+ và ngược lại.

3. Sau khi xác định được các miền D^+, D^-, chúng ta sử dụng công thức (1) để tính tích phân.

Bài tập 2.4. Tính $\iint\limits_D |x+y|\mathrm{dxdy}, D: \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,||x\leqslant 1|, |y|\leqslant 1\right\}$



Hình 2.4

Lời giải. Ta có:

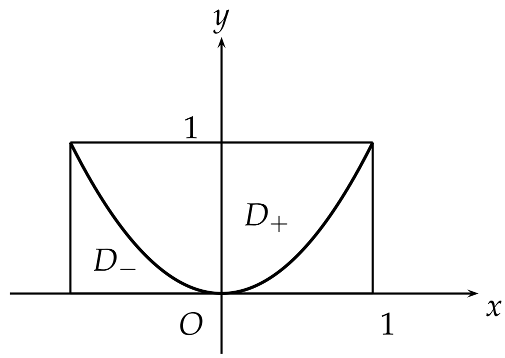
$$D^+ = D\cap\{x+y\geqslant 0\} = \{-1\leqslant x\leqslant 1, -x\leqslant y\leqslant 1\}$$

$$D^- = D\cap\{x+y\leqslant 0\} = \{-1\leqslant x\leqslant 1, -1\leqslant y\leqslant -x\}$$

nên:

$$I = \iint\limits_{D^+} (x+y)\,dxdy - \iint\limits_{D^-} (x+y)\,dxdy = ... = \frac{8}{3}$$

Bài tập 2.5. Tính $\iint\limits_{D} \sqrt{|y-x^2|}dxdy, D : \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,||x| \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1\}$



Hình 2.5

Lời giải.

$$D^+ = D \cap \left\{(x,y) \left| y - x^2 \geqslant 0 \right.\right\} = \left\{-1 \leqslant x \leqslant 1, x^2 \leqslant y \leqslant 1\right\}$$

$$D^- = D \cap \left\{(x,y) \left| y - x^2 \leqslant 0 \right.\right\} = \{-1 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant x\}$$

$$I = \iint\limits_{D^+} \sqrt{y-x^2}dxdy + \iint\limits_{D^-} \sqrt{x^2-y}dxdy = I_1 + I_2$$

trong đó

$$I_1 = \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{x^2}^{1} \sqrt{y-x^2}dy = \frac{2}{3} \int\limits_{-1}^{1} \left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}} dx \overset{x=\sin t}{=} \frac{4}{3} \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t dt = ... = \frac{\pi}{4}$$

$$I_2 = \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{0}^{x^2} \sqrt{x^2-y}dy = \frac{2}{3} \int\limits_{-1}^{1} |x|^3 dx = \frac{4}{3} \int\limits_{0}^{1} x^3 dx = \frac{1}{3}$$

Vậy $I = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{3}$ ∎

Dạng 4: Tính các tích phân kép trong trường hợp miền lấy tích phân là miền đối xứng.

Định lý 2.2. *Nếu miền D là miền đối xứng qua trục Ox (hoặc tương ứng Oy) và hàm là hàm lẻ đối với y (hoặc tương ứng đối với x) thì*

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\,dxdy = 0$$

Định lý 2.3. *Nếu miền D là miền đối xứng qua trục Ox (hoặc tương ứng Oy) và hàm là hàm chẵn đối với y (hoặc tương ứng đối với x) thì*

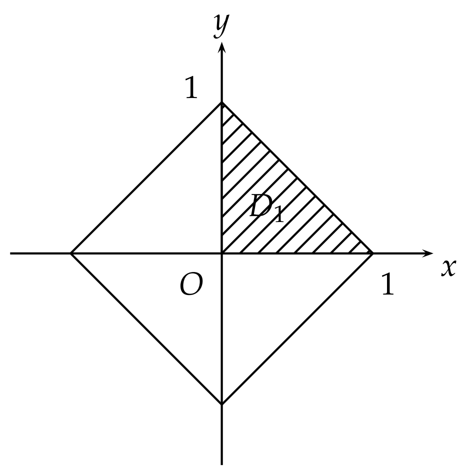
$$\iint\limits_{D} f(x,y)\,dxdy = 2\iint\limits_{D'} f(x,y)\,dxdy$$

trong đó D' là phần nằm bên phải trục Ox của D (hoặc tương ứng phía trên của trục Oy tương ứng)

Định lý 2.4. *Nếu miền D là miền đối xứng qua trục gốc toạ độ O và hàm $f(x,y)$ thoả mãn $f(-x,-y) = -f(x,y)$ thì*

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\,dxdy = 0$$

Bài tập 2.6. Tính $\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1} |x|+|y|dxdy$.



Hình 2.6

Lời giải. Do D đối xứng qua cả Ox và Oy, $f(x,y) = |x|+|y|$ là hàm chẵn với x,y nên

$$I = 4\iint\limits_{D^1} f(x,y)\,dxdy = 4\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} (x+y)dy = \frac{4}{3}$$

1.3 Phép đổi biến số trong tích phân kép

Phép đổi biến số tổng quát

Phép đổi biến số tổng quát thường được sử dụng trong trường hợp miền D là giao của hai họ đường cong. Xét tích phân kép: $I = \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$, trong đó $f(x,y)$ liên tục trên D.

Thực hiện phép đổi biến số $x = x(u,v)\,, y = y(u,v)\quad(1)$thoả mãn:

- $x = x(u,v)\,, y = y(u,v)$ là các hàm số liên tục và có đạo hàm riêng liên tục trong miền đóng D_{uv} của mặt phẳng $O'uv$.
- Các công thức (1) xác định song ánh từ $D_{uv} \to D$.
- Định thức Jacobi $J = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} x_u' & x_v' \\ y_u' & y_v' \end{vmatrix} \neq 0$

Khi đó ta có công thức:

$$\boxed{I = \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{D_{uv}} f(x(u,v)\,, y(u,v))\,|J|\,dudv}$$

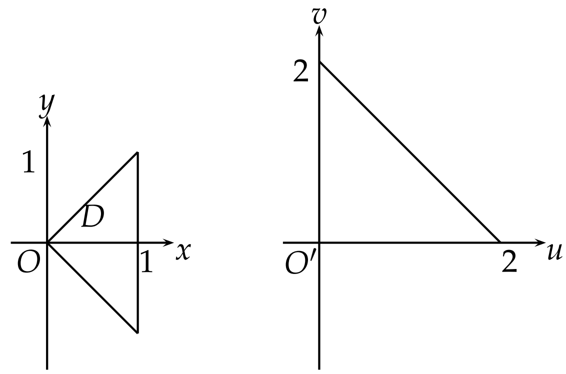
Chú ý:

- Mục đích của phép đổi biến số là đưa việc tính tích phân từ miền D có hình dáng phức tạp về tính tích phân trên miền D_{uv} đơn giản hơn như là hình thang cong hoặc hình chữ nhật. Trong nhiều trường hợp, phép đổi biến số còn có tác dụng làm đơn giản biểu thức tính tích phân $f(x,y)$.
- Một điều hết sức chú ý trong việc xác định miền D_{uv} đó là phép dổi biến số tổng quát sẽ biến biên của miền D thành biến của miền D_{uv}, biến miền D bị chặn thành miền D_{uv} bị chặn.
- Có thể tính J thông qua $J^{-1} = \frac{D(u,v)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} u_x' & u_y' \\ v_x' & v_y' \end{vmatrix}$.

Bài tập 2.7. Chuyển tích phân sau sang hai biến u, v:

a) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{-x}^{x} f(x,y)\,dxdy$, nếu đặt $\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases}$

b) Áp dụng tính với $f(x,y) = (2 - x - y)^2$.



Hình 2.7

Lời giải.

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{u+v}{2} \\ y = \frac{u-v}{2} \end{cases}, |J| = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$$

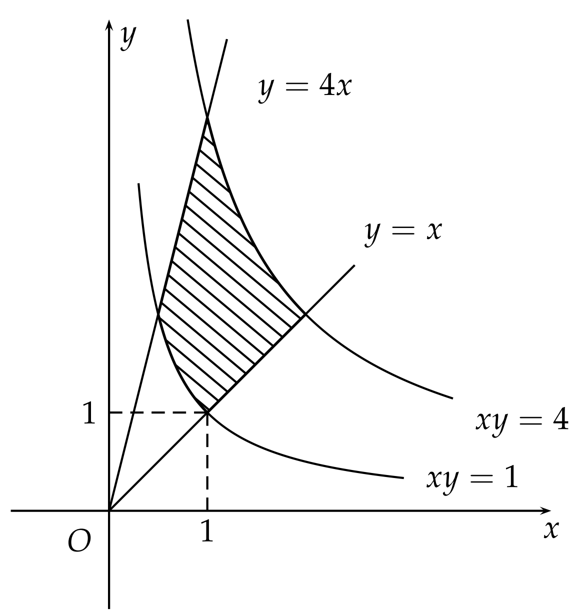
hơn nữa

$$D \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ -x \leqslant y \leqslant x \end{cases} \leftrightarrow D_{uv} \begin{cases} 0 \leqslant u \leqslant 2 \\ 0 \leqslant v \leqslant 2 - u \end{cases}$$

nên

$$I = \frac{1}{2} \int\limits_0^2 du \int\limits_0^{2-u} f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) dv$$

Bài tập 2.8. Tính $I = \iint\limits_D \left(4x^2 - 2y^2\right) dxdy$, trong đó $D : \begin{cases} 1 \leqslant xy \leqslant 4 \\ x \leqslant y \leqslant 4x \end{cases}$



Hình 2.8

Lời giải. Thực hiện phép đổi biến

$$\begin{cases} u = xy \\ v = \frac{y}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{\frac{u}{v}} \\ y = \sqrt{uv} \end{cases}, D_{uv}: \begin{cases} 1 \leqslant u \leqslant 4 \\ 1 \leqslant v \leqslant 4 \end{cases}, J^{-1} = \begin{vmatrix} y & x \\ \frac{-y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{vmatrix} = 2\frac{y}{x} = 2\frac{\sqrt{uv}}{\sqrt{\frac{u}{v}}} = 2v$$

khi đó

$$I = \int_1^4 du \int_1^4 \left(4\frac{u}{v} - 2uv\right).\frac{1}{2v} dv = \int_1^4 du \int_1^4 \left(\frac{2u}{v^2} - u\right) dv = \int_1^4 -\frac{3}{2} u du = -\frac{45}{4}$$

Phép đổi biến số trong toạ độ cực

Trong rất nhiều trường hợp, việc tính toán tích phân kép trong toạ độ cực đơn giản hơn rất nhiều so với việc tính tích phân trong toạ độ Descartes, đặc biệt là khi miền D có dạng hình tròn, quạt tròn, cardioids,... và hàm dưới dấu tích phân có những biểu thức $(x^2 + y^2)$. Toạ độ cực của điểm $M(x, y)$ là bộ (r, φ), trong đó $\begin{cases} r = \left|\overrightarrow{OM}\right| \\ \varphi = \widehat{\overrightarrow{OM}, Ox} \end{cases}$.

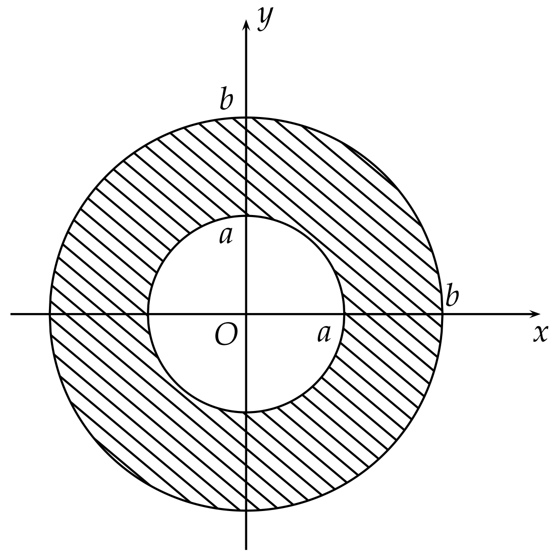
Công thức đổi biến: $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$, trong đó miền biến thiên của r, φ phụ thuộc vào hình dạng của miền D. Khi đó $J = \frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)} = r$, và $I = \iint\limits_{D_{r\varphi}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r dr d\varphi$

Đặc biệt, nếu $D: \begin{cases} \varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_2 \\ r_1(\varphi) \leqslant r \leqslant r_2(\varphi) \end{cases}$, thì

$$I = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r dr$$

Bài tập 2.9. Tìm cận lấy tích phân trong toạ độ cực $I = \iint\limits_D f(x, y) dxdy$, trong đó D là miền xác định như sau:

a) $a^2 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant b^2$

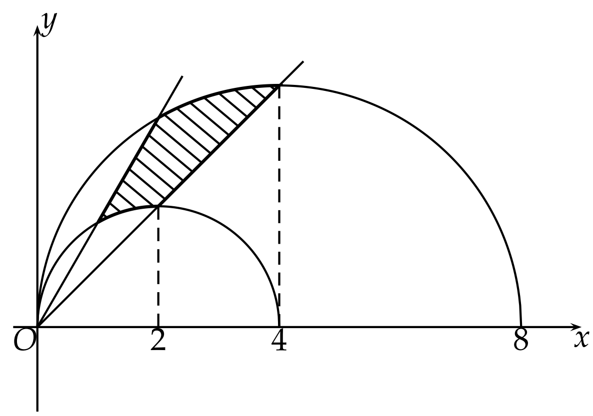


Hình 2.9a

Lời giải.

$$D: \begin{cases} 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi \\ a \leqslant r \leqslant b \end{cases} \Rightarrow I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_a^b f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, rdr$$

b) $x^2 + y^2 \geqslant 4x, x^2 + y^2 \leqslant 8x, y \geqslant x, y \leqslant 2x$



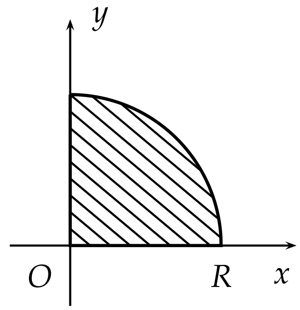
Hình 2.9b

Lời giải. Ta có:

$$D: \begin{cases} \frac{\pi}{4} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{3} \\ 4\cos\varphi \leqslant r \leqslant 8\cos\varphi \end{cases} \Rightarrow I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int_{4\cos\varphi}^{8\cos\varphi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, rdr$$

Bài tập 2.10. Dùng phép đổi biến số trong toạ độ cực, hãy tính các tích phân sau:

a) $\int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \ln\left(1 + x^2 + y^2\right) dy \;\; (R > 0).$



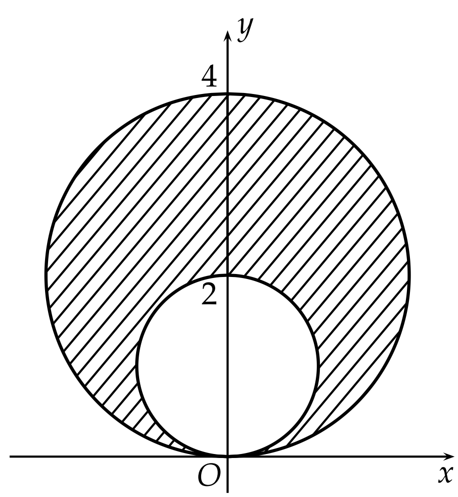
Hình 2.10 a

Từ biểu thức tính tích phân ta suy ra biểu thức giải tích của miền D là: $\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant R \\ 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{R^2 - x^2} \end{cases}$

nên chuyển sang toạ độ cực, đặt: $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ thì $\begin{cases} 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2} \\ 0 \leqslant r \leqslant R \end{cases}$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^R \ln\left(1 + r^2\right) r dr = \frac{\pi}{4} \int_0^R \ln\left(1 + r^2\right) d\left(1 + r^2\right)$$
$$= \frac{\pi}{4}\left[\left(R^2 + 1\right)\ln\left(R^2 + 1\right) - R^2\right]$$

b) Tính $\iint\limits_D xy^2 dxdy$, D giới hạn bởi $\begin{cases} x^2 + (y-1)^2 = 1 \\ x^2 + y^2 - 4y = 0 \end{cases}$.



Hình 2.10 b

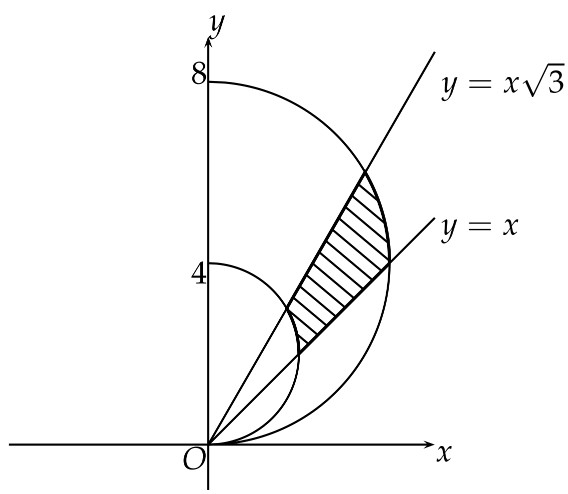
Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi \\ 2\sin\varphi \leqslant r \leqslant 4\sin\varphi \end{cases}$

$$I = \int_0^{\pi} d\varphi \int_{2\sin\varphi}^{4\sin\varphi} r\cos\varphi.\,(r\sin\varphi)^2\, rdr$$
$$= 0$$

Cách 2: Vì D đối xứng qua Oy và xy^2 là hàm số lẻ đối với x nên $I = 0$.

Bài tập 2.11. Tính các tích phân sau:

a) $\iint\limits_D \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^2}$, trong đó $D : \begin{cases} 4y \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 8y \\ x \leqslant y \leqslant x\sqrt{3} \end{cases}$



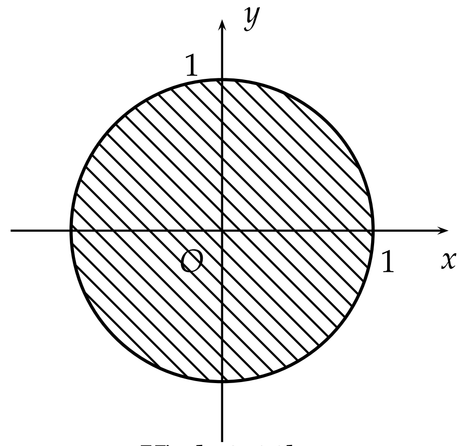
Hình 2.11a

Lời giải.

$$\text{Đặt} \begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{4} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{3} \\ 4\sin\varphi \leqslant r \leqslant 8\sin\varphi \end{cases}$$

$$I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int_{4\sin\varphi}^{8\sin\varphi} \frac{1}{r^4} rdr = -\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{64\sin^2\varphi} - \frac{1}{16\sin^2\varphi}\right) d\varphi = \frac{3}{128}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

b) $\iint\limits_D \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}dxdy$ trong đó $D : x^2 + y^2 \leqslant 1$



Hình 2.11b

$$\text{Đặt } \begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi \\ 0 \leqslant r \leqslant 1 \end{cases}$$

Ta có:

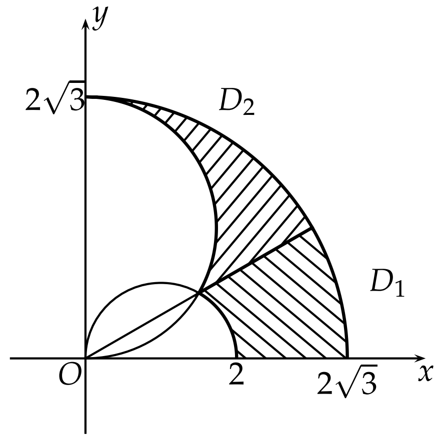
$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}} r dr \overset{u=r^2}{=} 2\pi \int_0^1 \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-u}{1+u}} du$$

Đặt

$$t = \sqrt{\frac{1-u}{1+u}} \Rightarrow \begin{cases} du = -\frac{4t}{(1+t^2)^2} dt \\ 0 \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

$$I = \pi \int_0^1 t\left(-\frac{4t}{(1+t^2)^2}\right) dt = -\pi \int_0^1 \frac{4dt}{1+t^2} + 4\pi \int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)^2}$$
$$= -4\pi \operatorname{arctg} t \Big|_0^1 + 4\pi \left[\frac{1}{2}\frac{t}{t^2+1} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t\right] \Big|_0^1$$
$$= \frac{\pi^2}{2}$$

c) $\iint\limits_D \frac{xy}{x^2+y^2} dxdy$ trong đó $D : \begin{cases} x^2+y^2 \leqslant 12 \\ x^2+y^2 \geqslant 2x \\ x^2+y^2 \geqslant 2\sqrt{3}y \\ x \geqslant 0, y \geqslant 0 \end{cases}$



Hình 2.11c

Lời giải. Chia miền D thành hai miền như hình vẽ,

$$D = D_1 \cup D_2, D_1 = \begin{cases} 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{6} \\ 2\cos\varphi \leqslant r \leqslant 2\sqrt{3} \end{cases}, D_2 = \begin{cases} \frac{\pi}{6} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2} \\ 2\sqrt{3}\sin\varphi \leqslant r \leqslant 2\sqrt{3} \end{cases}$$

Vậy $I = I_1 + I_2$, trong đó

$$I_1 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} d\varphi \int\limits_{2\cos\varphi}^{2\sqrt{3}} \frac{r^2\cos\varphi\sin\varphi}{r^2} r dr = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \cos\varphi\sin\varphi\left(12 - 4\cos^2\varphi\right)d\varphi = ... = \frac{17}{32}$$

$$I_2 = \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{2\sqrt{3}\sin\varphi}^{2\sqrt{3}} \frac{r^2\cos\varphi\sin\varphi}{r^2} r dr = \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\sin\varphi\left(12 - 12\sin^2\varphi\right)d\varphi = ... = \frac{27}{32}$$

nên $I = \frac{11}{8}$ ■

Phép đổi biến số trong toạ độ cực suy rộng.

Phép đổi biến trong toạ độ cực suy rộng được sử dụng khi miền D có hình dạng ellipse hoặc hình tròn có tâm không nằm trên các trục toạ độ. Khi sử dụng phép biến đổi này, bắt buộc phải tính lại các Jacobian của phép biến đổi.

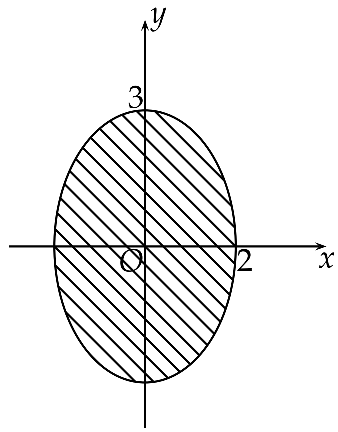
1. Nếu $D : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, thực hiện phép đổi biến $\begin{cases} x = ar\cos\varphi \\ y = br\sin\varphi \end{cases}, J = abr$

2. Nếu $D : (x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$, thực hiện phép đổi biến $\begin{cases} x = a + r\cos\varphi \\ y = b + r\sin\varphi \end{cases}, J = r$

3. Xác định miền biến thiên của r, φ trong phép đổi biến trong hệ toạ độ cực suy rộng.

4. Thay vào công thức đổi biến tổng quát và hoàn tất quá trình đổi biến.

Bài tập 2.12. Tính $\iint\limits_{D} \left|9x^2 - 4y^2\right| dxdy$, trong đó $D : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leqslant 1$.



Hình 2.12

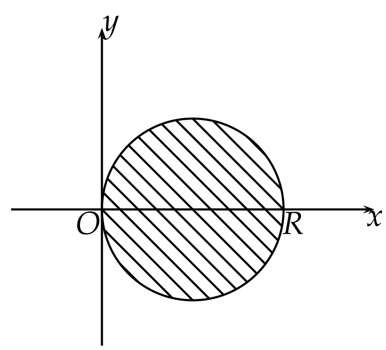
Lời giải.

$$\text{Đặt } \begin{cases} x = 2r\cos\varphi \\ y = 3r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow J = 6r, \begin{cases} 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi \\ 0 \leqslant r \leqslant 1 \end{cases}$$

Ta có:

$$I = 6\iint\limits_{D_{r\varphi}} \left|36r^2\cos^2\varphi - 36r^2\sin^2\varphi\right| rdrd\varphi = 6.36\int\limits_0^{2\pi} |\cos 2\varphi|\, d\varphi \int\limits_0^1 r^3 dr = ... = 216$$

Bài tập 2.13. Tính $\int\limits_0^R dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \sqrt{Rx - x^2 - y^2} dy, (R > 0)$



Hình 2.13

Lời giải. Từ biểu thức tính tích phân suy ra biểu thức giải tích của D là:

$$D : \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant R \\ -\sqrt{\mathrm{Rx} - x^2} \leqslant y \leqslant \sqrt{\mathrm{Rx} - x^2} \end{cases} \Leftrightarrow \left(x - \frac{R}{2}\right)^2 + y^2 \leqslant \frac{R^2}{4}$$

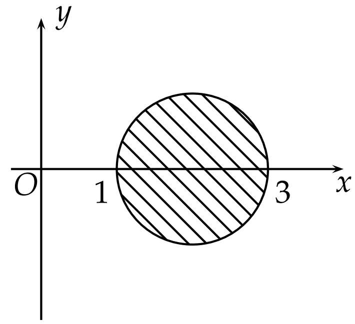
$$\text{Đặt} \begin{cases} x = \frac{R}{2} + r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow |J| = r, \begin{cases} 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi \\ 0 \leqslant r \leqslant \frac{R}{2} \end{cases}$$

Vậy

$$I = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\frac{R}{2}} \sqrt{\frac{R^2}{4} - r^2} rdr = 2\pi.\frac{-1}{2}\int\limits_0^{\frac{R}{2}} \sqrt{\frac{R^2}{4} - r^2} d\left(\frac{R^2}{4} - r^2\right) = \frac{\pi R^3}{12}$$

Bài tập 2.14. Tính $\iint\limits_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, với

a) D là mặt tròn $(x-2)^2 + y^2 \leqslant 1$



Hình 2.14a

Lời giải.

