CƠ SỞ GRÖBNER LÀ GÌ?

Bernd Sturmfels

LÊ VĂN THIÊM CON NGƯỜI VÀ SỰ NGHIỆP

Hà Huy Khoái

EUCLID VÀ CƠ SỞ CỦA HÌNH HỌC

Ngô Bảo Châu, Richard Fitzpatrick

TẬP TRÁNH TỔNG TRONG NHÓM

Terence Tao

VỀ HẰNG SỐ LIÊN THÔNG TRÊN LƯỚI TỔ ONG

Huỳnh Công Bằng

VÀ CÁC CHUYÊN MỤC KHÁC

Tháng 4 - 2016
No. 8

Epsilon

Tạp chí online của cộng đồng những người yêu toán

"Nếu hai vật thể có đặc số Euler khác nhau, thì chúng không thể cái này biến thành cái kia sau một phép biến đổi thuận nghịch liên tục (kiểu như co dãn cao su). Người ta nói hai vật thể đó không cùng kiểu tôpô."
RỘNG HẸP NHỎ TO VỪA VẶN CẢ
(GIỚI THIỆU TÔPÔ HỌC)
Nguyễn Hữu Việt Hưng

"Cơ sở của hình học được coi là một trong những quyển sách có ảnh hưởng nhất tới sự phát triển của văn minh nhân loại."
EUCLID VÀ CƠ SỞ CỦA HÌNH HỌC
Ngô Bảo Châu, Richard Fitzpatrick

13

04

No. 8

Epsilon

Tạp chí online của cộng đồng những người yêu toán

LỜI NGỎ CHO EPSILON SỐ 8

Ban Biên tập Epsilon

Epsilon có gì trong số 8 này? Ban biên tập xin mời bạn đọc hãy lướt qua phần giới thiệu của chúng tôi.

Mảng lịch sử toán học có bài của GS Hà Huy Khoái viết về thân thế và sự nghiệp của GS Lê Văn Thiêm mà chúng ta vừa kỷ niệm 98 năm ngày sinh tháng 3 vừa qua. Cũng mảng lịch sử toán học nhưng có nội dung chính là giới thiệu về tô-pô có bài viết rất hóm hỉnh, dễ hiểu nhưng cũng rất sâu sắc của GS Nguyễn Hữu Việt Hưng với tựa đề "Rộng hẹp nhỏ to vừa vặn cả". Các bạn sẽ thấy bất ngờ khi thấy rằng hóa ra cùng với Leonard Euler vĩ đại, có một nhà thơ Việt Nam cũng đã tìm ra ý tưởng táo bạo của tô-pô (có dẫn trong tựa đề). Cùng chủ đề giới thiệu về toán cao cấp có bài của Matt Baker về định lý hôn nhân, bài về cơ sở Grobner của Bernd Sturmfels. Epsilon số 8 cũng giới thiệu bài viết của Terence Tao trên blog của anh giới thiệu về bài báo của anh và Vũ Hà Văn về tập tránh tổng (Sum-free sets). Mục điểm sách sẽ có bài của GS Ngô Bảo Châu và Richard Fitzpatrick giới thiệu về cuốn Euclid và Cơ sở của hình học. Mục vấn các vấn đề cổ điển và hiện đại sẽ có đề thi Tú tài Pháp do GS Nguyễn Tiến Dũng giới thiệu.

Bên cạnh đó là các chuyên mục quen thuộc về toán sơ cấp, lời giải các số trước, các bài viết của các tác giả "ruột" của Epsilon, bài toán hay, lời giải đẹp, toán giải trí ...

Chúng tôi đặc biệt muốn nhấn mạnh đến sự ủng hộ của các tác giả dành cho Epsilon. Điều này nói lên một tinh thần "Khi chúng ta đóng góp vì cộng động, cộng đồng sẽ vì ta". GS Hà Huy Khoái đã đích thân gửi bài đến cho Ban biên tập. GS Nguyễn Hữu Việt Hưng, khi chúng tôi xin bài cũng đã vui vẻ gửi bản gốc để chúng tôi tiện biên tập chỉ với lời nhắn "với điều kiện các cậu không được sửa, dù chỉ một chữ". Còn Terence Tao thì trả lời ngắn gọn "This is fine with me. Best, Terry". Các tác giả "ruột" như Ngô Quang Hưng, Lý Ngọc Tuệ thì dù bận bịu vẫn luôn gắng dành thời gian viết bài cho chúng tôi. Mà các anh thì viết quá chuẩn, BBT chỉ cần ráp vào là xong. Các bạn trẻ cũng rất hăng hái viết bài (số này sẽ có 3 bài của các bạn học sinh là Hoàng Cao Phong, Nguyễn Trần Hữu Thịnh và Đỗ Xuân Anh), sẵn sàng nhận dịch bài khi được nhờ (số này sẽ có bản dịch của bạn Nguyễn Vũ Anh).

Mà không chỉ có các bạn trẻ sung. Lứa trung niên cũng sung lắm. Số này sẽ có bài của Trịnh Đào Chiến và anh cùng Trần Minh Hiền hứa sẽ viết 1 bài về định lý Cauchy Davenport cho số 6. Lão ngoan đồng Nguyễn Vũ Duy Linh cũng hăng hái dịch bài về cơ sở Grobner của Sturmfels.

Ban biên tập cảm ơn sự ủng hộ của các tác giả và sự đón nhận nồng nhiệt của các độc giả. Hãy tiếp tục chung tay sát cánh cùng chúng tôi trên con đường đầy gian nan phía trước.

Đi nhiều người, ta sẽ đi rất xa.

MỤC LỤC

XẤP XỈ DIOPHANTINE TRÊN R^n- VÉC TƠ XẤP XỈ KÉM VÀ TRÒ CHƠI SIÊU PHẲNG TUYỆT ĐỐI

Lý Ngọc Tuệ

(Đại học Brandeis, Massachusetts, Mỹ)

1. Giới thiệu

Trong phần 1 và phần 2 của loạt bài về xấp xỉ Diophantine [16, 17] chúng ta đã chứng minh Định lý Dirichlet trên $\mathbb{R}^n$ như sau:

Định lý 1 (Dirichlet)**.** *Với mọi véc tơ vô tỉ* $\vec{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{Q}^n$*, tồn tại vô số véc tơ hữu tỉ* $\frac{\vec{p}}{q} = \left(\frac{p_1}{q}, \dots, \frac{p_n}{q}\right) \in \mathbb{Q}^n$ *với* $\vec{p} \in \mathbb{Z}^n$ *và* $q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$ *sao cho:*

$$\left\| \vec{x} - \frac{\vec{p}}{q} \right\| < \frac{1}{|q|^{1+\frac{1}{n}}}.$$

Tổng quát hơn một tí, chúng ta gọi một hàm số liên tục không tăng $\psi : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ là một hàm xấp xỉ, và gọi một véc tơ $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ là *ψ-xấp xỉ được*[1] nếu như tồn tại vô số $\vec{p} \in \mathbb{Z}^n$, $q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$ sao cho:

$$\left\| \vec{x} - \frac{\vec{p}}{q} \right\| \leq \frac{\psi(|q|)}{|q|}.$$

Tập các véc tơ ψ-xấp xỉ được trên $\mathbb{R}^n$ sẽ được ký hiệu là $\mathbf{WA}_n(\psi)$. Nếu như ta sử dụng ký hiệu: $\psi_\alpha : k \mapsto k^{-\alpha}$, thì Định lý Dirichlet có thể được phát biểu lại thành:

$$\mathbf{WA}_n\left(\psi_{\frac{1}{n}}\right) = \mathbb{R}^n.$$

Hàm số ψ sẽ được gọi là một hàm *Dirichlet* (trên $\mathbb{R}^n$) nếu như $\mathbf{WA}_n(\psi) = \mathbb{R}^n$.
Câu hỏi về hàm số Dirichlet tối ưu cho $\mathbb{R}^n$ được trả lời một phần bởi Định luật 0-1 sau của Khintchine:

Định lý 2 (Khintchine 1926)**.** *Ký hiệu λ là độ đo Lebesgue trên $\mathbb{R}^n$:*

(i) Nếu như chuỗi $\sum_{k=1}^{\infty} \psi(k)^n$ *hội tụ thì* $\lambda(\mathbf{WA}_n(\psi)) = 0$.

(ii) Nếu như chuỗi $\sum_{k=1}^{\infty} \psi(k)^n$ *phân kỳ thì* $\lambda(\mathbb{R}^n \setminus \mathbf{WA}_n(\psi)) = 0$.

[1] ψ-approximable

Với $\epsilon > 0$ bất kỳ, theo Định lý 2, $\lambda\left(\mathbf{WA}\left(\psi_{\frac{1}{n}+\epsilon}\right)\right) = 0$. Vì vậy, $\psi_{\frac{1}{n}+\epsilon}$ không phải là hàm Dirichlet, và số mũ $\left(1+\frac{1}{n}\right)$ trong Định lý 1 là tối ưu. Tuy nhiên, với những hàm số tiến về 0 nhanh hơn một tí như $\left(k \mapsto k^{-\frac{1}{n}}(\log k)^{-\frac{1}{n}}\right)$ hay $\left(k \mapsto k^{-\frac{1}{n}}(\log\log k)^{-1}\right)$, Định lý 2 không thể cho ta biết được rằng đấy có phải là hàm Dirichlet hay không. Thật ra những hàm này không thể là hàm Dirichlet được, hay tổng quát hơn nữa, nếu như hàm số ψ thỏa mãn:

$$\lim_{k\to\infty} k^{\frac{1}{n}}\psi(k) = 0,$$

thì ψ không phải là một hàm Dirichlet trên $\mathbb{R}^n$: $\mathbf{WA}_n(\psi) \neq \mathbb{R}^n$.
Điều này có thể được chứng minh bằng cách chỉ ra sự tồn tại của các véc tơ *xấp xỉ kém* được định nghĩa như sau: $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ được gọi là xấp xỉ kém nếu như tồn tại một hằng số $c > 0$ (tùy thuộc vào $\vec{x}$) sao cho với mọi $\vec{p} \in \mathbb{Z}^n$, $q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$:

$$\left\|\vec{x} - \frac{\vec{p}}{q}\right\| > \frac{c}{|q|^{1+\frac{1}{n}}}. \tag{1.1}$$

Tập các véc tơ xấp xỉ kém trên $\mathbb{R}^n$ sẽ được ký hiệu bởi $\mathbf{BA}_n$.
Khi $n = 1$, các số xấp xỉ kém tương ứng với các liên phân số đơn bị chặn, vì thế $\mathbf{BA}_1$ không rỗng. Theo như Định lý của Lagrange, rằng một số thực α là một số đại số bậc 2 khi và chỉ khi mở rộng liên phân số của α là tuần hoàn, mọi số thực đại số bậc 2 vô tỉ đều xấp xỉ kém. Tuy không có công cụ liên phân số khi $n \geq 2$, chúng ta có thể chứng minh được trực tiếp mở rộng của quan sát trên cho $\mathbb{R}^n$ như sau:

Định lý 3. *Nếu như* $\{1, \alpha_1, ..., \alpha_n\}$ *là một cơ sở của một trường số đại số thực*[2] *bậc* $(n+1)$, *thì* $\vec{\alpha} = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbf{BA}_n$.

Bài tập 4. Chứng minh Định lý 3.

Ví dụ trên chỉ ra rằng có ít nhất vô hạn đếm được các véc tơ xấp xỉ kém trên $\mathbb{R}^n$. Mãi đến năm 1954, Davenport [5] chứng minh rằng $\mathbf{BA}_2$ là một tập không đếm được, và một năm sau đấy, Cassels [4] chứng minh rằng $\mathbf{BA}_n$ là không đếm được với n bất kỳ.
Vậy các tập $\mathbf{BA}_n$ lớn như thế nào? Phân tích $\mathbf{BA}_n$ ra thành như sau:

$$\begin{aligned}\mathbf{BA}_n &= \bigcup_{c>0}\left(\mathbb{R}^n \setminus \mathbf{WA}\left(c\psi_{\frac{1}{n}}\right)\right)\\ &= \bigcup_{k=1}^{\infty}\left(\mathbb{R}^n \setminus \mathbf{WA}\left(k^{-1}\psi_{\frac{1}{n}}\right)\right),\end{aligned}$$

và áp dụng Định lý 2, ta có được.

$$\lambda(\mathbf{BA}_n) = 0.$$

Nói một cách khác, theo độ đo Lebesgue thì $\mathbf{BA}_n$ là một tập nhỏ không đáng kể. Hơn thế nữa, cách phân tích như trên còn chỉ ra rằng $\mathbf{BA}_n$ thuộc phạm trù thứ nhất theo Baire, một hội đếm được của các tập không đâu trù mật.
Một trong những công cụ phổ biến để đo kích cỡ các tập nhỏ như vậy là *chiều Hausdorff*, ký hiệu là dim (xem thêm chi tiết ở §2). Sử dụng cách biểu diễn các số xấp xỉ kém dưới dạng liên phân số bị chặn, Jarník [11] chứng minh rằng tập các số xấp xỉ kém $\mathbf{BA}_1$ có chiều Hausdorff bằng 1. Đến 1966, Schmidt [21] mở rộng kết quả này ra cho các véc tơ xấp xỉ kém:

[2]real algebraic number field of degree $(n+1)$

Định lý 5 (Schmidt 1966)**.** $\dim \mathbf{BA}_n = n$.

Schmidt chứng minh kết quả này dựa vào một phương pháp hoàn toàn mới mà ông nghĩ ra: sử dụng một trò chơi vô hạn với thông tin hoàn hảo mà sau này gọi là trò chơi Schmidt (xem [19, Phần 4]). Áp dụng trò chơi này, Schmidt chứng minh rằng nếu như $\vec{y}_1, \vec{y}_2, \ldots$ là một dãy các véc tơ trên $\mathbb{R}^n$, thì giao của các tịnh tiến của $\mathbf{BA}_n$ bởi $\vec{y}_1, \vec{y}_2, \ldots$ vẫn có chiều Hausdorff bằng n:

$$\dim_H\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}(\mathbf{BA}_n + \vec{y}_k)\right) = n.$$

Tổng quát hơn, Schmidt đã chứng minh rằng:

Định lý 6 (Schmidt 1966)**.** *Gọi U là một tập mở bất kỳ trên $\mathbb{R}^n$, $\{f_i : U \to V_i\}_{i=1}^{\infty}$ là một họ đếm được các hàm [3] từ U vào các tập mở $V_i \subseteq \mathbb{R}^n$.*

$$\dim\left(\bigcap_{i=1}^{\infty}(f_i)^{-1}(\mathbf{BA}_n)\right) = n.$$

Dựa trên ý tưởng của Schmidt, McMullen [20] giới thiệu một biến thể của trò chơi Schmidt, gọi là trò chơi *tuyệt đối*[4], và chứng minh rằng tập $\mathbf{BA}_1$ là một tập thắng cuộc đối với trò chơi này (*thắng cuộc tuyệt đối*[5]). Tuy nhiên, khi $n \geq 2$, $\mathbf{BA}_n$ không phải là một tập thắng cuộc tuyệt đối. Vì thế Broderick, Fishman, Kleinbock, Reich, và Weiss [1] đã mở rộng ý tưởng của McMullen ra và giới thiệu trò chơi siêu phẳng tuyệt đối, trong đấy tập thắng cuộc được gọi là thắng cuộc siêu phẳng tuyệt đối[6], viết tắt là HAW. Áp dụng trò chơi này, BFKRW đã làm mạnh hơn Định lý 6 của Schmidt như sau:

Định lý 7 (BFKRW 2012)**.** *Gọi U là một tập mở bất kỳ trên $\mathbb{R}^n$, $\{f_i : U \to V_i\}_{i=1}^{\infty}$ là một họ đếm được các vi phôi[7] C^1 từ U vào các tập mở $V_i \subseteq \mathbb{R}^n$.*

$$\dim\left(\bigcap_{i=1}^{\infty}(f_i)^{-1}(\mathbf{BA}_n)\right) = n.$$

Định lý 5 và Định lý 6 đều là hệ quả của Định lý sau:

Định lý 8 (BFKRW 2012)**.** *$\mathbf{BA}_n$ là một tập thắng cuộc siêu phẳng tuyệt đối.*

Trong phần còn lại của bài này, chúng tôi sẽ giới thiệu chi tiết hơn về chiều Hausdorff, về trò chơi siêu phẳng tuyệt đối, và chứng minh Định lý 8.

2. Chiều Hausdorff

Một số tài liệu tham khảo cho chiều và độ đo Hausdorff: *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications* [6] và *The Geometry of Fractal Sets* [7] của K. J. Falconer.

[3] uniformly bi-Lipschitz
[4] absolute game
[5] absolute winning
[6] hyperplane absolute winning
[7] C^1 diffeomorphism

Với mỗi tập con không rỗng $U \subseteq \mathbb{R}^n$, *đường kính của* U được định nghĩa là khoảng cách lớn nhất giữa 2 điểm bất kỳ trong U:

$$\operatorname{diam} U := \sup\left\{\left\|\vec{x} - \vec{y}\right\| : \vec{x}, \vec{y} \in U\right\}.$$

Nếu như $\{U_i\}$ là một họ đếm được các tập có đường kính không quá δ và $E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$, ta sẽ gọi $\{U_i\}$ là một *δ-phủ*[8] *của* E.

Với mỗi tập $E \subseteq \mathbb{R}^n$, và với mỗi $s, \delta > 0$, *độ đo ngoài* (δ, s) *Hausdorff của* E được định nghĩa là:

$$\mathscr{H}_\delta^s(E) := \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}(\operatorname{diam} U_i)^s : \{U_i\} \text{ là một } \delta\text{-phủ của } E\right\}.$$

Bài tập 9. Chứng minh rằng $\mathscr{H}_\delta^s$ là một độ đo ngoài, nghĩa là thỏa mãn 3 tính chất sau:

(i) $\mathscr{H}_\delta^s(\emptyset) = 0$.

(ii) $A \subseteq B \Longrightarrow \mathscr{H}_\delta^s(A) \leq \mathscr{H}_\delta^s(B)$.

(iii) $\mathscr{H}_\delta^s\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathscr{H}_\delta^s(A_i)$.

Khi δ giảm dần về 0, lớp các δ-phủ của E nhỏ đi, vậy nên $\mathscr{H}_\delta^s(E)$ tăng dần và giới hạn của $\mathscr{H}_\delta^s(E)$ khi $\delta \to 0$ tồn tại (có thể là $+\infty$). Ta gọi giới hạn này là *độ đo ngoài Hausdorff với chiều* s[9] của E:

$$\mathscr{H}^s(E) := \lim_{\delta \searrow 0} \mathscr{H}_\delta^s(E).$$

Theo lý thuyết độ đo tổng quát, khi ta giới hạn vào các tập $\mathscr{H}^s$-đo được, $\mathscr{H}^s$ trở thành độ đo. Hơn thế nữa, các tập Borel trên $\mathbb{R}^n$ đều là $\mathscr{H}^s$-đo được với mọi $s > 0$.

Độ đo Hausdorff có một số tính chất như sau:

Bổ đề 10. *Cho* $E \subseteq \mathbb{R}^n$.

(i) Khi $s = n$*, độ đo Hausdorff với chiều* n *tương đương với độ đo Lebesgue trên* $\mathbb{R}^n$*: Tồn tại một hằng số* $c > 0$ *sao cho với mọi tập Borel* E*,*

$$\mathscr{H}^n(E) = c\lambda(E).$$

(ii) Với $\alpha > 0$*, ký hiệu* $\alpha E = \left\{\alpha\vec{x} : \vec{x} \in E\right\}$*. Độ đo Hausdorff với chiều* s *của* αE *thỏa mãn:*

$$\mathscr{H}^s(\alpha E) = \alpha^s \mathscr{H}^s(E).$$

(iii) Tổng quát hơn, nếu như $f : E \to \mathbb{R}^m$ *là một hàm sao cho tồn tại hằng số* $c, \alpha > 0$ *để với mọi* $\vec{x}, \vec{y} \in E$*:*

$$\left\|f(\vec{x}) - f(\vec{y})\right\| \leq c\left\|\vec{x} - \vec{y}\right\|^\alpha,$$

thì với mọi $s > 0$*:*

$$\mathscr{H}^{s/\alpha}(f(E)) \leq c^{s/\alpha}\mathscr{H}^s(E).$$

[8] δ-cover

[9] s-dimensional Hausdorff outer measure

(iv) Nếu như $\mathscr{H}^s(E) < \infty$, *thì với mọi* $t > s$, $\mathscr{H}^t(E) = 0$.

(v) Nếu như $\mathscr{H}^s(E) > 0$, *thì với mọi* $0 < t < s$, $\mathscr{H}^t(E) = \infty$.

Bài tập 11. Chứng minh Bổ đề 10.

Tính chất (iv) và (v) trong Bổ đề 10 cho thấy có 1 thời điểm $s = s_0$ mà $\mathscr{H}^s(E)$ nhảy từ ∞ xuống 0, gọi là *chiều Hausdorff của* E:

$$\dim_H(E) := \sup\{s > 0 : \mathscr{H}^s(E) = \infty\} = \inf\{s > 0 : \mathscr{H}^s(E) = 0\}.$$

Một số tính chất cơ bản của chiều Hausdorff như sau:

Bổ đề 12. *Cho* $E \subseteq \mathbb{R}^n$.

(i) Nếu $0 < \mathscr{H}^s(E) < \infty$, *thì* $\dim_H(E) = s$.

(ii) Nếu E *là một tập mở của* $\mathbb{R}^n$ *thì* $\dim_H(E) = n$.

(iii) Nếu $E \subseteq F$ *thì* $\dim_H(E) \leq \dim_H(F)$.

(iv) Nếu E *là một đa tạp* m*-chiều trong* $\mathbb{R}^n$ *thì* $\dim_H(E) = m$.

(v) Với mọi dãy $\{E_i\}$:

$$\dim_H\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sup_i \dim_H(E_i).$$

Bài tập 13. Chứng minh Bổ đề 12.

Chúng ta sẽ thấy chiều Hausdorff là một công cụ quan trọng để mô tả các tập có độ đo Lebesgue không đáng kể thông qua một ví dụ nổi tiếng về tập Cantor.

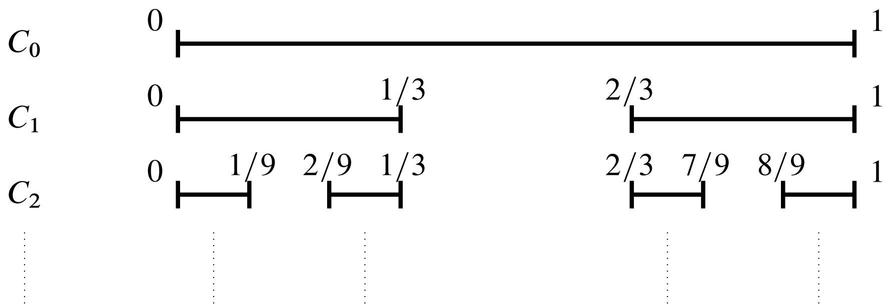
Ví dụ 14. Tập Cantor[10] $\mathcal{C}$ có thể được định nghĩa theo các bước như sau. Đặt $C_0 = [0, 1]$. Ở bước thứ $k \geq 1$, nếu như tập $C_k = \bigcup_i I_{k,i}$ là hợp của các đoạn không giao nhau từng cặp, thì C_{k+1} sẽ được bằng cách bỏ đi các đoạn mở ở giữa các $I_{k,i}$ có độ dài dúng bằng 1/3 độ dài của $I_{k,i}$. Cụ thể hơn, ta sẽ có được:

$$\begin{aligned}
C_0 &= [0, 1] \\
C_1 &= \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right] \\
C_2 &= \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{8}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right] \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Tập Cantor $\mathcal{C}$ là giao của tất cả các tập C_k.

$$\mathcal{C} = \bigcap_{k=0}^{\infty} C_k.$$

[10] Cantor middle third set



Có thể thấy được rằng C_k bao gồm 2^k các đoạn thẳng có độ dài 3^{-k}, và

$$C_0 \supseteq C_1 \supseteq C_2 \supseteq \cdots \supseteq \mathcal{C}.$$

Với mọi $k \geq 0$:

$$\lambda(\mathcal{C}) \leq \lambda(C_k) = \left(\frac{2}{3}\right)^k.$$

Từ đó ta suy ra được rằng $\mathcal{C}$ có độ dài (độ đo Lebesgue trên $\mathbb{R}$) bằng 0.
Vì C_k là các tập compact, $\mathcal{C}$ cũng là một tập compact và không rỗng. Ta có thể mô tả các phần tử của $\mathcal{C}$ như sau. Với mỗi số thực $0 \leq x \leq 1$, viết x bằng hệ cơ số 3:

$$x = (0.a_1a_2...)_3 = \sum_{i=1}^{\infty} a_i 3^{-i}, \quad a_1, a_2, ... \in \{0, 1, 2\}.$$

Khi đấy:

$$x \in \mathcal{C} \iff a_1, a_2, ... \in \{0, 2\}.$$

Chúng ta sẽ chứng minh rằng với $s = \dfrac{\log 2}{\log 3}$, $\mathscr{H}^s(\mathcal{C}) = 1$. Vì vậy tập $\mathcal{C}$ có chiều Hausdorff bằng $\dfrac{\log 2}{\log 3}$.

Đặt $C_k = \bigcup_{i=1}^{2^k} I_{k,i}$, trong đấy $I_{k,i}$ là các đoạn đóng có độ dài 3^{-k}, với mỗi $\delta > 0$, chọn k đủ lớn sao cho $3^{-k} \leq \delta$. Khi đấy $\{I_{k,i}\}$ là một δ-phủ của $\mathcal{C}$, và ta có được:

$$\mathscr{H}^s_\delta(\mathcal{C}) \leq \sum_{i=1}^{2^k} (\mathrm{diam}(I_{k,i}))^s = \sum_{i=1}^{2^k} \left(3^{-k}\right)^{\frac{\log 2}{\log 3}} = 1.$$

Lấy giới hạn khi $\delta \searrow 0$:

$$\mathscr{H}^s(\mathcal{C}) = \lim_{\delta \searrow 0} \mathscr{H}^s_\delta(\mathcal{C}) \leq 1.$$

Để chứng minh chiều ngược lại, gọi $\{U_\alpha\}$ là một phủ bất kỳ của $\mathcal{C}$. Không mất tính tổng quát, chúng ta có thể giả sử rằng U_α là các đoạn thẳng đóng. Vì $\mathcal{C}$ là một tập compact, ta có thể tìm được một số hữu hạn các đoạn $\left\{U_j\right\}_{1 \leq j \leq m}$ phủ $\mathcal{C}$.
Gọi k là số nguyên dương nhỏ nhất sao cho với mọi $1 \leq i \leq 2^k$ và với mọi $1 \leq j \leq m$, nếu như phần trong của $I_{k,i}$ giao với U_j thì $I_{k,i} \subseteq U_j$. Gọi $\mathcal{I}_j$ là tập các đoạn $I_{k,i}$ nằm trong U_j:

$$\mathcal{I}_j := \left\{I_{k,i} : I_{k,i} \subseteq U_j\right\},$$

và U'_j là đoạn đóng nhỏ nhất chứa mọi đoạn $I_{k,i}$ trong $\mathcal{I}_j$.
Ta có thể dễ dàng kiểm tra được rằng $\{U'_j\}_{1\le j\le m}$ cũng là một phủ của $\mathcal{C}$, và:

$$\sum_{j=1}^{m}\left(\operatorname{diam} U_j\right)^s \ge \sum_{j=1}^{m}\left(\operatorname{diam} U'_j\right)^s.$$

Nếu như U'_j chỉ chứa 1 đoạn $I_{k,i}$ thì hiển nhiên: $U'_j = I_{k,i}$. Còn khi:

$$2^l < \#\mathcal{I}_j \le 2^{l+1},$$

ta có thể tìm được một đoạn đóng $K \subseteq U'_j$ sao cho:

(i) $K^o \cap C_k = \emptyset$,

(ii) $\operatorname{diam} K \ge \dfrac{1}{3}\operatorname{diam} U'_j$,

(iii) $U'_j \setminus K^o$ bao gồm 2 đoạn đóng J và J', mỗi đoạn chứa nhiều nhất 2^l đoạn con $I_{k,i}$ trong $\mathcal{I}_j$.

Từ đó ta có được:

$$\begin{aligned}
\left(\operatorname{diam} U'_j\right)^s &= \left(\operatorname{diam} J + \operatorname{diam} K + \operatorname{diam} J'\right)^s \\
&\ge \left(\frac{3}{2}\left(\operatorname{diam} J + \operatorname{diam} J'\right)\right)^s \\
&= 2\left(\frac{1}{2}\operatorname{diam} J + \frac{1}{2}\operatorname{diam} J'\right)^s && \left(s = \frac{\log 2}{\log 3}\right) \\
&\ge 2\left(\frac{1}{2}(\operatorname{diam} J)^s + \frac{1}{2}\left(\operatorname{diam} J'\right)^s\right) && (0 < s < 1) \\
&= (\operatorname{diam} J)^s + \left(\operatorname{diam} J'\right)^s
\end{aligned}$$

Quy nạp theo l, ta có được:

$$\left(\operatorname{diam} U'_j\right)^s \ge \sum_{I_{k,i}\in\mathcal{I}_j} (\operatorname{diam} I_{k,i})^s.$$

Vì $\{U'_j\}$ là một phủ của $\mathcal{C}$:

$$\sum_{i=1}^{\infty}(\operatorname{diam}(U_i))^s \ge \sum_{j=1}^{m}\left(\operatorname{diam} U_{i_j}\right)^s \ge \sum_{i=1}^{2^k}(\operatorname{diam} I_{k,i})^s = 1.$$

Vậy $\mathscr{H}^s(\mathcal{C}) = 1$ và $\dim_H(\mathcal{C}) = \dfrac{\log 2}{\log 3}$.

3. Trò chơi siêu phẳng tuyệt đối

Trong phần này, chúng ta sẽ ký hiệu $\mathbf{B}(\vec{x}, r)$ là 'quả bóng'[11] đóng trong $\mathbb{R}^n$ với tâm $\vec{x}$ và bán kính r:

$$\mathbf{B}(\vec{x}, r) := \left\{\vec{y} \in \mathbb{R}^n : \left\|\vec{x} - \vec{y}\right\| \leq r\right\}.$$

Một siêu phẳng[12] $\mathcal{L}$ trong $\mathbb{R}^n$ là một tập hợp các nghiệm của một hàm tuyến tính n ẩn khác 0. Khoảng cách từ một điểm $\vec{x}$ đến $\mathcal{L}$ được định nghĩa là:

$$\operatorname{dist}\left(\vec{x}, \mathcal{L}\right) := \inf\left\{\left\|\vec{x} - \vec{y}\right\| : \vec{y} \in \mathcal{L}\right\}.$$

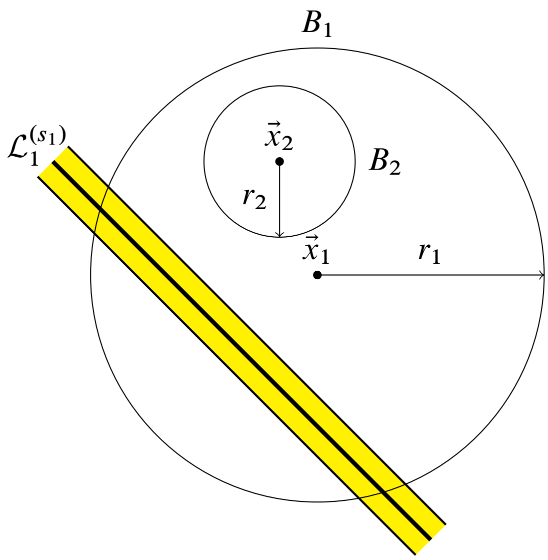
Tập hợp các điểm có khoảng cách đến $\mathcal{L}$ không quá r được gọi là một *r-lân cận của* $\mathcal{L}$, và ký hiệu là:

$$\mathcal{L}^{(r)} := \left\{\vec{x} : \operatorname{dist}\left(\vec{x}, \mathcal{L}\right) \leq r\right\}.$$

Cho trước một hằng số $0 < \beta < \dfrac{1}{3}$ và một tập đối được $S \subseteq \mathbb{R}^n$, trò chơi β-siêu phẳng tuyệt đối giữa An và Bình diễn ra như sau:

1. An và Bình lần lượt thay phiên nhau đi, và Bình là người đi trước.
2. Đầu tiên Bình chọn một quả bóng bất kỳ $B_1 = \mathbf{B}(\vec{x}_1, r_1)$ với bán kính $r_1 > 0$.
3. Ở bước thứ $i \geq 1$, An chọn s_i-lân cận của một siêu phẳng $\mathcal{L}_i$ sao cho $0 < s_i \leq \beta r_i$.
4. Ở bước thứ $i + 1$, Bình chọn một quả bóng $B_{i+1} = \mathbf{B}(\vec{x}_{i+1}, r_{i+1})$ sao cho $r_{i+1} \geq \beta r_i$ và:

$$\mathbf{B}(\vec{x}_{i+1}, r_{i+1}) \subseteq \mathbf{B}(\vec{x}_i, r_i) \setminus \mathcal{L}_i^{(s_i)}.$$



An sẽ thắng nếu như:

$$S \cap \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathbf{B}(\vec{x}_i, r_i) \neq \emptyset,$$

[11] vì chúng ta dùng sup-norm, nên thật ra $\mathbf{B}(\vec{x}, r)$ là hình hộp vuông trong $\mathbb{R}^n$

[12] hyperplane

còn nếu không thì Bình thắng. Tập S được gọi là một tập *β-thắng cuộc siêu phẳng tuyệt đối* nếu như An có chiến lược để luôn luôn thắng trong trò chơi β-siêu phẳng tuyệt đối (viết tắt là *β-HAW*) bất kể Bình có đi như thế nào đi nữa. S được gọi là *thắng cuộc siêu phẳng tuyệt đối* (viết tắt là *HAW*) nếu như S β-thắng cuộc siêu phẳng tuyệt đối với mọi $0 < \beta < \dfrac{1}{3}$.

Lưu ý 15. Khi $n = 1$, các 'siêu phẳng' $\mathcal{L}$ trên $\mathbb{R}$ đơn giản là các điểm. Khi đấy, trò chơi siêu phẳng tuyệt đối còn được gọi là trò chơi tuyệt đối được giới thiệu bởi McMullen trong [20].

Lưu ý 16. Trò chơi siêu phẳng tuyệt đối có thể được chơi ở trên một không gian metric tổng quát (X, dist) mà trong đấy các siêu phẳng $\mathcal{L}$ có thể được thay thế bởi các tập đóng cho trước trong X. Trò chơi tổng quát này gọi là trò chơi $\mathcal{H}$-tuyệt đối[13] đã được giới thiệu bởi Fishman, Simmons, và Urbanski [9], phát triển và áp dụng trong [14].

Lưu ý 17. Điều kiện $\beta < 1/3$ là để dù cho An có chọn như thế nào đi nữa, Bình cũng luôn có lựa chọn hợp lệ cho bước đi tiếp theo. Ta có thể chơi trò chơi siêu phẳng tuyệt đối trên một tập con $X \subseteq \mathbb{R}^n$ với mọi lựa chọn của Bình đều có tâm nằm trong X nếu như điều kiện sau được thỏa mãn: Tồn tại $\gamma, r_0 > 0$ đủ nhỏ sao cho với mọi quả bóng $\mathbf{B}(\vec{x}, r)$ có tâm $\vec{x} \in X$ và bán kính $0 < r < r_0$ và với mọi siêu phẳng $\mathcal{L}$,

$$X \cap \left(\mathbf{B}(\vec{x}, r) \setminus \mathcal{L}^{(\gamma r)}\right) \neq \emptyset.$$

Điều kiện trên đảm bảo khi β đủ nhỏ, trò chơi β-siêu phẳng tuyệt đối trên X sẽ kéo dài vô hạn. Những tập X thỏa mãn điều kiện này sẽ được gọi là *γ-siêu phẳng phân tán*[14]. X sẽ được gọi là *siêu phẳng phân tán* nếu như tồn tại $\gamma > 0$ sao cho X là γ-siêu phẳng phân tán. Ví dụ: tập $\mathbb{R}^n$ là $\dfrac{1}{3}$-siêu phẳng phân tán, nhưng một đường thẳng trong không gian 3 chiều $\mathbb{R}^3$ không phải là một tập siêu phẳng phân tán.

Lưu ý 18. Nếu như $X \subseteq \mathbb{R}$ là một tập siêu phẳng phân tán, ta sẽ chơi trò chơi siêu phẳng tuyệt đối trên X bằng cách bắt Bình phải chọn các quả bóng có tâm nằm trong X. Khi đấy các tập thắng cuộc sẽ được gọi là *HAW trên X*.

Một số tính chất quan trọng của các tập thắng cuộc trong trò chơi siêu phẳng tuyệt đối như sau:

Định lý 19 ([1]). *Giả sử như $X \subseteq \mathbb{R}$ là một tập siêu phẳng phân tán.*

(i) Nếu $S \subseteq \mathbb{R}$ là một tập HAW thì $\dim_H(S) = n$.

(ii) Nếu S là một tập HAW trên X, và $Y \subseteq X$ là một tập siêu phẳng phân tán, thì S HAW trên Y.

(iii) Nếu $S_1, S_2, \ldots$ là các tập HAW trên X thì $\bigcap_{i=1}^{\infty} S_i$ cũng là một tập HAW trên X.

(iv) Giả sử như $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ là một vi phôi C^1, và S là một tập HAW, thì $f(S)$ cũng là một tập HAW.

[13] $\mathcal{H}$-absolute game
[14] γ-hyperplane diffuse

Ý tưởng chính của chứng minh phần (i) của Định lý 19 là xây dựng trong S một tập con giống như tập Cantor[15] như sau: ở mỗi bước, ta chia nhỏ 'quả bóng' $\mathbf{B}(\vec{x}_i, r_i)$ thành các quả bóng con có phần trong đôi một không giao nhau với bán kính βr_i và bỏ đi các quả bóng giao với (βr_i)-lân cận của siêu phẳng $\mathcal{L}_i$ trong chiến lược thắng cuộc của An. Tập giống Cantor nằm trong tập HAW S này cho chúng ta một chặn dưới của chiều Hausdorff của S, và chặn dưới này sẽ tiến về n khi β tiến về 0. Bạn đọc có thể xem thêm chứng minh đầy đủ ở [3, Định lý 2.2].

Bài tập 20. (a) Chứng minh rằng tập Cantor trên $\mathbb{R}$ là $\frac{1}{9}$-siêu phẳng phân tán.

(b) Có thể thay số $\frac{1}{9}$ bằng một số khác lớn hơn hay k0?

4. Véc tơ xấp xỉ kém

Áp dụng Định lý 19, ta dễ dàng có được Định lý 8 suy ra các Định lý 5 và 7. Để chứng minh Định lý 8, chúng ta sẽ dùng *Bổ đề Đơn hình*[16].

Bổ đề Đơn hình là mở rộng của quan sát sau trên $\mathbb{R}$: Cho $k > 1$, nếu như $\frac{p}{q}$ và $\frac{p'}{q'}$ là 2 số hữu tỉ khác nhau với mẫu số $k^i \le q, q' < k^{i+1}$, thì:

$$\left|\frac{p}{q} - \frac{p'}{q'}\right| = \left|\frac{pq' - p'q}{qq'}\right| \ge \frac{1}{qq'} > k^{-2i-2}.$$

Như vậy mọi đoạn thẳng trên $\mathbb{R}$ có bán kính $0 < r < \frac{1}{2}k^{-2i-2}$ có chứa nhiều nhất một số hữu tỉ $\frac{p}{q}$ với $k^i \le q, q' < k^{i+1}$.

Cho $(n+1)$ điểm $\vec{x}_0, \vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_n$, sao cho n véc tơ $(\vec{x}_1 - \vec{x}_0), (\vec{x}_2 - \vec{x}_0), ..., (\vec{x}_n - \vec{x}_0)$ độc lập tuyến tính. *Đơn hình với các đỉnh* $\{\vec{x}_0, \vec{x}_1, ..., \vec{x}_n\}$ được định nghĩa là:

$$\Delta(\vec{x}_0, ..., \vec{x}_n) := \{\vec{x}_0 + a_1(\vec{x}_1 - \vec{x}_0) + ... + a_n(\vec{x}_n - \vec{x}_0) : a_1, ..., a_n \ge 0, a_1 + ... + a_n \le 1\}.$$

Khi $n = 1$, $\Delta(x_0, x_1)$ là đoạn thẳng nối x_0 và x_1. Khi $n = 2$, $\Delta(\vec{x}_0, \vec{x}_1, \vec{x}_2)$ là hình tam giác với các đỉnh $\vec{x}_0, \vec{x}_1, \vec{x}_2$. Khi $n = 3$, $\Delta(\vec{x}_0, ..., \vec{x}_3)$ là tứ diện với các đỉnh $\vec{x}_0, ..., \vec{x}_3$.
Thể tích của đơn hình có thể được tính đơn giản như sau:

$$\lambda\big(\Delta(\vec{x}_0, ..., \vec{x}_n)\big) = \frac{1}{n!}\left|\det\big(\vec{x}_1 - \vec{x}_0, \vec{x}_2 - \vec{x}_0, ..., \vec{x}_n - \vec{x}_0\big)\right|.$$

Bổ đề 21 (Bổ đề Đơn hình [15, Bổ đề 4])**.** *Cho* $0 < \beta < \frac{1}{3}$*. Với mỗi* $k \in \mathbb{N}$*, gọi* U_k *là tập các véc tơ hữu tỉ có mẫu nằm giữa* $\beta^{\frac{-n}{n+1}(k-1)}$ *và* $\beta^{\frac{-n}{n+1}k}$*:*

$$U_k := \left\{\frac{\vec{p}}{q} : \vec{p} \in \mathbb{Z}^n, \beta^{\frac{-n}{n+1}(k-1)} \le q < \beta^{\frac{-n}{n+1}k}\right\}.$$

[15] Cantor-like set
[16] Simplex Lemma

Đặt V_n là thể tích của quả bóng đơn vị trong $\mathbb{R}^n$. Với mọi:

$$0 < r < \beta(n!V_n)^{-\frac{1}{n}}$$

và với mọi $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, tồn tại một siêu phẳng $\mathcal{L}_k$ sao cho:

$$U_k \cap \mathbf{B}\left(\vec{x}, \beta^{k-1}r\right) \subseteq \mathcal{L}_k.$$

Bài tập 22. Gọi $\frac{\vec{p}_0}{q_0}, \frac{\vec{p}_1}{q_1}, ..., \frac{\vec{p}_n}{q_n}$ là $(n+1)$ điểm hữu tỉ trong U_k sao cho n véc tơ $\left(\frac{\vec{p}_1}{q_1} - \frac{\vec{p}_0}{q_0}\right)$, $\left(\frac{\vec{p}_2}{q_2} - \frac{\vec{p}_0}{q_0}\right), ..., \left(\frac{\vec{p}_2}{q_2} - \frac{\vec{p}_0}{q_0}\right)$ độc lập tuyến tính. Tìm một cận dưới của $\lambda\left(\Delta\left(\frac{\vec{p}_0}{q_0}, \frac{\vec{p}_1}{q_1}, ..., \frac{\vec{p}_n}{q_n}\right)\right)$.

Bài tập 23. Chứng minh Bổ đề Đơn hình 21.

Chứng minh Định lý 8. . Cho $0 < \beta < \frac{1}{3}$ cố định bất kỳ. Xét trò chơi β-siêu phẳng tuyệt đối trên $\mathbb{R}$ với $\mathbf{BA}_n$ là tập đối tượng của An. Lưu ý rằng $\mathbf{BA}_n$ trù mật, nên nếu như bán kính của các lựa chọn của Bình không hội tụ về 0, An sẽ thắng. An có thể đi bất kỳ cho đến khi bán kính của quả bóng Bình chọn nhỏ hơn $\beta(n!V_n)^{-\frac{1}{n}}$. Vì thế ta có thể giả sử rằng $B_1 = \mathbf{B}(\vec{x}_1, r_1)$ với $r_1 < \beta(n!V_n)^{-\frac{1}{n}}$, và $\lim\limits_{i\to\infty} r_i = 0$.
Đặt $c = \beta^2 r_1$. Với mỗi $k \in \mathbb{N}$, gọi i_k là lượt đi mà:

$$\beta^{k-1}r_1 \geq r_{i_k} > \beta^k r_1.$$

Với mỗi lượt không nằm trong dãy $\{i_k\}_{k=1}^{\infty}$, An có thể đi bất kỳ. Ở bước đi thứ i_k, theo Bổ đề Đơn hình 21, tồn tại siêu phẳng $\mathcal{L}_k$ sao cho:

$$U_k \cap \mathbf{B}(\vec{x}_k, r_{i_k}) \subseteq \mathcal{L}_k.$$

Bước đi ở lượt thứ i_k của An sẽ là $\left(\beta^{k+1}r_1\right)$-lân cận của $\mathcal{L}_k$. Vì

$$B_{i_k+1} \subseteq B_{i_j} \setminus \mathcal{L}_k^{(\beta^{k+1}r_1)},$$

với mọi $\vec{y} \in B_{i_k+1}$ và với mọi $\frac{\vec{p}}{q} \in U_k$:

$$\left\|\vec{y} - \frac{\vec{p}}{q}\right\| \geq \beta^{k+1}r_1 = c\beta^{k-1} \geq \frac{c}{q^{1+\frac{1}{n}}}.$$

Vì:

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} U_k = \mathbb{Q}^n,$$

theo định nghĩa của $\mathbf{BA}_n$ (1.1),

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} \mathbf{B}(\vec{x}_i, r_i) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathbf{B}(\vec{x}_{i_k}, r_{i_k}) \in \mathbf{BA}_n\,.$$

Vì vậy, An có chiến lược để cho kết quả $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} \mathbf{B}(\vec{x}_i, r_i)$ luôn giao với $\mathbf{BA}_n$. □

Lưu ý 24. Một hệ quả thú vị của các kết quả trên là 2 tập rất nhỏ là tập Cantor $\mathcal{C}$ và tập các số xấp xỉ kém $\mathbf{BA}_1$ vẫn giao nhau, và phần giao cũng không nhỏ:

$$\dim_H(\mathbf{BA}_1 \cap \mathcal{C}) = \dim_H(\mathcal{C}) = \frac{\log 2}{\log 3}.$$

Không những thế, với mọi dãy số $a_1, a_2, ...$, các dịch chuyển của $\mathbf{BA}_1$ bởi a_i vẫn giao với tập Cantor:

$$\dim_H\left(\mathcal{C} \cap \bigcap_{i=1}^{\infty}(\mathbf{BA}_1 + a_i)\right) = \frac{\log 2}{\log 3}.$$

Kết quả này đã được chứng minh bởi Fishman [8] sử dụng trò chơi của Schmidt.

Tài liệu tham khảo

[1] R. Broderick, L. Fishman, D. Kleinbock, A. Reich, và B. Weiss, *The set of badly approximable vectors is strongly C^1-incompressible*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **153**, no. 2 (2012), pp. 211–253.

[2] R. Broderick, L. Fishman, và D. Simmons, *Badly approximable systems of affine forms and incompressibiblity on fractals*, J. Number Theory **133** (2013), pp. 2186–2205.

[3] R. Broderick và D. Kleinbock, *Dimension estimates for sets of uniformly badly approximable systems of linear forms*, preprint (2013), arXiv:1311.5474.

[4] J. W. S. Cassels, *Simultaneous Diophantine approximation II*, Proc. Lon. Math. Soc. **3** (1955), pp.435–448.

[5] H. Davenport, *Simultaneous Diophantine approximation*, Mathematika **1** (1954), pp. 51–72.

[6] K. J. Falconer, *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications* (1990), John Wiley & Sons.

[7] K. J. Falconer, *The geometry of fractal sets*, Cambridge Tracts in Math. **85** (1986), Cambridge Univ. Press.

[8] L. Fishman, *Schmidt's game on fractals*, Israel J. Math. **171** (2009), pp. 77–92.

[9] L. Fishman, D. Simmons, và M. Urbanski, *Diophantine approximation and the geometry of limit sets in Gromov hyperbolic metric spaces*, sắp được đăng tại Mem. Amer. Math. Soc., arXiv:1301.5630.

[10] D. Gale và F. M. Stewart, *Infinite games with perfect information*, in: Contribution to the theory of games, Vol. II, Annals of Math. Studies **28** (1953), pp. 245–266.

[11] V. Jarník, *Diophantische approximationen und hausdorffsches mass*, Recueil Math. Moscow **36** (1929), pp. 371–382.

[12] A. Y. Khintchine, *Einige Sätze über Kettenbrüche, mit Anwendungen auf die Theorie der Diophantischen Approximationen*, Math. Ann. **92** (1924), pp. 115–125.

[13] A. Y. Khintchine, *Zur metrischen Theorie der Diophantischen Approximationen*, Math. Zeitschrift **24** (1926), pp. 706–713.

[14] D. Kleinbock và T. Ly, *Badly approximable S-numbers and absolute Schmidt games*, J. Number Theory **164** (2016), pp. 13–42.

[15] S. Kristensen, R. Thorn, và S. Velani, *Diophantine approximation and badly approximable sets*, Advances in Math. **203** (2006), pp.132–169.

[16] Lý Ngọc Tuệ, *Xấp xỉ Diophantine trên $\mathbb{R}$ và Liên phân số*, Epsilon **4** (2015).

[17] Lý Ngọc Tuệ, *Xấp xỉ Diophantine trên $\mathbb{R}^n$ - Quy tắc Dirichlet và Hình học của số*, Epsilon **5** (2015).

[18] Lý Ngọc Tuệ, *Xấp xỉ Diophantine với độ đo - Định lý Khintchine*, Epsilon **6** (2015).

[19] Lý Ngọc Tuệ, *Trò chơi vô hạn với thông tin hoàn hảo*, Epsilon **7** (2016).

[20] C. McMullen, *Winning sets, quasiconformal maps and Diophantine approximation*, Geom. Funct. Anal. **20**, no. 3, (2010), pp. 726–740.

[21] W. M. Schmidt, *On badly approximable numbers and certain games*, Trans. Amer. Math. Soc. **123** (1966), pp. 178–199.

[22] W. M. Schmidt, *Badly approximable systems of linear forms*, J. Number Theory **1** (1969), pp. 139–154.

CƠ SỞ GRÖBNER LÀ GÌ?

Bernd Sturmfels - Đại Học California, Berkeley, Mỹ

Bài viết được Nguyễn Vũ Duy Linh dịch từ bài báo "*What is Groebner basis*" của giáo sư Bernd Sturmfels đăng trên tạp chí Notice of AMS, volume 52, number 10, 2005.

Một cơ sở Gröbner là một tập hợp các đa thức nhiều biến có các tính chất mong muốn về giải thuật. Mỗi tập hợp các đa thức có thể biến đổi thành một cơ sở Gröbner. Quá trình biến đổi này tổng quát hóa ba kỹ thuật quen thuộc: Phép khử Gauss để giải hệ phương trình tuyến tính, thuật toán Euclide để tính ước chung lớn nhất của hai đa thức một biến và thuật toán đơn hình trong qui hoạch tuyến tính (xem [3]) Chẳng hạn, đầu vào của phép khử Gauss là tập các dạng tuyến tính sau

$$\zeta = \{2x + 3y + 4z - 5,\ 3x + 4y + 5z - 2\},$$

Và thuật toán biến đổi ζ thành cơ sở Gröbner

$$\varrho = \{\underline{x} - z + 14,\ \underline{y} + 2z - 11\}.$$

Gọi K là một trường bất kỳ, chẳng hạn như trường số thực $K = \mathbb{R}$, trường số phức $K = \mathbb{C}$, trường số hữu tỉ $K = \mathbb{Q}$, hay là trường hữu hạn $K = \mathbb{F}_p$. Ta ký hiệu $K[x_1, \ldots, x_n]$ là vành các đa thức n biến x_i với hệ số trong trường K. Nếu F là một tập hợp bất kỳ các đa thức thì ideal sinh bởi ζ là tập hợp $\langle \zeta \rangle$ bao gồm mọi tổ hợp tuyến tính các đa thức của ζ

$$\langle \zeta \rangle = \{p_1 f_1 + \cdots + p_r f_r : f_1, \ldots, f_r \in \zeta \text{ và } p_1, \ldots, p_r \in K[x_1, \ldots, x_n]\}.$$

Trong ví dụ của chúng ta, tập ζ và cơ sở Gröbner ϱ của nó sinh ra cùng một ideal $\langle \varrho \rangle = \langle \zeta \rangle$. Theo định lý Hilbert về cơ sở, mỗi một ideal trong $K[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ có dạng $I = \langle \zeta \rangle$, nghĩa là nó được sinh ra bởi một tập hữu hạn ζ các đa thức.

Một *thứ tự đơn thức* trên $K[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ là một thứ tự toàn phần $\prec$ trên tập hợp tất cả các đơn thức $x^a = x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n}$ với hai tính chất sau

(1) Nó là nhân tính, nghĩa là $x^a \prec x^b$ kéo theo $x^{a+c} \prec x^{b+c}$ với mọi $a, b, c \in \mathbb{N}^n$.

(2) Đơn thức hằng là nhỏ nhất, có nghĩa là $1 \prec x^a$ với mọi $a \in \mathbb{N}^n\{0\}$.

Một ví dụ của thứ tự đơn thức (với $n = 2$) là *thứ tự từ điển phân bậc*

$$1 \prec x_1 \prec x_2 \prec x_1^2 \prec x_1x_2 \prec x_2^2 \prec x_3^2 \prec x_1^2x_2 \prec \cdots$$

Nếu chúng ta cố định thứ tự đơn thức $\prec$, khi đó mỗi đa thức có duy nhất một số hạng khởi đầu trong $\prec(f) = x^a$. Đó là đơn thức $\prec -$ cực đại x^a xuất hiện trong khai triển của f với hệ số khác không. Chúng ta viết các số hạng của f theo thứ tự $\prec -$ giảm dần, và thông thường chúng ta gạch dưới số hạng khởi đầu. Chẳng hạn, một đa thức bậc hai có thể được viết như sau:

$$f = \underline{3x_2^2} + 5x_1x_2 + 7x_1^2 + 11x_1 + 13x_2 + 17.$$

Giả sử I là một ideal của $K[x_1, \dots, x_n]$. Khi đó ideal khởi đầu của nó trong $\prec (I)$ là ideal sinh ra bởi số hạng khởi đầu của tất cả đa thức trong I :

$$\text{in} \prec (I) = \langle \text{in} \prec (f) : f \in I \rangle.$$

Một tập con hữu hạn ϱ của I là một cơ sở Gröbner tương ứng với thứ tự theo số hạng $\prec$ nếu như các số hạng khởi đầu của các phần tử trong ϱ đủ để sinh ra ideal khởi đầu:

$$\text{in} \prec (I) = \langle \text{in} \prec (g) : g \in \varrho \rangle.$$

Không có yêu cầu về tính tối tiểu để trở thành một cơ sở Gröbner. Nếu ϱ là một cơ sở Gröbner của I thì một tập con hữu hạn bất kỳ của I chứa ϱ cũng là một cơ sở Gröbner. Để khắc phục tính phi tối tiểu đó, chúng ta gọi ϱ là một cơ sở Gröbner rút gọn nếu:

(1) Với mỗi $g \in \varrho$ hệ số của $\text{in} \prec (g)$ trong g là 1.

(2) Tập hợp $\{\text{in} \prec (g) : g \in \varrho\}$ là tập nhỏ nhất sinh ra $\text{in} \prec (I)$, và

(3) không có số hạng theo sau với mọi $g \in \varrho$ nằm trong $\text{in} \prec (I)$.

Với định nghĩa này, ta có định lý sau đây: *Nếu như cố định thứ tự đơn thức $\prec$ thì mỗi ideal I trong $K[x_1, \dots, x_n]$ có một cơ sở Gröbner rút gọn duy nhất.*

Cơ sở Gröbner rút gọn ϱ có thể được tính từ mọi tập sinh của I theo phương pháp được giới thiệu trong luận án của Bruno Buchberger năm 1965. Buchberger gọi phương pháp của mình theo tên của người hướng dẫn Wolfgang Gröbner. Sau đó người ta nhận ra rằng, ý tưởng về cơ sở Gröbner đã có trước đó chẳng hạn trong một bài viết của Paul Gordan, một nhà nghiên cứu về bất biến. Tuy nhiên Buchberger là người đầu tiên đề ra một giải thuật để tính cơ sở Gröbner.

Cơ sở Gröbner rất tiện dụng để giải hệ phương trình đa thức. Giả sử $K \subseteq \mathbb{C}$, và ζ là một tập hữu hạn các đa thức trong $K[x_1, \dots, x_n]$. Đa tập của ζ là tập tất cả các không điểm phức chung

$$\nu(\zeta) = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n : f(z_1, \dots, z_n) = 0 \text{ với mọi } f \in \zeta\}.$$

Đa tạp không thay đổi nếu ta thay ζ bởi một tập các đa thức sinh ra cùng một ideal trong $K[x_1, \dots, x_n]$. Nói riêng, cơ sở Gröbner giới hạn ϱ của ideal $\langle \zeta \rangle$ có cùng một đa tạp:

$$\nu(\zeta) = \nu(\langle \zeta \rangle) = \nu(\langle \varrho \rangle) = \nu(\varrho).$$

Ưu điểm của ϱ là nó cho biết những đặc tính hình học của đa tạp, những đặc tính này không hiển lộ từ ζ. Câu hỏi đầu tiên được đặt ra là liệu đa tạp $\nu(\zeta)$ có thể rỗng hay không. *Định lý không điểm Hilbert* ngụ ý rằng đa tạp $\nu(\zeta)$ rỗng khi và chỉ khi ϱ bằng $\{1\}$.

Làm thế nào để đếm số không điểm của một hệ thống các phương trình đã cho? Để trả lời cho câu hỏi này, chúng ta cần thêm một định nghĩa. Cho một ideal cố định I trong $K[x_1, \dots, x_n]$ và một thứ tự đơn thức $\prec$, một đơn thức $x^a = x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n}$ được gọi là *chuẩn* nếu như nó trong ở trong ideal khởi đầu $\text{in} \prec (I)$. Số lượng các đơn thức chuẩn là hữu hạn nếu và chỉ nếu mỗi biến x_i xuất hiện trong một lũy thừa nào đó của ideal khởi đầu. Chẳng hạn, nếu $\text{in} \prec (I) = \langle x_1^3, x_2^4, x_3^5 \rangle$ thì sẽ có sáu mươi đơn thức chuẩn, nhưng trong $\text{in} \prec (I) = \langle x_1^3, x_2^4, x_1 x_3^4 \rangle$ tập hợp các đơn thức chuẩn là vô hạn.

Đa tạp $\nu(I)$ là hữu hạn nếu và chỉ nếu tập hợp các đơn thức chuẩn là hữu hạn và số lượng các đơn thức chuẩn bằng với lực lượng của $\nu(I)$ trong đó các không điểm bội cấp k sẽ được đếm k lần.

Khi $n = 1$ đây chính là *Định lý cơ bản của Đại số*, định lý này phát biểu rằng đa tạp $\nu(f)$ của đa thức một biến $f \in K[x]$ với bậc d bao gồm d số phức. Ở đây tập hợp có phần tử duy nhất $\{f\}$ là cơ sở Gröbner, và các đơn thức chuẩn là $1, x, x^2, \ldots, x^{d-1}$.

Tiêu chuẩn của chúng ta trong việc quyết định liệu một đa tạp có hữu hạn hay không tổng quát hóa công thức sau cho số chiều của một đa tạp. Xét một tập con S của tập các biến $\{x_1, \ldots, x_n\}$ thế nào cho không có đơn thức nào trong S xuất hiện trong in $\prec(I)$, và giả sử rằng S có lực lượng lớn nhất trong số các tập con có cùng tính chất. Khi đó lực lượng tối đại $|S|$ bằng với số chiều của $\nu(I)$.

Tập hợp các đơn thức chuẩn là một cơ sở trong không gian vector trên trường số K cho vành các *thặng dư* $K[x_1, \ldots, x_n]/I$. Ảnh của một đa thức p modulo I có thể được biểu diễn một cách duy nhất như là một $K-$ tổ hợp tuyến tính của các đơn thức chuẩn. Biểu thức này là *dạng chuẩn* của p. Quá trình tính dạng chuẩn là thuật toán chia. Trong trường hợp quen thuộc với một biến x, khi mà $I = \langle f \rangle$ và f có bậc d, thuật toán chia biểu diễn một đa thức tùy ý $p \in K[x]$ dưới dạng một $K-$ tổ hợp tuyến tính của $1, x, x^2, \ldots, x^{d-1}$. Tuy nhiên thuật toán chia áp dụng được cho một cơ sở Gröbner tùy ý ϱ với số lượng biến tùy ý.

Làm thế nào chúng ta có thể thử nghiệm liệu một tập các đa thức cho trước là một cơ sở Gröbner hay không? Xét hai đa thức tùy ý g và g' trong ϱ. Thành lập $S-$ đa thức $m'g - mg'$. Ở đây m và m' là hai đa thức bậc nhỏ nhất có thể thế nào cho $m' \cdot \text{in}\prec(g) = m \cdot \text{in}\prec(g')$. $S-$ đa thức $m'g - mg'$ nằm trong ideal $\langle \varrho \rangle$. Chúng ta áp dụng thuật toán chia đối với cơ sở Gröbner tạm thời ϱ cho $m'g - mg'$. Dạng chuẩn thu nhận được là một $K-$ tổ hợp tuyến tính của các đơn thức trong đó không có đơn thức nào chia hết cho một đơn thức khởi đầu từ ϱ. Điều kiện cần để ϱ là một cơ sở Gröbner là

$$\text{normalform}_{\varrho}(m'g - mg') = 0 \text{ với mọi } g, g' \in \varrho.$$

Tiêu chuẩn Buchberger phát biểu rằng điều kiện cần đó cũng chính là điều kiên đủ: Một tập hợp ϱ các đa thức là một cơ sở Gröbner nếu và chỉ nếu mọi $S-$ đa thức của nó có dạng chuẩn zero. Từ tiêu chuẩn này, người ta đề ra thuật toán Buchberger [1] để tính cơ sở Gröbner rút gọn ϱ từ một tập hợp đầu ra bất kỳ.

Tóm lại, các cơ sở Gröbner và thuật toán Buchberger để tìm chúng là những khái niệm căn bản của đại số. Chúng cung cấp những cách tính toán tiên tiến trong hình học đại số, chẳng hạn như lý thuyết khử, tính đối đồng điều, giải quyết tính kỳ dị, ... Cũng như các mô hình đa thức có mặt khắp nơi từ khoa học đến kỹ thuật, các cơ sở Gröbner được các nhà nghiên cứu sử dụng trong tối ưu hóa, lập trình, robotics, lý thuyết điều khiển, thống kê, sinh học phân tử và nhiều ngành khác. Chúng tôi mời bạn đọc thử dùng qua một trong các cài đặt của thuật toán Buchberger (chẳng hạn như CoCoA, Macaulay2, Magma, Maple, Mathematica, hay Singular).

Tài liệu tham khảo

[1] DAVID COX, JOHN LITTLE, and DONAL O' SHEA, *Ideals, Varieties and Algorithms. An Introduction to Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra*, second ed. Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1997.

[2] NIELS LAURITZEN, *Concrete Abstract Algebra: From Numbers to Gröbner Bases*, Cambridge University Press, 2003.

[3] BERND STURMFELS, *Two Lectures on Gröbner Bases*, New Horizons in Undergraduate Mathematics, VMath Lecture Series, Mathematical Sciences Research Institute, Berkeley, California, 2005, http://www.msri.org/communications/vmath/special_productions/.

TẬP TRÁNH TỔNG TRONG NHÓM

Terence Tao - UCLA, California, Mỹ

Trong số này, Epsilon trân trọng giới thiệu với độc giả một bài viết của nhà toán học Terence Tao, qua bản dịch của Trần Nam Dũng.

Tôi và Vũ Hà Văn vừa đăng lên arXiv bài báo "tập tránh tổng trong nhóm" [1] (gửi đăng đến tạp chí Discrete Analysis), cùng với bài báo tổng quan đính kèm [2] (gửi đăng đến J. Comb.). Cho tập con A của nhóm cộng tính $G = (G, +)$, ta định nghĩa $\phi(A)$ là lực lượng (số phần tử) của tập con B lớn nhất của A tránh tổng trong A theo nghĩa mọi tổng $b_1 + b_2$ với b_1, b_2 là các phần tử phân biệt của B nằm ngoài A. Ví dụ, nếu A là chính nhóm đó thì $\phi(A) = 1$, vì không có hai phần tử nào của A lại có thể có tổng là một cái gì đó nằm ngoài A. Một cách tổng quát, nếu A là hợp của k nhóm, thì $\phi(A)$ tối đa là bằng A theo nguyên lý chuồng và thỏ.

Nếu G là tập hợp các số nguyên, thì ta không có nhóm con thực sự nào, và ta có thể dự đoán rằng $\phi(A)$ sẽ tăng cùng với A. Ví dụ ta có kết quả đơn giản sau:

Mệnh đề 1. Nếu A là tập hợp gồm 2^k số tự nhiên thì $\phi(A) > k$.

Chứng minh: Ta sử dụng lý luận của Ruzsa [3] vốn được dựa trên một lý luận cũ của Choi [4]. Gọi x_1 là phần tử lớn nhất của A, và sau đó một cách đệ quy, khi $x_1, x_2, \ldots, x_i$ đã được chọn, gọi x_{i+1} là phần tử lớn nhất trong A không bằng $x_1, x_2, \ldots, x_i$ sao cho $x_{i+1} + x_j \notin A$ với mọi $j = 1, \ldots, i$, và kết thúc quá trình xây dựng này khi không tìm được một x_{i+1} như vậy. Quá trình này sẽ cho chúng ta dãy $x_1 > x_2 > \cdots > x_m$ các phần tử trong A, tránh tổng trong A và có tính chất với mọi $y \in A$, hoặc y bằng với một trong các x_i, hoặc $y + x_i \in A$ với i nào đó với $x_i > y$. Lặp lại quá trình này, ta thấy mọi $y \in A$ đều có dạng $x_{i_1} - x_{i_2} - \cdots - x_{i_j}$ với $j \geq 1$ nào đó và $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \cdots < i_j \leq m$. Số các biểu thức $x_{i_1} - x_{i_2} - \cdots - x_{i_j}$ tối đa là $2^m - 1$, do đó $2^k \leq 2^m - 1$, từ đó $m \geq k + 1$. Vì $\phi(A) \geq m$ nên ta suy ra điều phải chứng minh.

Đặc biệt ta có $\phi(A) >> log|A|$ đối với các tập con A của tập hợp các số nguyên. Ta có thể cải thiện cận dưới đơn giản này, nhưng sẽ rất tốt công sức. Cận dưới tốt nhất cho đến thời điểm hiện nay là

$$\phi(A) \geq log|A|(loglog|A|)^{1/2-o(1)}$$

một kết quả của Shao [5] (xây dựng dựa trên công trình trước đó của Sudakov, Szemeredi và Vu [6] và của Dousse [4]). Trong chiều ngược lại Ruzsa [3] đã xây dựng ví dụ một tập hợp A lớn với $\phi(A) \leq exp(O(\sqrt{log|A|}))$.

Sử dụng công cụ chuẩn của đồng cấu Freiman, các kết quả trên đấy cho số nguyên có thể mở rộng cho các nhóm abel không xoắn G. Trong bài báo của mình chúng tôi nghiên cứu trường hợp ngược lại khi G là nhóm hữu hạn (nhưng vẫn abel). Trong bài báo này của Erdos [7] (mà trong đó đại lượng $\phi(A)$ lần đầu tiên được giới thiệu), câu hỏi sau đây được đặt ra: nếu A là đủ lớn so với $\phi(A)$ thì có suy ra tồn tại hai phần tử x, y thuộc A sao cho $x + y = 0$ hay không? Chúng tôi đã tìm được những phản ví dụ đơn giản cho mệnh đề này. Ví dụ, nếu H là một nhóm hữu hạn cộng tính tùy ý, khi đó tập hợp: $A := [1 \mod 7, 2 \mod 7, 4 \mod 7] \times H \subset (Z/7Z) \times H$ có $\phi(A) = 3$ nhưng không có hai phần tử $x, y \in A$ nào có tổng bằng 0; dạng ví dụ này vẫn đúng nếu thay 7 bằng một số nguyên tố Mersenne lớn hơn, và ta có phản ví dụ trong $Z/2^n Z$ với n lớn tùy ý. Tuy nhiên, theo hướng khẳng định, ta có thể chứng minh rằng câu trả lời cho câu hỏi của Erdös là khẳng định nếu $|G|$ không có ước nguyên tố nhỏ. Rõ hơn là

Mệnh đề 2. Với mọi $k \geq 1$ tồn tại $C \geq 1$ sao cho nếu G là nhóm abel hữu hạn có bậc không có ước nguyên tố nhỏ hơn hay bằng C và A là một tập con của G có bậc ít lần là C và $\phi(A) \leq k$ thì tồn tại $x, y \in A$ sao cho $x + y = 0$.

Có hai công cụ chính sử dụng để chứng minh kết quả này. Một là "bổ đề loại bỏ số học" được chứng minh mởi Kral, Serra và Vena [8]. Chú ý rằng điều kiện $\phi(A) \leq k$ có nghĩa là với mọi các phần tử phân biệt $x_1, \dots, x_{k+1} \in A$, tồn tại một trong các phần tử $x_i + x_j, 1 \leq i < j \leq k + 1$, cũng nằm trong A. Một cách nôm na, bổ đề loại bỏ số học cho phép ta "gần như" có thể bỏ đi yêu cầu $x_1, \dots, x_{k+1}$ phân biệt, và điều này có nghĩa là từ $x \in A$ gần như có thể suy ra $2x \in A$. Phép đối xứng gần-vị tự này khi kết hợp với giả thiết rằng $|G|$ không có ước nguyên tố nhỏ sẽ cho rất nhiều sự "phân tán" trong hệ số Fourier của 1_A mà có thể được khai thác để chứng minh định lý.

Công cụ thứ hai là định lý cấu trúc dưới đây, là kết quả chính của bài báo của chúng tôi, và đi đường theo hướng phân loại các tập con A với $\phi(A)$ nhỏ:

Mệnh đề 3. Cho A là tập con hữu hạn của một nhóm cộng tính G bất kỳ với $\phi(A) \leq k$. Khi đó tìm được các nhóm con hữu hạn $H_1, H_2, \dots, H_m$ với $m \leq k$ sao cho $|A \cap H_i| >>_k |H_i$ và $|A \setminus (H_1 \cup \dots \cup H_m)| <<_k 1$. Hơn nữa, nếu $m = k$ thì tập ngoại lệ $A \setminus (H_1 \cup \dots \cup H_m)$ bằng rỗng.

Một cách nôm na, định lý này chỉ ra rằng ví dụ về hợp của k nhóm con nói trước đó dường như là ví dụ "duy nhất" của các tập hợp A với $\phi(A) \leq k$ theo mô-đu-lô bổ sung vài tập con ngoại lệ nhỏ và vài sự làm tốt của các nhóm con cho các tập con dày.

