a. Tìm giá trị của α để hệ phương trình không có nghiệm.

Để không có nghiệm, ma trận gia tăng của hệ phải dẫn đến một hàng cho thấy sự mâu thuẫn (ví dụ, một hàng có dạng $[0\ 0\ b]$ với $b \neq 0$).

Hãy thực hiện phép khử Gaussian để giảm ma trận này.

Bước 1: Chia hàng đầu tiên cho 2 để phần tử đầu tiên của hàng đầu tiên là 1:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3\alpha & \frac{3}{2} \\ 3\alpha & -1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Bước 2: Loại bỏ 3α ở hàng thứ hai bằng cách thay thế hàng thứ hai bằng hàng thứ hai trừ 3α lần hàng đầu tiên:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3\alpha & \frac{3}{2} \\ 0 & -1 + 9\alpha^2 & \frac{3}{2} - \frac{9\alpha}{2} \end{pmatrix}$$

Đơn giản hóa hàng thứ hai:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3\alpha & \frac{3}{2} \\ 0 & -1 + 9\alpha^2 & \frac{3}{2} - \frac{9\alpha}{2} \end{pmatrix}$$

Để hệ phương trình không có nghiệm, hàng thứ hai phải thể hiện một mâu thuẫn. Điều này xảy ra nếu hệ số của x_2 trong hàng thứ hai bằng 0 nhưng hằng số khác 0:

$$-1 + 9\alpha^2 = 0 \quad và \quad \frac{3}{2} - \frac{9\alpha}{2} \neq 0$$

Giải cho α:

$$-1 + 9\alpha^2 = 0 \implies 9\alpha^2 = 1 \implies \alpha = \pm\frac{1}{3}$$

Đối với $\alpha = \pm\frac{1}{3}$, kiểm tra hằng số trong hàng thứ hai:

$$\frac{3}{2} - \frac{9\alpha}{2} = \frac{3}{2} - \frac{9(\pm\frac{1}{3})}{2} = \frac{3}{2} \mp \frac{3}{2} = 0$$

Vì hằng số trở thành zero khi $\alpha = \pm\frac{1}{3}$, điều này không dẫn đến mâu thuẫn. Do đó, không có giá trị nào của α khiến hệ phương trình không có nghiệm.

b. Tìm giá trị của α để hệ phương trình có vô số nghiệm.

Hệ phương trình có vô số nghiệm khi phương trình thứ hai phụ thuộc vào phương trình thứ nhất, điều này xảy ra nếu hàng thứ hai của ma trận giảm có toàn số không:

$$-1 + 9\alpha^2 = 0 \quad và \quad \frac{3}{2} - \frac{9\alpha}{2} = 0$$

Chúng ta đã giải cho α:

$$\alpha = \pm\frac{1}{3}$$

Kiểm tra các giá trị này, cả hai dẫn đến hàng thứ hai trở thành:

$$0 \quad 0 \quad 0$$

Vì vậy, $\alpha = \pm\frac{1}{3}$ dẫn đến vô số nghiệm.

c. Giả sử có nghiệm duy nhất cho một giá trị α nhất định, tìm nghiệm.

Để có nghiệm duy nhất, α phải khác $\pm\frac{1}{3}$.

Hệ phương trình trở nên nhất quán và chúng ta có thể giải nó cho bất kỳ giá trị nào khác của α.

Chúng ta đã có dạng bậc thang hàng:

$$(\begin{matrix} 1 & -3\alpha & \frac{3}{2} \\ 0 & -1 + 9\alpha^2 & \frac{3}{2} - \frac{9\alpha}{2} \end{matrix})$$

Từ hàng thứ hai:

$$(-1 + 9\alpha^2)x_2 = \frac{3}{2} - \frac{9\alpha}{2}$$

$$x_2 = \frac{\frac{3}{2} - \frac{9\alpha}{2}}{-1 + 9\alpha^2} = \frac{3 - 9\alpha}{2(9\alpha^2 - 1)}$$

Từ hàng thứ nhất:

$$x_1 - 3\alpha x_2 = \frac{3}{2}$$

$$x_1 = \frac{3}{2} + 3\alpha x_2$$

Thay x_2:

$$x_1 = \frac{3}{2} + 3\alpha\,(\frac{3 - 9\alpha}{2(9\alpha^2 - 1)})$$

$$x_1 = \frac{3}{2} + \frac{9\alpha(3 - 9\alpha)}{2(9\alpha^2 - 1)}$$

$$x_1 = \frac{3}{2} + \frac{27\alpha - 81\alpha^2}{2(9\alpha^2 - 1)}$$

Vì vậy, nghiệm duy nhất cho $\alpha \neq \pm\frac{1}{3}$ là:

$$x_1 = \frac{3}{2} + \frac{27\alpha - 81\alpha^2}{2(9\alpha^2 - 1)}, \quad x_2 = \frac{3 - 9\alpha}{2(9\alpha^2 - 1)}$$