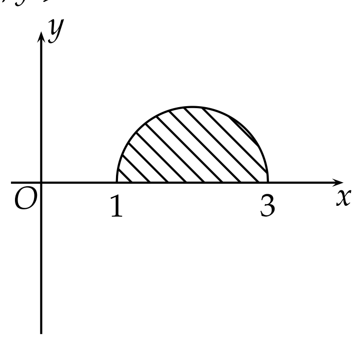
$$\text{Đặt} \begin{cases} x = 2 + r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leqslant r \leqslant 1 \\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi \end{cases}$$

nên

$$I = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 (2 + r\cos\varphi)\, r\sin\varphi.rdr = 0$$

Cách 2. Nhận xét: Do D là miền đối xứng qua Ox, $f(x,y) = xy$ là hàm lẻ đối với y nên $I = 0$. ∎

b) D là nửa mặt tròn $(x-2)^2 + y^2 \leqslant 1, y \geqslant 0$



Hình 2.14b

Lời giải.

$$\text{Đặt } \begin{cases} x = 2 + r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leqslant r \leqslant 1 \\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi \end{cases}$$

nên

$$I = \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^1 (2 + r\cos\varphi)\, r\sin\varphi . r dr = \frac{4}{3}$$

§2. TÍCH PHÂN BỘI BA

2.1 Định nghĩa và tính chất

Định nghĩa 2.2. *Cho hàm số $f(x,y,z)$ xác định trong một miền đóng, bị chặn V của không gian $Oxyz$. Chia miền V một cách tuỳ ý thành n miền nhỏ. Gọi các miền đó và thể tích của chúng là $\Delta V_1, \Delta V_2, ..., \Delta V_n$. Trong mỗi miền Δ_i lấy một điểm tuỳ ý $M(x_i, y_i, z_i)$ và thành lập tổng tích phân $I_n = \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i$. Nếu khi $n \to +\infty$ sao cho $\max \{\Delta V_i \to 0\}$ mà I_n tiến tới một giá trị hữu hạn I, không phụ thuộc vào cách chia miền V và cách chọn điểm $M(x_i, y_i, z_i)$ thì giới hạn ấy được gọi là* tích phân bội ba *của hàm số $f(x,y,z)$ trong miền V, kí hiệu là $\iiint\limits_V f(x,y,z)\, dV$.*

Khi đó ta nói rằng hàm số $f(x,y,z)$ khả tích trong miền V.
Do tích phân bội ba không phụ thuộc vào cách chia miền V thành các miền nhỏ nên ta có thể chia V bởi ba họ mặt thẳng song song với các mặt phẳng toạ độ, khi đó $dV = dxdydz$ và ta có thể viết

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\, dV = \iiint\limits_V f(x,y,z)\, dxdydz$$

Các tính chất cơ bản

- Tính chất tuyến tính

$$\iiint\limits_V [f(x,y,z) + g(x,y,z)]\, dxdydz = \iiint\limits_V f(x,y,z)\, dxdydz + \iiint\limits_V g(x,y,z)\, dxdydz$$

$$\iiint\limits_V kf(x,y,z)\, dxdydz = k \iiint\limits_V f(x,y,z)\, dxdydz$$

- Tính chất cộng tính: Nếu $V = V_1 \cup V_2$ và $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ thì:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\, dxdydz = \iiint\limits_{V_1} f(x,y,z)\, dxdydz + \iiint\limits_{V_2} f(x,y,z)\, dxdydz$$

2.2 Tính tích phân bội ba trong hệ toạ độ Descartes

Cũng giống như việc tính toán tích phân kép, ta cần phải đưa tích phân ba lớp về tích phân lặp. Việc chuyển đổi này sẽ được thực hiện qua trung gian là tích phân kép.

$$\boxed{\text{Tích phân ba lớp} \Rightarrow \text{Tích phân hai lớp} \Rightarrow \text{Tích phân lặp}}$$

Sơ đồ trên cho thấy việc tính tích phân ba lớp được chuyển về tính tích phân kép (việc tính tích phân kép đã được nghiên cứu ở bài trước). Đương nhiên việc chuyển đổi này phụ thuộc chặt chẽ vào hình dáng của miền V. Một lần nữa, kĩ năng vẽ hình là rất quan trọng. Nếu miền V được giới hạn bởi các mặt $z = z_1(x,y), z = z_2(x,y)$, trong đó $z_1(x,y), z_2(x,y)$ là các hàm số liên tục trên miền D, D là hình chiếu của miền V lên mặt phẳng Oxy thì ta có:

$$I = \iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz = \iint\limits_D dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz \tag{2.1}$$

Thuật toán chuyển tích phân ba lớp về tích phân hai lớp

1. Xác định hình chiếu của miền V lên mặt phẳng Oxy.

2. Xác định biên dưới $z = z_1(x,y)$ và biên trên $z = z_2(x,y)$ của V.

3. Sử dụng công thức 2.1 để hoàn tất việc chuyển đổi.

Đến đây mọi việc chỉ mới xong một nửa, vấn đề còn lại bây giờ là:

$$\boxed{\text{Xác định } D \text{ và các biên } z = z_1(x,y), z = z_2(x,y) \text{ như thế nào?}}$$

Có hai cách để xác định: Dùng hình học hoặc là dựa vào biểu thức giải tích của miền V. Mỗi cách đều có những ưu và nhược điểm riêng. Cách dùng hình học tuy khó thực hiện hơn nhưng có ưu điểm là rất trực quan, dễ hiểu. Cách dùng biểu thức giải tích của V tuy có thể áp dụng cho nhiều bài nhưng thường khó hiểu và phức tạp. Chúng tôi khuyên các em sinh viên hãy cố gắng thử cách vẽ hình trước. Muốn làm được điều này, đòi hỏi các bạn sinh viên phải có kĩ năng vẽ các mặt cong cơ bản trong không gian như mặt phẳng, mặt trụ, mặt nón, mặt cầu, ellipsoit, paraboloit, hyperboloit 1 tầng, hyperboloit 2 tầng, hơn nữa các bạn cần có trí tưởng tượng tốt để hình dung ra sự giao cắt của các mặt.
Chú ý: Cũng giống như khi tính tích phân kép, việc nhận xét được tính đối xứng của miền V và tính chẵn lẻ của hàm lấy tích phân $f(x,y,z)$ đôi khi giúp sinh viên giảm được khối lượng tính toán đáng kể.

Định lý 2.5. *Nếu V là miền đối xứng qua mặt phẳng $z = 0(Oxy)$ và $f(x,y,z)$ là hàm số lẻ đối với z thì $\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz = 0$.*

Định lý 2.6. *Nếu V là miền đối xứng qua mặt phẳng $z = 0(Oxy)$ và $f(x,y,z)$ là hàm số chẵn đối với z thì $\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz = 2\iiint\limits_{V^+} f(x,y,z)\,dxdydz$, trong đó V^+ là phần phía trên mặt phẳng $z = 0$ của V.*

Tất nhiên chúng ta có thể thay đổi vai trò của z trong hai định lý trên bằng x hoặc y. Hai định lý trên có thể được chứng minh dễ dàng bằng phương pháp đổi biến số.

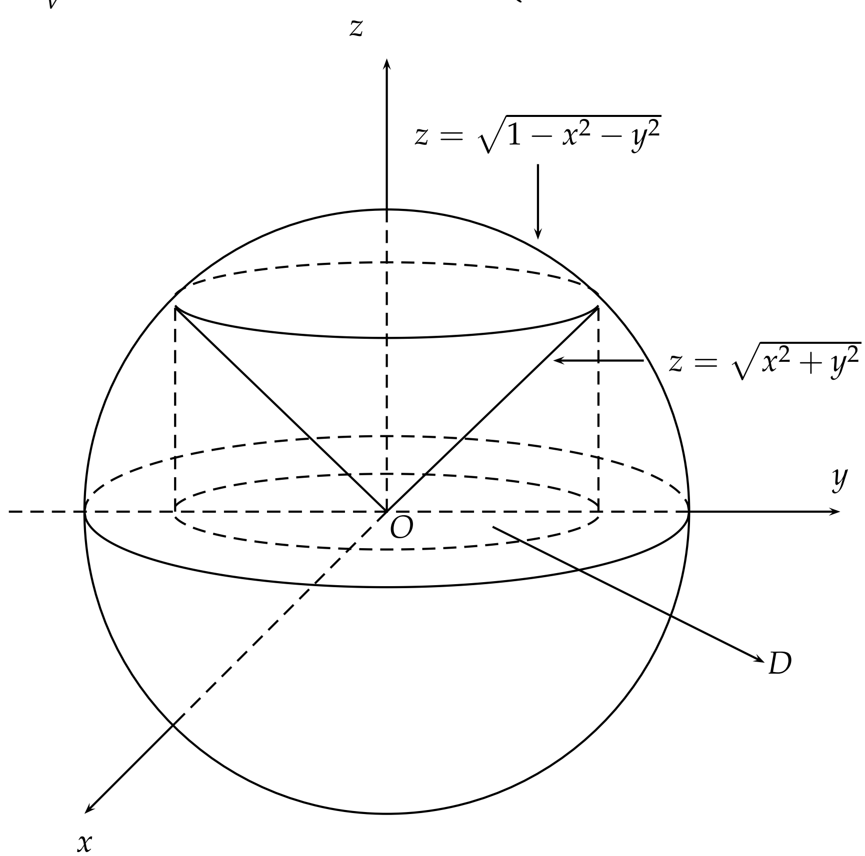
Bài tập 2.15. Tính $\iiint\limits_V zdxdydz$ trong đó miền V được xác định bởi: $\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{4} \\ x \leqslant y \leqslant 2x \\ 0 \leqslant z \leqslant \sqrt{1-x^2-y^2} \end{cases}$

Lời giải.

$$I = \int\limits_0^{\frac{1}{4}} dx \int\limits_x^{2x} dy \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} zdz = \int\limits_0^{\frac{1}{4}} dx \int\limits_x^{2x} \frac{1}{2}\left(1-x^2-y^2\right) dy = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{1}{4}} \left(x - \frac{10}{3}x^3\right) dx = \frac{43}{3072}$$

■

Bài tập 2.16. Tính $\iiint\limits_V \left(x^2+y^2\right) dxdydz$ trong đó V: $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x^2+y^2-z^2=0 \end{cases}$.



Hình 2.16

Lời giải. Do tính chất đối xứng, $\iiint\limits_V \left(x^2+y^2\right) dxdydz = 2\iiint\limits_{V_1} \left(x^2+y^2\right) dxdydz = 2I_1$, trong đó V_1 là nửa phía trên mặt phẳng Oxy của V. Ta có $\begin{cases} V_1 : \sqrt{x^2+y^2} \leqslant z \leqslant \sqrt{1-x^2-y^2} \\ D : x^2+y^2 \leqslant \dfrac{1}{2}, \end{cases}$, với D là hình chiếu của V_1 lên Oxy. Ta có

$$I_1 = \iint\limits_D x^2+y^2 dxdy \int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dz = \iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)\left(\sqrt{1-x^2-y^2}-\sqrt{x^2+y^2}\right) dxdy$$

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow J = r, \begin{cases} 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi \\ 0 \leqslant r \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$ nên

$$I_1 = \int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} r^3\left(\sqrt{1-r^2}-r\right)dr \int\limits_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi \int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} r^3\left(\sqrt{1-r^2}-r\right)dr \overset{(r=\cos\alpha)}{\underset{\cdots}{=}} \frac{2\pi}{5}.\frac{8-5\sqrt{2}}{12}$$

Vậy

$$I = \frac{4\pi}{5}.\frac{8-5\sqrt{2}}{12}$$

■

2.3 Phương pháp đổi biến số trong tích phân bội ba

Phép đổi biến số tổng quát

Phép đổi biến số tổng quát thường được sử dụng trong trường hợp miền V là giao của ba họ mặt cong. Giả sử cần tính $I = \iiint\limits_V f(x,y,z)\, dxdydz$ trong đó $f(x,y,z)$ liên tục trên V.

Thực hiện phép đổi biến số

$$\begin{cases} x = x(u,v,w) \\ y = y(u,v,w) \\ z = z(u,v,w) \end{cases} \tag{2.2}$$

thoả mãn

- x, y, z cùng với các đạo hàm riêng của nó là các hàm số liên tục trên miền đóng V_{uvw} của mặt phẳng $O'uvw$.
- Công thức 2.2 xác định song ánh $V_{uvw} \to V$.

- $J = \frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} \neq 0$ trong V_{uvw}. Khi đó

$$I = \iiint\limits_{V} f(x,y,z)\, dxdydz = \iiint\limits_{V_{uvw}} f\left[x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)\right] |J|\, dudvdw$$

Cũng giống như phép đổi biến trong tích phân kép, phép đổi biến trong tích phân bội ba cũng biến biên của miền V thành biên của miền V_{uvw}, biến miền V bị chặn thành miền V_{uvw} bị chặn.

Bài tập 2.17. Tính thể tích miền V giới hạn bởi $\begin{cases} x+y+z = \pm 3 \\ x+2y-z = \pm 1 \\ x+4y+z = \pm 2 \end{cases}$ biết $V = \iiint\limits_{V} dxdydz$.

Lời giải. Thực hiện phép đổi biến $\begin{cases} u = x+y+z \\ v = x+2y-z \\ w = x+4y+z \end{cases}$. Vì phép đổi biến biến biên của V thành biên của V_{uvw} nên V_{uvw} giới hạn bởi: $\begin{cases} u = \pm 3 \\ v = \pm 1 \\ w = \pm 2 \end{cases}$

$$J^{-1} = \frac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 6 \Rightarrow J = \frac{1}{6} \Rightarrow V = \frac{1}{6}\iiint\limits_{V_{uvw}} dudvdw = \frac{1}{6}.6.2.4 = 8$$

■

Phép đổi biến số trong toạ độ trụ

Khi miền V có biên là các mặt như mặt paraboloit, mặt nón, mặt trụ, và có hình chiếu D lên Oxy là hình tròn, hoặc hàm lấy tích phân $f(x,y,z)$ có chứa biểu thức (x^2+y^2) thì ta hay sử dụng công thức đổi biến trong hệ toạ độ trụ. Toạ độ trụ của điểm $M(x,y,z)$ là bộ ba (r,φ,z), trong đó (r,φ) chính là toạ độ cực của điểm M' là hình chiếu của điểm M lên Oxy.

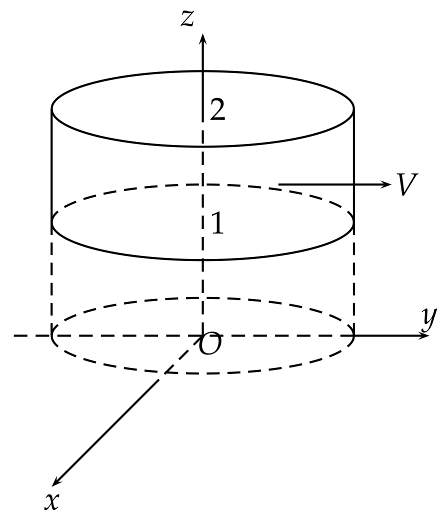
Công thức đổi biến $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$. Định thức Jacobian của phép biến đổi là $J = \frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,z)} = r$, ta có:

$$I = \iiint\limits_{V} f(x,y,z)\, dxdydz = \iiint\limits_{V_{r\varphi z}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)\, rdrd\varphi dz$$

Nếu miền $V:\begin{cases}(x,y)\in D\\ z_1(x,y)\leqslant z\leqslant z_2(x,y)\end{cases}$, trong đó $D:\begin{cases}\varphi_1\leqslant\varphi\leqslant\varphi_2\\ r_1(\varphi)\leqslant r\leqslant r_2(\varphi)\end{cases}$ thì:

$$I=\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}d\varphi\int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)}rdr\int\limits_{z_1(r\cos\varphi,r\sin\varphi)}^{z_2(r\cos\varphi,r\sin\varphi)}f(r\cos\varphi,r\sin\varphi,z)\,dz$$

Bài tập 2.18. Tính $\iiint\limits_V(x^2+y^2)\,dxdydz$, trong đó $V:\begin{cases}x^2+y^2\leqslant 1\\ 1\leqslant z\leqslant 2\end{cases}$.



Hình 2.18

Lời giải. Đặt $\begin{cases}x=r\cos\varphi\\ y=r\sin\varphi\\ z=z\end{cases}$ thì $\begin{cases}0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi\\ 0\leqslant r\leqslant 1\\ 1\leqslant z\leqslant 2\end{cases}$. Ta có

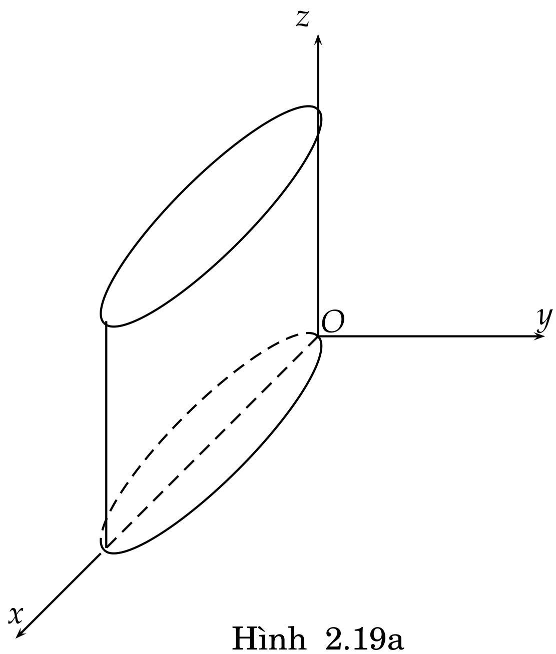
$$I=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1 r^2dr\int\limits_1^2 zdz=\ldots=\frac{3\pi}{4}$$

■

Bài tập 2.19. Tính $\iiint\limits_V z\sqrt{x^2+y^2}dxdydz$, trong đó:

a) V là miền giới hạn bởi mặt trụ: $x^2+y^2=2x$ và các mặt phẳng $z=0, z=a\,(a>0)$.

b) V là nửa của hình cầu $x^2+y^2+z^2\leqslant a^2, z\geqslant 0\,(a>0)$



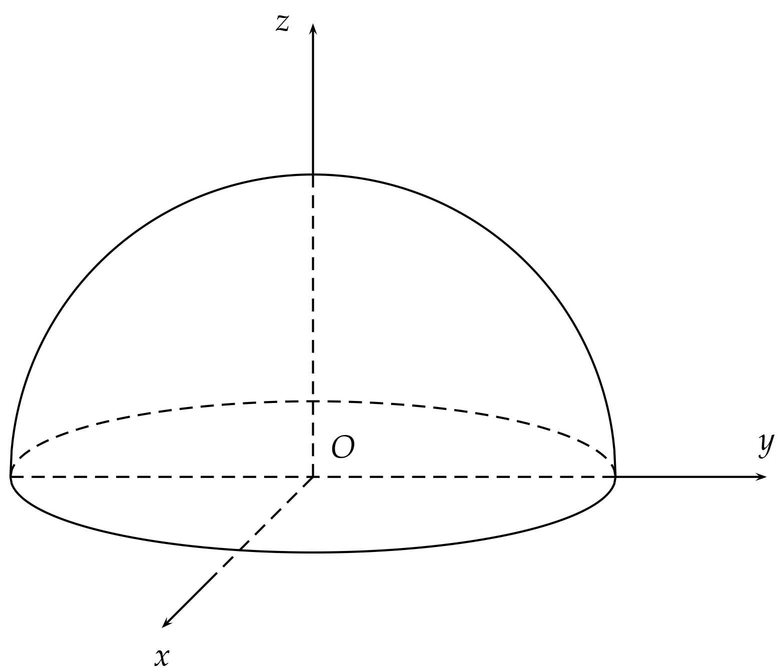
Hình 2.19a

Lời giải. a) Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$. Từ $x^2 + y^2 = 2x$ suy ra $r = 2\cos\varphi$. Do đó: $\begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \leqslant r \leqslant 2\cos\varphi \\ 0 \leqslant z \leqslant a \end{cases}$.

Vậy

$$I = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{0}^{2\cos\varphi} r^2 dr \int\limits_{0}^{a} z dz = \ldots = \frac{16a^2}{9}$$

■



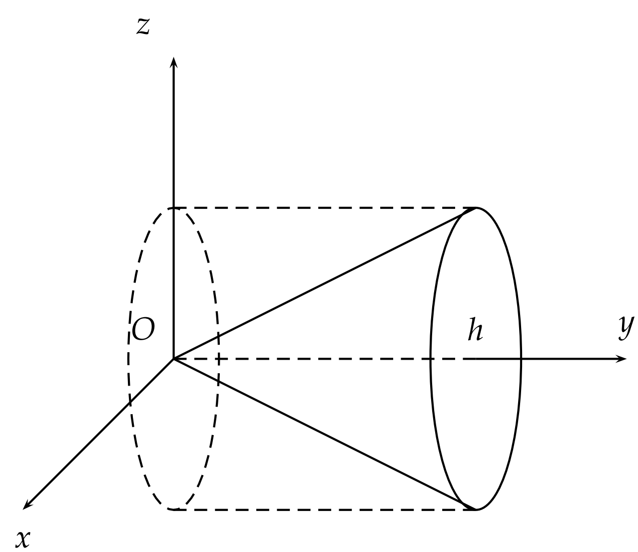
Hình 2.19b

Lời giải. b) Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$, ta có $\begin{cases} 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi \\ 0 \leqslant r \leqslant a \\ 0 \leqslant z \leqslant \sqrt{a^2 - r^2} \end{cases}$. Vậy

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r^2 dr \int_0^{\sqrt{a^2-r^2}} z dz = 2\pi \int_0^a r^2 . \frac{a^2 - r^2}{2} dr = \frac{2\pi a^5}{15}$$

■

Bài tập 2.20. Tính $I = \iiint\limits_V y dx dy dz$, trong đó V giới hạn bởi: $\begin{cases} y = \sqrt{z^2 + x^2} \\ y = h \end{cases}$.



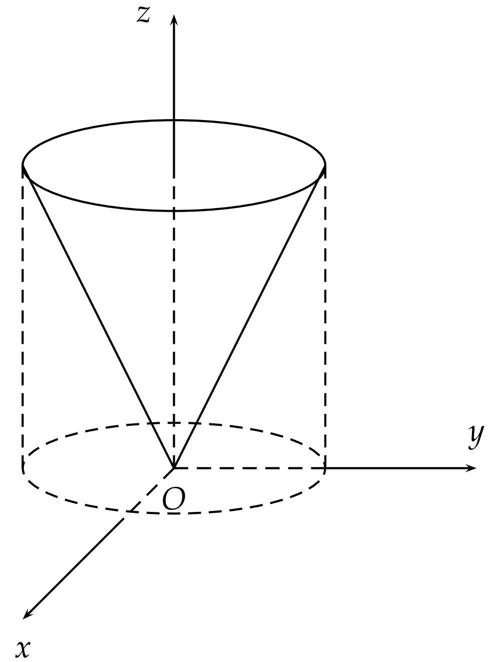
Hình 2.20

Lời giải. Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$, ta có $\begin{cases} 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi \\ 0 \leqslant r \leqslant h \\ r \leqslant y \leqslant h \end{cases}$. Vậy

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h r dr \int_r^h y dy = 2\pi \int_0^h r . \frac{h^2 - r^2}{2} dr = \frac{\pi h^4}{4}$$

■

Bài tập 2.21. Tính $I = \iiint\limits_V \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$ trong đó V giới hạn bởi: $\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 \\ z = 1 \end{cases}$.



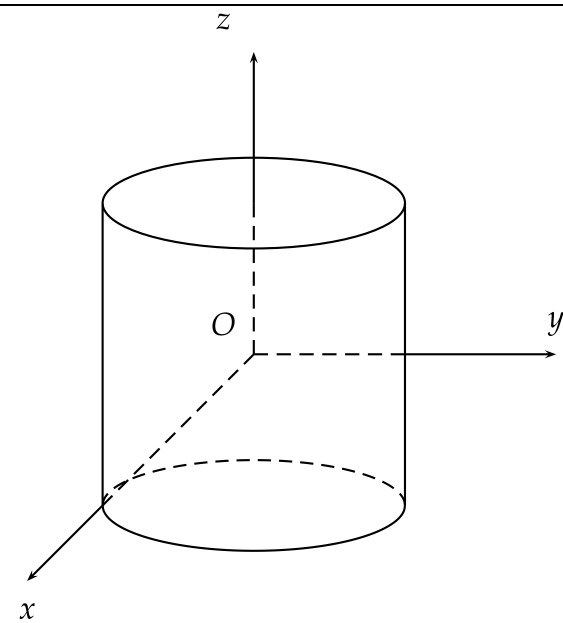
Hình 2.21

Lời giải. Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$, ta có $\begin{cases} 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi \\ 0 \leqslant r \leqslant 1 \\ r \leqslant z \leqslant 1 \end{cases}$. Vậy

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r^2 dr \int_r^1 dz = 2\pi \int_0^1 r^2 (1-r)\, dr = \frac{\pi}{6}$$

■

Bài tập 2.22. Tính $\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+(z-2)^2}}$, trong đó $V : \begin{cases} x^2 + y^2 =\leq 1 \\ |z| \leq 1 \end{cases}$.