Định lý này có màu sắc của các định lý đảo khác trong tổ hợp cộng tính như định lý Freiman và quả thật là ta có thể sử dụng định lý Freiman (và các công cụ liên quan như định lý Balog-Szemeredi) để thu được một cách dễ dàng phương án yếu của định lý này. Thật vậy, nếu không có tập tránh tổng của A bậc $k + 1$ thì tỷ lệ $>>_k 1$ của tất cả các cặp a, b trong A phải có tổng cũng nằm trong A (ngược lại ta có thể lấy $k + 1$ phần tử ngẫu nhiên của A và chúng sẽ tránh tổng trong A với xác suất dương). Từ điều này và định lý Balog-Szemeredi và định lý Freiman (trong mọi nhóm abel, được chứng minh bởi Green và Ruzsa [10]), ta thấy rằng A phải "cân xứng" với "đối tập cấp số" ("coset progression") $H + P$ của rank chặn trên. Sau đó ta có thể khử thành phần không xoắn P của đối tập cấp số này bằng một số phương pháp (ví dụ sử dụng các phương án của lý luận trong mệnh đề 1), với kết quả cuối cùng mà người ta có thể xác định vị trí nhóm H1 hữu hạn có phần giao lớn với A.

Từ điểm này sẽ hấp dẫn nếu loại bỏ H_1 khỏi A và lặp lại. Nhưng ta sẽ gặp một khó khăn kỹ thuật là loại bỏ một tập hợp như H_1 khỏi A có thể làm thay đổi đại lượng $\phi(A)$ theo một cách không thể dự đoán được, vì thế ta vẫn cần phải giữ H_1 lại khi phân tích tập thặng dư $A \setminus H_1$. Khó khăn thứ hai là tập hợp $A \setminus H_1$ có thể là nhỏ hơn đáng kể so với A và H_1 nhưng vẫn còn lớn theo nghĩa tuyệt đối, do đó nói riêng thì mọi số hạng sai số có kích thước chặn trên bởi $\epsilon|A|$ với ϵ nhỏ có thể vẫn lớn so với tập thặng dư $A \setminus H_1$, và do đó số hạng sai số đó là không chấp nhận được. Ta có thể vượt qua được những khó khăn này nếu trước tiên ta thực hiện bước tiền "chuẩn hóa" của nhóm H_1, để cho tập thặng dư không giao với mọi đối tập của H_1 quá nhiều. Các lý luận còn trở nên phức tạp hơn khi ta bắt đầu loại bỏ nhiều hơn một trong các nhóm $H_1, \ldots, H_i$ từ A và phân tích tập thặng dư $A \setminus (H_1 \cup \cdots \cup H_m)$; thật vậy quá trình "quản lý epsilon" liên quan sẽ trở nên phức tạp đến nỗi mà chúng ta buộc phải sử dụng cách phát biểu phân tích không tiêu chuẩn của bài toán để giữ độ phức tạp của các lý luận ở mức chấp nhận được (xem bài viết blog trước của tôi về chủ đề này [11]). Một nhược điểm của cách làm như vậy là chúng ta không có giới hạn hiệu quả cho các hằng số trong định lý chính của chúng tôi; sẽ thú vị để có được một nó sẽ được một chứng minh trực tiếp hơn cho định lý của chúng tôi mà có thể sẽ dẫn đến giới hạn hiệu quả.

Tài liệu tham khảo

[1] http://arxiv.org/abs/1603.03068

[2] http://arxiv.org/abs/1603.03071

[3] Imre Z. Ruzsa, Sum-Avoiding Subsets, The Ramanujan Journal, March 2005, Volume 9, Issue 1, pp 77-82.

[4] Choi, S. L. G. On a combinatorial problem in number theory. Proc. London Math. Soc. (3) 23 (1971), 629–642.

[5] Shao, Xuancheng Finding linear patterns of complexity one. Int. Math. Res. Not. IMRN 2015, no. 9, 2311–2327.

[6] Sudakov, B.; Szemerédi, E.; Vu, V. H. On a question of Erdős and Moser. Duke Math. J. 129 (2005), no. 1, 129–155.

[7] Erdős, P. Extremal problems in number theory. 1965 Proc. Sympos. Pure Math., Vol. VIII pp. 181–189 Amer. Math. Soc., Providence, R.I.

[8] Král̆, Daniel; Serra, Oriol; Vena, Lluís On the removal lemma for linear systems over abelian groups. European J. Combin. 34 (2013), no. 2, 248–259.

[9] Freiman theorem

[10] Green, Ben; Ruzsa, Imre Z. Freiman's theorem in an arbitrary abelian group. J. Lond. Math. Soc. (2) 75 (2007), no. 1, 163–175.

[11] https://terrytao.wordpress.com/2007/06/25/ultrafilters-nonstandard-analysis-and-epsilon-management/

TOÁN HỌC CỦA HÔN NHÂN

Matt Baker – Viện công nghệ Georgia, Mỹ

Nguyễn Vũ Anh dịch từ blog của Matt Baker – Trần Nam Dũng hiệu đính.

Thân tặng Võ Quốc Bá Cẩn, biên tập viên đầu tiên của Epsilon nhân ngày cưới của anh và chị Nguyễn Thị Kim Anh vào ngày 27 / 3 / 2016.

Ngày 25 tháng 6 năm 2014

Cũng khá lâu kể từ bài blog gần nhất của tôi – một trong những lý do đó là gần đây tôi đã kết hôn. Để kỷ niệm cho sự kiện này, cũng như đánh dấu sự trở lại của tôi trên blog toán học tôi sẽ đăng bài về định lý Hall về hôn nhân.

Hãy xét trò chơi solitaire (game xếp bài của Windows): Bạn có một bộ bài được chia làm 13 cọc, mỗi cọc 4 lá, và bạn phải chọn 1 lá từ mỗi cọc sao cho không có giá trị nào (từ A đến K) lặp lại. Đây là một sự kiện toán học vô cùng đẹp đẽ là trò chơi luôn có thể hoàn thành, bất chấp các quân bài được chia ra sao.

Chúng ta sẽ suy luận điều này từ một kết quả tổng quát hơn của Philip Hall, thường được gọi là định lý Hall về hôn nhân. Cho hữu hạn tập hợp $A_1, A_2, \ldots, A_n$ và bạn phải tìm các phần tử riêng biệt $x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \ldots, x_n \in A_n$. (Trong ví dụ trò solitaire, cho A_j chứa các giá trị của các lá bài nằm trong cọc thứ j.) Sự lựa chọn này được gọi là SDR (system of distict representatives-hệ đại diện riêng biệt). Dưới điều kiện nào thì điều này khả thi? Để hệ đại diện riêng biệt này tồn tại thì điều kiện cần thiết là với mọi tập con $J \in (1, 2, \ldots, n)$, tập hợp $A_J = U_{j \in J} A_j$ chứa ít nhất $|J|$ phần tử. Định lý của Hall khẳng định rằng những điều kiện trên cũng chính là điều kiện đủ.

Trong ví dụ về trò bói bài, ta chọn k cọc bất kì, chứa $4k$ lá bài. Bởi vì chỉ có 4 lá bài mỗi cọc với mọi giá trị, khi chúng ta kết hợp những cọc bài chúng ta chọn, sẽ có ít nhất k giá trị khác nhau. Do đó, những điều kiện của định lý Hall đều thỏa và định lý hôn nhân sẽ khẳng định rằng chúng ta có một cách đi thắng.

Một ví dụ khác, xét bài toán sau có lời giải đơn giản hơn định lý Hall về hôn hân:

[Kì thi Putnam, bài toán B-3] Một giải đấu vòng tròn $2n$ đội kéo dài $2n - 1$ ngày. Mỗi ngày, tất cả các đội đấu với một đội khác, trong đó có 1 đội thắng và 1 đội thua trong mỗi n trận. Xuyên suốt giải đấu, 2 đội bất kì gặp nhau đúng 1 lần. Liệu có luôn chọn được mỗi ngày một đội thắng mà không có đội nào được chọn nhiều hơn 1 lần?

Kết quả của Hall được biết tới là định lý hôn nhân vì nó có thể phát biểu lại theo cách sau. Giả sử mỗi một tập hợp hữu hạn chàng trai quen với một tập hợp hữu hạn các cô gái. Điều kiện là gì để mỗi chàng trai đều kết hôn với một trong những người họ quen biết? Điều kiện cần và đủ là mỗi tập hợp k chàng trai, được chọn một cách ngẫu nhiên, quen với ít nhất k cô gái. Rất dễ dàng nhận thấy sự tương đương của hai cách phát biểu (cho A_j là tập hợp các cô gái mà chàng trai thứ j quen).

Cách chứng minh đơn giản nhất cho định lý của Hall mà tôi biết xuất hiện đầu tiên trong bài báo 2 trang của Halmos và Vaughan, được thực hiện phép quy nạp theo số chàng trai n. Ta trích dẫn trực tiếp chứng minh của Halmos và Vaughan:

"*Với $n = 1$, kết quả là hiển nhiên. Với $n > 1$, nếu với mọi tập hợp k bạn nam $1 \leqslant k \leqslant n$, có ít nhất $k + 1$ người quen, 1 bạn nam sẽ cưới một trong những người quen bất kì của anh ta và đưa những người còn lại vào giả thuyết quy nạp. Nếu ngược lại, một số nhóm k chàng trai, $1 \leqslant k \leqslant n$, có chính xác k người quen, thì tập hợp này sẽ có thể kết hôn theo giả thiết quy nạp, $n - k$ chàng trai còn lại cũng thỏa mãn điều kiện cần với những cô gái chưa kết hôn. Thật vậy, nếu $1 \leqslant h \leqslant n - k$, và nếu một số tập hợp h chàng trai chưa có vợ ít hơn h cô gái chưa có chồng, thì tập hợp h chàng trai chưa có vợ cùng với k chàng trai đã kết hôn sẽ quen ít hơn $k + h$ cô gái. Áp dụng giả thiết quy nạp vào $n - k$ chàng trai chưa có vợ, ta thu được kết luận định lý đúng với $n + 1$ chàng trai.*"

Có một chứng minh đẹp cho định lý của Hall, được đề ra bởi Jack Edmonds, dựa trên đại số tuyến tính. Đây là một ví dụ sử dụng kỹ thuật đại số để giải quyết các vấn đề tổ hợp. Trước khi xem xét chứng minh của Edmonds, chúng ta cần 2 định nghĩa:

Định nghĩa 1. *Cho B là một ma trận $m \times n$ với các số hạng trong trường F đặc số 0. Chúng ta gọi B là* **generic** *nếu các số hạng khác 0 của nó độc lập đại số (chúng không thỏa mãn một đa thức không đồng nhất 0, với hệ số trong Q).*

Định nghĩa 2. *Cho B là một ma trận $m \times n$ có hạng $r < n$. Ta nói B là dạng Edmonds bình thường (Edmonds Normal Form, hay ENF) nếu B có thể viết dưới dạng một ma trận có ma trận B_1 là ma trận $r \times (r + 1)$ ở phía trên bên trái mà:*

(a) *$r + 1$ cột đầu tiên của B tạo thành một tập hợp phụ thuộc tuyến tính nhỏ nhất.*

(b) *Mỗi dòng của ma trận B_2 phía dưới bên trái là một tổ hợp tuyến tính các dòng của B_1.*

$$B = \left[\begin{array}{c|c} B_1 & B_3 \\ \hline B_2 & B_4 \end{array}\right]$$

Dễ nhận thấy, mọi ma trận B bậc $m \times n$ có hạng $r < n$ có thể chuyển về dạng ENF bằng cách hoán vị các cột và dòng. Thật vậy, nhờ vào việc hoán vị các cột, chúng ta có thể giả sử $r + 1$ cột đầu tiên tạo thành một tập hợp phụ thuộc tuyến tính nhỏ nhất. Ma trận hoán vị B' xác định bởi $r + 1$ cột đầu tiên có hạng r, nên nhờ vào hoán vị các dòng chúng ta có thể giả sử r dòng đầu tiên tạo thành một cơ sở cho không gian dòng của B'. Ma trận kết quả là một ENF.

Bây giờ chúng ta cùng xem phép chứng minh của Edmonds cho định lý của Hall:

Chứng minh. Cho n là số lượng chàng trai và m là số lượng cô gái. Cho ma trận generic $m \times n$ với $B_{ij} \neq 0$, nếu cô gái thứ j quen chàng trai thứ j. Sử dụng công thức chuẩn cho định thức của ma trận bằng tổng các hoán vị, cùng với **generic** của B, ta thấy rằng sẽ tồn tại một cách tổ chức cưới hạnh phúc khi và chỉ khi định thức của một ma trận nhỏ $n \times n$ nào đó của B khác 0, và điều này xảy ra khi và chỉ khi B có hạng $\geqslant n$. Không mất tính tổng quát, chúng ta có thể giả sử (bằng cách hoán vị các cột và dòng nếu cần) rằng B là một ENF. Vì các cột của B_1 phụ thuộc tuyến tính, tồn tại một véc-tơ v khác 0 trong nhân của B. Bằng phép khử Gauss, chúng ta có thể giả sử tọa độ của v là những đa thức có số hạng khác 0 của B_1. Nhờ vào tính chất (a) của ENF, không một số hạng nào của v bằng 0. Và dựa vào tính chất (b), mỗi dòng của B_2 đều trực giao với v. Vì B_2 là **geniric**, nên $B_2 = 0$. Nhưng như vậy thì tập hợp các chàng trai tương ứng với $r + 1$ cột đầu tiên chỉ quen với các cô gái tương ứng với r dòng đầu tiên, mâu thuẫn. □

Các chứng minh bằng đại số tuyến tính xem ra là quá mức cần thiết so với phương pháp tổ hợp đơn giản. Nhưng nó lại có vài tính năng khá hấp dẫn: Ví dụ, việc làm sáng tỏ một cách rõ ràng dẫn tới một thuật toán xác suất hiệu quả để kiểm tra liệu có một hệ đại diện riêng biệt (SDR). (Sẽ thuận tiện nếu xem các số hạng của B là các ẩn số). Chứng minh trên đưa bài toán về việc xét xem một đa thức có khác 0 hay không. Về mặt tính toán là không khả thi để tính các định thức con của B như các đa thức, nhưng nếu chúng ta thay thế các giá trị cụ thể vào các ẩn số, chúng ta có thể xác định một cách hiệu quả các giá trị tương ứng có khác 0 theo một mô-đun nguyên tố đủ lớn hay không. Nếu dùng thuật toán nhân nhanh ma trận để tính định thức thì ta sẽ có thuật toán tiệm cận nhanh nhất để xác định bài toán hôn nhân có nghiệm hay không (trong thực tế, có những thuật toán tất định chạy nhanh hơn, và còn tìm ra các cặp ghép).

Cuối cùng, chúng tôi muốn đề cập đến định lý Hall có thể mở rộng cho các trường hợp có vô số chàng trai (nhưng số cô gái quen từng chàng trai vẫn là hữu hạn). Sự tổng quát này do Everett và Whaples đề xuất. Một lần nữa ta có cách nào tốt hơn là trích dẫn "*Chứng minh từ Sách*" (Proof from the Book) của Halmos và Vaughn, sử dụng cấu trúc điểm - tập hợp topo để giảm bớt trường hợp hữu hạn: Nếu tập hợp B các chàng trai là vô hạn, xét mỗi $b \in B$ và tập $G(b)$ là những người b quen, topo hóa các tập topo rời rạc, $G(b)$ là không gian compact Hausdorff. Viết G theo dạng tích Đề-các topo cho mọi G, theo định lý Tikhonov, G là compact. Nếu $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ là một tập hữu hạn chàng trai bất kì, xét tập hợp H chứa các phần chứa tất cả các phần tử $g = g(b)$ của g sao cho $g_i \neq g_j$ với $b_i \neq b_j$, $j = 1, , 2, \ldots, n$. H là tập con đóng của G, và dựa vào kết quả trong trường hợp hữu hạn, H khác rỗng. Vì hợp hữu hạn các tập hợp hữu hạn nên lớp của tất cả tập hợp như H có tính chất giao hữu hạn, và do đó có giao khác rỗng. Vì phần tử $g = g(b)$ trong phần giao này thỏa mãn tính chất $g(b) \neq g(b^{'})$ với mọi $b \neq b^{'}$, phép chứng minh hoàn tất.

Ghi chú

1. Bài báo công bố năm 1950 của Halmos và Vaughan, có tên là "*The Marriage Problem*", được đăng lại trong cuốn sách "*Classic Papers in Combinatorics*" (biên soạn bởi by Gessel and Rota), cùng với bài báo ban đầu của Hall. Bài báo của Edmonds năm 1967 có tên là "*Systems of Distinct Representatives and Linear Algebra*". Đoạn chứng minh của Edmonds mà tôi nói đến ở trên được lấy từ bài báo này [1]. Các bình luận trên đây về định thức và khía cạnh thuật toán của bài toán hôn nhân được trích từ buồn sách "*Thirty - three miniatures*" của Jiri Matousek. Cuốn sách này chứa một số ví dụ thú vị về chứng minh các kết quả tổ hợp bằng đại số tuyến tính.

2. Lời giải của bài toán Putnam có thể xem ở [2]. Nếu bạn thích bài toán này, ở đây có một bài toán vui khác dựa trên định lý Hall: Nếu G là một nhóm hữu hạn và H là một nhóm con chỉ số n. Chứng minh rằng tồn tại các phần tử $g_1, g_2, \ldots, g_n$ thuộc G sao cho tồn tại đúng một g_i trong mỗi lớp kề trái của H và đúng một g_i trong mỗi lớp kề phải.

3. Richard Rado chứng minh mở rộng quan trọng sau đây của định lý Hall cho matroid: Giả sử A_i là họ các tập con của tập hữu hạn S được đánh số bởi tập I và M là matroid trên S. Khi đó tồn tại một hệ đại diện riêng biệt gồm các phần tử độc lập nếu và chỉ nếu A_J có hạng ít nhất là $|J|$ với mọi $J \subseteq I$. Như một hệ quả ví dụ, nếu $A_1, A_2, \ldots, A_n$ là các tập

con của một không gian véc-tơ V có n chiều sao cho dim span $A_J \geqslant |J|$ với mọi tập con $J \in \{1, 2, \ldots, n\}$, thì V có cơ sở $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ với $a_i \in A_i$ với mọi i.

4. Có một phiên bản của định lý Hall về hôn nhân cho siêu đồ thị được phát biểu bởi Aharoni và Haxell trong đó có đưa ra một chứng minh mới của định lý Hall dựa trên bổ đề Sperner (bổ đề này lại tương đương với định lý điểm bất động Brouwer trong tô-pô). Xem bài blog [3] của Gil Kalai để biết rõ hơn.

5. Có một số kết quả nổi tiếng trong tổ hợp mà đều "*tương đương*" nhau, theo nghĩa là chúng có thể suy ra được từ nhau một cách khá đơn giản. Đó là định lý Hall về hôn nhân, định lý Dilworth, định lý luồng cực đạt lát cắt cực tiểu và định lý Menger. Một đặc điểm chung của tất cả các định lý này là một vài điều kiện cần hiển nhiên thấy lại chính là điều kiện đủ. Có thể xem ở đây [4].

6. Một số bài toán yêu thích của tôi liên quan đến bài toán hôn nhân là bài toán hôn nhân ổn định và bài toán thư ký.

7. Định lý Hall đóng vai trò chủ đạo trong bài báo sau [5] của Zur Izhakian và Louis Rowen về supertropical matrix algebra.

8. Định lý Hall về hôn nhân có thể được hiểu như điều kiện cần và đủ để tồn tại cặp ghép đầy đủ cho một đồ thị hai phe. Tutte đã chứng minh mở rộng sau đây cho một đồ thị bất kỳ, không nhất thiết phải là hai phe: Một đồ thị G có cặp ghép đầy đủ khi và chỉ khi với mọi tập con U các đỉnh, đồ thị cảm sinh trên phần bù của U có tốt đa $|U|$ thành phần liên thông với số đỉnh lẻ. Từ định lý Tutte ta có thể nghĩ đến một định nghĩa thoáng hơn về "*hôn nhân*".

Tài liệu tham khảo

[1] https://www.ima.umn.edu/preprints/Feb92Series/918.pdf

[2] http://kskedlaya.org/putnam-archive/2012s.pdf

[3] https://gilkalai.wordpress.com/2012/11/25/happy-birthday-ron-aharoni/

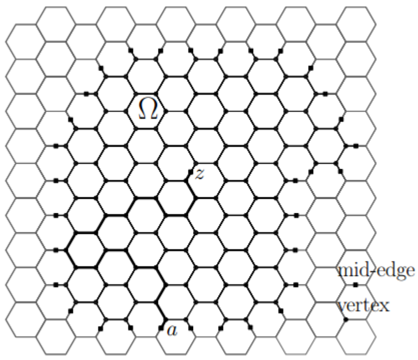
[4] http://robertborgersen.info/Presentations/GS-05R-1.pdf

[5] http://arxiv.org/abs/0806.1178

VỀ HẰNG SỐ LIÊN THÔNG TRÊN LƯỚI TỔ ONG

Huỳnh Công Bằng - Ecole Normale Supérieure de Lyon

Hằng số liên thông trên một mạng lưới là đại lượng liên quan đến số lượng đường đi không tự cắt trên lưới đó (lưới có thể là ô vuông, hay lục giác (lưới tổ ông), ...) Vào năm 1982, một lập luận dựa trên gas coulomb của Nienhuis dự đoán rằng trên mạng lưới lục giác, hằng số liên thông bằng $\sqrt{2+\sqrt{2}}$. Điều này đã được chứng minh chi tiết bởi Duminil-Copin và Smirnov bằng cách sử dụng phương pháp *"parafermionic"*.



1. Giới thiệu

Ký hiệu c_n là số đường đi không tự cắt (SAW) trên mạng lưới lục giác H với độ dài n và bắt đầu từ O. Ta có:

$$c_n \geq (\sqrt{2})^n$$

Điều này có được bằng cách đếm số đường đi lên phía trên và đi xuống phía dưới ở bước thứ $2k+1$ và số đường đi ngang ở bước thứ $2k+2$ với $k \in \mathbb{N}$.
Ta có thể cắt một đường đi SAW có độ dài $m+n$ thành hai phần SAW có độ dài n và m. Do đó

$$c_{m+n} \leq c_m \cdot c_n.$$

Theo bổ đề subadditivity, ta có

$$\lim c_n^{\frac{1}{n}} = \mu \in \left(\sqrt{2}, 2\right) \text{ and } c_n \geq \mu^n, \forall n$$

vì $\mu = \lim_n c_n^{\frac{1}{n}} = \inf_n (c_n^{\frac{1}{n}})$.

Định lý 1. Đối với mạng lưới lục giác, ta có $\mu = \sqrt{2+\sqrt{2}}$.

Một vài ký hiệu: Ta sẽ làm việc trên những trung điểm của các cạnh của H. Tập hợp tất cả những điểm đó là $H^{\diamond}$.

Ta viết $a \in H^{\diamond}, \gamma : a \to E$ nghĩa là γ bắt đầu tại a và kết thúc tại một điểm trong $E \subset H^{\diamond}$.

$l(\gamma) = \#\{a \in H : a \in \gamma\}$ là độ dài của γ (Vì là số các đỉnh thuộc γ).

Ta định nghĩa hàm số sau đây:

$$z(x) = \sum_{\gamma : a \to H^{\diamond}} x^{l(\gamma)} \text{ for } x > 0.$$

Ta co

$$z(x) = \sum_{\gamma : a \to H^{\diamond}} x^{l(\gamma)} = \sum_n c_n \cdot x^{l(\gamma)} = \sum_n c_n \cdot x^n \sim \sum_n (\mu x)^n.$$

Do đó,

- If $x < \dfrac{1}{\mu}$ then $z(x) < +\infty$.
- If $x > \dfrac{1}{\mu}$ then $z(x) = +\infty$.

Khi đó, ta chỉ cần chứng minh

$$z(x) < +\infty \text{ if } x < \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

va

$$z(x) = +\infty \text{ if } x = \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}.$$

ta dat $x_c = \dfrac{1}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}$ voi $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

2. Cầu

Trong mục này, ta định nghĩa một lớp của SAW là cầu và ta sẽ chứng minh rằng số cầu sẽ tăng tỉ lệ với số SAW ($\sim \mu^n$) và từ đó ta có thể chứng minh rằng

$$\mu_b(H) = \sqrt{2+\sqrt{2}}.$$

Định nghĩa 1. Một cầu n-bước là một SAW có n-bước γ sao cho

$$\gamma_1(0) < \gamma_1(i) \le \gamma_1(n) \; \forall i = 1, 2, 3, \ldots, n.$$

trong đó $\gamma_1(i)$ là tọa độ đầu tiên $\gamma(i)$.

Ký hiệu b_n à một cầu n-bước với $\gamma(0) = 0$. Ta đặt $b_0 = 1$.

Ta có $b_{m+n} \geq b_m \cdot b_n$, do đó

$$\mu_b = \lim_{n\to+\infty} {b_n}^{\frac{1}{n}} = \sup_n b_n^{\frac{1}{n}}.$$

Hơn nữa, ${b_n}^n \leq \mu_b^n \leq \mu^n$.

Định nghĩa 2. Một nửa mặt phẳng n-bước là một SAW có n bước γ với $\gamma_1(0) < \gamma_1(i), \forall i$.

Ta đặt h_n là số lượng nửa mặt phẳng n bước với $\gamma(0) = 0$.

Định nghĩa 3. Độ dày của nửa mặt phẳng n bước γ là

$$\max_{0\leq i\leq n} \gamma_1(i) - \min_{0\leq i\leq n} \gamma_1(i)$$

với $b_{n,A}$ là số n-bước cầu với độ dài A.

Ta có $b_n = \sum_{A=1}^{n} b_{n,A}$.

Định lý 2. (Hardy-Ramanujan): Cho $n \in \mathbb{N}*$, gọi $P_D(n)$ là số cách để viết $n = n_1+n_2+\cdots+n_k$ trong đó $n_1 > n_2 > \cdots > n_k \geq 1$ cho bất kỳ k, khi đó, ta có

$$\ln P_D(n) \sim \pi\left(\frac{n}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \text{ as } n \to +\infty.$$

Mệnh đề 1. $h_n \leq P_D(n) \cdot b_n$ với mọi $n \geq 1$.

Đặt $b_0 = 0$, ta định nghĩa

$$A_{i+1} = \max_{j>n_i} (-1)^i (\gamma_1(j) - \gamma_1(n_i))$$

va

$$n_{i+1} = \max\Big\{j > n_i(-1)^i(\gamma_1(j) - \gamma_1(n_i)) = A_{i+1}\Big\}.$$

Nghĩa là: n_1 là giá trị cực đại của $\gamma_1(j) : j > n_0$ và n_2 là giá trị cực tiểu của $\gamma_1(j), j > n_1$.

Ta đặt $h_n(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ là số nửa mặt phẳng n bước với

$$K = k, A_i = a_i.$$

Ta có

$$\begin{aligned} h_n(a_1, a_2, \ldots, a_k) &\leq h_n(a_1 + a_2, a_3, \ldots, a_k) \\ &\leq \ldots \leq \\ &\leq h_n(a_1 + a_2 + \cdots + a_k) = b_{n,a_1+a_2+\cdots+a_k}. \end{aligned}$$

Do đó,

$$\begin{aligned} h_n &= \sum_{k\geq 1} \sum_{1\leq a_1<a_2<\cdots<a_k} h_n(a_1, a_2, \ldots, a_k) \\ &\leq \sum_{k\geq 1} \sum_{1\leq a_1<a_2<\ldots<a_k} b_{n,a_1+a_2+\cdots+a_k} \\ &\leq \sum_{A=1}^{n} P_D(A)\cdots b_{n,A} \leq P_D(n)\cdots \underbrace{\sum_{A=1}^{n} b_{n,A}}_{b_n} \end{aligned}$$

Chúng ta có được $h_n \leq P_D(n) \cdot b_n$.

Chứng minh này cung cấp một phương pháp để phân tích γ thành những cầu có độ dài giảm dần. Chúng ta sẽ chứng minh định lý sau đây của Hammersley-Welsh cho mạng lục giác.

Định lý 3. Cố định $B > \pi\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$, khi đó, tồn tại một hằng số $n_0(B)$ sau cho

$$\forall n > n_0(B) : c_n \leq b_{n+3} \cdot e^{B\sqrt{n+3}}.$$

Chứng minh. Ta sẽ chứng minh rằng

$$c_n \leq \sum_{m=0}^{n} h_{n-m} \cdot h_{m+4}.$$

Đặt $x_1 = \max_{0 \leq i \leq n} \gamma_1(i), m = \max\{i : \mu(i) = x_1\}$. Ta xóa đi $\gamma(m)$ và thêm vào 5 điểm giữa a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 của lục giác chứa $\gamma(m)$.

Đường đi này $(\gamma(0), \gamma(1), \ldots, \gamma(m-1), a_1, a_2, a_3, a_4)$ là một nửa mặt phẳng có $(m+3)$ bước và $(a_5, \gamma(m+1), \ldots, \gamma(n))$ là một nửa mặt phẳng có $(n-m)$ bước. Do đó,

$$c_n \leq \sum_{m=0}^{n} h_{n-m} \cdot h_{m+3}$$

Sử dụng mệnh đề:

$$\begin{aligned} c_n &\leq \sum_{m=0}^{n} h_{n-m} \cdot h_{m+3} \leq \sum_{m=0}^{n} P_D(n-m) \cdot P_D(m+3) \cdot b_{n-m} \cdot b_{m+3} \\ &\leq \sum_{m=0}^{n} P_D(n-m) \cdot P_D(m+3) \cdot b_{n+3} \end{aligned}$$

Theo định lý Hardy thì: $P_D(n) \sim \pi\left(\frac{n}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$ khi $n \to +\infty$, do đó $\exists \alpha : P_D(n) \leq \alpha e^{B' \cdot \left(\frac{4}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}$ với $B > B' > \pi\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$.

chúng ta có được:

$$P_D(n-m) \cdot P_D(m+3) \leq \alpha^2 e^{B'\left[\sqrt{\frac{n-m}{2}} + \sqrt{\frac{m+3}{2}}\right]} \leq \alpha^2 e^{B'\sqrt{n+3}},$$

Do đó:

$$c_n \leq (n+1)\alpha^2 e^{B'\sqrt{n+3}} \cdot b_{n+3}$$

và

$$\exists B_0(B), \forall n \geq B_0(B) : c_n \leq e^{B\sqrt{n+3}} b_{n+3}.$$

□

Hệ quả 1. $\mu(H) = \mu_b(H)$.

Ta có:

$$c_n \le e^{B\sqrt{n+3}} b_{n+3} \Rightarrow c_n^{\frac{1}{n}} \le e^{B\frac{\sqrt{n+3}}{n}} b_{n+3}^{\frac{1}{n+3}\cdot\frac{n+3}{n}} \Rightarrow \mu \le \mu_b$$

nên $\mu = \mu_b$.

Ghi chú. Chúng ta có cùng kết quả cho mạng hình vuông $\mathbb{Z}^2$ bằng cách thay thế $n+3$ bởi $n+1$.

Cố định $B > \pi\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$ khi đó có một giá trị $n_0 = n_0(B)$ sao cho $c_n \le b_{n+1}e^{B\sqrt{n}}$ với mọi $n \ge n_0$.

Chúng ta định nghĩa $B(x) = \sum b_n x^n$, như vậy

- Nếu $x > \frac{1}{\mu}$: $B(x) = +\infty$
- Nếu $x < \frac{1}{\mu}$: $B(x) < +\infty$.

3. Parafermionic

Một miền Ω là hợp của tất cả các trung điểm từ việc đưa ra một tập hợp của các đỉnh $V(\Omega)$. Một trung điểm z sẽ thuộc về miền Ω nếu ít nhất một đầu mút của cạnh liên kết của trung điểm này thuộc về $V(\Omega)$. Trung điểm này thuộc về $\partial\Omega$ nếu chỉ có duy nhất một đầu mút là nằm trong $V(\Omega)$

Định nghĩa 4. Số gốc quay $W_\gamma(a,b)$ của một SAW γ giữa a và b là số lần rẽ sang trái của γ trừ đi số lần rẽ sang phải của γ, lấy kết quả nhân với $\frac{\pi}{3}$. khi γ đi từ a đến b.

Định nghĩa 5. Cho $a \in \partial\Omega, z \in \Omega$, chúng ta đặt

$$F(z) = F(a,z,x,\sigma) = \sum_{\gamma\subset\Omega : a\to z} e^{-i\sigma W_\gamma(a,z)} x^{l(\gamma)}.$$

Bổ đề 1. Nếu $x = x_c, \sigma = \frac{5}{8}$, khi đó F thỏa mãn:

$$\forall v \in V(\Omega) : (p-v)F(p) + (q-v)F(q) + (r-v)F(r) = 0$$

trong đó p, q, r là 3 cạnh liên kết đến v.

Chứng minh. Ta viết

$$\begin{aligned}
&(p-v)F(p) + (q-v)F(q) + (r-v)F(r)\\
=&(p-v)\sum_{\gamma:a\to p} e^{-i\sigma W_\gamma(a,p)}x^{l(\gamma)} + (q-v)\sum_{\gamma:a\to q} e^{-i\sigma W_\gamma(a,q)}x^{l(\gamma)} +\\
&(r-v)\sum_{\gamma:a\to r} e^{-i\sigma W_\gamma(a,r)}x^{l(\gamma)}
\end{aligned}$$

trong đó p, q, r là 3 trung điểm theo thứ tự ngược chiều kim đồng hồ xung quanh v.

Ta kí hiệu:

$$C_p = \{\gamma \subset \Omega : \gamma : a \to p\}$$
$$C_q = \{\gamma \subset \Omega : \gamma : a \to q\}$$
$$C_r = \{\gamma \subset \Omega : \gamma : a \to r\}$$

và

$$C_p^3 = \left\{\gamma \in C_p : \gamma \text{ đi qua } q \text{ và } r\right\}$$
$$C_p^2 = \left\{\gamma \in C_p : \gamma \text{ chỉ đi qua } q \text{ và } r\right\}$$
$$C_p^1 = \left\{\gamma \in C_p : \gamma \text{ không đi qua } q \text{ cũng không đi qua } r\right\}$$

Ta có 3 trường hợp:

1. If $\gamma \in C_n^3$, ta liên kết γ đến $\widetilde{\gamma}$, được định nghĩa bởi: $\widetilde{\gamma}$ đi qua cùng những trung điểm mà γ đi qua và thêm vào đường $p \to r$ vào $\widetilde{\gamma}$. Đặc biệt, $\widetilde{\gamma} \in C_p^3$.

2. nếu $\gamma \in C_p^1$, ta liên kết γ đến $\tilde{\gamma}$ và $\tilde{\tilde{\gamma}}$ đi qua 2 trung điểm (p, q or p, r) bằng cách mở rộng đường đi thêm một bước.

3. nếu $\gamma \in C_p^2$, nó là trong trường hợp $\gamma \in C_p^1$ or C_r^1 ,

Ta định nghĩa: Nếu một đường kết thúc tại trung điểm z, $C(\gamma) = (z - v)e^{-i\sigma w_\gamma(a,z)} x^{l(\gamma)}$.

Trong những lập luận tiếp theo, chúng ta sẽ xem xét một vài trường hợp:

1. Trường hợp đầu tiên, chúng ta sẽ chứng minh rằng

$$x_c^{l(\gamma)} \cdot (p - v)e^{-i\sigma w_\gamma(a,p)} + (q - v)e^{-i\sigma w_\gamma(a,q)} x_c^{l(\tilde{\gamma})} = 0$$

We have $l(\gamma) = l(\tilde{\gamma})$, $(q - v) = e^{\frac{2i\pi}{3}}(p - v)$ và

$$w_\gamma(a, p) = w_\gamma(a, r) + w_\gamma(r, p) = w_\gamma(a, r) + \left(-\frac{4\pi}{3}\right)$$
$$w_{\tilde{\gamma}}(a, p) = w_{\tilde{\gamma}}(a, r) + w_{\tilde{\gamma}}(r, p) = w_{\tilde{\gamma}}(a, r) + \frac{4\pi}{3} = w_\gamma(a, r) + \frac{4\pi}{3}$$

Do đó

$$\begin{aligned}
&x_c^{l(\gamma)} \cdot (p - v)e^{-i\sigma w_\gamma(a,p)} + (q - v)e^{-i\sigma w_\gamma(a,q)} x_c^{l(\tilde{\gamma})} \\
&= (p - v)e^{-i\sigma\left[w_\gamma(a,r) - \frac{4\pi}{3}\right]} + e^{\frac{2i\pi}{3}}(p - v)e^{-i\sigma\left[w_\gamma(a,r) + \frac{4\pi}{3}\right]} \\
&= \left[(p - v)e^{\frac{5i\pi}{6}} + e^{\frac{2i\pi}{3}}(p - v)e^{-\frac{5i\pi}{6}}\right]e^{-\frac{5i}{8}w_\gamma(q,r)} \\
&= (p - v)e^{-\frac{5i}{8}w_\gamma(a,r)} \cdot \left(\underbrace{e^{\frac{5i\pi}{6}} + e^{-\frac{i\pi}{6}}}_{0}\right) = 0
\end{aligned}$$

2. Trường hợp thứ 2, chúng ta sẽ chứng minh rằng

$$c(\gamma) + c(\tilde{\gamma}) + c(\tilde{\tilde{\gamma}}) = 0$$

Nói cách khác,

$$x_c^{l(\gamma)}(p - v)e^{-i\sigma w_\gamma(a,p)} + (q - v)e^{-i\sigma w_{\tilde{\gamma}}(a,q)} x_c^{l(\tilde{\gamma})} + (r - v)e^{-i\sigma w_{\tilde{\tilde{\gamma}}}(a,r)} x_c^{l(\tilde{\tilde{\gamma}})} = 0$$

Ta có
$$l(\tilde{\gamma}) = l(\tilde{\tilde{\gamma}}) = l(\gamma) + 1$$
và
$$w_{\tilde{\gamma}}(a,q) = w_{\tilde{\gamma}}(a,p) + w_{\tilde{\gamma}}(p,q) = w_{\gamma}(a,p) + \left(-\frac{\pi}{3}\right),$$
$$w_{\tilde{\tilde{\gamma}}}(a,r) = w_{\tilde{\tilde{\gamma}}}(a,p) + w_{\tilde{\gamma}}(p,r) = w_{\gamma}(a,p) + \frac{\pi}{3}$$
$$q - v = (p-v)e^{\frac{2i\pi}{3}}, r - v = (p-v)e^{-\frac{2i\pi}{3}}$$
Ta viết lại như sau:
$$x_c^{l(\gamma)}(p-v)e^{-i\sigma w_{\gamma}(a,p)} + (q-v)e^{-i\sigma w_{\tilde{\gamma}}(a,q)}x_c^{l(\tilde{\gamma})} + (r-v)e^{-i\sigma w_{\tilde{\tilde{\gamma}}}(a,r)}x_c^{l(\tilde{\tilde{\gamma}})} = 0$$
$$\Leftrightarrow 1 + x_c e^{\frac{2i\pi}{3}} e^{\frac{i\pi}{3}\cdot\frac{5}{8}} + x_c e^{-\frac{2i\pi}{3}} e^{-\frac{i5\pi}{24}} = 0$$
$$\Leftrightarrow x_c\left(e^{\frac{7i\pi}{8}} + e^{-\frac{7i\pi}{8}}\right) + 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow -2\cos\frac{\pi}{8}x_C + 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2x_C} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$
Điều này là đúng bởi vì $\sqrt{2+\sqrt{2}} = 2\cos\frac{\pi}{8}$. Bổ đề đã được chứng minh

□

Ghi chú 1) Chúng ta có thể thấy (1) giống như là tích phân rời rạc theo đường tam giác trên một mạng lưới theo nghĩa sau đây. Gọi $H*$ là mạng lưới "dual" của H. Một đường:
$$\gamma : \{0, 1, 2, \ldots, n\} \to H*$$
($v \in H*$ nếu và chỉ nếu v là tâm của các mặt của H).

$F : H^{\diamond} \to C$ là một hàm trên H. Chúng ta định nghĩa: $\oint\limits_{\gamma} F(z)dz := \sum_{i=0}^{n-1} F\left(\frac{\gamma_i + \gamma_{i+1}}{2}\right)(\gamma_{i+1} - \gamma_i)$.

If $\gamma(0) = a, \gamma(1) = b, \gamma(2) = c, \gamma(3) = a$ và F giống như trong định nghĩa 5, khi đó ta có
$$\oint\limits_{\gamma} F(z)dz = (b-a)F\left(\frac{a+b}{2}\right) + (c-b)F\left(\frac{b+c}{2}\right) + (a-c)F\left(\frac{a+c}{2}\right)$$
$$= 2e^{\frac{\iota\pi}{2}}(p-v)F(p) + 2e^{\frac{i\pi}{2}}(q-v)F(q) + 2e^{\frac{i\pi}{2}}(r-v)F(r)$$
$$= 0$$
Tổng quát hơn, nếu $\gamma : \{0, 1, 2, \ldots, n\} \to H*$ sao cho $\gamma(0) = \gamma(n)$. Chúng ta phân tích γ thành những đường tam giác. Ta có:
$$\oint\limits_{\gamma} F(z)dz = 0.$$
2) Những mối quan hệt này thì không thể xác định được duy nhất hàm F như trong định nghĩa, bởi vì số biến là lớn hơn số phương trình. Chúng ta có thể đưa ra hai hàm mà thỏa mãn mối quan hệt này:
$$F(z) = 0, \forall z \in H$$
$$F(z) = 1, \forall z \in H$$

4. Chứng minh định lý

Chúng ta cố định $a \in H^{\diamond}$ giống như là gốc tọa độ của mặt phẳng phức.Chúng ta xem xét một miền dọc $\Omega = S_T$ được tạo thành từ T dãy lục giác, và phiên bản hữ hạn $S_{T,L}$ cắt tại độ cao $\pm L$ và góc $\pm\frac{\pi}{3}$. Chúng ta sẽ xác định $V(S_T)$ và $V(S_{T,L})$.

Định nghĩa α, β tương ứng là những biên bên trái, bên phải S_T and $\epsilon, \overline{\epsilon}$ là những biên phía trên và phía dưới của $S_{T,L}$

Chúng ta có

$$\forall z \in \beta, \operatorname{Re} z = \frac{3T+1}{2}.$$

Biên phía trên ϵ thuộc về đường thẳng có phương trình $\sqrt{3}y - x = 3L + \frac{1}{2}$.

Biên phía dưới $\overline{\epsilon}$ thuộc về đường thẳng có phương trình $\sqrt{3}y - x = -3L - \frac{1}{2}$.

Do đó

$$V(S_T) = \left\{ z \in V(H) : 0 \le \operatorname{Re} z \le \frac{3T+1}{2} \right\}$$
$$V(S_{T,L}) = \left\{ z \in V(H) : \left| \sqrt{3}\operatorname{Im}(z) - \operatorname{Re}(z) \right| \le 3L \right\}$$

Chúng ta định nghĩa

$$A_{T,L}(x) = \sum_{\gamma \subset S_{T,L} : a \to \alpha \setminus \{a\}} x^{l(\gamma)}$$
$$B_{T,L}(x) = \sum_{\gamma \subset S_{T,L} : a \to \beta} x^{l(\gamma)}$$
$$E_{T,L}(x) = \sum_{\gamma \subset S_{T,L} : a \to \epsilon \cup \overline{\epsilon}} x^{l(\gamma)}$$

Bổ đề 2. For $x = x_C, \sigma = \frac{5}{8}$, Ta có

$$c_\alpha A_{T,L}(x_c) + B_{T,L}(x_c) + c_\epsilon E_{T,L}(x_c) = 1$$

trong đó $c_\alpha = \cos\frac{3\pi}{8}, c_\epsilon = \cos\frac{\pi}{4}$.

Chứng minh. Chúng ta đã chứng minh rằng: Nếu $x = x_c, \sigma = \frac{5}{8}$ khi đó

$$\forall v \in V(\Omega) : (p_v - v)F(p_v) + (q_v - v)F(q_v) + (r_v - v)F(r_v) = 0$$

trong đó p_v, q_v, r_v là những trung điểm của 3 cạnh liên kết đến v.. Chúng ta cộng những mối quan hệ này trên tất cả cách đỉnh $v \in V(S_{T,L})$ khi đó

$$\sum_{z\in\beta} F(z) + \sum_{z\in\epsilon} e^{\frac{2i\pi}{3}} F(z) + \sum_{z\in\alpha} e^{i\pi} F(z) + \sum_{z\in\overline{\epsilon}} e^{-\frac{2i\pi}{3}} F(z) = 0$$
$$\Rightarrow \sum_{z\in\beta} F(z) + \sum_{z\in\epsilon} e^{\frac{2i\pi}{3}} F(z) + (-1)\sum_{z\in\alpha} F(z) + \sum_{z\in\overline{\epsilon}} e^{-\frac{2i\pi}{3}} F(z) = 0$$

đặc biệt,

- $(-1)\sum_{z\in\alpha} F(z) = -1 - \dfrac{e^{i\sigma\pi} + e^{-i\sigma\pi}}{2} A_{T,L}(x_c) = -1 - \cos\dfrac{5\pi}{8} A_{T,L}(x_c) = -1 + \cos\dfrac{3\pi}{8} A_{T,L}(x_c)$

- $\sum_{z\in\beta} F(z) = e^{i\sigma\cdot 0} B_{T,L} = B_{T,L}$.

- $$e^{\frac{2i\pi}{3}} \sum_{z\in\epsilon} F(z) + e^{-\frac{2i\pi}{3}} \sum_{z\in\overline{\epsilon}} F(z) = e^{\frac{2i\pi}{3}} e^{-\frac{2i\pi}{3}\sigma} \sum_{\gamma:a\to\epsilon} x_c^{l(\gamma)} + e^{-\frac{2i\pi}{3}} e^{\frac{2i\pi}{3}\sigma} \sum_{\gamma:a\to\overline{\epsilon}} x_c^{l(\gamma)}$$
$$= e^{\frac{\pi i}{4}} \sum_{\gamma:a\to\epsilon} x_c^{l(\gamma)} + e^{-\frac{\pi i}{4}} \sum_{\gamma:a\to\overline{\epsilon}} x_c^{l(\gamma)} = \frac{1}{2}\Big(e^{\frac{\pi i}{4}} + e^{-\frac{\pi i}{4}}\Big) E_{T,L}(x_c) = \cos\frac{\pi}{4} E_{T,L}(x_c)$$

Do đó, ta có
$$\cos\frac{3\pi}{8} A_{T,L}(x_c) + B_{T,L}(x_c) + \cos\frac{\pi}{4} E_{T,L}(x_c) = 1.$$

□

Chú ý. Chúng ta nhận thấy rằng $(A_{T,L}(x_c))_L$ and $(B_{T,L}(x_c))_L$ là những dãy tăng, khi đó
$$\lim_{L\to+\infty} A_{T,L}(x_c) = A_T(x_c) \text{ and } \lim_{L\to+\infty} B_{T,L}(x_c) = B_T(x_c).$$
ta có
$$\cos\frac{3\pi}{8} A_{T,L}(x_c) + B_{T,L}(x_c) + \cos\frac{\pi}{4} E_{T,L}(x_c) = 1$$
và $(A_{T,L}(x_c))_L$, $(B_{T,L}(x_c))_L$ là những dãy tăng, do đó $E_{T,L}(x_c)$ là một dãy giảm, điều này suy ra rằng
$$\lim_{L\to+\infty} E_{T,L}(x_c) = E_T(x_c).$$
Ta có $\cos\frac{3\pi}{8} A_T(x_c) + B_T(x_c) + \cos\frac{\pi}{4} E_T(x_c) = 1$.

Bây giờ, chúng ta sẽ trình bày phần chứng minh định lý.

Trong phần 2, chúng ta đã chỉ ra rằng $\mu_b(H) = \mu(H)$. Do đó, chỉ cần chứng minh rằng $z(x_c) = +\infty$ và $B(x) < +\infty, \forall x < x_c$.

1. Chứng minh rằng $z(x_c) = +\infty$:

   Chúng ta xem xét 2 trường hợp:

   - If $\exists T_0 : E_{T_0}(x_c) > 0$ do đó $z(x_c) \geq \sum_{L=1}^{+\infty} E_{T,L}(x_c) \geq \sum_{L=1}^{+\infty} E_{T_0}(x_c) = +\infty$. Bởi vì $(E_{T_0,L}(x_c))_L$ là một dãy giảm.

- If $\forall T : E_T(x_c) = 0$, then we have $\cos\frac{3\pi}{8}A_T(x_c) + B_T(x_c) = 1$ với mọi T. Dễ dàng chứng minh rằng

$$A_{T+1}(x_c) - A_T(x_c) \le z_c B_{T+1}(x_c)^2$$

do đó

$$\begin{aligned}
&\cos\frac{3\pi}{8}A_{T+1}(x_c) + B_{T+1}(x_c) - \cos\frac{3\pi}{8}A_T(x_c) - B_T(x_c) = 0\\
&\Leftrightarrow 0 = \cos\frac{3\pi}{8}[A_{T+1}(x_c) - A_T(x_c)] + B_{T+1}(x_c) - B_T(x_c)\\
&\le \cos\frac{3\pi}{8}x_c B_{T+1}(x_c)^2 + B_{T+1}(x_c) - B_T(x_c)
\end{aligned}$$

Kí hiệu $\cos\frac{3\pi}{8} = c_\alpha$, ta có

$$c_\alpha x_c B_{T+1}(x_c)^2 + B_{T+1}(x_c) \ge B_T(x_c).$$

Chúng ta sẽ chứng minh rằng

$$B_T(x_c) \ge min\left\{B_1(x_c), \frac{1}{c_\alpha x_c}\right\}\frac{1}{T}.$$

Giả sử rằng tồn tại T_0 sau cho $B_{T_0}(x_c) < \min\left\{B_1(x_c), \frac{1}{c_\alpha x_c}\right\}\frac{1}{T_0}$, khi đó chúng ta có

$$\begin{aligned}
&c_\alpha x_c B_{T_0}(x_c)^2 + B_{T_0}(x_c) \ge B_{T_0-1}(x_c)\\
&\Rightarrow B_{T_0-1}(x_c) \le c_\alpha x_c B_{T_0}(x_c)^2 + B_{T_0}(x_c)\\
&< \min\left\{B_1(x_c), \frac{1}{c_\alpha x_c}\right\}\frac{1}{T_0} + c_\alpha x_c \min\left\{B_1(x_c), \frac{1}{c_\alpha x_c}\right\}^2\frac{1}{T_0^2}\\
&\le \min\left\{B_1(x_c), \frac{1}{c_\alpha x_c}\right\}\frac{1}{T_0} + \min\left\{B_1(x_c), \frac{1}{c_\alpha x_c}\right\}\frac{1}{T_0^2}\\
&\le \min\left\{B_1(x_c), \frac{1}{c_\alpha x_c}\right\}\left(\underbrace{\frac{1}{T_0} + \frac{1}{T_0^2}}_{<\frac{1}{T_0-1}}\right)
\end{aligned}$$

Bằng cách tương tự, ta có

$$\begin{aligned}
&B_{T_0-2}(x_c) < \min\left\{B_1(x_c), \frac{1}{c_\alpha x_c}\right\}\frac{1}{T_0-2}\\
&\dots\\
&B_1(x_c) < \min\left\{B_1(x_c), \frac{1}{c_\alpha x_c}\right\} \le B_1(x_c)
\end{aligned}$$

bất đẳng thức cuối cùng là một sự mâu thuẫn, do đó

$$B_T(x_c) \geq \min\left\{B_1(x_c), \frac{1}{c_\alpha x_c}\right\}\frac{1}{T} \text{ for all } T,$$

then

$$z(x_c) \geq \sum_{T=1}^{+\infty} B_T(x_c) \geq \min\left\{B_1(x_c), \frac{1}{c_\alpha x_c}\right\}\sum_{T=1}^{+\infty}\frac{1}{T} = +\infty$$

2. Chứng minh của $B(x) < +\infty, \forall x < x_c$.

   Giả sử rằng $x < x_c$. Vì $B_T(x)$ là một cầu có độ dài ít nhất T nên

   $$B_T(x) = \sum x^{l(\gamma)} \leq \sum (\frac{x}{x_c})^l(\gamma)x^{l(\gamma)} \leq \sum (\frac{x}{x_c})^T x^{l(\gamma)} \leq \left(\frac{x}{x_c}\right)^T B_T(x_c) \leq \left(\frac{x}{x_C}\right)^T$$

   bởi vì $B_T(x_c) \leq 1$. Như vậy,

   $$B(x) = \sum_{T=1}^{+\infty} B_T(x) \leq \sum_{T=1}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_c}\right)^T < +\infty$$

   bởi vì $x < x_c$.

5. Mô hình vòng $O(n)$ trên mạng lưới lục giác:

Cho Ω là một đồ thị con của mạng lưới lục giác, chúng ta xem xét cấu hình của những vòng đơn giản không tự cắt Ω. Cho $n \geq 0, x > 0$: Chúng ta định nghĩa độ đo trên tập hợp X của cấu hình những vòng đơn không tự cắt:

$$\mathbb{P}(\omega) \sim n^{\#loop(\omega)} x^{\#edges(\omega)}.$$

Kể từ đó, một phần giao giữa 2 vùng sẽ được thêm vào. Trong trường hợp này, cấu hình sẽ được hợp giữa các vòng không tự cắt và giao diện tránh các vòng từ a vào b. Chúng ta sẽ mở rộng định nghĩa của "paraforminoic observable" trong phần 3.

Định nghĩa 6. Cho $u, v \in \partial\Omega, z \in \Omega, n \in [0; 2], x > 0$, ta định nghĩa

$$F(z) = F(z,u,v,x,n,\sigma) = \frac{\sum\limits_{\omega\in\epsilon_\Omega(u,z)} e^{-i\sigma w_\gamma(u,z)} x^{|\omega|} n^{\#loop(\omega)}}{\sum\limits_{\omega\in\epsilon_\Omega(u,v)} e^{-i\sigma w_\gamma(u,v)} x^{|\omega|} n^{\#loop(\omega)}}$$

trong đó $\epsilon_\Omega(u,v)$ là một tập hợp của những cấu hình với giao diện γ (SAW γ) từ u đến v.

Ghi chú. Cho u, v cố định, chúng ta đặt

$$c = \sum_{\omega\in\epsilon_\Omega(u,v)} e^{-i\sigma w_\gamma(u,v)} x^{|\omega|} n^{\#loop(\omega)},$$

khi đó chúng ta có

$$F(z) = F(z,u,v,x,n,\sigma) = \frac{1}{c}\sum_{\omega\in\epsilon_\Omega(u,z)} e^{-i\sigma w_\gamma(u,z)} x^{|\omega|} n^{\#loop(\omega)}$$

với quy ước $0^0 = 1$ và cho $n = 0$, ta có:

- Nếu $\#loops(\omega) > 0$ then $\mathbb{P}(\omega) = 0$.
- Nếu $\#loops(\omega) = 0$ then $\mathbb{P}(\omega) \sim x^{\#edges(\omega)}$.

Nghĩa là $X = \{SAW\}$.

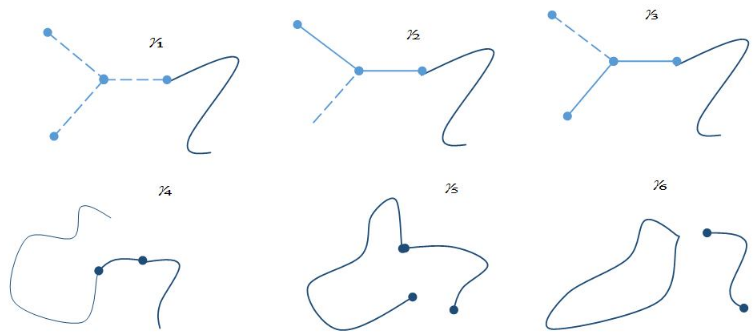
Mệnh đề 2. Gọi Ω là một miền hữu hạn của H và $a, b \in \partial\Omega$. Đặt $x(n) = \dfrac{1}{\sqrt{2+\sqrt{2-n}}}$ và $\sigma(n) = 1 - \dfrac{3}{4\pi}\arccos\left(-n\dfrac{1}{2}\right)$ và F là "paraformionic observable" khi đó

$$(p-v)F(p) + (q-v)F(q) + (r-v)F(r) = 0$$

trong đó p, q, r là 3 trung điểm của những cạnh liên kết đến v.

Ghi chú: Nếu $n = 0$ then $x = \dfrac{1}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \sigma = \dfrac{5}{8}$. Điều này đã được chứng minh trong bổ đề 1.

Chứng minh. Chúng ta có thể liên kết cấu hình γ_1, γ_2 và γ_3 $(\gamma_4, \gamma_5, \gamma_6)$



Cố định một trường hợp (trường hợp $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$) Chúng ta sẽ chứng minh rằng:

$$C(\gamma_1) + C(\gamma_2) + C(\gamma_3) = 0.$$

Nói cách khác,

$$x_n^{|\omega_1|}(p-x)e^{-\sigma w_\gamma}(u,p)n^{\#loops(\omega_1)} + x_n^{|\omega_2|}(q-x)e^{-\sigma w_{\gamma_2}(u,q)}n^{\#loops(\omega_2)}$$
$$+ x_n^{|\omega_3|}(r-x)e^{-\sigma w_{\gamma_3}(u,r)}n^{\#loops(\omega_3)} = 0$$

trong đó $|\omega_2| = |\omega_3| = |\omega_1| + 1$ và

$$\#loops(\omega_1) = \#loops(\omega_2) = \#loops(\omega_3),$$
$$w_{\gamma_2}(a,q) = w_{\gamma_2}(a,p) + w_{\gamma_2}(p,q) = w_{\gamma_1}(a,p) + \left(-\frac{\pi}{3}\right),$$
$$w_{\gamma_3}(a,r) = w_\gamma(a,p) + \frac{\pi}{3}$$
$$q - v = (p-v)e^{\frac{2i\pi}{3}}, r - v = (p-v)e^{-\frac{2i\pi}{3}}$$

Chúng ta viết lại

$$\begin{aligned}
&x_n^{|\omega_1|}(p-v)e^{-i\sigma w_{\gamma_1}(u,p)}n^{\#loops(\omega_1)}\\
&+x_n^{|\omega_2|}(q-v)e^{-i\sigma w_{\gamma_2}(u,q)}n^{\#loops(\omega_2)}\\
&+x_n^{|\omega_3|}(r-v)e^{-i\sigma w_{\gamma_3}(u,r)}n^{\#loops(\omega_3)}\\
&=x_n^{|\omega_1|}(p-v)e^{-i\sigma w_{\gamma_1}(u,p)}n^{\#loops(\omega_1)}\\
&+x_n^{|\omega_1|+1}(p-v)e^{\frac{2i\pi}{3}}e^{-i\sigma\left[w_{\gamma_1}(u,q)-\frac{\pi}{3}\right]}n^{\#loops(\omega_2)}\\
&+x_n^{|\omega_1|+1}(p-v)e^{-\frac{2i\pi}{3}}e^{-i\sigma\left[w_{\gamma_1}(u,p)+\frac{\pi}{3}\right]}n^{\#loops(\omega_3)}
\end{aligned}$$

Nó thì dễ để chứng minh rằng $1+e^{\frac{2i\pi}{3}}x_n e^{\frac{i\sigma\pi}{3}}+x_n e^{\frac{-2i\pi}{3}}e^{-\frac{i\sigma\pi}{3}}=0$. Chúng ta thay thế σ by $1-\dfrac{3}{4\pi}\arccos\left(-\dfrac{n}{2}\right)$ and x_n bởi $\dfrac{1}{\sqrt{2+\sqrt{2-n}}}$, khi đó ta có

$$\begin{aligned}
&1+e^{\frac{2i\pi}{3}}x_n e^{\frac{i\sigma\pi}{3}}+x_n e^{\frac{-2i\pi}{3}}e^{-\frac{i\sigma\pi}{3}}\\
&=1+e^{\frac{2i\pi}{3}}e^{\frac{i\pi}{3}-\frac{i}{4}\arccos\left(-\frac{n}{2}\right)}\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{2-n}}}+e^{\frac{-2i\pi}{3}}e^{\frac{-i\pi}{3}}e^{\frac{i}{4}\arccos\left(-\frac{n}{2}\right)}\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{2-n}}}\\
&=1-e^{-\frac{i}{4}\arccos\left(-\frac{n}{2}\right)}\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{2-n}}}-e^{\frac{i}{4}\arccos\left(-\frac{n}{2}\right)}\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{2-n}}}\\
&=1-\cos\left(\frac{1}{4}\arccos\left(-\frac{n}{2}\right)\right)\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{2-n}}}-\cos\left(\frac{1}{4}\arccos\left(-\frac{n}{2}\right)\right)\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{2-n}}}\\
&=1-\frac{2\cos\left(\frac{1}{4}\arccos\left(-\frac{n}{2}\right)\right)}{\sqrt{2+\sqrt{2-n}}}=0
\end{aligned}$$

điều này là đúng. □

6. Giả thuyết cho mô hình O(n)

Định nghĩa của sự biến đổi pha thì tương ứng đến sự tồn tại của $x_c\in(0;+\infty)$ sao cho

1. Cho $x<x_c$: Xác suất để mà đỉnh a và b là trên cùng một vòng giảm nhanh như lũy thừa theo khoảng cách giữa a và b.

2. Cho $x>x_c$: Xác suất để mà những đỉnh a và b là nghịch đảo của lũy thừa theo khoảng cách giữa a và b.

Giả thuyết: Cho $n\in[-2;2]$, khi đó $x_c(n)=\dfrac{1}{\sqrt{2+\sqrt{x-n}}}$.

Tài liệu tham khảo

[1] Hugo Duminil-Copin, Parafermionic observables and their applications to planar statistical physics models.

[2] Hugo Duminil-Copin, Smirnov: The connective constance of the honeycomb lattice equals $\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

[3] Hugo Duminil-Copin, R. Bauerschmidt, J. Goodman, G. Slade, Leture on the self-avoiding-walks.

[4] Hugo Duminil-Copin, N. R. Beaton, Mireille Bousquet-Mélou, Jan de Gier, Anthony J. Guttmann, The critical fugacity for surface adsorption of self avoiding walks on the money-comb lattice is $1+\sqrt{2}$.

RỘNG HẸP NHỎ TO VỪA VẶN CẢ (GIỚI THIỆU TÔPÔ HỌC)

Nguyễn Hữu Việt Hưng

(Trường ĐH Khoa học Tự nhiên, ĐHQG - Hà Nội)

Có những vấn đề của *hình học*, nhưng lại *không phụ thuộc vào kích cỡ to nhỏ, rộng hẹp, dài ngắn của các đối tượng liên quan*. Những vấn đề như thế thuộc về một lĩnh vực được gọi là *Tôpô học* (Topology[1]). Trong những vấn đề thuộc loại này, chuyện một mảnh đất rộng hay hẹp, vuông hay méo chẳng quan trọng gì. (Thế có lạ không!) Vì thế, những người buôn đất, buôn bất động sản chớ nên học Tôpô. Nếu như vì tò mò mà họ cứ học, họ thể nào cũng cả quyết rằng các nhà Tôpô học là những kẻ điên, hâm hấp.

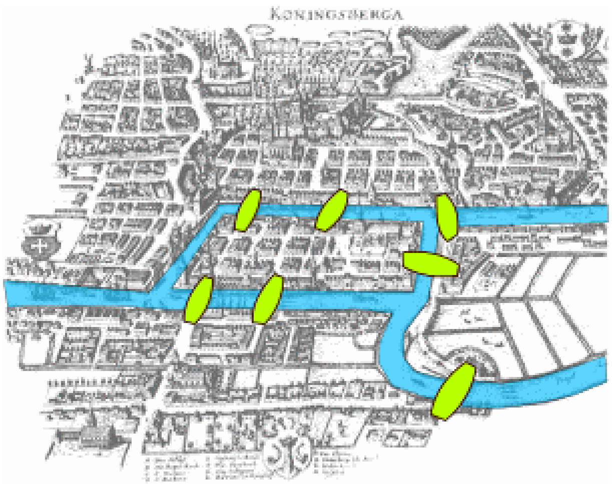
Cao đàm khoát luận như thế không khéo dễ dẫn đến tư biện, mù mờ, rồi dễ sinh ra nói nhảm. Để tránh chuyện đó, ta hãy bắt đầu bằng một vài ví dụ. Đôi khi, vài ví dụ thực chất có thể đẻ ra một lý thuyết, có khi còn đẻ ra cả một ngành học.

Leonhard Euler (1707 - 1783), nhà toán học vĩ đại người Thuy Sĩ, được xem là cha đẻ của ngành Tôpô học, vì ông là người đầu tiên nghiên cứu hai bài toán sau đây.

1. Bài toán về bảy chiếc cầu

Königsberg là một thành phố cổ thuộc Vương quốc Phổ và nước Đức cho đến 1945. Sau Đại chiến Thế giới II, nó thuộc Liên Xô (cũ) rồi Nga, và được gọi là Kaliningrad. Chỉ có rất ít dấu tích của Königsberg còn sót lại ngày nay ở Kaliningrad.

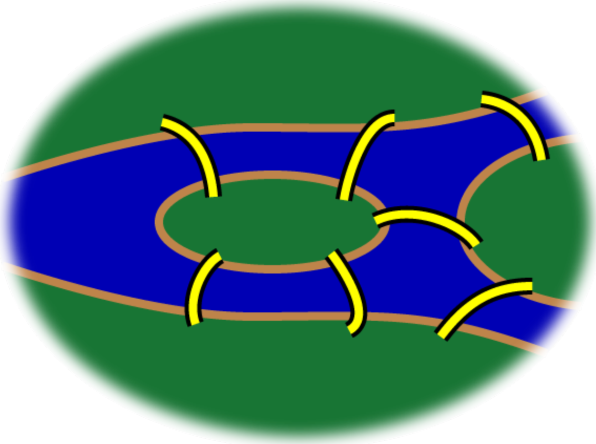
Ở thành phố Königsberg, có 7 chiếc cầu. Chúng nối hoặc là hai bờ sông, hoặc một bờ sông và một trong hai cù lao, hoặc nối hai cù lao đó. Xem bản đồ sau đây:



[1]Tất cả các liên kết trong bài đều của Ban Biên tập.

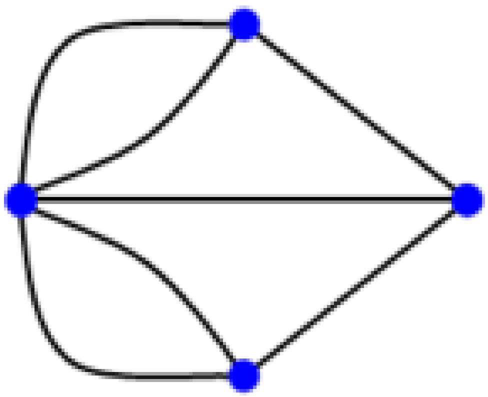
Từ xưa, cư dân ở Königsberg đã đặt câu hỏi: Liệu có thể đi một lần qua tất cả 7 chiếc cầu mà không có cầu nào phải lặp lại hay không?

Không cần để tâm nhiều lắm đến vị trí cụ thể của 7 chiếc cầu. Điều quan trọng nhất mà người ta quan sát được từ bài toán này là như sau: *Đây là một vấn đề của hình học, nhưng không phụ thuộc vào độ lớn của các yếu tố tham dự* (dòng sông rộng hay hẹp; những chiếc cầu dài hay ngắn, to hay bé; các cù lao lớn nhỏ thế nào). Vấn đề chỉ phụ thuộc hình dáng và vị trí tương đối của các yếu tố.

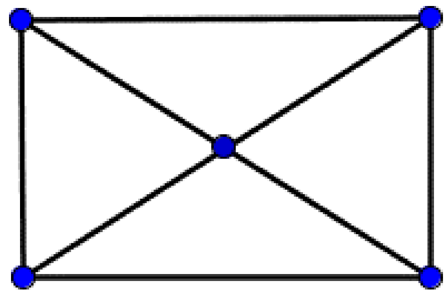


Không có bằng chứng nào còn lại chứng tỏ rằng Euler đã tới Königsberg. Tuy nhiên, năm 1735 ông đã chứng minh rằng mong muốn tìm một cách đi qua cả 7 chiếc cầu "một lần, không lặp lại" là không thể thực hiện được.

Chúng ta thử tìm hiểu lời giải của Euler cho bài toán 7 cây cầu. Trên bản đồ Königsberg hãy thay mỗi bờ sông, mỗi cù lao bằng một điểm, gọi là đỉnh, thay mỗi chiếc cầu bằng một đường nối các đỉnh, gọi là cạnh. Hình thu được gọi là một đồ thị. Bài toán về 7 cái cầu ở Königsberg thực chất là chuyện cố gắng "vẽ bằng một nét" đồ thị sau đây:



Bài toán này rất quen thuộc với trẻ em qua trò chơi "vẽ hình bằng một nét". Có ai thuở thiếu thời lại chẳng đã từng đau đầu với câu đố vẽ cái phong bì chỉ bằng một nét?



Hãy bắt đầu với nhận xét đơn giản sau đây: Mỗi khi ta đi qua một đỉnh, thì có 2 cạnh (2 cây cầu) xuất phát từ đỉnh đó đã được đi qua: Cạnh đi tới, và cạnh đi ra khỏi đỉnh đó. Như thế, mỗi lần đi qua một đỉnh, số cạnh nối với đỉnh đó mà ta chưa đi qua giảm đi 2. Cho nên, nếu một đỉnh có số cạnh nối tới là một số chẵn (gọi tắt là đỉnh chẵn) thì mỗi lần đi tới đó ta luôn còn đường để thoát ra ngoài. Còn tại mỗi đỉnh lẻ, chẳng hạn có $(2k + 1)$ đường nối với đỉnh đó, thì sau k lần đi qua, tới lần $(k + 1)$ ta sẽ hết đường để đi khỏi đỉnh đó.

Như vậy, các đỉnh lẻ chính là các cản trở cho việc "đi qua" mà không phải dừng lại. Chiến thuật của ta là không xuất phát từ các đỉnh chẵn (nếu vẫn còn đỉnh lẻ), vì nếu xuất phát từ một đỉnh chẵn, khi đi khỏi đỉnh đó, chúng ta sẽ biến đỉnh chẵn này thành một đỉnh lẻ trong phần tiếp theo của trò chơi.

Ta chỉ cần xét các đồ thị liên thông, nghĩa là đồ thị mà giữa 2 đỉnh bất kỳ của nó đều có ít nhất một đường nối. (Việc vẽ một đồ thị không liên thông hiển nhên qui về vẽ từng thành phần liên thông của nó.) Dựa trên những nhận xét về đỉnh chẵn và đỉnh lẻ nói trên, ta có thể chứng minh:

(1) Trong mỗi đồ thị, số các đỉnh lẻ luôn là một số chẵn,
(2) Một đồ thị liên thông không có đỉnh lẻ nào, cần tối thiểu 1 nét vẽ.
(3) Một đồ thị liên thông có $2n$ đỉnh lẻ ($n > 0$), cần tối thiểu n nét vẽ.

Cách vẽ như sau: Xuất phát từ một đỉnh lẻ bất kỳ (nếu có), vẽ tuỳ ý cho đến khi không vẽ được nữa. Khi đó ta gặp một đỉnh lẻ khác. Nét vẽ vừa rồi khử bớt 2 đỉnh lẻ (là điểm đầu và điểm cuối của nét vẽ). Lặp lại quá trình trên cho đến khi không còn đỉnh lẻ nào. Trường hợp không có đỉnh lẻ nào, hãy xuất phát từ một đỉnh chẵn bất kỳ, vẽ tuỳ ý cho đến khi không vẽ dược nữa. Khi đó ta gặp lại đỉnh xuất phát.

