Để chứng minh rằng một đồ thị là đồ thị hai mầu (bipartite) khi và chỉ khi nó không chứa chu trình độ dài lẻ, chúng ta có thể sử dụng phương pháp phản chứng (proof by contradiction).

\*\*Bước 1: (Chứng minh rằng nếu đồ thị không chứa chu trình độ dài lẻ thì nó là đồ thị hai mầu)

Giả sử đồ thị (G) không chứa chu trình độ dài lẻ. Chúng ta sẽ chứng minh rằng (G) là đồ thị hai mầu.

Bắt đầu với một đỉnh bất kỳ, tô nó màu 1. Tất cả các đỉnh kề với nó sẽ được tô màu 2. Tiếp theo, tất cả các đỉnh kề với các đỉnh màu 2 sẽ được tô màu 1, và tiếp tục như vậy. Theo cách này, mỗi lần tô một đỉnh, các đỉnh kề với nó sẽ có màu khác biệt.

Vì (G) không chứa chu trình độ dài lẻ, khi chúng ta kết thúc quá trình tô màu, không có hai đỉnh kề nào cùng màu. Do đó, (G) là đồ thị hai mầu.

\*\*Bước 2: (Chứng minh rằng nếu đồ thị là đồ thị hai mầu thì nó không chứa chu trình độ dài lẻ)

Giả sử (G) là đồ thị hai mầu. Chúng ta sẽ chứng minh rằng (G) không chứa chu trình độ dài lẻ.

Xét một chu trình trong (G), và giả sử rằng đỉnh đầu tiên và đỉnh cuối cùng của chu trình được tô màu 1. Vì (G) là đồ thị hai mầu, các đỉnh trên chu trình lẻ sẽ có màu xen kẽ giữa màu 1 và màu 2.

Tuy nhiên, nếu đỉnh đầu tiên và đỉnh cuối cùng của chu trình được tô màu 1, thì số lượng các đỉnh trên chu trình phải là chẵn (vì các đỉnh xen kẽ màu 1 và màu 2). Điều này đối lập với việc chu trình là lẻ.

Do đó, nếu (G) là đồ thị hai mầu, thì nó không chứa chu trình độ dài lẻ.

\*\*Kết luận:\*\*

Từ cả hai bước chứng minh trên, chúng ta có thể kết luận rằng một đồ thị là đồ thị hai mầu khi và chỉ khi nó không chứa chu trình độ dài lẻ.