Hình 2.22

Lời giải. Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z' = z - 2 \end{cases} \Rightarrow |J| = r, V_{r\varphi z} : \begin{cases} 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi \\ 0 \leqslant r \leqslant 1 \\ -3 \leqslant z' \leqslant -1 \end{cases}$, ta có

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 rdr \int_{-3}^{-1} \frac{dz'}{\sqrt{r^2 + z'^2}} \\ &= \pi \int_0^1 r.\ln\left(z' + \sqrt{r^2 + z'^2}\right) \Big|_{z'=-3}^{z'=-1} dr \\ &= 2\pi \left[\int_0^1 r\ln\left(\sqrt{r^2+1} - 1\right) dr - \int_0^1 r\ln\left(\sqrt{r^2+9} - 3\right) dr \right] \\ &= 2\pi\left(I_1 - I_2\right) \end{aligned}$$

Vì $\lim\limits_{r\to 0} r\ln\left(\sqrt{r^2+1} - 1\right) = \lim\limits_{r\to 0} r\ln\left(\sqrt{r^2+9} - 3\right) = 0$ nên thực chất I_1, I_2 là các tích phân xác định.

Đặt $\sqrt{r^2+1} = t \Rightarrow rdr = tdt$, ta có

$$\begin{aligned} &\int r\ln\left(\sqrt{r^2+1} - 1\right) dr \\ &= \int t\ln(t-1)\,dt \\ &= \frac{t^2}{2}\ln(t-1) - \frac{1}{2}\int \frac{t^2}{t-1}dt \\ &= \frac{t^2-1}{2}\ln(t-1) - \frac{t^2}{4} - \frac{t}{2} + C \end{aligned}$$

nên

$$I_1 = \left[\frac{t^2-1}{2}\ln(t-1) - \frac{t^2}{4} - \frac{t}{2}\right]\Big|_1^{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{2}-1\right) - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\left(\sqrt{2}-1\right)$$

Tương tự, $I_2 = \frac{t^2-9}{2}\ln(t-3) - \frac{t^2}{4} - \frac{3t}{2} + C$ nên

$$I_2 = \left[\frac{t^2-9}{2}\ln(t-3) - \frac{t^2}{4} - \frac{3t}{2}\right]\Big|_3^{\sqrt{10}} = \frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{10}-3\right) - \frac{1}{4} - \frac{3}{2}\left(\sqrt{10}-3\right)$$

Vậy

$$I = 2\pi(I_1 - I_2) = \pi\left(\ln\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{10}-3} + 3\sqrt{10} - 8 - \sqrt{2}\right)$$

■

Phép đổi biến trong toạ độ cầu

Trong trường hợp miền V có dạng hình cầu, chỏm cầu, múi cầu,... và khi hàm lấy tích phân $f(x,y,z)$ có chứa biểu thức $\left(x^2+y^2+z^2\right)$ thì ta hay sử dụng phép đổi biến trong toạ độ cầu.

Toạ độ cầu của điểm $M(x,y,z)$ trong không gian là bộ ba (r,θ,φ), trong đó:

$$\begin{cases} r = \left|\overrightarrow{OM}\right| \\ \theta = \left(\widehat{\overrightarrow{OM}, Oz}\right) \\ \varphi = \left(\widehat{\overrightarrow{OM'}, Ox}\right) \end{cases}$$

Công thức của phép đổi biến là: $\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$.

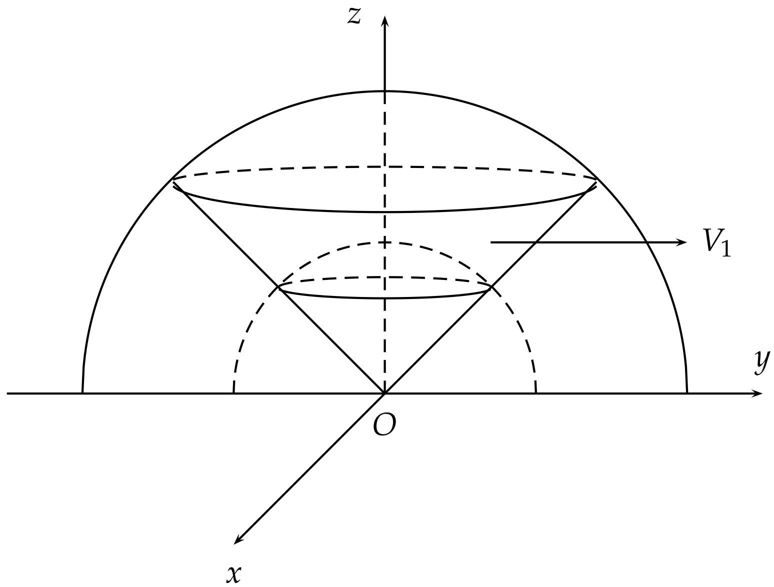
Định thức Jacobian $J = \frac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,\varphi)} = -r^2\sin\theta$, ta có:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_{V_{r\theta\varphi}} f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)\,r^2\sin\theta drd\theta d\varphi$$

Đặc biệt, nếu $V_{r\theta\varphi}: \begin{cases} \varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_2, \ (\varphi_2 - \varphi_1 \leqslant 2\pi) \\ \theta_1(\varphi) \leqslant \theta \leqslant \theta_2(\varphi) \\ r_1(\theta,\varphi) \leqslant r \leqslant r_2(\theta,\varphi) \end{cases}$ thì

$$I = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{\theta_1(\varphi)}^{\theta_2(\varphi)} \sin\theta d\theta \int\limits_{r_1(\theta,\varphi)}^{r_2(\theta,\varphi)} f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta) r^2 dr$$

Bài tập 2.23. Tính $\iiint\limits_V \left(x^2+y^2+z^2\right) dxdydz$, trong đó $V : \begin{cases} 1 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 4 \\ x^2+y^2 \leqslant z^2 \end{cases}$



Hình 2.23

Lời giải. Đặt $\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$. Do $1 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 4$ nên $1 \leq r \leq 2$; trên mặt nón có phương trình $x^2+y^2 = z^2$ nên $\theta = \frac{\pi}{4}$. Vậy

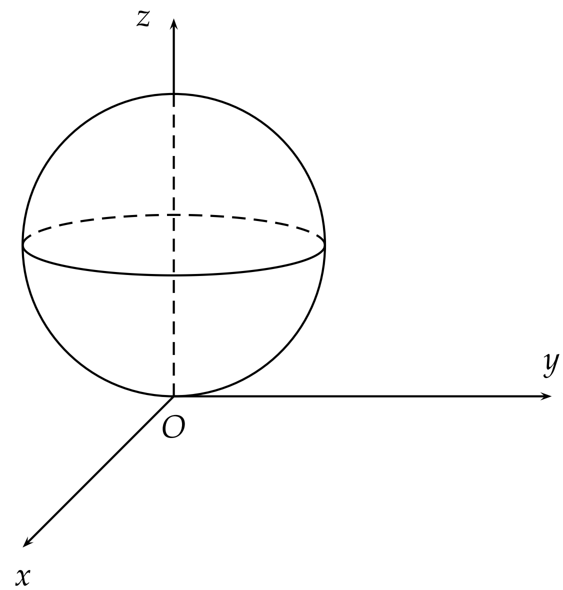
$$\begin{cases} 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi \\ 0 \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{4} \\ 1 \leqslant r \leqslant 2 \end{cases}$$

nên

$$I = 2\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\theta d\theta \int\limits_1^2 r^2.r^2 dr = 2.2\pi.\left(-\cos\theta\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}.\frac{r^5}{5}\Big|_1^2 = \frac{4.31\pi}{5}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

■

Bài tập 2.24. Tính $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz$ trong đó $V :\ x^2+y^2+z^2 \leqslant z$.



Hình 2.24

Lời giải. Đặt $\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$. Nhìn hình vẽ ta thấy $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$.

Do $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant z$ nên $0 \leqslant r \leqslant \cos\theta$. Vậy

$$I = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta d\theta \int\limits_0^{\cos\theta} r.r^2 dr = 2\pi. \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta.\frac{1}{4}\cos^4\theta d\theta = \frac{\pi}{10}$$

■

Phép đổi biến trong toạ độ cầu suy rộng.

Tương tự như khi tính tích phân kép, khi miền V có dạng hình ellipsoit hoặc hình cầu có tâm không nằm trên các trục toạ độ thì ta sẽ sử dụng phép đổi biến số trong toạ độ cầu suy rộng. Khi đó ta phải tính lại Jacobian của phép biến đổi.

1. Nếu miền V có dạng *hình ellipsoit hoặc hình cầu có tâm không nằm trên các trục toạ độ* nên nghĩ tới phép đổi biến số trong toạ độ cầu suy rộng.

2. – Nếu $V : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ thì thực hiện phép đổi biến

$$\begin{cases} x = ar\sin\theta\cos\varphi \\ y = br\sin\theta\sin\varphi \ , J = -abcr^2\sin\theta \\ z = cr\cos\theta \end{cases}$$

– Nếu $V : (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$ thì thực hiện phép đổi biến

$$\begin{cases} x = a + r\sin\theta\cos\varphi \\ y = b + r\sin\theta\sin\varphi \ , J = -r^2\sin\theta \\ z = c + r\cos\theta \end{cases}$$

3. Xác định miền biến thiên của φ, θ, r.

4. Dùng công thức đổi biến tổng quát để hoàn tất việc đổi biến.

Bài tập 2.25. Tính $\iiint\limits_V z\sqrt{x^2+y^2}dxdydz$, trong đó V là nửa của khối ellipsoit $\frac{x^2+y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} \leqslant 1, z \geqslant 0, (a, b > 0)$

Lời giải. **Cách 1: Sử dụng phép đổi biến trong toạ độ trụ suy rộng.**
Đặt

$$\begin{cases} z = bz' \\ x = ar\cos\varphi \\ y = ar\sin\theta \end{cases} \Rightarrow J = \frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,z)} = a^2br, V_{r\varphi z'} = \left\{0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, 0 \leqslant r \leqslant 1, 0 \leqslant z' \leqslant \sqrt{1-r^2}\right\}$$

Vậy

$$I = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 dr \int\limits_0^{\sqrt{1-r^2}} bz'.ar.a^2brdz' = 2a^3b^2\pi\int\limits_0^1 r^2.\frac{1-r^2}{2}dr = \frac{2\pi a^3b^2}{15}$$

Cách 2: Sử dụng phép đổi biến trong toạ độ cầu suy rộng.
Đặt

$$\begin{cases} x = ar\sin\theta\cos\varphi \\ y = ar\sin\theta\sin\varphi \\ z = br\cos\theta \end{cases} \Rightarrow J = \frac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,\varphi)} = a^2br^2\sin\theta, V_{r\varphi z'} = \left\{0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}, 0 \leqslant r \leqslant 1\right\}$$

Vậy

$$I = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int\limits_0^1 br\cos\theta.ar\sin\theta.a^2b\sin\theta = 2a^3b^2\pi\int\limits_0^{2\pi}\cos\theta\sin^2\pi d\theta\int\limits_0^1 r^4dr = \frac{2\pi a^3b^2}{15}$$

■

Bài tập 2.26. Tính $\iiint\limits_V \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)dxdydz$, ở đó $V : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leqslant 1, (a, b, c > 0)$.

Lời giải. Đặt

$$\begin{cases} x = ar\sin\theta\cos\varphi \\ y = br\sin\theta\sin\varphi \\ z = cr\cos\theta \end{cases} \Rightarrow J = \frac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,\varphi)} = abcr^2\sin\theta, V_{r\varphi z'} = \{0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, 0 \leqslant r \leqslant 1\}$$

Vậy

$$I = abc\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^1 r^2.r^2\sin\theta = \frac{4\pi}{5}abc$$

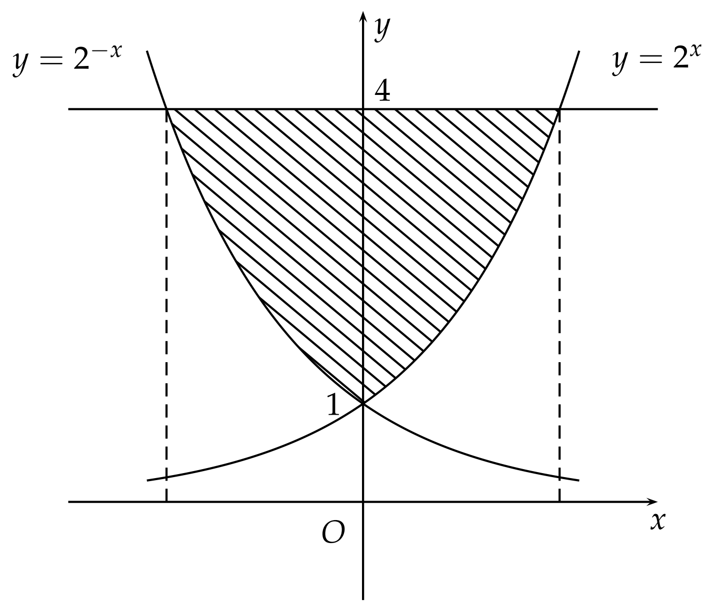
■

§3. CÁC ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN BỘI

3.1 Tính diện tích hình phẳng

Công thức tổng quát: $\boxed{S = \iint\limits_D dxdy}$

Bài tập 2.27. Tính diện tích của miền D giới hạn bởi: $\begin{cases} y = 2^x \\ y = 2^{-x} \\ y = 4 \end{cases}$.



Hình 2.27

Lời giải. Nhận xét:

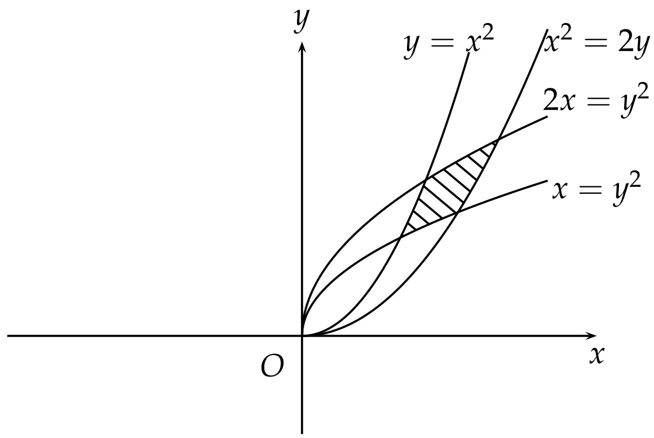
$$D = D_1 \cup D_2, D_1 \begin{cases} -2 \leqslant x \leqslant 0 \\ 2^{-x} \leqslant y \leqslant 4 \end{cases}, D_2 \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ 2^x \leqslant y \leqslant 4 \end{cases}$$

nên

$$S = \iint\limits_D dxdy = \iint\limits_{D_1} dxdy + \iint\limits_{D_2} dxdy = 2\iint\limits_{D_1} dxdy = ... = 2\left(8 - \frac{3}{\ln 2}\right)$$

■

Bài tập 2.28. Tính diện tích của miền D giới hạn bởi: $\begin{cases} y^2 = x, y^2 = 2x \\ x^2 = y, x^2 = 2y \end{cases}$



Hình 2.28

Lời giải. Ta có $S = \iint\limits_D dxdy$. Thực hiện phép đổi biến

$$\begin{cases} u = \dfrac{y^2}{x} \\ v = \dfrac{x^2}{y} \end{cases} \Rightarrow D_{uv} : \begin{cases} 1 \leqslant u \leqslant 2 \\ 1 \leqslant v \leqslant 2 \end{cases},$$

thì

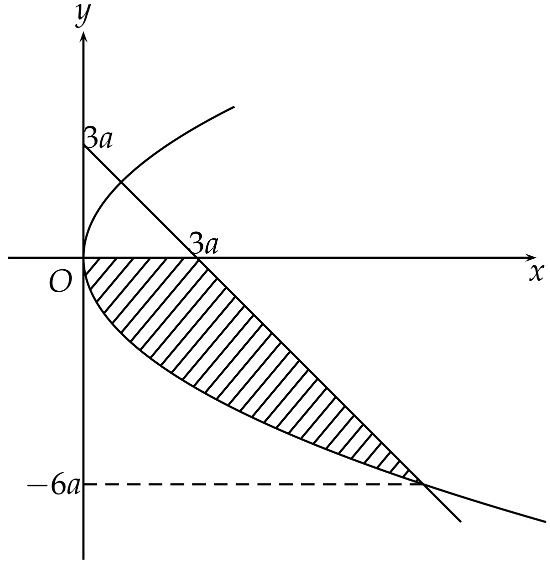
$$J^{-1} = \frac{D(u,v)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} -\frac{y^2}{x^2} & \frac{2y}{x} \\ \frac{2x}{y} & -\frac{x^2}{y^2} \end{vmatrix} = -3$$

Vậy

$$S = \iint\limits_{D_{uv}} \frac{1}{3} dudv = \frac{1}{3}$$

■

Bài tập 2.29. Tính diện tích miền D giới hạn bởi $\begin{cases} y = 0, y^2 = 4ax \\ x + y = 3a, y \leqslant 0 \;\; (a > 0) \end{cases}$.



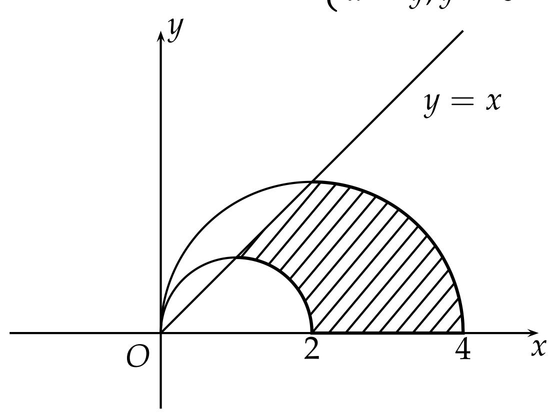
Hình 2.29

Lời giải. Nhìn hình vẽ ta thấy $D : \begin{cases} -6a \leqslant y \leqslant 0 \\ \dfrac{y^2}{4a} \leqslant x \leqslant 3a - y \end{cases}$ nên

$$S = \iint\limits_D dxdy = \int\limits_{-6a}^{0} dy \int\limits_{\frac{y^2}{4a}}^{3a-y} dx = \int\limits_{-6a}^{0} \left(3a - y - \frac{y^2}{4a}\right) dy = 18a^2$$

■

Bài tập 2.30. Tính diện tích miền D giới hạn bởi $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2x, x^2 + y^2 = 4x \\ x = y, y = 0 \end{cases}$.



Hình 2.30

Lời giải. Ta có $S = \iint\limits_D dxdy$, đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ thì $D : \begin{cases} 0 \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{4} \\ 2\cos\varphi \leqslant r \leqslant 4\cos\varphi \end{cases}$ nên

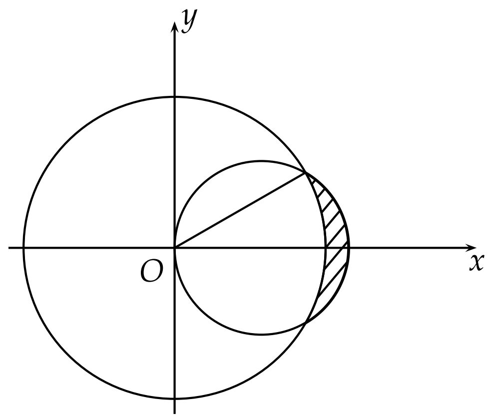
$$S = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi} rdr = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} 12\cos^2\varphi d\varphi = \frac{3\pi}{4} + \frac{3}{2}$$

■

Bài tập 2.31. Tính diện tích miền D giới hạn bởi đường tròn $r = 1, r = \frac{2}{\sqrt{3}} \cos \varphi$.

Chú ý:

- $r = a$ là phương trình đường tròn tâm $O(0,0)$, bán kính a.
- $r = a \cos \varphi$ là phương trình đường tròn tâm $(a, 0)$, bán kính a.



Hình 2.31

Lời giải. Giao tại giao điểm của 2 đường tròn:

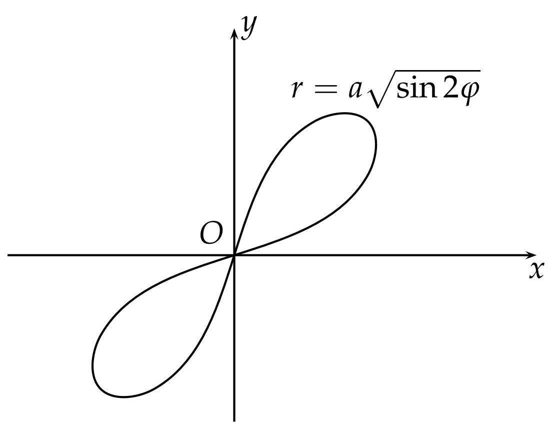
$$r = 1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \cos \varphi \Leftrightarrow \varphi = \pm \frac{\pi}{6}$$

nên

$$S = 2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} d\varphi \int\limits_1^{\frac{2}{\sqrt{3}} \cos \varphi} r dr = 2.\frac{1}{2} \int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \left(\frac{4}{3} \cos^2 \varphi - 1 \right) d\varphi = \frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{\pi}{18}$$

■

Bài tập 2.32. Tính diện tích miền D giới hạn bởi đường $\left(x^2 + y^2\right)^2 = 2a^2 xy \ \ (a > 0)$ (đường)



Hình 2.32

Lời giải. Tham số hoá đường cong đã cho, đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$, phương trình đường cong tương đương với $r^2 = a^2\sin 2\varphi$. Khảo sát và vẽ đường cong đã cho trong hệ toạ độ cực (xem hình vẽ 2.32). Ta có

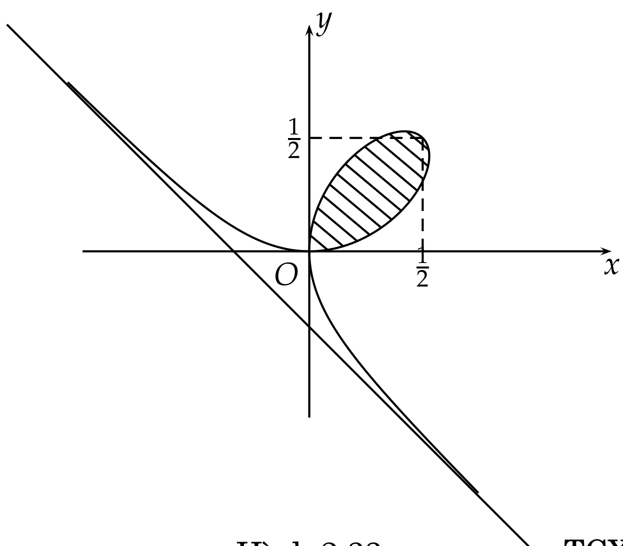
$$D : \begin{cases} 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}, \pi \leqslant \varphi \leqslant \frac{3\pi}{2} \\ 0 \leqslant r \leqslant a\sqrt{\sin 2\varphi} \end{cases}$$

Do tính đối xứng của hình vẽ nên

$$S = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\sin 2\varphi}} r dr = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \sin 2\varphi d\varphi = a^2$$

∎

Bài tập 2.33. Tính diện tích miền D giới hạn bởi đường $x^3 + y^3 = axy \ \ (a > 0)$ (Lá Descartes)



Hình 2.33

Tham số hoá đường cong đã cho, đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$, phương trình đường cong tương đương với

$$r = \frac{a\sin\varphi\cos\varphi}{\sin^3\varphi + \cos^3\varphi}$$

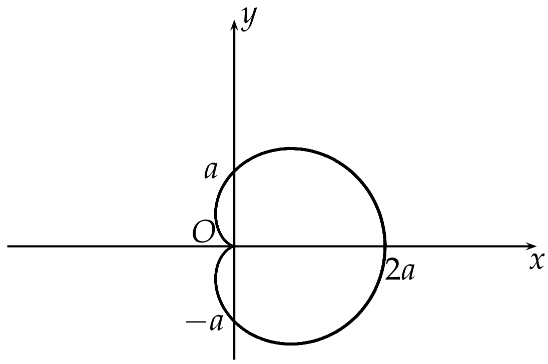
Khảo sát và vẽ đường cong đã cho trong hệ toạ độ cực (xem hình vẽ 2.33). Ta có

$$D : \begin{cases} 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2} \\ 0 \leqslant r \leqslant \frac{a\sin\varphi\cos\varphi}{\sin^3\varphi + \cos^3\varphi} \end{cases}$$

nên

$$S = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{\frac{a\sin\varphi\cos\varphi}{\sin^3\varphi+\cos^3\varphi}} rdr = \frac{a^2}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{\left(\sin^3\varphi+\cos^3\varphi\right)^2}d\varphi \overset{t=tg\varphi}{=} \frac{a^2}{2}.\frac{1}{3}\int\limits_0^{+\infty} \frac{d\left(t^3+1\right)}{\left(t^3+1\right)^2} = \frac{a^2}{6}$$

Bài tập 2.34. Tính diện tích miền D giới hạn bởi đường $r = a\left(1+\cos\varphi\right) \quad (a>0)$, (đường Cardioids hay đường hình tim)



Hình 2.34

Lời giải. Ta có

$$D = \left\{0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, 0 \leqslant r \leqslant a\left(1+\cos\varphi\right)\right\}$$

nên

$$S = 2\int\limits_0^{\pi} d\varphi \int\limits_0^{a(1+\cos\varphi)} rdr = a^2\int\limits_0^{\pi}\left(1+\cos\varphi\right)^2 d\varphi = ... = \frac{3\pi a^2}{2}$$

■

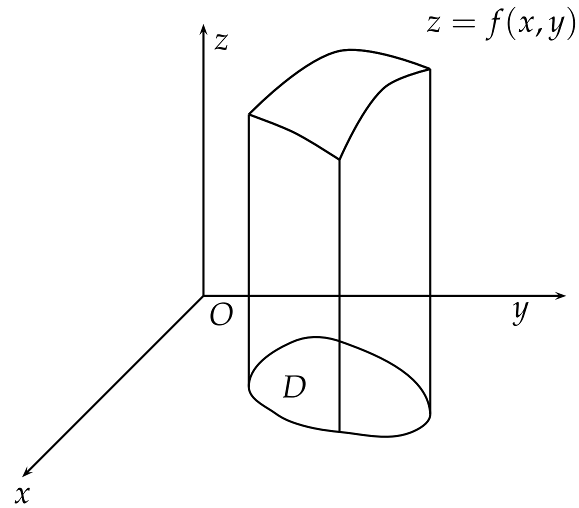
3.2 Tính thể tích vật thể

Công thức tổng quát:

$$\boxed{V = \iiint\limits_V dxdydz}$$

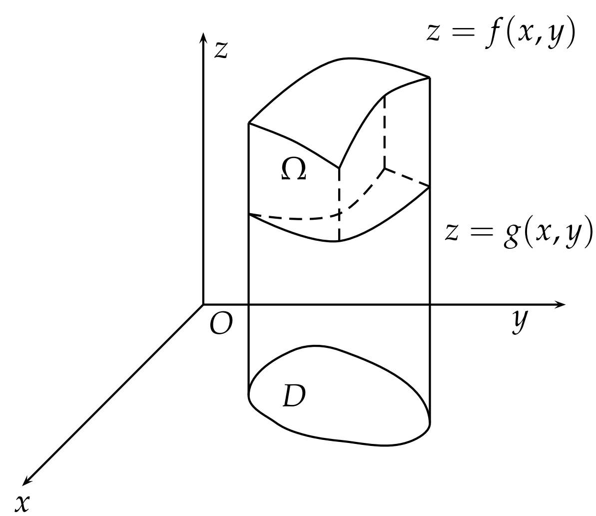
Các trường hợp đặc biệt

1. Vật thể hình trụ, mặt xung quanh là mặt trụ có đường sinh song song với trục Oz, đáy là miền D trong mặt phẳng Oxy, phía trên giới hạn bởi mặt cong $z = f\left(x,y\right), f\left(x,y\right) \geqslant 0$ và liên tục trên D thì $V = \iint\limits_D f\left(x,y\right)dxdy$. (Xem hình vẽ dưới đây).