Chúng tôi không đi sâu vào chi tiết chứng minh những khẳng định trên.

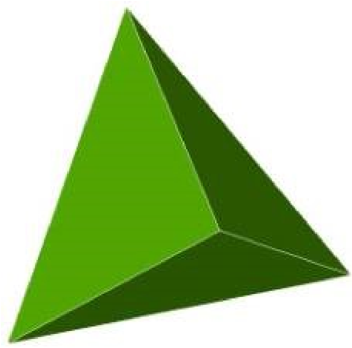
Cái phong bì có 5 đỉnh, trong đó 4 góc là 4 đỉnh lẻ. Vì thế, không thể vẽ phong bì bằng 1 nét. Cần ít nhất $4/2 = 2$ nét để vẽ được phong bì.

Trong bài toán 7 cây cầu ở Königsberg, có bốn đỉnh, đều là các đỉnh lẻ. Do đó, không thể vẽ đồ thị đó bằng 1 nét. Tối thiểu cần $4/2 = 2$ nét. Đó là lý do trong suốt chiều dài lịch sử, không người dân nào ở Königsberg có thể đi một lần qua tất cả các cây cầu mà không chiếc cầu nào bị lặp lại.

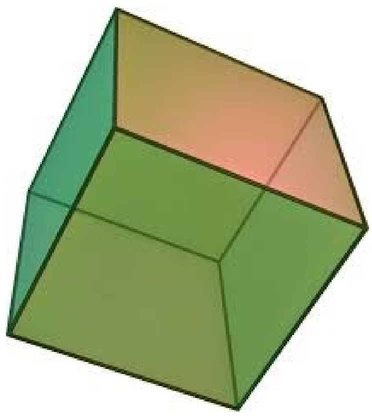
2. Bài toán về số mặt, số cạnh, và số đỉnh của một đa diện

L. Euler đã chứng minh định lý sau đây, thoạt nhìn tưởng như trò chơi trẻ con: *Trong bất cứ đa diện lồi nào, số mặt trừ đi số cạnh cộng với số đỉnh đều bằng* 2.

Hãy lấy vài ví dụ.



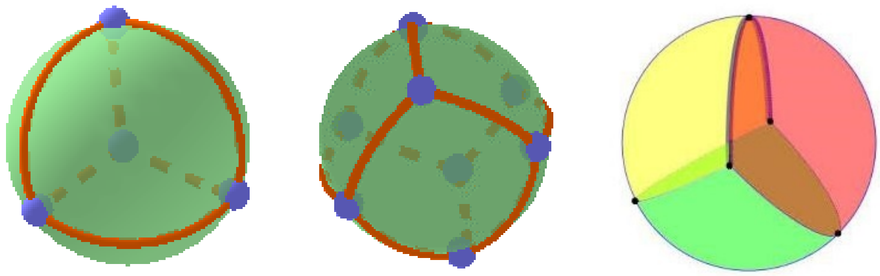
Trong một tứ diện, số mặt $m = 4$, số cạnh $c = 6$, số đỉnh $d = 4$;
Ta có $m - c + d = 4 - 6 + 4 = 2$.



Trong một hình hộp chữ nhật, số mặt $m = 6$, số cạnh $c = 12$, số đỉnh $d = 8$;
Ta cũng có $m - c + d = 6 - 12 + 8 = 2$.

Vì sao lại có chuyện lúc thì lấy dấu "cộng", lúc lại lấy dấu "trừ" trong định lý trên? Xin thưa: Mặt là một yếu tố 2 chiều, đỉnh thì 0 chiều, những yếu tố chẵn chiều thì được mang dẫu cộng; còn cạnh là một yếu tố 1 chiều, tức số chiều lẻ, nên nó mang dấu trừ.

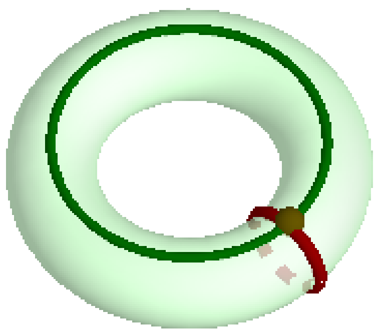
Giống như bài toán về 7 chiếc cầu, bài toán này cũng là một vấn đề hình học, nhưng không phụ thuộc vào độ lớn các yếu tố. Thật vậy, một đa diện dù bé như hạt đậu hay to như trái đất thì số mặt, số cạnh, và số đỉnh của nó cũng không thay đổi. Nhận xét trên gợi ý cho suy luận sau đây: Hãy tưởng tượng đa diện lồi được làm bằng cao su. Ta hãy thổi phồng đa diện lồi đó thành một quả bóng hình cầu.



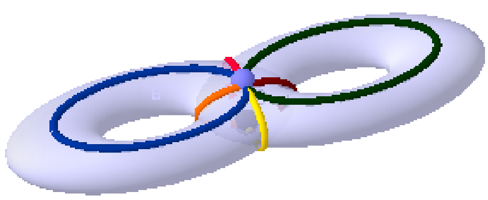
Các mặt, cạnh, và đỉnh của đa diện biến thành các mặt (cong), cạnh (cong), và đỉnh trên mặt cầu. Như thế, định lý trên của Euler về bản chất là một định lý về mặt cầu: *Trong mọi cách phân mặt cầu thành các hình đa giác cong, số mặt trừ số cạnh cộng số đỉnh đều bằng* 2. Hơn nữa, mọi hình thu được từ mặt cầu bằng một phép biến đổi liên tục (tương tự như co dãn màng cao su) đều nghiệm đúng định lý này.

Chúng ta vừa đạt được một bước tiến quan trọng trong cách nghĩ: Bài toán của Euler ban đầu xét rất nhiều đối tượng, là bất cứ đa diện lồi nào. Rút cuộc, nó là một bài toán về chỉ một đối tượng duy nhất, đó là mặt cầu.

Đạt được bước tiến đó là do chúng ta sử dụng lập luận về các biến đổi kiểu "co dãn cao su". Người ta gọi đó là các phép biến đổi tôpô.



Bây giờ, thay cho mặt cầu đã nói ở trên, hãy lấy mặt xuyến (cái săm ôtô) làm thí nghiệm. Có thể phân chia cái săm bằng 2 đường ($c = 2$), một đường cắt theo vết măng-xông, đường kia cắt dọc toàn bộ chiều dài xăm. Hai đường này cắt nhau tại một điểm duy nhất ($d = 1$). Bị cắt hai đường đó, săm trở thành một mặt hình chữ nhật ($m = 1$). Vậy, số mà Euler quan tâm của mặt xuyến (săm) là $m - c + d = 1 - 2 + 1 = 0$.



Tiếp theo, hãy lấy một mặt "xuyến kép", có được bằng cách dính 2 chiếc săm ôtô vào nhau. Bạn hãy tự chọn một cách chia mặt "xuyến kép" thành các mặt giống như hình vuông (cong), các cạnh (cong), và các đỉnh. Chẳng hạn, ta chọn cách chia mô tả bằng hình vẽ trên. Các đường đỏ và vàng cắt nhau ở 2 điểm (1 điểm nhìn thấy, 1 điểm là hình chiếu thẳng đứng của điểm nhìn thấy), vậy $d = 2$. Các đường đỏ và vàng được 2 đỉnh ấy chia làm 4 cạnh (4 nửa đường tròn), cộng thêm 2 đường mầu xanh, vậy $c = 6$. Sau khi cắt theo các đường ấy mặt xuyến kép bị chia thành ra 2 hình chữ nhật, vậy $m = 2$. Ta có $m - c + d = 2 - 6 + 2 = -2$. Như thế, số Euler của xuyến kép là -2.

Ta có thể dính nhiều săm ôtô với nhau để tạo thành một mặt xuyến có g lỗ. Số mà Euler quan tâm đối với mặt đó bằng $m - c + d = -2(g - 1)$.

Trong tôpô hiện đại, định lý Euler được tổng quát hoá như sau: *Nếu chia bất cứ một vật thể n chiều nào thành các phần "giống như đa diện", thì tổng số các phần với chiều chẵn trừ đi tổng số các phần với chiều lẻ luôn là một hằng số, được gọi là đặc số Euler, của vật thể đó.*

Như thế, mỗi vật thể đều là sự tổng hoà nhịp nhàng của hai phần âm và dương, chẵn và lẻ nội tại của nó, không thể thay đổi. Đặc số Euler, cũng còn được gọi là đặc số Euler – Poincaré (bởi vì Poincaré (1854-1912) chính là người đầu tiên ý thức được chuyện này ở trường hợp số chiều tuỳ ý), của một vật thể chính là một loại **"bản thể"**, một loại **"chứng minh thư"**, một **"ID Card"** của vật thể ấy.

Hệ quả là, nếu hai vật thể có đặc số Euler khác nhau, thì chúng không thể cái này biến thành cái kia sau một phép biến đổi thuận nghịch liên tục (kiểu như co dãn cao su). Người ta nói hai vật thể đó không *cùng kiểu tôpô*.

Như thế, mặt cầu, mặt xuyến, và mặt xuyến kép không cùng kiểu tôpô, vì chúng có đặc số Euler khác nhau (tương ứng bằng 2, 0, và -2). Về mặt trực giác, vì sao chúng không cùng kiểu tôpô? Lý do thật đơn giản: Mặt cầu không có lỗ nào; mặt xuyến có 1 lỗ (là cái chỗ người ta vẫn chui vào để biến săm thành phao bơi); còn mặt xuyến kép có 2 lỗ. Các nhà tôpô bảo mặt xuyến có 1 lỗ, nên có giống (genus) bằng 1; mặt xuyến kép có 2 lỗ, nên có giống bằng 2; mặt cầu không có lỗ nào, nên có giống bằng 0. **À ra thế, phải có lỗ thì giống mới không bị triệt tiêu**. Các nhà tôpô thật giỏi ỡm ờ.

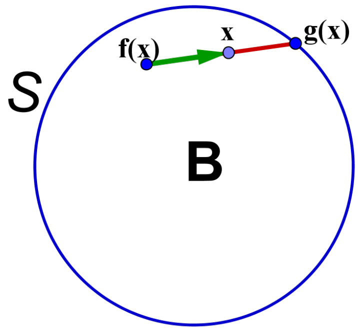
Riemann còn chứng minh một định lý thật thâm thuý: Mọi mặt 2 chiều trơn (tức mịn màng), bị chặn (có thể giữ trong một căn phòng), và có hướng (tức là phân biệt được phía nào là ngoài da, phía nào là trong thịt) đều xác định được về mặt tôpô chỉ bằng cách đếm số lỗ trên nó. Chà chà, phải mời Picasso đến đây mới được.

Những chuyện kể trên có thể dẫn chúng ta đến những gì? Sau đây là một kết luận thật khó tin.

Khẳng định: *Dù có nhào nặn một cục bột, hình cái bánh mì, kỹ đến mức nào, miễn là hình của cục bột lúc đầu và khi thôi nặn vẫn là cái bánh mì, nặn xong lại để cái bánh vào đúng chỗ cũ, khi đó luôn luôn có một hạt bột mì không thay đổi vị trí.*

Thật vậy, sau một phép biến đổi liên tục 2 chiều, cục bột hình cái bánh mì được biến thành một hình cầu B. Gọi S là mặt cầu bao quanh B. Khẳng định trên được chứng minh bằng các bước suy luận sau đây:

1) Không có phép biến đổi nào biến B thành S và vẫn giữ nguyên mọi điểm trên S. (Ý chứng minh: Giả sử tồn tại một phép biến đổi như thế. Trước phép biến đổi, S là biên của B, sau phép biến đổi S phải là biên của chính S. Điều này vô lý.)
2) Giả sử phản chứng, sau nhào nặn không có hạt bột mì nào giữ nguyên vị trí. Giả sử hạt bột mì x được biến thành $f(x)$ sau nhào nặn. Nửa đường thẳng nối $f(x)$ với x (kéo dài) cắt mặt cầu S tại một điểm duy nhất, ký hiệu $g(x)$. Phép biến đổi x thành $g(x)$ chính là một phép biến hình liên tục, biến B thành S và giữ nguyên mọi điểm trên S. (Nếu x nằm trên S, thì nửa đường thẳng nối $f(x)$ với x cắt S tại chính x.) Điều này mâu thuẫn với điểm 1). Mâu thuẫn này bác bỏ giả thiết phản chứng.



Hai bài toán được Euler nghiên cứu nói trên là những ví dụ đơn giản của các vấn đề hình học trong đó kích cỡ không quan trọng, chỉ có hình dáng và vị trí tương đối đóng vai trò quyết định. Ngành toán học nghiên cứu những vấn đề như vậy ngày nay được gọi là Tôpô học (Topology).

Ngẫm cho kỹ thì chuyện kích cỡ không quan trọng đã được tạo hoá duy trì như một trong những nguyên lý hàng đầu, đóng vai trò *"đảm bảo an ninh"* không chỉ cho xã hội loài người, mà cho toàn bộ các giống loài trong tự nhiên. Nếu một người mua nhầm đôi giầy, chật quá hay rộng quá, tức là người ấy gặp một vấn đề về kích cỡ, thì anh ta đem đổi. Thế nhưng, nếu người ấy lấy vợ, và nếu như anh ta cũng gặp một vấn đề về kích cỡ, rồi đòi đổi, thì nguy hiểm vô cùng. Và nếu rất nhiều người sau khi lấy vợ cùng gặp vấn đề về kích cỡ như thế, đều cần phải đổi, thì xã hội chắc chắn sinh loạn.

Bà chúa thơ nôm Hồ Xuân Hương (1772–1822) chính là nhà Tôpô học đầu tiên của Việt Nam, người bằng trực cảm tuyệt vời đã phát biểu tường minh những ý tưởng táo bạo của tôpô từ hơn 200 năm trước. Không nghiên cứu bài toán về 7 cái cầu hay bài toán về số mặt số cạnh số đỉnh trong đa diện, nhưng bằng một tiếp cận đầy mẫn cảm, bà đã nhận ra chuyện này từ xưa. Bà viết thật nhân văn:

"Rộng hẹp nhỏ to vừa vặn cả
Ngắn dài khuôn khổ cũng như nhau".

Hai câu thơ đó trích trong bài "Dệt cửi" của bà:

"Thắp ngọn đèn lên thấy trắng phau
Con cò mấp máy suốt canh thâu*
Hai chân đạp xuống năng năng nhắc,
Một suốt đâm ngang thích thích mau,

Rộng hẹp nhỏ to vừa vặn cả
Ngắn dài khuôn khổ cũng như nhau
Cô nào muốn tốt ngâm cho kỹ
Chờ đến ba thu mới dãi màu."

Như thế, Hồ Xuân Hương (1772–1822) độc lập và gần như đồng thời với L. Euler (1707-1783), đã phát biểu tường minh quan điểm cơ bản của tôpô học. Nữ sĩ họ Hồ quả là đã khởi đầu đầy sinh khí cho đám hậu sinh làm tôpô của Việt Nam, trong đó có kẻ học trò viết bài này:

"Mát mặt anh hùng khi tắt gió
Che đầu quân tử lúc sa mưa".

Theo được Hồ nữ sĩ quả là khó. May sao,

"Mỏi gối chồn chân vẫn muốn trèo".

Vậy mà lại bảo các nhà Tôpô là hâm thì nghe thế quái nào được, hở giời.

Vĩ thanh:

Lão Cò-nhà-đất đọc xong bài này cười phá lên, mà rằng: *"Có mảnh đất cũng không biết nó to hay bé, vuông hay méo, lại bảo rằng như nhau tuốt. Thế thì nghèo suốt đời là phải. Bọn tôpô này xem ra chỉ lo chuyện giống thôi.*

CÁC BÀI TOÁN ĐOÁN BÀI

Đặng Nguyễn Đức Tiến
(Đại học Trento, Italy)

Sân khấu bừng sáng trong tiếng hò reo vang dội.

Và nhà ảo thuật hiện ra, sang sảng nói.

"Các bạn, các bạn của tôi ơi, trò ảo thuật bài hay nhất đêm nay đang chờ đợi. Đây, hãy chọn 5 lá bài ngẫu nhiên. Chọn nào, bạn tôi ơi, ngẫu nhiên cũng được hay suy tư cẩn trọng đều cũng chẳng sao.

Chọn đi nào, thật kín đáo khỏi mọi con mắt thế gian.

Lựa chọn xong hãy giao cho người trợ lý của tôi những lá bài của bạn. Rồi anh ta sẽ đưa lại bốn lá trong số đó cho tôi.

Xem nào, từng lá một:

Bảy bích, đầm cơ, tám chuồng, cuối cùng là ba rô.

Giờ trên tay người trợ lý chỉ còn lại một, duy nhất một lá mà thôi. Một lá bài mà chỉ anh ta và người lựa chọn biết là gì.

Nhưng con mắt của nhà ảo thuật, đọc được thấu tâm can.

Bạn tôi ơi, đó chính là già bích!"

1. Năm lá bài của Fitch Cheney

Tiếp nối những số trước, chuyên mục giải trí kỳ này trân trọng giới thiệu với độc giả một loạt các bài toán đố, và kỳ này là các bài toán đoán bài. Như thường lệ, chúng tôi bắt đầu chuyên mục bằng bài toán kinh điển nhất và bài toán khởi đầu của lần này là bài toán năm lá bài của Fitch Cheney. Bài toán lần đầu tiên được in trong quyển Math Miracle của tác giả Wallace Lee vào năm 1950. Trong quyển này, tác giả đã ghi nhận tác giả bài toán là William Fitch Cheney (1894 - 1974), vẫn được gọi một cách thân mật là Fitch - nhà ảo thuật. Theo tác giả, trò ảo thuật này được Fitch sáng tạo vào khoảng những năm 1920 và chúng tôi đã mượn chi tiết này để viết lại thành lời tựa cho chuyên mục kỳ này. Để đơn giản hơn cho việc tiếp cận bài toán, chúng tôi phát biểu lại bài toán ở dạng toán đố như sau:

Hai người A và B tham gia một trò chơi như sau: A được nhận ngẫu nhiên 5 lá bài từ bộ bài chuẩn 52 lá và B không biết A nhận những lá bài nào. Sau khi xem xong, A được phép giữ lại 1 lá tùy ý và đưa lần lượt 4 lá còn lại cho người quản lý trò chơi. Người quản lý sẽ lần lượt đặt các lá bài vào các vị trí được đánh số cho trước từ 1 đến 4. B nhìn vào 4 lá bài đó của A và được yêu cầu đoán lá bài còn lại, nếu đoán đúng, họ thắng trò chơi, nếu đoán sai, họ thất bại. Tìm chiến thuật cho 2 người để họ luôn luôn chiến thắng.

Thoạt nhìn, điều này là không thể vì với 4 lá bài, chúng ta chỉ có thể tổ hợp thành $4! = 24$ trường hợp khác nhau, trong khi bộ bài chuẩn có 52 lá. Tuy nhiên, với một chút mày mò và kiên nhẫn, hẳn bạn đọc sẽ nhanh chóng tìm ra cách thức để khám phá ra bí mật đoán bài của nhà ảo thuật.

Ở đây, chúng tôi giới thiệu một cách giải đơn giản như sau:

- Vì có 5 lá bài, nên chắc chắn tồn tại ít nhất 2 lá bài đồng chất (cùng là cơ, cùng rô, cùng chuồn hoặc cùng bích). Gọi 2 lá này là M và N.

- Vì mỗi chất bài có 13 lá khác nhau, nên ta luôn tìm được cách 'đếm tới' để khoảng cách của 2 lá tối đa là 6 (và tối thiểu là 1 do M và N cùng chất, không thể bằng nhau). Ví dụ nếu $M = 7$ và $N =$Bồi thì khoảng cách là 4 vì sau 7 là $8, 9, 10$ và bồi, 4 lá. Nếu $M =$ bồi và N bằng 3 thì khoảng cách là 5 vì sau bồi là đầm, già, át, hai, ba, 5 lá. Không mất tính tổng quát, ta gán M cho lá đầu tiên và N là lá được 'đếm tới'.

- Chiến thuật là giữ lại lá N và đặt lá M ở vị trí số 1. 3 lá còn lại, luôn có thứ tự lớn nhỏ ngầm định trước (ví dụ thứ tự chơi tiến lên như cơ lớn hơn rô, rô lớn hơn chuồn..) nên có thể tạo thành 6 hoán vị khác nhau, mỗi hoán vị ứng với 1 số cho biết khoảng cách của M và N.

- Như vậy, với cách hoán vị 3 lá còn lại ở vị trí $2, 3, 4$ và lá đầu tiên là lá M, ta biết được chất của N và khoảng cách từ M đến N, nên xác định được N.

Liệu rằng ta có thể làm tốt hơn, nghĩa là có thể tìm ra lá bài bằng 4 lá còn lại trong một bộ bài lớn hơn, ví dụ 100 lá thay vì chỉ 52 lá chẳng hạn?

Hãy quay lại trò ảo thuật với cái nhìn toán học hơn một chút: chúng ta hãy xem một bộ 4 lá nhận được từ trợ lý là một thông điệp, do vậy có $52 \times 51 \times 50 \times 49$ thông điệp khác nhau. Nhà ảo thuật thấy 4 lá bài và phải đoán lá còn lại, điều này nghĩa là nhà ảo thuật chỉ cần phải đoán trong tổ hợp chập 5 của 52 trường hợp. Vì $\begin{pmatrix} 52 \\ 5 \end{pmatrix} = 52 \times 51 \times 50 \times 49 \times 48/5!$ nên số lượng thông điệp mà nhà ảo thuật nhận được là quá dư so với số trường hợp, gấp $5!/48 = 2.5$ lần. Và thật sự là ta có thể giải quyết bài toán với 124 lá bài chứ không phải chỉ với 52 lá.

Chiến thuật cụ thể để với 4 lá bài có thể tìm ra lá còn lại trong số 124 lá bài chúng tôi xem như một bài tập dành cho độc giả. Gợi ý: dựa trên số dư khi chia cho 5.

Tổng quát hóa bài toán, cho m lá bài lấy từ n, có thể chọn giữ lại $m - 1$ lá để từ đó xác định đượcn lá còn lại khi và chỉ khi $n \leq m! + m - 1$.

Tiếp tục mở rộng, với bộ ba (m, n, k), $n > m > k$, với m lá bài lấy ra từ bộ bài n lá, có thể chọn giữ lại k lá sao cho từ đó xác định được $m - k$ lá còn lại khi và chỉ khi:

$$\begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix} \leq n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1).$$

Với bài toán 5 lá bài của Fitch Cheney tương đương bộ 3 $(52, 5, 4)$.
Việc chứng minh chi tiết kết quả này nằm ngoài khuôn khổ của một bài toán giải trí, chúng tôi chỉ giới thiệu ý vắn tắt thông qua lý thuyết đồ thị như sau: Xét một đồ thị hai phía G với hai tập phân biệt S và T trong đó S là tập tất cả các bộ m lá bài lấy từ n lá và T là tập tất cả các cách sắp xếp k lá. Một cặp ghép trên đồ thị G chính là chiến thuật cần tìm. Theo định lý König-Egerváry,

độ lớn cực đại của một cặp ghép trên đồ thị hai phía bằng đúng kích thước của tập đỉnh phủ nhỏ nhất (có thể dẫn về bài toán luồng cực đại - lát cắt cực tiểu), và điều kiện tối ưu sẽ đạt được khi $|S| = |T|$.

2. Bài toán 55 lá bài

Trong loạt 3 bài toán tiếp theo, chúng tôi sẽ trích chọn giới thiệu từ tác giả quen thuộc của chuyên mục toán học giải trí, Stan Wagon qua các bài toán số 922, 1219, và 1223.

Và đây, bài toán 922, bài toán 55 lá bài:

Có 55 lá bài, được gán các số khác nhau từ 1 đến 55 và đặt ngẫu nhiên, úp mặt, thành vòng tròn. Cứ mỗi lần ta sẽ được lật một lá bài và xem số trên đó. Tìm chiến thuật lật bài ít nhất sao cho tìm được 1 lá bài chắc chắn có giá trị lớn hơn lá bài bên trái và bên phải của nó.

Bài toán này được Stan Wagon giới thiệu năm 2000, và theo ông nó bắt nguồn từ bài toán Sharygin đăng trên trang cut the knot.

Đáp án của bài toán là cần tối đa 10 lần mở bài, ta sẽ luôn tìm được một lá có giá trị lớn hơn hai lá hai bên.

Chúng tôi giới thiệu ở đây một lời giải như sau:

- Gọi $f(x)$ là giá trị của lá bài tại vị trí x. Khi đó, xét một bộ 3 vị trí (m, n, k) bất kỳ, ta luôn tìm được một lá bài lớn hơn 2 lá còn lại. Không mất tính tổng quát, giả sử lá bài đó là n, lá bên trái là m và bên phải là k (do các lá bài xếp thành vòng tròn nên ta luôn tìm được bộ 3 thỏa mãn điều kiện này). Khi đó $f(m) < f(n)$ và $f(n) > f(k)$. Ta gọi một bộ 3 có tính chất như vậy là tính chất S, nghĩa là lá ở giữa có giá trị lớn hơn 2 lá bên trái và phải.

- Giả sử $|n - m| > 1$, nghĩa là 2 lá m và n không nằm kế nhau. Chọn một lá t bất kỳ ở giữa m và n. Có hai trường hợp: Nếu $f(t) > f(n)$, ta có bộ 3 (m, t, n) có tính chất S. Nếu $f(t) < f(n)$, ta có bộ 3 (t, n, k) có tính chất S. Như vậy, dù ở trường hợp nào thì bộ 3 mới tạo với t đều có các chỉ số gần hơn so với bộ 3 (m, n, k). Và cứ làm như vậy, cuối cùng ta sẽ thu được một bộ 3 mà khoảng cách các lá bằng 0, hay nói cách khác, là 3 lá liên tục thỏa mãn tính chất S, cũng chính là yêu cầu của đề bài.

- Tiếp tục đơn giản hóa, với mỗi bộ (m, n, k) ta có khoảng cách giữa các lá là $\{n-m-1, k-n-1\}$, tức là số lá bài ở giữa các lá của bộ 3 này. Như vậy mục tiêu của bài toán là tìm ra bộ 3 có khoảng cách $\{0, 0\}$.

- Để rút về được $\{0, 0\}$ trong tình huống xấu nhất thì trước đó sẽ là $\{0, 1\}$ (chúng ta đang xét trong tình huống xấu nhất, không quan tâm đến may rủi). Lần ngược tiếp tục, ta có bộ lớn nhất trong tình huống xấu nhất có thể đưa về $\{0, 1\}$ là $\{1, 2\}$. Lưu ý, ở đây, không mất tính tổng quát, ta thấy khoảng cách trái hay phải là như nhau, nghĩa là $\{1, 2\}$ tương ứng với $\{2, 1\}$.

- Tiếp tục lần ngược ta có: $\{0, 0\} \leftarrow \{0, 1\} \leftarrow \{1, 2\} \leftarrow \{2, 4\} \leftarrow \{4, 7\} \leftarrow \{7, 12\} \leftarrow \{12, 20\}$.

- Như vậy, khởi điểm ta có thể chọn lá bài a bất kỳ, sau đó chọn lá bài b cách a 12 lá bài ở giữa, và sau đó chọn tiếp lá bài c cách b 20 lá. Khi đó, ta có nếu $f(a)$ hoặc $f(b)$ là lá lớn nhất trong 3 lá thì ta chỉ mở thêm tối đa 6 lá nữa là sẽ chắc chắn đưa về được $0, 0$. Nếu $f(c)$ lớn nhất, ta tốn thêm một lần mở để đưa $20, 20$ về $12, 20$. Trường hợp này ta cần tối đa 7 lần mở bài.

- Vậy trong tình huống xấu nhất, ta tốn tối đa 10 lần mở bài.

Và, với cách làm như trên, nếu để ý ta sẽ thấy số lá bài tối đa với n lần lật bài ta sẽ chắc chắn tìm được một lá bài có giá trị lớn hơn hai lá bên cạnh chính là số Fibonacci thứ n.

3. Bài toán 1219

Bài toán này được Stan Wagon phát biểu như là một bài toán về cai ngục, ở đây chúng tôi phát biểu lại với dạng trò chơi đoán bài, như sau:

A và B tham gia một trò chơi với luật như sau:

A và B được mời vào một phòng riêng để chờ gọi ra tham gia trò chơi.

Đầu tiên, người dẫn trò sẽ mời A ra và cho A xem một bộ bài chuẩn 52 lá được xếp ngửa mặt thành một hàng. Sau khi xem xong, A có quyền chọn 2 lá bài bất kỳ, nếu muốn và đổi chỗ 2 lá này. Sau đó, người dẫn trò lật úp lại toàn bộ các lá bài (giữ nguyên thứ tự) lại và mời B ra. Người dẫn trò sẽ nói tên một lá bài T tùy ý, và cho phép B lật các lá bài lên để tìm ra lá bài T này. Nếu sau tối đa 26 lần lật bài B tìm được lá bài T, họ chiến thắng trò chơi. Ngược lại, nếu sau 26 lần lật bài mà B không tìm ra lá T, họ thất bại.

A và B trong quá trình chơi không được có bất cứ trao đổi gì với nhau, và họ chỉ được trao đổi chiến thuật với nhau trước khi chơi. Hãy chỉ ra chiến thuật cho A và B để họ luôn có thể thắng trò chơi.

Số 26 trong đề bài là một trong những gợi ý quan trọng trong việc tìm ra chiến thuật. Trong phần này, chúng tôi giới thiệu một chiến thuật dựa trên chu trình như sau:

- Đầu tiên A và B ngầm định đánh số các lá bài từ 1 đến 52. Khi B được người dẫn trò cho biết lá cần tìm là lá bài T, B sẽ mở lá ở vị trí T. Nếu lá đó đúng là lá T, B đã tìm ra và dừng. Ngược lại, nếu lá đó có giá trị $f(T) \neq T$, B sẽ mở tiếp lá bài ở vị trí $f(T)$ tương ứng và tiếp tục như vậy cho đến khi gặp T.

- Một chuỗi các lá bài như vậy (bắt đầu từ một vị trí x, sau đó mở tiếp vị trí $f(x)$ trên lá bài tại x và tiếp tục cho đến khi gặp lá x), được gọi là một chu trình. Và vì toàn bộ bộ bài chỉ có 52 lá, nên chỉ có thể tồn tại nhiều nhất một chu trình có độ dài hơn $52/2 = 26$. Do vậy, chiến thuật của A là tìm ra chu trình dài hơn 26, nếu có, và đổi chỗ 2 lá bài để cắt ngắn chu trình này thành 2 chu trình không vượt quá 26.

- Việc "cắt" chu trình của A thực hiện khá đơn giản như sau: không mất tính tổng quát, giả sử chu trình dài hơn 26 là $1 - 2 - 3 - \cdots - N$ (nghĩa là $f(1) = 2, f(2) = 3, \ldots, f(N) = 1$), lúc này ta chỉ đơn giản hoán đổi vị trí lá thứ 26 và lá thứ N thì ta sẽ có 2 chu trình ngắn hơn là $1 - 2 - 3 - \cdots - N$ và $27 - 28 - \cdots - 26$.

Một câu hỏi khó hơn được chúng tôi xem như một bài tập dành cho độc giả là với cách làm như chiến thuật ở trên, kỳ vọng để B tìm ra lá bài T ngẫu nhiên bất kỳ trong số 52 lá bài $E(52)$ là bao nhiêu? Và tổng quát với n lá bài thì kỳ vọng $E(n)$ là bao nhiêu? Ví dụ ta có $E(2) = 1$, $E(3) = 11/9$.

4. Bài toán 1223

Bài toán cuối cùng mà chúng tôi giới thiệu ở chuyên mục lần này là một phát triển của bài toán trước, phát biểu như sau:

A và B tham gia một trò chơi với luật như sau:

A và B được mời vào một phòng riêng để chờ gọi ra tham gia trò chơi.

Đầu tiên, người dẫn trò sẽ mời A ra và cho A xem 5 lá bài, đánh số từ 1 đến 5 và được xếp ngửa mặt thành một hàng. Sau khi xem xong, A có quyền chọn 2 lá bài bất kỳ, nếu muốn và đổi chỗ 2 lá này. Sau đó, người dẫn trò lật úp lại toàn bộ các lá bài (giữ nguyên thứ tự) lại và mời B ra. Người dẫn trò sẽ nói ngẫu nhiên một số nguyên T tùy ý trong khoảng từ 1 đến 5 và yêu cầu B tìm lá bài có số tương ứng trong số các lá bài đang lật úp. Nếu sau đúng 1 lần lật bài B tìm được lá bài T, họ chiến thắng trò chơi. Ngược lại, họ thất bại.

A và B trong quá trình chơi không được có bất cứ trao đổi gì với nhau, và họ chỉ được trao đổi chiến thuật với nhau trước khi chơi. Hãy chỉ ra chiến thuật cho A và B để khả năng chiến thắng trò chơi là cao nhất.

Ta có thể thấy nếu B chọn ngẫu nhiên 1 lá, không quan tâm đến A, khả năng họ thắng trò chơi là $1/5$. Nếu A luôn luôn đổi chỗ lá bài sao cho lá 1 sẽ nằm ở vị trí 1 và chiến thuật của B là nếu $T = 1$ thì sẽ mở lá ở vị trí 1, ngược lại mở ngẫu nhiên các lá ở vị trí từ 2 đến 5. Lúc này, xác suất chiến thắng là $2/5 = 40\%$.

Nếu A và B sử dụng chiến thuật cắt chu trình như ở bài toán trước, xác suất chiến thắng của họ là bao nhiêu? Ta thấy, với chiến thuật ngày thì B sẽ mở lá bài ở vị trí T khi người dẫn trò cho biết là cần tìm là T. Stan Wagon, do vậy, ký hiệu cho chiến thuật này là (12345) ứng với các vị trí sẽ mở bài tương ứng. Chiến thuật của A như sau: nếu A gặp 1 cặp bị hoán đổi vị trí, A sẽ hoán đổi vị trí cặp này lại cho đúng. Ngược lại (nghĩa là không có cặp bị hoán đổi vị trí), A sẽ tìm chu trình có độ dài $k \geq 3$ và cắt thành chu trình này, nếu có, thành chu trình ngắn hơn có độ dài $k - 1$ và một lá rời. Dễ thấy, nếu không có chu trình k, các lá bài đã nằm đúng vị trí từ 1 đến 5. Với cách làm này có tất cả 284 trường hợp B sẽ tìm đúng lá T trong số 5.5! khả năng, do vậy xác suất để họ thắng trò chơi là $\dfrac{284}{5.5!Ư} = 47\frac{1}{3}\%$, lớn hơn $7\frac{1}{3}\%$ so với cách làm ở trên.

Stan Wagon đưa ra cách tìm công thức tổng quát để tính số trường hợp thành công $f(n)$ với n lá bài với chiến thuật này là:

$$f(n) = 2.n! - 1 + T(n)$$

với $T(n)$ là số lượng các hoán vị của n số nguyên đầu tiên trong đó có tồn tại ít nhất một cặp bị hoán đổi vị trí. Một vài giá trị $T(n)$ đầu tiên là 0, 1, 3, 9, 45, 285, 1995. Trong trường hợp đầu bài $n = 5$, ta có $f(5) = 2.5! - 1 + T(5) = 2.120 - 1 + 45 = 284$. Chứng minh chi tiết của T(n) và f(n) có thể xem thêm tại trang nhà của Stan Wagon.

Tuy nhiên, công thức tổng quát ở trên không phải là điểm thú vị của bài toán mà là kết quả bất ngờ sau đây: chiến thuật (11345) sẽ có khả năng thành công cao hơn chiến thuật (12345)! Và đây cũng chính là chiến thuật tối ưu. Chiến thuật này tóm tắt đơn giản là sau khi nghe người dẫn trò nói lá bài T, B sẽ lật lá bài ở vị trí T tương ứng, trừ trường hợp $T = 2$ thì B sẽ lật lá bài ở vị trí 1.

Tổng số khả năng thành công theo chiến thuật này là 286 và do vậy xác suất thắng lợi là $47\frac{2}{3}\%$, cao hơn $\frac{1}{3}\%$ so với chiến thuật (12345). Chiến thuật này được Stan gọi là double-door (cửa đôi).

Một câu hỏi mở vẫn chưa được giải đáp là với bộ bài chuẩn 52 lá, chiến thuật nào là tốt nhất? Và với n tổng quát? Hiện tại, kết hợp khảo sát bằng máy tính, Stan Wagon, tác giả của bài toán cũng chỉ mới chứng minh và đề xuất được cách làm tối ưu cho n trong phạm vi từ 1 đến 10.

Tham khảo và trích dẫn

Độc giả có thể tham khảo chi tiết hơn cho các bài toán giới thiệu ở chuyên mục lần này ở các địa chỉ và tài liệu sau:

1. Các bài toán của Stan Wagon tại http://mathforum.org/wagon/

2. Kleber, M., The Best Card Trick. Mathematical Intelligencer, 24 (2002).

3. Simonson, S. and Holm, T., Using a Card Trick to Teach Discrete Mathematics. Primus: Problems, Resources and Issues in Mathematics Undergraduate Studies, 13 (2003):248-269.

XUNG QUANH ĐỊNH LÝ BROKARD

Nguyễn Trần Hữu Thịnh

(Trường THPT Chuyên Lý Tự Trọng, Cần Thơ)

Bài viết này sẽ nói về các vấn đề xoay quanh định lý Brokard quen thuộc và được trình bày bằng các công cụ hình học phẳng thuần túy.

1. Mở đầu

Định lý Brokard [1] nói về tam giác được có các định là giao điểm của các cặp đường thẳng tạo bởi một tứ giác nội tiếp và nhận tâm ngoại tiếp của tứ giác ấy là trực tâm. Bản thân Brokard cũng là một trong những viên ngọc quý và có nhiều ứng dụng trong các cuộc thi học sinh giỏi các nước. Sau đây tôi xin trình bày lại một cách chứng minh định lý này thông qua một bổ đề có khá nhiều ứng dụng như sau:

Định lý Brokard. Cho tứ giác lồi $ABCD$ không là hình thang nội tiếp đường tròn tâm O. Gọi E, F, G lần lượt là giao điểm của AB và CD, AD và BC, AC và BD. Khi đó O là trực tâm của tam giác EFG. Lời giải sau được rút ra từ ý tưởng của thầy **Đỗ Thanh Sơn** về vấn đề giao điểm của các tiếp tuyến trong một đường tròn.

Ta có bổ đề sau:

Bổ đề 1. Gọi H, I, J, K, L, M theo thứ tự là giao điểm của các cặp đường thẳng $(d_A; d_B)$, $(d_A; d_C)$, $(d_A; d_D)$, $(d_B; d_C)$, $(d_B; d_D)$, $(d_C; d_D)$[1]. Khi đó các bộ điểm $(I; E; L; F)$, $(F; M; G; H)$, $(E; K; G; J)$ thẳng hàng.

Chứng minh. Do vai trò của E và F là bình đẳng trên đường thẳng IL nên ta có thể giả sử E nằm trên đoạn thẳng IL. Gọi E là giao điểm của AB và IL. Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác IHL với cát tuyến ABE được:

$$\frac{\overline{EI}}{\overline{EL}}.\frac{\overline{BL}}{\overline{BH}}.\frac{\overline{AH}}{\overline{AI}} = 1 \text{ hay } \frac{\overline{EI}}{\overline{EL}} = -\frac{AI}{BL}$$

Gọi E' là giao điểm của CD và IL. Tương tự ta cũng được:

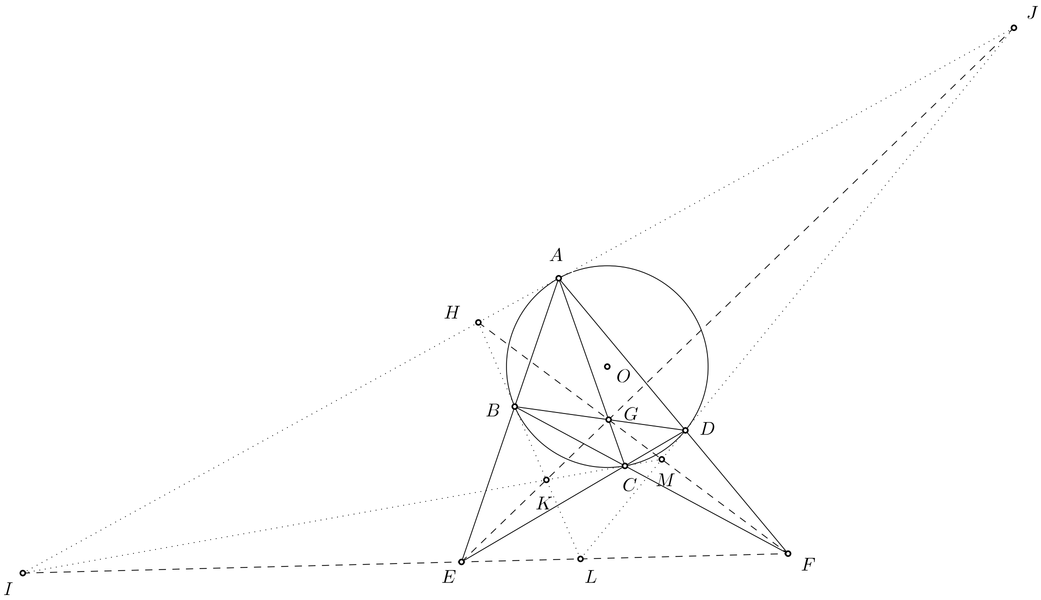
$$\frac{\overline{E'I}}{\overline{E'L}} = -\frac{CI}{DL} = -\frac{AI}{BL}$$

Điều này chứng tỏ E và E' chia trong đoạn IL theo cùng tỉ số. Do đó E trùng E'. Nên với E là giao điểm AB và CD thì I, E, L thẳng hàng.
Tương tự I, L, F thẳng hàng. Vậy bộ điểm $(I; E; L; F)$ thẳng hàng.

[1] Để tiện cho việc chứng minh, ta quy ước d_K là tiếp tuyến tại K của đường tròn đi qua K.

Với cách chứng minh như vậy ta cũng suy ra được các bộ điểm $(F; M; G; H)$, $(E; K; G; J)$ thẳng hàng.
Một cách khác, ta có thể áp dụng định lý Pascal cho lục giác suy biến thành tứ giác $ABCD$ để suy ra các bộ điểm nêu trên thẳng hàng. □

Quay lại bài toán,



Chứng minh. Ta có $BOCK$ và $AODJ$ là những tứ giác nội tiếp. Mặt khác do tứ giác $ABCD$ nội tiếp nên:

$$\overline{FC}.\overline{FB} = \overline{FD}.\overline{FA}$$

Nên F nằm trên trục đẳng phương của $(BOCK)$ và $(AODJ)$ nên $OF \perp KJ$. Áp dụng bổ dề được $EG \perp OF$.
Tương tự $FG \perp OE$. Do đó O là trực tâm của tam giác EFG.
Vậy ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Việc chứng minh các bộ điểm thẳng hàng như thế giúp hướng giải quyết được sáng sủa hơn và đưa bài toán trở về với một tính chất quen thuộc về sự vuông góc giữa đường nối tâm và trục đẳng phương của hai đường tròn. Với bài toán thú vị như vậy ta sẽ xét đến những mở rộng và ứng dụng quan trọng của nó trong các bài toán quen thuộc và đề thi học sinh giỏi của một số nước.

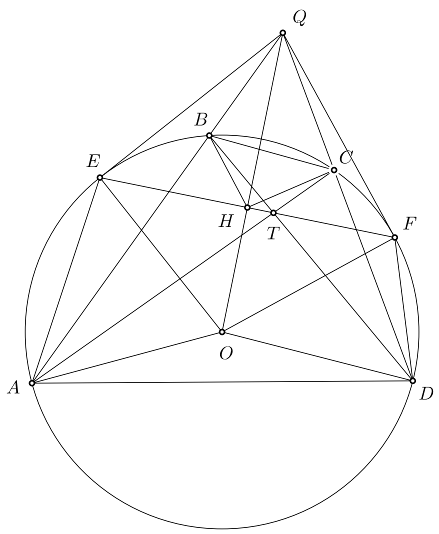
2. Khai thác định lý

Trong bổ đề trên ta thu được ba bộ điểm thẳng hàng và có những tính chất khá đẹp. Một tính chất được suy ra trực tiếp của bổ dề này đã được đưa vào bài hình trong kì thi **China MO 1997**. Ta xét bài toán

Bài toán 1 (China MO 1997). *Cho tứ giác $ABCD$ với các cạnh đôi một không song song nội tiếp. Gọi P, Q lần lượt là giao điểm của AB và CD, AD và BC. Gọi QE, QF lần lượt là tiếp tuyến tại E, F của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABCD$. Chứng minh rằng P, E, F thẳng hàng.*

Ta thấy nếu O là tâm đường tròn ngoại tiếp của tứ giác $ABCD$ thì $OQ \perp EF$. Mặt khác theo định lý Brokard thì $PG \perp OQ$ với G là giao điểm của AC và BD. Do đó nếu E, G, F thẳng hàng thì P, E, F thẳng hàng, ta xét bổ đề sau

Bổ đề 2. Cho tứ giác $ABCD$ không là hình thang nội tiếp (O). M, T lần lượt là giao điểm của AB và CD, AC và BD. Vẽ ME, MF là các tiếp tuyến của đường tròn (O) với E, F là tiếp điểm. Chứng minh rằng E, F, T thẳng hàng.



Chứng minh. Gọi H là giao điểm của OM và EF. Ta có:

$$\overline{MA}.\overline{MB} = ME^2 = \overline{MH}.\overline{MO}$$

Do đó tứ giác $ABHO$ nội tiếp. Tương tự tứ giác $CDOH$ nội tiếp. Suy ra:

$$\widehat{BHC} = \widehat{BHM} + \widehat{MHC} = \widehat{BAO} + \widehat{ODC} \Rightarrow \widehat{BHC} = \widehat{BTC}$$

Nên tứ giác $BHTC$ nội tiếp. Tương tự tứ giác $AHTD$ nội tiếp. Ta có:

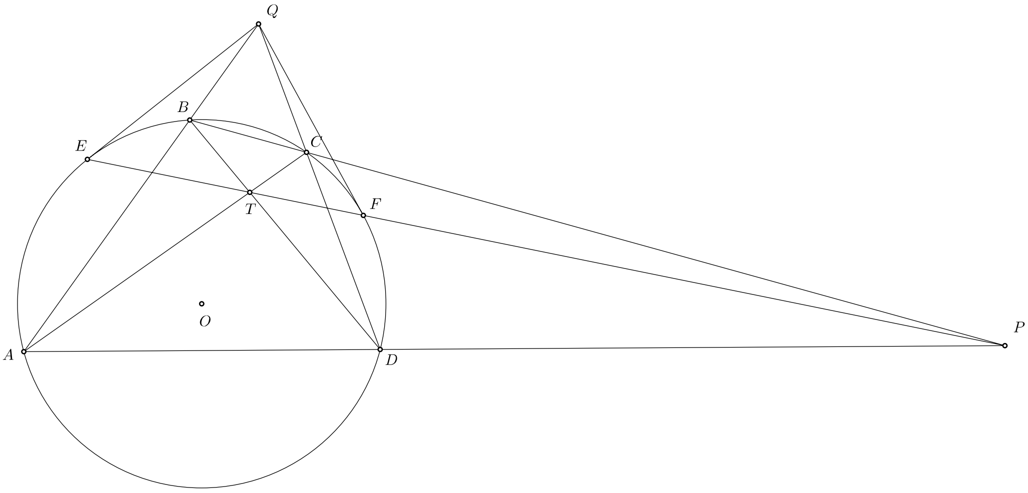
$$\widehat{MHC} = \widehat{ODC} = \widehat{ODH} \text{ và } \widehat{THC} = \widehat{TBC} = \widehat{TAD} = \widehat{THD}$$

Do đó:

$$\widehat{MHT} = \frac{1}{2}\left(\widehat{MHC} + \widehat{THC} + \widehat{THD} + \widehat{OHD}\right) = 90^\circ$$

Nên $TH \perp OM$. Do đó TH, EF trùng nhau, tức là ba điểm E, F, T thẳng hàng.
Ta có điều phải chứng minh. □

Quay lại bài toán,



Chứng minh. Từ bổ đề trên, $\overline{ETF} \perp OQ$ và theo định lý Brokard thì ta cũng có $PT \perp OQ$, vì vậy ta có ngay được E, F, P thẳng hàng.
Bài toán đã được giải xong. □

Nhận xét. Lời giải trên sử dụng định lý Brokard như một "chiếc cầu" để liên kết các điểm với nhau. Hơn thế sau khi thông qua lời giải, rõ ràng bài toán đã được vận dụng khéo léo tính chất của tiếp tuyến và được trình bày ngắn gọn thông qua hình học phẳng thuần túy.

Nói về tứ giác thì hẳn vấn đề được quan tâm không kém hiện nay là tứ giác toàn phần cùng với điểm Miquel của tứ giác này, và chúng có liên hệ với định lý Brokard thế nào, ta cùng xét hai bài toán sau:

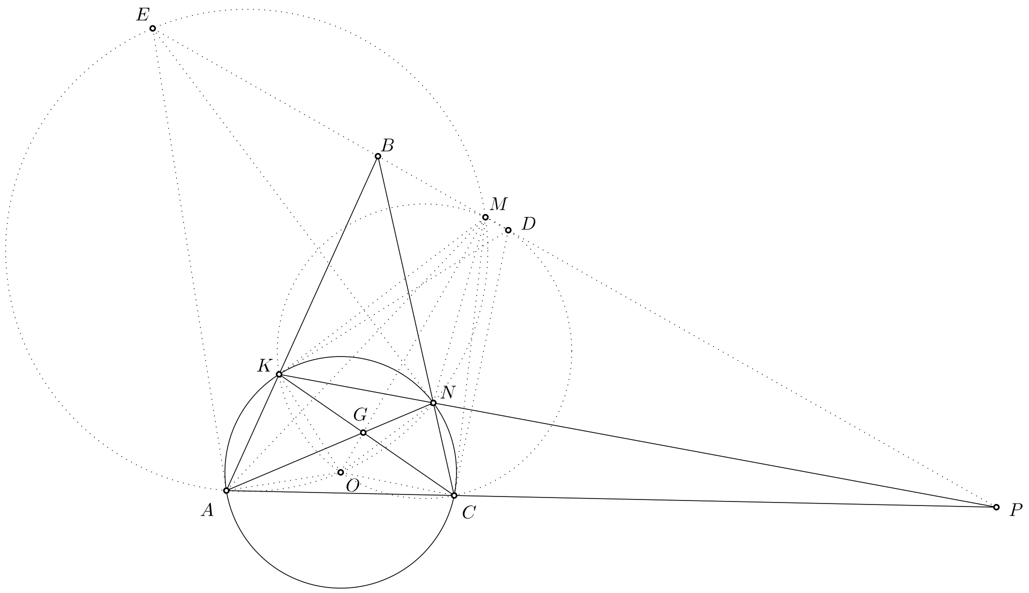
Bài toán 2 (IMO 1985). *Cho tam giác ABC. Một đường tròn tâm O đi qua A, C và cắt các đoạn AB, BC theo thứ tự tại hai điểm K, N phân biệt. Giả sử M là giao điểm thứ hai của (ABC) và (KBN). Chứng minh $\widehat{OMB} = 90°$.*

Ta để ý thấy M là điểm Miquel của tứ giác toàn phần $ACPNFB$. Chứng minh $\widehat{OMB} = 90°$ tức là chứng minh M là chân đường cao kẻ từ O xuống BP. Mặt khác theo định lý Brokard thì OG là đường cao của tam giác GBP với G là giao điểm của AN và KC. Vậy ta chỉ cần chứng minh O, G, M thẳng hàng là xong.

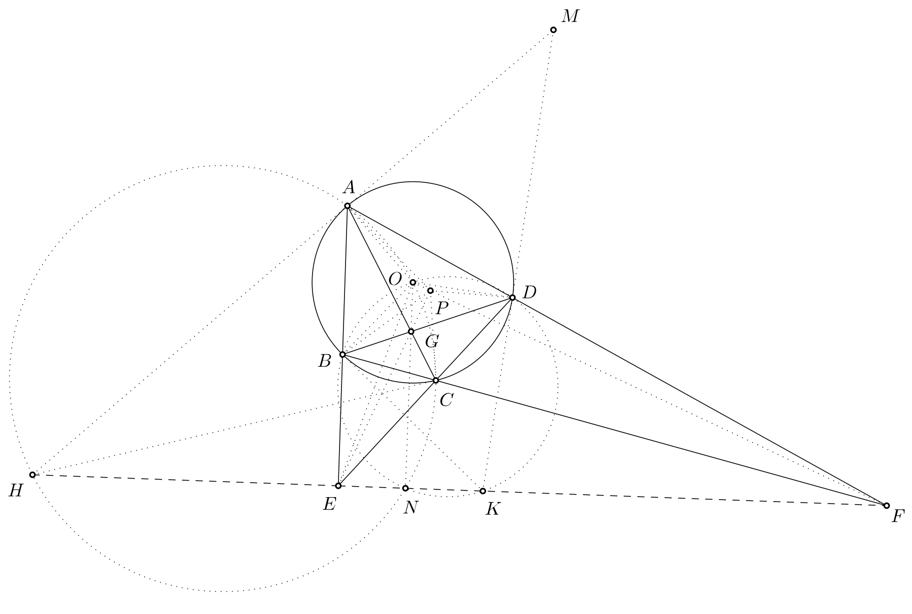
Chứng minh. Gọi M' là chân đường cao kẻ từ O xuống BP.
Gọi D, E lần lượt là giao điểm của $(d_C; d_K), (d_A; d_N)$. Theo bổ đề của định lý Brokard thì E, B, M', D, P thẳng hàng.
Từ đó ta dễ dàng suy ra các ngũ giác $AEM'NO$ và $KM'DCO$ nội tiếp. Nên:

$$\widehat{AM'C} = \widehat{AM'O} + \widehat{OM'C} = \widehat{ANO} + \widehat{OKC} = 180° - \widehat{KAC} - \widehat{NCA} = \widehat{ABC}$$

Do đó tứ giác $ABM'C$ nội tiếp. Tương tự $KBM'N$ nội tiếp. Nên M' là giao điểm thứ hai của (ABC) và (KBN). Suy ra M' trùng M.
Vậy ta có điều phải chứng minh. □



Nhận xét. Một bài toán không quá khó nhưng vẫn tiếp tục áp dụng bổ đề quen thuộc này. Song đó ta tiếp tục phát hiện một tính chất khá hay ở đây, $(AKNC)$, $(AONM)$, $(KOCM)$ đều nhận G là giao điểm của hai đường chéo. Điều này dễ dàng thu được thông qua khái niệm tâm đẳng phương của ba đường tròn. Vậy ta có thể chứng minh định lý Brokard bằng kết quả này hay không? Ta cùng quay lại với định lý thú vị này:



Chứng minh. Gọi N, P lần lượt là chân đường cao kẻ từ O, E xuống EF, FO.
Khi đó các ngũ giác $OBNKD$ và $AOCNH$ nội tiếp. Mặt khác ta cũng có tứ giác $ABCD$ nội tiếp. Áp dụng kết quả ta được AC, BD, ON đồng quy tại G hay O, G, N thẳng hàng.
Tương tự vậy ta cũng cần chứng minh bộ ba tứ giác $ABCD$, $APCE$, $BPDE$ nội tiếp. Thật vậy,

ngũ giác $AMDPO$ nội tiếp. Do đó:

$$\widehat{ACE} = \widehat{ACB} + \widehat{BCE} = \widehat{ACB} + \widehat{BAD} = 90^\circ + \widehat{ADO} = 90^\circ + \widehat{APO} = \widehat{APE}$$

Suy ra tứ giác $APCE$ nội tiếp. Theo đó ta cũng được $EBPD$ nội tiếp. Áp dụng kết quả ta được AC, BD, EP đồng quy tại G hay E, G, P thẳng hàng.
Vậy ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Lại thêm một phát kiến thú vị về định lý này thông qua tâm đẳng phương G của sáu đường tròn. Thậm chí, qua **Bài toán 2**, ta còn thấy điểm Miquel của tứ giác toàn phần là chân đường cao kẻ từ tâm O xuống cạnh EF. Không những vậy, ta có thể thu được tính chất với nhiều ứng dụng như sau:

Tính chất 1. Chân ba đường cao của tam giác EFG chính là ba điểm Miquel của tứ giác toàn phần $ABECDF$.

Tính chất 2. Tâm O của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABCD$ nằm trên đường tròn Miquel của tứ giác toàn phần $ABECDF$.

Ta lại nghĩ đến tính chất đường thẳng Steiner của tứ giác này đi qua các trực tâm, vậy điểm G có quan hệ gì với đường này không? Ta có bài toán sau:

Bài toán 3. *Cho tam giác nhọn ABC. Đường tròn tâm O đi qua B và C cắt AB, AC lần lượt tại M, N. Gọi P là giao điểm của BN và CM. Gọi H, K lần lượt là trực tâm của tam giác ABC và tam giác AMN. Chứng minh rằng P, K, H thẳng hàng.*

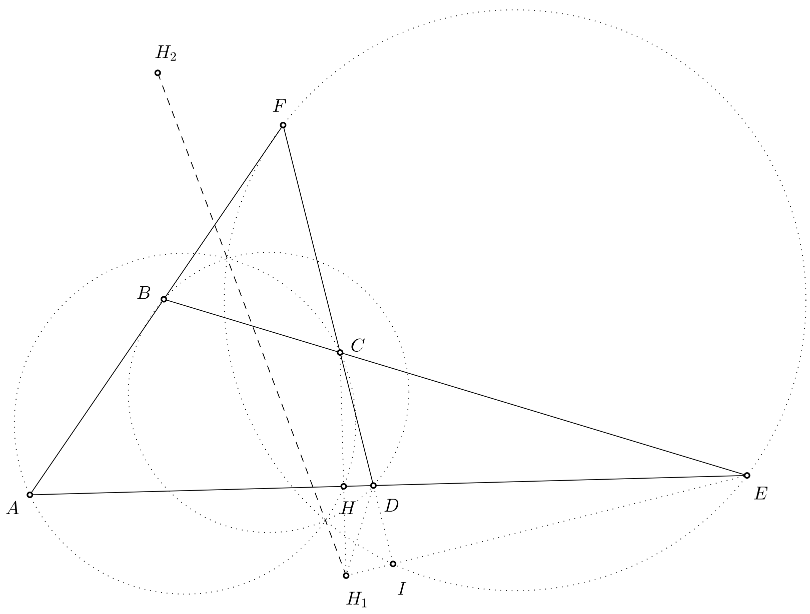
Ta nhận thấy K, H cùng nằm trên đường thẳng Steiner nên P cũng phải nằm trên đường này. Nhìn vào giả thiết đề bài thì ta khó định hướng được lối đi, nhưng ta để ý đến tính chất của đường thẳng Steiner của tứ giác toàn phần thông qua một bổ đề sau:

Bổ đề 3. Cho tứ giác toàn phần $ABFCDE$. Chứng minh rằng đường thẳng Steiner của tứ giác là trục đẳng phương chung của $(AC), (BD)$ và (EF).

Chứng minh. Gọi H_1, H_2 là trực tâm của $\Delta CDE, \Delta ABE$.
Gọi H, I lần lượt là hình chiếu của H_1 lên ED, CD. Ta thấy $H \in (AC), I \in (EF)$.
Ta có tứ giác HH_1ID và $CHIE$ nội tiếp nên:

$$\overline{H_1H}.\overline{H_1C} = \overline{ID}.\overline{IC} = \overline{HD}.\overline{HE} = \overline{H_1I}.\overline{H_1E}$$

Như vậy H_1 nằm trên trục đẳng phương của (AC) và (EF). Tương tự H_2 cũng nằm trên trục đẳng phương của (AC) và (EF). Hoàn toàn theo cách ấy ta cũng suy ra H_1H_2 là trục đẳng phương của (BD) và (EF).
Ta kết luận đường thẳng Steiner của tứ giác toàn phần $ABFCDE$ là trục đẳng phương chung của $(AC), (BD)$ và (EF).
Vậy ta có điều phải chứng minh. □

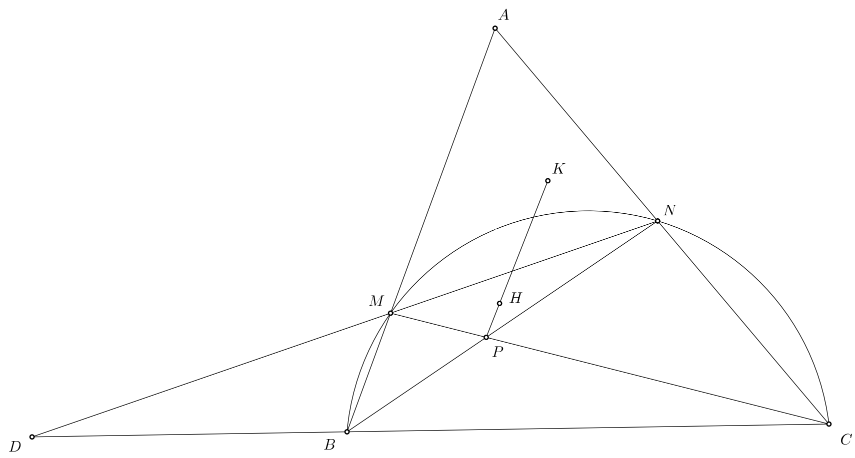


Với bổ đề quan trọng này, bài toán sẽ trở nên nhẹ nhàng hơn, ta cùng trở lại:

Chứng minh. Vì P là giao của BN và CM nên:

$$\overline{PM}.\overline{PC} = \overline{PN}.\overline{PB}$$

Suy ra P nằm trên trục đẳng phương của (BN) và (CM). Áp dụng bổ đề ta thu được P nằm trên đường thẳng Steiner của tứ giác toàn phần $AMBPNC$. Như vậy P, K, H thẳng hàng. Vậy ta có điều phải chứng minh. □



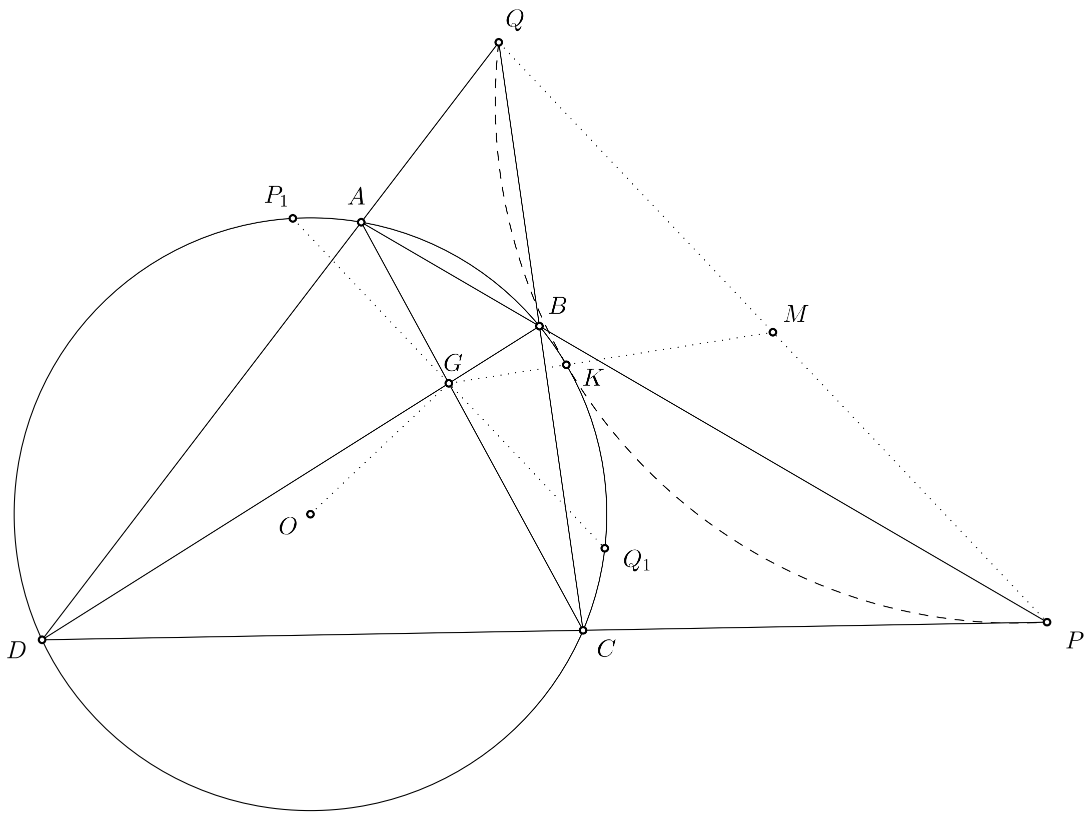
Nhận xét. Bài toán trên đã khéo léo vận dụng một "viên ngọc quý" trong tứ giác toàn phần, từ đó đưa ta đến một tính chất khác nữa của định lý Brokard:

Tính chất 3. Trực tâm G của tam giác OEF nằm trên đường thẳng Steiner của tứ giác toàn phần

$ABECDF$.

Do định lý Brokard cho ta một hệ thống tam giác trực tâm nên thông qua bài toán sau ta lại có thêm một tính chất đẹp như sau

Bài toán 4 (Romanian Master of Mathematics 2013). *Cho tứ giác $ABCD$ không là hình thang nội tiếp đường tròn ω. Gọi P, Q, R lần lượt là giao điểm của AB và CD, AD và BC, AC và BD. Gọi M là trung điểm của PQ. MR cắt ω tại K. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác KPQ và ω tiếp xúc nhau.*



Đây là một bài toán hay và khó, ta sẽ sử dụng hai bổ đề, trước hết đường thẳng vuông góc với OR tại R cắt ω tại P_1, Q_1 như hình vẽ

Bổ đề 4. AP_1 cắt CQ_1 tại một điểm thuộc PQ.

Chứng minh. Gọi X, Y lần lượt là giao điểm của AP_1 với CQ_1, AQ_1 với CP_1.

Áp dụng định lý Pascal cho lục giác suy biến thành tứ giác AP_1CQ_1 ta dễ dàng suy ra được đường thẳng XY chứa P và Q nên AP_1 và CQ_1 cắt nhau tại một điểm thuộc PQ.
Ta có điều phải chứng minh. □

Bổ đề 5. PP_1, QQ_1 cắt nhau tại K.

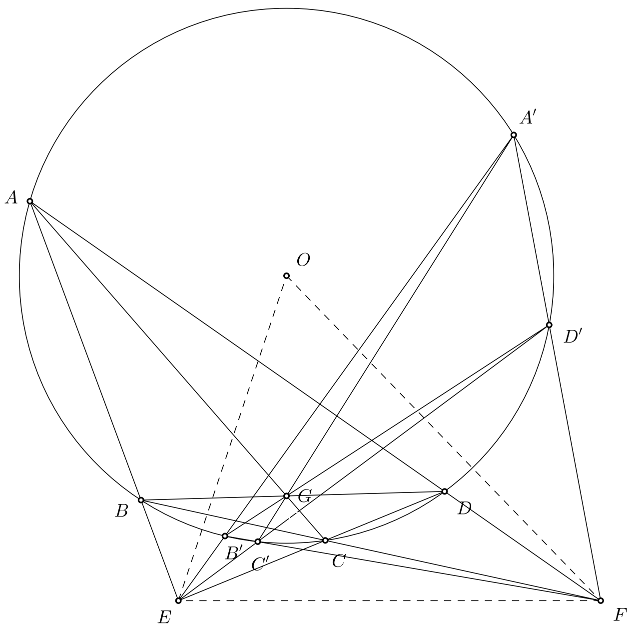
Chứng minh. PP_1 cắt ω tại P_2. Ta sẽ chứng minh P_2Q_1 đi qua Q.
Áp dụng định lý Pascal cho lục giác $P_2Q_1CDAP_1$ kết hợp với bổ đề 1 ta có giao điểm của P_2Q_1

và AD, Q_1C và AP_1 cùng với giao điểm của AD và P_1P_2 là P thẳng hàng. Mặt khác theo bổ đề 1 ta có Q_1C cắt AP_1 tại một điểm thuộc PQ, do đó giao điểm của P_2Q_1 và AD cũng nằm trên PQ, tức là điểm Q. Vậy P_2Q_1 đi qua Q.
Ta có điều phải chứng minh. □

Quay trở lại bài toán,

Chứng minh. Áp dụng bổ đề 4 và bổ đề 5, ta có tứ giác PQP_1Q_1 là hình thang, M, R lần lượt là trung điểm của PQ, P_1Q_1 và K là giao điểm của PP_1, QQ_1 nên ta dễ dàng suy ra đường tròn ω ngoại tiếp tam giác KP_1Q_1 và KPQ tiếp xúc nhau.
Vậy bài toán đã được giải xong. □

Nhận xét. Việc sử dụng khéo léo định lý Pascal đã giúp ta giải quyết gọn gàng bài toán trên. Như ta đã biết, một tư giác nội tiếp không là hình thang bất kỳ chỉ tạo ra một tam giác trực tâm, ta tạm gọi theo ánh xạ tam giác trực tâm ấy là ảnh của tứ giác nội tiếp thông qua một ánh xạ Brokard. Nhưng điều ngược lại thì chưa đúng, tức là một tam giác trực tâm có thể có nhiều tạo ảnh. Cụ thể, ta xét tam giác nhọn OEF, trực tâm G, đường cao EK. Bằng công cụ phương tích, ta dựng đường tròn tâm O bán kính $\sqrt{OE^2 - GE.KE}$, đây chính là đường tròn ngoại tiếp các tạo ảnh mà ta đề cập đến, với một cát tuyến từ P cắt (O) tại hai điểm sẽ cho ta một tạo ảnh của tam giác trực tâm OEF.