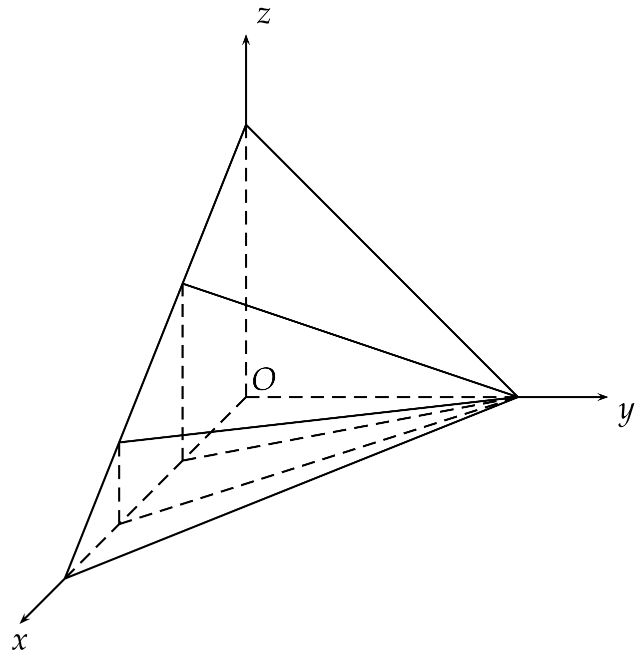


2. Vật thể là khối trụ, giới hạn bởi các đường sinh song song với trục Oz, hai mặt $z = z_1(x,y), z = z_2(x,y)$. Chiếu các mặt này lên mặt phẳng Oxy ta được miền D, $z_1(x,y), z_2(x,y)$ là các hàm liên tục, có đạo hàm riêng liên tục trên D. Khi đó:

$$V = \iint\limits_D |z_1(x,y) - z_2(x,y)| dxdy$$



Bài tập 2.35. Tính diện tích miền giới hạn bởi $\begin{cases} 3x + y \geqslant 1 \\ 3x + 2y \leqslant 2 \\ y \geqslant 0, 0 \leqslant z \leqslant 1 - x - y \end{cases}$.



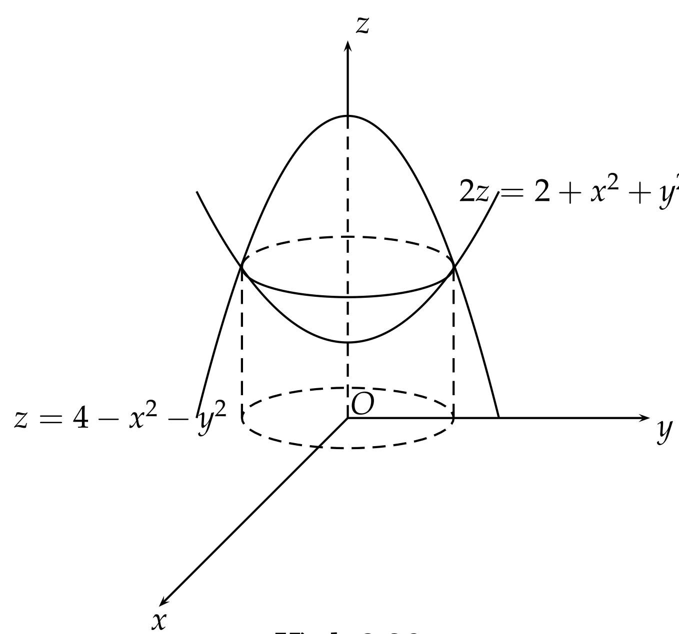
Hình 2.35

Lời giải.

$$V = \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{\frac{1-y}{3}}^{\frac{2-2y}{3}} (1-x-y)\,dx = \frac{1}{6}\int\limits_0^1 \left(1-2y+y^2\right)dy = \frac{1}{18}$$

■

Bài tập 2.36. Tính thể tích của miền V giới hạn bởi $\begin{cases} z = 4 - x^2 - y^2 \\ 2z = 2 + x^2 + y^2 \end{cases}$.



Hình 2.36

Lời giải. Giao tuyến của hai mặt cong: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ z = 2 \end{cases}$, nên hình chiếu của V lên mặt phẳng Oxy là $D : x^2 + y^2 \leq 2$. Hơn nữa trên D thì $4 - x^2 - y^2 \geqslant \frac{2+x^2+y^2}{2}$ nên ta có:

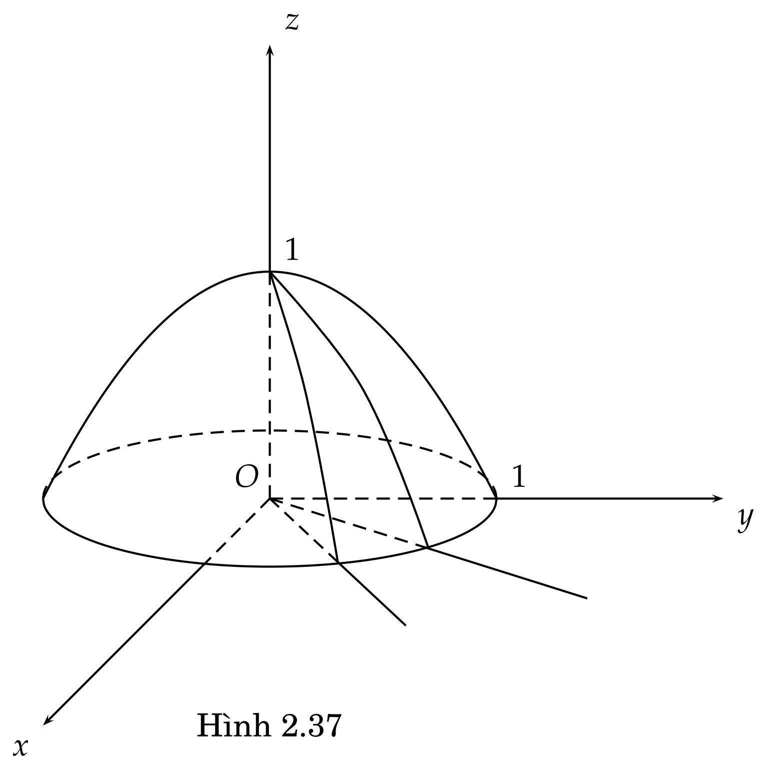
$$V = \iint\limits_D \left(4 - x^2 - y^2 - \frac{2 + x^2 + y^2}{2}\right) dxdy$$

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ thì $\begin{cases} 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi \\ 0 \leqslant r \leqslant \sqrt{2} \end{cases}$, do đó

$$V = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{2}} \left(3 - \frac{3}{2}r^2\right) rdr = \ldots = 3\pi$$

■

Bài tập 2.37. Tính thể tích của $V : \begin{cases} 0 \leqslant z \leqslant 1 - x^2 - y^2 \\ y \geqslant x, y \leqslant \sqrt{3}x \end{cases}$.



Hình 2.37

Lời giải. Do $x \leq y \leq \sqrt{3}x$ nên $x, y \geq 0$. Ta có

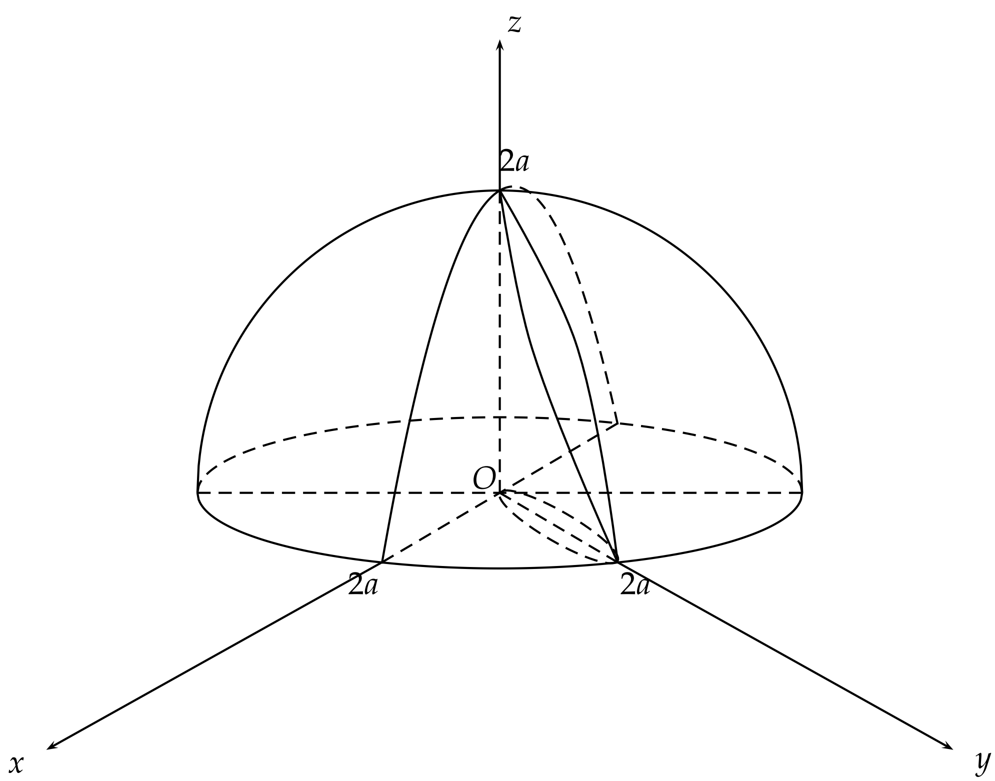
$$V = \iint\limits_D \left(1 - x^2 - y^2\right) dxdy$$

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ thì $\begin{cases} \dfrac{\pi}{4} \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{3} \\ 0 \leqslant r \leqslant 1 \end{cases}$. Vậy

$$V = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int\limits_{0}^{1} \left(1 - r^2\right) r dr = \ldots = \frac{\pi}{48}$$

■

Bài tập 2.38. Tính thể tích $V : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 4a^2 \\ x^2 + y^2 - 2ay \leqslant 0 \end{cases}$.



Hình 2.38

Lời giải. Do tính chất đối xứng của miền V nên

$$V = 4 \iint\limits_{D} \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2} dxdy,$$

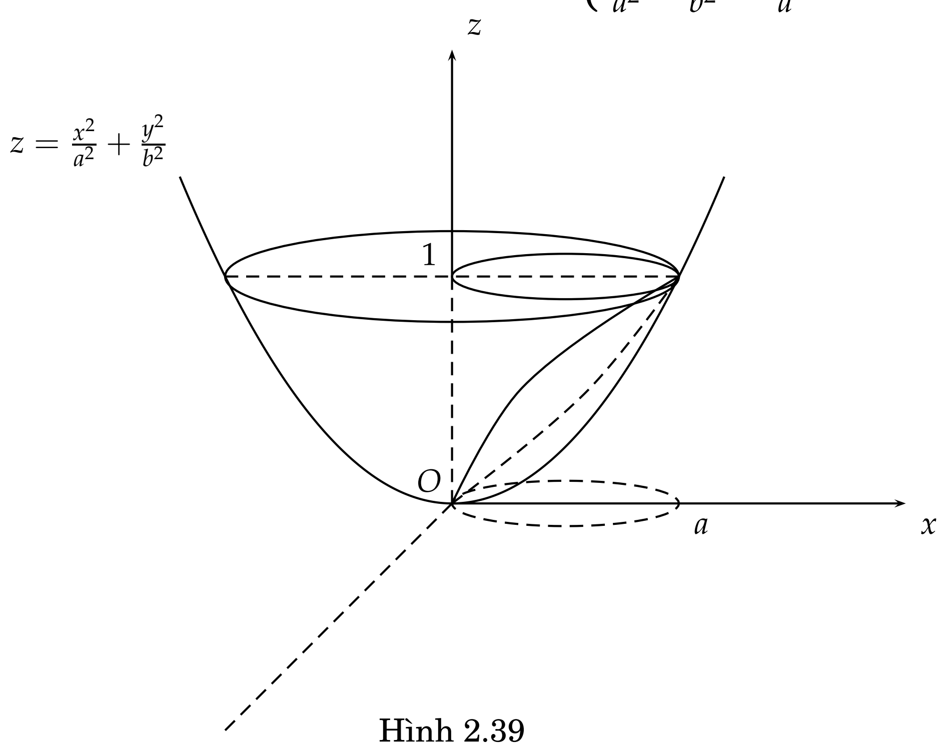
trong đó D là nửa hình tròn $D : \begin{cases} x^2 + y^2 - 2ay \leqslant 0 \\ x \geqslant 0 \end{cases}$. Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \leqslant r \leqslant 2a\sin\varphi \end{cases}$

Vậy

$$\begin{aligned}
V &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2a\sin\varphi} \sqrt{4a^2 - r^2}\, r dr \\
&= 4.\frac{-1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{3}\left(4a^2 - r^2\right)^{\frac{3}{2}} \Big|_{r=0}^{r=2a\sin\varphi} d\varphi \\
&= \frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(8a^3 - 8a^3\cos^3\varphi\right) d\varphi \\
&= \frac{32a^3}{3}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right)
\end{aligned}$$

■

Bài tập 2.39. Tính thể tích của miền V giới hạn bởi $\begin{cases} z = 0 \\ z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{2x}{a} \end{cases}$.



Hình 2.39

Lời giải. Ta có hình chiếu của V lên mặt phẳng Oxy là miền $D : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{2x}{a}$. Do tính chất đối xứng của miền V nên:

$$V = 2\iint\limits_{D^+} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) dxdy,$$

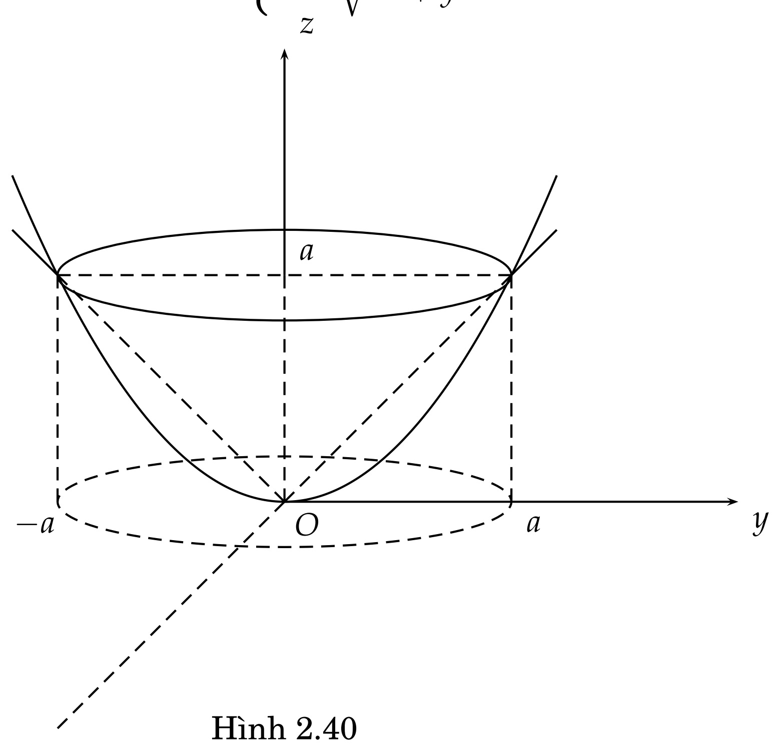
trong đó D^+ là nửa ellipse $D^+ : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{2x}{a}, y \geqslant 0$

Đặt $\begin{cases} x = ar\cos\varphi \\ y = br\sin\varphi \end{cases}$ thì $|J| = abr$, $\begin{cases} 0 \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \leqslant r \leqslant 2\cos\varphi \end{cases}$. Vậy

$$V = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} r^2 r dr = \ldots = \frac{3\pi}{2}$$

■

Bài tập 2.40. Tính thể tích của miền $V : \begin{cases} az = x^2 + y^2 \\ z = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$.



Hình 2.40

Lời giải. Giao tuyến của hai đường cong:

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{x^2 + y^2}{a} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ z = a \end{cases}$$

Vậy hình chiếu của V lên mặt phẳng Oxy là

$$D : x^2 + y^2 = a^2$$

Nhận xét rằng, ở trong miền D thì mặt nón ở phía trên mặt paraboloit nên:

$$V = \iint\limits_D \left(\sqrt{x^2 + y^2} - \frac{x^2 + y^2}{a} \right) dxdy$$

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ thì $\begin{cases} 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi \\ 0 \leqslant r \leqslant a \end{cases}$. Vậy

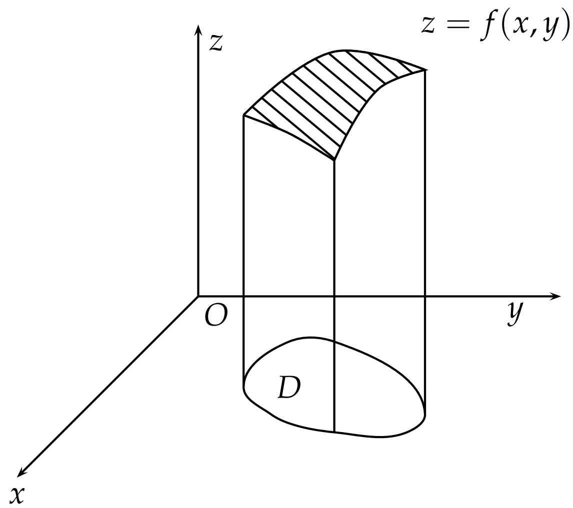
$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \left(r - \frac{r^2}{a}\right) r dr = \ldots = \frac{\pi a^3}{6}$$

■

3.3 Tính diện tích mặt cong

Mặt $z = f(x,y)$ giới hạn bởi một đường cong kín, hình chiếu của mặt cong lên mặt phẳng Oxy là D. $f(x,y)$ là hàm số liên tục, có các đạo hàm riêng liên tục trên D. Khi đó:

$$\sigma = \iint_D \sqrt{1 + p^2 + q^2} dxdy, p = f'_x, q = f'_y$$



CHƯƠNG 3

TÍCH PHÂN PHỤ THUỘC THAM SỐ.

§1. TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH PHỤ THUỘC THAM SỐ.

1.1 Giới thiệu

Xét tích phân xác định phụ thuộc tham số: $I(y) = \int\limits_a^b f(x,y)\,dx$, trong đó $f(x,y)$ khả tích theo x trên $[a,b]$ với mỗi $y \in [c,d]$. Trong bài học này chúng ta sẽ nghiên cứu một số tính chất của hàm số $I(y)$như tính liên tục, khả vi, khả tích.

1.2 Các tính chất của tích phân xác định phụ thuộc tham số.

1) Tính liên tục.

Định lý 3.7. *Nếu $f(x,y)$là hàm số liên tục trên $[a,b] \times [c,d]$ thì $I(y)$là hàm số liên tục trên $[c,d]$. Tức là:*

$$\lim_{y \to y_0} I(y) = I(y_0) \Leftrightarrow \boxed{\lim_{y \to y_0} \int\limits_a^b f(x,y)\,dx = \int\limits_a^b f(x,y_0)\,dx}$$

2) Tính khả vi.

Định lý 3.8. *Giả sử với mỗi $y \in [c,d]$, $f(x,y)$ là hàm số liên tục theo x trên $[a,b]$ và $f'_y(x,y)$ là hàm số liên tục trên $[a,b] \times [c,d]$ thì $I(y)$ là hàm số khả vi trên (c,d) và*

$\boxed{I'(y) = \int\limits_a^b f'_y(x,y)\,dx}$, *hay nói cách khác chúng ta có thể đưa dấu đạo hàm vào trong tích phân.*

3) Tính khả tích.

Định lý 3.9. *Nếu* $f(x,y)$ *là hàm số liên tục trên* $[a,b] \times [c,d]$ *thì* $I(y)$ *là hàm số khả tích trên* $[c,d]$ *, và:*

$$\boxed{\int\limits_c^d I(y)\,dy := \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x,y)\,dx \right) dy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,y)\,dy \right) dx}$$

Bài tập

Bài tập 3.1. Khảo sát sự liên tục của tích phân $I(y) = \int\limits_0^1 \frac{yf(x)}{x^2+y^2}dx$, với $f(x)$ là hàm số dương, liên tục trên $[0,1]$.

Lời giải. Nhận xét rằng hàm số $g(x,y) = \frac{yf(x)}{x^2+y^2}$ liên tục trên mỗi hình chữ nhật $[0,1] \times [c,d]$ và $[0,1] \times [-d,-c]$ với $0 < c < d$ bất kì, nên theo Định lý 3.7, $I(y)$ liên tục trên mỗi $[c,d], [-d,-c]$, hay nói cách khác $I(y)$ liên tục với mọi $y \neq 0$.
Bây giờ ta xét tính liên tục của hàm số $I(y)$ tại điểm $y = 0$. Do $f(x)$ là hàm số dương, liên tục trên $[0,1]$ nên tồn tại $m > 0$ sao cho $f(x) \geqslant m > 0\ \forall x \in [0,1]$. Khi đó với $\varepsilon > 0$ thì:

$$I(\varepsilon) = \int\limits_0^1 \frac{\varepsilon f(x)}{x^2+\varepsilon^2}dx \geqslant \int\limits_0^1 \frac{\varepsilon.m}{x^2+\varepsilon^2}dx = m.\text{arctg}\frac{x}{\varepsilon}$$

$$I(-\varepsilon) = \int\limits_0^1 \frac{-\varepsilon f(x)}{x^2+\varepsilon^2}dx \leqslant \int\limits_0^1 \frac{-\varepsilon.m}{x^2+\varepsilon^2}dx = -m.\text{arctg}\frac{x}{\varepsilon}$$

Suy ra $|I(\varepsilon) - I(-\varepsilon)| \geqslant 2m.\text{arctg}\frac{x}{\varepsilon} \to 2m.\frac{\pi}{2}$ khi $\varepsilon \to 0$, tức là $|I(\varepsilon) - I(-\varepsilon)|$ không tiến tới 0 khi $\varepsilon \to 0$, $I(y)$ gián đoạn tại $y = 0$. ■

Bài tập 3.2. Tính các tích phân sau:

a) $I_n(\alpha) = \int\limits_0^1 x^\alpha \ln^n x dx$, n là số nguyên dương.

Lời giải. – Với mỗi $\alpha > 0$, hàm số $f_n(x,\alpha) = x^\alpha \ln^n x, n = 0,1,2,...$ liên tục theo x trên $[0,1]$

– Vì $\lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha \ln^{n+1} x = 0$ nên $\frac{\partial f_n(x,\alpha)}{\partial\alpha} = x^\alpha \ln^{n+1} x$ liên tục trên $[0,1]\times(0,+\infty)$.

Nghĩa là hàm số $f_n(x,\alpha) = x^\alpha \ln^n x$ thoả mãn các điều kiện của Định lý 3.8 nên:

$$I'_{n-1}(\alpha) = \frac{d}{d\alpha}\int\limits_0^1 x^\alpha \ln^{n-1} x dx = \int\limits_0^1 \frac{d}{d\alpha}\left(x^\alpha \ln^{n-1} x\right)dx = \int\limits_0^1 x^\alpha \ln^n x dx = I_n(\alpha)$$

Tương tự, $I'_{n-2} = I_{n-1}, ..., I'_2 = I_1, I'_1 = I_0$, suy ra $I_n(\alpha) = [I_0(\alpha)]^{(n)}$. Mà $I_0(\alpha) = \int\limits_0^1 x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} \Rightarrow I_n(\alpha) = \left[\frac{1}{\alpha+1}\right]^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(\alpha+1)^{n+1}}$. ∎

b) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(1+y\sin^2 x\right)dx$, với $y>1$.