Từ nhận xét này, ta có cách phát biểu rộng hơn cho bài toán 4 như sau

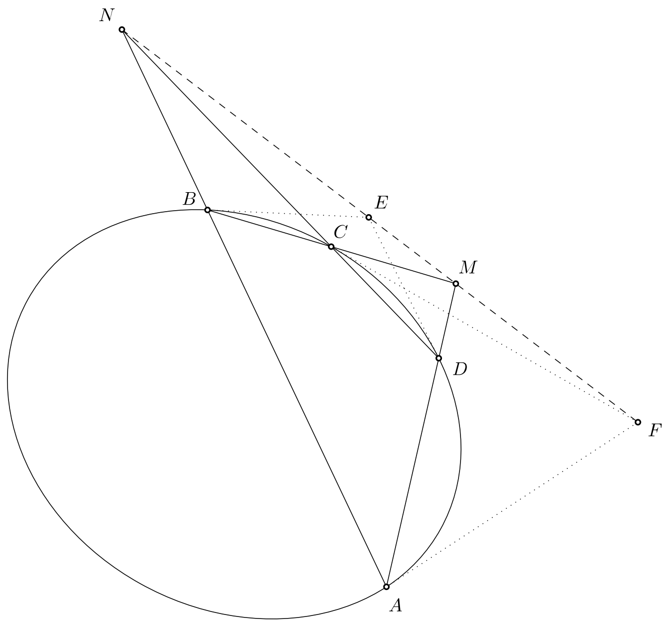
Bài toán 5. *Cho tam giác ABC trực tâm H. Đường tròn đường kính AB, AC cắt nhau tại X. Gọi ω là đường tròn tâm A bán kính AX. Gọi M là trung điểm của BC. Đường thẳng MH cắt ω tại E, F. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp các tam giác BCE và BCF tiếp xúc ω.*

Bài toán trên còn có thêm một tính chất như sau

Bài toán 6. *Cho tam giác ABC trực tâm H. Đường tròn đường kính AB, AC cắt nhau tại X. Gọi ω_A là đường tròn tâm A bán kính AX. Gọi M là trung điểm của BC. Đường thẳng MH cắt ω_A tại A_1 sao cho A_1 nằm giữa M và H. Định nghĩa tương tự cho B_1, C_1. Chứng minh rằng AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy.*

Các bài toán trên, đặc biệt là bổ đề được nêu ra có thể sử dụng định lý Pascal để giải quyết vấn đề. Như thế, việc phát triển từ tứ giác nội tiếp đường tròn sang tứ giác có bốn điểm nằm trên một conic là hoàn toàn có thể. Phần tiếp theo tác giả xin giới thiệu việc vận dụng định lý Pascal cho bốn điểm nằm trên một conic, từ đó cho thấy bản chất của định lý Brokard về tứ giác nội tiếp trong một đường tròn. Ta có bổ đề sau là phát triển rộng hơn của bổ đề đã nêu ở đầu tài liệu

Bổ đề 6. Cho bốn điểm A, B, C, D nằm trên một conic $\mathcal{C}$ tạo thành một tứ giác lồi không là hình thang. M, N lần lượt là giao điểm của AD và BC, AB và CD. P, Q là giao điểm tiếp tuyến của $\mathcal{C}$ tại A và C, B và D. Khi đó bốn điểm M, N, P, Q thẳng hàng.



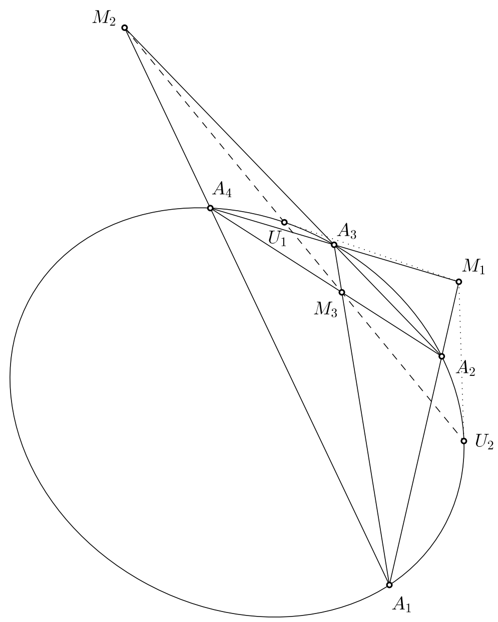
Chứng minh. Áp dụng định lý Pascal cho lục giác suy biến thành tứ giác $AABCCD$ ta có M, N, P thẳng hàng. Áp dụng định lý Pascal cho lục giác suy biến thành tứ giác $ABBCDD$ ta có M, N, Q thẳng hàng. Tóm lại ta có M, N, P, Q thẳng hàng.
Ta có điều phải chứng minh. □

Từ bổ đề trên ta có tiếp hệ quả như sau
Hệ quả. Cho conic $\mathcal{C}$ tiếp xúc các cạnh AB, BC, CD, DA của tứ giác $ABCD$ theo thứ tự tại M, N, P, Q. Khi đó AC, BD, MP, NQ đồng quy.

Rõ ràng bổ đề trên là một mở rộng đẹp của bổ đề đã nêu ở đầu bài đối với ellipse, parabol hay hyperbol. Trong trường hợp là ellipse, chỉ cần thực hiện một phép co thành hình tròn thì ta lại có ngay những ứng dụng mới mẻ nữa. Bổ đề tiếp theo chính là mở rộng của **Bổ đề 2**:

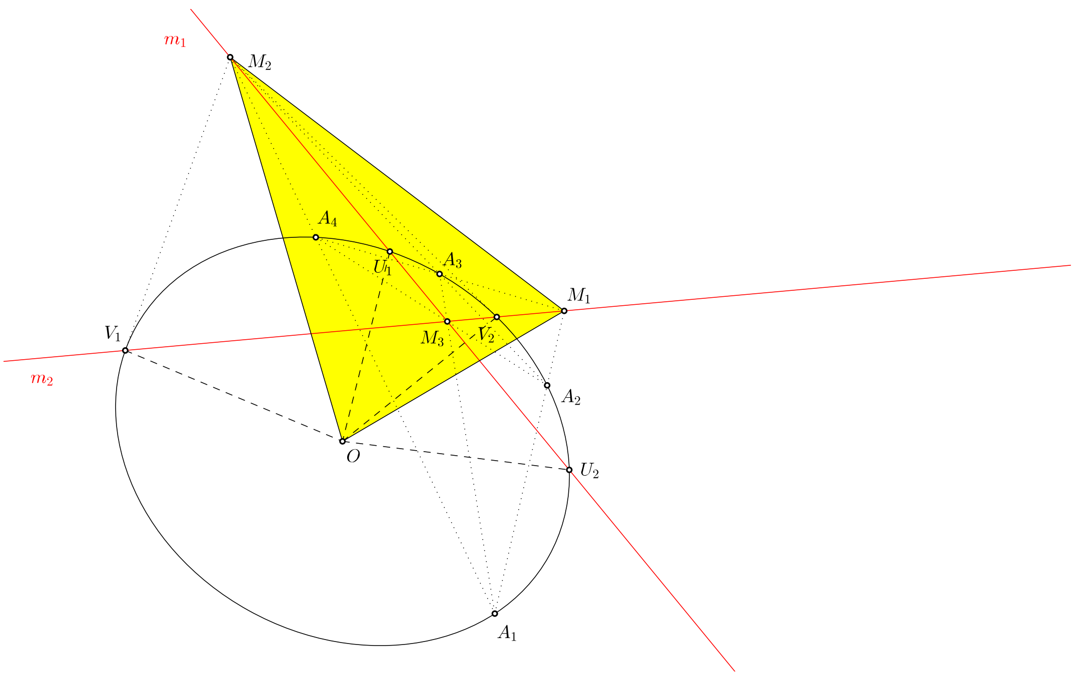
Gọi $A_1A_2A_3A_4$ là tứ giác không là hình thang nội tiếp trong một conic $\mathcal{C}$ và M_1, M_2, M_3 lần lượt là giao điểm của A_1A_2 và A_3A_4, A_2A_3 và A_4A_1, A_3A_1 và A_2A_4. Gọi $N_1, N_2, N_3, P_1, P_2, P_3$ là giao điểm của tiếp tuyến của conic tại A_1 và A_2, A_1 và A_4, A_1 và A_3, A_3 và A_4, A_2 và A_3, A_2 và A_4. Gọi U_1, U_2 là tiếp điểm của hai tiếp tuyến của conic đi qua M_1. Định nghĩa tương tự V_1, V_2 đối với M_2 và W_1, W_2 đối với M_3. **Bổ đề 1** cho ta ba bộ điểm thẳng hàng là $(M_2; M_3; N_1; P_1)$, $(M_3; M_1; N_2; P_2)$, $(M_1; M_2; N_3; P_3)$. Lần lượt gọi ba đường thẳng ấy là m_1, m_2, m_3.

Bổ đề 7. U_1, U_2 nằm trên m_1, V_1, V_2 nằm trên m_2 và W_1, W_2 nằm trên m_3.



Chứng minh. Trong mặt phẳng xạ ảnh tồn tại phép chiếu φ biến conic $\mathcal{C}$ thành đường tròn $\mathcal{C}'$. Như ta đã biết, phép chiếu φ bảo toàn sự thẳng hàng của các bộ điểm nên thông qua phép biến hình này ta có ngay **Bổ đề 2** và theo đó các bộ điểm điểm $(M_2; M_3; U_1; U_2)$, $(M_1; M_3; V_1; V_2)$, $(M_1; M_2; W_1; W_2)$ thẳng hàng.
Ta có điều phải chứng minh. □

Một kết quả đẹp lại được chứng minh. Gọi O là tâm của conic $\mathcal{C}$, từ kết quả này ta xét tam giác OM_1M_2 sau:



Khi conic $\mathcal{C}$ là đường tròn thì lần lượt theo tính chất của tiếp tuyến ta có $m_1 \perp OM_1$ và $m_2 \perp OM_2$ và như thế ta đã hiểu được tại sao định lý Brokard lại có phát biểu như vậy. Cuối cùng, tác giả xin đề xuất một số bài tập để bạn đọc có thể rèn luyện thêm những tư duy khác về định lý Brokard này.

3. Ứng dụng

Bài toán 7 (Trường hè Bắc Trung Bộ 2015 - Ngày 2). *Cho tam giác nhọn ABC có đường cao AH, trực tâm K. Đường thẳng BK cắt đường tròn đường kính AC tại D, E $(BD < BE)$. Đường thẳng CK cắt đường tròn đường kính AB tại F, G $(CF < CG)$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác DHF cắt BC tại điểm thứ hai là P.*

a) Chứng minh rằng các điểm G, H, P, E cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh rằng các đường thẳng BF, CD, PK đồng quy.

Bài toán 8. *Cho tứ giác lồi $ABCD$ không là hình thang nội tiếp đường tròn tâm O. Gọi E, F, G lần lượt là giao điểm của AB và CD, AD và BC, AC và BD. Gọi X, Y theo thứ tự là trung điểm của AC, BD. Kéo dài XY cắt EF tại Z. Kéo dài GZ cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác OFE tại Q. Đường tròn đường kính GQ cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác OFE tại K khác Q. Gọi H là điểm Miquel của tứ giác toàn phần $ABCDEF$. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp các tam giác KQG và KZH tiếp xúc nhau.*

Bài toán 9 (Lê Bá Khánh Trình). *Cho tam giác ABC nội tiếp (O) có B, C cố định, A chạy trên cung nhỏ BC. M, N là trung điểm AB, AC. Lấy P trên đường thẳng MN thỏa mãn $\widehat{BPC} + \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = \widehat{BAC}$. Đường tròn (ABP) cắt AC tại E, (ACP) cắt AB tại F. Chứng minh rằng (AFE) đi qua một điểm cố định.*

Bài toán 10 (Lê Bá Khánh Trình). *Cho tam giác ABC nội tiếp (O), trung tuyến AI cắt (O) tại D. AB cắt CD tại E. AC cắt BD tại F. (ABF) cắt (ACE) tại K. $(O_1), (O_2)$ là các đường tròn đi qua B tiếp xúc với AC tại A và đi qua C tiếp xuc với AB tại A. Chứng minh ba đường tròn $(O_1), (O_2)$ và (OK) có một điểm chung.*

Bài toán 11. *Cho tam giác ABC nội tiếp (O), điểm P nằm trong tam giác sao cho AP vuông góc BC. Đường tròn đường kính AP cắt đường thẳng AC, AB lần lượt tại E, F và cắt (O) tại điểm G khác A. Chứng minh rằng BE, CF, GP đồng quy.*

Bài toán 11 có thể xem ở [6].

Bài toán 12 (USA TST 2012). *Cho tam giác ABC nhọn, đường cao AA_1, BB_1, CC_1. Gọi A_2 là giao điểm của BC và B_1C_1. Định nghĩa B_2, C_2 tương tự. Gọi D, E, F theo thứ tự là trung điểm của BC, CA, AB. Chứng minh rằng đường thẳng vuông góc kẻ từ D tới AA_2, E tới BB_2 và F tới CC_2 đồng quy.*

Bài toán 13. *Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp (O). Gọi E, F lần lượt là giao điểm của AB và CD, AD và BC. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của AC, BD. Gọi H, K lần lượt là trực tâm của tam giác MEF và tam giác NEF. Chứng minh rằng $HNKM$ là hình bình hành.*

Bài toán 14 (Trần Quang Hùng). *Cho tam giác ABC. Đường tròn tâm K đi qua B, C cắt CA, AB lần lượt tại E, F. BE, CF cắt nhau tại H. D là hình chiếu của K xuống AH. M, N theo thứ tự di chuyển trên DE, DF sao cho $BM \perp BE, CN \perp CF$. Chứng minh rằng đường đối trung xuất phát từ đỉnh A của tam giác ABC chia đôi cạnh MN.*

Bài toán trên có tham khảo trong [7]. Hơn nữa ta còn có thêm hai mở rộng sau

Bài toán 15 (Trần Quang Hùng). *Cho tam giác ABC và điểm P. AP, BP, CP lần lượt cắt BC, CA, AB tại D, E, F. Trên DE, DF lần lượt lấy M, N sao cho $BM \parallel AC, CN \parallel AB$. Gọi S, T theo thứ tự là trung điểm của EF, MN. Chứng minh rằng A, S, T thẳng hàng.*

Bài toán 16 (Trần Quang Hùng). *Cho tam giác ABC và điểm D nằm trên cạnh BC. (DAB), (DAC) cắt CA, AB lần lượt tại E, F. M, N nằm trên DE, DF sao cho $BM \parallel AC, CN \parallel AB$. Gọi S, T lần lượt là trung điểm của EF, MN. Chứng minh rằng ST song song với đường đối trung xuất phát từ đỉnh A của tam giác ABC.*

Bài toán 17 (Chọn đội tuyển quốc gia Khoa học tự nhiên 2014). *Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp. M, N lần lượt là trung điểm của CD, AB. P nằm trên CD sao cho $\dfrac{PD}{PC} = \dfrac{BD^2}{AC^2}$. AC cắt BD tại E. Gọi H là hình chiếu của E lên PN. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp các tam giác HMP và EDC tiếp xúc nhau.*

Trên đây là tổng hợp của tác giả về định lý Brokard, xin cảm ơn anh **Ngô Quang Dương** - lớp 12A2 trường THPT chuyên KHTN đã có những trao đổi quý báu giúp bài viết được hoàn thiện hơn.

Tài liệu tham khảo

[1] Định lý Brokard.
http://www.imomath.com/index.php?options=334&lmm=0.

[2] Đỗ Thanh Sơn, *Một số chuyên đề Hình học phẳng bồi dưỡng học sinh giỏi Trung học phổ thông*, NXB Giáo dục, 2013.

[3] Nguyễn Văn Nho, *Những định lí chọn lọc trong hình học phẳng qua các kì thi Olympic*, NXB Giáo dục, 2007.

[4] Romanian Master of Mathematics 2013 - Problem 3.
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h523072p3558896

[5] IMO 2015 - Problem 3.
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h1112748p5079655

[6] Concurrent problem.
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h1161051p5527875

[7] Symmedian bisects segment.
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h1192618p5839116

TỨ GIÁC NGOẠI TIẾP ĐƯỜNG TRÒN

Đỗ Xuân Anh
(Trường THPT Chuyên KHTN, Hà Nội)

Tứ giác ngoại tiếp là một chủ đề không quá mới đối với bất kỳ ai đam mê với môn toán và đặc biệt là môn hình học nhưng có không nhiều những tài liệu viết về chủ đề này. Vậy nên trong bài viết này tôi xin đề cập đến vấn đề này với kiến thức và những ứng dụng cơ bản nhất của tứ giác ngoại tiếp.

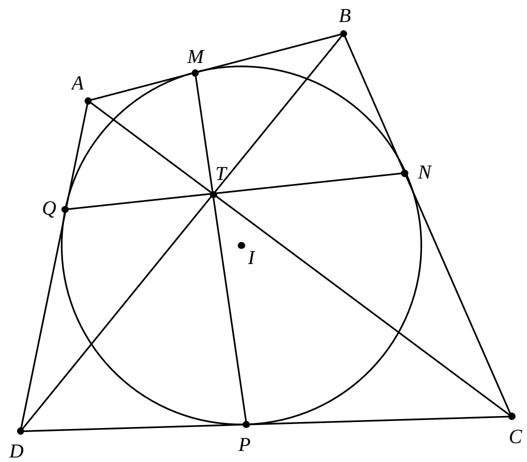
1. Một số tính chất cơ bản của tứ giác ngoại tiếp đường tròn

Khi nhắc tới tứ giác ngoại tiếp đường tròn, chúng ta nên để ý đến những tính chất hay sử dụng như sau:
Cho tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn (I). (I) tiếp xúc AB, BC, CD, DA lần lượt tại M, N, P, Q.
Đặt $AM = AQ = a$, $BM = BN = b$, $CN = CP = c$, $DQ = DP = d$.

Định lý 1.(Định lý Pithot) $AB + CD = BC + DA$.

Định lý 2.

1. (Định lý Newton) AC, BD, MP, NQ đồng quy tại T
2. $\dfrac{\overline{AT}}{\overline{CT}} = \dfrac{-a}{c}$, $\dfrac{\overline{BT}}{\overline{DT}} = \dfrac{-b}{d}$.



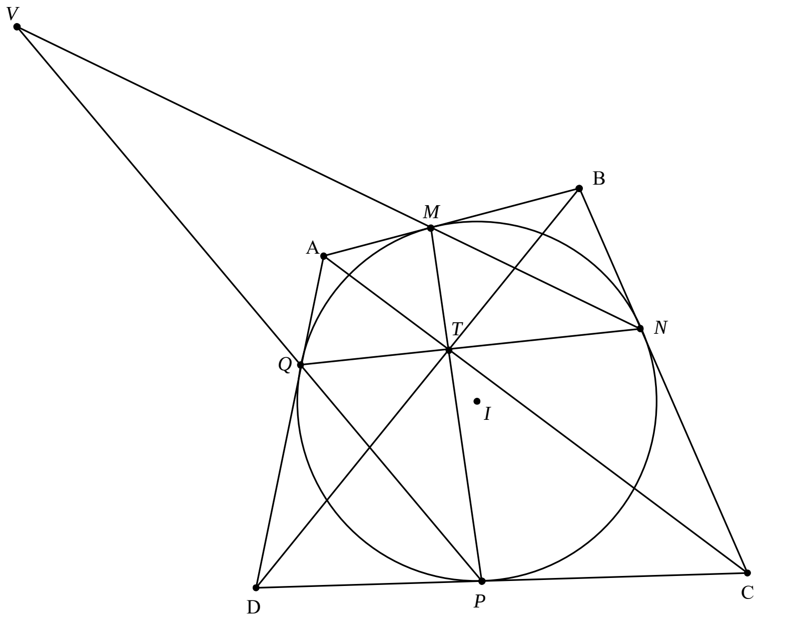
Chứng minh. Gọi T_1 là giao điểm của AC với MP và T_2 là giao điểm của AC với NQ.

Ta sẽ chứng minh $T_1 \equiv T_2 \equiv T$. Thật vậy, áp dụng định lí sin, ta có:

$$\begin{aligned}\frac{T_1A}{T_1C} &= \frac{AM}{\sin\angle AT_1M}\cdot\frac{\sin\angle CT_1M}{CP}\cdot\frac{\sin\angle AMP}{\sin\angle CPM}\\ &= \frac{AM}{CP}\end{aligned}$$

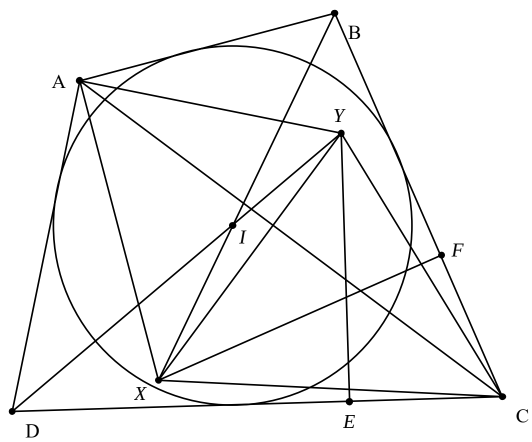
Tương tự, $\dfrac{T_2A}{T_2C} = \dfrac{a}{c}$ nên T_1, T_2, T trùng nhau. Tính chất được chứng minh. □

Định lý 3. AC, MN, PQ đồng quy tại V và $\dfrac{\overline{AV}}{\overline{CV}} = \dfrac{a}{c}$, $\dfrac{\overline{BV}}{\overline{DV}} = \dfrac{b}{d}$. Từ đó suy ra $(AC, TV) = -1$.



Chứng minh. Lấy V trên AC sao cho $\dfrac{\overline{AV}}{\overline{CV}} = \dfrac{a}{c}$. Áp dụng định lí Menelaus cho $\triangle ABC$ ta có M, N, V thẳng hàng. Tương tự suy ra P, Q, V thẳng hàng. Vậy tính chất trên cũng được chứng minh. □

Định lý 4. Đường thẳng qua A vuông góc với AB cắt BI tại X, đường thẳng qua A vuông góc với AD cắt DI tại Y thì XY vuông góc với AC.



Chứng minh. Gọi F là hình chiếu của X lên BC; E là hình chiếu của Y lên CD.
Ta có $AX^2 - XC^2 = AX^2 - XF^2 - FC^2 = -FC^2$.

$$AY^2 - YC^2 = AY^2 - YE^2 - EC^2 = -EC^2.$$

Mà $FC = BC - AB = DC - AD = EC$ nên $AX^2 - XC^2 = AY^2 - YC^2$.

$$\begin{aligned} XA^2 + CY^2 - AY^2 - CX^2 &= XA^2 + AC^2 - CX^2 - (AY^2 + AC^2 - CY^2) \\ &= 2\overrightarrow{AX} \cdot \overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AY} \cdot \overrightarrow{AC} \\ &= 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{YX} \end{aligned}$$

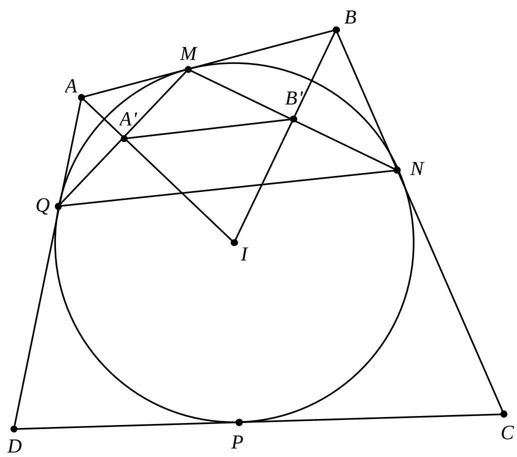
Do đó $AC \perp XY$. Vậy ta đã chứng minh xong định lí 4. □

Ngoài ra, chúng ta cũng nên biết một số công thức tính các yếu tố trong tứ giác ngoại tiếp đường tròn. Việc chứng minh xin dành cho các bạn đọc.

Trong các tính chất dưới đây, ta đặt r là bán kính đường tròn nội tiếp tứ giác $ABCD$ và

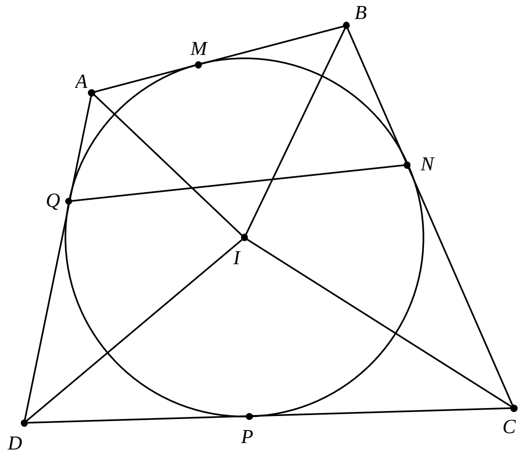
$$\angle DAB = \alpha,\ \angle ABC = \beta,\ \angle BCD = \gamma,\ \angle CDA = \delta.$$

Định lý 5. $AB = \dfrac{NQ}{2}.\dfrac{IA.IB}{r^2}$.



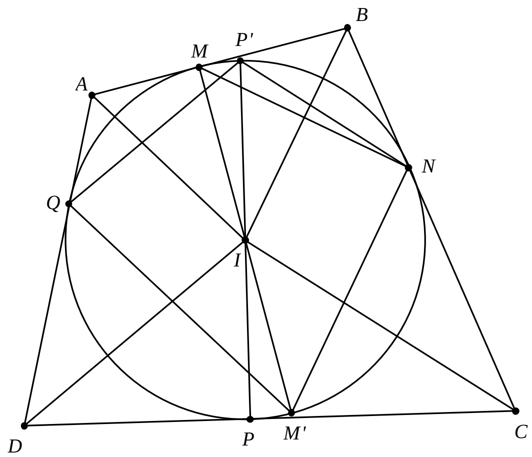
Chứng minh. Gọi IA, IB lần lượt cắt QM, MN tại A', B' Ta có $IA.IA' = IB.IB' = r^2$ nên $\triangle IA'B' \sim \triangle IBA$ suy ra $\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{IA'}{IB}$. Từ đó, $AB = \dfrac{IB.A'B'}{IA'} = \dfrac{IB.IA}{r^2}.\dfrac{NQ}{2}$. Vậy định lí 5 được chứng minh. □

Định lý 6. $\dfrac{IB^2}{AB.BC} = \dfrac{ID^2}{CD.DA}$.



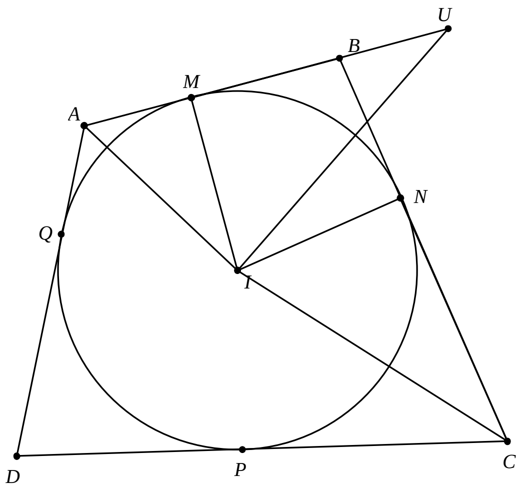
Chứng minh. Từ định lí 5, ta có $CD = \dfrac{IC.ID}{r^2}.\dfrac{NQ}{2}$ suy ra $\dfrac{AB}{CD} = \dfrac{IA.IB}{IC.ID}$. Tương tự $\dfrac{BC}{AD} = \dfrac{IB.IC}{IA.ID}$ suy ra $\dfrac{AB}{CD} \cdot \dfrac{BC}{AD} = \dfrac{IB^2}{ID^2}$ hay $\dfrac{IB^2}{AB.BC} = \dfrac{ID^2}{CD.DA}$. □

Định lý 7. $IA.IC + IB.ID = \sqrt{AB \cdot BC \cdot CD \cdot DA}$



Chứng minh. Gọi M', P' lần lượt đối xứng M, P qua I. Ta có $\triangle MIB \sim \triangle NM'M$ suy ra $\dfrac{M'N}{MI} = \dfrac{MM'}{IB}$ hay $M'N = \dfrac{MM'.MI}{IB} = \dfrac{2r^2}{IB}$. Tương tự $M'Q = \dfrac{2r^2}{IA}$, $P'Q = \dfrac{2r^2}{ID}$, $P'N = \dfrac{2r^2}{IC}$. Áp dụng định lí Ptoleme cho tứ giác $P'NM'Q$ và định lí 5, suy ra $IA.IC + IB.ID = \sqrt{AB \cdot BC \cdot CD \cdot DA}$. Vậy định lý được chứng minh. □

Định lý 8. $IA.IC = \dfrac{(a+c).r}{\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}}$.

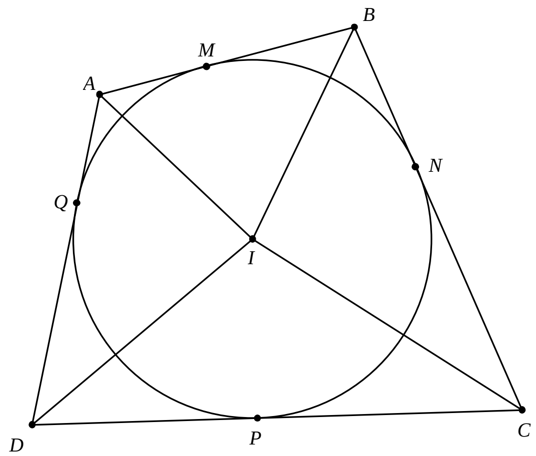


Chứng minh. Lấy U trên tia MB sao cho $MU = NC$ suy ra $IU = IC$ nên

$$S_{AIU} = \frac{1}{2}(a+c).r = \frac{1}{2}IA.IU.\sin\angle AIU = \frac{1}{2}IA.IC.\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}$$

hay $IA.IC = \dfrac{(a+c)\cdot r}{\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}}$. Vậy định lí được chứng minh. □

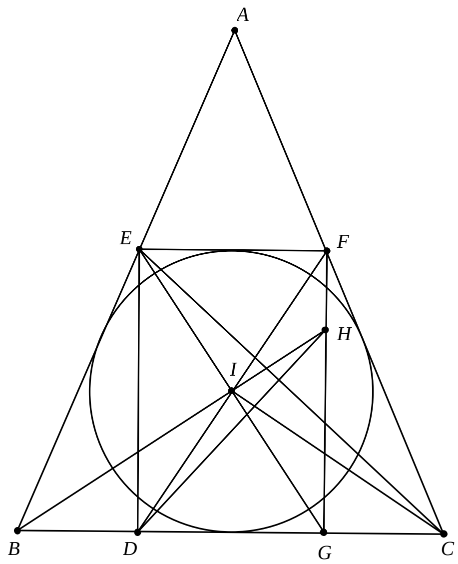
Định lý 9.$S_{ABCD} = \sqrt{AB\cdot BC\cdot CD\cdot DA}.\sin\dfrac{\alpha+\gamma}{2}$.



Chứng minh. Theo định lí 7 và 8, ta có $IA.IC+IB.ID = \dfrac{(a+b+c+d)\cdot r}{\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}} = \sqrt{AB.BC.CD.DA}$ suy ra $S_{ABCD} = (a+b+c+d)\cdot r = \sqrt{AB\cdot BC\cdot CD\cdot DA}.\sin\dfrac{\alpha+\gamma}{2}$. Ta có điều phải chứng minh. □

2. Một số bài tập áp dụng

Bài toán 1. *$\triangle ABC$ cân ngoại tiếp đường tròn (I). Lấy E thuộc AB, F thuộc AC sao cho EF là tiếp tuyến của đường tròn (I) và $EF \parallel BC$. ED vuông góc với BC tại D. Gọi H là giao điểm của BI với đường thẳng qua F vuông góc với BC. Chứng minh rằng DH vuông góc với EC.*

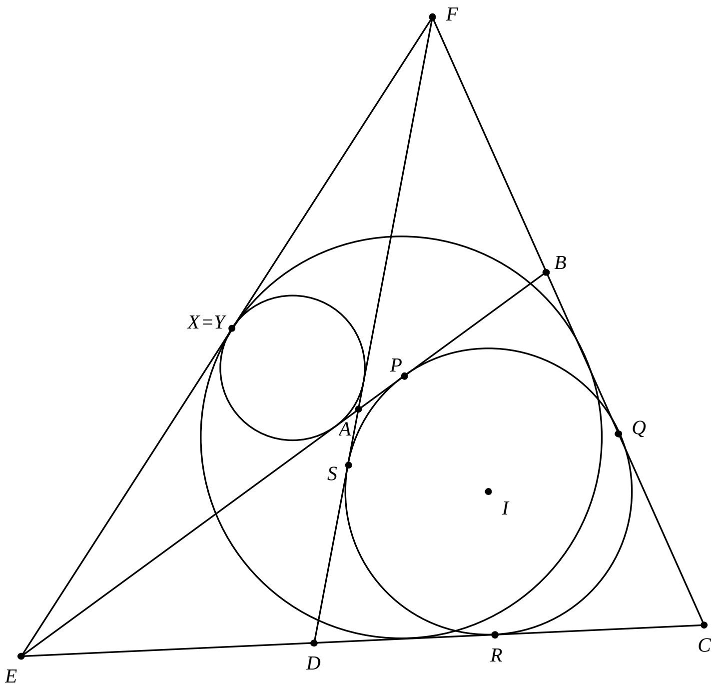


Chứng minh. Gọi FH cắt BC tại G. Dễ thấy E, I, G thẳng hàng và F, I, D thẳng hàng.Ta có $\angle BEG = \angle BEI = \angle IEF = \angle GEF = \angle EGB$ nên tam giác BEG cân tại B, suy ra $BE = BG$. Do đó $\Delta BEH = \Delta BGH$ (c.g.c) vì vậy $\angle BEH = \angle BGH = 90^{\circ}$ hay EH vuông góc EB tại E. Áp dụng định lý 4, suy ra DH vuông góc với EC. Vậy bài toán được chứng minh. □

Nhận xét. Chúng ta có thể sử dụng tính chất 4 để chứng minh một bài toán trong Mathley [5] bởi thầy **Trần Quang Hùng** như sau

Bài toán. $\triangle ABC$, đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc CA, AB tại E, F. Lấy P di chuyển trên EF. BP cắt CA tại M, MI cắt đường thẳng qua C vuông góc AC tại N. Chứng minh rằng đường thẳng qua N vuông góc với PC luôn đi qua điểm cố định khi P di chuyển.

Bài toán 2. *Cho tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn (I). AB giao CD tại E, AD giao BC tại F. Chứng minh rằng đường tròn nội tiếp $\triangle AEF$, $\triangle CEF$ tiếp xúc tại một điểm trên EF.*



Chứng minh. (I) lần lượt tiếp xúc AB, BC, CD, DA tại P, Q, R, S; đường tròn (I_1) và (I_2) lần lượt là đường tròn nội tiếp $\triangle AEF$ và $\triangle CEF$, hai đường tròn lần lượt tiếp xúc EF tại X, Y. Ta có

$$FC - CE = FQ + QC - CR - RE = FS - EP = FA + AS - AP - EA = FA - EA$$

.

Mặt khác $\begin{cases} FX = \frac{1}{2}(FE + FA - EA) \\ FY = \frac{1}{2}(FE + FC - CE) \end{cases}$ nên, $FX = FY$ suy ra $X \equiv Y$. Vậy bài toán được chứng minh. □

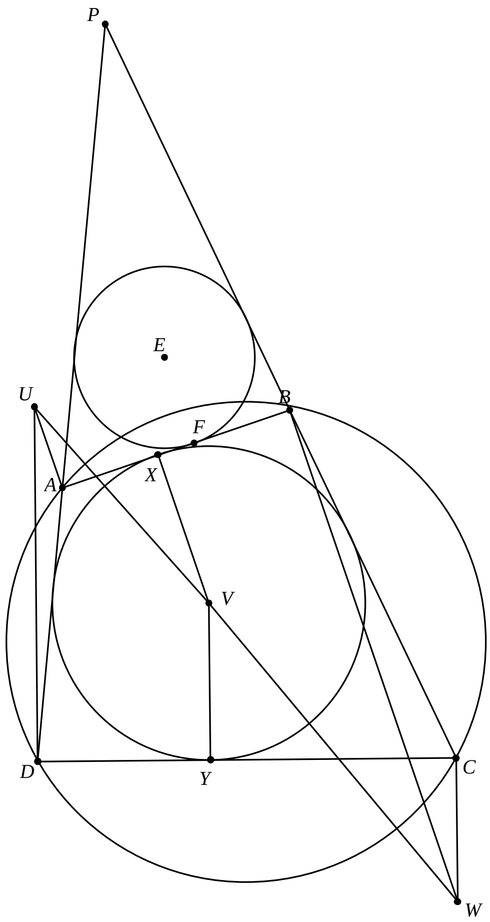
Nhận xét. Ngoài ra, nếu để ý kĩ ta thấy trên hình vẽ cũng có hai tam giác có đường tròn nội tiếp tiếp xúc nhau là $\triangle ABC$, $\triangle ADC$ (Tương tự là cặp tam giác $\triangle ABD$, $\triangle CBD$).

Trong bài toán, ta để ý rằng $FC - CE = FA - EA$ chính là định lý Pithot mở rộng cho tứ giác lừm ngoại tiếp đường tròn. Áp dụng định lý trên ta có thể chứng minh được bài toán sau.

Bài toán. Tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn (I). AB, AD lần lượt cắt CD, BC tại E, F. Gọi EP, FM cắt BC, CD tại Q, R; EP cắt FM tại N. Chứng minh rằng nếu tứ giác $AMNP$ ngoại tiếp thì $QNRC$ ngoại tiếp.

Bài toán tiếp theo được đề nghị bởi A.Golovanov trên diễn đàn AoPS [1].

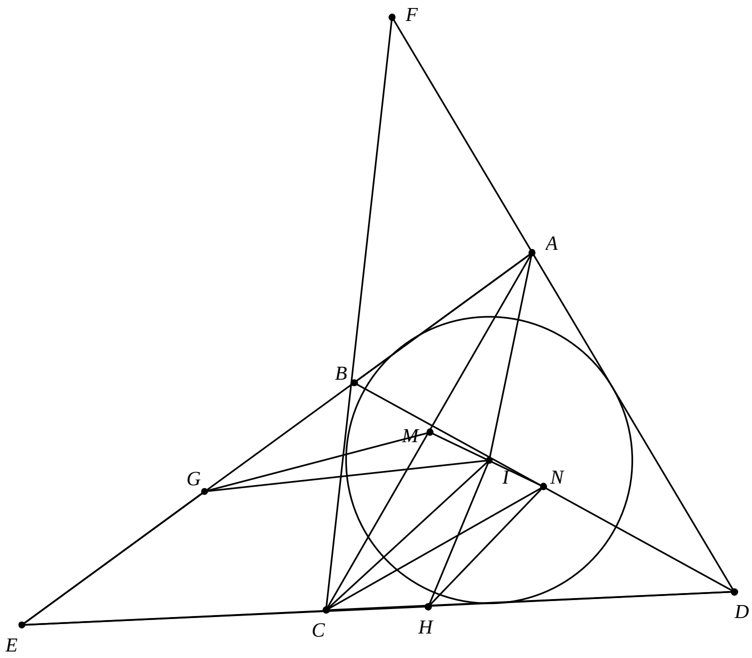
Bài toán 3. *Cho tứ giác $ABCD$ vừa ngoại tiếp vừa nội tiếp. Đường tròn nội tiếp tiếp xúc với AB, CD tại X, Y. Đường thẳng vuông góc với AB, CD tại A, D cắt nhau tại U; tại X, Y cắt nhau tại V; tại B, C cắt nhau tại W. Chứng minh rằng U, V, W thẳng hàng.*



Chứng minh. AD cắt BC tại P, đường tròn (E) là đường tròn nội tiếp $\triangle PAB$, tiếp xúc với AB tại F. UV cắt đường thẳng qua C vuông góc CD tại W'. Ta có $\triangle PAB \sim \triangle PCD$ (g.g) và X, F đối xứng với nhau qua trung điểm của AB. Nên $\dfrac{UV}{W'V} = \dfrac{DY}{YC} = \dfrac{BF}{FA} = \dfrac{AX}{XB}$, suy ra $AU \parallel XV \parallel BW'$. Từ đó $W' \equiv W$. Vậy bài toán được chứng minh. □

Tiếp theo là một kết quả hết sức nổi tiếng của tứ giác ngoại tiếp.

Bài toán 4 (Đường thẳng Newton của tứ giác ngoại tiếp). *Cho tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn (I) thì trung điểm hai đường chéo AC, BD và I thẳng hàng.*



Chứng minh. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC, BD. Ta có $AB + CD = AD + BC$ nên $S_{IAB} + S_{ICD} = S_{IAD} + S_{IBC} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$. Ta xét 2 trường hợp:

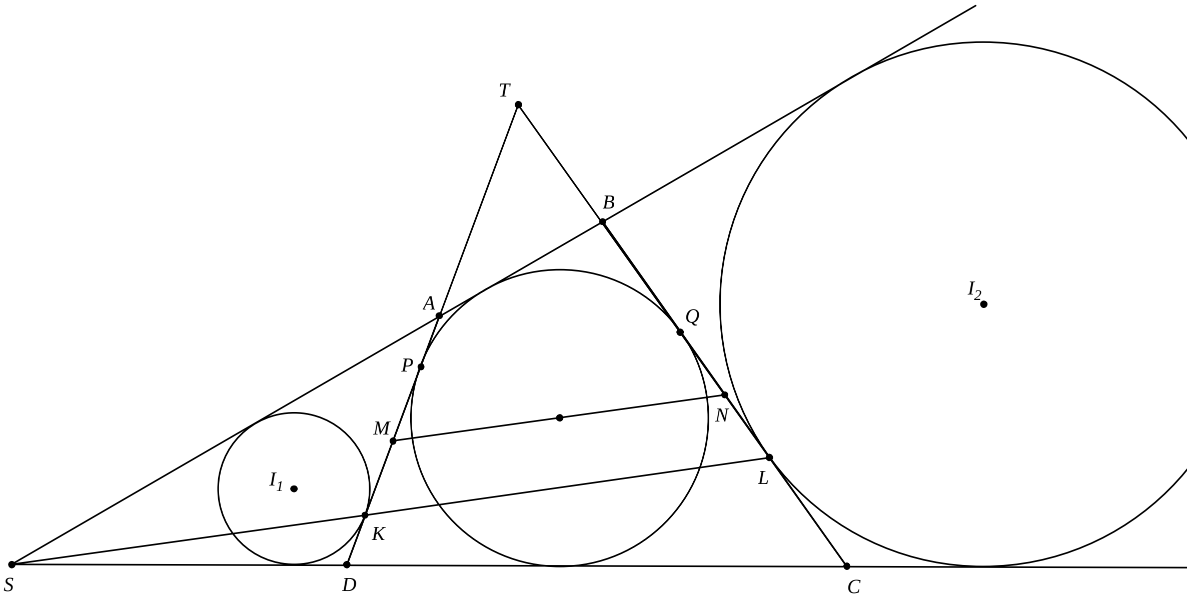
Trường hợp 1. $AB \parallel CD$ thì dễ thấy trung điểm AC, BD và I cách đều AB, CD nên chúng thẳng hàng.

Trường hợp 2. Giả sử AB cắt CD tại E. Lấy G trên tia EA, lấy H trên tia ED sao cho $EG = AB$, $EH = CD$. Ta có $S_{IEG} + S_{IEH} = S_{IAB} + S_{ICD} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$ nên $S_{IHG} = \frac{1}{2}S_{ABCD} - S_{EHG}$. Dễ thấy các điểm M, N có tính chất tương tự nên $\begin{cases} S_{NAB} + S_{NCD} = \frac{1}{2}S_{ABCD} \\ S_{MAB} + S_{MCD} = \frac{1}{2}S_{ABCD} \end{cases}$. Suy ra $\begin{cases} S_{NHG} = \frac{1}{2}S_{ABCD} - S_{EHG} \\ S_{MHG} = \frac{1}{2}S_{ABCD} - S_{EHG} \end{cases}$ Do đó $S_{IHG} = S_{MHG} = S_{NHG}$ nên I, M, N thẳng hàng.
Vậy bài toán được chứng minh. □

Tôi đề xuất thêm bài toán sau để bạn đọc ứng dụng định lý trên.

Bài toán. Tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn (I). Đường tròn (I) tiếp xúc AB, BC, CD, DA tại E, F, G, H. Chứng minh rằng nếu I thuộc FH thì I thuộc EG.
Bài toán sau tham khảo [2]

Bài toán 5. *Cho tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn (I). (I) tiếp xúc AD, BC tại P, Q. Gọi AB cắt CD tại S ($A \in SB$). Gọi (I_1) là đường tròn nội tiếp $\triangle SAD$ và tiếp xúc với AD tại K. Gọi (I_2) là đường tròn bàng tiếp ứng với đỉnh S của $\triangle SBC$ và tiếp xúc BC tại L. Lấy M, N lần lượt là trung điểm của AD, BC. Biết rằng $S \in LK$. Chứng minh rằng I thuộc MN và $IA.IC = IB.ID$.*



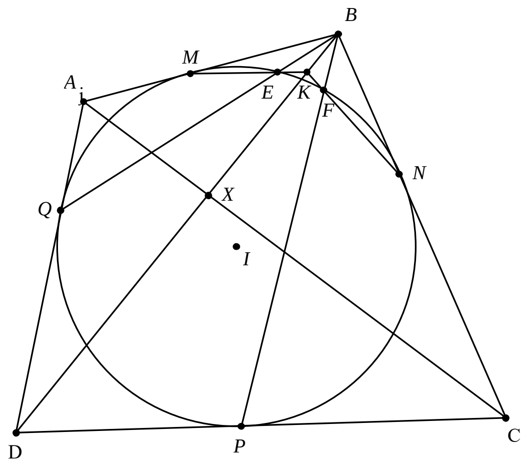
Lời giải theo Luis González. Ta sẽ sử dụng 2 bổ đề.

Bổ đề 1. $\triangle ABC$ ngoại tiếp đường tròn (I). Đường tròn bàng tiếp (I_a) ứng với góc A của $\triangle ABC$ tiếp xúc BC tại D. Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh $AD \parallel IM$. (IM được gọi là đường thẳng Nagel).

Bổ đề 2. $\triangle ABC$ ngoại tiếp đường tròn (I). Đường tròn đó tiếp xúc BC tại D. Gọi I_a là tâm đường tròn bàng tiếp góc A của $\triangle ABC$. Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng $AD \parallel I_aM$. (I_aM được gọi là đường thẳng Gergonne).

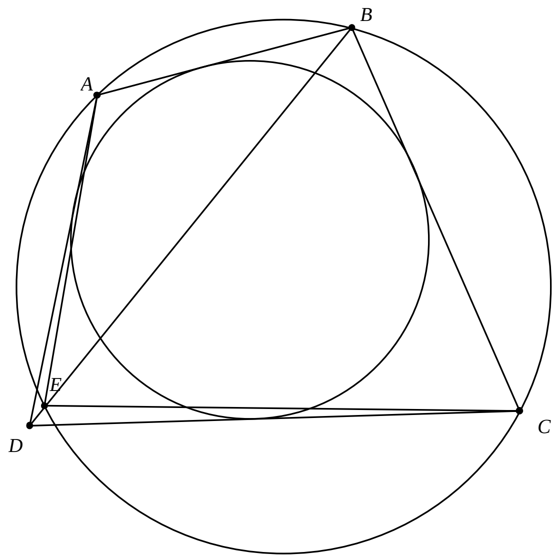
Áp dụng 2 bổ đề vào bài toán, ta có $IN \parallel SL \parallel IM \parallel SK$. Lại có S, K, L thẳng hàng do đó I, M, N thẳng hàng. Ta thấy P, K đối xứng với nhau qua M (M là trung điểm của AD) và Q, L đối xứng với nhau qua N (N là trung điểm của BC) suy ra $PQ \parallel MN \parallel KL$. Gọi AD cắt BC tại T. Do đó $\triangle TMN \sim \triangle TPQ$ (g.g). Mặt khác $\triangle TMN$ cân tại T nên $\angle TNI = 90^\circ - \dfrac{\angle ATB}{2} = \angle AIB$ (do I là tâm đường tròn bàng tiếp góc T của $\triangle TAB$). Suy ra $\triangle IAB \sim \triangle NIB$ (g.g) do đó $\dfrac{IB}{IA} = \dfrac{NB}{NI} = \dfrac{NC}{NI}$. Tương tự, ta có $\triangle INC \sim \triangle DIC$ (g.g) suy ra $\dfrac{IC}{ID} = \dfrac{NC}{NI}$. Từ đó, ta có $\dfrac{IC}{ID} = \dfrac{IB}{IA}$ nên $IA.IC = IB.ID$. Vậy bài toán được chứng minh. □

Bài toán 6. *Tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn (I). Đường tròn (I) tiếp xúc với AB, BC, CD, DA lần lượt tại M, N, P, Q. BQ, BP lần lượt cắt đường tròn (I) tại E, F. Chứng minh rằng ME, NF, BD đồng quy.*



Chứng minh. Gọi ME giao NF tại K. Ta có AC, BD, MP, NQ đồng quy tại X. Áp dụng định lý Pascal cho lục giác $MEQNFP$ suy ra K, B, X thẳng hàng do đó ME, NF, BD đồng quy. Vậy bài toán được chứng minh. □

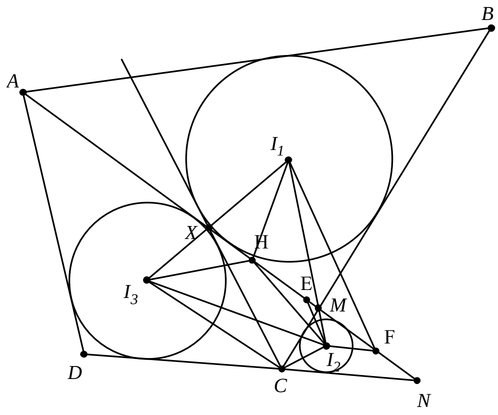
Bài toán 7 (Romania TST 2012). *Cho tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn sao cho $\angle ABC + \angle ADC < 180^\circ$ và $\angle ABD + \angle ACB = \angle ACD + \angle ADB$. Chứng minh rằng một trong hai đường chéo của tứ giác $ABCD$ đi qua trung điểm đường chéo còn lại.*



Chứng minh. Đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ cắt BD tại E. Dễ dàng nhận thấy $\angle DAE = \angle DCE$. Áp dụng định lý sin, ta có $\dfrac{DA}{\sin\angle AED} = \dfrac{DE}{\sin\angle DAE} = \dfrac{DE}{\sin\angle DCE} = \dfrac{DC}{\sin\angle DEC}$.
Suy ra $\dfrac{DA}{DC} = \dfrac{\sin\angle AED}{\sin\angle DEC} = \dfrac{\sin\angle ACB}{\sin\angle BAC} = \dfrac{AB}{BC}$. Lại có tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn do đó $AB = BC + DA - CD$. Nên $\dfrac{DA}{DC} = \dfrac{BC + DA - CD}{BC}$.
Hay $(BC - CD)(DA - CD) = 0$ suy ra $BC = CD$ hoặc $CD = DA$.
Khi $BC = CD$ thì $AB = DA$. Do vậy AC là trung trực của BD hay AC đi qua trung điểm của BD. Chứng minh tương tự với trường hợp $CD = DA$. Vậy bài toán được chứng minh. □

Đặc biệt, trong IMO Shortlist cũng từng xuất hiện nhiều bài toán liên quan đến tứ giác ngoại tiếp và một số bài toán sau là điển hình.

Bài toán 8 (IMO Shortlist 2009). *Cho tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn. Một đường thẳng (d) bất kỳ qua A cắt BC tại M, cắt CD tại N. Gọi $(I_1), (I_2), (I_3)$ là đường tròn nội tiếp $\triangle ABM$, $\triangle MNC$, $\triangle NDA$. Chứng minh rằng trực tâm $\triangle I_1I_2I_3$ nằm trên (d).*

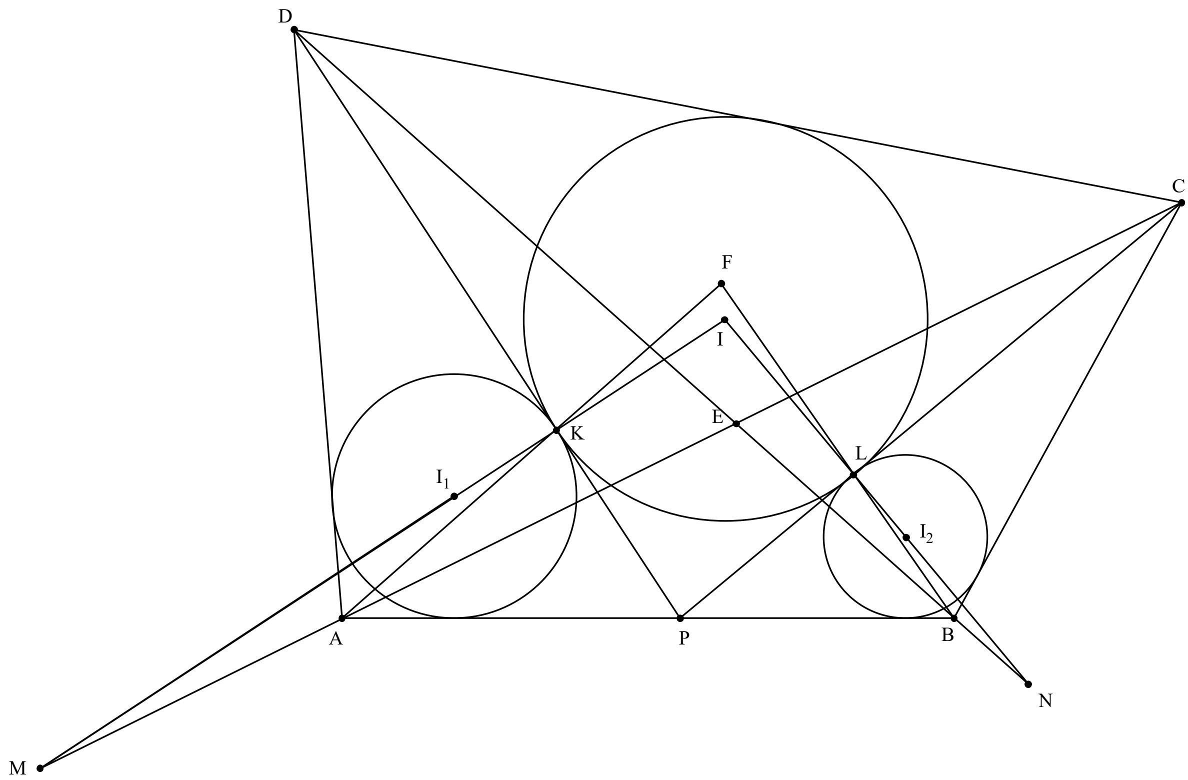


Chứng minh. Gọi X là giao điểm của (d) với tiếp tuyến kẻ từ C với đường tròn (I_1) nên $ABCX$ là tứ giác ngoại tiếp hay $CX = BC + AX - AB$. Lại có $ABCD$ ngoại tiếp nên $AD = AB + CD - BC$. Suy ra $CX + AD = AX + CD$ hay tứ giác $AXCD$ ngoại tiếp đường tròn(I_3). Gọi E, F lần lượt đối xứng với C qua I_2I_3, I_2I_1; H là trực tâm $\triangle I_1I_2I_3$. Dễ thấy E, F thuộc (d). Lại có FI_2HI_1, I_3HEI_2 nội tiếp, do đó $\angle FHI_2 = \angle FI_1I_2 = \angle CI_1I_2 = \angle CI_3I_2 = \angle EI_3I_2 = \angle EHI_2$ hay H thuộc (d). Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Trong quá trình tìm hiểu, tôi nhận thấy bài toán số 5 trong đề thi VN TST 2015 được coi là mở rộng từ bài toán trên.

Bài toán. $\triangle ABC$ nhọn và có điểm P nằm trong tam giác sao cho $\angle APB = \angle APC = \alpha$ và $\alpha > 180^\circ - \angle BAC$. Đường tròn ngoại tiếp $\triangle APB$ cắt AC ở E, đường tròn ngoại tiếp $\triangle APC$ cắt AB ở F. Q là điểm nằm trong $\triangle AEF$ sao cho $\angle AQE = \angle AQF$. Gọi D là điểm đối xứng với Q qua EF, phân giác $\angle EDF$ cắt AP tại T.
a) Chứng minh rằng $\angle DET = \angle ABC, \angle DFT = \angle ACB$.
b) Đường thẳng PA cắt các đường thẳng DE, DF lần lượt tại M, N. Gọi I, J lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các $\triangle PEM$, $\triangle PFN$ và K là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle DIJ$. Đường thẳng DT cắt (K) tại H. Chứng minh rằng HK đi qua tâm đường tròn nội tiếp của $\triangle DMN$.

Bài toán 9 (IMO Shortlist 2007). *Cho điểm P nằm trên cạnh AB của tứ giác $ABCD$. Gọi (I), (I_1), (I_2) lần lượt là đường tròn nội tiếp $\triangle CPD$, $\triangle APD$, $\triangle CPB$. Biết rằng đường tròn (I) tiếp xúc vời đường tròn (I_1), (I_2) tại K, L. Gọi E, F lần lượt là giao điểm của AC, BD và AK, BL. Chứng minh rằng E, I, F thẳng hàng.*

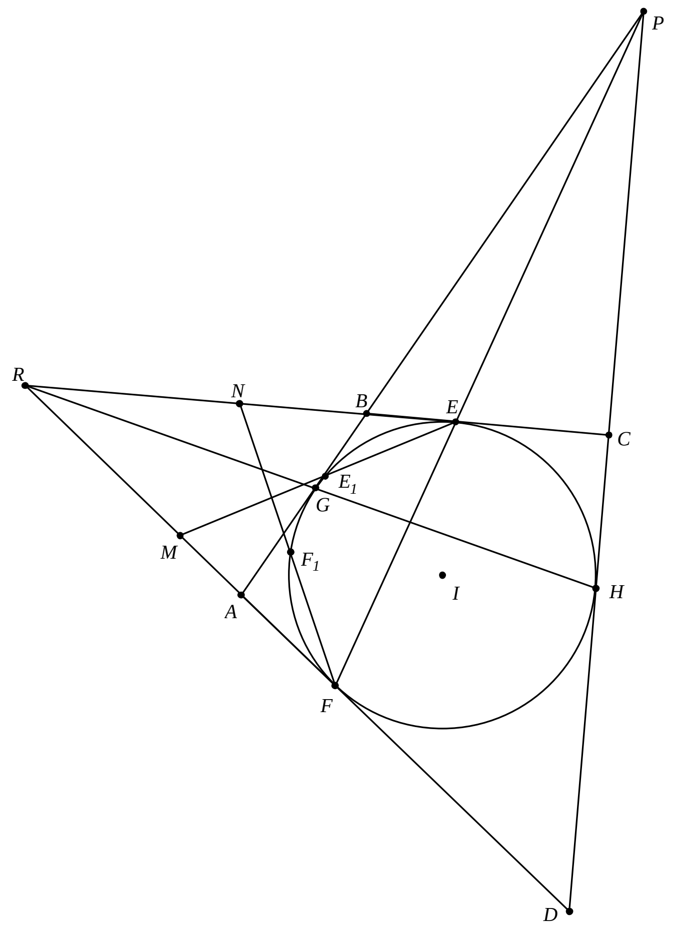


Chứng minh. Gọi M, N là giao điểm của hai tiếp tuyến chung ngoài của (I), (I_1) và (I), (I_2).

Ta có $\dfrac{AD + DP - AP}{2} = \dfrac{DP + DC - PC}{2}$ và $\dfrac{CP + BC - BP}{2} = \dfrac{DC + CP - DP}{2}$,
nên $\begin{matrix} AD + CP = AP + CD \\ BP + CD = DP + BC \end{matrix}$ hay tứ giác $APCD$, $BPDC$ ngoại tiếp đường tròn.

Áp dụng định lý Monge & d'Alembert cho bộ ba đường tròn (I), (I_1), $(APCD)$ và (I), (I_2), $(BPDC)$ thì $\overline{M, A, C}$ và $\overline{N, B, D}$. Tương tự, áp dụng định lý Monge & d'Alembert cho bộ ba đường tròn (I), (I_1), (I_2) suy ra KL, AB, MN đồng quy. Ta tiếp tục áp dụng định lý Desargues cho $\triangle KAM$ và $\triangle LBN$; suy ra E, I, F thẳng hàng. Vậy ta có điều phải chứng minh. □

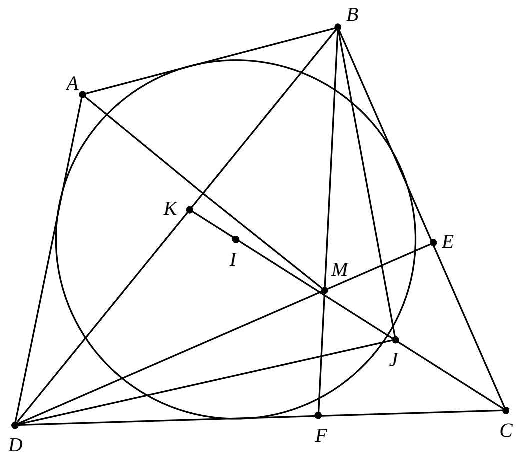
Bài toán 10 (Sharygin Geometry Olympiad 2014). *Cho tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn (I). Đường tròn (I) tiếp xúc BC, DA tại E, F sao cho AB, EF, CD đồng quy. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AED và BFC lần lượt cắt (I) tại điểm thứ 2 lần lượt là E_1, F_1. Chứng minh rằng $EF \parallel E_1F_1$.*



Chứng minh. Đường tròn (I) tiếp xúc với AB và CD lần lượt tại G và H. Gọi P là điểm đồng quy của AB, EF, CD suy ra BC, AD, GH đồng quy tại R. Lấy EE_1 giao AD tại M. Ta có $\begin{cases} \overline{MF}^2 = \overline{ME}.\overline{ME_1} \\ \overline{ME}.\overline{ME_1} = \overline{MA}.\overline{MD} \end{cases}$ (do M là tâm đẳng phương của $(I), (AED), (AID)$). Suy ra$\overline{MF}^2 = \overline{MA}.\overline{MD}$. Áp dụng định lý Ceva cho $\triangle PAD$ với AC, BD, PF đồng quy, ta có $\frac{\overline{FA}}{\overline{FD}} \cdot \frac{\overline{CD}}{\overline{CP}} \cdot \frac{\overline{BP}}{\overline{BA}} = -1$. Ta lại áp dụng định lí Menelaus cho $\triangle PAD$ với R, B, C thẳng hàng, ta có $\frac{\overline{RD}}{\overline{RA}} \cdot \frac{\overline{BA}}{\overline{BP}} \cdot \frac{\overline{CP}}{\overline{CD}} = 1$. Từ đó suy ra $\frac{\overline{RD}}{\overline{RA}} = -\frac{\overline{FD}}{\overline{FA}}$ do vậy $(AD, RF) = -1$.

Từ đó và kết hợp hệ thức Newton, suy ra M là trung điểm của RF. Tương tự, FF_1 giao BC tại N, suy ra N là trung điểm của RE. Mà $\overline{RE}^2 = \overline{RF}^2 = \overline{RG}.\overline{RH}$, nên $\triangle REF$ cân tại R. Suy ra $\angle NFE = \angle NEF$. Lại có tứ giác EFE_1F_1 nội tiếp đường tròn (I) do đó tứ giác EFE_1F_1 là hình thang cân. Suy ra $EF \parallel E_1F_1$. Vậy bài toán được chứng minh. □

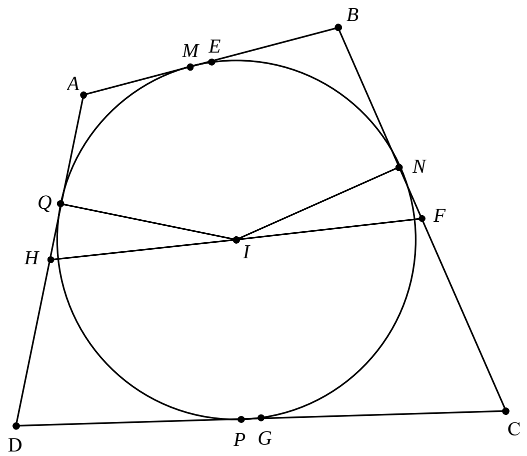
Bài toán 11. *Tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn (I). Lấy M đối xứng A qua BD. Gọi DM cắt BC tại E, BM cắt DC tại F. Chứng minh rằng tứ giác $CEMF$ ngoại tiếp đường tròn.*



Chứng minh. Gọi CI cắt BD tại K nên CK là phân giác $\angle BCD$ suy ra $\dfrac{BK}{BC} = \dfrac{DK}{DC}$. Gọi phân giác góc $\angle MBC$ giao CI tại J_1 suy ra $\angle IBJ_1 = \dfrac{1}{2}\angle ABM = \angle ABD = \angle MBD$ do đó $\angle IBK = \angle CBJ_1 = \angle MBJ_1$. Từ đó ta có $\dfrac{IK}{IC} \cdot \dfrac{J_1K}{J_1C} = (\dfrac{BK}{BC})^2$. Gọi phân giác $\angle CDM$ cắt CI tại J_2.Tương tự, ta có $\dfrac{IK}{IC} \cdot \dfrac{J_2K}{J_2C} = (\dfrac{DK}{DC})^2$. Từ những điều trên, suy ra $\dfrac{J_1K}{J_1C} = \dfrac{J_2K}{J_2C}$ hay $J_1 \equiv J_2 \equiv J$. Nên CJ, FJ, EJ MJ lần lượt là phân giác của $\angle FCE$, $\angle CFM$, $\angle CEM$, $\angle FME$ do vậy J tâm đường tròn nội tiếp tứ giác $CEMF$. Vậy bài toán được chứng minh. □

Bài toán sau đây tham khảo [4] là một ứng dụng của các định lý từ 6 đến 9 về các công thức liên quan đến các yếu tố trong một tứ giác ngoại tiếp.

Bài toán 12. *Cho tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn (I) không có 2 cặp cạnh nào song song. Chứng minh rằng I là trọng tâm của $ABCD$ khi và chỉ khi $IA.IC = IB.ID$.*



Chứng minh. Trước tiên, ta chứng minh chiều thuận của bài toán nghĩa là nếu I là trọng tâm tứ giác $ABCD$ thì $IA.IC = IB.ID$ đặt $AM = AQ = a$, $BM = BN = b$, $CN = CP = c$, $DP = DQ = d$ suy ra $QH = \dfrac{|a-d|}{2}$, $NF = \dfrac{|b-c|}{2}$.

Gọi E, F, G, H lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA. Ta có I là trọng tâm tứ giác $ABCD$ nên I là trung điểm HF suy ra $HQ = NF$ hay $|a-d| = |b-c|$.Trường hợp 1:

$a - d = b - c$ nên $a + c = b + d$. Theo định lý 8, ta có $IA.IC = IB.ID$. Trường hợp 2: $a - d = c - b$ nên $a + b = c + d$. Tương tự $a - b = c - d$ suy ra $a = c, b = d$. Do đó tứ giác $ABCD$ là hình bình hành (do tứ giác $ABCD$ không có 2 cặp cạnh nào song song). Ta đó chứng minh xong phần thuận của bài toán.
Tiếp theo, ta chứng minh phần đảo, tức là $IA.IC = IB.ID$ thì I là trọng tâm tứ giác $ABCD$. Ta có $IA.IC = IB.ID$ suy ra $HQ = NF$, $IF = IH$ hay I thuộc đường trung trực của FH. Tương tự I thuộc đường trung trực của EG. Mà EG và FH không song song suy ra I là trọng tâm của $ABCD$. Vậy bài toán được chứng minh xong. □

3. Bài tập tự luyện

Bài toán 13. *(Sharygin Geometry Olympiad 2014). Cho I là tâm đường tròn nội tiếp tứ giác $ABCD$. Tiếp tuyến tại A và C của đường tròn ngoại tiếp $\triangle AIC$ cắt nhau tại X. Hai tiếp tuyến tại B và D của đường tròn ngoại tiếp $\triangle BID$ cắt nhau tại Y. Chứng minh rằng X, Y, I thẳng hàng.*

Bài toán 14. *Cho tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn (I). Gọi H_1, H_2, H_3, H_4 lần lượt là trực tâm $\triangle IAB$, $\triangle IBC$, $\triangle ICD$, $\triangle IDA$. Chứng minh rằng H_1, H_2, H_3, H_4 thẳng hàng.*

Bài toán 15. *Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp. Một đường tròn bất kỳ đi qua C, D giao AC, AD, BC, BD tại A_1, A_2, B_1, B_2. Một đường tròn khác đi qua A, B giao CA, CB, DA, DB tại C_1, C_2, D_1, D_2. Chứng minh rằng tồn tại một đường tròn tiếp xúc với A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2, D_1D_2.*

Bài toán 16. *Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) tiếp xúc trong với (O) tại A, B. Từ A kẻ tiếp tuyến At_1, At_2 tới (O_2), từ B kẻ tiếp tuyến Bz_1, Bz_2 tới (O_1). Gọi At_1 cắt Bz_1 tại X, At_2 cắt Bz_2 tại Y. Chứng minh rằng $AXBY$ ngoại tiếp đường tròn.*

Bài toán 17. *Cho tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn. Đường trung trực của DA, AB, BC, CD lần lượt cắt trung trực của AB, BC, CD, DA tại X, Y, Z, T. Chứng minh rằng tứ giác $XYZT$ ngoại tiếp đường tròn.*

Bài toán 18. *Cho $\triangle ABC$, lấy D, E thuộc BC. Gọi (I_1), (I_2), (I_3), (I_4) lần lượt là đường tròn nội tiếp $\triangle ABD$, $\triangle ACE$, $\triangle ABE$, $\triangle ADC$. Chứng minh rằng tiếp tuyến chung ngoài khác BC của (I_1), (I_2), (I_3), (I_4) cắt nhau trên BC.*

4. Lời kết

Tôi xin gửi lời cảm ơn chân thành nhất tới thầy **Trần Quang Hùng** giáo viên trường THPT chuyên KHTN, Hà Nội, và anh **Ngô Quang Dương** học sinh lớp 12A2 Toán trường THPT chuyên KHTN, Hà Nội, đã đọc kỹ bản thảo và đưa ra những lời góp ý quý báu, xác đáng để tài liệu được hoàn chỉnh hơn. Mặc dù đã cố gắng hết sức nhưng tài liệu còn có nhiều thiếu sót, tôi rất mong nhận được sự góp ý phê bình của bạn đọc để chuyên đề được hoàn thiện hơn.

Tài liệu tham khảo

[1] http://www.artofproblemsolving.com/community/q1h490078p2747906

[2] http://www.artofproblemsolving.com/community/q1h569004p3338258

[3] Blog hình học sơ cấp http://analgeomatica.blogspot.com/

[4] http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h35309p220212

[5] Mathley No 1, (January 2014).

[6] DarijGrinberg, Circumscribed quadrilaterals revisited, 2012.

[7] The IMO Compendium.

[8] Đề thi Vietnam Team Selection Tests 2015.

MỘT SỐ ỨNG DỤNG CỦA CỰC VÀ ĐỐI CỰC

Trần Quang Hùng (Trường THPT Chuyên KHTN, Hà Nội)
Nguyễn Tiến Dũng (Đại học Ngoại thương, Hà Nội)

Bài viết sẽ tóm tắt lại một số kiến thức về cực và đối cực đối với một đường tròn đồng thời đưa ra một số ví dụ nâng cao cho thấy ứng dụng khó thay thế của các khái niệm này trong thực hành giải toán.

1. Mở đầu

Khái niệm điểm liên hợp xuất phát từ việc ta chia điều hòa đoạn thẳng bởi một đường tròn nghĩa là khi cho đường tròn cắt đoạn thẳng tại hai điểm thì hai điểm đó liên hợp điều hòa với hai đầu mút đoạn thẳng. Khái niệm về cực và đối cực được định nghĩa thông qua khái niệm về điểm liên hợp, điều đó có nghĩa là nó gắn chặt với các khái niệm về hàng điều hòa và chùm điều hòa. Tuy nhiên trong một số bài toán việc dùng cực đối cực thực sự là cần thiết mà việc sử dụng các khái niệm điều hòa thông thường không thể thay thế được, hoặc nếu có muốn thay thế thì lại dẫn đến sự rườm rà trong trình bày. Do đó chúng tôi viết bài này với mục đích tổng kết lại những ý chính trong cách sử dụng công cụ cực đối cực. Mặt khác chúng tôi cũng muốn đưa ra một số ví dụ xác thực cho thấy cần thiết phải dùng cực đối cực chứ không muốn sử dụng khái niệm này một cách hình thức theo kiểu dùng cũng được mà không dùng cũng được.