Lời giải. Xét hàm số $f(x,y) = \ln\left(1+y\sin^2 x\right)$ thoả mãn các điều kiện sau:

- $f(x,y) = \ln\left(1+y\sin^2 x\right)$ xác định trên $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\times(1,+\infty)$ và với mỗi $y>-1$ cho trước, $f(x,y)$ liên tục theo x trên $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.
- Tồn tại $f'_y(x,y) = \frac{\sin^2 x}{1+y\sin^2 x}$ xác định, liên tục trên $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\times(1,+\infty)$.

Theo Định lý 3.8, $I'(y) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{1+y\sin^2 x}dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\frac{1}{\sin^2 x}+y}$.

Đặt $t = \text{tg}x$ thì $dx = \frac{dt}{1+t^2}, 0 \leqslant t \leqslant +\infty$.

$$I'(y) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{t^2 dt}{(t^2+1)(1+t^2+yt^2)} = \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{y}\left[\frac{1}{t^2+1} - \frac{1}{1+(y+1)t^2}\right]dt$$
$$= \frac{1}{y}\left[\text{arctg}t|_0^{+\infty} - \frac{1}{\sqrt{y+1}}\text{arctg}\left(t\sqrt{y+1}\right)|_0^{+\infty}\right]$$
$$= \frac{\pi}{2y}\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+y}}\right) = \frac{\pi}{2\sqrt{1+y}}.\frac{1}{1+\sqrt{1+y}}$$

Suy ra

$$I(y) = \int I'(y)dy = \int \frac{\pi}{2\sqrt{1+y}}.\frac{1}{1+\sqrt{1+y}}dy = \pi\ln\left(1+\sqrt{1+y}\right)+C$$

Do $I(0)=0$ nên $C = -\pi\ln 2$ và $I(y) = \pi\ln\left(1+\sqrt{1+y}\right) - \pi\ln 2$. ∎

Bài tập 3.3. Xét tính liên tục của hàm số $I(y) = \int\limits_0^1 \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}dx$.

Lời giải. Tại $y = 0$, $I(0) = \int\limits_0^1 -\frac{1}{x^2}dx = -\infty$, nên hàm số $I(y)$ không xác định tại $y = 0$.

Tại $y \neq 0$, $I(y) = \int\limits_0^1 \frac{(x^2+y^2)-2x.x}{(x^2+y^2)^2}dx = \int\limits_0^1 d\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{1}{1+y^2}$, nên $I(y)$ xác định và liên tục với mọi $y \neq 0$. ■

1.3 Các tính chất của tích phân phụ thuộc tham số với cận biến đổi.

Xét tích phân phụ thuộc tham số với cận biến đổi

$$J(y) = \int\limits_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\,dx, \text{ với } y \in [c,d], a \leqslant a(y), b(y) \leqslant b \; \forall y \in [c,d]$$

1) Tính liên tục

Định lý 3.10. *Nếu hàm số $f(x,y)$ liên tục trên $[a,b] \times [c,d]$, các hàm số $a(y), b(y)$ liên tục trên $[c,d]$ và thoả mãn điều kiện $a \leqslant a(y), b(y) \leqslant b \; \forall y \in [c,d]$ thì $J(y)$ là một hàm số liên tục đối với y trên $[c,d]$.*

2) Tính khả vi

Định lý 3.11. *Nếu hàm số $f(x,y)$ liên tục trên $[a,b] \times [c,d]$, $f_y'(x,y)$ liên tục trên $[a,b] \times [c,d]$, và $a(y), b(y)$ khả vi trên $[c,d]$ và thoả mãn điều kiện $a \leqslant a(y), b(y) \leqslant b \; \forall y \in [c,d]$ thì $J(y)$ là một hàm số khả vi đối với y trên $[c,d]$, và ta có:*

$$J'(y) = \int\limits_{a(y)}^{b(y)} f_y'(x,y)\,dx + f(b(y),y)\,b_y'(y) - f(a(y),y)\,a_y'(y)$$

.

Bài tập

Bài tập 3.4. Tìm $\lim\limits_{y\to 0} \int\limits_y^{1+y} \frac{dx}{1+x^2+y^2}$.

Lời giải. Dễ dàng kiểm tra được hàm số $I(y) = \int\limits_y^{1+y} \frac{dx}{1+x^2+y^2}$ liên tục tại $y = 0$ dựa vào định lý 3.10, nên $\lim\limits_{y\to 0} \int\limits_y^{1+y} \frac{dx}{1+x^2+y^2} = I(0) = \int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$. ■

§2. TÍCH PHÂN SUY RỘNG PHỤ THUỘC THAM SỐ.

2.1 Các tính chất của tích phân suy rộng phụ thuộc tham số.

Xét tích phân suy rộng phụ thuộc tham số $I(y) = \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx$, y $\in [c,d]$. Các kết quả dưới đây tuy phát biểu đối với tích phân suy rộng loại II (có cận bằng vô cùng) nhưng đều có thể áp dụng một cách thích hợp cho trường hợp tích phân suy rộng loại I (có hàm dưới dấu tích phân không bị chặn).

1) Dấu hiệu hội tụ Weierstrass

Định lý 3.12. *Nếu* $|f(x,y)| \leqslant g(x) \forall (x,y) \in [a,+\infty] \times [c,d]$ *và nếu tích phân suy rộng* $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$ *hội tụ, thì tích phân suy rộng* $I(y) = \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx$ *hội tụ đều đối với* $y \in [c,d]$.

2) Tính liên tục

Định lý 3.13. *Nếu hàm số* $f(x,y)$ *liên tục trên* $[a,+\infty] \times [c,d]$ *và nếu tích phân suy rộng* $I(y) = \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx$ *hội tụ đều đối với* $y \in [c,d]$ *thì* $I(y)$ *là một hàm số liên tục trên* $[c,d]$.

3) Tính khả vi

Định lý 3.14. *Giả sử hàm số* $f(x,y)$ *xác định trên* $[a,+\infty] \times [c,d]$ *sao cho với mỗi* $y \in [c,d]$ *, hàm số* $f(x,y)$ *liên tục đối với* x *trên* $[a,+\infty]$ *và* $f_y'(x,y)$ *liên tục trên* $[a,+\infty] \times [c,d]$. *Nếu tích phân suy rộng* $I(y) = \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx$ *hội tụ và* $\int\limits_a^{+\infty} f_y'(x,y)dx$ *hội tụ đều đối với* $y \in [c,d]$ *thì* $I(y)$ *là hàm số khả vi trên* $[c,d]$ *và* $I'(y) = \int\limits_a^{+\infty} f_y'(x,y)\,dx$.

4) Tính khả tích

Định lý 3.15. *Nếu hàm số* $f(x,y)$ *liên tục trên* $[a,+\infty] \times [c,d]$ *và nếu tích phân suy rộng* $I(y)$ *hội tụ đều đối với* $y \in [c,d]$ *thì* $I(y)$ *là hàm số khả tích trên* $[c,d]$ *và ta có* *thể đổi thứ tự lấy tích phân theo công thức:*

$$\int_c^d I(y)\,dy := \int_c^d \left(\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx \right) dy = \int_a^{+\infty} \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx.$$

2.2 Bài tập

Dạng 1. Tính tích phân suy rộng phụ thuộc tham số bằng cách đổi thứ tự lấy tích phân

Giả sử cần tính $I(y) = \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx$.

B1. Biểu diễn $f(x,y) = \int\limits_c^d F(x,y)\,dy$.

B2. Sử dụng tính chất đổi thứ tự lấy tích phân:

$$I(y) = \int_a^{+\infty} f(x,y)dx = \int_a^{+\infty} \left(\int_c^d F(x,y)\,dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^{+\infty} F(x,y)\,dx \right) dy$$

Chú ý: Phải kiểm tra điều kiện đổi thứ tự lấy tích phân trong Định lý 3.15 đối với tích phân suy rộng của hàm số $F(x,y)$.

Bài tập 3.5. Tính các tích phân sau:

a) $\int\limits_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx, \ (0 < a < b)$.

Lời giải. Ta có:

$$\frac{x^b - x^a}{\ln x} = F(x,b) - F(x,a) = \int_a^b F'_y(x,y)\,dy = \int_a^b x^y dy; \ \left(F(x,y) := \frac{x^y}{\ln x} \right)$$

nên:

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx = \int_0^1 \left(\int_a^b x^y dy \right) dx = \int_a^b \left(\int_0^1 x^y dx \right) dy = \int_a^b \frac{1}{y+1} dy = \ln \frac{b+1}{a+1}$$

Kiểm tra điều kiện về đổi thứ tự lấy tích phân: ■

b) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x} dx, \ (\alpha, \beta > 0).$

Lời giải. Ta có:

$$\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x} \overset{\left(F(x,y):=\frac{e^{-yx}}{x}\right)}{=} F(x,\alpha) - F(x,\beta) = \int\limits_\beta^\alpha F'_y(x,y) = \int\limits_\alpha^\beta e^{-yx} dy$$

nên:

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x} dx = \int\limits_0^{+\infty} \left(\int\limits_\alpha^\beta e^{-yx} dy \right) dx = \int\limits_\alpha^\beta \left(\int\limits_0^{+\infty} e^{-yx} dx \right) dy = \int\limits_\alpha^\beta \frac{dy}{y} = \ln \frac{\beta}{\alpha}.$$

Kiểm tra điều kiện về đổi thứ tự lấy tích phân: ■

c) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x^2} dx, \ (\alpha, \beta > 0).$

Lời giải. Ta có:

$$\frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x^2} \overset{\left(F(x,y):=\frac{e^{-yx^2}}{x^2}\right)}{=} F(x,\alpha) - F(x,\beta) = \int\limits_\beta^\alpha F'_y(x,y)\, dy = \int\limits_\alpha^\beta e^{-yx^2} dy$$

nên:

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x^2} dx = \int\limits_0^{+\infty} \left(\int\limits_\alpha^\beta e^{-x^2 y} dy \right) dx = \int\limits_\alpha^\beta \left(\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2 y} dx \right) dy$$

Với điều kiện đã biết $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ ta có $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2 y} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{y}}$.

Suy ra $I = \int\limits_\alpha^\beta \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{y}} dy = \sqrt{\pi}\left(\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha}\right).$

Kiểm tra điều kiện về đổi thứ tự lấy tích phân: ■

e) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax} \frac{\sin bx - \sin cx}{x}, \ (a, b, c > 0).$

Lời giải. Ta có:

$$e^{ax} \frac{\sin bx - \sin cx}{x} \overset{\left(F(x,y)=\frac{e^{-ax}\sin yx}{x}\right)}{=} F(x,b) - F(x,c) = \int\limits_c^b F'_y(x,y)\, dy = \int\limits_c^b e^{-ax} \cos yx dx$$

nên:

$$I=\int\limits_0^{+\infty}\left(\int\limits_c^b e^{-ax}\cos yxdy\right)dx=\int\limits_c^b\left(\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax}\cos yxdx\right)dy$$

Mà $\int e^{-ax}\cos yxdx=-\frac{a}{a^2+y^2}e^{-ax}\cos yx+\frac{y}{a^2+y^2}e^{-ax}\sin yx$, suy ra $\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax}\cos yxdx=\frac{a}{a^2+y^2}$,

và $I=\int\limits_c^b\frac{a}{a^2+y^2}dy=\operatorname{arctg}\frac{b}{a}-\operatorname{arctg}\frac{c}{a}$.

Kiểm tra điều kiện về đổi thứ tự lấy tích phân: ■

Dạng 2. Tính tích phân bằng cách đạo hàm qua dấu tích phân.

Giả sử cần tính $I(y)=\int\limits_a^{+\infty}f(x,y)dx$.

B1. Tính $I'(y)$ bằng cách $I'(y)=\int\limits_a^{+\infty}f'_y(x,y)\,dx$.

B2. Dùng công thức Newton-Leibniz để khôi phục lại $I(y)$ bằng cách $I(y)=\int I'(y)\,dy$.

Chú ý: Phải kiểm tra điều kiện chuyển dấu đạo hàm qua tích phân trong Định lý 3.14.

Bài tập 3.6. Chứng minh rằng tích phân phụ thuộc tham số $I(y)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg}(x+y)}{1+x^2}dx$ là một hàm số liên tục khả vi đối với biến y. Tính $I'(y)$ rồi suy ra biểu thức của $I(y)$.

Lời giải. Ta có:

- $f(x,y)=\frac{\operatorname{arctg}(x+y)}{1+x^2}$ liên tục trên $[-\infty,+\infty]\times[-\infty,+\infty]$.
- $\left|\frac{\operatorname{arctg}(x+y)}{1+x^2}\right|\leqslant\frac{\pi}{2}.\frac{1}{1+x^2}$, mà $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}=\pi$ hội tụ, nên $I(y)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg}(x+y)}{1+x^2}dx$ hội tụ đều trên $[-\infty,+\infty]$.

Theo Định lý 3.13, $I(y)$ liên tục trên $[-\infty,+\infty]$.

Hơn nữa $\left|f'_y(x,y)\right|=\frac{1}{(1+x^2)\left[1+(x+y)^2\right]}\leqslant\frac{1}{1+x^2}$, ∀y; do đó $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f'_y(x,y)dx$ hội tụ đều trên $[-\infty,+\infty]$. Theo Định lý 3.14, $I(y)$ khả vi trên $[-\infty,+\infty]$, và: $I'(y)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)\left[1+(x+y)^2\right]}dx$.

Đặt $\frac{1}{(1+x^2)\left[1+(x+y)^2\right]} = \frac{\mathrm{Ax}+B}{1+x^2} + \frac{Cx+D}{1+(x+y)^2}$, dùng phương pháp đồng nhất hệ số ta thu được:$A = \frac{-2}{y(y^2+4)}, B = \frac{2}{y(y^2+4)}, C = \frac{1}{y^2+4}, D = \frac{3}{y^2+4}$. Do đó:

$$\begin{aligned}
I'(y) &= \frac{1}{y^2+4}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{-2x+y}{1+x^2} + \frac{2x+3y}{1+(x+y)^2}\right] \\
&= \frac{1}{y^2+4}\left[-\ln\left(1+x^2\right) + y\operatorname{arctg} x + \ln\left(1+(x+y)^2\right) + y\operatorname{arctg}(x+y)\right]\Big|_{x=-\infty}^{+\infty} \\
&= \frac{4\pi}{y^2+4}
\end{aligned}$$

Suy ra $I(y) = \int I'(y)\,dy = 2\operatorname{arctg}\frac{y}{2} + C$, mặt khác $I(0) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}dx = 0$ nên $C = 0$ và $I(y) = 2\operatorname{arctg}\frac{y}{2}$ ■

Bài tập 3.7. Tính các tích phân sau:

a) $\int\limits_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}dx, \ (0 < a < b)$.

Lời giải. Đặt $I(a) = \int\limits_0^1 \frac{x^b-x^a}{\ln x}dx, f(x,a) = \frac{x^b-x^a}{\ln x}$. Ta có:

- $f(x,a) = \frac{x^b-x^a}{\ln x}$ liên tục trên theo x trên $[0,1]$ với mỗi $0 < a < b$.
- $f_a'(x,a) = -x^a$ liên tục trên $[0,1]\times(0,+\infty)$.
- $\int\limits_0^1 f_a'(x,a)dx = \int\limits_0^1 -x^a dx = -\frac{1}{a+1}$ hội tụ đều trên $[0,1]$ vì nó là TPXĐ.

Do đó theo Định lý 3.14,

$$I'(a) = \int\limits_0^1 f_a'(x,a)\,dx = -\frac{1}{a+1} \Rightarrow I(a) = \int I'(a)\,da = -\ln(a+1) + C.$$

Mặt khác $I(b) = 0$ nên $C = \ln(b+1)$ và do đó $I(a) = \ln\frac{b+1}{a+1}$. ■

b) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x}dx, \ (\alpha, \beta > 0)$.

Lời giải. Đặt $I(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}dx, f(x,\alpha) = \frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}$. Ta có:

- $f(x,\alpha) = \frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}$ liên tục theo x trên $[0,+\infty)$ với mỗi $\alpha,\beta > 0$.
- $f'_\alpha(x,\alpha) = -e^{-\alpha x}$ liên tục trên $[0,+\infty)\times(0,+\infty)$.
- $\int\limits_0^{+\infty} f'_\alpha(x,\alpha)\,dx = \int\limits_0^{+\infty} -e^{-\alpha x}dx = -\frac{1}{\alpha}$ hội tụ đều đối với α trên mỗi khoảng $[\varepsilon,+\infty)$ theo tiêu chuẩn Weierstrass, thật vậy, $|-e^{-\alpha x}| \leqslant e^{-\varepsilon x}$, mà $\int\limits_0^{+\infty} e^{-\varepsilon x}dx = \frac{1}{\varepsilon}$ hội tụ.

Do đó theo Định lý 3.14,

$$I'(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} f'_\alpha(x,\alpha)\,dx = -\frac{1}{\alpha} \Rightarrow I(\alpha) = \int I'(\alpha)\,d\alpha = -\ln\alpha + C.$$

Mặt khác, $I(\beta) = 0$ nên $C = \ln\beta$ và $I = \ln\frac{\beta}{\alpha}$. ■

c) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x^2}dx,\ (\alpha,\beta > 0)$.

Lời giải. Đặt $I(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x^2}dx, f(x,\alpha) = \frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x^2}$. Ta có:

- $f(x,\alpha) = \frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x^2}$ liên tục theo x trên $[0,+\infty)$ với mỗi $\alpha,\beta > 0$.
- $f'_\alpha(x,\alpha) = -e^{-\alpha x^2}$ liên tục trên $[0,+\infty)\times(0,+\infty)$.
- $\int\limits_0^{+\infty} f'_\alpha(x,\alpha)\,dx = \int\limits_0^{+\infty} -e^{-\alpha x^2}dx \overset{x\sqrt{\alpha}=y}{=} -\int\limits_0^{+\infty} e^{-y^2}\frac{dy}{\sqrt{\alpha}} = -\frac{\sqrt{\pi}}{2}.\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ hội tụ đều theo α trên mỗi $[\varepsilon,+\infty)$ theo tiêu chuẩn Weierstrass, thật vậy, $\left|-e^{-\alpha x^2}\right| \leqslant e^{-\varepsilon x^2}$ mà $\int\limits_0^{+\infty} e^{-\varepsilon x^2}dx$ hội tụ.

Do đó theo Định lý 3.14,

$$I'(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} f'_\alpha(x,\alpha)\,dx = -\frac{\sqrt{\pi}}{2}.\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \Rightarrow I(\alpha) = \int I'(\alpha)\,d\alpha = -\sqrt{\pi}.\sqrt{\alpha} + C.$$

Mặt khác, $I(\beta) = 0$ nên $C = \sqrt{\pi}.\sqrt{\beta}$ và $I(\alpha) = \sqrt{\pi}\left(\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha}\right)$. ■

d) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+y)^{n+1}}$

Lời giải. Đặt $I_n(y) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+y)^{n+1}}, f_n(x,y) = \frac{1}{(x^2+y)^{n+1}}$. Khi đó:

$$[I_{n-1}(y)]'_y = \left[\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+y)^n}\right]'_y = -n\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+y)^{n+1}} = -n.I_n(y) \Rightarrow I_n = -\frac{1}{n}(I_{n-1})'.$$

Tương tự, $I_{n-1} = -\frac{1}{n-1}(I_{n-2})', I_{n-2} = -\frac{1}{n-2}(I_{n-3})', ..., I_1 = -(I_0)'$.

Do đó, $I_n(y) = \frac{(-1)^n}{n!}[I_0(y)]^{(n)}$. Mà $I_0(y) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+y}dx = \frac{1}{\sqrt{y}}\mathrm{arc}tg\frac{x}{\sqrt{y}}\Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2\sqrt{y}}$ nên $I_n(y) = \frac{\pi}{2}.\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}.\frac{1}{\sqrt{y^{2n+1}}}$.

Vấn đề còn lại là việc kiểm tra điều kiện chuyển đạo hàm qua dấu tích phân.

- Các hàm số $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y}, f'_y(x,y) = \frac{-1}{(x^2+y)^2}, ..., f^{(n)}_{y^n}(x,y) = \frac{(-1)^n}{(x^2+y)^{n+1}}$ liên tục trong $[0,+\infty) \times [\varepsilon,+\infty)$ với mỗi $\varepsilon > 0$ cho trước.
- $\frac{1}{x^2+y} \leqslant \frac{1}{x^2+\varepsilon}, \left|\frac{-1}{(x^2+y)^2}\right| \leqslant \frac{1}{(x^2+\varepsilon)^2}, ..., \left|\frac{(-1)^n}{(x^2+y)^{n+1}}\right| \leqslant \frac{1}{(x^2+\varepsilon)^{n+1}}$

  Mà các tích phân $\int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+\varepsilon}dx, ..., \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2+\varepsilon)^{n+1}}dx$ đều hội tụ, do đó $\int\limits_0^{+\infty} f(x,y)\,dx, \int\limits_0^{+\infty} f'_y(x,y)\,dx, ..., \int\limits_0^{+\infty} f^{(n)}_{y^n}(x,y)\,dx$ hội tụ đều trên $[\varepsilon,+\infty)$với mỗi $\varepsilon > 0$. ■

e) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax}\frac{\sin bx - \sin cx}{x}dx \quad (a,b,c > 0)$.

Lời giải. Đặt $I(b) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-ax}\frac{\sin bx-\sin cx}{x}dx, f(x,b) = e^{-ax}\frac{\sin bx-\sin cx}{x}$. Ta có:

- $f(x,b) = e^{-ax}\frac{\sin bx-\sin cx}{x}$ liên tục theo x trên $[0,+\infty)$ với mỗi $a,b,c > 0$.
- $f'_b(x,b) = e^{-ax}\cos bx$ liên tục trên $[0,+\infty) \times (0,+\infty)$.
- $\int\limits_0^{+\infty} f'_b(x,b)\,dx = \int\limits_0^{+\infty} e^{-ax}\cos bx = \left(-\frac{a}{a^2+b^2}e^{-ax}\cos bx + \frac{b}{a^2+b^2}e^{-ax}\sin bx\right)\Big|_0^{+\infty} = \frac{a}{a^2+b^2}$ hội tụ đều theo b trên mỗi $(0,+\infty)$ theo tiêu chuẩn Weierstrass, thật vậy, $|e^{-ax}\cos bx| \leqslant e^{-ax^2}$ mà $\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax^2}dx$ hội tụ.

Do đó theo Định lý 3.14, $I'_b(x,b) = \frac{a}{a^2+b^2}$, $I = \int \frac{a}{a^2+b^2}db = \text{arctg}\,\frac{b}{a} + C$.
Mặt khác $I(c) = 0$ nên $C = -\text{arctg}\,\frac{c}{a}$ và $I = \text{arctg}\,\frac{b}{a} - \text{arctg}\,\frac{c}{a}$. ■

f) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\cos(yx)\,dx$.

Lời giải. Đặt $I(y) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\cos(yx)\,dx, f(x,y) = e^{-x^2}\cos(yx)$ .Ta có:

- $f(x,y)$ liên tục trên $[0,+\infty)\times(-\infty,+\infty)$.
- $f'_y(x,y) = -xe^{-x^2}\sin yx$ liên tục trên $[0,+\infty)\times(-\infty,+\infty)$.
- $\int\limits_0^{+\infty} f'_y(x,y)\,dx = \int\limits_0^{+\infty} -xe^{-x^2}\sin yx dx = \frac{1}{2}e^{-x^2}\sin yx\Big|_0^{+\infty} - \frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty} ye^{-x^2}\cos yx dx = \frac{-y}{2}I(y)$ hội tụ đều theo tiêu chuẩn Weierstrass, thật vậy, $\left|f'_y(x,y)\right| \leqslant xe^{-x^2}$, mà $\int\limits_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx = \frac{1}{2}$ hội tụ.

Do đó theo Định lý 3.14, $\frac{I'(y)}{I(y)} = -\frac{y}{2} \Rightarrow I = Ce^{-\frac{y^2}{4}}$.
Mà $I(0) = C = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ nên $I(y) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\frac{y^2}{4}}$. ■

Nhận xét:

- Việc kiểm tra các điều kiện để đạo hàm qua dấu tích phân hay điều kiện đổi thứ tự lấy tích phân đôi khi không dễ dàng chút nào.
- Các tích phân $\int\limits_0^{+\infty} f'_\alpha(x,\alpha)\,dx$ ở câu b, c, d chỉ hội tụ đều trên khoảng $[\varepsilon,+\infty)$ với mỗi $\varepsilon > 0$, mà không hội tụ đều trên $(0,+\infty)$. Tuy nhiên điều đó cũng đủ để khẳng định rằng $I'_\alpha = \int\limits_0^{+\infty} f'_\alpha(x,\alpha)\,dx$ trên $(0,+\infty)$.

§3. TÍCH PHÂN EULER

3.1 Hàm Gamma

$$\Gamma\left(p\right) = \int\limits_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx \text{ xác định trên } (0, +\infty)$$

Các công thức

1. Hạ bậc: $\Gamma\left(p+1\right) = p\Gamma\left(p\right), \Gamma\left(\alpha - n\right) = \frac{(-1)^n\Gamma(\alpha)}{(1-\alpha)(2-\alpha)...(n-\alpha)}$.
   Ý nghĩa của công thức trên là để nghiên cứu $\Gamma\left(p\right)$ ta chỉ cần nghiên cứu $\Gamma\left(p\right)$ với $0 < p \leqslant 1$ mà thôi, còn với $p > 1$ chúng ta sẽ sử dụng công thức hạ bậc.

2. Đặc biệt, $\Gamma\left(1\right) = 1$ nên $\Gamma\left(n\right) = (n-1)!\ \forall n \in \mathbb{N}$.
   $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ nên $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^2}\sqrt{\pi}$.

3. Đạo hàm của hàm Gamma: $\Gamma^{(k)}\left(p\right) = \int\limits_0^{+\infty} x^{p-1}\left(\ln^k x\right).e^{-x}dx$.

4. $\Gamma\left(p\right).\Gamma\left(1-p\right) = \frac{\pi}{\sin p\pi}\ \forall 0 < p < 1$.

3.2 Hàm Beta

Dạng 1: $B\left(p, q\right) = \int\limits_0^1 x^{p-1}\left(1-x\right)^{q-1}dx$.

Dạng 2: $B\left(p, q\right) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{(1+x)^{p+q}}dx$.

Dạng lượng giác: $B\left(p, q\right) = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p-1} t\cos^{2q-1} t dt$, $B\left(\frac{m+1}{2}, \frac{n+1}{2}\right) = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m t\cos^m t dt$.

Các công thức:

1. Tính đối xứng: $B\left(p, q\right) = B\left(q, p\right)$.

2. Hạ bậc:
$$\begin{cases} B\left(p,q\right) = \frac{p-1}{p+q-1}B\left(p-1,q\right), & \text{nếu } p > 1 \\ B\left(p,q\right) = \frac{q-1}{p+q-1}B\left(p,q-1\right), & \text{nếu } q > 1 \end{cases}$$
   Ý nghĩa của công thức trên ở chỗ muốn nghiên cứu hàm bêta ta chỉ cần nghiên cứu nó trong khoảng $(0, 1] \times (0, 1]$ mà thôi.

3. Đặc biệt, $\mathrm{B}(1,1) = 1$ nên

$$\begin{cases} \mathrm{B}(m,n) = \frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}, \ \forall m,n \in \mathbb{N} \\ \mathrm{B}(p,n) = \frac{(n-1)!}{(p+n-1)(p+n-2)...(p+1)p} \ \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

4. Công thức liên hệ giữa hàm Bêta và Gamma: $\mathrm{B}(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$.

5. $\mathrm{B}(p, 1-p) = \Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}$.

3.3 Bài tập

Bài tập 3.8. Biểu thị $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^n x dx$ qua hàm $\mathrm{B}(m,n)$.

Lời giải. Đặt $\sin x = \sqrt{t} \Rightarrow 0 \leqslant t \leqslant 1, \cos x dx = \frac{1}{2\sqrt{t}} dt$

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^n x dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \left(1 - \sin^2 x\right)^{\frac{n-1}{2}} . \cos x dx = \frac{1}{2} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} t^{\frac{m}{2}} (1-t)^{\frac{n-1}{2}} t^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{2} \mathrm{B}\left(\frac{m+1}{2}, \frac{n+1}{2}\right)$$

Đây chính là công thức ở dạng lượng giác của hàm Beta. ∎

Bài tập 3.9.

a) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x \cos^4 x dx.$

Lời giải. Ta có

$$I = \frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{7}{2}, \frac{5}{2}\right) = \frac{1}{2} . \frac{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma(6)} = \frac{1}{2} . \frac{\Gamma\left(3+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(2+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(6)} = \frac{1}{2} . \frac{\frac{5!!}{2^3}\sqrt{\pi}.\frac{3!!}{2^2}\sqrt{\pi}}{5!} = \frac{3\pi}{512}$$

b) $\int\limits_0^{a} x^{2n}\sqrt{a^2 - x^2} dx \ (a > 0)$.

Lời giải. Đặt $x = a\sqrt{t} \Rightarrow dx = \frac{adt}{2\sqrt{t}}$

$$I = \int\limits_0^1 a^{2n} t^n . a (1-t)^{\frac{1}{2}} . \frac{adt}{2\sqrt{t}} = \frac{a^{2n+2}}{2} . \int\limits_0^1 t^{n-\frac{1}{2}} (1-t)^{\frac{1}{2}} dt = \frac{a^{2n+2}}{2} \mathrm{B}\left(n + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

$$= \frac{a^{2n+2}}{2} \frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(n+2)} = \frac{a^{2n+2}}{2} . \frac{\frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}.\frac{\sqrt{\pi}}{2}}{(n+1)!} = \pi \frac{a^{2n+2}}{2} \frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!}$$

∎

c) $\int\limits_0^{+\infty} x^{10} e^{-x^2} dx$

Lời giải. Đặt $x = \sqrt{t} \Rightarrow dx = \frac{dt}{2\sqrt{t}}$

$$I = \int\limits_0^{+\infty} t^5 e^{-t}.\frac{dt}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty} t^{\frac{9}{2}} e^{-t} dt = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{11}{2}\right) = \frac{1}{2}.\frac{9!!\sqrt{\pi}}{2^5} = \frac{9!!\sqrt{\pi}}{2^6}.$$

d) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{(1+x^2)^2} dx$

Lời giải. Đặt $x^2 = t \Rightarrow 2xdx = dt$

$$I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{1}{4}}.\frac{dt}{2\sqrt{t}}}{(1+t)^2} = \frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{-\frac{1}{4}} dt}{(1+t)^2} = \frac{1}{2}\mathrm{B}\,(p,q) \text{ với } \begin{cases} p-1 = -\frac{1}{4} \\ p+q = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = \frac{3}{4} \\ q = \frac{5}{4} \end{cases}$$

■

Vậy

$$I = \frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right) = \frac{1}{2}.\frac{\frac{5}{4}-1}{\frac{3}{4}+\frac{5}{4}-1}\mathrm{B}\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8}.\mathrm{B}\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8}.\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}$$

e) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^3} dx$

Lời giải. Đặt $x^3 = t \Rightarrow dx = \frac{1}{3}t^{-\frac{2}{3}} dt$

$$I = \frac{1}{3}\int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{-\frac{2}{3}} dt}{1+t} = \frac{1}{3}\mathrm{B}\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3}\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

f) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(1+x^n)} dx, \ (2 < n \in \mathbb{N})$

Lời giải. Đặt $x^n = t \Rightarrow dx = \frac{1}{n}t^{\frac{1}{n}-1} dt$

$$I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{n+1}{n}}.\frac{1}{n}t^{\frac{1}{n}-1} dt}{(1+t)^2} = \frac{1}{n}\int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{2}{n}}}{(1+t)^2} dt = \frac{1}{n}\mathrm{B}\left(\frac{2}{n}+1, 1-\frac{2}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{n}.\frac{\frac{2}{n}}{\left(\frac{2}{n}+1\right)+\left(1-\frac{2}{n}\right)-1}\mathrm{B}\left(\frac{2}{n}, 1-\frac{2}{n}\right) = \frac{2}{n^2}\frac{\pi}{\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)}.$$

■

g) $\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt[n]{1-x^n}}dx,\ n \in \mathbb{N}^*$

Lời giải. Đặt $x^n = t \Rightarrow dx = \frac{1}{n}t^{\frac{1}{n}-1}dt$

$$I = \int\limits_0^1 \frac{\frac{1}{n}t^{\frac{1}{n}-1}dt}{(1-t)^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{n}\int\limits_0^1 t^{\frac{1}{n}-1}.(1-t)^{-\frac{1}{n}}\,dt = \frac{1}{n}\mathrm{B}\left(\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{n}}$$

CHƯƠNG 4

TÍCH PHÂN ĐƯỜNG

§1. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG LOẠI I

1.1 Định nghĩa

Cho hàm số $f(x,y)$ xác định trên một cung phẳng $\overparen{AB}$. Chia cung $\overparen{AB}$ thành n cung nhỏ, gọi tên và độ dài của chúng lần lượt là $\Delta s_1, \Delta s_2, ...\Delta s_n$. Trên mỗi cung Δs_i lấy một điểm M_i bất kì. Giới hạn, nếu có, của tổng $\sum\limits_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta s_i$ khi $n \to \infty$ sao cho $\max \Delta s_i \to 0$ không phụ thuộc vào cách chia cung $\overparen{AB}$ và cách chọn các điểm M_i được gọi là tích phân đường loại một của hàm số $f(x,y)$ dọc theo cung $\overparen{AB}$, kí hiệu là $\int\limits_{\overparen{AB}} f(x,y)\,ds$.

Chú ý:

- Tích phân đường loại một không phụ thuộc vào hướng của cung $\overparen{AB}$.
- Nếu cung $\overparen{AB}$ có khối lượng riêng tại $M(x,y)$ là $\rho(x,y)$ thì khối lượng của nó là $\int\limits_{\overparen{AB}} \rho(x,y)\,ds$. nếu tích phân đó tồn tại.
- Chiều dài của cung $\overparen{AB}$ được tính theo công thức $l = \int\limits_{\overparen{AB}} ds$.
- Tích phân đường loại một có các tính chất giống như tích phân xác định.

1.2 Các công thức tính tích phân đường loại I

1. Nếu cung $\overset{\frown}{AB}$ cho bởi phương trình $y = y(x), a \leqslant x \leqslant b$ thì

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(x,y)\,ds = \int\limits_a^b f(x, y(x))\sqrt{1 + y'^2(x)}dx. \tag{1}$$

2. Nếu cung $\overset{\frown}{AB}$ cho bởi phương trình $x = x(y), c \leqslant y \leqslant d$ thì

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(x,y)\,ds = \int\limits_c^d f(x(y), y)\sqrt{1 + x'^2(y)}dy. \tag{2}$$

3. Nếu $\overset{\frown}{AB}$ cho bởi phương trình $x = x(t), y = y(t), t_1 \leq t \leq t_2$, thì

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(x,y)ds = \int\limits_{t_1}^{t_2} f(x(t), y(t))\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt \tag{3}$$

4. Nếu cung $\overset{\frown}{AB}$ cho bởi phương trình trong toạ độ cực $r = r(\varphi), \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$ thì coi nó như là phương trình dưới dạng tham số, ta được $ds = \sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)}d\varphi$ và

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(x,y)\,ds = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(r(\varphi)\cos\varphi, r(\varphi)\sin\varphi)\sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)}d\varphi \tag{4}$$

1.3 Bài tập

Bài tập 4.1. *Tính* $\int\limits_C (x-y)\,ds$, *C là đường tròn có phương trình* $x^2 + y^2 = 2x$.

Lời giải. Đặt $\begin{cases} x = 1 + \cos t \\ y = \sin t \end{cases}, 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$

$$I = \int\limits_0^{2\pi} (1 + \cos t - \sin t)\sqrt{(-\sin t)^2 + \cos^2 t}dt = 2\pi$$

■

Bài tập 4.2. *Tính* $\int\limits_C y^2 ds$, *C là đường cong* $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}, 0 \leqslant t \leqslant 2\pi, a > 0.$

Lời giải.

$$\begin{cases} x'(t) = a(1-\cos t) \\ y'(t) = a\sin t \end{cases} \Rightarrow \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} = 2a\sin\frac{t}{2}$$

$$\Rightarrow I = \int\limits_0^{2\pi} a^2(1-\cos t)^2 .2a\sin\frac{t}{2}dt = \frac{256a^3}{15}.$$

Bài tập 4.3. *Tính* $\int\limits_C \sqrt{x^2+y^2}ds$*, C là đường* $\begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t) \\ y = a(\sin t - t\cos t) \end{cases}$ $, 0 \leqslant t \leqslant 2\pi, a > 0.$

Lời giải.

$$\begin{cases} x'(t) = at\cos t \\ y'(t) = at\sin t \end{cases} \Rightarrow \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} = at$$

$$\Rightarrow I = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{a^2\left[(\cos t + t\sin t)^2 + (\sin t - t\cos t)^2\right]}.atdt = \frac{a^3}{3}\left(\sqrt{(1+4\pi^2)^3} - 1\right)$$

§2. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG LOẠI II

2.1 Định nghĩa

Cho hai hàm số $P(x,y), Q(x,y)$ xác định trên cung $\overset{\frown}{AB}$. Chia cung $\overset{\frown}{AB}$ thành n cung nhỏ Δs_i bởi các điểm chia $A_0 = A, A_1, A_2, ..., A_n = B$.Gọi toạ độ của vectơ $\overrightarrow{A_{i-1}A_i} = (\Delta x_i, \Delta y_i)$ và lấy điểm M_i bất kì trên mỗi cung Δs_i. Giới hạn, nếu có, của tổng $\sum\limits_{i=1}^{n} [P(M_i)\Delta x_i + Q(M_i)\Delta y_i]$ sao cho $\max \Delta x_i \to 0$, không phụ thuộc vào cách chia cung $\overset{\frown}{AB}$ và cách chọn các điểm M_i được gọi là tích phân đường loại hai của các hàm số $P(x,y), Q(x,y)$ dọc theo cung $\overset{\frown}{AB}$, kí hiệu là $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$.

Chú ý:

- Tích phân đường loại hai phụ thuộc vào hướng của cung $\overset{\frown}{AB}$, nếu đổi chiều trên đường lấy tích phân thì tích phân đổi dấu, $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = -\int\limits_{\overset{\frown}{BA}} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$.
- Tích phân đường loại hai có các tính chất giống như tích phân xác định.

2.2 Các công thức tính tích phân đường loại II

1. Nếu cung $\overset{\frown}{AB}$ được cho bởi phương trình $y = y(x)$, điểm đầu và điểm cuối ứng với $x = a, x = b$ thì

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy = \int\limits_{a}^{b} \left[P(x, y(x)) + Q(x, y(x)).y'(x)\right] dx. \tag{5}$$

2. Nếu cung $\overset{\frown}{AB}$ được cho bởi phương trình $x = x(y)$, điểm đầu và điểm cuối ứng với $y = c, y = d$ thì

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy = \int\limits_{c}^{d} \left[P(x(y).x'(y)\right] dy, y) + Q(x(y), y). \tag{6}$$

3. Nếu cung $\overset{\frown}{AB}$ được cho bởi phương trình $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, điểm đầu và điểm cuối tương ứng với $t = t_1, t = t_2$ thì

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy = \int\limits_{t_1}^{t_2} \left[P(x(t), y(t)).x'(t) + Q(x(t), y(t))\,y'(t)\right] dt \tag{7}$$

Bài tập

Bài tập 4.4. *Tính* $\int\limits_{\widehat{AB}} (x^2 - 2xy)\, dx + (2xy - y^2)\, dy$, *trong đó* $\widehat{AB}$ *là cung parabol* $y = x^2$ *từ* $A(1,1)$ *đến* $B(2,4)$.

Lời giải. Áp dụng công thức (5) ta có:

$$I = \int\limits_1^2 \left[\left(x^2 - 2x^3\right) + \left(2x^3 - x^4\right).2x\right] dx = -\frac{41}{30}.$$

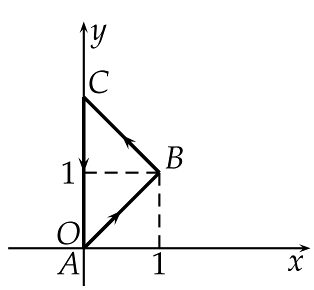
Bài tập 4.5. *Tính* $\int\limits_C (x^2 - 2xy)\, dx + (2xy - y^2)\, dy$ *trong đó* C *là đường cong* $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ *theo chiều tăng của* $t, 0 \le t \le 2\pi, a > 0$.

Lời giải. Ta có $\begin{cases} x'(t) = a(1 - \cos t) \\ y'(t) = a \sin t \end{cases}$ nên:

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_0^{2\pi} \{[2a(t - \sin t) - a(1 - \cos t)]\, a(1 - \cos t) + a(t - \sin t).a \sin t\}\, dt \\ &= a^2 \int\limits_0^{2\pi} [(2t - 2) + \sin 2t + (t - 2)\sin t - (2t - 2)\cos t] dt \\ &= a^2 \int\limits_0^{2\pi} [(2t - 2) + t \sin t - 2t \cos t] dt \\ &= a^2 \left(4\pi^2 - 6\pi\right). \end{aligned}$$

■

Bài tập 4.6. *Tính* $\int\limits_{ABCA} 2\left(x^2 + y^2\right) dx + x\,(4y + 3)\, dy$ *ở đó* $ABCA$ *là đường gấp khúc đi qua* $A(0,0), B(1,1), C(0,2)$.



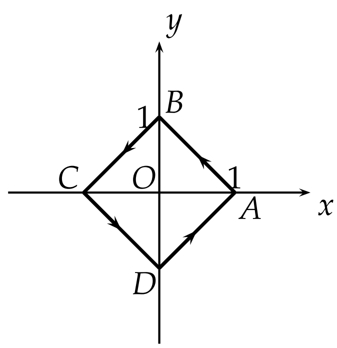
Hình 4.6

Lời giải. Ta có $\begin{cases} \text{phương trình đường thẳng } AB: x = y \\ \text{phương trình đường thẳng } BC: x = 2 - y \\ \text{phương trình đường thẳng } CA: x = 0 \end{cases}$ nên

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_{AB} ... + \int\limits_{BC} ... + \int\limits_{CA} ... \\ &= \int\limits_0^1 \left[2\left(y^2+y^2\right) + y\left(4y+3\right)\right] dy + \int\limits_1^2 2\left[(2-y)^2+y^2\right].(-1) + (2-y)\left(4y+3\right) dy + 0 \\ &= 3 \end{aligned}$$

■

Bài tập 4.7. *Tính* $\int\limits_{ABCDA} \frac{dx+dy}{|x|+|y|}$ *trong đó* $ABCDA$ *là đường gấp khúc qua* $A(1,0), B(0,1), C(-1,0), D($



Hình 4.7

Lời giải. Ta có

$$\begin{cases} AB: x + y = 1 & \Rightarrow dx + dy = 0 \\ BC: x - y = -1 & \Rightarrow dx = dy \\ CD: x + y = -1 & \Rightarrow dx + dy = 0 \\ DA: x - y = 1 & \Rightarrow dx = dy \end{cases}$$

nên

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_{AB} ... + \int\limits_{BC} ... + \int\limits_{CD} ... + \int\limits_{DA} \\ &= 0 + \int\limits_{BC} \frac{2dx}{x+y} + 0 + \int\limits_{DA} \frac{2dx}{x-y} \\ &= \int\limits_0^{-1} 2dx + \int\limits_0^1 2dx \\ &= 0 \end{aligned}$$

■

Bài tập 4.8. *Tính* $\int\limits_C \frac{\sqrt[4]{x^2+y^2}}{2}dx + dy$ *trong đó* $\begin{cases} x = t\sin\sqrt{t} \\ y = t\cos\sqrt{t} \\ 0 \leq t \leq \frac{\pi^2}{4} \end{cases}$ *theo chiều tăng của* t.

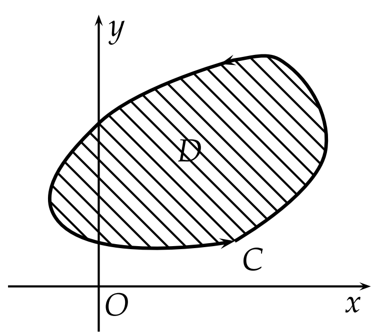
Lời giải. Đặt $u = \sqrt{t} \Rightarrow 0 \leq u \leq \pi$, $\begin{cases} x = u^2\sin u \\ y = u^2\cos u \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'(u) = 2u\sin u + u^2\cos u \\ y'(u) = 2u\cos u - u^2\sin u \end{cases}$

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{u}{2}\left(2u\sin u + u^2\cos u\right) + 2u\cos u - u^2\sin u\right]du \\ &= \int\limits_0^{\pi} \left(\frac{u^3}{2} + 2u\right)\cos u du \\ &= -\frac{3}{2}\pi^2 + 2 \end{aligned}$$

■

2.3 Công thức Green.

Hướng dương của đường cong kín: Nếu đường lấy tích phân là đường cong kín thì ta quy ước hướng dương của đường cong là hướng sao cho một người đi dọc theo đường cong theo hướng ấy sẽ nhìn thấy miền giới hạn bởi nó ở gần phía mình nhất nằm về phía bên trái.



Giả sử $D \subset \mathbb{R}^2$ là miền đơn liên, liên thông, bị chặn với biên giới ∂D là đường cong kín với hướng dương, hơn nữa P, Q cùng các đạo hàm riêng cấp một của chúng liên tục trên D. Khi đó

$$\int\limits_C Pdx + Qdy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

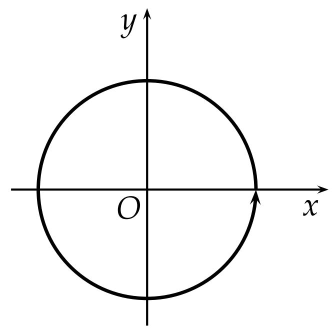
Chú ý:

- Nếu ∂D có hướng âm thì $\int\limits_C Pdx + Qdy = -\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$

- Trong nhiều bài toán, nếu C là đường cong không kín, ta có thể bổ sung C để được đường cong kín và áp dụng công thức Green.

Bài tập 4.9. *Tính các tích phân sau* $\int\limits_C (xy + x + y)\, dx + (xy + x - y)\, dy$ *bằng hai cách: tính trực tiếp, tính nhờ công thức Green rồi so sánh các kết quả, với C là đường:*

a) $x^2 + y^2 = R^2$



Hình 4.9 a

Cách 1: Tính trực tiếp

Đặt $\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases} \Rightarrow 0 \le t \le \pi$

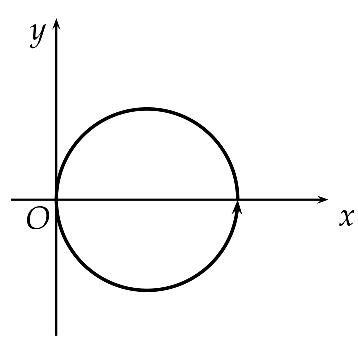
$$I = ...$$
$$= \frac{R^3}{2} \int\limits_0^{2\pi} (\cos t \cos 2t + \sin t \cos 2t)\, dt$$
$$= 0$$

Cách 2: Sử dụng công thức Green

$\begin{cases} P(x,y) = xy + x + y \\ Q(x,y) = xy + x - y \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = y - x$

$$\Rightarrow I = \iint\limits_{x^2+y^2 \leqslant R^2} (y - x)\, dxdy$$
$$= \iint\limits_{x^2+y^2 \leqslant R^2} ydxdy - \iint\limits_{x^2+y^2 \leqslant R^2} xdxdy$$
$$= 0$$

b) $x^2 + y^2 = 2x$



Hình 4.9 b

Cách 1: Tính trực tiếp. *Ta có* $x^2+y^2=2x \Leftrightarrow (x-1)^2+y^2=1$ *nên*

Đặt $\begin{cases} x = 1+\cos t \\ y=\sin t \end{cases}, 0 \le t \le 2\pi$

$$I = \int_0^{2\pi} \{[(1+\cos t)\sin t + 1 + \cos t + \sin t](-\sin t) + [(1+\cos t)\sin t + 1 + \cos t - \sin t]\cos t\}dt$$
$$= \int_0^{2\pi} \left(-2\sin^2 t + \cos^2 t - \cos t \sin t + \cos t - \sin t - \cos t \sin^2 t + \cos^2 t \sin t\right) dt$$
$$= ...$$
$$= -\pi$$

Cách 2: Sử dụng công thức Green.