2. Tóm tắt lý thuyết

Trong mục này tôi sẽ tóm tắt lại một số ý chính từ việc định nghĩa cực đối cực cho tới một số tính chất hay dùng để giải toán. Cực và đối cực có nhiều cách định nghĩa nhưng với đường tròn, định nghĩa sau theo chúng tôi là hay nhất. Cách định nghĩa này được tham khảo trong [3]. Các khái niệm cực và đối cực cùng các vấn đề liên quan khác các bạn có thể tham khảo [1,2]. Ta bắt đầu từ khái niệm điểm liên hợp

Định nghĩa 3. *Cho đường tròn (O) hai điểm A, B gọi là liên hợp với (O) nếu đường tròn đường kính AB trực giao với (O).*

Khái niệm cực và đối cực được định nghĩa thông qua khái niệm điểm liên hợp như sau

Định nghĩa 4. *Cho đường tròn (O) và điểm P. Tập hợp tất cả các điểm liên hợp với P là một đường thẳng vuông góc với OP. Đường thẳng đó gọi là đường đối cực của P đối với (O). Điểm P gọi là cực của đường thẳng đó đối với (O).*

Định lý sau có thể coi là định lý cơ bản nhất của các khái niệm về cực và đối cực

Định lý 1 (La Hire). *Đối với cùng một đường tròn thì A nằm trên đối cực của B khi và chỉ khi B nằm trên đối cực của A.*

Hệ Quả 2.0.1. *Đối với cùng một đường tròn thì các đường đối cực đồng quy khi và chỉ khi cực của chúng thẳng hàng.*

Hệ Quả 2.0.2. *Đối với cùng một đường tròn thì tỷ số kép của chùm đối cực bằng tỷ số kép của hàng cực tương ứng.*

Định lý tiếp theo là một cách khác ngoài định nghĩa nhận biết khái niệm điểm liên hợp

Hệ Quả 2.0.3. *Cho đường tròn (O) và đoạn thẳng AB cắt (O) tại M, N thì A, B liên hợp với (O) khi và chỉ khi hàng điểm (AB, MN) điều hòa.*

Định lý sau nhận biết một số điểm đặc biệt khác trên đường đối cực từ đó kết hợp định nghĩa ta sẽ có thêm nhiều tình huống nhận ra cực và đường đối cực

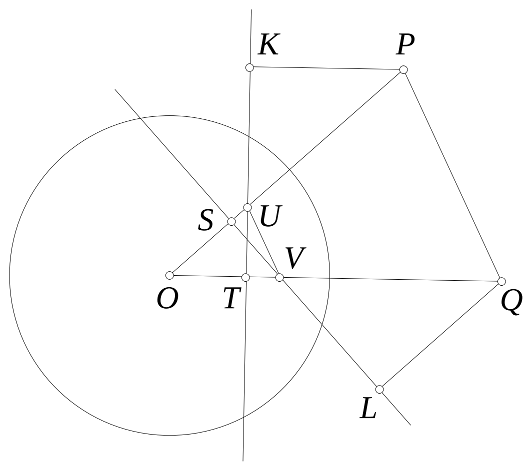
Định lý 2. *Cho đường tròn (O) và P.*
i) Nghịch đảo của P qua (O) nằm trên đường đối cực của P đối với (O).
ii) Nếu kẻ được các tiếp tuyến PA, PB tới (O) với A, B thuộc (O) thì A, B nằm trên đối cực của P đối với (O)

Các ứng dụng của cực đối cực có thể tóm gọn qua hai định nghĩa, ba định lý và hai hệ quả trên. Mặc dù nếu triển khai các khái niệm đó ra thì sẽ còn ra nhiều định lý khác nhưng chúng tôi muốn dành lại sự linh hoạt đó cho bạn đọc khi giải toán. Chúng tôi không muốn viết về lý thuyết một cách quá hình thức và rườm rà vì quan điểm rằng muốn ứng dụng một khái niệm và định lý trong hình học sơ cấp thì trước hết khái niệm và định lý đó phải đơn giản và dễ hiểu, những định lý càng đơn giản mà không tầm thường thì ứng dụng trong giải toán hình học sẽ càng cao.

3. Một số định lý ứng dụng

Định lý sau tham khảo [4]

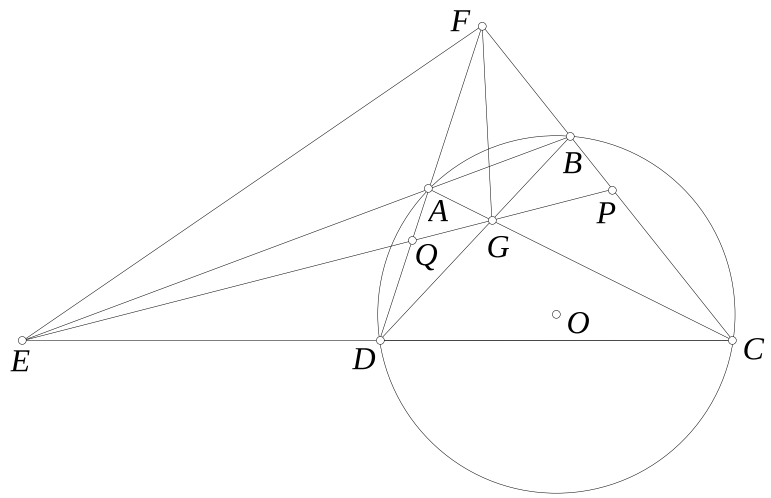
Định lý 3 (Định lý Salmon). *Cho đường tròn (O) và P, Q là hai điểm bất kỳ. Gọi K, L là lần lượt là hình chiếu của P, Q lên đường đối cực của Q, P đối với (O). Chứng minh rằng* $\dfrac{OP}{OQ} = \dfrac{PK}{QL}$.



Chứng minh. Gọi S, T là nghịch đảo của P, Q đối với (O) thì S, T nằm trên đường đối cực của P, Q đối với (O). OP, OQ lần lượt cắt KT, LS tại U, V. Ta thấy ngay tứ giác $STVU$ nội tiếp nên $OS.OU = OV.OT$ mặt khác $OS.OP = OT.OQ$. Từ đó $\dfrac{OU}{OP} = \dfrac{OV}{OQ}$ nên $UV \parallel PQ$. Ta dễ thấy hai tam giác KPU và LQV đồng dạng g.g nên $\dfrac{PK}{QL} = \dfrac{PU}{QV} = \dfrac{OU}{OV} = \dfrac{OP}{OQ}$, ta hoàn tất chứng minh. □

Định lý sau rất quen thuộc với các bạn học sinh phổ thông ở Việt Nam qua các bài toán Olympic, tuy nhiên tên gọi của định lý không nằm trong một tài liệu chính thức nào mà được tham khảo qua [5,6]

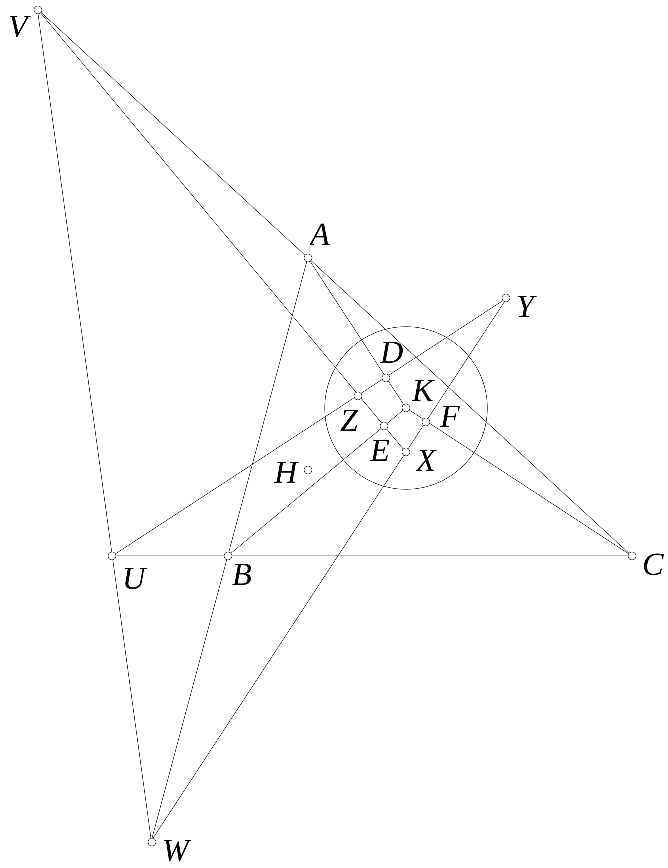
Định lý 4 (Định lý Brokard). *Cho tứ giác $ABCD$ có thể không lồi nội tiếp trong đường tròn (O). Gọi AB cắt CD tại E. AD cắt BC tại G và AC cắt BD tại G. Chứng minh rằng EF, FG, GE lần lượt là đường đối cực của G, E, F đối với đường tròn (O).*



Chứng minh. Trên BC, AD lấy P, Q sao cho các hàng điểm (BC, PF) và (AD, QF) điều hòa như vậy P, Q đều là liên hợp của F đối với (O) nên PQ là đối cực của F. Mặt khác $(FP, BC) = -1 = (FQ, AD)$ nên AB, CD và PQ đồng quy tại E. Đồng thời $(FP, BC) = -1 = (FQ, DA)$ nên AC, BD và PQ đồng quy tại G. Từ đó PQ đi qua E, G hay EG là đối cực của F. Tương tự FG là đối cực của E. Vậy hiển nhiên G là cực của EF. □

Bản chất của lời giải này là việc dựng ra các điểm liên hợp của F đối với (O) trên BC và AD. Tuy nhiên trong nhiều tài liệu khi chứng minh định lý này thường dựng ra các tiếp tuyến đối với (O) đi qua F. Điều này không cần thiết và cũng chưa thực sự chính xác vì với điều kiện một tứ giác không cần lồi thì chưa chắc F đã nằm ngoài (O) để dựng tiếp tuyến.
Định lý sau được phát biểu tổng quát trên Conic tham khảo [7], trong bài viết này chúng tôi chứng minh cho trường hợp đường tròn

Định lý 5 (Định lý Conway). *Cho tam giác ABC và một đường tròn (K) bất kỳ. Gọi X, Y, Z lần lượt là cực của các đường thẳng BC, CA, AB đối với (K). Chứng minh rằng AX, BY, CZ đồng quy.*



Chứng minh. Gọi YZ, ZX, XY cắt BC, CA, AB tại U, V, W, theo định lý Desargues ta cần chứng minh U, V, W thẳng hàng, mặt khác khi áp dụng định lý Menelaus cho tam giác trung bình thì U, V, W thẳng hàng khi và chỉ khi trung điểm của AU, BV, CW thẳng hàng. Ta lại dễ thấy trực tâm H của tam giác ABC có cùng phương tích với các đường tròn đường kính AU, BV, CW nên muốn chỉ ra trung điểm của AU, BV, CW thẳng hàng ta chỉ cần chứng minh các đường tròn đường kính AU, BV, CW đồng trục. Do Y, Z lần lượt là cực của CA, AB nên A là cực của YZ. Từ đó hình chiếu D của A lên YZ chính là nghịch đảo của A qua (K). Tương tự ta có E, F. Dễ thấy D, E, F đều nằm trên các đường tròn đường kính AU, BV, CW mặt khác theo tính chất nghịch đảo thì $KD.KA = KE.KB = KF.KC$ nên K có cùng phương tích với các đường tròn này, điều đó có nghĩa KH chính là trục đẳng phương của các đường tròn đường kính AU, BV, CW, ta hoàn thành chứng minh. □

Điểm đồng quy được gọi là tâm thấu xạ của tam giác ABC và đường tròn (K). Hai tam giác ABC và XYZ được gọi là hai tam giác liên hợp đối với đường tròn (K). Định lý trên cũng là một tính chất quan trọng của cực và đối cực được ứng dụng nhiều trong các bài toán về tam giác. Ba bài toán sau có thể coi là hệ quả trực tiếp của bài toán trên

Hệ Quả 3.0.4. *Cho tam giác ABC và đường tròn (K) bất kỳ. Chứng minh rằng đối cực của A, B, C với (K) cắt BC, CA, AB theo ba điểm thẳng hàng.*

Hệ Quả 3.0.5. *Cho tam giác ABC và P bất kỳ. D, E, F là hình chiếu của P lên BC, CA, AB. Trên PD, PE, PF lần lượt lấy các điểm X, Y, Z sao cho $\overline{PD}.\overline{PX} = \overline{PE}.\overline{PY} = \overline{PF}.\overline{PZ}$. Chứng minh rằng AX, BY, CZ đồng quy.*

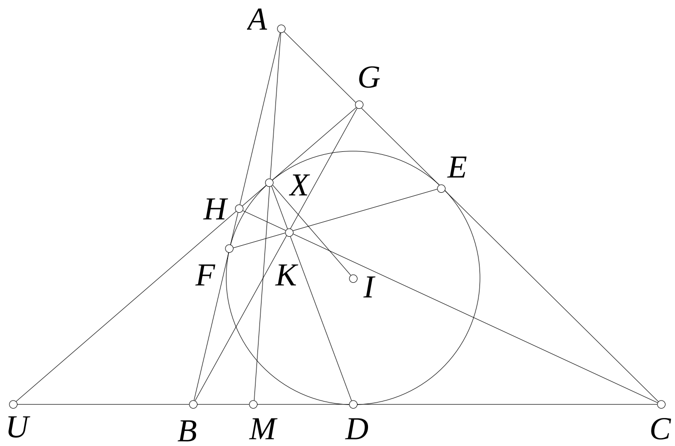
Hệ Quả 3.0.6 (Mở rộng tính chất của cát tuyến trực giao). *Cho tam giác ABC và P bất kỳ. D, E, F lần lượt nằm trên PA, PB, PC sao cho $\overline{PD}.\overline{PA} = \overline{PE}.\overline{PB} = \overline{PF}.\overline{PC}$. Chứng minh rằng đường thẳng qua D, E, F lần lượt vuông góc với PA, PB, PC cắt BC, CA, AB theo ba điểm thẳng hàng.*

Qua định lý Brokard ta dễ thấy rằng trong một tứ giác nội tiếp thì tam giác tạo bởi giao điểm hai đường chéo và các cạnh đối tự liên hợp với đường tròn ngoại tiếp tứ giác đó. Hệ quả sau có thể coi là phát biểu ngược của định lý Brokard.

Hệ Quả 3.0.7. *Nếu một tam giác tự liên hợp đối với một đường tròn thì tâm của đường tròn đó phải là trực tâm tam giác.*

Tên gọi và nội dung định lý quan trọng sau được tham khảo trong [13]

Định lý 6 (Định lý Steinbart). *Cho tam giác ABC có đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc BC, CA, AB tại D, E, F. X, Y, Z nằm trên (I) sao cho DX, EY, FZ đồng quy. Chứng minh rằng AX, BY, CZ đồng quy.*



Chứng minh. Gọi tiếp tuyến tại X, Y, Z của (I) lần lượt cắt BC, CA, AB tại U, V, W. Dễ thấy ba đường đồng quy DX, EY, FZ lần lượt là đối cực của U, V, W đối với (I) nên U, V, W thẳng hàng. Gọi AX, BY, CZ lần lượt cắt BC, CA, AB tại M, N, P. Gọi UX cắt CA, AB tại G, H thì tứ giác $BCGH$ ngoại tiếp. Theo tính chất quen thuộc thì CH, BG và DX đồng quy tại K nên ta có biến đổi tỷ số kép $(BC, UM) = A(BC, UM) = (HG, UX) = K(HG, UX) = (CB, UD)$. Từ đó ta suy ra $\dfrac{\overline{UB}}{\overline{UC}} : \dfrac{\overline{MB}}{\overline{MC}} = \dfrac{\overline{UC}}{\overline{UB}} : \dfrac{\overline{DC}}{\overline{DB}}$ hay $\dfrac{\overline{MB}}{\overline{MC}} = \dfrac{UB^2}{UC^2} \cdot \dfrac{\overline{DC}}{\overline{DB}}$. Do AD, BE, CF đồng quy và U, V, W thẳng hàng nên khi nhân các tỷ số tương tự ta dễ thu được $\dfrac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \cdot \dfrac{\overline{NC}}{\overline{NA}} \cdot \dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = -1$ do đó AX, BY, CZ đồng quy. □

Chứng minh trên do chúng tôi đưa ra sử dụng cực và đối cực theo chúng tôi là rất mới cho định lý kinh điển này. Chứng minh này dựa trên ý tưởng xuất phát của bạn **Ngô Quang Dương** học sinh lớp 12 Toán THPT chuyên KHTN khi bạn Dương giải một bài toán tổng quát hơn.
Một hệ quả đơn giản được rút ra từ một phần cách chứng minh định lý trên như sau

Hệ Quả 3.0.8. *Cho tam giác ABC có đường tròn nội tiếp (I). P thuộc (I). Tiếp tuyến tại P của (I) cắt BC tại U. AP cắt BC tại M thì $\dfrac{\overline{MB}}{\overline{MC}} = \dfrac{UB^2}{UC^2} \cdot \dfrac{\overline{DC}}{\overline{DB}}$*

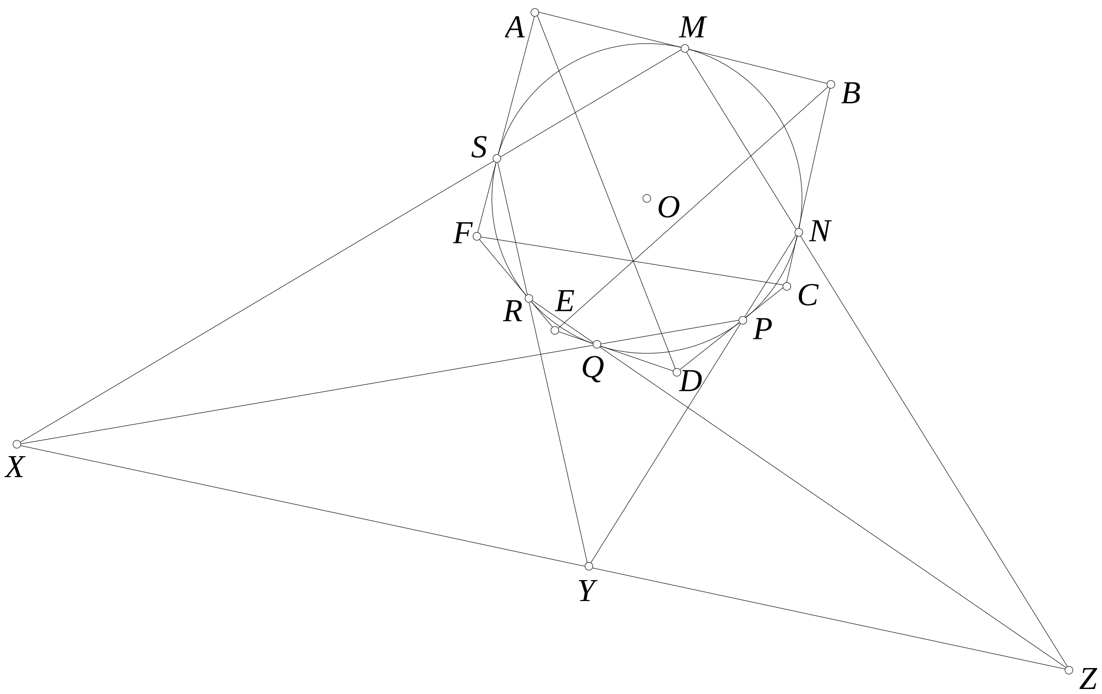
Việc phát biểu lại hệ quả trên sẽ cho chúng ra thấy tầm áp dụng rộng hơn của hệ quả này.

Hệ Quả 3.0.9. *Cho đường tròn (K) tiếp xúc đoạn BC tại D. Từ B, C vẽ các tiếp tuyến khác BC cắt nhau tại X. P thuộc (I). Tiếp tuyến tại P của (I) cắt BC tại U. XP cắt BC tại M thì* $\dfrac{\overline{MB}}{\overline{MC}} = \dfrac{UB^2}{UC^2} \cdot \dfrac{\overline{DC}}{\overline{DB}}$

Mặc dù tưởng chừng cách phát biểu thứ hai không có ý nghĩa vì nó vẫn chính là hệ quả thứ nhất nhưng thực chất nó có rất nhiều giá trị trong các bài toán thực hành khác nhau vì chú ý rằng khi phát biểu như vậy (K) có thể là đường tròn bàng tiếp tam giác XBC chứ không bắt buộc là đường tròn nội tiếp.

Định lý sau là một định lý kinh điển của hình học xạ ảnh được chứng minh đơn giản bằng cực đối cực và định lý La Hire

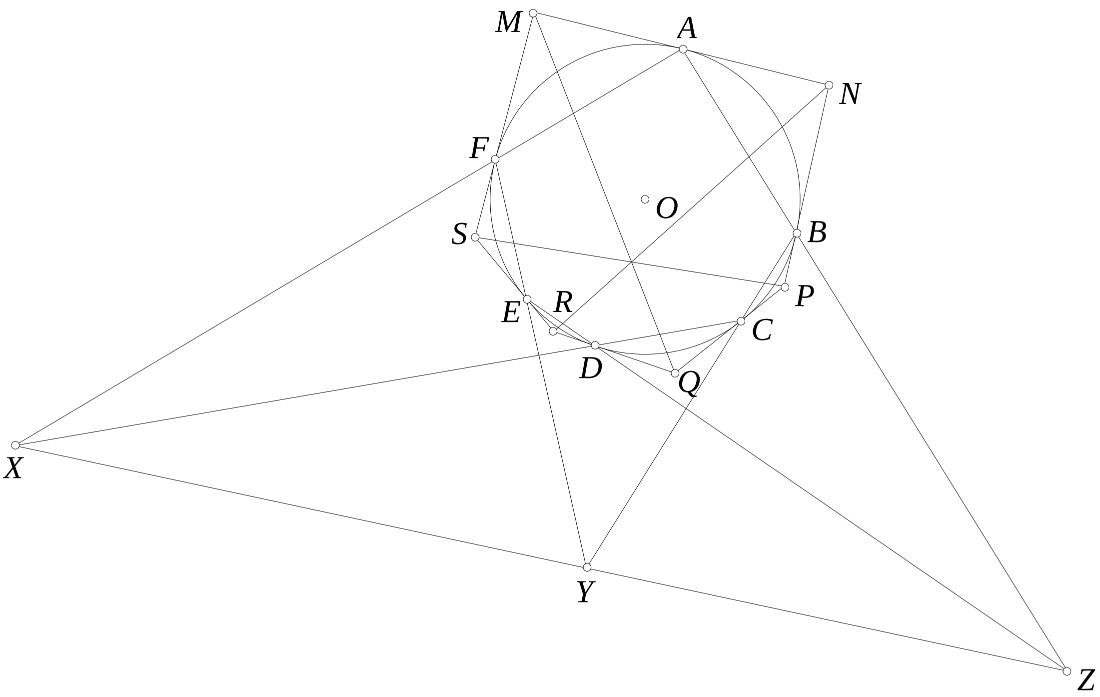
Định lý 7 (Định lý Brianchon). *Chứng minh rằng các đường chéo chính của một lục giác ngoại tiếp đồng quy.*



Chứng minh. Giả sử lục giác $ABCDEF$ ngoại tiếp đường tròn (O). Các tiếp điểm của (O) với AB, BC, CD, DE, DF, FA là M, N, P, Q, R, S. Thấy ngay giao điểm của các cặp đường thẳng MN và RQ, NP và SR, PQ và SM lần lượt là cực của các đường thẳng BE, CF và AD đối với đường tròn (O). Theo định lý Pascal các điểm này thẳng hàng nên AD, BE, CF đồng quy. □

Một cách ngược lại khi công nhận định lý Brianchon ta hoàn toàn có thể chứng minh định lý Pascal bằng cực đối cực bằng cách dựng ra các tiếp tuyến đối với đường tròn cắt nhau tạo ra lục giác ngoại tiếp

Định lý 8 (Định lý Pascal). *Chứng minh rằng giao điểm của các cạnh đối trong một lục giác nội tiếp thẳng hàng.*



Chứng minh. Xét lục giác $ABCDEF$ nội tiếp đường tròn (O) ta cần chứng minh giao điểm X, Y, Z theo thứ tự của các cặp đường thẳng AB và DE, BC và FE, CD và FA thẳng hàng. Gọi tiếp tuyến tại A, B, C, D, E, F của (O) cắt nhau lần lượt tạo thành lục giác $MNPQRS$ ngoại tiếp như hình vẽ. Dễ thấy X, Y, Z lần lượt là cực của các đường thẳng MQ, PS và NR. Theo định lý Brianchon thì MQ, PS và NR đồng quy nên X, Y, Z thẳng hàng. □

Lục giác trong hai định lý trên có thể suy biến không nhất thiết phải lồi như hình minh họa và chúng ta cũng nên hiểu một linh hoạt các khái niệm "đường chéo chính" và "cạnh đối" của lục giác trong phát biểu định lý.

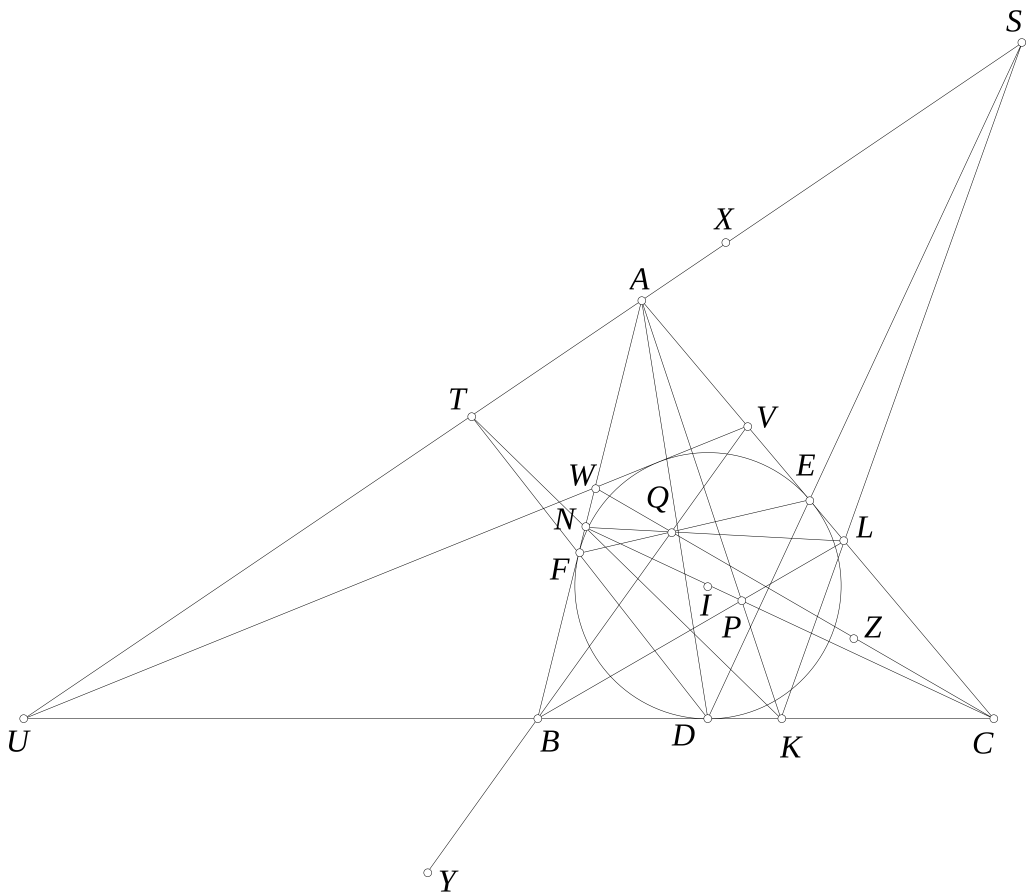
Mặc dù khi đặt hai chứng minh này cạnh nhau chúng tưởng chừng như không có ý nghĩa vì dùng định lý này để chứng minh định lý kia, nhưng không phải vậy. Trong hình học sơ cấp chúng ta biết nhiều cách khác chứng minh định lý Pascal và Brianchon khi đó chúng ta hoàn toàn có thể dùng định lý này để chứng minh định lý kia thông qua phương pháp sử dụng công cụ cực và đối cực như trên. Tuy nhiên mục đích chính của chúng tôi khi trình bày hai chứng minh này cạnh nhau để làm nổi bật sự đối ngẫu của hai định lý kinh điển là Pascal và Brianchon thông qua hai khái niệm đối ngẫu quan trọng khác của hình học xạ ảnh là cực và đối cực.

Như vậy cùng với định lý cơ bản của La Hire thì các định lý của Salmon, Brokard, Conway, Steinbart, Brianchon và Pascal cũng là các định lý rất quan trọng gắn liền với hình học xạ ảnh và được trình bày một cách thống nhất trong bài viết này thông qua các khái niệm và định lý của cực và đối cực. Mặt khác mỗi định lý trên đều là các định lý lớn mà những khai thác cũng như tổng quát chúng đã được đề cập và viết nhiều đến mức khó có thể liệt kê ra hết, do đó với một bài viết nhỏ chúng tôi chỉ muốn giới thiệu các định lý cùng với một cái nhìn thống nhất dưới khái niệm cực và đối cực chứ không có tham vọng đi sâu vào một định lý nào.

4. Một số ví dụ

Các bài toán ví dụ chúng tôi đề nghị trong mục này mang hơi hướng chủ đạo là các bài toán thi Olympic chứ không phải là các bài toán thuộc về đối tượng nghiên cứu chuyên sâu. Trong một số bài toán chúng tôi sẽ sử dụng các định lý ở phần trước nhưng chúng tôi cũng không có tham vọng dùng hết tất cả các định lý, vì mỗi định lý đó còn có những ứng dụng chuyên sâu mà một bài viết dài cũng chưa thể viết hết.
Bài toán đầu tiên tham khảo [19]

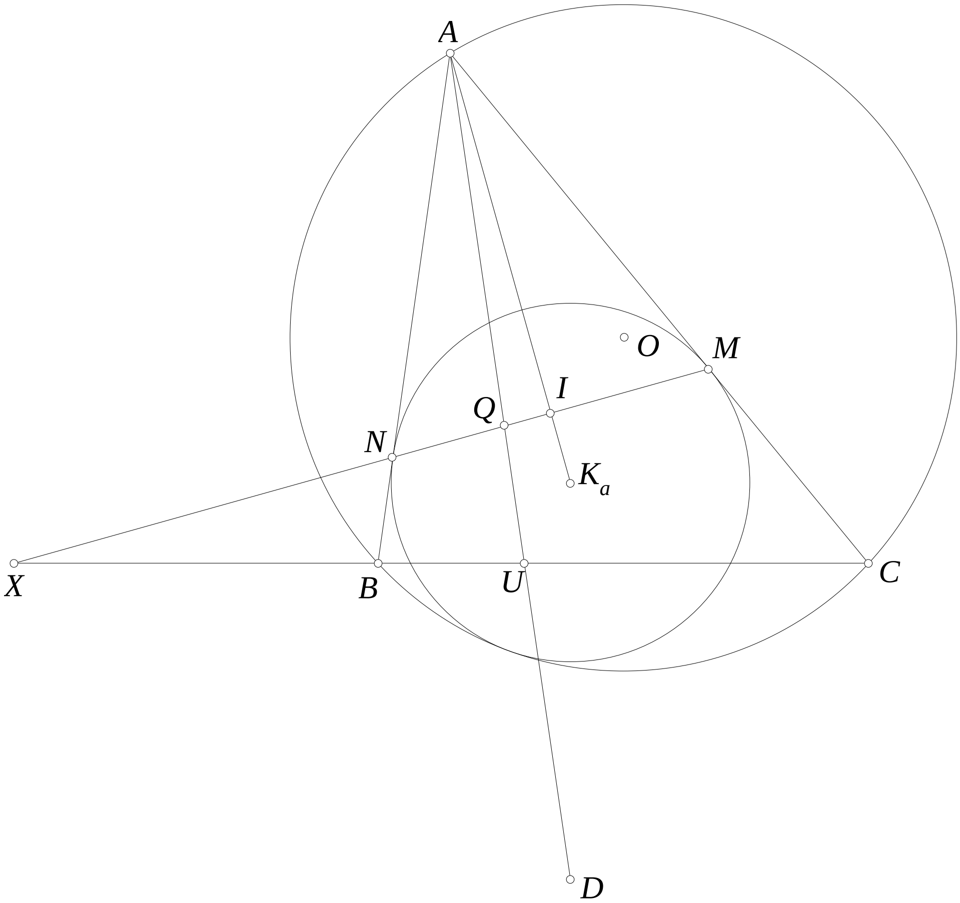
Bài toán 1. *Cho tam giác ABC với đường tròn nội tiếp (I). P là điểm bất kỳ. PA, PB, PC cắt BC, CA, AB tại K, L, N. Gọi X, Y, Z lần lượt là cực của các đường thẳng LN, NK, KL đối với (I). Chứng minh rằng AX, BY, CZ lần lượt cắt BC, CA, AB tại ba điểm thẳng hàng trên một đường thẳng và đường thẳng này tiếp xúc với (I).*



Chứng minh. Gọi AX, BY, CZ lần lượt cắt BC, CA, AB tại U, V, W. Trước hết ta sẽ chứng minh YB, CZ đồng quy với EF, từ đó ta dễ thấy VW tiếp xúc (I). Tương tự thì UW, UV tiếp xúc (I) nên U, V, W thẳng hàng trên đường thẳng tiếp xúc (I), thật vậy. Gọi DE, DF lần lượt cắt KL, KN tại S, T do AD, BE, CF đồng quy và AK, BL, CN cũng đồng quy nên $D(KA, EF) = -1 = K(DA, LN)$ do đó A, S, T thẳng hàng. Vì B, Y lần lượt là cực của DF, NK nên T là cực của BY. Tương tự S là cực của CZ. Mặt khác A là cực của EF. Vì A, S, T thẳng hàng nên dễ thấy BY, CZ và EF đồng quy. Vậy đó là điều phải chứng minh. □

Bài toán sau tham khảo [18]

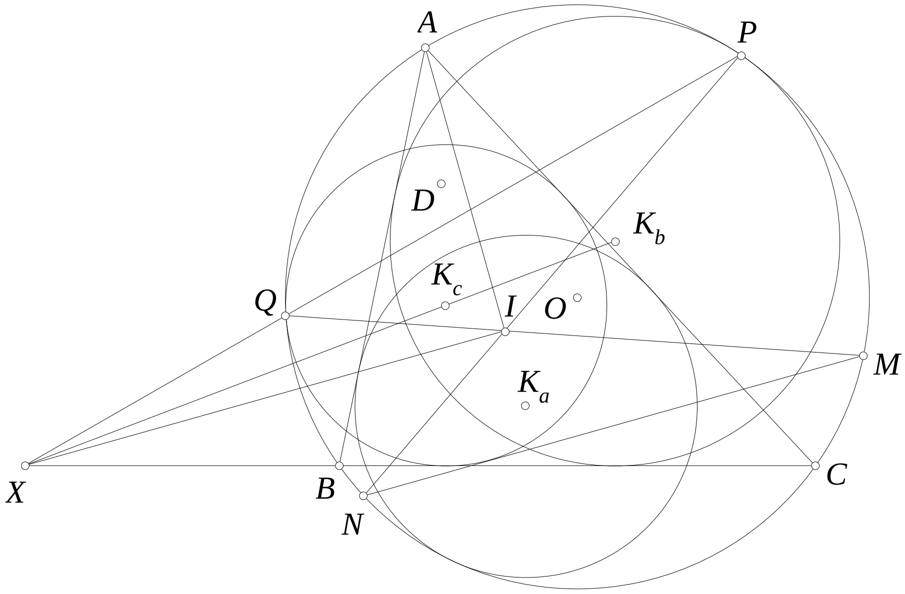
Bài toán 2. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn (K_a) tiếp xúc CA, AB và tiếp xúc trong (O). Gọi D là cực của BC đối với (K_a). Tương tự có E, F. Chứng minh rằng AD, BE, CF đồng quy.*



Chứng minh. Gọi (K_a) tiếp xúc CA, AB tại M, N thì MN và đối cực của A đối với (K_a). Vậy MN cắt BC tại X thì X là cực của AD đối với (K_a). Từ đó AD cắt MN, BC tại Q, U thì $(MN, QX) = -1$ nên $(BC, UX) = A(MN, QX) = -1$. Từ đó tương tự có các giao điểm Y, Z và U, V. Gọi I là tâm nội tiếp thì IX, IY, IZ theo thứ tự vuông góc với IA, IB, IC theo bài toán cát tuyến trực giao thì X, Y, Z thẳng hàng. Từ đó có AU, BV, CW đồng quy hay nói cách khác là AD, BE, CF đồng quy. $\square$

Một sai lầm khá phổ biến trong khi giải bài này là sau khi chỉ ra X là cực của AD và tương tự với Y, Z thì nhận xét X, Y, Z thẳng hàng nên AD, BE, CF đồng quy. Nguyên nhân của sai lầm này là do X là đối cực của AD với đường tròn (K_a) còn Y, Z tương ứng là cực của BE, CF với các đường tròn (K_b), (K_c). Hệ quả của định lý La Hire chỉ đúng khi xét cực đối cực với cùng một đường tròn chứ không phải với ba đường tròn khác nhau.

Bài toán 3. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn (K_a) tiếp xúc CA, AB và tiếp xúc trong (O). Tương tự có các đường tròn (K_b), (K_c). Gọi D là cực của đường thẳng K_bK_c với (K_a). Tương tự có E, F. Chứng minh rằng AD, BE, CF đồng quy.*



Chứng minh. Gọi $(K_b), (K_c)$ tiếp xúc (O) tại P, Q. Theo tính chất quen thuộc thì PI đi qua trung điểm N cung AC chứa B và QI đi qua trung điểm M của cung AB chứa C. Đường thẳng qua I vuông góc AI cắt PQ tại X. Dễ thấy $AI \perp MN$ nên $XI \parallel MN$, do đó $\angle XIQ = \angle NMI = \angle IPQ$. Do đó $XI^2 = XP.XQ$. Ta dễ thấy tâm ngoại tiếp của tam giác BIC là giao của AI với (O) nên XI là tiếp tuyến của (BIC) nên XI^2 là phương tích của X đối với (BIC) mặt khác $XP.XQ$ là phương tích của X đối với (O). Do đó X nằm trên trục đẳng phương của (O) và (BIC) chính là BC. Từ việc BC là tiếp tuyến chung của $(K_b), (K_c)$ còn P, Q cũng là các tâm vị tự ngoài của $(K_b), (K_c)$ với (O) nên theo định lý D'lambert giao điểm X của PQ và BC phải là tâm vị tự ngoài của $(K_b), (K_c)$ nên K_bK_c đi qua X. Theo giả thiết D là cực của K_bK_c với (K_a) mà K_bK_c đi qua X nên D và X liên hợp với (K_a). Lại dễ thấy A và X cũng liên hợp với (K_a) nên AD là đường đối cực của X đối với (K_a). Tương tự với BE, CF. Theo chứng minh bài trước thì các đường đối cực này đồng quy. □

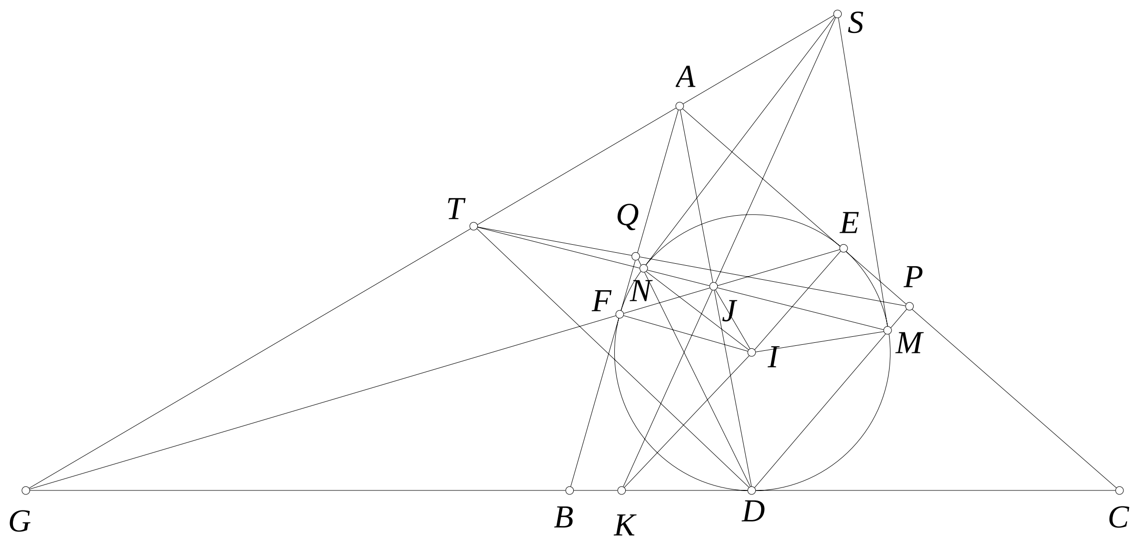
Chúng ta đi tiếp tới bài toán sau là đề thi chọn đội tuyển KHTN vòng 2 năm 2011-2012 ngày thứ nhất do tác giả đề xuất

Bài toán 4. *Cho tam giác không cân ABC. Đường tròn nội tiếp (I) của tam giác ABC tiếp xúc với BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. AD giao EF tại J. M, N di chuyển trên đường tròn (I) sao cho M, J, N thẳng hàng và M nằm về phía nửa mặt phẳng chứa C bờ AD, N nằm về phía nửa mặt phẳng chứa B bờ AD. Giả sử DM, DN lần lượt cắt AC, AB tại P, Q.*

a) *Giả sử MN giao PQ tại T. Chứng minh rằng T luôn thuộc một đường thẳng d cố định.*

b) *Giả sử tiếp tuyến tại M, N của (I) cắt nhau tại S. Chứng minh rằng S thuộc d.*

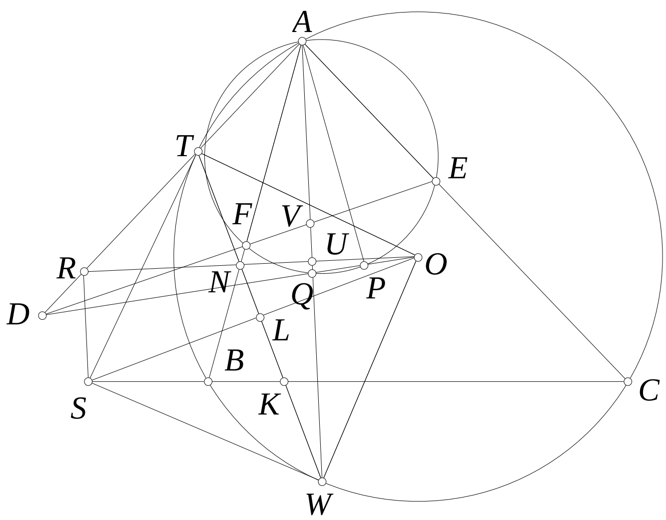
c) *Giả sử SJ giao BC tại K. Chứng minh rằng IK vuông góc TD.*



Lời giải. a) Gọi EF giao BC tại G. MN giao AG tại T. Ta sẽ chứng minh P, Q, T thẳng hàng từ đó suy ra T là giao của MN và PQ thuộc AG cố định, thật vậy, xét cực đối cực với đường tròn (I). Dễ thấy G là cực của AD nên G, J liên hợp, J, A cũng liên hợp nên J là cực của AG. MN qua J cắt AG tại T suy ra $(MN, JT) = -1$ suy ra $D(MN, JT) = -1 = A(CB, DG)$ từ đây suy ra T, P, Q thẳng hàng.
b) S là cực MN suy ra S, J liên hợp nên S thuộc d là đối cực của J.
c) S là cực MN, T thuộc MN nên S, T liên hợp, J, T liên hợp nên T là cực SJ, K thuộc SJ nên T, K liên hợp, ta cũng có D, K liên hợp nên K là cực của TD do đó IK vuông góc TD. □

Bài toán sau được tác giả mở rộng bài toán trong [8], lời giải dựa theo ý tưởng của Telv Cohl trong [8]

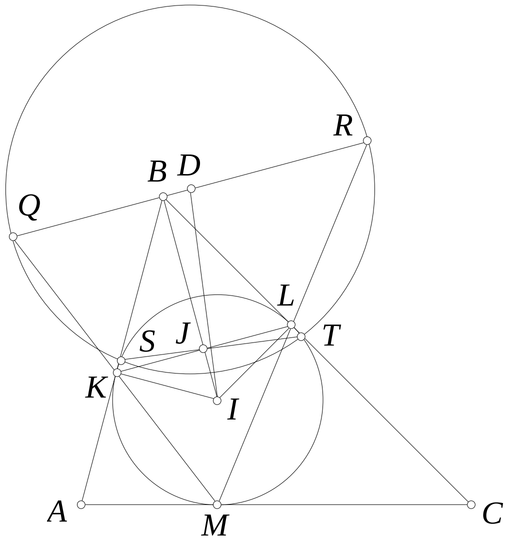
Bài toán 5. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Các điểm E, F lần lượt nằm trên cạnh CA, AB. Đường đối trung qua A cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF tại P. OP cắt EF tại D và cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF tại Q khác P. DA cắt (O) tại T khác A. Tiếp tuyến tại T của (O) cắt BC tại S. Lấy R thuộc AD sao cho $OR \perp AQ$. Chứng minh rằng $RS \perp OR$.*



Chứng minh. Gọi AQ cắt OR, EF tại U, V và cắt (O) tại W khác A. Dễ thấy $(AP, EF) = -1$ nên chùm $Q(AP, EF) = -1$ chiếu chùm này lên đường thẳng EF thì $(VD, EF) = -1$ nên chùm $A(VD, EF) = -1$, chiếu chùm này lên (O) thì hàng $(WT, BC) = -1$. Từ đó nếu TW cắt BC tại K thì $(SK, BC) = -1$ nên T, K đều liên hợp với S đối với (O). Nói cách khác TK là đối cực của S đối với (O) nên SW tiếp xúc (O), từ đó T, W đều thuộc đường tròn đường kính OS. Ta lại có $\angle TWO = 90^\circ - \angle TAW = \angle TRO$ nên tứ giác $RTOW$ nội tiếp, đường tròn ngoại tiếp chính là đường tròn đường kính OS. Từ đó $RS \perp OR$. □

Bài toán sau tham khảo [9] là mở rộng đề IMO năm 1998

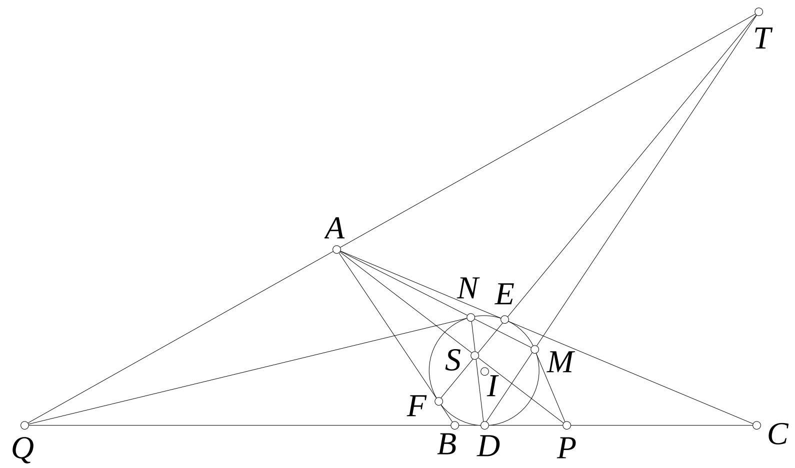
Bài toán 6. *Cho đường tròn (I) nội tiếp trong tam giác ABC. Gọi K, L và M là các điểm tiếp xúc của đường tròn nội tiếp tam giác ABC tương ứng với các cạnh AB, BC và CA. Đường thẳng MK và ML cắt đường thẳng qua B và song song với KL tương ứng tại các điểm Q và R. Đường tròn với đường kính QR cắt (I) tại S, T. Chứng minh rằng ST chia đôi đoạn thẳng KL.*



Lời giải. Gọi (D) là đường tròn với đường kính QR. Ta dễ dàng thấy $\triangle BLR \sim \triangle BQK$ nên $BQ.BR = BK.BL = BK^2$. Giờ ta có hai lần phương tích của I với đường tròn (D) là $IR^2 + IQ^2 - RQ^2 = (BI^2 + BR^2) + (BI^2 + BQ^2) - (BR + BQ)^2 = 2(BI^2 - BR.BQ) = 2(BI^2 - BK^2) = 2IK^2$. Điều đó có nghĩa là đường tròn (D) và (I) là trực giao, nên DS, DT là tiếp tuyến của (I) suy ra ST là đối cực của D đối với (I). Mặt khác nếu J là trung điểm EF thì J là cực của đường thẳng qua B và vuông góc với IB đối với (I) nên J, D liên hợp đối với (I). Từ đó S, T, J thẳng hàng. □

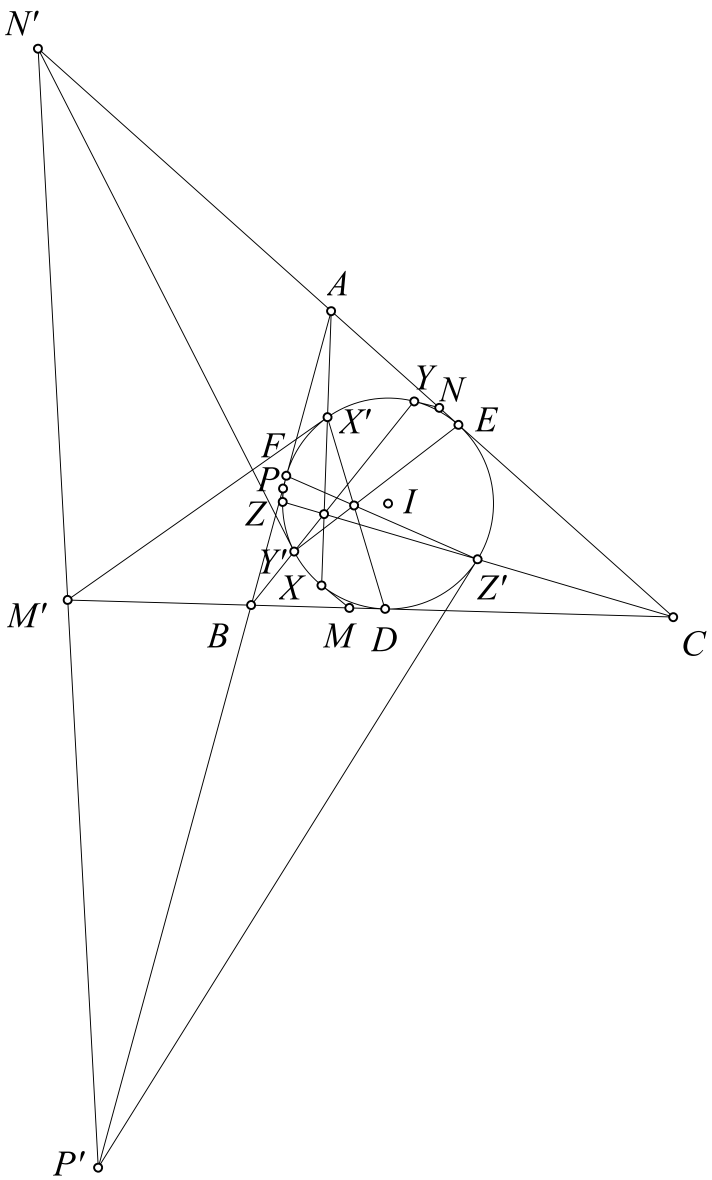
Bài toán sau là mở rộng đề thi vô địch Nga năm 2015 trong [10]

Bài toán 7. *Cho tam giác ABC có đường tròn nội tiếp (I). P, Q thuộc BC sao cho $(BC, PQ) = -1$. Kẻ các tiếp tuyến PM, QN khác BC tới (I) với M, N thuộc (I). Chứng minh rằng A, M, N thẳng hàng.*



Chứng minh. Gọi AP, AQ cắt EF tại S, T. Do $A(BC, PQ) = -1$ nên hàng $(EF, ST) = -1$. Vậy S, T liên hợp với (I), dễ thấy S, A liên hợp nên S là cực của AT, suy ra S, Q liên hợp vậy S nằm trên DN. Tương tự T nằm trên DM. Từ đó chiếu chùm $D(EF, ST) = -1$ lên đường tròn (I) thì hàng $(EF, MN) = -1$ nên tứ giác $EMFN$ điều hòa. Từ đó MN đi qua A. □

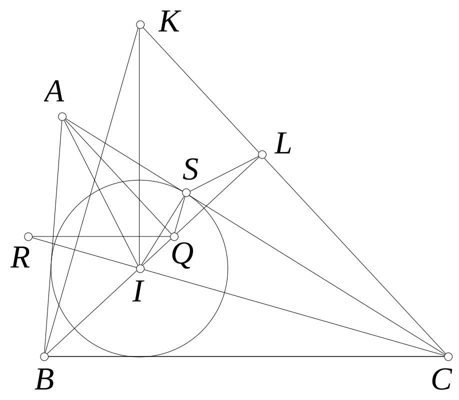
Bài toán 8. *Cho tam giác ABC có đường tròn nội tiếp (I). M, N, P thuộc các cạnh BC, CA, AB sao cho AM, BN, CP đồng quy. Kẻ các tiếp tuyến MX, NY, PZ của (I). Chứng minh AX, BY, CZ đồng quy.*



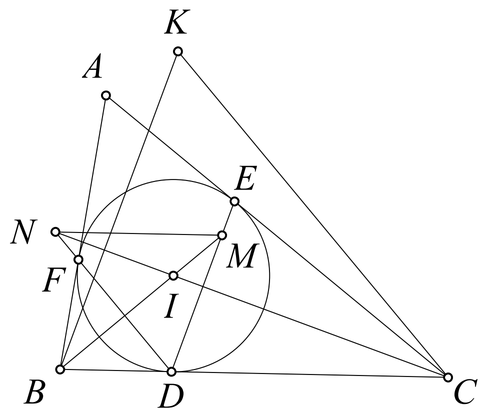
Chứng minh. Lấy M', N', P' trên BC, CA, AB sao cho $(BC, MM') = (CA, NN') = (AB, PP') = -1$. Chú ý rằng AM, BN, CP đồng quy ta có $\dfrac{M'B}{M'C} \cdot \dfrac{N'C}{N'A} \cdot \dfrac{P'A}{P'B} = \dfrac{MB}{MC} \cdot \dfrac{NC}{NA} \cdot \dfrac{PA}{PB} = 1$ nên M', N', P' thẳng hàng. D, E, F là tiếp điểm của (I) với BC, CA, AB. Kẻ các tiếp tuyến $M'X', N'Y', C'P'$ của (I) thì theo bài toán 6 ta thấy AX', BY', CZ' cũng chính là AX, BY, CZ. DX', EY', FZ' có các cực đối với (I) tương ứng là M', N', P' thẳng hàng nên chúng đồng quy. Áp dụng định lý Steinbart ta có AX', BY', CZ' đồng quy hay AX, BY, CZ đồng quy. □

Bài toán sau là một bổ đề rất thú vị của cực và đối cực, tham khảo [11]

Bài toán 9. *Cho tam giác ABC và đường tròn nội tiếp (I). K là trực tâm tam giác IBC. Chứng minh rằng đường đối cực của K đối với (I) là đường trung bình ứng với A của tam giác ABC.*



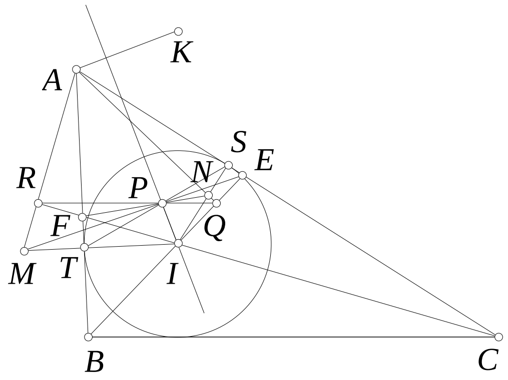
Lời giải thứ nhất. Gọi hình chiếu của A lên IB, IC là Q, R thì dễ thấy QR là đường trung bình ứng với A của tam giác ABC. Gọi (I) tiếp xúc CA tại S. BI cắt CK tại L. Dễ thấy các tứ giác $ISLC$ và $IQSA$ nội tiếp. Từ đó $\angle ISQ = \angle IAQ = \angle AIB - 90^\circ = \angle ICA = \angle ILS$. Vậy $IQ.IL = IS^2$, mặt khác CK vuông góc với IQ tại L nên CK là đối cực của Q đối với (I). Vậy K và Q liên hợp đối với (I). Tương tự K và R liên hợp đối với (I). Vậy QR chính là đối cực của K đối với (I). □



Lời giải thứ hai. Gọi D, E, F là tiếp điểm của (I) với BC, CA, AB. M, N là giao của BI, CI với DE, DF thì dễ thấy MN là đường trung bình ứng với đỉnh A của tam giác ABC. DF là đối cực của B đối với (I) nên B, N liên hợp với (I). Do đó $BK \perp IN$ là đối cực của N đối với (I) nên K, N liên hợp với (I). Tương tự K, M liên hợp với (I). Vậy MN là đối cực của K đối với (I). □

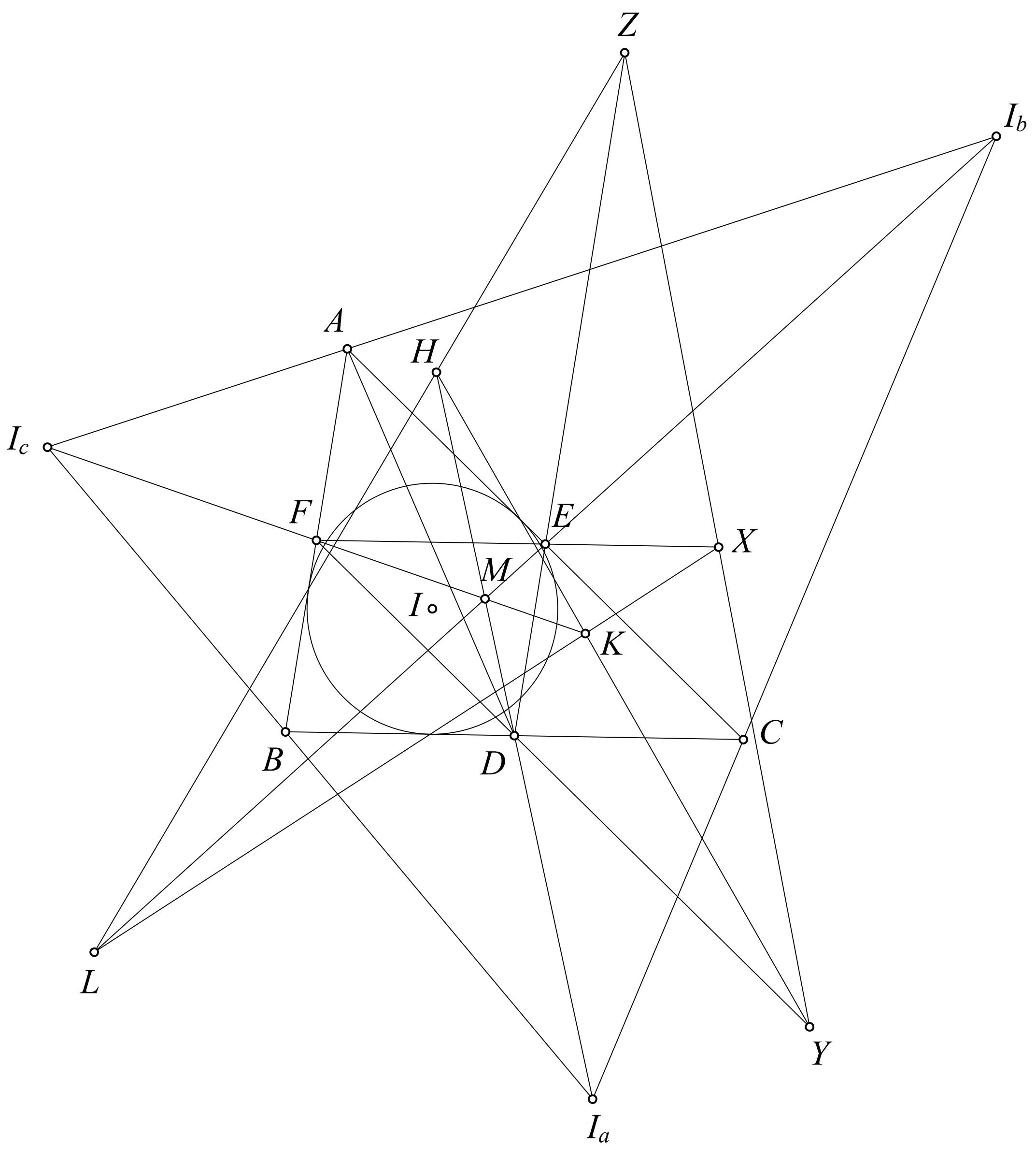
Bài toán sau được tác giả đề xuất trong [12]

Bài toán 10. *Cho tam giác ABC với phân giác BE và CF cắt nhau tại I. Lấy điểm M sao cho $IM \perp AB$ và $AM \perp IC$. Lấy điểm N sao cho $IN \perp AC$ và $AN \perp IB$. ME cắt NF tại P. Gọi K là trực tâm tam giác IBC. Chứng minh rằng $AK \perp IP$.*



Chứng minh. Gọi (I) tiếp xúc CA, AB tại S, T. Gọi AM, AN lần lượt vuông góc với IC, IB tại R, Q. Dễ thấy các điểm S, Q, T, R đều nằm trên đường tròn đường kính AI. Áp dụng định lý Pascal cho bộ $\begin{pmatrix} R & S & I \\ T & Q & A \end{pmatrix}$ suy ra ME, QR và ST đồng quy. Tương tự thì NF, QR và ST đồng quy.Từ đó theo đề bài thì bốn đường thẳng ME, NF, QR, ST đồng quy tại P. Chú ý A là cực của EF và theo bài trên thì K là cực của QR đối với (I). Ta suy ra P là cực của AK đối với (I) vậy $IP \perp AK$. □

Bài toán 11. *Cho tam giác ABC có đường tròn nội tiếp (I). D, E, F là trung điểm BC, CA, AB. Đối cực của D đối với (O) cắt EF tại X. Y, Z được định nghĩa tương tự. Chứng minh rằng X, Y, Z thẳng hàng.*



Chứng minh. Các đối cực của D, E, F đối với (I) cắt nhau tạo thành tam giác H, K, L. E, F cùng liên hợp H đối với (I) nên EF là đối cực của H đối với (I). Theo bài toán 8 thì H là trực tâm tam giác IBC. Tương tự K, L là trực tâm các tam giác ICA, IAB. Gọi I_a, I_b, I_c là tâm bàng tiếp góc A, B, C của tam giác ABC. Dễ thấy H, K, L đối xứng với I_a, I_b, I_c qua D, E, F. Chú ý rằng hai tam giác $I_aBC, I_aI_bI_c$ đồng dạng nên I_aD là đường đối trung của tam giác $I_aI_bI_c$. Từ đó dễ thấy DH, EK, FL đồng quy tại M là điểm Lemoine của tam giác $I_aI_bI_c$ cũng là điểm Mittenpunkt của tam giác ABC. X thuộc đối cực của D, H đối với (I) nên D, H cùng liên hợp X đối với (I). Do đó DH là đối cực của X đối với (I) nên X liên hợp M đối với (I). Tương tự Y, Z cùng liên hợp M đối với (I). Vậy X, Y, Z cùng thuộc đối cực của M đối với (I). □

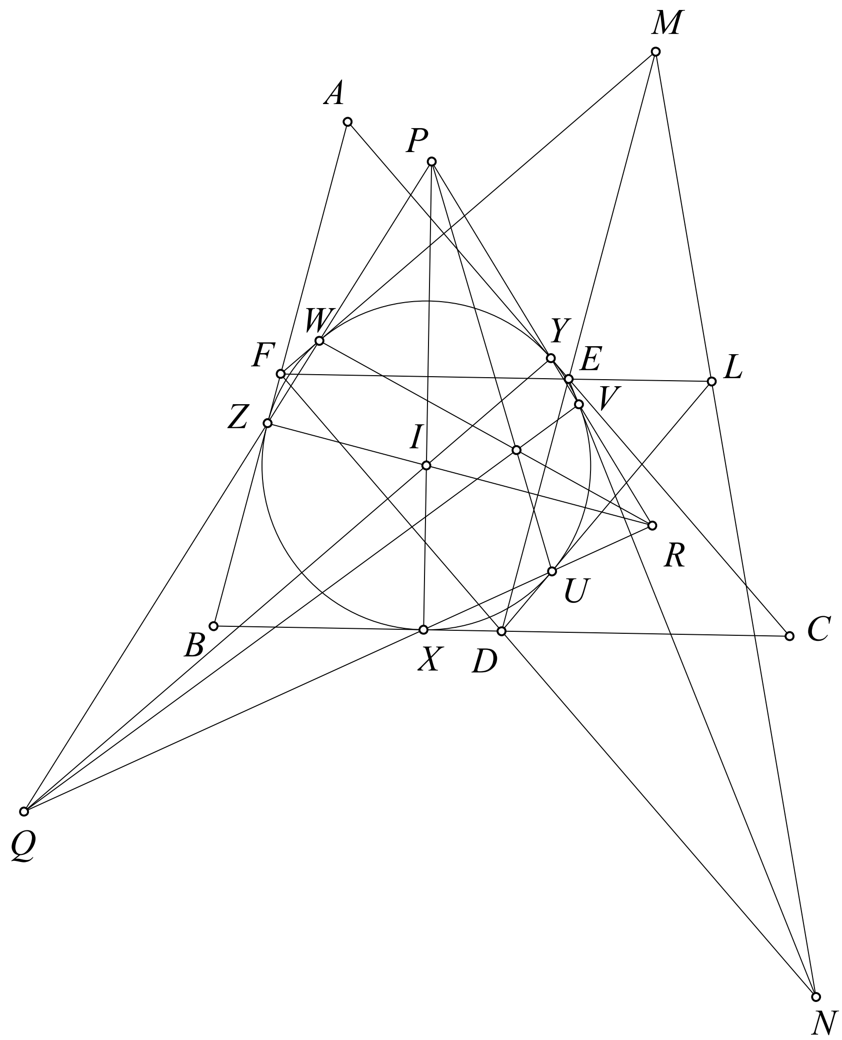
Sự kiện DH, EK, FL đồng quy có thể được suy ra trực tiếp bằng việc sử dụng định lý Conway cho tam giác HKL và đường tròn (I) với chú ý D, E, F là cực của KL, LH, HK đối với (I). Bằng việc sử dụng bài toán 8, qua lăng kính cực và đối cực chúng ta có thể giải quyết dễ dàng bài toán trong [14]. Ta đi tới bài toán sau

Bài toán 12. *Cho tam giác ABC có D, E, F là trung điểm BC, CA, AB. Lấy L, M, N trên EF, FD, DE sao cho DL, EM, FN là tiếp tuyến của đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng L, M, N thẳng hàng.*

Ta cần một bổ đề sau

Bổ đề 1. *Cho tam giác ABC và một đường tròn (O) cắt các cạnh BC, CA, AB tại các cặp điểm $A_1, A_2; B_1, B_2; C_1, C_2$. Khi đó AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy khi và chỉ khi AA_2, BB_2, CC_2 đồng quy.*

Bổ đề trên đã quen thuộc với nhiều bạn đọc, xin không chứng minh ở đây. Trở lại bài toán

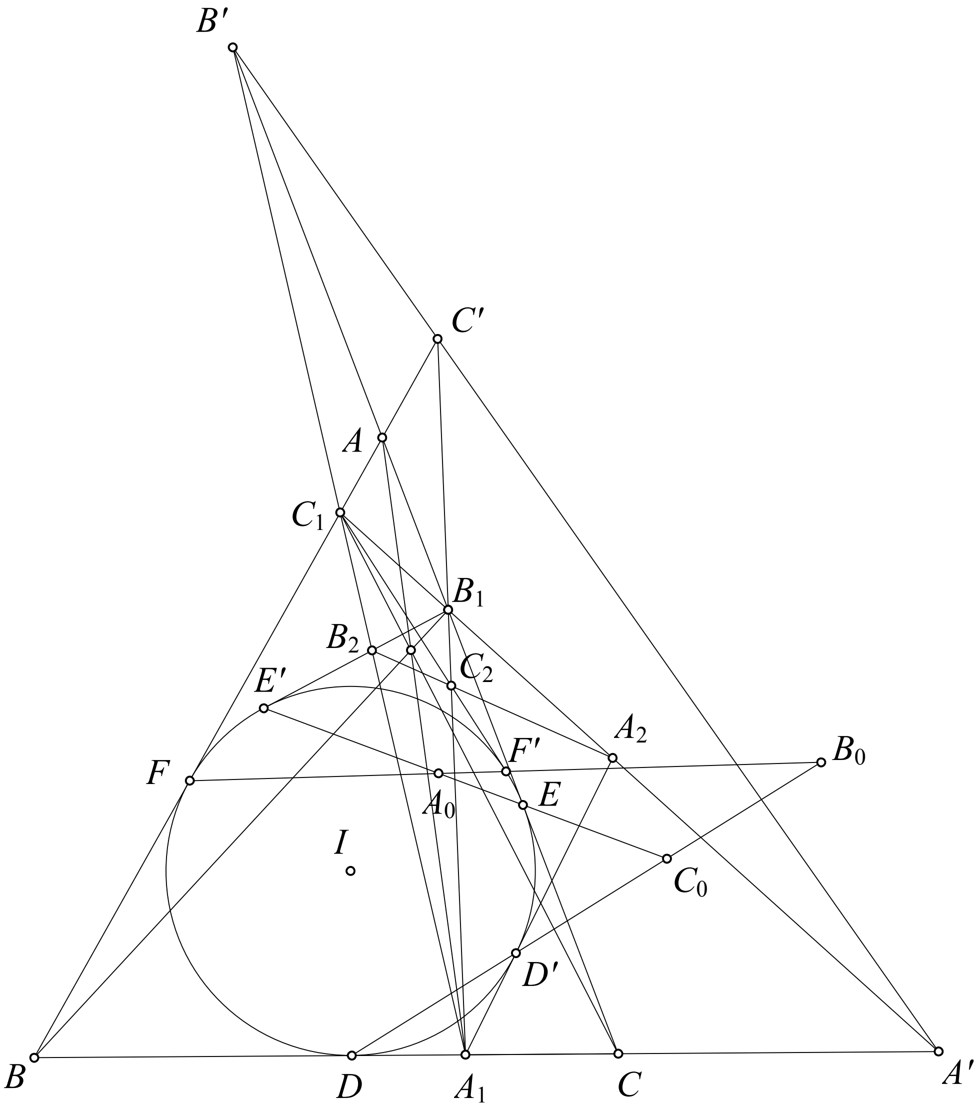


Chứng minh. Gọi đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với BC, CA, AB tại X, Y, Z. DL, EM, FN tiếp xúc (I) tại U, V, W. XU, YV, ZW cắt nhau tạo thành tam giác PQR. Từ bài toán 8 dễ thấy P, Q, R là cực của EF, FD, DE đối với (I) và cũng là trực tâm các tam giác IBC, ICA, IAB. Chú ý rằng PX, QY, RZ đồng quy tại I, áp dụng bổ đề trên cho tam giác PQR và đường tròn (I) ta có PU, QV, RW đồng quy. Xét cực đối cực với (I). L thuộc các đối cực EF, DU của P, U nên L liên hợp với P, U. Do đó PU là đối cực của L. Lập luận tương tự QV, RW là đối cực của M, N. PU, QV, RW đồng quy nên các cực tương ứng L, M, N thẳng hàng. □