Ta có: $\begin{cases} P(x,y) = xy + x + y \\ Q(x,y) = xy + x - y \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = y - x$

$$\Rightarrow I = \iint\limits_{(x-1)^2+y^2 \leqslant 1} (y-x)\,dxdy, \text{ \textbf{đặt} } \begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}, -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$$
$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} (r\sin\varphi - 1 - r\cos\varphi) r dr$$
$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{2}(\sin\varphi - \cos\varphi).4\cos^2\varphi - 2\cos\varphi\right] d\varphi$$
$$= -\pi$$

c) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, (a,b>0)$

Cách 1: Tính trực tiếp

Đặt $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq t \leq 2\pi \\ x'(t) = -a\sin t \\ y'(t) = b\cos t \end{cases}$

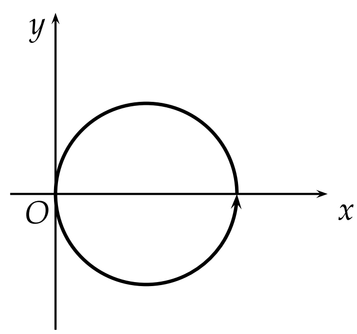
$$I = ... = \int_0^{2\pi} \left(-ab\sin^2 t + ab\cos^2 t\right) dt = 0$$

Cách 2: Sử dụng công thức Green

$\begin{cases} P(x,y) = xy + x + y \\ Q(x,y) = xy + x - y \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = y - x$

$$\Rightarrow I = \iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1} (y-x)\,dxdy = \iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1} ydxdy - \iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1} xdxdy = 0$$

Bài tập 4.10. *Tính* $\int\limits_{x^2+y^2=2x} x^2\left(y+\frac{x}{4}\right)dy - y^2\left(x+\frac{y}{4}\right)dx.$



Hình 4.10

Lời giải. Áp dụng công thức Green ta có:

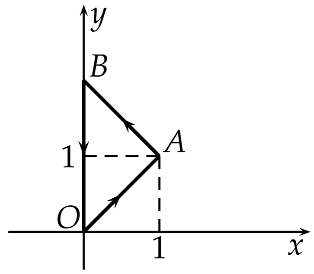
$$I = \int\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \int\limits_D \left(4xy + \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4}y^2\right)dxdy = \frac{3}{4}\int\limits_D \left(x^2+y^2\right)dxdy \text{ vì } \int\limits_D 4xydxdy = 0$$

■

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$, ta có $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq 2\cos\varphi$. Vậy

$$I = \frac{3}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} r^2.rdr = \frac{3}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4\cos^4\varphi = \frac{9}{8}\pi$$

Bài tập 4.11. *Tính* $\oint\limits_{OABO} e^x\left[(1-\cos y)\,dx - (y-\sin y)\,dy\right]$ *trong đó* $OABO$ *là đường gấp khúc* $O(0,0), A(1,1), B(0,2)$



Hình 4.11

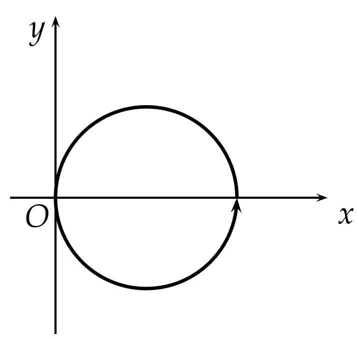
Lời giải. Đặt $\begin{cases} P(x,y) = e^x(1-\cos y) \\ Q(x,y) = -e^x(y-\sin y) \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -e^x y.$

Áp dụng công thức Green ta có:

$$\begin{aligned} I &= \iint\limits_D -e^x y dx dy \\ &= \int\limits_0^1 dx \int\limits_x^{2-x} -e^x y dy \\ &= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 e^x(4x-4)\,dx \\ &= 4-2e \end{aligned}$$

■

Bài tập 4.12. *Tính* $\oint\limits_{x^2+y^2=2x} (xy + e^x\sin x + x + y)\,dx - (xy - e^{-y} + x - \sin y)\,dy$



Hình 4.12

Lời giải. Đặt $\begin{cases} P(x,y) = xy + e^x\sin x + x + y \\ Q(x,y) = xy - e^{-y} + x - \sin y \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -y - x - 2.$

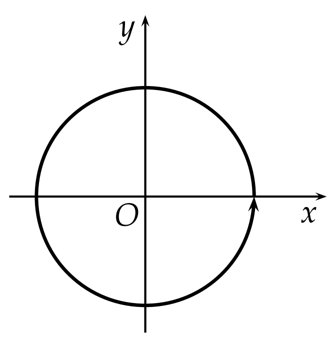
Áp dụng công thức Green ta có:

$$\begin{aligned}
I &= \iint\limits_D -y - x - 2dxdy \\
&= \iint\limits_D -x - 2dxdy \text{ vì } \iint\limits_D ydxdy = 0 \\
\text{đặt } &\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}, 0 \le r \le 2\cos\varphi \\
&= \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} (-r\cos\varphi - 2)\, rdr \\
&= -3\pi
\end{aligned}$$

■

Bài tập 4.13. *Tính* $\oint\limits_C \left(xy^4 + x^2 + y\cos xy\right) dx + \left(\frac{x^3}{3} + xy^2 - x + x\cos xy\right) dy$

trong đó $C \begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases} \quad (a > 0).$



Hình 4.13

Lời giải. Đặt $\begin{cases} P(x,y) = xy^4 + x^2 + y\cos xy \\ Q(x,y) = \frac{x^3}{3} + xy^2 - x + x\cos xy \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = x^2 + y^2 - 4xy^3 - 1.$

Áp dụng công thức Green ta có:

$$
\begin{aligned}
I &= \iint\limits_D x^2+y^2-4xy^3-1dxdy \\
&= \iint\limits_D x^2+y^2-1dxdy \text{ vì } \iint\limits_D 4xy^3dxdy = 0 \\
&\text{đặt } \begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow 0 \le \varphi \le 2\pi, 0 \le ra \\
&= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \left(r^2-1\right) rdr \\
&= \pi\left(\frac{a^4}{2}-a^2\right)
\end{aligned}
$$

■

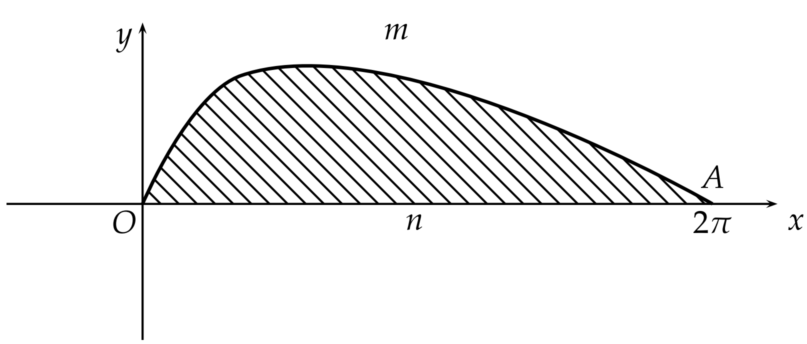
2.4 Ứng dụng của tích phân đường loại II

Áp dụng công thức Green cho hàm số $P(x,y), Q(x,y)$ thoả mãn $\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=1$ ta có:

$$S(D) = \iint\limits_D 1dxdy = \int\limits_{\partial D} Pdx+Qdy$$

- Lấy $P(x,y)=0, Q(x,y)=x$ thì $S(D)=\int\limits_{\partial D} xdy$
- Lấy $P(x,y)=-y, Q(x,y)=0$ thì $S(D)=\int\limits_{\partial D} -ydx$
- Lấy $P(x,y)=\frac{1}{2}x, Q(x,y)=\frac{1}{2}y$ thì $S(D)=\frac{1}{2}\int\limits_{\partial D} xdy-ydx$

Bài tập 4.14. *Dùng tích phân đường loại II, tính diện tích của miền giới hạn bởi một nhịp xycloit* $\begin{cases} x = a(t-\sin t) \\ y = a(1-\cos t) \end{cases}$ *và* $Ox(a>0)$.



Hình 4.14

Lời giải. Áp dụng công thức

$$S(D) = \int\limits_{\partial D} xdy = \int\limits_{AmO} xdy + \int\limits_{OnA} xdy = \int\limits_{2\pi}^{0} a\,(t - \sin t)\,.a \sin t dt = 3\pi a^2$$

2.5 Điều kiện để tích phân đường không phụ thuộc đường lấy tích phân.

Giả sử rằng D là miền đơn liên, liên thông, P, Q cùng với các đạo hàm riêng cấp một của chúng liên tục trên $\overline{D}$. Khi đó bốn mệnh đề sau là tương đương:

1. $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$ với mọi $(x, y) \in D$.

2. $\int\limits_{L} Pdx + Qdy = 0$ với mọi đường cong đóng kín L nằm trong D.

3. $\int\limits_{AB} Pdx + Qdy = 0$ không phụ thuộc vào đường đi từ A đếnB, với mọi đường cong AB nằm trong D.

4. $Pdx + Qdy$ là vi phân toàn phần. Nghĩa là có hàm số $u(x, y)$ sao cho $du = Pdx + Qdy$. Hàm u có thể được tìm theo công thức:

$$u(x, y) = \int\limits_{x_0}^{x} P(x, y_0)dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x, y)dy = \int\limits_{x_0}^{x} P(x, y)dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x_0, y)dy$$

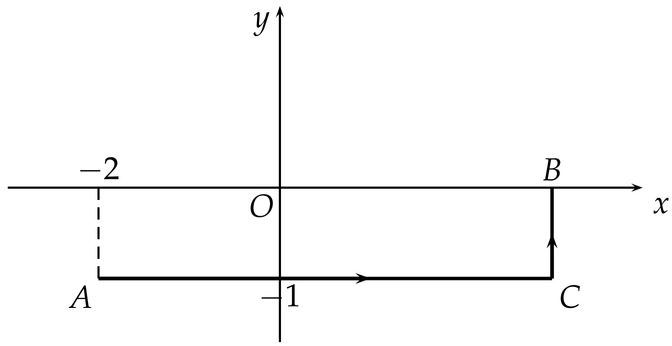
Giải bài toán tính tích phân đường không phụ thuộc đường đi:

1. Kiểm tra điều kiện $P'_y = Q'_x$. (1)

2. Nếu điều kiện (1) được thoả mãn và đường lấy tích phân là đường cong kín thì $I = 0$.

3. Nếu điều kiện (1) được thoả mãn và cần tính tích phân trên cung AB không đóng thì ta chọn đường tính tích phân sao cho việc tính tích phân là đơn giản nhất, thông thường ta chọn là đường thẳng nối A với B, hoặc đường gấp khúc có các cạnh song song với các trục toạ độ. Mặt khác, nếu tìm được hàm F sao cho $du = Pdx + Qdy$ thì $I = u(B) - u(A)$.

Bài tập 4.15. *Tính* $\displaystyle\int\limits_{(-2,1)}^{(3,0)} \left(x^4 + 4xy^3\right) dx + \left(6x^2y^2 - 5y^4\right) dy.$

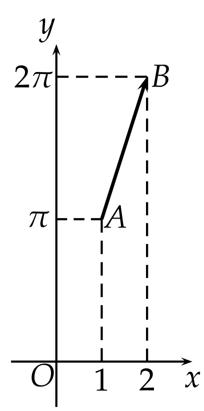


Hình 4.15

Lời giải. Nhận xét rằng $\left(x^4 + 4xy^3\right)'_y = \left(6x^2y^2 - 5y^4\right)'_x$ nên tích phân đã cho không phụ thuộc vào đường đi. Vậy ta chọn đường đi là đường gấp khúc ACB như hình vẽ.

$$I = \int\limits_{AC} Pdx + Qdy + \int\limits_{CB} Pdx + Qdy = 62$$

Bài tập 4.16. *Tính* $\displaystyle\int\limits_{(1,\pi)}^{(2,\pi)} \left(1 - \frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right) dx + \left(\sin\frac{y}{x} + \frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right) dy$



Hình 4.16

Lời giải. Đặt $\begin{cases} P = 1 - \frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x} \\ Q = \sin\frac{y}{x} + \frac{y}{x}\cos\frac{y}{x} \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{2y}{x^2}\cos\frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^3}\sin\frac{y}{x}$ nên tích phân đã cho không phụ thuộc vào đường đi từ A đến B. Khi đó ta chọn đường lấy tích phân là đường thẳng AB, nó có phương trình $y = \pi x$.

$$I = \int\limits_1^2 \left(1 - \pi^2\cos\pi\right) dx + \int\limits_1^2 \left(\sin\pi + \pi\cos\pi\right) \pi dx = 1$$

CHƯƠNG 5

TÍCH PHÂN MẶT

§1. TÍCH PHÂN MẶT LOẠI I

1.1 Định nghĩa

Cho hàm số $f(x,y,z)$ xác định trên mặt cong S. Chia mặt cong S thành n mặt nhỏ $\Delta S_1, \Delta S_2, \ldots, \Delta S_n$. Trên mỗi ΔS_i lấy một điểm M_i bất kì. Giới hạn, nếu có, của tổng $\sum\limits_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta S_i$ khi $n \to \infty$ và $\max\limits_{1\leq i\leq n} d(\Delta S_i) \to 0$ không phụ thuộc vào cách chia mặt cong S và cách chọn các điểm M_i được gọi là tích phân mặt loại I của hàm số $f(M)$ trên mặt cong S, kí hiệu là

$$\iint\limits_S f(x,y,z)dS.$$

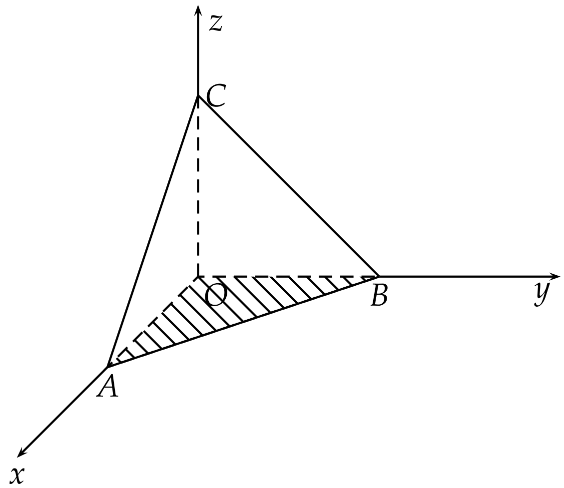
1.2 Các công thức tính tích phân mặt loại I

Giả sử S là mặt được cho bởi phương trình $z = z(x,y); ((x,y) \in D \subset \mathbb{R}^2)$, hay là hình chiếu của S lên mặt phẳng Oxy là D, ở đó $z(x,y)$ cùng với các đạo hàm riêng của chúng liên tục trên D. Khi đó

$$\iint\limits_S f(x,y,z)dS = \iint\limits_D f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dxdy$$

1.3 Bài tập

Bài tập 5.1. *Tính* $\iint\limits_S \left(z+2x+\frac{4y}{3}\right)dS$ *trong đó* $S = \left\{(x,y,z)\,|\,\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4} = 1, x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0\right\}$



Hình 5.1

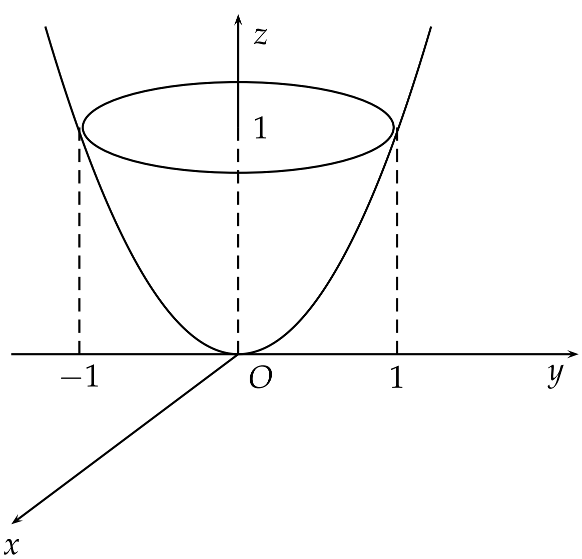
Lời giải. Ta có hình chiếu của mặt S lên mặt phẳng Oxy là

$$D = \left\{(x,y)\,|\frac{x}{2}+\frac{y}{3}\leqslant 1, x\geqslant 0, y\geqslant 0\right\} = \left\{(x,y)\,|0\leqslant x\leqslant 2, 0\leqslant y\leqslant 3\left(1-\frac{x}{2}\right)\right\}$$

Mặt khác $z = 4(1-\frac{x}{2}-\frac{y}{3}) \Rightarrow \begin{cases} p = z_x' = -2 \\ q = z_y' = \frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow dS = \sqrt{1+p^2+q^2}dxdy = \frac{\sqrt{61}}{3}dxdy$ nên

$$I = \iint\limits_D \left[4\left(1-\frac{x}{2}-\frac{y}{3}\right)+2x+\frac{4y}{3}\right]\frac{\sqrt{61}}{3}dxdy = 4\frac{\sqrt{61}}{3}\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{3-\frac{3x}{2}} dy = 4\sqrt{61}$$

Bài tập 5.2. *Tính* $\iint\limits_S (x^2+y^2)\,dS,\ S = \left\{(x,y,z)\,|z = z^2+y^2, 0\leqslant z\leqslant 1\right\}.$



Hình 5.2

Lời giải. Ta có hình chiếu của mặt cong lên mặt phẳng Oxy là $D = \left\{(x,y)\,|x^2+y^2 \leqslant 1\right\}$

Mặt khác, $z = x^2 + y^2 \Rightarrow \begin{cases} p = z'_x = 2x \\ q = z'_y = 2y \end{cases}$ nên

$$I = \iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)\sqrt{1+4x^2+4y^2}dxdy$$

$$\text{đặt } \begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow 0 \le \varphi \le 2\pi, 0 \le r \le 1$$

$$I = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 r^2\sqrt{1+4r^2}rdr$$

■

$$= \frac{\pi}{4}\int\limits_0^1 r^2\sqrt{1+4r^2}d\left(1+4r^2\right)$$

$$= \frac{\pi}{4}\int\limits_1^5 \frac{t-1}{4}\sqrt{t}dt\left(\text{ đặt} t = 1+4r^2\right)$$

$$= \frac{\pi}{16}\left(\frac{20\sqrt{5}}{3} + \frac{4}{15}\right)$$

§2. TÍCH PHÂN MẶT LOẠI II

2.1 Định hướng mặt cong

Cho mặt cong S trong không gian. Tại mỗi điểm M chính quy của mặt cong S có hai vectơ pháp tuyến đơn vị là $\overrightarrow{n}$ và $-\overrightarrow{n}$.

- Nếu có thể chọn được tại mỗi điểm M của mặt một vectơ pháp tuyến đơn vị n sao cho vectơ n biến thiên liên tục trên S thì ta nói mặt S định hướng được. Khi đó ta chọn một hướng làm hướng dương thì hướng còn lại được gọi là hướng âm.

- Ngược lại, thì mặt S gọi là không định hướng được. Ví dụ như lá Mobius.

2.2 Định nghĩa tích phân mặt loại II

Cho một mặt cong định hướng S trong miền $V \subset \mathbb{R}^3$ và $n = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ là véctơ pháp tuyến đơn vị theo hướng dương đã chọn của S tại điểm $M(x,y,z)$. Giả trường vectơ $\overrightarrow{F}(M) = (P(M), Q(M), R(M))$ biến thiên liên tục trên V, nghĩa là các toạ độ $P(M), Q(M), R(M)$ của nó là những hàm số liên tục trên V. Chia mặt S thành n mặt cong nhỏ, gọi tên và cả diện tích của chúng lần lượt là $\Delta S_1, \Delta S_2, ..., \Delta S_n$. Trên mỗi ΔS_i lấy một điểm M_i bất kì và gọi vectơ pháp tuyến đơn vị theo hướng dương đã chọn của nó là $n_i = (\cos\alpha_i, \cos\beta_i, \cos\gamma_i)$. Giới hạn, nếu có, của tổng $\sum\limits_{i=1}^{n} [P(M_i)\cos\alpha_i + Q(M_i)\cos\beta_i + R(M_i)\cos\gamma_i]\Delta S_i$ được gọi là tích phân mặt loại II của các hàm số $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ trên mặt S, và được kí hiệu là:

$$\iint\limits_S P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy$$

2.3 Các công thức tính tích phân mặt loại II

Giả sử

$$I = \underbrace{\iint\limits_S Pdydz}_{I_1} + \underbrace{\iint\limits_S Qdzdx}_{I_2} + \underbrace{\iint\limits_S Rdxdy}_{I_3}.$$

Người ta tính tích phân mặt loại II bằng cách đưa về tích phân kép. Chẳng hạn xét tích phân I_3. Giả sử mặt S có phương trình $z = z(x,y)$, $z(x,y)$ cùng với các đạo hàm riêng của chúng liên tục trên miền D là hình chiếu của S lên mặt phẳng Oxy. Khi đó:

- Nếu vectơ pháp tuyến đơn vị theo hướng dương $\overrightarrow{n}$ tạo với Oz một góc nhọn thì

$$\iint\limits_S R dxdy = \iint\limits_D R\left(x, y, z\left(x, y\right)\right) dxdy$$

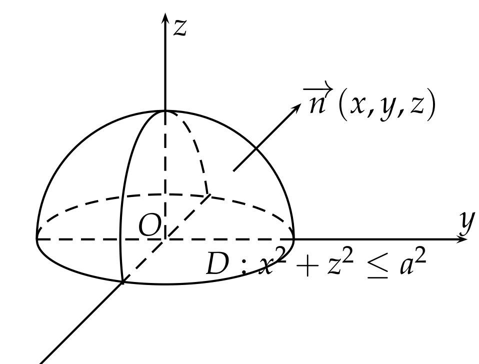
- Nếu vectơ pháp tuyến đơn vị theo hướng dương $\overrightarrow{n}$ tạo với Oz một góc tù thì

$$\iint\limits_S R dxdy = -\iint\limits_D R\left(x, y, z\left(x, y\right)\right) dxdy$$

Tương tự như vậy chúng ta có thể đưa I_1, I_2 về tích phân kép.

Bài tập

Bài tập 5.3. *Tính* $\iint\limits_S z\left(x^2+y^2\right) dxdy$, *trong đó* S *là nửa mặt cầu* $x^2+y^2+z^2=1, z \geqslant 0$, *hướng của* S *là phía ngoài mặt cầu.*



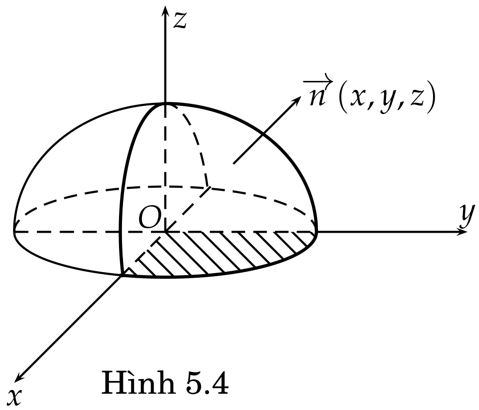
Hình 5.3

Lời giải. Ta có mặt $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$, hình chiếu của S lên mặt phẳng Oxy là miền D : $x^2+y^2 \leq 1$, hơn nữa $\overrightarrow{n}$ tạo với Oz một góc nhọn nên:

$$\begin{aligned}
I &= \iint\limits_D \sqrt{1-x^2-y^2}\left(x^2+y^2\right) dxdy \\
&\text{đặt} \begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 1 \\
&= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \sqrt{1-r^2}r^3 dr \\
&= \frac{4\pi}{15}
\end{aligned}$$

■

Bài tập 5.4. *Tính* $\iint\limits_S y dxdz + z^2 dxdy$ *trong đó* S *là phía ngoài mặt* $x^2 + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1, x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0$.



Hình 5.4

Lời giải. Tính $I_1 = \iint\limits_S y dxdz$

- Mặt $S : y = 2\sqrt{1 - x^2 - z^2}$
- Hình chiếu của S lên Oxz là $\frac{1}{4}$ hình tròn, $D_1 : x^2 + z^2 \leq 1, x \geq 0, z \geq 0$.
- $\beta = (\overrightarrow{n}, Oy$ là góc nhọn.

nên:

$$
\begin{aligned}
I &= \iint\limits_{D_1} 2\sqrt{1 - x^2 - z^2} dxdz \\
\text{đặt } &\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ z = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq 1 \\
&= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^1 2\sqrt{1 - r^2} r dr \\
&= \frac{\pi}{3}
\end{aligned}
$$

Tính $I_2 = \iint\limits_S z^2 dxdy$

- Mặt $S : z^2 = 1 - x^2 - \frac{y^2}{4}$
- Hình chiếu của S lên Oxz là $\frac{1}{4}$ elip, $D_2 : x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1, x \geq 0, y \geq 0$.
- $\gamma = (\overrightarrow{n}, Oz$ là góc nhọn.

nên:

$$I = \iint\limits_{D_2} 1 - x^2 - \frac{y^2}{4} dxdy$$

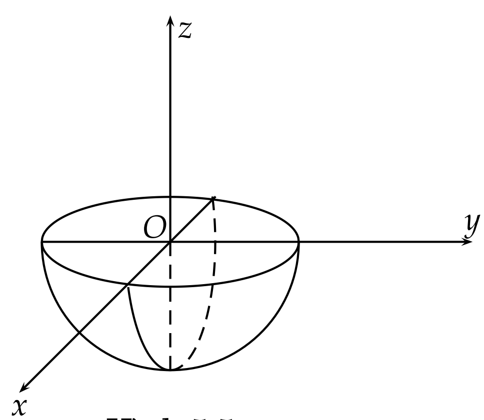
$$\text{đặt } \begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = 2r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}, 0 \le r \le 1, J = -2r$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^1 (1 - r^2) 2r dr$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

Vậy $I = \frac{7\pi}{12}$ ■

Bài tập 5.5. *Tính* $\iint\limits_S x^2y^2zdxdy$ *trong đó* S *là mặt trên của nửa mặt cầu* $x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \le 0$.