Tương tự với kỹ thuật sử dụng trong bài toán 11, chúng ta có thể giải quyết bài toán tổng quát do Nguyễn Phạm Đạt đề xuất xem [14]

Bài toán 13. *Cho tam giác ABC có đường tròn nội tiếp (I). A_1, B_1, C_1 bất kỳ trên BC, CA, AB. A_2 là giao điểm của B_1C_1 với tiếp tuyến qua A_1 của (I) khác BC. B_2, C_2 được xác định tương tự. Chứng minh rằng A_2, B_2, C_2 thẳng hàng khi và chỉ khi AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy.*

Lời giải sau dựa theo **Luis González**



Chứng minh. Gọi (I) tiếp xúc với BC, CA, AB tại D, E, F. A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 tiếp xúc với (I) tại D', E', F'. DD', EE', FF' cắt nhau tạo thành tam giác $A_0B_0C_0$. A', B', C' là giao điểm của $BC, B_1C_1; CA, C_1A_1; AB, A_1B_1$. Xét cực đối cực với (I). A_0 là giao các đối cực EE', FF' của B_1, C_1 nên B_1, C_1 cùng liên hợp A_0; do đó A_0 là cực của B_1C_1. Lập luận tương tự B_0, C_0 là cực của C_1A_1, A_1B_1. A_2 là giao các đối cực B_1C_1, A_1D' của A_0, D'nên A_2 là cực của A_0D'. Lập luận tương tự ta có B_2, C_2 là cực của B_0E', C_0F'; A', B', C' là cực của A_0D, B_0E, C_0F. Ta có các khẳng định sau tương đương

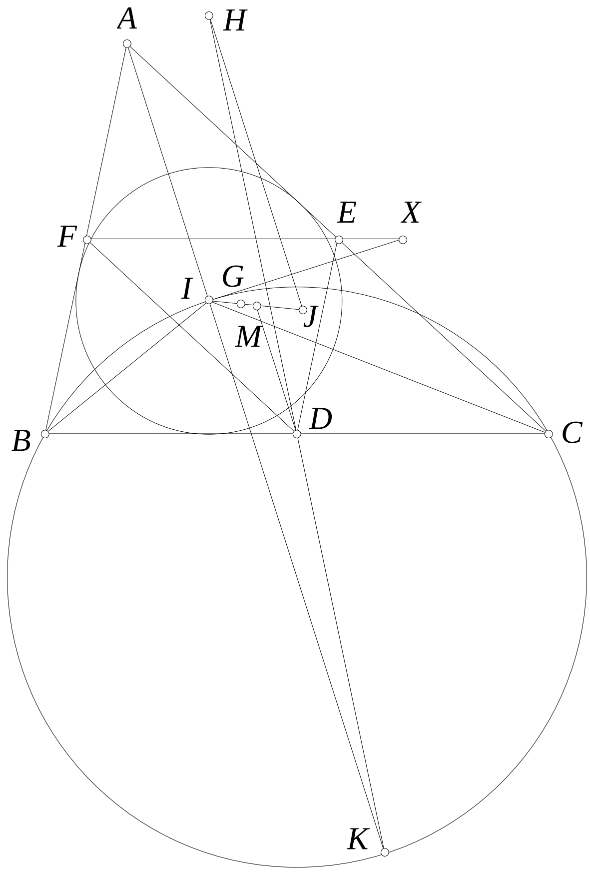
1) A_2, B_2, C_2 thẳng hàng

2) A_0D', B_0E', C_0F' đồng quy (Hệ quả 1.1)

3) A_0D, B_0E, C_0F đồng quy (Áp dụng bổ đề 11.1 với tam giác $A_0B_0C_0$ và (I))
4) A', B', C' thẳng hàng (Hệ quả 1.1)
5) AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy (Áp dụng định lý Desargues cho hai tam giác ABC và $A_1B_1C_1$)
□

Bài toán sau tham khảo [17]

Bài toán 14. *Cho tam giác ABC với tâm nội tiếp I, các trung tuyến AD, BE, CF đồng quy tại G. Trên EF, FD, DE lấy X, Y, Z sao cho $IX \perp IA, IY \perp IB, IZ \perp IC$. Chứng minh rằng X, Y, Z thẳng hàng trên đường thẳng vuông góc với IG.*

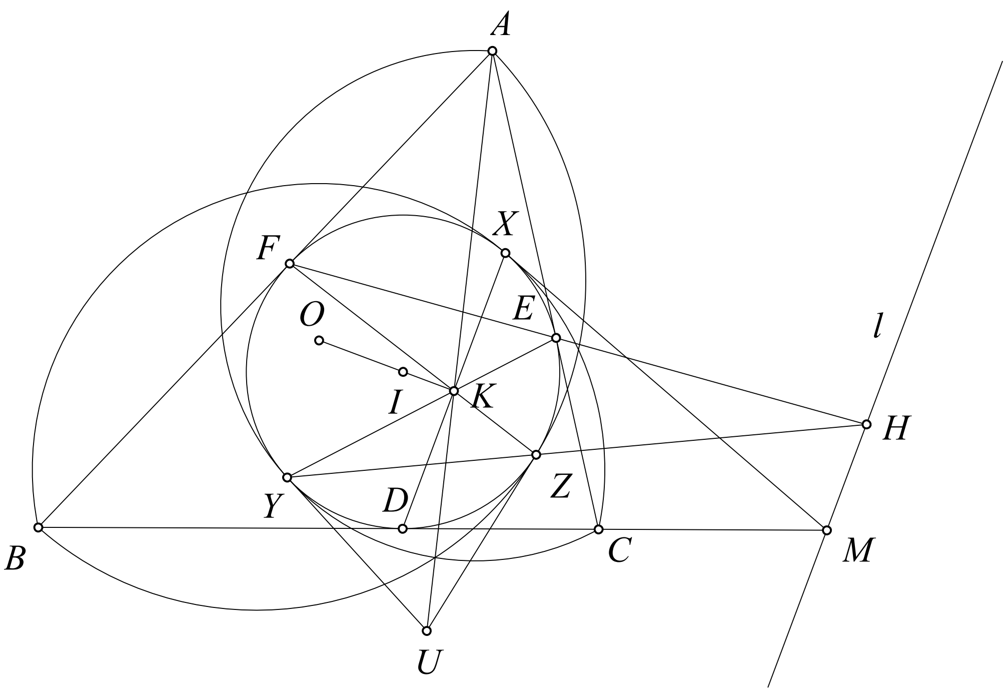


Chứng minh. Gọi (I) là đường tròn nội tiếp tam giác ABC. H là trực tâm tam giác IBC. Theo bài toán 8 H là cực của EF vậy H và X liên hợp với (I) vậy đường đối cực của X là đường thẳng qua H vuông góc với IX. Gọi M là tâm nội tiếp tam giác DEF và K là tâm bàng tiếp góc A của tam giác ABC. Dễ thấy IK là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác IBC nên K và H đối xứng nhau qua D. Gọi J đối xứng I qua M. Dễ thấy $DM \parallel IA$. Từ đó theo tính chất đường trung bình hình thang thì $HJ \parallel IA \perp IX$. Nói cách khác đường đối cực của X luôn đi qua J. Tương tự thì các đường đối cực của Y, Z cũng đi qua J. Vậy X, Y, Z thẳng hàng và J chính là cực của đường thẳng qua X, Y, Z. Dễ thấy I, G, M, J thẳng hàng nên đường thẳng qua X, Y, Z vuông góc với IG. □

Trong kỳ thi Romanian Masters In Mathematics năm 2012 có bài toán hình học hay được viết lại như sau

Bài toán 15. *Cho tam giác ABC có đường tròn nội tiếp (I) và tâm ngoại tiếp O. Đường tròn (O_a) qua B, C tiếp xúc với (I). Các đường tròn $(O_b), (O_c)$ được định nghĩa tương tự. Chứng minh rằng tâm đẳng phương của $(O_a), (O_b), (O_c)$ thuộc OI.*

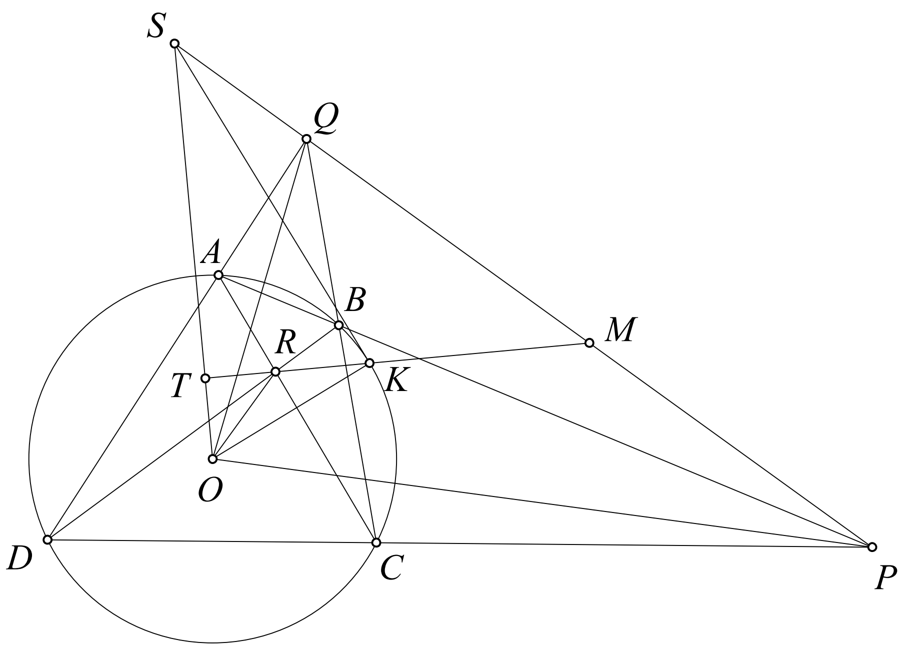
Lời giải sau dựa theo Dựa theo Ilya I. Bogdanov, Fedor A. Ivlev và Pavel A. Kozhevnikov trong [15]



Chứng minh. Gọi $(O_a), (O_b), (O_c)$ tiếp xúc với (I) tại X, Y, Z. Tiếp tuyến tại X của (I) cắt BC tại M. Ta có $MX^2 = MB \cdot MC$ nên M thuộc trục đẳng phương l của $(O), (I)$. Gọi K là cực của l đối với (I) thì $OI \parallel IK \perp l$ nên K thuộc OI. Xét cực đối cực với (I). M thuộc đối cực l của K nên K thuộc đối cực DX của M. Lập luận tương tự EY, FZ đi qua K. Các tiếp tuyến tại Y, Z của (I) cắt nhau tại U thì AU là trục đẳng phương của $(O_b), (O_c)$. EF, YZ cắt nhau tại H. H thuộc đối cực EF, YZ của A, U nên A, U cùng liên hợp với H, vì thế AU là đối cực của H. Dễ thấy H thuộc đối cực l của K nên K thuộc đối cực AU của H. Do đó K cùng phương tích với $(O_b), (O_c)$. Lập luận tương tự ta có K có cùng phương tích với $(O_a), (O_b), (O_c)$. Vậy tâm đẳng phương K của $(O_a), (O_b), (O_c)$ thuộc OI. $\square$

Cũng trong kỳ thi Romanian Masters In Mathematics năm 2013, có bài toán như sau

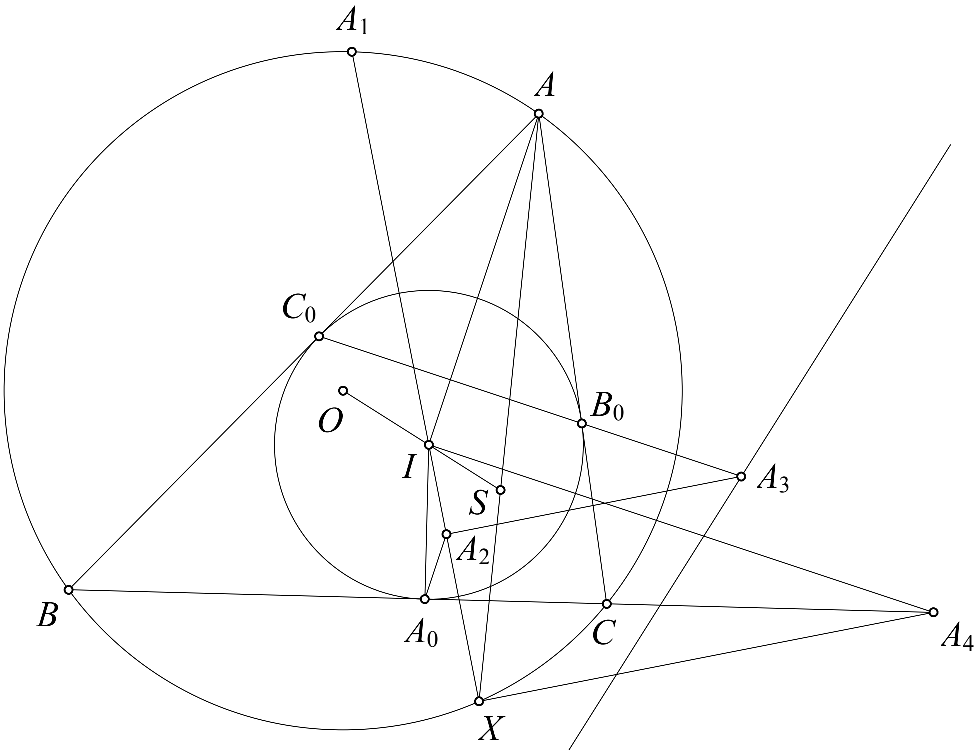
Bài toán 16. *Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn ω có AB cắt CD tại P, AD cắt BC tại Q, AC cắt BD tại R. M là trung điểm PQ. MR cắt ω tại K. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác KPQ tiếp xúc với ω.*



Chứng minh. Gọi O là tâm của đường tròn ω. Đường thẳng qua O vuông góc với MR cắt PQ, MR lần lượt tại S, T. Theo định lý Brokard dễ thấy R là trực tâm tam giác OPQ. Chú ý rằng M là trung điểm PQ và T là hình chiếu của O trên MR, theo kết quả quen thuộc T thuộc đường tròn (OPQ). Dễ có PQ là đối cực của R đối với ω nên S liên hợp R đối với ω. Do đó $MR \perp OS$ là đối cực của S đối với ω nên SK là tiếp tuyến của (O). Ta có $SK^2 = ST \cdot SO = SP \cdot SQ$ nên SK cũng là tiếp tuyến của (KPQ). Vậy đường tròn ngoại tiếp tam giác KPQ tiếp xúc ω tại K. □

Bài toán 17. *Cho tam giác ABC nội tiếp (O) có đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc với BC, CA, AB tại A_0, B_0, C_0. A_1 là điểm chính giữa cung BAC của (O). Lấy A_2 trên IA_1 sao cho $A_0A_2 \parallel IA$. Lấy A_3 trên B_0C_0 sao cho $A_2A_3 \perp IA_1$. B_3, C_3 được định nghĩa tương tự. Chứng minh rằng A_3, B_3, C_3 cùng nằm trên đường thẳng vuông góc với OI.*

Chứng minh. IA_1 đi qua tiếp điểm X của đường tròn A - mixtilinear của tam giác ABC với (O). Đường thẳng qua I vuông góc với IA cắt BC tại A_4. Theo tính chất quen thuộc XA_4 là phân giác ngoài của $\angle BXC$ nên $XA_4 \perp XI$. Xét cực đối cực với (I). Dễ thấy $A_0A_2 \perp IA_4$ là đối cực của A_4 nên A_2 liên hợp với A_4. Do đó $XA_4 \perp IA_2$ là đối cực của A_2 nên X liên hợp với A_2. Vì thế $A_2A_3 \perp IX$ là đối cực của X nên X liên hợp với A_3. A_3 thuộc đối cực B_0C_0 của A nên A liên hợp với A_3. Từ đó AX là đối cực của A_3 đối với (I). AX đi qua tâm vị tự ngoài S của $(O), (I)$ nên A_3 liên hợp với S. Lập luận tương tự B_3, C_3 đều liên hợp với S. Vậy A_3, B_3, C_3 nằm trên đối cực của S vuông góc với OI. □



Kết thúc các ví dụ, chúng tôi cũng có đôi lời muốn chia sẻ. Cực và đối cực là một khái niệm quan trọng trong hình học xạ ảnh cũng là một công cụ quan trọng trong việc giải toán hình học sơ cấp. Trong một bài viết nhỏ không thể nào diễn đạt hết những bài toán sử dụng công cụ này. Định lý cơ bản trong phần này là định lý La Hire được sử dụng nhiều nhưng bên cạnh đó những định lý lớn của phần này như định lý Salmon, định lý Brokard, định lý Conway cũng mới chỉ giới thiệu qua cùng với cách chứng minh chứ bài viết còn chưa đề cập được tới những ứng dụng hết sức phong phú của các định lý này. Mặt khác những ứng dụng lớn của cực đối cực gắn liền với tứ giác ngoại tiếp, lục giác cũng chưa được đề cập tới trong bài viết. Do đó bài viết này mới là một cái nhìn lướt qua một số bài toán ứng dụng hay của cực đối cực chứ chưa đi sâu khai thác cụ thể. Mỗi bài toán trong chuyên đề này còn có rất nhiều khai thác mà có thể viết thành một chuyên đề riêng. Về mặt bản chất cực đối cực xuất phát từ khái niệm điểm liên hợp và hàng điều hòa và nó được phát triển lên nhưng vẫn giữ được tính đơn giản nên có ứng dụng rất lớn. Nếu trong một bài toán lớn để tránh dùng cực đối cực, người giải hoàn toàn có thể làm thêm một công đoạn nữa chứng minh một cách trá hình các tính chất của cực đối cực vì bản thân các tính chất đó rất đơn giản. Tuy nhiên rõ ràng là điều này không có lợi và về mặt sư phạm sẽ gây ra khó hiểu, do đó chúng tôi vẫn luôn khuyến khích các bạn, nhất là các em học sinh thi Olympic vẫn nên dùng và nghĩ theo hướng này nếu thấy tiện lợi.

5. Một số bài toán luyện tập

Bài toán 18. *Cho tam giác ABC có đường tròn nội tiếp (I). Gọi H, K, L lần lượt là trực tâm tam giác IBC, ICA, IAB. Chứng minh rằng AH, BK, CL lần lượt cắt BC, CA, AB theo ba điểm thẳng hàng trên một đường thẳng tiếp xúc (I).*

Bài toán 19. *Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) có đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. M là trung điểm BC. MH cắt EF tại N. Tia ND cắt (O) tại P. Chứng minh* *rằng PA là phân giác $\angle EPF$.*

Bài toán 20. *Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O). P nằm trong tam giác sao cho $AP \perp BC$. D, E, F là hình chiếu của P lên BC, CA, AB. Đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF cắt BC tại M khác D. MP cắt EF tại N. Tia ND cắt (O) tại Q. Chứng minh rằng QA là phân giác $\angle EQF$.*

Bài toán 21. *Cho A, B, M là cực của các đường thẳng a, b, m với đường tròn (O). Chứng minh rằng*

$$\frac{d(M,a)}{d(M,b)} : \frac{d(A,m)}{d(B,m)} = \frac{d(O,a)}{d(O,b)} = \frac{d(B,a)}{d(A,b)}$$

Trong đó $d(X,d)$ ký hiệu khoảng cách từ điểm X tới đường thẳng d.

Bài toán 22. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và P nằm trên phân giác $\angle BAC$. E, F là hình chiếu của P lên CA, AB. OP cắt EF tại Q. S thuộc BC sao cho $SQ \perp OQ$. Gọi AQ cắt (O) tại T khác A. Chứng minh rằng ST tiếp xúc (O).*

Bài toán 23. *Cho tam giác ABC có đường tròn nội tiếp (I). P là điểm bất kỳ. PA, PB, PC lần lượt cắt BC, CA, AB tại D, E, F. Trên EF, FD, DE lấy X, Y, Z sao cho DX, EY, FZ tiếp xúc (I). Chứng minh rằng X, Y, Z thẳng hàng.*

Bài toán 24 (Telv Cohl). *Cho tam giác ABC với P, Q là hai điểm đẳng giác. H, K là trực tâm của tam giác PBC, QBC. Chứng minh rằng trung điểm HK là cực của đường trung bình ứng với A của tam giác ABC đối với đường tròn Pedal của P, Q.*

Bài toán 25. *Cho tam giác ABC đường tròn nội tiếp (I). Gọi H_a, H_b, H_c là trực tâm các tam giác IBC, ICA, IAB. Đoạn IA cắt (I) tại A_1, tiếp tuyến tại I của A_1 cắt H_bH_c tại A_2. Tương tự có B_2, C_2. Chứng minh rằng A_2, B_2, C_2 thẳng hàng.*

Bài toán 26. *Cho tam giác ABC nội tiếp (O). Đường cao tại A, B, C cắt đường tròn tại điểm thứ hai A_0, B_0, C_0. Tiếp tuyến tại B_0, C_0 cắt nhau tại A_1. A_2 là đối xứng của A_0 qua O. A_1A_2 cắt (O) tại A_3. A_0A_3 cắt tiếp tuyến tại A của (O) tại A_4. Tương tự có B_4, C_4. Chứng minh rằng A_4, B_4, C_4 thẳng hàng.*

Bài toán 27. *Cho I, K là tâm nội tiếp và điểm Nagel của tam giác ABC. D, E, F là tiếp điểm của (I) nội tiếp với BC, CA, AB. M, N, P lần lượt là trung điểm BC, CA, AB. Các đường thẳng qua D, E, F và vuông góc với AK, BK, CK cắt các cạnh NP, PM, MN tại X, Y, Z. Chứng minh rằng X, Y, Z thẳng hàng trên đường thẳng vuông góc với IL trong đó L là điểm Lemoine của tam giác tạo bởi ba tâm bàng tiếp.*

Bài toán 28. *Cho tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn (I). Các tiếp điểm tương ứng với AB, BC, CD, DA là M, N, P, Q. MP giao NQ tại K. AB giao CD tại E, BC giao AD tại F. Chứng minh rằng IK vuông góc với EF.*

Bài toán 29 (Turkey TST 2009). *Cho tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn (I, r). Gọi AB cắt CD tại E. AD cắt BC tại F. AC cắt DB tại G. K là hình chiếu của I lên EF. Chứng minh rằng $IK.IG = r^2$.*

Bài toán 30 (Bài T12/445 - số tháng 7 năm 2014). *Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (I). Các cạnh AB, BC tiếp xúc với (I) lần lượt tại M, N. Gọi E là giao điểm của AC và MN, F là giao điểm của BC và DE. DM cắt (I) tại T khác M. Chứng minh rằng FT là tiếp tuyến của (I).*

Bài toán 31 (VN TST 2003). *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). A_0, B_0, C_0 là trung điểm các đường cao AH, BK, CL của tam giác ABC. Đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với BC, CA, AB tại D, E, F. Chứng minh rằng A_0D, B_0E, C_0F và OI đồng quy .*

Tài liệu tham khảo

[1] http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/PolePolar.shtml

[2] http://mathworld.wolfram.com/Polar.html

[3] Nathan Altshiller-Court, College Geometry: An Introduction to the Modern Geometry of the Triangle and the Circle, Dover Publications; 2 Rev Enl edition (April 19, 2007)

[4] http://mathworld.wolfram.com/SalmonsTheorem.html

[5] http://www.mit.edu/ alexrem/ProjectiveGeometry.pdf

[6] http://www.imomath.com/index.php?options=334&lmm=0

[7] http://www.maths.gla.ac.uk/wws/cabripages/triangle/conics.htm

[8] http://artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h1213584

[9] http://analgeomatica.blogspot.com/2015/07/nhat-ky-mot-chuyen-i.html

[10] http://artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h1211140

[11] http://www.xtec.cat/ qcastell/ttw/ttweng/resultats/r276.html

[12] http://analgeomatica.blogspot.com/2016/02/moi-tuan-mot-bai-toan-tuan-2-thang-2.html

[13] http://web.mit.edu/ darij/www/geometry2.html

[14] http://www.artofproblemsolving.com/community/c80019h307278/

[15] On circles touching the incircle, Journal of Classical Geometry http://jcgeometry.org/Articles/Volume2/JCG2013V2pp43-52.pdf

[16] http://www.artofproblemsolving.com/community/q1h612004p3639577

[17] http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h260772

[18] http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h328754

[19] http://artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h1221797

TÍNH CHẤT HÌNH HỌC CỦA ĐƯỜNG CONG BẬC BA

Nguyễn Tiến Lâm, Ngô Quang Dương - THPT Chuyên KHTN, Hà Nội

Bài viết trình bày một số tính chất đơn giản của đường cong bậc ba.

1. Mở đầu

Trong hình học sơ cấp, định lý Menelaus là một định lý nổi tiếng liên quan đến bài toán chứng minh thẳng hàng của các điểm. Định lý này được chứng minh bằng định lý Thales. Dưới đây, ta sẽ đưa ra cách chứng minh bằng phương pháp tọa độ.
Quy ước trong bài viết, tọa độ Descartes của điểm M là (x_M, y_M).

Định lý 1 (Định lý Ménélaus)**.** Các điểm A_1, B_1, C_1 lần lượt chia các đoạn thẳng BC, CA, AB theo tỉ số α, β, γ, trong đó $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Ba điểm A_1, B_1, C_1 thẳng hàng khi và chỉ khi $\alpha\beta\gamma = 1$.

Chứng minh. Chiều thuận. Giả sử ba điểm A_1, B_1, C_1 thẳng hàng và Δ là đường thẳng đi qua ba điểm đó. Trong hệ trục tọa độ Oxy, đường thẳng Δ có phương trình $ax + by + c = 0$ và đặt $f(x) = ax + by + c$. Điểm A_1 chia BC theo tỉ số α nên tọa độ của A_1 là $A_1\left(\dfrac{x_B - \alpha x_C}{1-\alpha}; \dfrac{y_B - \alpha y_C}{1-\alpha}\right)$. Vì $A_1 \in \Delta$ nên

$$a\frac{x_B - \alpha x_C}{1-\alpha} + b\frac{y_B - \alpha y_C}{1-\alpha} + c = 0,$$

dẫn đến $\alpha = \dfrac{f(x_B)}{f(x_C)}$.
Một cách tương tự, ta cũng có $\beta = \dfrac{f(x_C)}{f(x_A)}; \gamma = \dfrac{f(x_A)}{f(x_B)}$. Từ đó, ta có ngay $\alpha\beta\gamma = 1$.
Chiều đảo. Giả sử đường thẳng MN cắt đường thẳng AB tại P' và giả sử P' chia đoạn AB theo tỉ số γ'. Theo chiều thuận thì $\alpha\beta\gamma' = 1$ mà $\alpha\beta\gamma = 1$ nên $\gamma = \gamma'$, tức là $P' \equiv P$. Suy ra M, N, P thẳng hàng. □

Tiếp theo, ta xét định lý Carnot là dạng tổng quát của định lý Menelaus. Nội dung của định lý được phát biểu dưới đây:

Định lý 2 (Định lý Carnot)**.** Giả sử các điểm A_i, B_i, C_i lần lượt chia cạnh BC, CA, AB theo tỉ số $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$, với $i = 1, 2$. Khi đó, 6 điểm A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 thuộc một conic khi và chỉ khi $\alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2\gamma_1\gamma_2 = 1$.

Định lý trên được chứng minh tương tự như định lý Menelaus có sử dụng thêm định lý Viete cho phương trình bậc 2.

2. Một số tính chất của đường cong bậc ba

2.1. Đường cong bậc ba có phương trình $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Mục này đưa ra các tính chất của đường bậc ba có phương trình dạng $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Bổ đề 1. Khi $b = 0$, giả sử A, B, C là ba điểm phân biệt thuộc đường cong bậc ba $\mathcal{K}$. Khi đó, A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi $x_A + x_B + x_C = 0$.

Chứng minh. Giả sử đường thẳng qua hai điểm A, B có phương trình $\Delta : \alpha x + \beta y + \gamma = 0$.
Chiều thuận. Giả sử C thuộc đường thẳng AB, ta cần chỉ ra $x_A + x_B + x_C = 0$. Thật vậy, tọa độ A, B, C là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} \alpha x + \beta y + \gamma = 0, \\ ax^3 + cx + d = y. \end{cases}$$

Thay y từ phương trình thứ hai vào phương trình đầu tiên, ta được phương trình hoành độ giao điểm của (C) và Δ là

$$ax^3 + (\alpha + b)x + \gamma + c = 0.$$

Vì x_A, x_B, x_C là nghiệm của phương trình trên nên theo định lý Viete, ta có ngay $x_A + x_B + x_C = 0$.
Chiều đảo. Giả sử $x_A + x_B + x_C = 0$. Gọi C' là giao điểm của $\mathcal{K}$ và đường thẳng AB, theo phần thuận thì $x_A + x_B + x_{C'} = 0$, dẫn đến $x_C = x_{C'}$ hay $C \equiv C'$. Do đó, A, B, C thẳng hàng. □

Từ bổ đề trên, ta thu được một kết quả đẹp liên quan tới đường cong bậc ba $\mathcal{K}$ trong trường hợp $b = 0$ được trình bày trong mệnh đề dưới đây.

Mệnh đề 1. Khi $b = 0$, giả sử A, B, C là ba điểm phân biệt thuộc đường cong $\mathcal{K}$. Tiếp tuyến của $\mathcal{K}$ tại các điểm A, B, C cắt đường cong $\mathcal{K}$ tại các điểm thứ hai A', B', C'. Chứng minh rằng A', B', C' thẳng hàng khi và chỉ khi A, B, C thẳng hàng.

Chứng minh. Giả sử A, B, C là ba điểm thẳng hàng thuộc đường cong $\mathcal{K}$. Phương trình tiếp tuyến của $\mathcal{K}$ tại A là $y = (3ax_A^2 + c)(x - x_A) + ax_A^3 + cx_A + d$. Do vậy, x_A là nghiệm kép của phương trình

$$ax^3 + cx + d = (3ax_A^2 + c)(x - x_A) + ax_A^3 + cx_A + d$$

hay

$$(x - x_A)^2(x + 2x_A) = 0.$$

Phương trình trên có hai nghiệm $x_A, -2x_A$ nên hoành độ của điểm A' là $x_{A'} = -2x_A$. Một cách tương tự, ta cũng có $x_{B'} = -2x_B, x_{C'} = -2x_C$. Suy ra $x_{A'} + x_{B'} + x_{C'} = -2(x_A + x_B + x_C)$. Từ đây, áp dụng bổ đề 1 ta thấy ngay A', B', C' thẳng hàng khi và chỉ khi A, B, C thẳng hàng. □

Tiếp theo, ta sẽ xét một mở rộng của mệnh đề 1.

Mệnh đề 2 (Mở rộng mệnh đề 1)**.** Khi $b = 0$, xét hai đường thẳng d_1, d_2. Giả sử d_i cắt $\mathcal{K}$ tại ba điểm A_i, B_i, C_i với $i = 1, 2$. Khi đó, giao điểm của các đường thẳng A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 với đường cong $\mathcal{K}$ thẳng hàng.

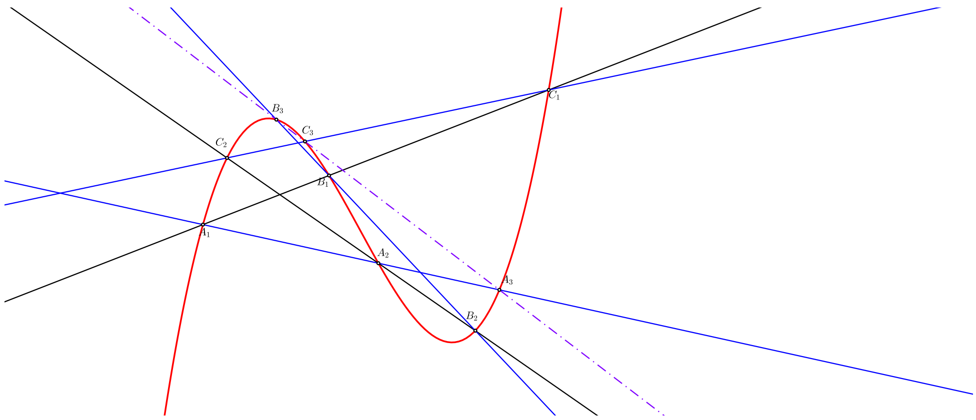
Chứng minh. Gọi A_3, B_3, C_3 tương ứng là giao điểm của các đường thẳng A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 với đường cong $\mathcal{K}$ và giả sử a_i, b_i, c_i lần lượt là hoành độ của các điểm A_i, B_i, C_i với $i = 1, 2, 3$. Theo bổ đề 1 thì ta phải có

$$a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3 = c_1 + c_2 + c_3 = 0$$

Suy ra $\Sigma_{i=1}^{3}(a_i + b_i + c_i) = 0$. Nhưng vì A_i, B_i, C_i thuộc đường thẳng d_i với $i = 1, 2$ nên $a_i + b_i + c_i = 0$ với mọi $i = 1, 2$. Từ đó, ta phải có $a_3 + b_3 + c_3 = 0$. Cũng theo bổ đề 1 thì ba điểm A_3, B_3, C_3 thẳng hàng. Phép chứng minh hoàn tất. □

Trong bài toán trên, ta chỉ cần cho hai đường thẳng d_1, d_2 trùng nhau thì các đường thẳng A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 sẽ suy biến thành tiếp tuyến của đường cong $\mathcal{K}$ và ta thu được lại kết quả ở mệnh đề 1. Một câu hỏi đặt ra là liệu kết quả trên còn đúng không với đường cong $\mathcal{K}$ bất kỳ? Ta xét bài toán mở rộng sau đây:

Mệnh đề 3 (Mở rộng mệnh đề 2)**.** Xét đường cong $\mathcal{K} : y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, với $a \neq 0$ và hai đường thẳng d_1, d_2. Giả sử rằng d_i cắt đường cong $\mathcal{K}$ tại ba điểm phân biệt A_i, B_i, C_i với $i = 1, 2$. Gọi A_3, B_3, C_3 lần lượt là giao điểm của các đường thẳng A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 với đường cong $\mathcal{K}$. Khi đó, ba điểm A_3, B_3, C_3 thẳng hàng.



Hình 12.1: A_3, B_3, C_3 thẳng hàng

Chứng minh. Ta chia làm hai trường hợp.

1. A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 đôi một cắt nhau.
   Gọi A, B, C lần lượt là giao điểm của các cặp đường thẳng (B_1B_2, C_1C_2), (C_1C_2, A_1A_2), (A_1A_2, B_1B_2). Giả sử điểm A_i chia đoạn BC theo tỉ số α_i; điểm B_i chia đoạn CA theo tỉ số β_i; điểm C_i chia đoạn AB theo tỉ số γ_i, với $i = 1, 2, 3$. Áp dụng định lý Carnot cho đường cong $\mathcal{K}$ bậc 3 với $\triangle ABC$ ta có $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\beta_1\beta_2\beta_3\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = 1$. Nhưng vì ba điểm A_i, B_i, C_i thẳng hàng (cùng nằm trên đường thẳng d_i)nên áp dụng định lý Menelaus cho $\triangle ABC$ với cát tuyến d_1 ta có $\alpha_i\beta_i\gamma_i = 1$, với $i = 1, 2$. Suy ra $\alpha_3\beta_3\gamma_3 = 1$, nghĩa là A_3, B_3, C_3 thẳng hàng theo định lý Ménélaus.

2. Trong các cặp (B_1B_2, C_1C_2), (C_1C_2, A_1A_2), (A_1A_2, B_1B_2) có ít nhất 1 cặp song song. Lúc này ta thực hiện một phép chiếu xuyên tâm biến A_i, B_i, C_i thành A'_i, B'_i, C'_i, đường bậc ba $\mathcal{K}$ thành $\mathcal{K}'$. Hiển nhiên tồn tại phép chiếu thỏa mãn $A'_1A'_2$, $B'_1B'_2$, $C'_1C'_2$ đôi một cắt nhau. Lúc này ta lại quay về trường hợp 1.

□

Ở bài toán trên, nếu cho hai đường thẳng d_1, d_2 trùng nhau thì các đường thẳng A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 sẽ suy biến thành tiếp tuyến của đường cong $\mathcal{K}$ thì khi đó kết quả mệnh đề 1 cũng đúng trong trường hợp $b \neq 0$ hay đúng với đường cong bậc ba tổng quát.

2.2. Đường cong bậc ba bất kì

Ở trên, ta trình bày một số tính chất của đường cong bậc ba có phương trình quen thuộc. Phần này sẽ đề cập đến đường cong bậc ba bất kì, mà trong tọa độ Descartes, phương trình được cho dưới dạng hàm ẩn:

$$a_{x3}x^3 + a_{y3}y^3 + a_{x2y}x^2y + a_{xy2}xy^2 + b_{x2}x^2 + b_{y2}y^2 + b_{xy}xy + c_xx + c_yy + d = 0$$

Trong đó các hệ số $a_{x3}, a_{y3}, a_{x2y}, a_{xy2}, b_{x2}, b_{y2}, b_{xy}, c_x, c_y, d$ là các số thực và a_{x3}, a_{y3}, a_{x2y}, a_{xy2} không đồng thời bằng 0.
Nói đến đường cong bậc 3 thì ta có một kết quả rất nổi tiếng:

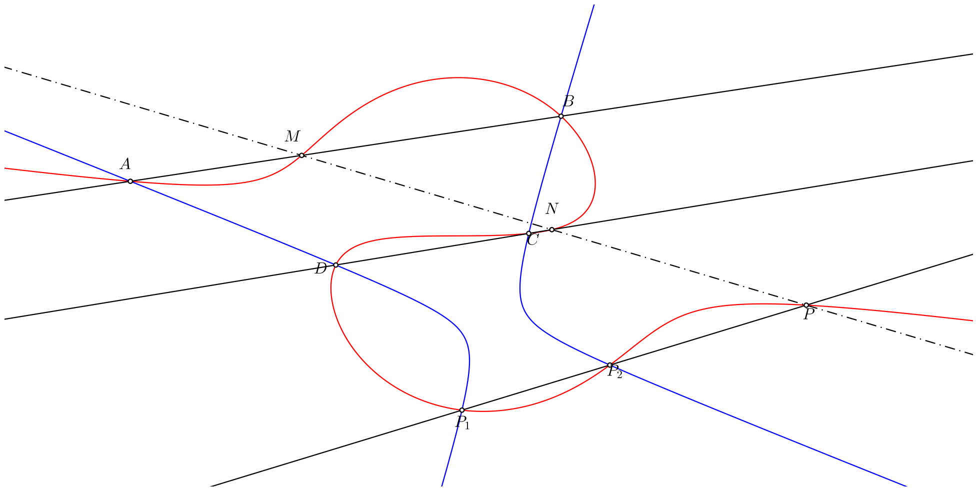
Định lý 3 (Định lý Cayley-Bacharach)**.** Hai đường cong bậc 3 cắt nhau tại 9 điểm (theo định lý Bezout, hai đường cong bậc m, n cắt nhau tại $m \times n$ điểm). Một đường cong bậc 3 khác đi qua 8 trong số 9 điểm đó thì cũng đi qua điểm thứ 9.

Định lý Cayley-Bacharach [1] có thể được suy biến: thay đường cong bậc 3 bởi hợp của 3 đường thẳng, hay hợp của 1 conic và 1 đường thẳng,... Do đó, một trong những ứng dụng của định lý này là chứng minh 3 điểm thẳng hàng, hay 6 điểm thuộc một conic. Chẳng hạn như định lý này mang đến một chứng minh ngắn gọn cho mệnh đề 2 trong 2.1: *2 đường cong bậc 3 là $\mathcal{K}$ và $\overline{A_1, A_2, A_3} \cup \overline{B_1, B_2, B_3} \cup \overline{C_1, C_2, C_3}$ có 9 giao điểm là A_i, B_i, C_i với $i = 1, 2, 3$. Khi đó đường bậc 3 suy biến $\overline{A_1, B_1, C_1} \cup \overline{A_2, B_2, C_2} \cup \overline{A_3, B_3}$ đi qua 8 trong số 9 điểm trên nên cũng sẽ chứa điểm C_3. Điều này nghĩa là A_3, B_3, C_3 thẳng hàng.*

Hệ quả. Các điểm A, B, C, D, P, P_1, P_2 thuộc đường cong bậc ba $\mathcal{K}$. 6 điểm A, B, C, D, P_1, P_2 thuộc một conic khi và chỉ khi giao điểm khác A, B, C, D của AB, CD với $\mathcal{K}$ và P thẳng hàng.

Chứng minh. AB, CD cắt $\mathcal{K}$ tại M, N và M, N, P thẳng hàng. $\mathcal{K}$ và cubic suy biến $\overline{A, B, M} \cup \overline{C, D, N} \cup \overline{P, P_1, P_2}$ có 9 giao điểm A, B, C, D, M, N, P, P_1, P_2. Theo định lý Cayley-Bacharach, đường bậc ba suy biến $ABCDP_1 \cup \overline{M, N, P}$ (trong đó $ABCDP_1$ là conic đi qua 5 điểm A, B, C, D, P_1) đi qua P_2 nên A, B, C, D, P_1, P_2 thuộc một conic.
Phần đảo, A, B, C, D, P_1, P_2 thuộc một conic. Xét ba đường bậc ba $\mathcal{K}$, $\overline{A, B, M} \cup \overline{C, D, N} \cup \overline{P, P_1, P_2}$, $ABCDP_1P_2 \cup \overline{M, N}$ từ đó áp dụng định lý Cayley-Bacharach ta suy ra M, N, P thẳng hàng. □

Một số bài toán khác có chứng minh áp dụng định lý Cayley-Bacharach tương tự trên, bạn đọc xem tại [2].



Hình 12.2: Một ứng dụng trực tiếp của định lý Cayley-Bacharach

Tài liệu tham khảo

[1] Cayley-Bacharach theorem, Wikipedia

[2] Generalization of some triangle geometry results associated with cubics http://blogcuaquangduong.blogspot.com/2016/03/generalizations-of-some-triangle.html

Epsilon
Tạp chí online của cộng đồng những người yêu toán

BIỂU DIỄN SỐ NGUYÊN DƯƠNG DƯỚI DẠNG TỔNG CÁC SỐ CHÍNH PHƯƠNG

Hoàng Cao Phong

Chuyên đề nghiên cứu bài toán Waring trong trường hợp $k = 2$. Trong chuyên đề, ta sẽ chứng minh $g(2) = 4$. Để làm được điều đó, ta chỉ cần chỉ ra có một số số nguyên dương không thể biểu diễn dưới đước dạng tổng hai số chính phương, một số số không thể biểu diễn được dưới dạng tổng ba số chính phương, nhưng mọi số nguyên dương đều biểu diễn được dưới dạng tổng của bốn số chính phương. Ngoài ra, chúng ta sẽ đi tìm đáp án cho câu hỏi: "Những số nguyên dương nào biểu diễn được dưới dạng tổng hai số chính phương và ba số chính phương". Cuối cùng, chúng ta sẽ xem xét bài toán Waring tổng quát và các vấn đề mở rộng cho hàm $g(k)$.

1. Giới thiệu

Việc tìm cách biểu diễn một số nguyên dương dưới dạng tổng các số chính phương được rất nhiều đối tượng quan tâm, từ những người yêu toán cho đến những nhà toán học.

Vào năm 1632, Albert Girard là người đầu tiên đưa ra nhận định: một số nguyên tố lẻ đồng dư với $1 \mod 4$ là tổng của hai số chính phương, điều này đã được công bố vào năm 1634, sau cái chết của ông. Fermat được cho là người đầu tiên đưa ra lời giải cho bài toán, và nó được đưa vào một lá thư của ông gửi Marin Mersenne vào ngày 25 tháng 12 năm 1640.

Tuy nhiên, trong bức thư, Fermat không đưa ra chứng minh cho khẳng định của mình. Lời giải đầu tiên được tìm ra bởi Euler vào năm 1747, khi ông 40 tuổi. Một cách tự nhiên, Định lí Fermat về tổng hai số chính phương dẫn đến câu hỏi: "Tìm giá trị nhỏ nhất của n sao cho mọi số nguyên dương đều có thể biểu diễn bằng tổng của không quá n số chính phương". Đây là trường hợp riêng của bài toán Waring khi $k = 2$.

Trong chuyên đề, ta sẽ chứng minh $n = 4$ và chỉ ra những số nguyên dương nào có thể biểu diễn dưới dạng tổng của hai hoặc ba số chính phương.

Trong mục 2, ta chứng minh một số nguyên tố có thể biểu diễn dưới dạng tổng của hai số chính phương khi và chỉ khi nó không đồng dư với 3 mod 4 và trả lời câu hỏi: "Những số nguyên dương nào có thể biểu diễn được dưới dạng tổng của hai số chính phương?"

Trong mục 3, ta sẽ chứng minh mọi số nguyên tố đều có thể biểu diễn được dưới dạng tổng của bốn số chính phương qua đó chứng minh mọi số nguyên dương đều có thể biểu diễn được dưới dạng tổng của bốn số chính phương.

Trong mục 4, ta chứng minh một số nguyên dương có thể biểu diễn được dưới dạng tổng của ba số chính phương khi và chỉ khi nó có dạng $4^a(8n+7)$. Mục này sẽ đề cập đến hình học số học và định lí Minkowski.

Trong mục 5, ta sẽ đưa ra thêm thông tin và bình luận xoay quanh bài toán Waring tổng quát

2. Biểu diễn một số nguyên dương dưới dạng tổng của hai số chính phương

Trước hết, chúng ta quan tâm đến bài toán : "Những số nguyên tố nào có thể biểu diễn được dưới dạng tổng của hai số chính phương?", đáp án bài toán dẫn đến định lí mang tên Fermat về tổng hai số chính phương.

Bổ đề 2.1. p là một số nguyên tố cho trước. Nếu $p \equiv 3 \ (mod \ 4)$ và $x^2 + y^2$ chia hết cho p thì x chia hết cho p và y chia hết cho p.

Chứng minh. Giả sử $(x,p) = (y,p) = 1, x^2 \equiv -y^2 \ (mod \ p)$ dẫn đến $x^{p-1} \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} y^{p-1} \ (mod \ p)$ suy ra $(-1)^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \ (mod \ p)$, suy ra $-1 \equiv 1 \ (mod \ p)$ dẫn đến điều vô lí. □

Định lý 2.1 (Định lí Fermat về tổng hai số chính phương). *Số nguyên tố p có thể biểu diễn được dưới dạng tổng hai số chính phương khi và chỉ khi $p \not\equiv 3 \ (mod \ 4)$.*

Chứng minh. Giả sử $p = 4k+3$ biểu diễn được dưới dạng tổng hai số chính phương x, y. Theo bổ đề 2, x chia hết cho p và y chia hết cho p. Suy ra p chia hết cho p^2. Vô lý.
Nếu $p = 2$ thì $p = 1^2 + 1^2$.
Nếu $p = 4k+1$ thì -1 là số chính phương modulo p ([5]), tồn tại $a \in \mathbb{N}$ thỏa mãn $a^2 \equiv -1 \ (mod \ p)$.
Đặt $q = \left[\sqrt{p}\right]$, xét $(1+q)^2$ số có dạng $x + ay$ với $x = 0, 1, \ldots, q$ và $y = 0, 1, \ldots, q$.
Do $(q+1)^2 > p$, tồn tại $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$ thỏa mãn $x_1 + ay_1 \equiv x_2 + ay_2 \ (mod \ p)$ nên $(x_1 - x_2)^2 \equiv -(y_1 - y_2)^2 \ (mod \ p)$.
Vì $(x_1 - x_2) \leq q < \sqrt{p}$ và $(y_1 - y_2) \leq q < \sqrt{p}$, ta có được $(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = p$.
Định lí 2.1 đã được chứng minh. □

Bây giờ, chúng ta xem xét : "Những số tự nhiên nào có thể biểu diễn được dưới dạng tổng của hai số chính phương?".

Bổ đề 2.2. Tích của hai số, với mỗi số là tổng của một số chính phương, cũng là số chính phương.

Chứng minh. Giả sử $m = a^2 + b^2$ và $n = c^2 + d^2$, suy ra $mn = (ac+bd)^2 + (ad-bc)^2$ □

Định lý 2.2. *Đặt $n = 2^r \prod p_i^{si} \prod q_i^{ti}$ với $p_i \equiv 1 \ (mod \ 4)$ và $q_i \equiv 3 \ (mod \ 4)$, n có thể biểu diễn được dưới dạng tổng hai số chính phương khi và chỉ khi t_i chẵn với mọi i*

Chứng minh. Giả sử n có thể biểu diễn được dưới dạng hai tổng hai số chính phương và tồn tại t_i lẻ: $n = x^2 + y^2 = q^t b, (b, q) = 1$.
Theo bổ đề 2, $x = qx_1, y = qy_1$. Điều này dẫn đến $x_1^2 + y_1^2 = q^{t-2}b$.
Sau một số hữu hạn bước lặp lại, ta thu được:

$$q(xk^2 + yk^2) = b,$$

dẫn đến điều vô lí.
Gọi $\mathbb{D}$ là tập hợp

$$\{n \mid n \in \mathbb{N}, n = x^2 + y^2\}$$

Giả sử t_i chẵn với mọi i . Do $2 \in \mathbb{D}$, $p_i \in \mathbb{D}$, bổ đề 2.2 chỉ ra rằng $m \in \mathbb{D}$ với $m = 2^r \prod p_i^{s_1}$. Tồn tại $\vec{x}, y \in \mathbb{N}$ thỏa mãn $x^2 + y2 = m$. Do t_i chẵn với mọi i nên $\prod q_i^{t_i} = h^2$. Vì vậy, $n = (xh)^2 + (yh)^2$.
Định lí 2.2 được chứng minh. □

3. Biểu diễn một số nguyên dương dưới dạng tổng của bốn số chính phương

Trong mục này tạm thời chúng ta sẽ không xét đến vấn đề biểu diễn một số nguyên dương thành tổng ba số chính phương do không có một lời giải hoàn toàn sơ cấp cho vấn đề trên. Vả lại, lời giải cho định lí bốn số chính phương có phần tương tự với lời giải cho đính lí hai số chính phương nên ta sẽ quay lại sau khi chứng minh thành công định lí Lagrange về tổng của bốn số chính phương.

Bổ đề 3.1. Đặt $\mathbb{D} = \{n \mid n = x^2 + y^2 + z^2 + t^2; n, x, y, z, t \in \mathbb{N}\}$. Nếu $m, n \in D$ thì $mn \in D$.

Chứng minh. Giả sử $m = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ và $n = e^2 + f^2 + g^2 + h^2$

$$mn = (ae+bf+cg+dh)^2+(af-be+ch-dg)^2+(ag-bh-ce+df)^2+(ah+bg-cf-de)^2$$

Suy ra $mn \in \mathbb{D}$.

□

Bổ đề 3.2. Giả sử p là một số nguyên tố lẻ cho trước, khi đó tồn tại $1 \leq k < p$ sao cho $kp \in \mathbb{D}$.

Chứng minh. Xét hai tập $A = \{x^2\}, x = 0, 1, \ldots, \dfrac{p-1}{2}$ và $B = \{-y^2 - 1\}, y = 0, 1, \ldots, \dfrac{p-1}{2}$.
Hiển nhiên, mỗi phần tử của A đều phân biệt theo modulo p, mỗi phần tử của B cũng vậy. Ta lại có: $|A| + |B| = p + 1$. Suy ra tồn tại $x,\ y \in \left\{0, 1, \ldots, \dfrac{p-1}{2}\right\}$ sao cho $x^2 \equiv -y^2 - 1 \ (mod\ \ p)$ nên $kp = x^2 + y^2 + 1^2 + 0^2 \Rightarrow kp \in \mathbb{D}$ □

Do $kp = x^2 + y^2 + 1 < \dfrac{p^2}{4} + \dfrac{p^2}{4} < p^2$ nên $k < p$.

Đặt $M = \{1 \leq k < p, kp \in \mathbb{D}\}$. Theo bổ đề 3.2, $M \neq$.
Giả sử m là phần tử bé nhất của tập hợp M,

Định lý 3.1. *Ta sẽ chứng minh $m = 1$ từ đó suy ra $p \in \mathbb{D}$ với mọi số nguyên tố p.*

Chứng minh. Giả sử $1 < m < p, mp \in \mathbb{D}$. Ta có, $mp = x^2 + y^2 + z^2 + t^2$.
Nếu m chẵn thì $mp = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \equiv a \in 0, 2\ (mod\ 4)$
Trường hợp 1: Nếu x, y, z, t cùng chẵn hoặc cùng lẻ

$$\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2}, \frac{z+t}{2}, \frac{z-t}{2} \in \mathbb{Z}$$

và

$$\frac{(x+y)^2}{4} + \frac{(x-y)^2}{4} + \frac{(z+t)^2}{4} + \frac{(z-t)^2}{4} = \frac{m}{2}p \Rightarrow \frac{m}{2} \in M$$

Điều này mâu thuẫn bởi m là phần tử nhỏ nhất trong M.
Trường hợp 2: Nếu x, y chẵn và z, t lẻ

$$\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2}, \frac{z+t}{2}, \frac{z-t}{2} \in \mathbb{Z}$$

Lập luận tương tự, ta cũng suy ra được mâu thuẫn với định nghĩa của m.
Nếu m lẻ: Xét $S = \left\{0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm \dfrac{m-1}{2}\right\}$. Do S là một hệ thặng dư đầy đủ mod m, tồn tại $a, b, c, d \in S$ sao cho $x \equiv a\ (mod\ m), y \equiv b\ (mod\ m), z \equiv c\ (mod\ m), t \equiv d\ (mod\ m)$. Vì $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \equiv 0\ (mod\ m)$ nên tồn tại k thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = km$.
Từ $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 < m^2$ suy ra $0 \leq k < m$.
Một lần nữa, chúng ta xét hai trường hợp:
Trường hợp 1: $k = 0$ dẫn đến $a = b = c = d = 0$ suy ra $x \equiv y \equiv z \equiv t \equiv 0\ (mod\ p)$ nên $m^2 \mid x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = mp$ đồng nghĩa với m chia hết p dẫn đến sự mâu thuẫn.
Trường hợp 2: $1 \leq k < m$. Theo bổ đề 3.1, ta có:

$$mp.km = (ax+by+cz+dt)^2+(bx-ay+dz-ct)^2+(cx-dy-az+bt)^2+(dx+cy-bz-at)^2.$$

Do

$$\begin{aligned}
X &= ax + by + cz + dt \equiv a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \equiv 0\ (mod\ m)\\
Y &= bx - ay + dz - ct \equiv ab - ab + dc + cd \equiv 0\ (mod\ m)\\
Z &= cx - dy - az + bt \equiv ca - db - ac + bd \equiv 0\ (mod\ m)\\
T &= dx + cy - bz - at \equiv da + cb - bc - ad \equiv 0\ (mod\ m)
\end{aligned}$$

$X^2 + Y^2 + Z^2 + T^2 = m^2(X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2 + T_1^2) = m^2kp$. $kp \in \mathbb{D}$ dẫn đến $k \in M$. Vô lý. ☐

Định lý 3.2 (Định lí Lagrange về bốn số chính phương). *Mọi số tự nhiên đều có thể biểu diễn được dưới dạng tổng của bốn số chính phương*

Chứng minh. Áp dụng bổ đề 3.1 và định lí 3.1, định lí Lagrange về bốn số chính phương trở nên hiển nhiên dẫn đến $g(2) \leq 4$.
Cho đến giờ, ta gần như đã hoàn thiện mục đích chính của chúng ta. Điều duy nhất còn lại là chứng minh có những số tự nhiên không thể biểu diễn bằng tổng của ba số chính phương. □

4. Biểu diễn một số nguyên dương dưới dạng tổng của ba số chính phương

Như đã nói ở trên, không có một lời giải hoàn toàn sơ cấp cho định lí Legendre về tổng của ba số chính phương. Tuy nhiên, bằng cách sử dụng định lí Minkowski: "bất kì một tập lồi trong $\mathbb{R}^n$ đối xứng qua gốc tọa độ và có thể tích lớn hơn $2^n d(L)$ đều chứa ít nhất một điểm nguyên khác không", dựa vào chứng minh của Ankeny vào năm 1957, ta có thể đưa ra một lời giải rất đẹp cho bài toán trên.

Định lý 4.1. *Số tự nhiên m có thể biểu diễn dưới dạng tổng của ba số chính phương khi và chỉ khi m không có dạng $4^a(8n+7)$.*

Chứng minh. Nếu m là một số nguyên dương có dạng $4^a(8n+7)$ thì m không thể biểu diễn được bằng tổng của ba số chính phương:
Giả sử m có thể biểu diễn dưới dạng tổng của ba số chính phương: $4^a(8n+7) = m = x^2+y^2+z^2$. Bởi một số chính phương chỉ có thể đồng dư với 0, 1 hoặc 4 theo modulo 8 nên $m = x^2+y^2+z^2 \equiv b \in (0,1,2,3,4,5,6) \ (mod\ 8)$.
Nếu $a > 0$, ta có $m \equiv 0 \ (mod\ 4)$, $x^2+y^2+z^2 \equiv b \in (0,4) \ (mod\ 8)$ nên $x^2 \equiv y^2 \equiv z^2 \equiv 0 \ (mod\ 4)$ suy ra $x = 2x_1, y = 2y_1, z = 2z_1$ dẫn đến $x_1^2+y_1^2+z_1^2 = 4^{a-1}(8k+7)$.
Sau một số hữu hạn lần lặp lại bước trên, ta thu được:

$$x_a^2+y_a^2+z_a^2 = 8k+7 \equiv 7 \ (mod\ 8),$$

Vô lý. Sau khi chứng minh được chiều "chỉ khi", Ta đã thành công trong việc chỉ ra rằng $g(2) = 4$. Tuy nhiên, ta sẽ tiếp tục chứng minh chiều "khi" vốn phức tạp hơn nhiều.

Nếu m không có dạng $4^a(8n+7)$ thì m có thể biểu diễn được dưới dạng tổng của ba số chính phương:
Ta chỉ cần chứng minh bài toán trong trường hợp m là một số chính phương tự do (square free) (nếu không, ta vẫn có thể coi m như vậy). Do tổng của ba số chính phương không thể đồng dư với 7 $(mod\ 8)$, Ta giải quyết hai trường hợp riêng biệt:
Trường hợp 1: $m \equiv 3 \ (mod\ 8)$. Theo định lí Dirichlet về cấp số cộng ([3]), tồn tại một số nguyên tố q thỏa mãn $-2q \equiv 1 (mod\ m)$ và $q \equiv 1 \ (mod\ 4)$. Công thức sau có sử dụng kí hiệu Jacobi ([5]).
Ta có:

$$(\frac{-m}{q}) = \left(\frac{-1}{q}\right)\left(\frac{m}{q}\right) = \left(\frac{m}{q}\right) \text{ (Do } q \equiv 1 (mod\ 4))$$

$$= \left(\frac{q}{m}\right) \text{(Theo luật thuận nghịch bình phương)}$$
$$= \left(\frac{-2}{m}\right)\left(\frac{q}{m}\right) \text{(Do } m \equiv 3 \ (mod\ 8))$$
$$= (\frac{-2q}{m})$$
$$= 1$$

Tồn tại số nguyên b thỏa mãn $b^2 \equiv -m \ (mod\ q)$ hay $b^2 - kh = -m (k \in \mathbb{Z})$.
Do $1 - k \equiv 1 \ (mod\ 4)$, $k = 4k_1$ Dẫn đến $b^2 \equiv -m \ (mod\ 4q)$.
Xét lưới nguyên: $L = \{(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3 \mid x \equiv y \ (mod\ m), y \equiv bz \ (mod\ 2q)\}$. Có thể tích đơn vị là $2mq$ trong $\mathbb{R}^3$ và mọi vec-tơ $(x, y, z) \in L$ đều thỏa mãn:

$$\begin{aligned} &2qx^2 + y^2 + mz^2 \\ &\equiv -x^2 + y^2 \ (mod\ m) \equiv 0 \ (mod\ m) \\ &\equiv (bz)^2 + mz^2 \ (mod\ 2q) \equiv 0 \ (mod\ 2q). \end{aligned}$$

Hình Ellipsoid E: $2qX^2 + Y^2 + mZ^2 \leq 4mq$ có thể tích $\frac{4\pi}{3}\frac{(2\sqrt{qm})^3}{\sqrt{2qm}}$, lớn hơn $2^3.2qm$. Theo định lí Minkowski, tồn tại vec-tơ khác không $(x, y, z) \in L \cap E$ sao cho $2qx^2 + y^2 + mz^2 \equiv 0 \ (mod\ 2qm)$ nên $2qx^2 + y^2 + mz^2 = 2qm$.
Để chứng minh m có thể biểu diễn dưới dạng tổng của ba số chính phương ta sẽ chứng minh $\frac{y^2 + mz^2}{2q}$ biểu diễn được dưới dạng tổng hai số chính phương. Định lí 2.2 sẽ giúp chúng ta giải quyết điều này. Ta chỉ cần chứng minh: Tất cả những số nguyên tố p thỏa mãn $p > 2$ và $\upsilon_p(y^2 + mz^2) = 2n + 1$ ([6]) đều đồng dư với $1 \ (mod\ 4)$.
Nếu p không chia hết m
$y^2 + mz^2 \equiv 0 \ (mod\ p)$ dẫn đến $y^2 \equiv -mz^2 \ (mod\ p)$
Tồn tại z' sao cho $zz' \equiv 1 \ (mod\ p)$ nên $(z'y)^2 \equiv -m \ (mod\ p)$ suy ra $-m$ là một số chính phương $(mod\ p)$. Hơn nữa, vì $x^2 \equiv m \ (mod\ p)$ nên m là một số chính phương mod p

$$1 = \left(\frac{-m}{p}\right) = \left(\frac{-1}{p}\right)\left(\frac{m}{p}\right) = \left(\frac{-1}{p}\right)$$

suy ra

$$p \equiv 1 \ (mod\ 4)$$

Nếu p chia hết m, p cũng sẽ chia hết x và y, dẫn đến $mz^2 \equiv 2qm \ (mod\ p^2)$
Do m là một số chính phương tự do nên $2q$ là số chính phương mod p và $2q \equiv -1 \ (mod\ p)$, ta thu được: $p \equiv -1 \ (mod\ 4)$
Trong cả hai trường hợp, ta đều có $p \equiv 1 (mod\ 4)$ nên $\frac{y^2 + mz^2}{2q}$ có thể biểu diễn được dưới dạng tổng của hai số chính phương dẫn đến m có thể biểu diễn được dưới dạng tổng ba số chính phương.
Trường hợp 2: Nếu $m \not\equiv 3 \ (mod\ 8)$, Chứng minh gần như tương tự ngoại trừ một số thay đổi nhỏ.

Theo định lí Dirichlet về cấp số cộng, tồn tại số nguyên tố q thỏa mãn:

$$q \equiv -1 \ (mod\ m), q \equiv \begin{cases} 1 \ (mod\ 4) \text{ khi } m \equiv 1, 5 \ (mod\ 8) \\ 1 \ (mod\ 8) \text{ khi } m \equiv 2 \ (mod\ 8) \\ 5 \ (mod\ 8) \text{ khi } m \equiv 6 \ (mod\ 8) \end{cases}$$

Dễ dàng chứng minh $-m$ là số chính phương mod q nên tồn tại $b \in \mathbb{Z}$ sao cho $b^2 \equiv -m \ (mod\ p)$. Lần này, ta xét lưới nguyên $L = \{(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3 \mid x \equiv y \ (mod\ m), y \equiv bz \ (mod\ q)\}$ và hình ellipsoid $E \colon qX^2 + Y^2 + mZ^2 \leq 2mq$.
Sau một vài bước tương tự, ta thu được: tồn tại vec-tơ khác không $(x, y, z) \in L \cap E \colon qx^2 + y^2 + mz^2 = qm$. Việc chứng minh rằng mọi số nguyên tố p thỏa mãn $p > 2$ và $\upsilon_p(y^2 + mz^2) = 2n + 1$ đều đồng dư 1 mod 4 là tương tự. Cuối cùng, ta vẫn có thể biểu diễn $\dfrac{y^2 + mz^2}{q}$ dưới dạng tổng của hai số chính phương và kết thúc bài toán.
Trong cả hai trường hợp, m đều có thể biểu diễn được dưới dạng tổng của ba số chính phương. Định lí 4.1 được giải quyết triệt để.
Qua chuyên đề này, ta không chỉ biết n=4 là số nguyên nhỏ nhất thỏa mãn mọi số nguyên dương đều có thể biểu diễn được bằng tổng của n số chính phương mà còn biết được những số nào có thể biểu diễn được dưới dạng tổng của hai hoặc ba số chính phương. Cụ thể, $n = 2^r \prod p_i^{si} \prod q_i^{ti}$ với $p_i \equiv 1 \ (mod\ 4)$ và $q_i \equiv 3 \ (mod\ 4)$ có thể biểu diễn được bằng tổng của hai số chính phương khi và chỉ khi t_i chẵn với mọi i; m có thể biểu diễn được bằng tổng của ba số chính phương khi và chỉ khi m không có dạng $4^a(8n + 7)$. □

5. Bài toán Waring

Vào thế kỉ 18, Waring, một nhà toán học lỗi lạc người Anh đã đưa ra nhận xét rằng mọi số nguyễn dương có thể biểu diễn bởi tổng của 9 lập phương đúng và tổng của 19 lũy thừa bậc 4. Ông mở rộng giả thuyết của mình: Với k là số nguyên dương cho trước, luôn tồn tại m (phụ thuộc vào k) sao cho mọi số nguyên dương có thể biểu diễn được bằng tổng của m lũy thừa bậc k. Đấy chính là bài toán Waring tổng quát.

Vào năm 1906, David Hilbert, một nhà toán học nổi tiếng người Đức đã chứng minh thành công giả thuyết trên nhưng lời giải vô cùng phức tạp.

Gọi $g(k)$ là số m nhỏ nhất, có nghĩa mọi số nguyên dương đều có thể biểu diễn dưới dạng tổng của $g(k)$ lũy thừa bậc k và tồn tại ít nhất một số nguyên dương không thể biểu diễn dưới dạng tổng của $(g(k) - 1)$ lũy thừa bậc k. Trong chuyên đề, ta đã thành công trong việc chứng minh $g(2) = 4$. Gần đây, người ta đã chứng minh được $g(3) = 9, g(4) = 19, g(5) = 37$ và nếu $k \leq 471600000$ thì $g(k) = \left[(\frac{3}{2})^k\right] + 2^k - 2$.

Vẫn còn khá nhiều câu hỏi mở xung quanh hàm $g(k)$ rất đáng được quan tâm và khám phá. Có thể xem ở [9] để biết thêm chi tiết về bài toán Waring.

Tài liệu tham khảo

[1] Wikipedia, Albert Girard. https://en.wikipedia.org/wiki/Albert_Girard.

[2] Wikipedia, Pierre de Fermat. https://en.wikipedia.org/wiki/Pierre_de_Fermat.

[3] PETE L. Clark, Dirichlet's Theorem on Primes in Arithmetic Progressions. Department of Mathematics -University of Georgia. http://math.uga.edu/ pete/4400DT.pdf.

[4] H. Davenport, the geometry of number, Mathematical Gazette vol 31 (1947) (206-210)

[5] Titu Andreescu and Dorin Andrica, 2009. Number Theory: Structures, Examples, and Problems (179-188).

[6] Titu Andreescu and Gabriel Dospinescu, 2008. Problem from the Books (49-67)

[7] Micheal Wong. Representing integers as sum of squares. University of Chicago: Department of Mathematics.

[8] N. c. Ankeny, 1957. Sums of three squares. Proceedings of the AMS 8 (316-319)

[9] Hardy, Wright, 1954. An Introduction to the Theory of Numbers. Oxford.

[10] Phan Huy Khai, 2004. Cac bai toan co ban cua so hoc (Number theory's elementary problems) (255-282).

MỘT SỐ DẠNG TOÁN VỀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH HÀM

Trịnh Đào Chiến

(Trường Cao Đẳng Sư Phạm Gia Lai)

Các bài toán về giải bất phương trình hàm thường là những bài toán khó. Trong những năm gần đây, các dạng toán loại này đôi khi xuất hiện trong các đề thi chọn học sinh giỏi các cấp và Olympic Toán quốc tế. Chẳng hạn Bài toán 3, trong IMO 2011:

Giả sử $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *là một hàm giá trị thực xác định trên tập các số thực và thỏa mãn*

$$f(x+y) \le yf(x) + f(f(x))$$

với mọi số thực x *và* y. *Chứng minh rằng* $f(x) = 0$ *với mọi* $x \le 0$.

Bài viết này đề cập đến phương pháp giải một lớp các bất phương trình hàm dạng cơ bản. Đây là một trong những phương pháp có thể tham khảo để tìm tòi lời giải cho một bài toán về bất phương trình hàm.

1. Bất phương trình hàm với cặp biến tự do

Xét hàm biến số thực f thỏa mãn các tính chất sau

$$f(x+y) \ge f(x)f(y).$$

Ta có thể tìm được hàm f thỏa mãn tính chất trên nếu f thỏa mãn thêm một số điều kiện ban đầu nào đó, chẳng hạn (xem [1])

$$f(x) \ge a^x, \quad a > 0.$$

Để giải bài toán trên, trước hết ta cần giải các bài toán sau

Bài toán 32. *Xác định các hàm số* $f(x)$ *thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau*

i) $f(x+y) \ge f(x) + f(y)$ *với mọi* $x, y \in \mathbb{R}$;

ii) $f(x) \ge 0$ *với mọi* $x \in \mathbb{R}$.

Chứng minh. Từ các điều kiện của bài toán, thay $x = 0$ ta thu được $f(0) \ge 2f(0)$ và $f(0) \ge 0$. Do đó $f(0) = 0$. Vậy nên

$$0 = f(0) = f(x + (-x)) \ge f(x) + f(-x) \ge 0.$$

Suy ra $f(x) \equiv 0$. Thử lại, ta thấy hàm số $f(x) \equiv 0$ thỏa mãn điều kiện bài ra. □

Bài toán 33. *Cho trước $a \in \mathbb{R}$. Xác định các hàm số $f(x)$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau*

i) $f(x+y) \geq f(x) + f(y)$ *với mọi* $x, y \in \mathbb{R}$;

ii) $f(x) \geq ax$ *với mọi* $x \in \mathbb{R}$.

Chứng minh. Xét hàm số $g(x) = ax$. Để ý rằng $g(x+y) = g(x) + g(y)$. Đặt $f(x) = g(x) + h(x)$. Khi đó, ta thu được các điều kiện

i) $h(x+y) \geq h(x) + h(y)$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}$;

ii) $h(x) \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Theo Bài toán 1, ta có $h(x) \equiv 0$ hay $f(x) = ax$. Thử lại, ta thấy hàm số $f(x) = ax$ thỏa mãn điều kiện bài ra. $\square$

Bây giờ, ta trở lại bài toán đã nêu ban đầu.