Hình 5.5

Lời giải. Ta có:

- Mặt $S : z = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$
- Hình chiếu của S lên Oxy là hình tròn, $D : x^2 + y^2 \le R^2$.
- $\beta = (\overrightarrow{n}, Oz)$ là góc nhọn.

nên:

$$I = -\iint\limits_D x^2y^2\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}dxdy$$

$$\text{đặt } \begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow 0 \le \varphi \le 2\pi, 0 \le r \le R, J = -r$$

$$I = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R \sin^2\varphi\cos^2\varphi\sqrt{R^2 - r^2}.r^5 dr$$

$$= -\frac{2R^7}{105}$$

■

2.4 Công thức Ostrogradsky, Stokes

Giả sử P, Q, R là các hàm khả vi, liên tục trên miền bị chặn, đo được trong $V \subset \mathbb{R}^3$. V giới hạn bởi mặt cong kín S trơn hay trơn từng mảnh, khi đó:

$$\iint\limits_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz$$

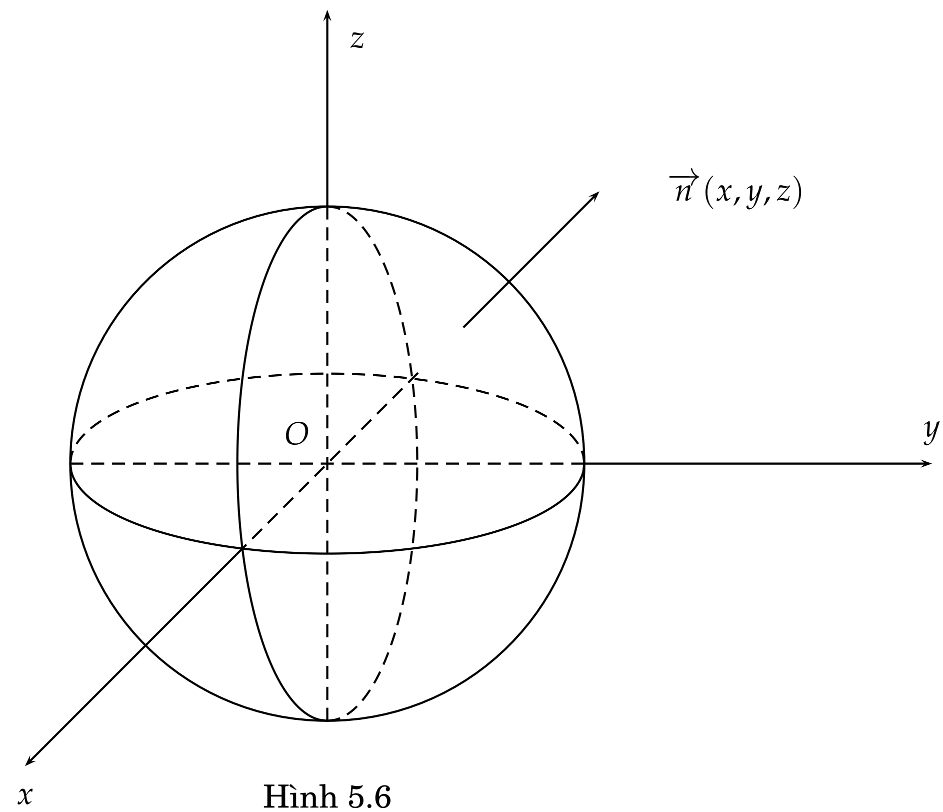
trong đó tích phân ở vế trái lấy theo hướng pháp tuyến ngoài.
Chú ý:

- Nếu tích phân ở vế trái lấy theo hướng pháp tuyến trong thì

$$\iint\limits_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = -\iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz$$

- Nếu mặt cong S không kín, có thể bổ sung thành mặt cong S' kín để áp dụng công thức Ostrogradsky, rồi trừ đi phần bổ sung.

Bài tập 5.6. *Tính* $\iint\limits_S xdydz + ydzdx + zdxdy$ *trong đó* S *là phía ngoài của mặt cầu* $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.



Hình 5.6

Lời giải. Áp dụng công thức Ostrogradsky ta có

$$\iint\limits_S xdydz + ydzdx + zdxdy = \iiint\limits_V 3dxdydz = 3V = 4\pi a^2$$

Bài tập 5.7. *Tính* $\iint\limits_S x^3dydz + y^3dzdx + z^3dxdy$ *trong đó* S *là phía ngoài của mặt cầu* $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Lời giải. Xem hình vẽ 5.6, áp dụng công thức Ostrogradsky ta có:

$$I = \iiint\limits_V 3\left(x^2 + y^2 + z^2\right) dxdydz$$

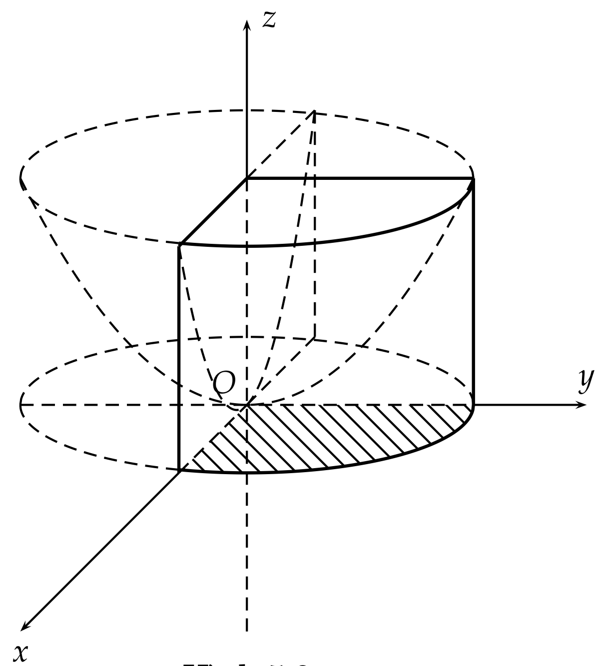
$$\text{đặt} \begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le \theta \le \pi \\ 0 \le r \le R \end{cases}, J = -r^2\sin\theta$$

■

$$I = 3\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} d\theta \int\limits_0^{R} r^4 \sin\theta dr$$

$$= \frac{12\pi R^5}{5}$$

Bài tập 5.8. *Tính* $\iint\limits_S y^2zdxdy + xzdydz + x^2ydxdz$ *trong đó* S *là phía ngoài của miền* $x \leq 0, y \leq 0, x^2 + y^2 \leq 1, z \leq x^2 + y^2$.



Hình 5.8

Lời giải. Áp dụng công thức Ostrogradsky ta có:

$$I = \iiint\limits_V \left(y^2 + z + x^2\right) dxdydz$$

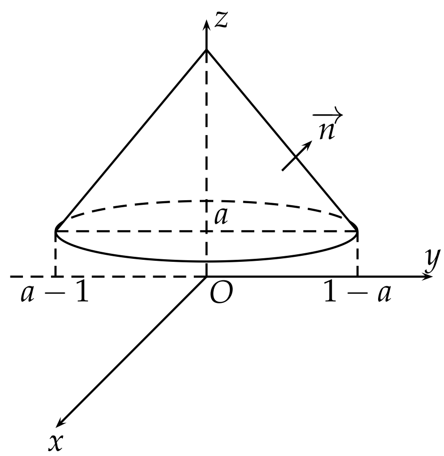
$$\text{đặt} \begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq z \leq r^2 \end{cases}, J = -r$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^1 dr \int\limits_0^{r^2} \left(r^2 + z\right) rdr$$

$$= \frac{\pi}{8}$$

■

Bài tập 5.9. *Tính* $\iint\limits_S xdydz + ydzdx + zdxdy$ *trong đó* S *là phía ngoài của miền* $(z-1)^2 \leqslant x^2 + y^2, a \leqslant z \leqslant 1, a > 0$.



Hình 5.9

Lời giải. Áp dụng công thức Ostrogradsky ta có:

$$I = \iiint\limits_V 3dxdydz = 3V = 3.\frac{1}{3}Bh = \pi\left(1-a\right)^3$$

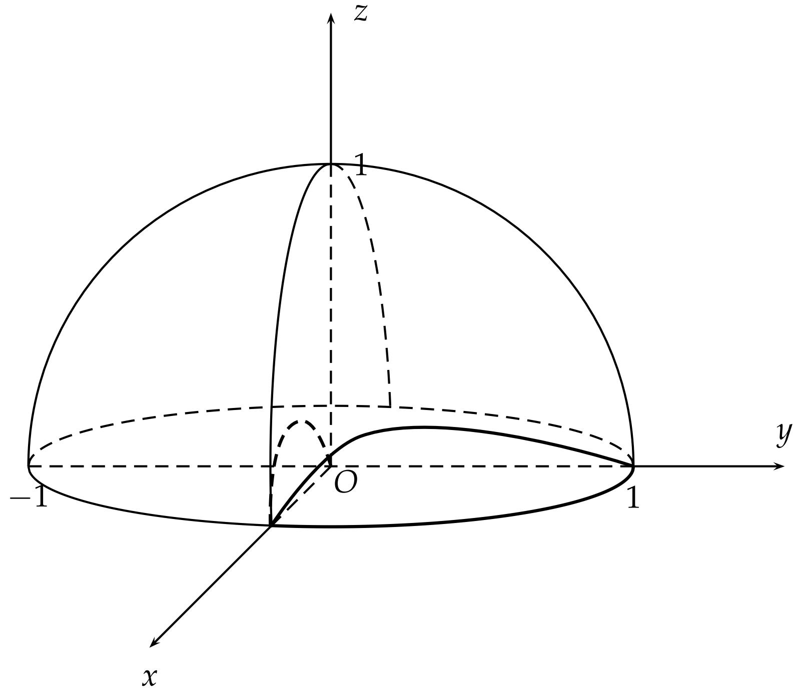
2.5 Công thức liên hệ giữa tích phân mặt loại I và loại II

$$\begin{aligned}&\iint\limits_S \left[P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma\right]dS\\ =&\iint\limits_S P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy\end{aligned} \tag{5.1}$$

trong đó $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ là cosin chỉ phương của véctơ pháp tuyến đơn vị của mặt S.

Bài tập 5.10. *Gọi S là phần mặt cầu $x^2+y^2+z^2=1$ nằm trong mặt trụ $x^2+x+z^2=0, y \geq 0$, hướng S phía ngoài. Chứng minh rằng*

$$\iint\limits_S (x-y)dxdy + (y-z)dydz + (z-x)dxdz = 0$$



Hình 5.10

Lời giải. Ta có $y = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ nên véctơ pháp tuyến của S là $\overrightarrow{n} = \pm(-y'_x, 1, -y'_z)$. Vì $(\overrightarrow{n}, Oy) < \frac{\pi}{2}$ nên

$$\overrightarrow{n} = (-y'_x, 1, -y'_z) = \left(\frac{x}{\sqrt{1 - x^2 - z^2}}, 1, \frac{z}{\sqrt{1 - x^2 - z^2}}\right)$$

Do đó $|\overrightarrow{n}| = \sqrt{\frac{x^2}{1-x^2-z^2} + 1 + \frac{z^2}{1-x^2-z^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-z^2}}$. Vậy

$$\begin{cases} \cos\alpha = \cos(\overrightarrow{n}, Ox) = \dfrac{n_1}{|\overrightarrow{n}|} = x \\ \cos\beta = \cos(\overrightarrow{n}, Oy) = \dfrac{n_2}{|\overrightarrow{n}|} = y \\ \cos\gamma = \cos(\overrightarrow{n}, Oz) = \dfrac{n_3}{|\overrightarrow{n}|} = z \end{cases}$$

■

Áp dụng công thức liên hệ giữa tích phân mặt loại I và II 5.1 ta có

$$\begin{aligned} I &= \iint\limits_S [(x - y)\cos\gamma + (y - z)\cos\beta + (z - x)\cos\alpha]\, dS \\ &= \iint\limits_S (x - y)z + (y - z)x + (z - x)y dS \\ &= 0 \end{aligned}$$

CHƯƠNG 6

LÝ THUYẾT TRƯỜNG

§1. TRƯỜNG VÔ HƯỚNG

1.1 Định nghĩa

Định nghĩa 6.3. *Cho Ω là một tập con mở của $\mathbb{R}^3$ (hoặc $\mathbb{R}^2$). Một hàm số*

$$u : \Omega \to \mathbb{R}$$
$$(x, y, z) \mapsto u = u(x, y, z)$$

được gọi là một trường vô hướng xác định trên Ω.

Cho $c \in \mathbb{R}$, khi đó mặt $S = \{(x, y, z) \in \Omega | u(x, y, z) = c\}$ được gọi là mặt mức ứng với giá trị c (đẳng trị).

1.2 Đạo hàm theo hướng

Định nghĩa 6.4. *Cho $u = u(x, y, z)$ là một trường vô hướng xác định trên Ω và $M_0 \in \Omega$. Với $\overrightarrow{l}$ là một véctơ khác không bất kì và $M(x, y, z)$ sao cho M_0M cùng phương với $\overrightarrow{l}$, đặt*

$$\rho = \begin{cases} \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} & \text{nếu } \overrightarrow{M_0M} \uparrow\uparrow \overrightarrow{l} \\ -\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} & \text{nếu } \overrightarrow{M_0M} \uparrow\downarrow \overrightarrow{l} \end{cases} \tag{6.1}$$

Giới hạn (nếu có) của tỉ số $\lim\limits_{\rho \to 0} \dfrac{\triangle u}{\rho}$ được gọi là đạo hàm theo hướng $\overrightarrow{l}$ tại M_0 của trường vô hướng u và được kí hiệu là $\dfrac{\partial u}{\partial \overrightarrow{l}}(M_0)$.

Chú ý:

- Giới hạn trong công thức 6.1 có thể được thay bằng

$$\lim_{t\to 0}\frac{u(x_0+t\cos\alpha, y_0+t\cos\beta, z_0+t\cos\gamma)-u(x_0,y_0,z_0)}{t},$$

trong đó $\cos\alpha, \cos\beta, cos\gamma$ là các cosin chỉ phương của $\overrightarrow{l}$.

- Nếu $\overrightarrow{l}\uparrow\uparrow Ox$ thì $\frac{\partial u}{\partial \overrightarrow{l}}(M_0)=\frac{\partial u}{\partial x}(M_0)$.

- Đạo hàm theo hướng $\overrightarrow{l}$ tại điểm M_0 của trường vô hướng u thể hiện tốc độ biến thiên của trường vô hướng u tại M_0 theo hướng $\overrightarrow{l}$.

Định lý 6.16. *Nếu $u=u(x,y,z)$ khả vi tại $M(x_0,y_0,z_0)$ thì nó có đạo hàm theo mọi hướng $\overrightarrow{l}\neq 0$ tại M_0 và*

$$\frac{\partial u}{\partial \overrightarrow{l}}(M_0)=\frac{\partial u}{\partial x}(M_0).\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}(M_0).\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}(M_0).\cos\gamma, \tag{6.2}$$

trong đó $\cos\alpha, \cos\beta, cos\gamma$ là các cosin chỉ phương của $\overrightarrow{l}$.

1.3 Gradient

Định nghĩa 6.5. *Cho $u(x,y,z)$ là trường vô hướng có các đạo hàm riêng tại $M_0(x_0,y_0,z_0)$. Người ta gọi gradient của u tại M_0 là véctơ*

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}(M_0), \frac{\partial u}{\partial y}(M_0), \frac{\partial u}{\partial z}(M_0)\right)$$

và được kí hiệu là $\overrightarrow{\mathrm{grad}u}(M_0)$.

Định lý 6.17. *Nếu trường vô hướng $u(x,y,z)$ khả vi tại M_0 thì tại đó ta có*

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}(M_0)=\overrightarrow{\mathrm{grad}u}.\vec{l}$$

Chú ý: $\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}(M_0)$ thể hiện tốc độ biến thiên của trường vô hướng u tại M_0 theo hướng $\vec{l}$. Từ công thức $\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}(M_0)=\overrightarrow{\mathrm{grad}u}.\vec{l}=\left|\overrightarrow{\mathrm{grad}u}\right|\left|\vec{l}\right|.\cos\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}u},\vec{l}\right)$ ta có $\left|\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}(M_0)\right|$ đạt giá trị lớn nhất bằng $\left|\overrightarrow{\mathrm{grad}u}\right|\left|\vec{l}\right|$ nếu $\vec{l}$ có cùng phương với $\overrightarrow{\mathrm{grad}\,u}$. Cụ thể

- Theo hướng $\vec{l}$, trường vô hướng u tăng nhanh nhất tại M_0 nếu $\vec{l}$ có cùng phương, cùng hướng với $\overrightarrow{\mathrm{grad}\,u}$.

- Theo hướng $\vec{l}$, trường vô hướng u giảm nhanh nhất tại M_0 nếu $\vec{l}$ có cùng phương, ngược hướng với $\overrightarrow{\mathrm{grad}\,u}$.

1.4 Bài tập

Bài tập 6.1. Tính đạo hàm theo hướng $\overrightarrow{l}$ của $u = x^3 + 2y^3 - 3z^3$ tại $A(2,0,1)$, $\overrightarrow{l} = \overrightarrow{AB}, B(1,2,-1)$.

Lời giải. Ta có $\overrightarrow{AB} = (-1,2,-2)$ nên

$$\cos\alpha = \frac{-1}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{-1}{3}, \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}(A) = 12$$
$$\cos\beta = \frac{2}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{2}{3}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 6y^2 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}(A) = 0$$
$$\cos\gamma = \frac{-2}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{-2}{3}, \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = -9z^2 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}(A) = -9$$

■

Áp dụng công thức 6.2 ta có

$$\frac{\partial u}{\partial \overrightarrow{l}}(A) = 12.\frac{-1}{3} + 0.\frac{2}{3} + (-9).\frac{-2}{3} = 2$$

Bài tập 6.2. Tính mônđun của $\overrightarrow{\text{grad}u}$ với $u = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ tại $A(2,1,1)$. Khi nào thì $\overrightarrow{\text{grad}u} \perp Oz$, khi nào $\overrightarrow{\text{grad}u} = 0$.

Lời giải. Ta có

$$\overrightarrow{\text{grad}u} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right) = (3x^2 = 3yz, 3y^2 - 3zx, 3z^2 - 3xy)$$

nên $\overrightarrow{\text{grad}u} = (9,-3,-3)$ và $\left|\overrightarrow{\text{grad}u}\right| = \sqrt{9^2 + 3^2 + 3^2} = 3\sqrt{11}$.

- $\overrightarrow{\text{grad}u} \perp Oz \Leftrightarrow \left\langle \overrightarrow{\text{grad}u}, \overrightarrow{k} \right\rangle = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow z^2 = xy$
- $\overrightarrow{\text{grad}u} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = yz \\ y^2 = zx \\ z^2 = xy \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z$ ■

Bài tập 6.3. Tính $\overrightarrow{\text{grad}u}$ với $u = r^2 + \frac{1}{r} + \ln r$ và $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Bài tập 6.4. Theo hướng nào thì sự biến thiên của hàm số $u = x\sin z - y\cos z$ từ gốc toạ độ $O(0,0)$ là lớn nhất?

Lời giải. Từ công thức $\dfrac{\partial u}{\partial \vec{l}}(O) = \overrightarrow{\text{grad}u}.\vec{l} = \left|\overrightarrow{\text{grad}u}\right| \left|\vec{l}\right|.\cos\left(\overrightarrow{\text{grad}u}, \vec{l}\right)$ ta có $\left|\dfrac{\partial u}{\partial \vec{l}}(O)\right|$ đạt giá trị lớn nhất bằng $\left|\overrightarrow{\text{grad}u}\right| \left|\vec{l}\right|$ nếu $\vec{l}$ có cùng phương với $\overrightarrow{\text{grad}u}(O) = (0, -1, 0)$. ■

Bài tập 6.5. Tính góc giữa hai véctơ $\overrightarrow{\text{grad}z}$ của các hàm $z = \sqrt{x^2+y^2}, z = x - 3y + \sqrt{3xy}$ tại $M(3,4)$.

Lời giải. Ta có

- $\overrightarrow{\text{grad}z_1} = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ nên $\overrightarrow{\text{grad}z_1}(M) = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$.
- $\overrightarrow{\text{grad}z_2} = \left(1 + \frac{\sqrt{3y}}{2\sqrt{x}}, -3 + \frac{\sqrt{3x}}{2\sqrt{y}}\right)$ nên $\overrightarrow{\text{grad}z_2}(M) = \left(2, -\frac{9}{4}\right)$. Vậy ■

$$\cos\alpha = \frac{\left\langle \overrightarrow{\text{grad}z_1}, \overrightarrow{\text{grad}z_2} \right\rangle}{\left|\overrightarrow{\text{grad}z_1}\right| . \left|\overrightarrow{\text{grad}z_2}\right|} = \frac{-12}{5\sqrt{145}}$$

§2. TRƯỜNG VÉCTƠ

2.1 Định nghĩa

Cho Ω là một miền mở trong $\mathbb{R}^3$. Một hàm véctơ

$$\begin{aligned} \overrightarrow{F} &: \Omega \to \mathbb{R}^3 \\ M &\mapsto \overrightarrow{F} = \overrightarrow{F}(M), \end{aligned}$$

trong đó

$$\overrightarrow{F} = F_x(M)\overrightarrow{i} + F_y(M)\overrightarrow{j} + F_z(M)\overrightarrow{k}$$

2.2 Thông lượng, dive, trường ống

a. Thông lượng: Cho S là một mặt định hướng và $\overrightarrow{F}$ là một trường véctơ. Đại lượng

$$\phi = \iint\limits_S F_x dydz + F_y dzdx + F_z dxdy \tag{6.3}$$

được gọi là thông lượng của $\overrightarrow{F}$ đi qua mặt cong S.

b. Dive: Cho $\overrightarrow{F}$ là một trường véctơ có thành phần F_x, F_y, F_z là các hàm số có đạo hàm riêng cấp một thì tổng $\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$ được gọi là dive của trường véctơ $\overrightarrow{F}$ và kí hiệu là div $\overrightarrow{F}$.

c. Trường véctơ $\overrightarrow{F}$ xác định trên Ω được gọi là một trường ống nếu div $\overrightarrow{F}(M) = 0$ với mọi $M \in \Omega$.
Tính chất: Nếu $\overrightarrow{F}$ là một trường ống thì thông lượng đi vào bằng thông lượng đi ra.

2.3 Hoàn lưu, véctơ xoáy

a. Hoàn lưu: Cho $\mathcal{C}$ là một đường cong (có thể kín hoặc không kín) trong không gian. Đại lượng

$$\int\limits_{\mathcal{C}} F_x dx + F_y dy + F_z dz \tag{6.4}$$

được gọi là hoàn lưu của $\overrightarrow{F}$ dọc theo đường cong $\mathcal{C}$.

b. Véctơ xoáy: Véctơ

$$\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{F} := \begin{pmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{pmatrix}$$

được gọi là véctơ xoáy (hay véctơ rota) của trường véctơ $\overrightarrow{F}$.

2.4 Trường thế - hàm thế vị

Trường véctơ $\overrightarrow{F}$ được gọi là trường thế (trên Ω) nếu tồn tại trường vô hướng u sao cho $\overrightarrow{\text{grad}}u = \overrightarrow{F}$ (trên Ω). Khi đó hàm u được gọi là hàm thế vị.

Định lý 6.18. *Điều kiện cần và đủ để trường véctơ $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F}(M)$ là một trường thế (trên Ω) là $\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{F}(M) = 0$ với mọi $M \in \Omega$.*

Chú ý: Nếu $\overrightarrow{F}$ là trường thế thì hàm thế vị u được tính theo công thức

$$u = \int_{x_0}^{x} F_x(x, y_0, z_0)dx + \int_{y_0}^{y} F_y(x, y, z_0)dy + \int_{z_0}^{z} F_z(x, y, z)dz + C \tag{6.5}$$

2.5 Bài tập

Bài tập 6.6. Trong các trường sau, trường nào là trường thế?

a. $\overrightarrow{a} = 5(x^2 - 4xy)\overrightarrow{i} + (3x^2 - 2y)\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$.

b. $\overrightarrow{a} = yz\overrightarrow{i} + xz\overrightarrow{j} + xy\overrightarrow{k}$.

c. $\overrightarrow{a} = (x + y)\overrightarrow{i} + (x + z)\overrightarrow{j} + (z + x)\overrightarrow{k}$.

Lời giải. a. Ta có

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{a} = \left(\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ Q & R \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial x} \\ R & P \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} \right) = (0, 0, 6x - 20y) \neq 0$$

nên trường đã cho không phải là trường thế.

b. Ngoài cách tính $\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{a}$, sinh viên có thể dễ dàng nhận thấy tồn tại hàm thế vị $u = xyz$ nên $\overrightarrow{a}$ là trường thế.

c. Ta có

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{a} = \left(\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ Q & R \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial x} \\ R & P \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} \right) = (0, 0, 0)$$

nên $\overrightarrow{a}$ là trường thế. Hàm thế vị được tính theo công thức 6.5:

$$\begin{aligned}
u &= \int_{x_0}^{x} F_x(t, y_0, z_0)dt + \int_{y_0}^{y} F_y(x, t, z_0)dt + \int_{z_0}^{z} F_z(x, y, t)dt + C \\
&= \int_{0}^{x} tdt + \int_{0}^{y} (x + 0)dt + \int_{0}^{z} (t + y)dt + C \\
&= \frac{x^2}{2} + xy + \frac{z^2}{2} + yz + C
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

Bài tập 6.7. Cho $\overrightarrow{F} = xz^2\overrightarrow{i} + {}^2\overrightarrow{j} + zy^2\overrightarrow{k}$. Tính thông lượng của $\overrightarrow{F}$ qua mặt cầu $S : x^2 + y^2 + z^2 = 1$ hướng ra ngoài.

Lời giải. Theo công thức tính thông lượng 6.3 ta có

$$\phi = \iint_S xz^2dydz + yx^2dxdz + zy^2dxdy$$

Áp dụng công thức Ostrogradsky ta có

$$\phi = \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2)dxdydz$$

Thực hiện phép đổi biến trong toạ độ cầu $\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}, \begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le \theta \le \pi \\ 0 \le r \le 1 \end{cases}, J = -r^2\sin\theta$

ta có

$$\phi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^1 r^2.r^2\sin\theta dr = \frac{4\pi}{5}$$

Bài tập 6.8. Cho $\overrightarrow{F} = x(y+z)\overrightarrow{i} + y(z+x)\overrightarrow{j} + z(x+y)\overrightarrow{k}$ và L là giao tuyến của mặt trụ $x^2 + y^2 + y = 0$ và nửa mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 2, z \ge 0$. Chứng minh rằng lưu số của $\overrightarrow{F}$ dọc theo L bằng 0.

Lời giải. Theo công thức tính lưu số 6.4

$$I = \oint_L x(y+z)dx + y(z+x)dy + z(x+y)dz$$

Áp dụng công thức Stokes ta có

$$\begin{aligned}
I &= \iint\limits_S \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ Q & R \end{vmatrix} dydz + \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial x} \\ R & P \end{vmatrix} dzdx + \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} dxdy \\
&= \iint\limits_S (z-y)dydz + (x-z)dzdx + (y-x)dxdy \\
&= 0 \text{ (theo bài tập 5.10).}
\end{aligned}$$

■