Bài toán 34. *Cho trước $a > 0$. Xác định các hàm số $f(x)$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau*

i) $f(x+y) \geq f(x)f(y)$ *với mọi* $x, y \in \mathbb{R}$;

ii) $f(x) \geq a^x$ *với mọi* $x \in \mathbb{R}$.

Chứng minh. Nhận xét rằng $f(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Vậy ta có thể logarit hóa hai vế các bất đẳng thức của điều kiện đã cho

i) $\ln f(x+y) \geq \ln f(x) + \ln f(y)$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}$;

ii) $\ln f(x) \geq (\ln a)x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Đặt $\ln f(x) = \varphi(x)$, ta thu được

i) $\varphi(x+y) \geq \varphi(x) + \varphi(y)$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}$;

ii) $\varphi(x) \geq (\ln a)x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Ta nhận được dạng của Bài toán 2. Vậy $\varphi(x) = (\ln a)x$. Suy ra $f(x) = a^x$. Thử lại, ta thấy hàm số $f(x) = a^x$ thỏa mãn điều kiện bài ra. $\square$

Nhận xét rằng, các bài toán trên vẫn giải được nếu tập xác định $\mathbb{R}$ của các hàm số trên được thay bởi một khoảng mở U chứa 0 sao cho với mọi $x, y \in U$ thì $x + y \in U$.

Một câu hỏi tự nhiên được đặt ra: Trong Bài toán 3, có thể thay hàm số $g(x) = a^x$ bởi hàm số nào để bài toán cũng có nghiệm không tầm thường?

Nhận xét rằng

- Với $0 < a < 1$ thì $a^x > 1 + x, \forall x < 0$ và $a^x \leq 1 + x, \forall x \geq 0$;
- Với $a \geq 1$ thì $a^x > 1 + x, \forall x < 0$; $a^x \leq 1 + x, \forall x \in [0, 1)$ và $a^x \geq 1 + x, \forall x \geq 1$.

Từ đó, một cách tự nhiên, tiếp theo ta xét hàm số $g(x) = x + 1$. Ta có bài toán sau

Bài toán 35. *Giả sử U là khoảng mở chứa 0 sao cho với mọi $x,\ y \in U$ thì $x + y \in U$. Xác định các hàm số $f : U \to \mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau*

i) $f(x+y) \geq f(x)f(y)$ *với mọi* $x,\ y \in U$;

ii) $f(x) \geq 1 + x$ *với mọi* $x \in U$.

Chứng minh. Bởi i), ta có

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) \geq f^2\left(\frac{x}{2}\right) \geq 0, \quad \forall x \in U.$$

Nếu $f(x_0) = 0$, thì

$$0 = f(x_0) = f\left(\frac{x_0}{2} + \frac{x_0}{2}\right) \geq f^2\left(\frac{x_0}{2}\right).$$

Do đó $f\left(\frac{x_0}{2}\right) = 0$. Quy nạp, ta có $f\left(\frac{x_0}{2^n}\right) = 0$ với mỗi số nguyên dương n. Tuy nhiên, từ ii) suy ra rằng $f(x) > 0$ với mọi $x \in U$ và x gần 0. Do đó điều trên là mâu thuẫn. Vậy

$$f(x) > 0, \quad \forall x \in U.$$

Tiếp theo, từ i) và ii), ta sẽ thấy rằng f khả vi tại mỗi điểm $x \in U$ và $f'(x) = f(x)$. Thật vậy, từ i) và ii), với $h > 0$ đủ nhỏ, ta có

$$f(x+h) - f(x) \geq f(x)f(h) - f(x) = [f(h) - 1]f(x) \geq hf(x).$$

Do đó

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq f(x).$$

Mặt khác, cũng từ i) và ii), với $h > 0$ đủ nhỏ, ta có

$$f(x) = f(x + h - h) \geq f(x+h)f(-h) \geq (1-h)f(x+h).$$

Suy ra

$$(1-h)f(x) + hf(x) \geq (1-h)f(x+h).$$

Do đó

$$hf(x) \geq (1-h)[f(x+h) - f(x)],$$

hay

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \leq \frac{f(x)}{1-h}.$$

Vậy, với $h > 0$ đủ nhỏ, ta có

$$f(x) \leq \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \leq \frac{f(x)}{1-h}.$$

Tương tự, bất đẳng thức trên cũng đúng đối với chiều ngược lại, với $h < 0$ đủ nhỏ. Do đó, ta có $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ tồn tại và bằng $f(x)$, với mọi $x \in U$. Từ đó, với mọi $x \in U$, ta có

$$\left(\frac{f(x)}{e^x}\right)' = \frac{f'(x) - f(x)}{e^x} = 0.$$

Do đó $f(x) = Ce^x$ (C là hằng số). Hơn nữa, từ i) ta có $f(0) \geq f^2(0)$ hay $f(0) \leq 1$ và từ ii) ta có $f(0) \geq 1$. Do đó $C = f(0) = 1$. Thử lại, hàm $f(x) = e^x$ thỏa mãn các yêu cầu. $\square$

Như vậy, với $g(x) = a^x$ hoặc $g(x) = 1 + x$, Bài toán 3 và Bài toán 4 đều giải được. Một câu hỏi tiếp theo được đặt ra: Với những lớp hàm $g(x)$ nào thì bài toán tổng quát là giải được?

Ta có kết quả sau

Định lý 1. *Giả sử U là khoảng mở chứa 0 sao cho với mọi $x,\ y \in U$ thì $x + y \in U$. Nếu hàm số $f : U \to \mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau*

i) *$f(x + y) \geq f(x)f(y)$ với mọi $x,\ y \in U$;*

ii) *$f(x) \geq g(x)$, $\forall x \in U$; trong đó $g(x)$ là hàm số cho trước khả vi tại 0, $g(0) = 1$, $g'(0) = k$, thì $f(x) = e^{kx}$.*

Chứng minh. Tương tự lời giải Bài toán 4, từ các điều kiện đã cho, ta suy ra $f(x) > 0$ với mọi $x \in U$. Giả sử rằng $f(x)$ là hàm số thỏa mãn các điều kiện của định lý.

Thế thì, với $h > 0$ đủ nhỏ, ta có

$$f(x+h) - f(x) \geq f(x)f(h) - f(x) = (f(h) - 1)f(x) \geq (g(h) - 1)f(x).$$

Do đó
$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq \frac{g(h) - g(0)}{h} f(x).$$
Mặt khác, cũng từ i) và ii), với $h > 0$ đủ nhỏ, ta có

$$f(x) = f(x + h - h) \geq f(x+h)f(-h) \geq f(x+h)g(-h).$$

Vì hàm $g(x)$ khả vi tại 0 nên nó liên tục tại điểm đó. Do đó, với $h > 0$ đủ nhỏ, ta có $g(-h) > 0$. Khi đó, với $h > 0$ đủ nhỏ, ta có

$$f(x+h) - f(x) \leq -\frac{g(-h) - 1}{g(-h)} f(x) = \frac{g(-h) - g(0)}{-hg(-h)} f(x).$$

Vậy với $h > 0$ đủ nhỏ, từ các kết quả trên, ta có

$$\frac{g(h) - g(0)}{h} f(x) \leq \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \leq \frac{g(-h) - g(0)}{-g(-h)} f(x).$$

Tương tự, bất đẳng thức trên cũng đúng đối với chiều ngược lại, với $h < 0$ đủ nhỏ. Do đó, ta có $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ tồn tại và bằng $g'(0)f(x) = kf(x)$, với $x \in U$.
Từ đó, với $x \in U$, ta có

$$\left(\frac{f(x)}{e^{kx}}\right)' = \frac{f'(x) - kf(x)}{e^{kx}} = \frac{kf(x) - kf(x)}{e^{kx}} = 0.$$

Do đó $f(x) = Ce^{kx}$ (C là hằng số). Hơn nữa, từ i) ta có $f(0) \geq f^2(0)$ hay $f(0) \leq 1$ và từ ii) ta có $f(0) \geq 1$. Do đó $C = f(0) = 1$. Vậy $f(x) = e^{kx}$. Ta có điều phải chứng minh. □

Rõ ràng $f(x) = e^{kx}$ thỏa mãn điều kiện i). Nếu giả thiết bài toán có thêm điều kiện $g(x) \le e^{kx}$, với $x \in U$, thì hàm số $f(x) = e^{kx}$ thỏa mãn tất cả các điều kiện của bài toán.

Từ kết quả trên, ta có

Hệ quả 2. *Giả sử U là khoảng mở chứa 0 và $f : U \to \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện i) với mọi $x, y \in U$ sao cho $x + y \in U$. Nếu f khả vi tại 0, $f(0) = 1$ và $f'(0) = k$ thì $f(x) = e^{kx}$, $x \in U$.*

Chứng minh. Áp dụng Định lý 1, với $g(x) = f(x)$, $\forall x \in U$, ta có điều phải chứng minh. □

Hệ quả 3. *Giả sử F là hàm xác định trên khoảng mở U chứa 0 và thỏa mãn*

$$F(x + y) \le F(x) + F(y)$$

với mọi $x, y \in U$ sao cho $x + y \in U$. Nếu F bị chặn trên bởi một hàm G khả vi tại 0 và thỏa mãn $G(0) = 1$, thì $F(x) = kx$, $x \in U$, trong đó k là một hằng số.

Chứng minh. Áp dụng Định lý 1, với $f(x) = e^{-F(x)}$ và $g(x) = e^{-G(x)}$, ta có đpcm. □

Tương tự phương pháp chứng minh Định lý 1, ta có kết quả sau đây

Định lý 4. *Giả sử U là khoảng mở chứa 0 sao cho với mọi $x, y \in U$ thì $x + y \in U$. Nếu hàm số $f : U \to \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện sau*

$$f(x + y) \ge f(x)g(y), \quad \forall x, y \in U,$$

trong đó $g(x)$ là hàm số cho trước khả vi tại 0, $g(0) = 1$, $g'(0) = k$, thì mọi nghiệm của bất phương trình hàm trên đều có dạng $f(x) = Ce^{kx}$, C là hằng số.

Hệ quả 5. *Ta có $f(x) = e^{kx}$ và $g(x) = e^{kx}$ là nghiệm duy nhất của hệ bất phương trình hàm*

$$\begin{cases} f(x + y) \ge f(x)g(y) \\ g(x + y) \ge g(x)f(y) \end{cases}$$

với điều kiện $f(0) = 1$, $g(x)$ là khả vi tại 0, $g(0) = 1$ và $g'(0) = k$.

Chứng minh. Từ bất phương trình hàm thứ nhất, áp dụng Định lý 2 ta được $f(x) = Ce^{kx}$ (C là hằng số). Vì $f(0) = 1$, nên $C = 1$. Do đó

$$f(x) = e^{kx}.$$

Tương tự, từ bất phương trình hàm thứ hai, áp dụng Định lý 2 ta cũng có

$$g(x) = e^{kx}.$$

Rõ ràng $f(x) = e^{kx}$ và $g(x) = e^{kx}$ thỏa mãn hệ bất phương trình hàm đã cho, với những điều kiện đã nêu. Hệ quả được chứng minh. □

Định nghĩa 5. *Hàm $g(x)$ xác định trên một khoảng mở U chứa 0 được gọi là hàm tựa bởi l tại 0 nếu tồn tại một hàm $k(x)$ xác định trên U sao cho $k(0) = g(0)$, $k'(0) = l$ tồn tại và $k(x) \le g(x)$ với mọi $x \in U$.*

Hệ quả 6. *Bất phương trình hàm*

$$f(x+y) \ge f(x)g(y),$$

trong đó g là một hàm cho trước xác định trên I với $g(0) = 1$ và là hàm tựa bởi l tại 0, có nghiệm không âm f khi và chỉ khi $e^{lx} \ge g(x)$ trên I và trong trường hợp này mọi nghiệm không âm đều có dạng $f(x) = Ce^{lx}$, trong đó $C \ge 0$ là hằng số.

Chứng minh. Giả sử $f(x)$ là một nghiệm không âm của bất phương trình hàm đã cho. Vì $g(x) \ge k(x)$ trên U, nên ta có

$$f(x+y) \ge f(x)k(y),$$

trong đó $k(x)$ thỏa mãn $k'(0) = l$ và $k(0) = g(0) = 1$. Áp dụng Định lý 2 vào bất phương trình hàm này, ta có $f(x) = Ce^{lx}$, trong đó $C \ge 0$ là hằng số. Rõ ràng, $f(x) = Ce^{lx}$ là một nghiệm không âm của bất phương trình hàm đã cho nếu $e^{lx} \ge g(x)$ trên U. □

Từ Hệ quả 4, ta có thể sáng tác ra các bài toán, chẳng hạn sau đây

Bài toán 36. *Tìm tất cả các hàm số $f(x)$, xác định trên khoảng mở $(-e, \infty)$, thỏa mãn hệ bất phương trình hàm sau*

$$\begin{cases} f(x+y) \ge f(x)\log f(y) \\ f(x) \ge x + e \end{cases}$$

Chứng minh. Trên khoảng mở $(-e, \infty)$, mỗi nghiệm dương f được suy ra bởi bất phương trình hàm thứ hai. Ngoài ra, từ hệ bất phương trình hàm đã cho, ta có $f(0) = e$. Áp dụng Hệ quả 4 đối với trường hợp $g(x) = \log f(x)$ là hàm tựa bởi $\dfrac{1}{e}$ tại 0, qua hàm $k(x) = \log(x+e)$. Do đó, theo chứng minh của Hệ quả 4 , ta có $f(x) = f(0)e^{\frac{x}{e}} = e^{1+\frac{x}{e}}$. Thử lại, ta thấy hàm số $f(x) = e^{1+\frac{x}{e}}$ thỏa mãn hệ bất phương trình hàm đã cho trên khoảng mở $(-e, \infty)$. □

Bài toán 37. *Trên khoảng mở chứa 0 có một nghiệm của hệ bất phương trình hàm*

$$\begin{cases} f(x+y) \ge f(x)e^{f(y)} \\ f(x) \ge x^2 \end{cases}$$

Chứng minh. Giả sử $f(x)$ là một nghiệm xác định trên một khoảng mở chứa 0 nào đó. Thế thì, bởi bất phương trình hàm thứ hai, $f(x)$ là không âm. Từ hệ bất phương trình đã cho suy ra $f(0) = 0$. Áp dụng Hệ quả 4 đối với trường hợp $g(x) = e^{f(x)}$ là hàm tựa bởi 0 tại 0, qua hàm $k(x) = e^{x^2}$. Hơn nữa, vì $f(0) = 0$, nên ta có $f(x) \equiv 0$ thỏa mãn bất phương trình hàm thứ hai trên khoảng không mở chứa 0. □

Định lý sau đây cho ta kết quả về việc giải một dạng bất phương trình hàm cơ bản khác

Định lý 7. *Giả sử U là khoảng mở chứa 0 sao cho với mọi $x, y \in U$ thì $x + y \in U$. Xét bất phương trình hàm*

$$f(x+y) \geq f(x)g(y) + f(y)g(x), \quad \forall x, y \in U,$$

trong đó $g(x)$ là một hàm giới nội, khả vi tại 0, $g(0) = 1$ và $g'(0) = k$. Thế thì $f(x) \equiv 0$ là hàm số duy nhất thỏa mãn bất phương trình đã cho, với điều kiện $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 0$.

Chứng minh. Giả sử rằng $f(x)$ là nghiệm của bất phương trình đã cho, với điều kiện

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

Thế thì, với $h > 0$ đủ nhỏ, ta có

$$f(x+h) \geq f(x)g(h) + f(h)g(x)$$

hay

$$f(x+h) - f(x) \geq (g(h) - 1)f(x) + f(h)g(x).$$

Do đó

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq \frac{g(h) - g(0)}{h} f(x) + \frac{f(h)}{h} g(x).$$

Mặt khác, ta có

$$f(x) = f(x+h-h) \geq f(x+h)g(-h) + f(-h)g(x+h)$$

hay

$$g(-h)(f(x) - f(x+h)) \geq g(-h)f(x) - f(x) + f(-h)g(x+h)$$

Vì hàm $g(x)$ khả vi tại 0 nên nó liên tục tại điểm đó. Do đó, với $h > 0$ đủ nhỏ, ta có $g(-h) > 0$. Vậy, với $h > 0$ đủ nhỏ, ta có

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} &\leq \frac{(g(-h) - 1)f(x) + f(-h)g(x+h)}{-g(-h)} \\ &= \frac{g(-h) - g(0)}{-hg(-h)} f(x) + \frac{f(-h)}{-hg(-h)} g(x+h).\end{aligned}$$

Vậy với $h > 0$ đủ nhỏ, từ các kết quả trên, ta có

$$\begin{aligned}\frac{g(h) - g(0)}{h} f(x) + \frac{f(h)}{h} g(x) &\leq \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &\leq \frac{g(-h) - g(0)}{-hg(-h)} f(x) + \frac{f(-h)}{-hg(-h)} g(x+h).\end{aligned}$$

Tương tự, bất đẳng thức trên cũng đúng đối với chiều ngược lại, với $h < 0$ đủ nhỏ. Do đó, ta có

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

tồn tại và bằng $g'(0)f(x) = kf(x)$, với $x \in U$, vì $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ và $g(x)$ là một hàm giới nội. Từ đó, với $x \in U$, ta có

$$\left(\frac{f(x)}{e^{kx}}\right)' = \frac{f'(x) - kf(x)}{e^{kx}} = \frac{kf(x) - kf(x)}{e^{kx}} = 0.$$

Do đó $f(x) = Ce^{kx}$ (C là hằng số). Hơn nữa, từ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 0$, suy ra rằng $C = 0$. Vậy $f(x) \equiv 0$ là hàm số duy nhất thỏa mãn yêu cầu, với điều kiện $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 0$. $\square$

2. Bất phương trình hàm dạng cộng – nhân tính

Phần này đề cập đến việc giải các hệ bất phương trình hàm, với các dạng sau đây

- Dạng "cộng": $f(a + x) \le \alpha + f(x)$, $f(b + x) \le \beta + f(x)$, $x \in \mathbb{R}$;
- Dạng "cộng - nhân": $f(a + x) \le \alpha f(x)$, $f(b + x) \le \beta f(x)$, $x \in \mathbb{R}$;
- Dạng "nhân - cộng": $f(ax) \le \alpha + f(x)$, $f(bx) \le \beta + f(x)$, $x \in I$, $I \subset \mathbb{R}$;
- Dạng "nhân": $f(ax) \le \alpha f(x)$, $f(bx) \le \beta f(x)$, $x \in I$, $I \subset \mathbb{R}$; trong đó a, b, α, β là các số thực cho trước.

Chú ý rằng, nếu $\alpha = f(a)$, $\beta = f(b)$, thì hệ bất phương trình hàm dạng "cộng" trên là sự thu hẹp của bất phương trình hàm Cauchy cổ điển

$$f(x + y) \le f(x) + f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Trước hết, ta nhắc lại rằng, một tập hợp M trù mật trong tập số thực $\mathbb{R}$ nếu như trong mọi lân cận của một điểm tùy ý của tập $\mathbb{R}$ đều có ít nhất một điểm của tập M. Chẳng hạn, tập $\mathbb{Q}$ các số hữu tỷ là tập trù mật trong tập $\mathbb{R}$.

Tính chất sau đây là một kết quả quen thuộc (Định lý Kronecker), có thể tìm thấy chứng minh ở các tài liệu lý thuyết cơ bản: *"Nếu a và b là các số thực không thông ước với nhau, thì tập $A = \{ma + nb \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$ trù mật trong $\mathbb{R}$".*

Hơn nữa, ta có thể chứng minh được các kết quả sau đây

Bổ đề 8. *Giả sử $a, b \in \mathbb{R}$ và $a < 0 < b$ là các số cho trước. Ký hiệu*

$$A = \{ma + nb \mid m, n \in \mathbb{N}\}.$$

1) *Nếu $\dfrac{b}{a} \notin \mathbb{Q}$, thì tập A trù mật trong $\mathbb{R}$.*

2) *Nếu $\dfrac{b}{a} \in \mathbb{Q}$, thì tồn tại $d > 0$ sao cho $A = \{kd \mid k \in \mathbb{Z}\}$.*

Dạng "nhân" của bổ đề này như sau

Bổ đề 9. *Giả sử $a, b \in \mathbb{R}$ và $0 < a < 1 < b$ là các số cho trước. Ký hiệu*

$$M = \{a^m b^n \mid m, n \in \mathbb{N}\}.$$

1) *Nếu $\dfrac{\log b}{\log a} \notin \mathbb{Q}$, thì tập M trù mật trong $(0, \infty)$.*

2) *Nếu $\dfrac{\log b}{\log a} \in \mathbb{Q}$, thì tồn tại $d > 0$ sao cho $M = \left\{d^k \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.*

Bây giờ, ta chứng minh các định lý sau đây

Định lý 10 (Dạng "cộng"). *Giả sử a, b, α, β là các số thực cho trước thỏa mãn $a < 0 < b$, $\dfrac{\alpha}{a} = \dfrac{\beta}{b}$, và giả sử rằng hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liên tục tại ít nhất một điểm.*

1) *Nếu $\dfrac{b}{a} \notin \mathbb{Q}$, thì f thỏa mãn hệ bất đẳng thức hàm*

$$f(a + x) \le \alpha + f(x), \quad f(b + x) \le \beta + f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R} \tag{1}$$

khi và chỉ khi $f(x) = px + f(0)$, $x \in \mathbb{R}$, trong đó $p := \dfrac{\alpha}{a}$.

2) *Nếu $\dfrac{b}{a} \in \mathbb{Q}$, thì tồn tại duy nhất một nghiệm hàm liên tục $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ của hệ phương trình hàm tương ứng*

$$f(a + x) = \alpha + f(x), \quad f(b + x) = \beta + f(x), \quad \forall x \in R \tag{2}$$

sao cho $f\big|_{[0,d]} = f_0$, trong đó $d := \min\{ma + nb > 0 \mid m, n \in \mathbb{N}\}$ tồn tại, là số dương và $f_0 : [0, d] \to \mathbb{R}$ là hàm liên tục cho trước thỏa mãn điều kiện

$$f_0(d) = \frac{\alpha}{a} d + f_0(0).$$

Hơn nữa, nếu f_0 là đơn điệu nghiêm ngặt, thì nó trùng với hàm f trên đoạn $[0, d]$.

Chứng minh. 1) Từ (1), dễ dàng suy ra

$$f(ma + x) \le m\alpha + f(x), \quad f(nb + x) \le n\beta + f(x), \quad \forall m, n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}.$$

Trong bất đẳng thức đầu tiên ở trên, thay x bởi $nb + x$, ta có

$$f(ma + nb + x) \le m\alpha + f(nb + x) \le m\alpha + n\beta + f(x).$$

Do đó

$$f(ma + nb + x) \le m\alpha + n\beta + f(x), \quad \forall m, n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}.$$

Đặt $p := \dfrac{\alpha}{a} = \dfrac{\beta}{b}$, ta có thể viết bất đẳng thức này dưới dạng

$$f(t + x) \le pt + f(x), \quad \forall t \in A, x \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

trong đó, theo Bổ đề 1, tập $A = \{ma + nb \,|\, m,\ n \in \mathbb{N}\}$ trù mật trong $\mathbb{R}$.

Giả sử rằng x_0 là điểm mà tại đó hàm f liên tục và x là một giá trị thực tùy ý. Bởi tính chất trù mật của A trong tập $\mathbb{R}$, tồn tại một dãy (t_n) sao cho

$$t_n \in A\,(n \in \mathbb{N}), \quad \lim_{x\to+\infty} t_n = x_0 - x.$$

Từ bất đẳng thức (3), ta có

$$f(t_n + x) \le pt_n + f(x), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Cho $n \to \infty$, bởi tính liên tục của hàm f tại x_0, ta thu được

$$f(x_0) \le p(x_0 - x) + f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bây giờ, để chứng minh phần đảo, thay x bởi $x - t$ trong (3), ta dược

$$f(x) \le pt + f(x-t), \quad \forall t \in A,\ x \in \mathbb{R}.$$

Chọn một điểm $x \in \mathbb{R}$ cố định tùy ý và, bởi tính trù mật của A trong $\mathbb{R}$, một dãy (t_n) sao cho

$$t_n \in A\,(n \in \mathbb{N}), \quad \lim_{n\to+\infty} t_n = x - x_0.$$

Thế thì, ta có

$$f(x) \le pt_n + f(x - t_n), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Cho $n \to \infty$, bởi tính liên tục của hàm f tại x_0, ta thu được bất đẳng thức

$$f(x) \le p(x - x_0) + f(x_0), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Do đó, ta có

$$f(x) = p(x) + (f(x_0) - px_0), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ta có điều phải chứng minh.

2) Từ (2), dễ dàng suy ra

$$f(ma + nb + x) = \frac{\alpha}{a}(ma + nb) + f(x), \quad \forall m,\ n \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Theo Bổ đề 1, phần 2, số $d := \min\{ma + nb > 0 \,|\, m,\ n \in \mathbb{N}\}$ là xác định và là số dương. Hơn nữa $\{ma + nb > 0 \,|\, m,\ n \in N\} = \{kd \,|\, k \in \mathbb{Z}\}$. Dó đó, (4) có dạng

$$f(kd + x) = \frac{\alpha}{a}kd + f(x), \quad \forall k \in \mathbb{Z},\ x \in \mathbb{R}.$$

Dễ dàng thấy rằng hệ phương trình hàm này tương đương với phương trình

$$f(d + x) = \frac{\alpha}{a}d + f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bây giờ, ta xác định $f_1 : (d, 2d] \to \mathbb{R}$ bởi công thức

$$f_1(x) := \frac{\alpha}{a}d + f_0(x-d), \quad x \in (d, 2d].$$

Giả sử rằng $f_n : (nd, (n+1)d] \to \mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}$) đã được xác định. Thế thì, ta xác định

$$f_{n+1} : ((n+1)d, (n+2)d] \to \mathbb{R}$$

bởi hệ thức truy hồi

$$f_{n+1}(x) := \frac{\alpha}{a}d + f_n(x-d), \quad x \in ((n+1)d, (n+2)d], n \in \mathbb{N}.$$

Tương tự, giả sử

$$f_{-1}(x) := -\frac{\alpha}{a}d + f_0(x+d), \quad x \in [-d, 0).$$

Giả sử rằng ta có định nghĩa

$$f_{-n}(x) := [-nd, (-n+1)d) \to \mathbb{R}\,(n \in N).$$

Thế thì, ta định nghĩa

$$f_{-(n+1)}(x) := -\frac{\alpha}{a}d + f_{-n}(x+d), \quad x \in [-(n+1)d, -nd), n \in \mathbb{N}.$$

Dễ dàng kiểm tra được rằng $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, xác định bởi

$$f(x) = \begin{cases} f_{-n}(x) & \text{khi } x \in [-nd, (-n+1)d) \\ f_0(x) & \text{khi } x \in [0, d] \\ f_n(x) & \text{khi } x \in (nd, (n+1)d] \end{cases} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

thỏa mãn hệ (2), là hàm liên tục và $f\big|_{[0,d]} = f_0$. Định lý được chứng minh hoàn toàn. □

Định lý 11 (Dạng "cộng – nhân"). *Giả sử $a, b \in R$ và $\alpha, \beta > 0$ là các số cho trước thỏa mãn $a < 0 < b$, $\dfrac{\log\alpha}{a} = \dfrac{\log\beta}{b}$ và giả sử rằng hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liên tục tại ít nhất một điểm.*

1) *Nếu $\dfrac{b}{a} \notin \mathbb{Q}$, thì f thỏa mãn hệ bất đẳng thức hàm*

$$f(a+x) \le \alpha f(x), \quad f(b+x) \le \beta f(x), \quad x \in \mathbb{R} \tag{5}$$

khi và chỉ khi $f(x) = f(0)e^{px}$, $x \in \mathbb{R}$, trong đó $p := \dfrac{\log\alpha}{a}$.

2) *Nếu $\dfrac{b}{a} \in \mathbb{Q}$, thì tồn tại duy nhất một nghiệm hàm liên tục $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ của hệ phương trình hàm tương ứng*

$$f(a+x) = \alpha f(x), \quad f(b+x) = \beta f(x), \quad x \in \mathbb{R} \tag{6}$$

sao cho $f\big|_{[0,d]} = f_0$, trong đó $d := \min\{ma + nb > 0 \,|\, m, n \in \mathbb{N}\}$ tồn tại, là số dương và $f_0 : [0, d] \to \mathbb{R}$ là hàm liên tục cho trước thỏa mãn điều kiện

$$f_0(d) = f_0(0)e^{\frac{\log\alpha}{a}d}.$$

Hơn nữa, nếu f_0 là đơn điệu nghiêm ngặt, thì nó trùng với hàm f trên đoạn $[0, d]$.

Chứng minh. 1) Từ (5), dễ dàng suy ra

$$f(ma+x) \le \alpha^m f(x), \quad f(nb+x) \le \beta^n f(x), \quad \forall m, n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}.$$

Trong bất đẳng thức đầu tiên ở trên, thay x bởi $nb+x$, ta có

$$f(ma+nb+x) \le \alpha^m f(nb+x) \le \alpha^m \beta^n f(x).$$

Do đó

$$f(ma+nb+x) \le \alpha^m \beta^n f(x), \quad \forall m, n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}.$$

Đặt $p := \dfrac{\log\alpha}{a} = \dfrac{\log\beta}{b}$, ta có thể viết bất đẳng thức này dưới dạng

$$f(t+x) \le e^{pt} f(x), \quad t \in A, x \in R \tag{7}$$

trong đó, theo Bổ đề 1, tập $A = \{ma+nb \mid m, n \in \mathbb{N}\}$ trù mật trong $\mathbb{R}$.

Giả sử rằng x_0 là điểm mà tại đó hàm f liên tục và x là một giá trị thực tùy ý. Bởi tính chất trù mật của A trong tập $\mathbb{R}$, tồn tại một dãy (t_n) sao cho

$$t_n \in A\,(n \in \mathbb{N}), \quad \lim_{n\to+\infty} t_n = x_0 - x.$$

Từ bất đẳng thức (7), ta có

$$f(t_n + x) \le e^{pt_n} f(x), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Cho $n \to \infty$, bởi tính liên tục của hàm f tại x_0, ta thu được

$$f(x_0) \le e^{p(x_0 - x)} f(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Bây giờ, để chứng minh phần đảo, thay x bởi $x - t$ trong (7), ta dược

$$f(x) \le e^{pt} f(x-t), \quad t \in A, x \in \mathbb{R}.$$

Chọn một điểm $x \in \mathbb{R}$ cố định tùy ý và, bởi tính trù mật của A trong $\mathbb{R}$, một dãy (t_n) sao cho

$$t_n \in A\,(n \in \mathbb{N}), \quad \lim_{n\to+\infty} t_n = x - x_0.$$

Thế thì, ta có

$$f(x) \le e^{pt_n} f(x - t_n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Cho $n \to \infty$, bởi tính liên tục của hàm f tại x_0, ta thu được bất đẳng thức

$$f(x) \le e^{p(x-x_0)} f(x_0), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Do đó, ta có

$$f(x) = e^{p(x)}(f(x_0) - px_0), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ta có điều phải chứng minh.

2) Chứng minh tương tự phần 2 của Định lý 4. Định lý được chứng minh hoàn toàn. □

Định lý 12 (Dạng "nhân – cộng"). *Giả sử a, b, α, β là các số thực cho trước thỏa mãn*

$$0 < a < 1 < b, \quad \frac{\alpha}{\log a} = \frac{\beta}{\log b},$$

và giả sử rằng hàm $f : I \to \mathbb{R}$ liên tục tại ít nhất một điểm.

1) *Nếu $\frac{\log b}{\log a} \notin \mathbb{Q}$, thì f thỏa mãn hệ bất đẳng thức hàm*

$$f(ax) \le \alpha + f(x), \quad f(bx) \le \beta + f(x), \quad x \in I, \tag{8}$$

thì

i) *Trường hợp $I = (0, \infty)$: $f(x) = p \log x + f(1)$, $x > 0$,*

ii) *Trường hợp $I = (-\infty, 0)$: $f(x) = p \log(-x) + f(-1)$, $x < 0$, trong đó $p := \frac{\alpha}{\log a}$.*

2) *Nếu $\frac{\log b}{\log a} \in \mathbb{Q}$, thì tồn tại duy nhất một nghiệm hàm liên tục $f : I \to \mathbb{R}$ của hệ phương trình hàm tương ứng*

$$f(ax) = \alpha + f(x), \quad f(bx) = \beta + f(x), \quad x \in I \tag{9}$$

sao cho $f\big|_{[1,d]} = f_0$, trong đó $d := \min\{a^m b^n > 1 \mid m, n \in N\}$ tồn tại, lớn hơn 1 và $f_0 : [1, d] \to \mathbb{R}$ là hàm liên tục cho trước thỏa mãn điều kiện

$$f_0(d) = \frac{\alpha}{\log a} \log d + f_0(1).$$

Hơn nữa, nếu f_0 là đơn điệu nghiêm ngặt, thì nó trùng với hàm f trên đoạn $[1, d]$.

Chứng minh. 1) i) Giả sử $I = (0, \infty)$. Từ (8), chứng minh tương tự như các phần trên, ta có

$$f(a^m b^n x) \le m\alpha + n\beta + f(x), \quad m, n \in \mathbb{N}, \ x > 0.$$

Đặt $p := \frac{\alpha}{\log a} = \frac{\beta}{\log b}$, ta có thể viết bất đẳng thức này dưới dạng

$$f(a^m b^n x) \le p \log(a^m b^n) + f(x), \quad m, n \in \mathbb{N}, \ x > 0,$$

hay

$$f(tx) \le p \log t + f(x), \quad t \in M, \ x > 0, \tag{10}$$

trong đó, theo Bổ đề 2, tập $M = \{a^m b^n \mid m, n \in \mathbb{N}\}$ trù mật trong I.

Giả sử rằng $x_0 > 0$ là điểm mà tại đó hàm f liên tục và $x > 0$ là một giá trị tùy ý. Bởi tính chất trù mật của M trong tập I, tồn tại một dãy (t_n) sao cho

$$t_n \in M \ (n \in \mathbb{N}), \quad \lim_{n \to +\infty} t_n = \frac{x_0}{x}.$$

Từ bất đẳng thức (10), ta có

$$f(t_n x) \leq p \log t_n + f(x), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Cho $n \to \infty$, bởi tính liên tục của hàm f tại x_0, ta thu được

$$f(x_0) \leq p \log \frac{x_0}{x} + f(x), \quad x > 0.$$

Bây giờ, để chứng minh phần đảo, thay x bởi $\frac{x}{t}$ trong (10), và chọn một dãy (t_n) sao cho

$$t_n \in M \ (n \in \mathbb{N}), \quad \lim_{n \to +\infty} t_n = \frac{x}{x_0}.$$

Thế thì, ta có

$$f(x) \leq p \log \frac{x}{x_0} + f(x_0), \quad x > 0.$$

Do đó, ta có

$$f(x) = f(x_0) - p \log x_0 + p \log x, \quad x > 0.$$

Phần i) được chứng minh.

ii) Giả sử rằng $I = (-\infty, 0)$. Ta xét hàm $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ xác định bởi công thức

$$g(x) = f(-x), \quad x < 0,$$

thỏa mãn hệ (8) và chứng minh tương tự như chứng minh phần i).

2) Phần này chứng minh tương tự như chứng minh Định lý 4, phần 2. □

Hệ quả 13. *Giả sử $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ thỏa mãn các giả thiết của Định lý 4, phần 1. Nếu hàm $f : \left[(-\infty, 0) \bigcup (0, \infty)\right] \to \mathbb{R}$ thỏa mãn hệ bất đẳng thức (8) và trong mỗi khoảng $(\infty, 0)$, $(0, \infty)$ tồn tại ít nhất một điểm mà tại đó hàm f liên tục, thì*

$$f(x) = \begin{cases} p \log x + f(1), & \text{khi } x \in (0, \infty) \\ p \log(-x) + f(-1), & \text{khi } x \in (-\infty, 0) \end{cases}$$

trong đó $p := \dfrac{\alpha}{\log a}$.

Chú ý 1. *Giả sử a, b, α, β là các số thực cho trước thỏa mãn $0 < a < 1 < b$ và $\dfrac{\alpha}{\log a} = \dfrac{\beta}{\log b}$. Nếu $0 \in I$, thì không tồn tại hàm nào thỏa mãn hệ (8).*

Thật vậy, trong (8) nếu đặt $x = 0$, thì $0 \leq \alpha$, $0 \leq \beta$, mâu thuẫn với giả thiết $\alpha\beta < 0$.

Định lý 14 (Dạng "nhân"). *Giả sử a, b, α, β là các số thực cho trước thỏa mãn $a < 1 < b$, $\dfrac{\log \alpha}{\log a} = \dfrac{\log \beta}{\log b}$, và giả sử rằng hàm $f : I \to \mathbb{R}$ liên tục tại ít nhất một điểm.*

1) *Nếu* $\dfrac{\log b}{\log a} \notin \mathbb{Q}$, *thì* f *thỏa mãn hệ bất đẳng thức hàm*

$$f(ax) \leq \alpha f(x), \quad f(bx) \leq \beta f(x), \quad x \in I, \tag{11}$$

thì

i) *Trường hợp* $I = (0, \infty)$: $f(x) = f(1)x^p$, $x > 0$,

ii) *Trường hợp* $I = (-\infty, 0)$: $f(x) = f(-1)(-x)^p$, $x < 0$, *trong đó* $p := \dfrac{\log \alpha}{\log a}$.

2) *Nếu* $\dfrac{\log b}{\log a} \in \mathbb{Q}$, *thì tồn tại duy nhất một nghiệm hàm liên tục* $f : I \to \mathbb{R}$ ($I = (0, \infty)$ *hoặc* $I = (-\infty, 0)$) *của hệ phương trình hàm tương ứng*

$$f(ax) = \alpha f(x), \quad f(bx) = \beta f(x), \quad x \in I, \tag{12}$$

sao cho $f\big|_{[1,\, d]} = f_0$, *trong đó* $d := \min\{a^m b^n > 1 \mid m, n \in \mathbb{N}\}$ *tồn tại, lớn hơn* 1 *và* $f_0 : [1,\ d] \to \mathbb{R}$ *là hàm liên tục cho trước thỏa mãn điều kiện*

$$f_0(d) = f_0(1) d^{\frac{\log \alpha}{\log a}}.$$

Hơn nữa, nếu f_0 *là đơn điệu nghiêm ngặt, thì nó trùng với hàm* f *trên đoạn* $[1,\ d]$.

Chứng minh. 1) i) Giả sử $I = (0,\ \infty)$. Từ (11), chứng minh tương tự như các phần trên, ta có

$$f(a^m b^n x) \leq \alpha^m \beta^n f(x), \quad m, n \in \mathbb{N}, x > 0.$$

Đặt $p := \dfrac{\log \alpha}{\log a} = \dfrac{\log \beta}{\log b}$, ta có thể viết bất đẳng thức này dưới dạng

$$f(a^m b^n x) \leq (a^m b^n)^p f(x), \quad m, n \in \mathbb{N}, x > 0,$$

hay

$$f(tx) \leq t^p f(x), \quad t \in M, x > 0, \tag{13}$$

trong đó, theo Bổ đề 2, tập $M = \{a^m b^n \mid m, n \in \mathbb{N}\}$ trù mật trong I.

Giả sử rằng $x_0 > 0$ là điểm mà tại đó hàm f liên tục và $x > 0$ là một giá trị tùy ý. Bởi tính chất trù mật của M trong tập I, tồn tại một dãy (t_n) sao cho

$$t_n \in M\ (n \in \mathbb{N}), \quad \lim_{n \to +\infty} t_n = \frac{x_0}{x}.$$

Từ bất đẳng thức (13), ta có

$$f(t_n x) \leq {t_n}^p f(x), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Cho $n \to \infty$, bởi tính liên tục của hàm f tại x_0, ta thu được

$$f(x_0) \leq \left(\frac{x_0}{x}\right)^p f(x), \quad x > 0.$$

Bây giờ, để chứng minh phần đảo, thay x bởi $\frac{x}{t}$ trong (13), và chọn một dãy (t_n) sao cho

$$t_n \in M \ (n \in \mathbb{N}), \quad \lim_{n \to +\infty} t_n = \frac{x}{x_0}.$$

Thế thì, ta có

$$f(x) \leq \left(\frac{x}{x_0}\right)^p f(x_0), \quad x > 0.$$

Phần i) được chứng minh.

ii) Giả sử rằng $I = (-\infty, 0)$. Ta xét hàm $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ xác định bởi công thức

$$g(x) = f(-x), \quad x < 0,$$

thỏa mãn hệ (11) và chứng minh tương tự như chứng minh phần i).

2) Phần này chứng minh tương tự như chứng minh Định lý 4, phần 2. □

Chú ý 2. *Giả sử a, b, α, β là các số thực cho trước thỏa mãn $0 < a < 1 < b$ và $\frac{\log \alpha}{\log a} = \frac{\log \beta}{\log b}$. Nếu $I = \mathbb{R}$ hoặc $I = [0, \infty)$ hoặc $I = (-\infty, 0]$ và $f : I \to \mathbb{R}$ thỏa mãn hệ (11), thì*

$$f(0) = 0.$$

Thật vậy, bởi một trong hai giả thiết $\alpha < 1 < \beta$ hoặc $\beta < 1 < \alpha$ và, hơn nữa, $f(0)(1-\alpha) \leq 0$ và $f(0)(1-\beta) \leq 0$, ta suy ra $f(0) = 0$. Từ Chú ý này, ta có

Chú ý 3.

i) *Giả sử $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ thỏa mãn hệ (11). Nếu $f\big|_{(0,\infty)}$ và a, b, α, β thỏa mãn tất cả các giả thiết của Định lý 7, phần 1, thì*

$$f(x) = \begin{cases} f(1)x^p & \text{khi } x \in (0, \infty), \\ 0 & \text{khi } x = 0, \end{cases}$$

trong đó $p := \frac{\log \alpha}{\log a}$.

ii) *Giả sử $f : (-\infty, 0] \to \mathbb{R}$ thỏa mãn hệ (11). Nếu $f\big|_{(-\infty,0)}$ và a, b, α, β thỏa mãn tất cả các giả thiết của Định lý 7, phần 1, thì*

$$f(x) = \begin{cases} f(-1)(-x)^p & \text{khi } x \in (-\infty, 0), \\ 0 & \text{khi } x = 0, \end{cases}$$

trong đó $p := \frac{\log \alpha}{\log a}$.

Hệ quả 15. *Giả sử a, b, α, $\beta \in \mathbb{R}$ thỏa mãn các giả thiết của Định lý 7, phần 1.*

i) *Nếu hàm* $f : \left[(-\infty,\, 0)\bigcup(0,\, \infty)\right] \to \mathbb{R}$ *thỏa mãn hệ bất đẳng thức* (11) *và trong mỗi khoảng* $(-\infty,\, 0)$*,* $(0,\, \infty)$ *tồn tại ít nhất một điểm mà tại đó hàm* f *liên tục, thì*

$$f(x) = \begin{cases} f(1)x^p & \text{khi } x \in (0,\, \infty) \\ f(-1)(-x)^p & \text{khi } x \in (-\infty,\, 0) \end{cases}$$

trong đó $p := \dfrac{\log \alpha}{\log a}$.

ii) *Nếu hàm* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *thỏa mãn hệ bất đẳng thức* (11) *và trong mỗi khoảng* $(-\infty,\, 0)$ *và* $(0,\, \infty)$ *tồn tại ít nhất một điểm mà tại đó hàm* f *liên tục, thì*

$$f(x) = \begin{cases} f(1)x^p & \text{khi } x \in (0,\, \infty), \\ 0 & \text{khi } x = 0, \\ f(-1)(-x)^p & \text{khi } x \in (-\infty,\, 0) \end{cases}$$

trong đó $p := \dfrac{\log \alpha}{\log a}$.

Chú ý 4. *Ta luôn có các định lý tương tự như các Định lý 4 - Định lý 7, với hàm* f *thỏa mãn các bất đẳng thức có dấu ngược lại.*

Tài liệu tham khảo

[1] Nguyễn Văn Mậu, *Bất đẳng thức, định lý và áp dụng*, Nhà xuất bản Giáo dục, 2006.

[2] Trịnh Đào Chiến, *Một số dạng bất phương trình hàm dạng cơ bản*, Kỷ yếu Hội nghị khoa học về các chuyên đề chuyên Toán bồi dưỡng học sinh giỏi Trung học phổ thông, Hà Nội - Nam Định, 26-28/11/2010.

[3] Th. M. Rassias, *Functional equations, inequalities and applications*, 73 - 89, Kluwer Academic Publishers, 2003.

[4] Pl. Kannappan, *Functional equations and with applications*, 617 - 636, Springer Monographs in Mathematics, 2009.

BÀI TOÁN HAY LỜI GIẢI ĐẸP

Trần Nam Dũng - Đại học Khoa học Tự nhiên - ĐHQG TP.HCM

LỜI GIỚI THIỆU

Chuyên mục này được lấy cảm hứng từ bài viết của thầy Nguyễn Duy Liên về bài toán số 6 trong kỳ thi IMO 2001 với 5 cách giải khác nhau. Mục này sẽ để dành viết về những bài toán hay, lời giải đẹp và những câu chuyện thú vị xung quanh những bài toán và lời giải đó.

Tên của chuyên mục được mượn từ tên của một nhóm những người yêu toán trên Facebook do anh Nguyễn Văn Lợi sáng lập "*Bài toán hay – Lời giải đẹp – Đam mê toán học*". Chuyên mục ghi nhận các đề cử của bạn đọc và sẽ chọn đăng mỗi kỳ 1, 2 bài toán.

Như chúng ta đều biết, Euler đã giới thiệu một công thức nổi tiếng trong tam giác, thể hiện mối liên hệ giữa bán kính của đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp cùng khoảng cách giữa hai tâm đường tròn này trong một tam giác. Đó là

$$d^2 = R^2 - 2Rr$$

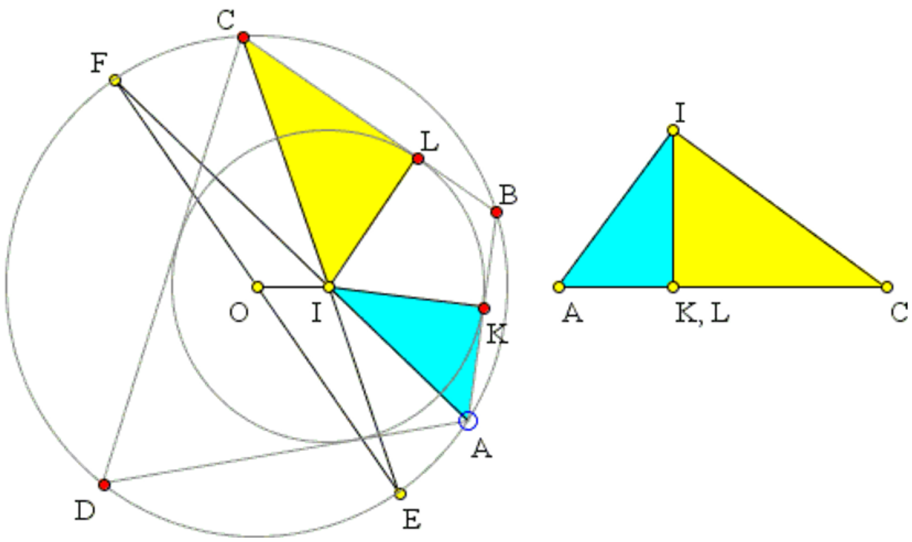
với (O, R), (I, r) lần lượt là đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp của một tam giác nào đó và $d = OI$.

Còn Nicolaus Fuss, học trò và cũng là bạn của L.Euler đã giới thiệu một công thức khác, tương tự nhưng hình thức đẹp không kém trong tứ giác lưỡng tâm, tức là tứ giác vừa nội tiếp được trong đường tròn này và ngoại tiếp được một đường tròn khác.

Bài toán 38. *Trong một tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn (I, r) và nội tiếp được đường tròn (O, R) thì*

$$\frac{1}{(R-d)^2} + \frac{1}{(R+d)^2} = \frac{1}{r^2}.$$

Ông cũng đã tìm ra được các công thức cho ngũ giác, lục giác, bát giác lưỡng tâm,... Dưới đây là chứng minh cho định lý này.



Gọi K, L là tiếp điểm của (I, r) lên AB, BC. Do tứ giác $ABCD$ nội tiếp nên A, C là hai góc bù nhau, suy ra

$$\angle BAI + \angle ICB = 90^\circ.$$

Ta cũng chú ý rằng $IK = IL = r$ nên hai tam giác AIK và CIL có thể ghép lại thành một tam giác vuông có hai cạnh góc vuông là IC, IA như hình vẽ.

Từ đó, ta thấy tổng diện tích của hai tam giác này có thể tính theo hai cách:

$$r(AK + CL) = AI \cdot CI.$$

Ngoài ra, theo định lý Pythagorean trong tam giác mới ở trên thì:

$$(AK + CL)^2 = AI^2 + CI^2.$$

Từ đó ta thấy

$$r^2(AI^2 + CI^2) = AI^2 \cdot CI^2 \Leftrightarrow \frac{1}{r^2} = \frac{1}{AI^2} + \frac{1}{CI^2}.$$

Giả sử AI, CI cắt đường tròn (O, R) theo thứ tự tại F, E. Khi đó EF là đường kính của (O, R) vì E, F là trung điểm của hai cung chung dây BD.

Theo công thức đường trung tuyến trong tam giác EFI thì

$$EI^2 + FI^2 = 2IO^2 + \frac{EF^2}{2} = 2(d^2 + R^2).$$

Theo tính chất phương tích của I với (O, R) thì

$$AI \cdot FI = CI \cdot EI = R^2 - d^2.$$

Do đó

$$\begin{aligned}\frac{1}{r^2} &= \frac{1}{AI^2} + \frac{1}{CI^2} = \frac{FI^2 + EI^2}{(R^2 - d^2)^2} = \frac{2(R^2 + d^2)}{(R^2 - d^2)^2} \\ &= \frac{(R + d)^2 + (R - d)^2}{(R^2 - d^2)^2} = \frac{1}{(R + d)^2} + \frac{1}{(R - d)^2}.\end{aligned}$$

Định lý được chứng minh.

Từ đây, ta còn có thể chứng minh được rằng trong tứ giác lưỡng tâm, ta luôn có $R \geq r\sqrt{2}$.

Thật vậy,

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{(R+d)^2} + \frac{1}{(R-d)^2} \geq \frac{2}{\sqrt{(R+d)^2(R-d)^2}} = \frac{2}{R^2 - d^2} \geq \frac{2}{R^2}$$

nên $R \geq r\sqrt{2}$. Đẳng thức xảy ra khi $d = 0$ và ta dễ dàng chứng minh được lúc đó, $ABCD$ phải là hình vuông.

Định lý này cũng cho ta biết vị trí của hai đường tròn (I, r) và (O, R) thế nào để tồn tại một tứ giác ngoại tiếp (I) và nội tiếp (O).

EUCLID VÀ CƠ SỞ CỦA HÌNH HỌC

Ngô Bảo Châu, Richard Fitzpatrickn

Trong số này, chuyên mục điểm sách của Epsilon trân trọng giới thiệu với độc giả bài điểm sách của GS. Ngô Bảo Châu và giáo sư Richard Fitzpatrick cho quyển sách vừa mới ra đời "Euclide và Cơ sở của hình học".

A. Lời giới thiệu của Giáo sư Ngô Bảo Châu cho bản dịch tiếng Việt

Euclid viết sách *Cơ sở của hình học* ở Alexandria khoảng 300 năm trước Công nguyên. Đây là thời kỳ Hellenistic của triết học cổ đại, thời kỳ mà triết học cổ đại đã lan toả tới những vùng đất chịu ảnh hưởng của văn hoá Hy Lạp mà tiêu biểu là thành Alexandria bên bờ Phi của Địa Trung Hải. Nét chung của triết học thời kỳ Hellenistic, phần nào thể hiện trong sách *Cơ sở của hình học*, là tư duy đã đạt đến mức tinh tuý, nhưng có lẽ đã mất đi tính bay bổng của thời kỳ trước Socrates và sức mạnh tư duy của Plato, Socrates.

Người ta cho rằng hầu hết nội dung của sách *Cơ sở của hình học* được truyền lại từ những tiền nhân như Pythagoras, Plato, Eudoxus ... Tuy nhiên, khác với Pythagoras và Plato, Euclid loại bỏ triệt để các yếu tố siêu hình được gán cho các số và các hình. Các số hữu tỉ không còn được coi là minh chứng cho sự hài hoà của vũ trụ, các khối đều trong không gian không còn được coi là ý niệm toán học nấp đằng sau các phạm trù siêu hình như kim thuỷ hoả thổ... Hệ thống suy luận logic xuất phát từ hệ tiên đề của Plato được Euclid sử dụng một cách triệt để, các chỉ tiêu về tính chặt chẽ của chứng minh được áp dụng một cách không khoan nhượng. Theo một nghĩa nào đó,Cơ sở của hình học là quyển sách thuần tuý toán học đầu tiên của nhân loại và là tờ giấy khai sinh ra toán học như một bộ môn độc lập, tuy vẫn còn là một bộ phận của triết học. Cách Euclid xây dựng một hệ thống kiến thức cao vút dựa trên số ít tiên đề nền và lấy luật logic làm chất gắn kết, đã là hình mẫu cho sự phát triển của toán học cho đến ngày hôm nay.

Trải qua 2400 năm, các mệnh đề phát biểu và chứng minh trong *Cơ sở của hình học* vẫn còn tươi tắn một cách đáng ngạc nhiên. Từ hình học tam giác mà chúng ta học những năm cấp hai, cho đến chứng minh tuyệt đẹp bằng phản chứng cho sự tồn tại vô hạn những số nguyên tố, từ thuật toán Euclid tìm ước số chung lớn nhất mà chúng ta vẫn phải học trong giáo trình cơ sở toán học trong tin học, cho đến chứng minh không tồn tại khối đều nào khác ngoài năm khối đều của Platon, đều là những nội dung đã được triển khai một cách đầy đủ trong sách *Cơ sở của hình học*.

Đấy có lẽ là những lý do tại sao *Cơ sở của hình học* được coi là một trong những quyển sách có ảnh hưởng nhất tới sự phát triển của văn minh nhân loại. Sách đã được tái bản hàng ngàn lần, số lần tái bản có lẽ chỉ thua Kinh thánh. Từ thời kỳ phục hưng cho đến đầu thế kỷ hai mươi, sách của Euclid được coi là một trong những quyển sách mà những người có học phải đọc.

Sách Cơ sở của hình học của Euclid. HTN: Cuốn "Cơ sở của hình học" của Euclid lần đầu tiên được dịch và xuất bản: NXB Tri Thức và ZenBook, Quý IV năm 2015. Dự án dịch Euclid do Đàm Thanh Sơn và Nguyễn Trí Dũng khởi xướng tháng 5 năm 2013.

Lớn lên từ *Cơ sở của hình học*, Toán học đã đi những bước rất xa. Bây giờ bạn có thể tìm được vô số sách toán với nhiều nội dung hơn, trình bày sáng sủa hơn sách của Euclid. Tuy vậy, tôi vẫn tin rằng người có học vẫn cần đọc Euclid vào một thời điểm nào đó trong cuộc đời mình, vẫn cần có *Cơ sở của hình học* đặt trên giá sách.

Cảm ơn nhà xuất bản Tri Thức và Nhóm dịch giả đã đem sách *Cơ sở của hình học* của Euclid đến với độc giả Việt nam.

Ngô Bảo Châu

B. Lời giới thiệu của Giáo sư Richard Fitzpatrick cho bản tiếng Anh[1]

Cho đến nay, *Cơ sở của hình học* của Euclid là tác phẩm toán học kinh điển trứ danh nhất, và cũng chiếm lĩnh vị trí đặt biệt khi là quyển sách giáo khoa về toán học cổ nhất được sử dụng liên tục. Chúng ta không biết nhiều về tác giả, ngoài chuyện ông đã sống ở Alexandria vào khoảng năm 300 TCN. Các chủ đề chính của quyển sách bao gồm hình học, tỷ lệ thức và lý thuyết số. Hầu hết các định lý trong tác phẩm không phải là khám phá của cá nhân Euclid, mà là thành quả của các nhà toán học Hy Lạp trước đó như Pythagoras (và môn đệ của ông), Hippocrates ở Chios, Theaetetus ở Athens và Eudoxus ở Cnidos. Tuy nhiên, Euclid được ghi nhận công lao vì ông đã sắp xếp các định lý này theo một trật tự lô-gic (cho dù phải thú nhận rằng, không phải lúc nào cũng chặt chẽ như trong yêu cầu đối với toán học hiện đại), thể hiện rằng chúng được dẫn ra từ năm tiên đề đơn giản. Euclid cũng được đánh giá cao do đã đưa ra những chứng minh cụ thể tài tình cho những định lý đã được khám phá trước đó: chẳng hạn như Định lý 48 ở Quyển 1.

Các phép dựng hình được khai triển trong quyển sách chỉ giới hạn trong các thao tác thực hiện bằng thước thẳng và compa. Hơn thế nữa, các chứng minh thực nghiệm dựa vào đo đạc hoàn toàn không được sử dụng: tức là bất cứ sự so sánh nào giữa hai đại lượng chỉ được phép kết luận là chúng bằng nhau hoặc là đại lượng này lớn hơn đại lượng kia. *Cơ sở của hình học* gồm 13 quyển.

Quyển 1 nêu các định lý căn bản của hình học phẳng, bao gồm ba định lý của tam giác đồng dạng, một số định lý liên quan đến đường thẳng song song, định lý về tổng các góc trong một tam giác, và định lý Pythagoras.

Quyển 2 thường được cho là liên quan đến "hình học giải tích", bởi hầu hết các định lý trong đó đều có một hệ quả đại số đơn giản.

Quyển 3 nghiên cứu hình tròn và các tính chất của chúng, và bao gồm các định lý về đường tiếp tuyến và góc nội tiếp.

Quyển 4 nói về các đa giác thông thường nội tiếp – và ngoại tiếp – hình tròn.

Quyển 5 xây dựng lý thuyết về tỷ lệ thức số học.

Quyển 6 áp dụng lý thuyết tỷ lệ thức vào hình học phẳng, và bao gồm các định lý về các hình đồng dạng [2].

Quyển 7 liên quan đến lý thuyết số căn bản: ví dụ như số nguyên tố, mẫu số chung lớn nhất v.v.

Quyển 8 nói về cấp số nhân.

Quyển 9 bao gồm các ứng dụng của hai quyển trước, và các định lý về sự vô hạn của các số nguyên tố.

Quyển 10 phân lớp các đại lượng vô ước (tứ là vô tỉ) sử dụng phương pháp gọi là "phương pháp vét kiệt", là tiền thân của phép tích phân.

Quyển 11 liên quan đến các định lý cơ bản của hình học không gian.

Quyển 12 tính toán thể tích tương đối của hình nón, hình chóp, hình trụ và hình cầu sử dụng phương pháp vét kiệt.

Cuối cùng, quyển 13 nghiên cứu năm khối đa diện đều Platon.

Ấn bản này trình bày nội dung tiếng Hy Lạp của tác phẩm – đã được J.L.Heiberg biên tập (1883-1885) - cùng với bản dịch sang tiếng Anh hiện đại, và mục lục từ vựng Hy Lạp – Anh. Các quyển 14 và 15 giả mạo, và các bình giải, vốn được thêm vào trong nhiều thế kỷ qua sẽ không có trong ấn bản này. Mục đích của bản dịch là làm cho các luận điểm sáng sủa và mạch lạc hơn, trong khi vẫn bám sát ý của bản gốc tiếng Hy Lạp. Các nội dung đặt trong ngoặc vuông (cả trong phần tiếng Hy Lạp và tiếng Anh) là của Heiberg, được suy ra từ văn bản gốc (một số quá rõ ràng hoặc không hữu dụng đã được bỏ đi). Nội dung để trong ngoặc đơn (phần tiếng Anh) là nội dung ngụ ý nhưng không viết ra trong phần tiếng Hy Lạp. Xin cám ơn Mariusz Wodzicki (Berkeley) đã cố vấn sắp chữ, Sam Watson & Jonathan Fenno (U. Mississippi) và Gregory Wong (UCSD) đã chỉ ra nhiều sai sót khi thực hiện Quyển 1.

Richard Fitzpatrick

C. TIỂU SỬ EUCLID[3]

Người ta không biết nhiều về cuộc đời của Euclid. *Từ điển Tiểu sử Khoa học (Dictionary of Scientific Biography)* mở đầu bài viết dài về Euclid bằng những lời này: *"Mặc dù Euclid là nhà toán học trứ danh nhất mọi thời đại, là người mà tên tuổi đã đồng nghĩa với hình học cho đến tận thế kỷ 20, nhưng chỉ có hai sự kiện về cuộc đời ông được biết đến, mà ngay cả những sự kiện này cũng chưa phải là không còn tranh cãi"*. Những "sự kiện" này được suy diễn hay đồn đoán dựa vào việc tham khảo các tác phẩm cổ đại. Đầu tiên là ông sống ở thời sau Plato (mất vào năm 347 TCN) và trước Archimedes (sinh năm 287 TCN). Thứ đến là ông làm việc ở Alexandria. Ông không phải là Euclid ở Megara, là một người bạn của Plato, là người vẫn bị nhầm với ông.

Heath[4] cho biết khả năng khả dĩ nhất là Euclid (tác giả của *Cơ sở của hình học*) tiếp nhận giáo dục về toán tại Athen từ các học trò của Plato bởi vì hầu hết những nhà hình học có thể dạy ông đều xuất thân từ trường đó, và các nhà toán học mà Cơ sở của hình học của Euclid dựa vào đều sống và dạy ở Athen. Nếu chúng ta đồng ý với những điều này thì chúng ta xác định rằng Euclid sống sau năm 347 TCN.

Quan điểm cho rằng ông sinh trước Archimede là dựa vào một chỉ mục tham khảo dẫn đến tác phẩm *Về hình cầu và hình trụ* của Archimede. Tuy nhiên, chỉ mục tham khảo đó bây giờ đã bị cho là được chèn vào sau này.

Mặc dù vậy, một số người vẫn giữ quan điểm là chỉ có thể hơi chắc chắn rằng ông sống trước hoặc cùng thời với Appollonius (là người sống vào khoảng năm 200 TCN). Một chút bằng chứng cho chuyện này cũng là bằng chứng cho việc ông làm việc ở Alexandria là một tham khảo từ Pappus (khoảng năm 320 CN). Pappus nhận xét về Apollonius rằng Apollonius *"sống khá lâu với các học trò của Euclid ở Alexandria, và nhờ thế mà ông có được thói quen tư quy khoa học như vậy"*. Nếu chúng ta tin Pappus trong chuyện này thì chúng ta phải đặt Euclid vào thời gian trước năm 200 TCN.

Heath cũng rút ra từ nhận xét của Pappus rằng Euclid dạy và mở một ngôi trường ở Alexandria. Tuy nhiên, những người khác phản bác rằng cho dù rõ ràng là ông có học trò ở Alexandria thì điều đó cũng không chứng minh được là ông làm việc ở đó. Dù gì đi nữa, chính Apollinius đã tham khảo Euclid trong lời giới thiệu của Quyển I bộ *Các đường conic*. Bởi vì Apollonious sinh vào khoảng năm 262 TCN cho nên Euclid sẽ phải trước 200 TCN.

Đấy là tất cả những gì chúng ta biết về cuộc đời của Euclid. Thế còn tác phẩm? Heath trích Proclus (410-485 CN) như sau:

"Euclid đã biên soạn Cơ sở của hình học từ việc tập hợp các định lý của Euxodus, hoàn chỉnh nhiều định lý của Theaeterus, và cũng chứng minh một cách không thể chối cãi được những định lý vốn chỉ được chứng minh một cách lỏng lẻo bởi các bậc tiền bối".

Từ điển Tiểu sử Khoa học nói rằng:

"Danh tiếng lừng lẫy của Euclid nằm ở bộ Cơ sở của hình học, trong đó ông viết mười ba quyển và đã để lại một ảnh hưởng to lớn lên tư duy của con người mạnh mẽ hơn bất cứ tác phẩm nào khác ngoại trừ Kinh thánh. Bởi lý do đó, ông được biết đến trong thời cổ đại như là 'Người viết nên Cơ sở của hình học' và đôi khi chỉ đơn giản là "Nhà hình học". Đã từng có các Cơ sở của

hình học được viết trước Euclid – đáng chú ý nhất là các tác phẩm của Hippocrates, Leo and Theudius ở Magnesia – nhưng tác phẩm của Euclid đã vượt qua chúng một cách ngoạn mục đến nỗi bây giờ chúng chỉ còn được biết đến qua các chỉ mục tham khảo của Eudemus's như là Proclus đã dẫn lại".

Nhiều tác phẩm khác được cho là của Euclid, trong thiên văn học, quang học, lý thuyết âm nhạc, cũng như là trong toán học. Nhiều tác phẩm trong số đó đã không còn hiện hữu nữa, hoặc chỉ còn lại những mảnh vỡ. Sau *Cơ sở của hình học*, công trình toán học quan trọng nhất của ông vẫn còn giá trị là *Dữ liệu (Data)*, là tác phẩm rõ ràng được viết ra như một công cụ để giải toán bằng phép phân tích. Quyển *Về sự phân chia (của các số)* – vẫn còn lưu truyền qua bản tiếng Ả rập – nói về việc phân chia các số thành các số khác không đồng dạng. Quyển Các hệ quả được cho là của Euclid đã bị mất, nhưng vẫn được biết đến thông qua các tác phẩm của Pappus. Nó bao gồm không phải là các hệ quả như trong Cơ sở của hình học, mà là theo Heath, *"các định lý về lý thuyết của các đường cát tuyến và hình học xạ ảnh hiện đại"*. Euclid cũng được cho là đã viết một chuyên luận về các mặt cắt với hình nón, dày bốn quyển, là tác phẩm đã vượt qua tác phẩm *Các hình nón* của Apollonius, vốn đã bị mất.

Hai tác phẩm quang học được cho là của Euclid, *Quang học (Optics)* và *Phản xạ học (Catropics)*, đã mở ra truyền thống rất dài của môn quang hình học, duy trì cho đến tận đầu thế kỷ mười bảy. [...].

Những gì chúng ta biết về Eucid là biết qua tác phẩm sáng chói của ông đã để lại. Quyển sách mà bạn đang cầm trên tay cho bạn cơ hội được nghiên cứu tác phẩm một cách trực tiếp và tự mình nghiền ngẫm xem vì sao *"nhà toán học khả kính nhất của mọi thời đại"* lại được vinh danh trong suốt hơn hai thiên niên kỷ.

[1] Được sự đồng ý của Giáo sư *Richard Fitzpatrick*, là người thực hiện bản tiếng Anh mà chúng tôi dùng để dịch, chúng tôi đăng lại nguyên văn lời giới thiệu của ông để độc giả có thêm thông tin về tác phẩm. (ND)

[2] Do điều kiện xuất bản lần này, chúng tôi chỉ giới thiệu nội dung của các quyển từ 1 đến 6 trong bản dịch tiếng Việt. Chúng tôi hy vọng sẽ có điều kiện thực hiện và giới thiệu tiếp các quyển còn lại đến độc giả Việt Nam trong tương lai gần. (ND)

[3] Để độc giả có thêm thông tin về Euclid và di sản của ông, chúng tôi dịch nguyên văn phần tiểu sử của Euclid trong quyển sách *Elements* do Nhà xuất bản Green Lion Press ấn hành.

[4] Sir Thomas Little Heath (1861 – 1940): tác giả, nhà toán học Anh, cũng là nhà nghiên cứu lịch sử toán học cổ đại; bản dịch quyển Elements của ông được Green Lion Press ấn hành.

LÊ VĂN THIÊM: CON NGƯỜI VÀ SỰ NGHIỆP

Hà Huy Khoái

1. Sơ lược tiểu sử

Lê Văn Thiêm sinh ngày 29 tháng 3 năm 1918 tại làng Trung Lễ, Đức Thọ, Hà Tĩnh. Trung Lễ là một làng cổ, thành lập cách đây khoảng 600 năm trên vùng đất trũng, quanh năm bị đe doạ vì nạn hạn hán, lụt lội. Dân Trung Lễ thuần nông, nghèo và hiếu học. Từ thế kỷ XV đã có ông Trần Tước đỗ Tiến sĩ (Khoa Bính Thìn, 1496). Họ Lê ở Trung Lễ nổi tiếng về truyền thống Nho học và yêu nước. Cụ thân sinh ra Lê Văn Thiêm là ông Lê Văn Nhiễu (1869 – 1929), nhiều nơi viết là Nhiệu (theo cách phát âm của người Hà Tĩnh), đậu cử nhân Khoa Canh Tý (1900). Mẫu thân của cụ Cử Lê Văn Nhiễu, tức bà nội của Lê Văn Thiêm, là bà Phan Thị Đại, chị ruột nhà yêu nước Phan Đình Phùng. Chú ruột của Lê Văn Thiêm là ông Lê Văn Huân, đậu Giải nguyên Khoa Bính Ngọ (1906), tham gia phong trào yêu nước Duy Tân hội, rồi Tân Việt Đảng, và tự sát trong nhà lao Vinh năm 1929.

Cử nhân Lê Văn Nhiễu

Cụ Lê Văn Nhiễu tuy đỗ đạt nhưng không ra làm quan, mà ở lại quê nhà dạy học, bốc thuốc, phụng dưỡng cha mẹ, nuôi dạy con cái. Cụ sinh được 13 người con, 8 người con trai, 5 người con gái. Người anh cả của Lê Văn Thiêm là Lê Văn Kỷ đậu Tiến sĩ năm Kỷ Mùi (1919) trong khoa thi cuối cùng của Triều Nguyễn. Vậy là cụ Cử Nhiễu có một người con đậu Tiến sĩ cuối cùng của nền Hán học, và một người con đậu Tiến sĩ đầu tiên của nền Tây học nước nhà! Anh thứ hai của Lê Văn Thiêm, ông Lê Văn Luân, là Bí thư Huyện uỷ Đảng Cộng sản Đông Dương Huyện Đức Thọ, bị Pháp xử tử hình năm 1931. Trong số 5 người chị gái của Lê Văn Thiêm có hai người tham gia phong trào cách mạng 1930 – 1931, và được công nhận là Lão thành cách mạng.

Lê Văn Thiêm là con út trong nhà, nên khi còn bé, được đặt tên là "*Thêm*", tức là đứa con "*Trời cho thêm*". Khi ra đời, cậu bé Thêm rất yếu, vì bà mẹ đã sinh nở đến lần thứ 13. Mẹ cậu không còn sữa, nên cậu phải bú nhờ người chị dâu tên là Sâm, vợ của anh Lê Văn Luân. Vì thế, đối với cậu, bà Sâm cũng gần như người mẹ thứ hai. Ông Luân, bà Sâm đều hoạt động cho Tân Việt Đảng. Bà đóng vai người bán hàng tơ lụa, ông đóng vai người chở thuê, hai người đi khắp nơi tuyên truyền cách mạng, in tài liệu, rải truyền đơn. Khi còn nhỏ, cậu bé Thêm học ở quê nhà với chú ruột, Giải nguyên Lê Văn Huân. Cậu nổi tiếng học giỏi, nhưng cũng nổi tiếng là "*khờ*". Lớn lên, Lê Văn Thiêm theo anh cả - ông Nghè Kỷ, đi học ở Huế, rồi ở Quy Nhơn.

Ông Lê Văn Kỷ

Ông Lê Văn Luân

Sinh ra trong một gia đình giàu truyền thống yêu nước, anh thanh niên Lê Văn Thiêm sớm nuôi trong mình hoài bão học tập để phụng sự Tổ quốc. Năm 1941, Lê Văn Thiêm thi đỗ vào trường *Ecole Normale Supérieure* ở Phố d'Ulm của Paris (trong tiếng Việt, người ta thường dịch là *Trường Cao đẳng sư phạm*, một tên gọi dễ bị hiểu nhầm). Đó là trường đại học danh giá nhất nước Pháp, nơi đào tạo những nhà khoa học nổi tiếng nhất. Thi đỗ vào Ecole Normale là một vinh dự lớn đối với bất kỳ học sinh nào của nước Pháp. Tốt nghiệp Ecole Normale, Lê Văn Thiêm tiếp tục làm luận án Tiến sĩ tại Thuỵ Sĩ, rồi luận án Tiến sĩ quốc gia tại Pháp. Ông đã từng học với những người thầy giỏi nhất thời đó, như Nevanlinna, Teichmuler, Valiron, và nghiên cứu một lĩnh vực thời sự nhất thời bấy giờ: Lý thuyết phân phối giá trị các hàm phân hình. Ông bảo vệ luận án Tiến sĩ quốc gia năm 1949 với những kết quả mà ngày nay đã trở thành kinh điển.

Nhờ những kết quả xuất sắc trong nghiên cứu khoa học, năm 1949, Lê Văn Thiêm nhận được một ghế giáo sư tại trường Đại học Zurich, Thuỵ Sĩ. Ông là người Việt Nam đầu tiên nhận chức giáo sư ở một đại học danh tiếng của Châu Âu.

Một chỗ làm việc tuyệt vời, một hướng nghiên cứu thời sự, những kết quả đầu tay đã trở thành nổi tiếng, tất cả đều mở ra trước mắt nhà toán học trẻ Lê Văn Thiêm một con đường thênh thang để đi đến những đỉnh cao của khoa học.

Nhưng mục đích của đời ông trước hết là đóng góp sức mình cho cuộc đấu tranh giành tự do của Tổ quốc. Vì thế, nghe theo lời kêu gọi của Chủ tịch Hồ Chí Minh, cuối năm 1949, ông đã rời bỏ con đường công danh ở Châu Âu để bí mật trở về nước tham gia kháng chiến. Từ Châu Âu, ông về Băng Cốc, rồi từ đó qua Campuchia để về Nam Bộ.

Giáo sư Lê Văn Thiêm, Thuỵ Sĩ, 1943.

Ở Nam Bộ, Giáo sư Lê Văn Thiêm gia nhập Đảng Cộng sản Đông Dương và công tác tại Sở Giáo dục. Ông đã góp phần đào tạo nhiều giáo viên cho vùng kháng chiến. Ít lâu sau, ông lên đường ra Việt Bắc nhận nhiệm vụ mới: Lãnh đạo trung tâm đại học đầu tiên của nước Việt Nam dân chủ cộng hoà. Đây thật là một nhiệm vụ quan trọng và phù hợp với khả năng, ý nguyện của ông. Sau 6 tháng gian nan đi bộ từ Nam Bộ lên chiến khu Việt Bắc, Giáo sư Lê Văn Thiêm được giao trọng trách Hiệu trưởng Trường Sư phạm cao cấp và Trường Khoa học cơ bản. Ông đã làm hết sức mình trên cương vị đó, và trở thành người đặt nền móng cho giáo dục đại học của nước Việt Nam mới, người thầy của hầu hết những nhà khoa học Việt Nam được đào tạo trong hơn mươi, mười lăm năm đầu tiên sau cách mạng Tháng Tám.

Từ sau khi hoà bình lập lại, Giáo sư Lê Văn Thiêm được giao nhiều trọng trách: Giám đốc Trường Đại học Sư phạm Khoa học Hà Nội (1954 – 1956), Phó Hiệu trưởng Trường Đại học Tổng hợp Hà Nội (1957 – 1970), Viện trưởng đầu tiên của Viện Toán học (1970 – 1980). Ông là Đại biểu quốc hội các Khoá II và III. Ông cũng là Đại diện toàn quyền của Việt Nam tại Viện nghiên cứu hạt nhân Đupna, Liên Xô (từ 1956 đến 1980), Chủ tịch đầu tiên của Hội Toán học Việt Nam, Tổng biên tập đầu tiên của hai tờ báo toán học của Việt Nam là Acta Mathematica Vietnamica và Vietnam Journal of Mathematics.

Giáo sư Lê Văn Thiêm (người đứng giữa) ở Nam Bộ, 1949.

2. Những đóng góp chính về khoa học

2.1. Các công trình về lý thuyết Phân phối giá trị các hàm phân hình

Lý thuyết *Phân phối giá trị các hàm phân hình* được xem là một trong những lý thuyết đẹp nhất của Giải tích toán học thế kỷ XX. Có thể xem lý thuyết này là sự mở rộng của *định lý cơ bản của đại số*. Theo định lý đó, đa thức bậc n tuỳ ý có đúng n nghiệm, kể cả bội. Về mặt nào đó, hàm chỉnh hình là mở rộng tự nhiên của đa thức, vì hàm chỉnh hình trên toàn mặt phẳng (hàm nguyên) được biểu diễn bởi một chuỗi vô hạn hội tụ. Tuy nhiên, khác với lý thuyết các đa thức, trong lý thuyết các hàm chỉnh hình rất khó khai thác các khía cạnh "*đại số*", mà chủ yếu dựa vào các công cụ giải tích. Vấn đề phân bố không điểm của hàm chỉnh hình, cũng như vấn đề phân bố nghiệm của đa thức, là một trong những vấn đề trọng tâm. Và ngay ở vấn đề này, ta gặp phải những khó khăn cơ bản. Do hàm chỉnh hình biểu diễn bởi chuỗi vô hạn, và có thể có vô hạn không điểm trên toàn mặt phẳng, nên không thể có kết quả đơn giản như trong định lý cơ bản của đại số. Vấn đề đặt ra là làm thế nào để có thể xét phân bố không điểm các hàm chỉnh hình tương tự như đã làm đối với đa thức.

Từ *định lý cơ bản* của đại số suy ra rằng, đa thức nào có cấp tăng càng cao thì càng có nhiều không điểm. Mặc dù cấp tăng là một trong những đặc trưng quan trọng của các hàm chỉnh hình, có thể thấy ngay rằng, mở rộng trực tiếp của *định lý cơ bản* của đại số không còn đúng cho trường hợp các hàm chỉnh hình. Thật vậy, tồn tại các hàm chỉnh hình có cấp tăng rất lớn (như hàm e^z), nhưng không có không điểm nào. Trong trường hợp các hàm phân hình thì vấn đề càng trở nên phức tạp: Hàm phân hình là hàm có thể nhận giá trị vô hạn tại một số điểm hữu hạn, và cần phải có một quan niệm mới về cấp tăng. Lý thuyết phân phối giá trị của Nevanlinna ra đời nhằm giải quyết các vấn đề trên. Trước hết, Nevanlinna định nghĩa các *hàm đếm* và *hàm xấp xỉ*, mà ta sẽ mô tả một cách sơ lược như sau. Giả sử $f(z)$ là một hàm phân hình trên toàn mặt phẳng, a là một giá trị phức tuỳ ý. Khi đó, *hàm đếm* $N(f,a,r)$ có mục đích "*đo độ lớn của tập hợp các điểm nằm trong vòng tròn bán kính r, tâm tại gốc, mà tại đó hàm nhận giá trị a*". Như vậy, nếu f là một đa thức bậc n thì khi r đủ lớn, giá trị này là một hằng số không phụ thuộc a, mà chỉ phụ thuộc bậc đa thức. *Hàm xấp xỉ* $m(f,a,r)$ nhằm để "đo độ lớn của tập hợp các điểm nằm trong vòng tròn bán kính r, tâm tại gốc, mà tại đó hàm nhận giá trị "*gần bằng a*". Hàm đặc trưng Nevanlinna được định nghĩa bởi:

$$T(f, a, r) = m(f, a, r) + N(f, a, r).$$

Như vậy, nói một cách nôm na, hàm $T(f, a, r)$ dùng để tính số nghiệm của phương trình $f(z) = a$ trong vòng tròn bán kính r (kể cả số các điểm tại đó hàm nhận giá trị gần với a). Khi nghiên cứu các hàm phân hình, hàm đặc trưng $T(f, a, r)$ đóng vai trò gần giống như bậc khi nghiên cứu các đa thức. Điều đó thể hiện rõ trong các *Định lý cơ bản* của Nevanlinna:

Định lý cơ bản thứ nhất. *Tồn tại hàm $T(f, r)$ sao cho với mọi giá trị a, ta có*

$$T(f, a, r) = T(f, r) + 0(1),$$

trong đó $0(1)$ *là đại lượng giới nội khi r tiến ra vô cùng.*

Từ định lý trên, có thể xem hàm $T(f, a, r)$ không phụ thuộc giá trị a, nghĩa là hàm phân hình nhận mọi giá trị a (kể cả các giá trị "*gần*" với nó) một số lần như nhau. Đây chính là một tương tự của *định lý cơ bản* của đại số cho trường hợp các hàm nguyên và hàm phân hình. Tuy nhiên, để đạt được tương tự đẹp đẽ nói trên, ngoài hàm $N(f, a, r)$ ta đã phải bổ sung thêm một hàm xấp xỉ $m(f, a, r)$ mà thực chất là dùng để đo các điểm tại đó hàm đã cho nhận giá trị "*gần*" với a. Nếu sự "*hiệu chỉnh*" này mà quá lớn thì hiển nhiên, Định lý cơ bản thứ nhất của Nevanlinna trở nên ít ý nghĩa.

Nevanlinna chứng minh *Định lý cơ bản thứ hai*, sâu sắc hơn nhiều so với *Định lý cơ bản thứ nhất*. Nói nôm na, *Định lý cơ bản thứ hai* cho thấy rằng "*đại lượng hiệu chỉnh*" $m(f, a, r)$ nói chung rất nhỏ. *Định lý cơ bản thứ hai* của Nevanlinna được phát biểu như sau:

Định lý cơ bản thứ hai. *Với mọi số nguyên dương q và các số phức phân biệt tuỳ ý a_i, $i = 1, 2, \ldots, q$ (có thể bằng ∞), ta có*

$$\sum_{i=1}^{q} m(f, a_i, r) \leqslant 2T(f, r) + o(\log T(f, r)).$$

Do q là số tuỳ ý, mà vế phải trong bất đẳng thức của *Định lý cơ bản thứ hai* không phụ thuộc q nên từ đó có thể thấy rằng, các đại lượng $m(f, a, r)$ nói chung rất nhỏ. Để có thể "*định lượng*" được tính chất đó, Nevanlinna đưa ra các hàm khuyết sau đây:

$$\delta(a) = \lim_{r\to\infty} \inf \frac{m(f, a, r)}{T(f, r)},$$
$$\theta(a) = \lim_{r\to\infty} \sup \frac{N_1(f, a, r)}{T(f, r)}.$$

trong đó $N_1(f, a, r)$ là đại lượng được tính như $N(f, a, r)$ nhưng mỗi nghiệm của phương trình $f(z) = a$ chỉ được kể một lần (không tính bội).

Số $\delta(a)$ được gọi là *số khuyết* của hàm tại giá trị a. Tên gọi *số khuyết* phản ánh ý nghĩa của đại lượng này: $\delta(a)$ đo mức độ mà ta phải hiệu chỉnh để có tương tự của *Định lý cơ bản* của đại số, và đó chính là số nghiệm bị "*thiếu*" (khuyết) mà ta phải thêm vào bằng cách cộng thêm hàm xấp xỉ, tức là thêm các điểm mà tại đó hàm nhận giá trị gần với a. Số $\theta(a)$ được gọi là *chỉ số bội*, vì rõ ràng nó phụ thuộc vào bội của các nghiệm phương trình $f(z) = a$. Với những định nghĩa đó, từ *Định lý cơ bản thứ nhất*, ta có:

$$0 \leqslant \delta(a) + \theta(a) \leqslant 1. \tag{1}$$

Từ *Định lý cơ bản thứ hai* ta thu được bất đẳng thức sau đây:

$$\sum_{a \in \mathbb{C} \cup \infty} \{\delta(a) + \theta(a)\} \leqslant 2. \tag{2}$$

Bất đẳng thức (2) được gọi là *quan hệ số khuyết.*

Từ quan hệ số khuyết, ta suy ra rằng, với hầu hết giá trị a, đại lượng $\theta(a)$ bằng 0, trừ ra cùng lắm là một số đếm được các giá trị của a, đồng thời tổng các giá trị đó cũng bị chặn bởi 2.

Các *Định lý cơ bản* thứ nhất và thứ hai, cùng với *quan hệ số khuyết* làm nên "*ba hòn đá tảng*" của lý thuyết Nevanlinna.

Từ quan hệ số khuyết, một cách tự nhiên phải đặt ra vấn đề sau đây, thường được gọi là *Bài toán ngược của lý thuyết Nevanlinna.*

Cho dãy (hữu hạn hoặc vô hạn) các điểm a_k trong mặt phẳng phức $\mathbb{C}$ (kể cả điểm vô cùng), và các số không âm tương ứng $\theta(a_k)$, $\delta(a_k)$ thoả mãn các điều kiện sau:

$$0 < \delta(a_k) + \theta(a_k) \leqslant 1, \ k = 1, 2, \ldots$$

$$\sum_k \{\delta(a_k) + \theta(a_k)\} \leqslant 2.$$

Vấn đề đặt ra là tìm hàm phân hình có số khuyết (tương ứng, chỉ số bội) tại các điểm a_k là $\delta(a_k)$ (tương ứng $\theta(a_k)$) và số khuyết (tương ứng, chỉ số bội) bằng 0 tại các điểm còn lại.

Nevanlinna (năm 1932) đã cho lời giải của bài toán trên trong trường hợp riêng với những giả thuyết chặt sau đây:

1. Dãy $\{a_k\}$ là hữu hạn.
2. $\delta(a_k)$ là các số hữu tỷ.
3. $\theta(a_k) = 0$ với mọi k.

Trong khoảng 15 năm tiếp theo kể từ kết quả đầu tiên của Nevanlinna, bài toán trên không tiến triển thêm được bước nào. Cho đến năm 1949, Lê Văn Thiêm đã tiến một bước dài trong việc giải bài toán ngược của lý thuyết Nevanlinna. Kết quả chính mà ông thu được là xây dựng nghiệm của bài toán ngược với những giả thiết sau đây:

1. Dãy $\{a_k\}$ là hữu hạn.
2. $\delta(a_k)$ và $\theta(a_k)$ là các số hữu tỷ.
3. Nếu $\theta(a_k) > 0$ thì $\delta(a_k) + \theta(a_k) < 1$.
4. $\delta(a_k) + \theta(a_k) = 2$.

Đóng góp quan trọng của Lê Văn Thiêm không chỉ là việc chứng minh sự tồn tại nghiệm của bài toán ngược trong những tình huống tổng quát hơn so với công trình của Nevanlinna, mà điều quan trọng là lần đầu tiên, ông đã đưa công cụ *ánh xạ á bảo giác và không gian Teichmuler* vào việc giải bài toán ngược. Tư tưởng đó của ông đã được những nhà toán học nổi tiếng khác sử dụng để tiếp tục thu được những kết quả mới cho bài toán ngược: Goldberg, Weitsman, Drasin. Cuối cùng, năm 1977, Drasin cho lời giải trọn vẹn của bài toán ngược của lý thuyết Nevanlinna, 45 năm sau khi bài toán được đặt ra. Điều đáng nói là, trong công trình của mình, Drasin cũng sử dụng những phương pháp mà Lê Văn Thiêm lần đầu tiên áp dụng.

Công trình về bài toán ngược của lý thuyết Nevanlinna đã đặt Lê Văn Thiêm vào hàng ngũ những tác gia kinh điển của lý thuyết này. Ngay khi công trình ra đời, người giới thiệu nó trên tờ *American Mathematical Reviews* chính là Ahlfors, người nhận Giải thưởng Fields năm 1936. Ahlfors cũng giới thiệu một số công trình tiếp theo của Lê Văn Thiêm trên tạp chí này. Cho đến tận ngày hôm nay, hầu như cuốn sách nào về Lý thuyết hàm phân hình, khi nói đến lý thuyết Nevanlinna đều nhắc đến các công trình đầu tiên của Lê Văn Thiêm. Không phải nhà khoa học nào cũng có cái vinh dự được nhắc đến kết quả của mình 60 năm sau! Có thể tin rằng, các công trình đó của Lê Văn Thiêm sẽ còn được nhớ đến nhiều năm, như là một trong những cột mốc của lý thuyết các hàm phân hình.

Bài báo *Beitrag zum Typenproblem der Riemannschen Flachen* (Về vấn đề phân loại diện Riemann) của Lê Văn Thiêm đăng trên tờ *Commentarii mathematici Helvertici* năm 1947 chính là công trình toán học đầu tiên của người Việt Nam công bố trên tạp chí quốc tế. Có thể xem năm 1947 là năm mở đầu cho Lịch sử toán học Việt Nam hiện đại, và thật đáng tự hào khi Toán học Việt Nam tham gia với toán học thế giới bằng một "*công trình đầu tay*" có ý nghĩa lịch sử!

Trở về Việt Nam năm 1949 theo lời kêu gọi của Chủ tịch Hồ Chí Minh, Giáo sư Lê Văn Thiêm tạm dừng các nghiên cứu khoa học của mình để chuyên tâm vào các nhiệm vụ quan trọng được Nhà nước giao phó. Tuy vậy, khi có chủ trương thúc đẩy phong trào nghiên cứu khoa học trong các trường đại hoc, Giáo sư lại trở về với lý thuyêt diện Riemann yêu thích của mình. Theo lời kể của ông, hai công trình đăng trong tạp chí *Sibirskii Matematicheski Journal* và *Acta Scientiarum Vietnamicarum* vào các năm 1964, 1965 là kết quả của việc nghiên cứu một vấn đề mà ông suy nghĩ từ khi còn ở Pháp, nhưng chưa có dịp thực hiện. Trong các công trình đó, Lê Văn Thiêm đưa ra điều kiện để một mặt phủ là diện Riemann thuộc kiểu hypecbôlic thông qua việc tồn tại "*đầu mút môđula*". Ông cũng đưa ra các điều kiện để một diện Riemann thuộc lớp O_{HB}, tức là trên đó không tồn tại hàm điều hoà giới nội khác hằng số.

Từ sau hai công trình kể trên, Giáo sư Lê Văn Thiêm chuyển hẳn sang nghiên cứu các vấn đề toán học ứng dụng, theo chủ trương đưa khoa học vào phục vụ thực tiễn sản xuất và chiến đấu.

2.2. Các công trình về toán học ứng dụng

Vốn là một chuyên gia nổi tiếng về lý thuyết hàm phân hình và diện Riemann, những vấn đề của toán học lý thuyết, Giáo sư Lê Văn Thiêm chuyển sang nghiên cứu và lãnh đạo các nhóm nghiên cứu về toán học ứng dụng. Điều đáng ngạc nhiên là trong số những công trình đầu tiên của ông về toán ứng dụng, có công trình trở thành kinh điển trong lĩnh vực này: Lời giải tường minh của bài toán thấm qua hai lớp đất.

Bài toán thấm là vấn đề có ý nghiã thực tiễn quan trọng, xuất hiện khi tính toán sự bền vững của các đê, đập nước, trữ lượng dầu trong các túi dầu, vấn đề rửa mặn các ruộng vùng ven biển, ...

Trong nhiều bài toán thấm, chẳng hạn khi xét nước thấm qua một con đê dài, ta đi đến mô hình bài toán thấm phẳng (tức là không phụ thuộc một chiều nào đó). Với một số giả thiết chấp nhận được, việc mô hình hoá toán học đưa bài toán thấm qua một môi trường đồng chất về việc xây dựng một hàm chỉnh hình thực hiện ánh xạ bảo giác miền thấm lên nửa mặt phẳng. Đó là việc rất khó khăn về mặt toán học, vì miền thấm thường hết sức phức tạp. Tuy vậy, ngay trong trường hợp đó, ta đã phải xét một mô hình khá xa với thực tiễn: Môi trường mà nước thấm qua là "*đồng chất*", tức là chỉ có một lớp đất với cùng một hệ số thấm. Trong thực tiễn, thường có nhiều lớp với hệ số thấm khác nhau nằm dưới một công trình thuỷ lợi: Lớp đất sét, lớp đất cát, ... Đối với trường hợp miền thấm không đồng chất, cho đến trước công trình của Lê Văn Thiêm, người ta chỉ mới có các phương pháp giải gần đúng. Trong công trình *Sur un problème d'infiltratione à travers un sol à deux couches. (Về bài toán thấm qua hai lớp đất)* đăng trên tạp chí Acta Sci.Vietnam. 1, 1964, pp. $3-9$, Lê Văn Thiêm đã dùng Nguyên lý đối xứng trong giải tích phức để xây dựng được nghiệm tường minh cho bài toán thấm qua hai lớp đất với hệ số thấm khác nhau. Đây là công trình đầu tiên trong lĩnh vực lý thuyết nước thấm cho phép xây dựng nghiệm giải tích của bài toán thấm không đồng chất. Điều đó đã được khẳng định trong cuốn sách *Lý thuyết chuyển động của nước ngầm* của Palubarinova-Kochina xuất bản ở Matxcơva năm 1977.

Một hướng nghiên cứu ứng dụng mà Giáo sư Lê Văn Thiêm cùng các học trò của mình tiến hành trong nhiều năm là nổ định hướng. Phương pháp nổ định hướng do nhà toán học Nga Lavrenchiep đưa ra, dựa trên nguyên tắc sau đây: Khi có một vụ nổ lớn, dưới tác động của áp suất quá cao, các vật chất quanh tâm của vụ nổ chuyển động theo quy luật của chất lỏng lý tưởng, tức là không nhớt và không nén được. Chuyển động của chất lỏng lý tưởng có thể mô tả bằng một hàm giải tích. Nếu tìm được hàm giải tích này, ta có thể tính được áp lực quanh tâm nổ, quỹ đạo chuyển động của vật chất gần tâm nổ. Nhận thấy đây là vấn đề có ý nghĩa thực tiễn lớn, Giáo sư Lê Văn Thiêm đã hướng dẫn các học trò của mình tại Trường đại học Tổng hợp Hà Nội và Viện Toán học nghiên cứu áp dụng. Năm 1966, một nhóm các nhà toán học trẻ của hai cơ quan trên (gồm Ngô Văn Lược, Lê Văn Thành, Nguyễn Văn Lâm, Hà Huy Khoái, Lê Hùng Sơn và một số người khác) lên đường vào Nghệ An để tiến hành trên thực tế. Địa điểm làm việc là vùng Hoàng Mai thuộc địa phận huyện Quỳnh Lưu. Hoàng Mai là nơi gặp nhau của ba tuyến đường vào Nam: đường bộ, đường sắt, đường thuỷ (kênh Nhà Lê). Vì thế, đây trở thành một trong những trọng điểm đánh phá của máy bay Mỹ. Do đường sắt và đường bộ bị hư hại nghiêm trọng, việc vận chuyển qua kênh Nhà Lê trở nên rất quan trọng. Con kênh được đào từ thời Lê, đến nay đã khá cạn. Vấn đề cấp thiết đặt ra là phải nạo vét lòng kênh để các thuyền trọng tải lớn có thể đi qua. Các đơn vị Thanh niên xung phong được giao nhiệm vụ này. Tuy vậy, không thể tập trung một lực lượng lớn, vì máy bay Mỹ bắn phá ngày đêm. Giáo sư Lê Văn Thiêm đề xuất dùng phương pháp nổ định hướng để nạo vét lòng kênh. Mục tiêu đặt ra là làm thế nào để sau khi nổ, hầu hết đất đá văng lên bờ, chứ không rơi lại xuống lòng kênh. Các vụ nổ được tiến hành vào lúc thuỷ triều xuống thấp nhất để có hiệu quả cao nhất. Vì vậy, nhiều lúc phải nổ vào những "*giờ cao điểm*", tức là những giờ mà máy bay Mỹ bắn phá ác liệt nhất. Thực tế đã chứng tỏ, phương pháp nổ định hướng đã có tác dụng rất thiết thực, góp phần tăng khả năng vận chuyển qua kênh Nhà Lê, giảm nhẹ tổn thất về người và của. Phương pháp nổ định hướng đó cũng được áp dụng trong việc xây dựng các con đường chiến lược trong rừng. Các đơn vị Thanh niên xung phong đã cùng nhóm học trò nói trên của Giáo sư Lê Văn Thiêm áp dụng lý thuyết nổ định hưởng trong việc phá đá, bạt ta-luy, hất những cây to chắn đường xuống vực trong quá trình làm đường. Giáo sư Lê Văn Thiêm đã viết một tài liệu hướng dẫn cho Thanh niên xung phong để họ tự làm lấy sau khi nhóm nghiên cứu rút khỏi hiện trường. Tiếc rằng bản tài liệu đó ngày nay không tìm lại được.

Sau ngày đất nước hoàn toàn giải phóng, Giáo sư Lê Văn Thiêm chuyển vào công tác tại Thành phố Hồ Chí Minh. Ông đã lập nên Phòng Toán học ứng dụng, nghiên cứu các vấn đề toán học đặt ra trong lý thuyết đàn hồi và chuyển động của chất lỏng nhớt.

Các vấn đề toán học ứng dụng mà giáo sư Lê Văn Thiêm quan tâm nghiên cứu đều là những vấn đề được đặt ra trong thực tiễn Việt Nam: xây dựng đê điều và các công trình thuỷ lợi, cải tạo các ruộng nhiễm mặn vùng ven biển, tính toán trữ lượng dầu khí, nạo vét lòng kênh để phục vụ giao thông thời chiến. Ngay khi giải quyết các nhiệm vụ ứng dụng trước mắt, với trình độ cao về khoa học cơ bản, ông đã có những đóng góp quan trọng vào sự phát triển của lý thuyết.

3. Xây dựng nền Toán học Việt nam

Với những công trình khoa học xuất sắc, Lê Văn Thiêm là người viết trang đầu tiên của lịch sử toán học Việt Nam hiện đại. Ông cũng là một trong những người đầu tiên đặt nền móng xây dựng toán học Việt Nam. Uy tín của ông đã từng là nguyên nhân khiến nhiều thanh niên tài năng lên Chiến khu Việt Bắc để nghiên cứu và giảng dạy toán học: Hoàng Tụy, Nguyễn Cảnh Toàn, ... Và không chỉ lôi cuốn, khuyến khích họ bằng tiếng tăm của mình, Giáo sư Lê Văn Thiêm đã dồn tâm sức để đào tạo lớp thanh niên đầy nhiệt huyết của những ngày đầu cách mạng. "*Vốn liếng*" của ông khi đó thật ít ỏi, đó chỉ là một ít sách mà ông và một số giáo sư khác đã cố gắng mang theo mình suốt chặng đường từ châu Âu đến chiến khu. Ông luôn khuyến khích những tài năng trẻ đi sâu vào nghiên cứu khoa học, và cố gắng tạo cho họ những điều kiện tốt nhất có thể.

Ngay cả sau khi hoà bình lập lại, các trường đại học ở Việt Nam hầu như chưa có giáo trình đại học về toán bằng tiếng Việt. Vậy mà một trong những quyết tâm lớn của Nhà nước Việt Nam mới là giảng dạy tiếng Việt ở bậc đại học. Lê Văn Thiêm đã dịch và viết các giáo trình, từ Hàm biến phức cho đến Xác suất thống kê. Đến năm 1964, chúng tôi vẫn được Thư viện cho mượn các giáo trình do ông dịch, đánh máy bằng tiếng Việt không dấu: Có lẽ do thói quen khi còn ở Pháp, hoặc là để tiết kiệm thời gian khi viết, tiếng Việt của Giáo sư Lê Văn Thiêm thường không có dấu!

Nhận thức rõ tầm quan trọng của Toán học trong việc xây dựng nền khoa học nước nhà, Giáo sư Lê Văn Thiêm cùng với các Giáo sư Tạ Quang Bửu, Hoàng Tụy đã vạch một chiến lược lâu dài phát triển Toán học Việt Nam. Sự ra đời của Phòng Nghiên cứu Toán năm 1962 (trực thuộc Uỷ ban Khoa học và Kỹ thuật Nhà nước) là một cột mốc quan trọng trong quá trình xây dựng nền toán học Việt Nam.

Năm 1969, Thủ tướng Phạm Văn Đồng ký quyết định thành lập Viện Toán học thuộc Uỷ ban khoa học và Kỹ thuật Nhà nước. Năm 1970, Giáo sư Lê Văn Thiêm, lúc đó đang là Phó Hiệu trưởng Trường Đại học Tổng hợp Hà Nội, được chuyển về giữ chức vụ Phó Viện trưởng, Phụ trách Viện Toán học. Từ lúc đó, Viện Toán học chính thức đi vào hoạt động.

Với sự lãnh đạo của Giáo sư Lê Văn Thiêm, từ khi thành lập, Phòng Nghiên cứu Toán, và sau này là Viện Toán học đã chú trọng phát triển toàn diện: Nghiên cứu cơ bản, nghiên cứu ứng dụng và đào tạo. Những sinh viên giỏi tốt nghiệp Đại học Tổng hợp Hà Nội và các đại học nước ngoài được chính Giáo sư Lê Văn Thiêm tuyển chọn về Viện Toán học, và được cử đi tiếp tục nghiên cứu, học tập ở nước ngoài. Chính nhờ chiến lược đào tạo cơ bản đó của Giáo sư Lê Văn Thiêm mà Viện toán học, từ chỗ chỉ có hơn 20 cán bộ năm 1970, đến nay đã trở thành một Viện nghiên cứu hàng đầu cả nước với 100 cán bộ, trong đó có 19 Giáo sư và 22 Phó giáo sư, 28 Tiến sĩ khoa học, 38 Tiến sĩ, đã có 7 Tiến sĩ khoa học, 119 Tiến sĩ và 200 Thạc sĩ được đào tạo tại Viện.

Sau ngày tái thống nhất đất nước, Giáo sư Lê Văn Thiêm vào công tác tại Thành phố Hồ Chí Minh. Giáo sư đã lập nên Phòng Toán học ứng dụng, với nhiệm vụ nghiên cứu những vấn đề gần với các ứng dụng thực tiễn, đặc biệt là các vấn đề đặt ra tại Miền Nam như thuỷ lợi ở Đồng bằng sông Cửu Long, dầu khí.

Giáo sư Lê Văn Thiêm, cùng với Giáo sư Hoàng Tuy, là những người đầu tiên gây dựng Khoa Toán của Trường Đại học tổng hợp Hà Nội. Ông luôn kiên trì phương châm giữ vững chất lượng đào tạo, ngay cả trong những năm chiến tranh, khi nhà trường phải sơ tán vào vùng núi Việt Bắc. Ông cũng đã phải trải qua nhiều cuộc đấu tranh gay go trong nội bộ Khoa Toán và Trường Đại học Tổng hợp Hà Nội trong những năm 60 để giữ vững chiến lược đúng đắn đó. Nhờ thế, Khoa Toán của Đại học Tổng hợp Hà Nội (nay là Đại học Khoa học tự nhiên thuộc Đại học Quốc gia Hà Nội) đã đào tạo nên nhiều nhà toán học hàng đầu trong cả nước.

Giáo sư Lê Văn Thiêm cũng là Chủ tịch đầu tiên của Hội Toán học Việt Nam. Với uy tín, tài năng và đức độ của mình, Giáo sư là người lãnh đạo, cũng đồng thời là hạt nhân gắn kết cộng đồng toán học Việt Nam.

Suốt đời hết lòng vì thế hệ trẻ, Giáo sư Lê Văn Thiêm là một trong những người sáng lập tờ báo *Toán học và Tuổi trẻ*, và trực tiếp viết bài cho báo ngay từ những số đầu tiên. Ông cũng trực tiếp ra đề thi chọn học sinh giỏi toàn Miền Bắc những năm $1963-1964$. Ông không nề hà việc gì, dù to dù nhỏ, miễn là có lợi cho việc dìu dắt thế hệ trẻ. Nhiều học sinh giỏi gặp khó khăn khi xét tuyển vào đại học do gia đình, họ hàng bị một số định kiến về "*lý lịch*" đã tìm đến ông, và được giúp đỡ tận tình. Nhiều người trong số họ đã trở thành những nhà toán học giỏi, có nhiều đóng góp cho đất nước.

Ngay khi cả nước đang trong chiến tranh, máy bay Mỹ bắn phá dữ dội miền Bắc, Giáo sư Lê Văn Thiêm là người đã đứng ra sáng lập tờ báo Toán học và Vật lý bằng tiếng nước ngoài đầu tiên của Việt Nam: Tờ *Acta Scientiarum Vietnamicarum (Sectio Mathematicarum et Physicarum)*. Phần toán học của tờ báo đó ngày nay đã trở thành tờ *Acta Mathematica Vietnamica*, tờ báo có uy tín nhất về toán của việt Nam, có mặt ở thư viện của nhiều trường đại học lớn trên thế giới. Việc cho ra đời một tờ báo nghiên cứu toán học (bằng tiếng Anh, Pháp, Nga, Đức) trong chiến tranh là điều hiếm có trên thế giới. Nhiều nhà khoa học nước ngoài đã tỏ ý ngạc nhiên và khâm phục khi thấy Việt Nam, một đất nước đang phải đương đầu với cuộc chiến tranh tàn khốc nhất ở cả hai miền, lại nghĩ đến việc ra một tờ tạp chí nghiên cứu khoa học bằng tiếng nước ngoài. Việc làm đó chứng tỏ tầm nhìn xa của các nhà lãnh đạo khoa học của Việt Nam, và cả sự tin tưởng vào thắng lợi tất yếu của sự nghiệp cách mạng.

Sự phát triển của Toán học Việt Nam, và của khoa học cơ bản Việt Nam nói chung từ sau Cách mạng Tháng Tám mang đậm dấu ấn của Giáo sư Lê Văn Thiêm.

4. Thay lời kết luận

Khó có thể nói hết trong một bài viết ngắn tất cả những gì mà Giáo sư Lê Văn Thiêm đã làm vì sự phát triển một nền Khoa học Việt nam. Trong tập sách "*Lê Văn Thiêm – các công trình khoa học*", độc giả sẽ tìm thấy nhiều bài viết của những người đã từng học, từng cộng tác với Giáo sư Lê Văn Thiêm. Hy vọng qua những bài viết đó, độc giả hiểu rõ hơn về Nhà Khoa học, Nhà Giáo, người Trí thức, người chiến sĩ Lê Văn Thiêm.

Giáo sư Lê Văn Thiêm, 1950.

Ông thuộc vào số những con người không lặp lại của Lịch sử.

Epsilon
Tạp chí online của cộng đồng những người yêu toán

CÁC VẤN ĐỀ CỔ ĐIỂN VÀ HIỆN ĐẠI

Trần Nam Dũng - Đại học Khoa học Tự nhiên - ĐHQG TP.HCM

LỜI GIỚI THIỆU

Chuyên mục này dành cho các vấn đề cổ điển và hiện đại được trình bày dưới dạng các bài toán xâu chuỗi. Đó có thể là chuỗi các bài để giải bài toán đẳng chu, chứng minh đẳng thức Euler kỳ diệu $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$, một chuỗi bài toán vận trù ... Cách trình bày xuất phát từ những vấn đề đơn giản, dễ hiểu, những khái niệm mới sẽ được định nghĩa luôn trong bài để có thể đọc tương đối độc lập. Và mỗi một chuỗi bài sẽ nêu ra những vấn đề nhất định, có thể là giải quyết một bài toán kinh điển hay nêu ra những giả thuyết mới, những vấn đề mới. Lời giải và thảo luận về các bài toán sẽ được đăng ở số $N + 3$.

Trong số này, chúng tôi xin giới thiệu với bạn đọc các bài toán trong đề thi tốt nghiệp của Pháp do GS Nguyễn Tiến Dũng giới thiệu và được hai bạn Lê Phúc Lữ, Huỳnh Công Bằng dịch. Ngoài ra chúng tôi sẽ đăng tóm tắt lời giải các bài toán đã đăng ở số 4.

Đề tốt nghiệp THPT môn Toán của Pháp

Bài viết được GS Nguyễn Tiến Dũng giới thiệu và được hai bạn Lê Phúc Lữ, Huỳnh Công Bằng dịch.

Một số thông tin về kỳ thi:

1. Thời gian làm bài là 5 giờ.
2. Thí sinh được sử dụng máy tính bỏ túi.
3. Thí sinh cần trình bày rõ ràng, mạch lạc để các bản copy của bài làm dễ đọc.
4. Đề thi có tổng cộng 3 bài và thí sinh có thể làm theo thứ tự tùy ý.

1. Tổng của những con số lập phương

Với mỗi số nguyên dương n, ta gọi n^3 là lập phương của n. Trong bài toán này, ta quy ước rằng:

- S là tập hợp các số nguyên dương có thể biểu diễn dưới dạng tổng của các số lập phương phân biệt.
- S_0 là tập hợp các số nguyên dương có thể biểu diễn dưới dạng tổng của các số lập phương chẵn phân biệt.
- S_1 là tập hợp các số nguyên dương có thể biểu diễn dưới dạng tổng của các số lập phương lẻ phân biệt.

Ví dụ:

- $8, 190 \in S$ vì $8 = 2^3$ và $190 = 1^3 + 4^3 + 5^3$;
- $216, 1072 \in S_0$ vì $216 = 6^3$ và $1072 = 2^3 + 4^3 + 10^3$;
- $125, 2568 \in S_1$ vì $125 = 5^3$ và $2568 = 1^3 + 3^3 + 7^3 + 13^3$.

Bằng cách trả lời các câu hỏi sau đây, chúng ta sẽ chứng minh rằng mọi số nguyên dương đủ lớn đều thuộc S, tức là tồn tại N sao cho với mọi số nguyên dương $n \geq N$, ta đều có $n \in S$.

1) Chứng minh rằng 2016 thuộc S_0.

2) Chứng minh rằng:

   a) Với mọi số thực $x \geq 5$ thì

$$(2x+1)^3 \leq 2(2x-1)^3.$$

b) Với số nguyên dương $k \geqslant 5$ khi đó với mọi số nguyên $p \geq k$ ta luôn có

$$(2p+1)^3 \leq (2k-1)^3 + \sum_{j=k}^{p} (2j-1)^3.$$

3) Chứng minh rằng tồn tại 288 số $s_1, s_2, \ldots, s_{288}$ thuộc S_1 sao cho $s_i \equiv i \pmod{288}$ với mọi $i = 1, 2, 3, \ldots, 288$.

Tiếp theo, ta cố định bộ số $(s_1, s_2, \ldots, s_{288})$ đã nêu và đặt m là số lớn nhất trong chúng.

4) Gọi n là số nguyên dương thỏa mãn $288n \geq m$ và xét cấp số cộng nguyên dương $u_1, u_2, \ldots, u_n$ có công sai là 288. Chứng minh rằng các số nguyên thuộc đoạn $[m + u_1, 288n + u_1]$ đều có thể biểu diễn được dưới dạng $s_i + u_j$, trong đó $1 \leq i \leq 288$ và $1 \leq j \leq n$.

5) Cho biết rằng với mỗi số thực x, ta có đồng nhất thức sau

$$(2x+12)^3 + (2x+4)^3 + (2x+2)^3 - (2x+10)^3 - (2x+8)^3 - (2x)^3 = 288.$$

Hãy chứng minh rằng:

a) Tồn tại một số nguyên dương u sao cho $u, u+288$ và $u+576$ đều thuộc S_0.

b) Với mọi số nguyên $n \geq 2$, tồn tại n phần tử trong S_0 tạo thành một cấp số cộng có công sai là 288.

6) Cho k là một số nguyên dương không nhỏ hơn 5 thỏa mãn $(2k+1)^3 > m$.

a) Chứng minh rằng luôn tồn tại số nguyên dương $N \geq 1$ sao cho mọi số nguyên dương thuộc đoạn $\left[N, N + 2(2k-1)^3\right]$ đều có thể biểu diễn được dưới dang $s_i + u$ với $1 \leq i \leq 288$ và $u \in S_0$.

b) Chứng minh rằng mọi số nguyên dương lớn hơn hoặc bằng N đều thuộc S.

Gợi ý. *Với mỗi số nguyên dương $p \geq k$, ta xem xét trường hợp các số nguyên dương nằm trong đoạn $\left[N, N_p\right]$, trong đó*

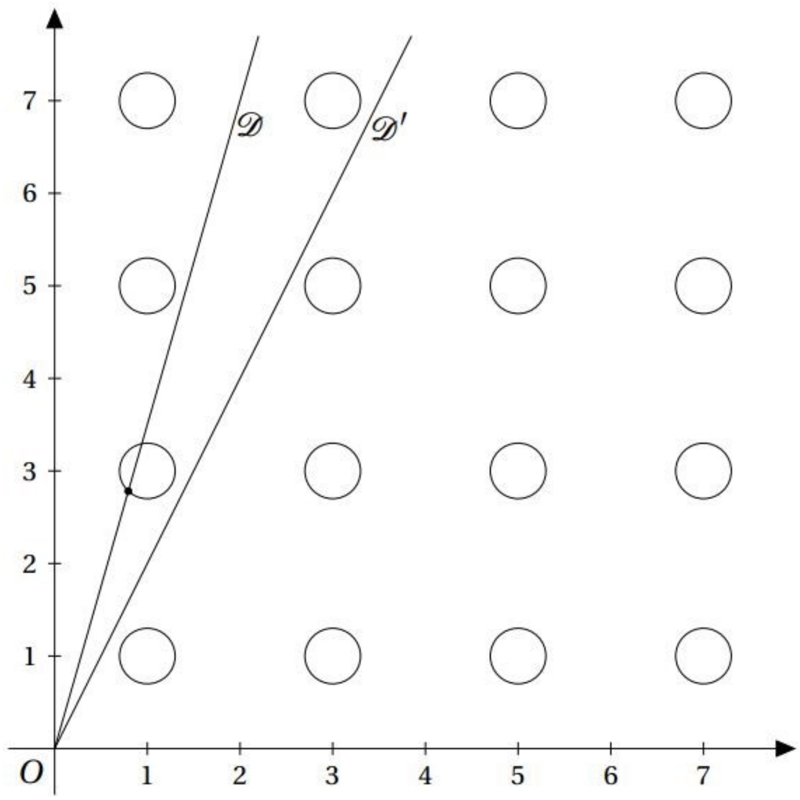
$$N_p = N + (2k-1)^3 + \sum_{j=k}^{p} (2j-1)^3.$$

2. Thám hiểm rừng rậm

Một nhà thám hiểm đang khám phá một khu rừng và phát hiện ra rằng tất cả các thân cây trong đó đều có cùng bán kính. Đây quả thật là một điều rất thú vị! Tạm thời bỏ qua chiều cao của các cây, ta đặt khu rừng vào trong mặt phẳng tọa độ vuông góc như sau:

- Nhà thám hiểm đang đứng tại gốc tọa độ và muốn tìm một góc nhìn xuyên qua khu rừng.
- Các thân cây được xem như các vòng tròn có bán kính $R > 0$ và tọa độ tâm đặt tại các điểm nguyên (a, b) với a, b là các số LẺ. Do tính đối xứng nên ta có thể giả sử $a > 0, b > 0$, tức là chỉ xét các điểm thuộc góc phần tư thứ nhất.

Ta nói rằng nhà thám hiểm có thể *"nhìn xuyên qua"* khu rừng nếu như có một tia xuất phát từ vị trí đứng của anh ta (tại gốc tọa độ) và đi qua khu rừng mà không cắt bất cứ gốc cây nào (ở đây là các hình tròn).



Ở ví dụ trong hình, tia $\mathcal{D}$ bị vướng phải một gốc cây trong khi $\mathcal{D}'$ thì không. Và do có một tia $\mathcal{D}'$ như vậy nên ta nói nhà thám hiểm có thể nhìn xuyên qua khu rừng.

Với $m \in (0; +\infty)$, ta gọi $\mathcal{D}_m$ là tia gốc O có phương trình $y = mx$ và $x > 0$.

Tiếp theo, ta thừa nhận tính chất sau: Với mọi số vô tỷ dương m và mọi số $\varepsilon > 0$ nhỏ tùy ý, luôn tồn tại hai số nguyên dương a, b lẻ sao cho

$$|b - ma| < \varepsilon.$$

Hãy trả lời những câu hỏi sau:

1) Cho $a,\ b,\ m$ là các số thực dương. Chứng minh rằng $\mathcal{D}_m$ cắt đường tròn có bán kính $R > 0$ có tâm đặt tại (a, b) khi và chỉ khi

$$|b - ma| \leq R\sqrt{1 + m^2}.$$

2) Từ đó suy ra rằng nếu m là số vô tỷ thì $\mathcal{D}_m$ sẽ vướng phải một gốc cây.

3) Giả sử $m = \dfrac{b}{a}$ với a, b là các số nguyên dương và nguyên tố cùng nhau:

   a) Giả sử a, b cùng lẻ. Hỏi đường thẳng $\mathcal{D}_m$ có vướng phải gốc cây nào không?

b) Giả sử a, b khác tính chẵn lẻ và $\mathcal{D}_m$ bị vướng vào một cái cây. Chứng minh rằng

$$1 \leq R\sqrt{a^2 + b^2}.$$

4) Từ đó chứng minh rằng nếu tất cả các đường thẳng $\mathcal{D}_m$ với $m > 0$ đều vướng phải gốc cây nào đó thì $R \geq \frac{1}{\sqrt{5}}$.

5) Giả sử rằng $R \geq \frac{1}{\sqrt{5}}$. Chứng minh rằng các tia $\mathcal{D}_m$ với $m > 0$ sẽ vướng phải các gốc cây tại tọa độ $(\alpha, 1)$ hoặc $(1, \alpha)$ với α là số nguyên dương lẻ.

Ta gọi hàng đầu tiên là tất cả các cây có tâm nằm ở vị trí $(1, \alpha)$ hoặc $(\alpha, 1)$ với α là số lẻ.

6) Chứng minh rằng nếu người quan sát có thể nhìn xuyên qua hàng đầu tiên này thì có thể nhìn xuyên qua cả khu rừng.

3. Hành trình trong miền số phức

Trong bài toán này, ta quy ước ký hiệu $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ và xác suất của biến cố A là $P(A)$.

1) a) Chứng tỏ rằng $j^3 = 1$ và $1 + j + j^2 = 0$.

b) Trong mặt phẳng phức, ba điểm biểu diễn $1, j, j^2$ tạo thành tam giác có đặc điểm gì?

c) Chứng minh rằng nếu a, b, c là các số thực thỏa mãn $a + bj + cj^2 = 0$ thì $a = b = c$.

Cho một con xúc sắc đồng chất có 6 mặt (được đánh số từ 1 đến 6). Ký hiệu F là biến ngẫu nhiên chỉ số xuất hiện khi tung con xúc sắc và Z là biến ngẫu nhiên j^F.

2) Chứng minh rằng ta luôn có $Z \in \{1, j, j^2\}$ và

$$P(Z = 1) = P(Z = j) = P(Z = j^2) = \frac{1}{3}.$$

Xét số nguyên $n \geq 1$ và tung con xúc sắc n lần độc lập với nhau. Ký hiệu F_k là kết quả của lần tung thứ k và đặt $Z_k = j^{F_k}$. Đặt $S_n = Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n$ và $p_n = P(S_n = 0)$.

Gọi U_n, V_n, W_n lần lượt là các biến ngẫu nhiên chỉ số các số $k \in [1; n]$ mà

$$Z_k = 1, Z_k = j, Z_k = j^2.$$

3) a) Tính $U_n + V_n + W_n$.

b) Chứng minh rằng

$$S_n = U_n + jV_n + j^2W_n.$$

c) Chứng minh rằng nếu $S_n = 0$ thì $U_n = V_n = W_n$.

d) Từ đó chứng minh rằng nếu n không chia hết cho 3 thì $p_n = 0$.

4) Giả sử rằng n có dạng $3m$ với m là số nguyên dương.

a) Chứng minh rằng U_n là một phân phối nhị thức. Xác định các tham số tương ứng của phân phối này.

b) Từ đó suy ra rằng

$$P(U_n = m) = \binom{3m}{m}\frac{2^{2m}}{3^{3m}}.$$

Ký hiệu $P_{U_n=m}(V_n = m)$ là xác suất có điều kiện của biến cố $V_n = m$ cho biết trước $U_n = m$.

c) Chứng minh rằng

$$P_{U_n=m}(V_n = m) = 2^{-2m}\binom{2m}{m}.$$

d) Từ đó suy ra

$$p_{3m} = 3^{-3m}\binom{3m}{m}\binom{2m}{m}.$$

e) Chứng minh rằng

$$\frac{p_{3m+3}}{p_{3m}} = \frac{(3m+2)(3m+1)}{9(m+1)^2}.$$

5) Với mọi số nguyên dương $m \geq 1$, chứng minh rằng

$$\frac{m}{m+1} \leq \frac{p_{3m+3}}{p_{3m}} \text{ và } p_{3m} \geq \frac{2}{9m}.$$

Đặt X_n là biến ngẫu nhiên chỉ số các số nguyên $k \in [1, n]$ sao cho $S_k = 0$.

6) a) Xác định biến ngẫu nhiên Bernoulli Y_k với $1 \leq k \leq n$ thỏa mãn

$$X_n = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n.$$

b) Ký hiệu $E(X_n), E(Y_1), E(Y_2), \ldots, E(Y_n)$ là giá trị kỳ vọng của các biến X_n, Y_1, $Y_2, \ldots, Y_n$ theo thứ tự đó. Cho biết rằng $E(X_n) = E(Y_1) + E(Y_2) + \cdots + E(Y_n)$, hãy chứng minh

$$E(X_n) = p_1 + p_2 + \cdots + p_n.$$

c) Từ đó suy ra

$$\lim_{n\to+\infty} E(X_n) = +\infty.$$

Đặt $q_n = P(X_n > 0)$, câu hỏi tiếp theo yêu cầu chứng minh rằng q_n hội tụ về 1.

7) a) Chứng minh rằng dãy số (q_n) hội tụ về một số thực q với $q_n \leq q \leq 1$ với mọi n.

b) Với r, n là các số tự nhiên, chứng minh rằng

$$P(X_n \geq r) \leq q^r.$$

c) Từ đó suy ra với mọi số nguyên $n \geq 1$, ta có

$$E(X_n) \leq q + q^2 + \cdots + q^n.$$

d) Rút ra kết luận.

Chia đoạn thẳng

Bài toán được đề xuất bởi A.K.Tolpygo, K.K.Kokhas và A.Mogileva cho Hội nghị mùa hè, cuộc thi giữa các thành phố năm 2014.

Ở số này chúng tôi xin được giới thiệu lời giải cho các bài toán đã được đăng ở số 4 của tạp chí, để tiện cho việc theo dõi của độc giả chúng tôi xin được đăng lại phần đề bài.

1. Dẫn nhập

Chọn số α, trên đoạn $[0, 1]$ ta đánh dấu các điểm $\{\alpha\}$, $\{2\alpha\}$, $\{3\alpha\}, \ldots, \{(n-1)\alpha\}$.

Trong suốt bài này, nếu như không nói điều ngược lại, ta sẽ giả sử rằng α vô tỷ. Nếu như $\alpha = \dfrac{p}{q}$, ta sẽ giả sử rằng $p < q$. Như vậy, cho dù α bằng bao nhiêu, không có hai điểm nào trùng nhau.

Như thế, đoạn $[0, 1]$ sẽ được chia thành n phần. Tiếp theo ta sẽ giả sử $n > 10$ và $0,3 < \{\alpha\} < 0,7$. Các hạn chế này thực ra không quan trọng, ta đưa ra các điều kiện này để loại bỏ các hiệu ứng hiển nhiên cho các số nhỏ. Nhưng từ điều kiện này có thể suy ra là mọi phần đều nhỏ hơn α.

Ta cũng chú ý rằng nếu như thay α bằng $n+\alpha$ hay $n-\alpha$ thì các phần vẫn như vậy. Vì vậy trong các bài toán, trong đó nói về tính duy nhất, ta có thêm điều kiện $0 < \alpha < \dfrac{1}{2}$.

Nội dung của bài toán – nghiên cứu xem ta có những phần như thế nào và chúng sắp xếp ra sao.

Các bài toán

- Tỷ lệ giữa đoạn dài nhất và đoạn ngắn nhất ta ký hiệu là $L = L(\alpha, n)$.

A1. *Giả sử $\alpha = \dfrac{p}{q}$ là số hữu tỷ. Chứng minh rằng tồn tại n sao cho $L(n) = 1$.*

A2. *Với những số nguyên hay hữu tỷ k nào, $k > 1$ ta có thể khẳng định rằng với mọi số hữu tỷ α, tồn tại n sao cho $L(n) = k$?*

Lời giải. $L = 2$ và $L = 3$. Các số khác không thỏa mãn như có thể dễ dàng đưa ra các ví dụ: Chẳng hạn nếu lấy $\alpha = \dfrac{5}{12}$ và $\alpha = \dfrac{4}{13}$, thì chúng không có giá trị L nào giống nhau ngoài hai giá trị nói trên. □

- Tiếp theo ta không giả sử α hữu tỷ nữa.

B1. *Chứng minh rằng cho dù n bằng bao nhiêu, trong các phần có không quá 3 độ dài khác nhau (và cũng hiển nhiên là nếu α vô tỷ thì có ít nhất 2 độ dài khác nhau).*

Lời giải. Xét một đoạn thẳng mà ta thu được ở bước thứ n. Giả sử đầu mút của nó là các điểm $\{k\alpha\}, \{l\alpha\}$. Hiển nhiên là đoạn thẳng này cũng có độ dài bằng với độ dài các đoạn giới hạn bởi các điểm $\{(k-1)\alpha\}$, $\{(l-1)\alpha\}$, $\{(k-2)\alpha\}$ và $\{l-2)\alpha\}, \ldots$ Vì chuỗi này hữu hạn nên trong đó có phần tử đầu tiên, chẳng hạn đó là $\{(k-s)\alpha\}$ và $\{(l-s)\alpha\}$. Hiển nhiên chỉ có 3 nguyên nhân tại sao không có đoạn thẳng trước đó:

- hoặc $k = s$,
- hoặc $l = s$,
- hoặc, cuối cùng, đoạn thẳng $\{(k-s-1)\alpha\}, \{(l-s-1)\alpha\}$ tồn tại nhưng đã bị chia ra thành 2 phần. Trong trường hợp cuối nó chỉ có thể bị chia ra bởi điểm $n\alpha$, nếu không đoạn thẳng với đầu mút là $\{(k-s)\alpha\}$ và $\{(l-s)\alpha\}$ cũng đã bị chia ra.

Hai chuỗi đầu luôn tồn tại, còn chuỗi thứ ba có thể không tồn tại. Từ đây mà ta có hoặc 2, hoặc 3 chuỗi mà trong mỗi chuỗi độ dài các đoạn thẳng bằng nhau như yêu cầu.

Từ đây cũng suy ra rằng các đoạn thẳng của chuỗi thứ ba (nếu chúng tồn tại) sẽ có độ dài bằng tổng độ dài hai đoạn thẳng của hai chuỗi còn lại. Như vậy, độ dài các đoạn thẳng luôn bằng $a < b < (a+b)$ trong đó độ dài thứ ba có thể không có.

Từ đây cũng suy ra rằng điểm mới sẽ luôn chia đoạn thẳng dài nhất có độ dài $a+b$ ra 2 phần a, b (trong trường hợp ngược lại ta sẽ có 4 độ dài khác nhau, là điều không thể).

Bây giờ ta nghiên cứu câu hỏi số L sẽ thay đổi như thế nào khi chuyển từ n lên $n+1$. Từ những điều đã nói ở trên rõ ràng là số n vẫn là số bậc 3 nếu như vẫn còn các đoạn thẳng dạng $(a+b)$, và vào thời điểm khi đoạn thẳng cuối cùng như thế biến mất, sẽ chỉ còn lại a và b, tức là số sẽ trở thành bậc 3. Khẳng định:

(a) Nếu n và $n+1$ là các số bậc 3 thì L không thay đổi.

(b) Khi chuyển từ số bậc 3 sang số bậc 2 (n – bậc 3, $(n+1)$– bậc 2) L chuyển thành $L-1$.

(c) Không có sự chuyển đổi từ số bậc 2 sang số bậc 2.

(d) Khi chuyển từ số bậc 2 sang số bậc 3 có hai trường hợp. Giả sử $a < b$ là độ dài các đoạn ngắn và đoạn dài của n. Khi đó:

  (d_1) Nếu $a < \frac{b}{2}$ thì L không thay đổi.

  (d_2) Nếu $a > \frac{b}{2}$ thì L đổi thành $\frac{L}{L-1}$.

Thật vậy:

(a) Trong trường hợp thứ nhất, các đoạn thẳng lúc đầu và sau đó vẫn thế, có độ dài là: $a, b, a+b$.

(b) Trong trường hợp thứ hai đoạn thẳng có độ dài $a+b$ biến mất, chỉ còn lại $a<b$ và nếu trước đó $L=\dfrac{a+b}{a}$ thì bây giờ $L=\dfrac{b}{a}$.

(c) Trong trường hợp thứ 3 cần nhắc lại giả thiết của chúng ta là $n>10$ và $0,3<\{\alpha\}<0,7$ (nếu không có điều này thì khẳng định không đúng).

(d) Cả hai trường hợp (d_1), (d_2) đều được xét giống như (a) và (b).

□

- Với số α đã cho ta sẽ nói số n là bậc hai nếu chỉ có 2 độ dài khác nhau và bậc ba nếu có 3 độ dài khác nhau.

B2. *Cho α là số vô tỷ, chứng minh rằng khi đó tồn tại vô số n bậc hai và vô số n bậc ba.*

B3. *Cho số vô tỷ α, và n chạy qua các giá trị $n=1,2,\ldots,m$. Chứng minh rằng $m\to\infty$, thì tỷ lệ số bậc hai trong chúng dần đến 0.*

Gọi $\phi(m)$ là số các số bậc 2 trong các số $n=1,2,\ldots,m$. Hãy đánh giá tốc độ dần đến 0 của tỷ số $\dfrac{\phi(m)}{m}$ khi $m\to\infty$.

Lời giải. Từ các lý luận trong bài **B1** ta thấy rằng tiếp sau một số bậc 2, số bậc 3 sẽ đúng bằng số các đoạn thẳng dài nhất. Vì số các đoạn thẳng tăng vô hạn, khá hiển nhiên là số các đoạn thẳng có độ dài lớn nhất cũng dần đến vô cùng, và đó là điều ta cần. □

B4. *Số α phải bằng bao nhiêu để tỷ lệ này tiến đến 0 chậm nhất có thể? Nhanh nhất có thể ? (Chỉ cần đưa ra một số ví dụ, nhưng phải thuyết phục).*

B5. *Hãy đánh giá chặn trên và chặn dưới số các số bậc hai trong 1 triệu số đầu tiên (càng đúng càng tốt, đánh giá "lớn hơn 3" không được chấp nhận).*

Lời giải. Đánh giá chặn trên: Không quá 500.000 - và đánh giá này không thể làm chặt hơn. Để thu được số lượng các số bậc 2 như vậy, ta cần chọn $\alpha=\dfrac{1}{2}-\epsilon$ với $\epsilon<\dfrac{1}{10^6}$. Trong trường hợp nãy dễ thấy một nửa là số bậc 2.

Từ đây cũng suy ra rằng tỷ lệ các số bậc 2 có thể tiến đến 0 một cách rất chậm. Cụ thể hơn, trong khi chúng ta có nhiều số bậc 2 ở 1 triệu số đầu tiên thì sau đó chúng xuất hiện ít hơn. Nhưng nếu như ta lấy tiếp theo là $\alpha=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{10^6}-\epsilon$ với $\epsilon<\dfrac{1}{10^{18}}$ thì chúng sẽ đi rất lâu với tần xuất "*một phần* $\dfrac{1}{10^6}$", tức là đến một lúc nào đó thì tỷ lệ này là ổn định. Rõ ràng cấu trúc như vậy có thể tiếp tục, lấy ví dụ $\alpha=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{10^6}-\dfrac{1}{10^{10^6}}-\epsilon\ldots$ Ở đây ở mỗi bước chuyển tỷ lệ số bậc hai, sự thật là, sẽ giảm một cách đáng kể nhưng sau đó thì RẤT, RẤT lâu trở thành không đổi. Và chính điều này có nghĩa là dãy sẽ dẫn đến 0 rất chậm.

Đối với việc tiến đến 0 nhanh nhất thì có những số α, mà đối với những số đó tỷ lệ này giảm theo logarit (ví dụ sẽ được cho dưới đây), và có lẽ đây là tốc độ lớn nhất. Đây là tốc độ giảm lớn vì điều này có nghĩa là trong 1 triệu số đầu tiên chỉ có khoảng $\ln 10^6$ số bậc 2. □

C1. *Tồn tại hay không số α, sao cho $L > 10$ với mọi n, bắt đầu từ $n = 10$?*

Lời giải. Không tồn tại, vì từ các công thức biến đổi số L ta thấy rằng nó luôn nhận giá trị nhỏ hơn 2. □

C2. *Với $n = 2000000$. Có thể xảy ra trường hợp trên đoạn $\left[a, a + \frac{1}{2}\right]$ nào đó có hơn 1100000 điểm ? (Nhắc lại là theo giả thiết, ta có $0,3 < \alpha < 0,7$).*

Lời giải. Có, và đây là ví dụ: Giả sử $\alpha = \frac{1}{3} + \epsilon$ trong đó ϵ rất nhỏ. Khi đó tất cả 2 triệu điểm nằm gần 3 điểm gồm điểm 0, điểm $\frac{1}{3}$ và điểm $\frac{2}{3}$. Tương ứng trên đoạn $[0.3, 0.8]$ sẽ chứa khoảng $\frac{2}{3}$ tất cả các điểm lớn hơn 10^6 rất nhiều. □

C3. *Tồn tại hay không α, sao cho L nhận:*

- *Vô hạn.*
- *Hữu hạn các giá trị khác nhau khi n chạy qua các giá trị từ 10 đến ∞. Nếu tồn tại, hãy đưa ra các ví dụ.*

Lời giải. Có, tồn tại cả loại này và loại kia. Ví dụ, nếu $\alpha = \sqrt{2}$ thì L nhận chỉ 3 giá trị khác nhau (ví dụ này sẽ được xét chi tiết ở bên dưới). Mặt khác, nếu L nhận một giá trị siêu việt nào đó (ví dụ $L = \pi$) thì L có thể biến đổi khi thì thành $L - 1$, khi thì thành $\frac{L}{L-1}$ và ta thấy luôn nhận được những số khác, tức là chúng sẽ có vô hạn giá trị. □

C4. *Hãy đưa ra các điều kiện đủ nào đó để L nhận hữu hạn (vô hạn) các giá trị (nếu có thể, hãy tìm điều kiện cần và đủ, nhưng có thể giới hạn các điều kiện nào đó).*

Lời giải. Nếu như L chỉ nhận hữu hạn giá trị thì đến một lúc nào đó các giá trị của L sẽ vào vòng lặp: Các giá trị đã xuất hiện trước đó sẽ lặp lại.

Nhưng nếu sau một số lần biến đổi (mà chúng ta biết rằng có dạng hoặc $L \to L - 1$ hoặc $L \to \frac{L}{L-1}$ ta lại thu được giá trị L đã gặp trước đó thì dễ thấy L phải thỏa mãn một phương trình bậc 2 với hệ số nguyên.

Như vậy đây là điều kiện cần và tương ứng, nếu L không phải là nghiệm của phương trình bậc hai (ví dụ như nếu L siêu việt) thì điều này đủ để L nhận vô số giá trị.

Điều kiện đủ để L nhận hữu hạn giá trị, ví dụ có thể là điều kiện: $L^2 - (n + 2)L + n = 0$.

Ví dụ số $\sqrt{3}$ và số τ mà chúng ta xét ở các bài toán dưới đây thỏa mãn điều kiện này. □

D1. Chứng minh rằng với mọi số vô tỷ α cho trước tồn tại giá trị mà L nhận hơn 1000 lần (với những giá trị n khác nhau).

Lời giải. L sẽ liên tiếp nhận một giá trị cho đến khi ta gặp số bậc 3, nói cách khác số lần sẽ bằng số đoạn thẳng dài xuất hiện ở nước đi hiện tại. Nhưng số những đoạn thẳng như thế dần đến vô cùng (như đã nói ở lời giải bài **B3**).

Hiển nhiên là khi số đoạn thẳng dần đến vô cùng thì số "đoạn thẳng dài" cũng dần đến vô cùng. □

D2. Một cách logic, có thể xảy ra ba trường hợp:

(1) Dù α bằng bao nhiêu, tồn tại giá trị sao cho L nhận vô số lần.

(2) Dù α bằng bao nhiêu, L nhận mọi giá trị chỉ hữu hạn lần.

(3) Với một số α điều này đúng, còn với những α khác điều kia đúng.

Điều này trên đây đúng ? Nếu như điều thứ (3) đúng thì với α điều (1) đúng, với α điều (2) đúng?

Lời giải. Xảy ra điều thứ ba. □

D3. Giả sử rằng với α nào đó L nhận mỗi giá trị A và B ít nhất một lần (với $n > 10$). Liệu hai khẳng định sau có tương đương:

(a) L nhận giá trị A hữu hạn lần.

(b) L nhận giá trị B hữu hạn lần ?

Lời giải. Không, không đúng. Ví dụ nếu như ban đầu L nhận giá trị $\dfrac{100+\sqrt{2}}{99+\sqrt{2}}$. Vì số này nhỏ hơn 2 nên giá trị tiếp theo của L phải được tính theo công thức $\dfrac{L}{L-1}$, và có nghĩa là giá trị tiếp theo của L là $100+\sqrt{2}$. Tiếp theo L sẽ lần lượt nhận các giá trị $99+\sqrt{2}$, $98+\sqrt{2}$, $\ldots$, $\sqrt{2}$. Sau đó L chỉ nhận các giá trị $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}+1$, $\sqrt{2}+2$ (và không còn giá trị nào khác), và các giá trị này đều được nhận vô hạn lần. □

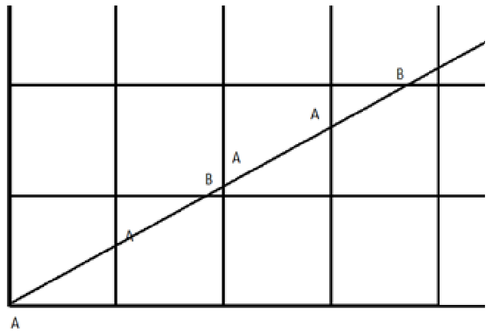
2. Các bài toán liên quan

Phần này, ta chủ yếu xét các bài toán liên quan đến các giá trị cụ thể của α.

- Ký hiệu τ là tỷ số vàng: $\tau = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618\ldots$

E1. Ta đưa ra 3 phương pháp viết dãy các ký tự $AABAABABAAB\ldots$ Hãy chứng minh rằng cả ba phương pháp cho ra các kết quả giống nhau (một cách chính xác hơn mệnh đề sẽ được phát biểu bên dưới đây).

Các phương pháp như sau:



(1) Trên lưới ô vuông kẻ một tia, nó bắt đầu từ một nút lưới và tạo một góc bằng τ với đường nằm ngang của lưới.

Tại điểm nút đầu tiên ta viết ký tự A, sau đó viết các ký tự vào các điểm giao của tia với các đường thẳng của lưới: Ký tự A đánh dấu giao điểm với các đường thẳng đứng, ký tự B đánh dấu các giao điểm với đường nằm ngang (xem hình).

(2) Đầu tiên ta viết ký tự A, sau đó thực hiện một số bước, ở mỗi bước, ký tự A được thay bởi AAB, còn ký tự B được thay bởi AB. Ví dụ sau 3 bước ta thu được

- Đầu tiên là AAB,
- sau đó là $AABAABAB$,
- và ở bước thứ ba $AABAABABAABAABABAABAB$.

Chứng minh rằng mỗi một dãy số thu được bằng cách nói trên là đoạn đầu của dãy số được định nghĩa ở (1).

(3) Đoạn $[0, 1]$ được chia bằng phương pháp đã mô tả ở phần dẫn nhận với, trong đó $\alpha = \tau$.

Dãy số được xác định như sau: Với mọi n là số bậc 2, ta viết theo thứ tự độ dài các đoạn thẳng bắt đầu từ cuối (tức là từ 1), đoạn dài ký hiệu là A, đoạn ngắn là B.

Chứng minh rằng trong số các dãy số hữu hạn, có vô số các dãy số là đoạn đầu của dãy số ở (1). Các dãy số này với $n_1 = 3 < n_2 = 8 < \cdots$ là những dãy số nào ?

Lời giải. Ta sẽ đưa các định nghĩa 1 và 3 về 2.

Định nghĩa 1. Ta nâng điểm A đang nằm ở đường thẳng đứng thứ k lên thêm k đơn vị. Hiển nhiên tất cả các điểm này sẽ trơi vào một đường thẳng tạo với trục hoành góc $\operatorname{arctg}\tau$ (chứ không phải $\operatorname{arcctg}\tau$). Mặt khác, nếu sau đó ta đặt tất cả các điểm B, như yêu cầu, thì giữa hai chữ A sẽ có đúng một điểm B. Ta thực hiện phép biến đổi thứ hai: Tất cả các chữ A thay bằng B, tất cả các chữ B thay bằng A.

Như vậy, dãy của chúng ta sẽ biến đổi theo quy luật: Thay A bằng BA và B bằng A. Kết quả hiển nhiên dãy của chúng ta sẽ không thay đổi bởi vì nếu ta lấy đối xứng hình qua đường chéo (đường thẳng $y = x$) thì tia của chúng ta trở về vị trí cũ. Bây giờ chỉ cần chú ý rằng nếu ta thực hiện phép đổi hình hai lần thì A sẽ được thay bằng AAB và B thay bằng AB mà dãy một lần nữa lại không đổi.

Ghi chú. Về bản chất chúng ta đã chứng tỏ rằng biến đổi $A \to AAB,\ B \to AB$ "*có thể biểu diễn dưới dạng tích*": Đầu tiên ta thực hiện biến đổi $A \to BA,\ B \to A$ và sau đó $A \to AB,\ B \to A$ ta thu được biến đổi đã cho.

Định nghĩa 3. Ta lý luận tương tự. Giả sử N là số bậc 2. Điều này có nghĩa là có r đoạn thẳng dài độ dài a và s đoạn thẳng ngắn độ dài $\frac{a}{\tau}$, $r + s = N$. Khi đó số bậc 2 tiếp theo $M = N + r$ và khi di chuyển về số này, ta chia mỗi đoạn thẳng dài dài ra đoạn ngắn và "*ngắn nhất*" có độ dài thêm τ lần nhỏ hơn.

Khi vòng lặp này kết thúc, ta bắt buộc phải đổi đoạn thẳng ngắn cũ thành đoạn thẳng dài. Trong đó đoạn thẳng "*dài cũ*" sẽ được tác ra thành "dài – ngắn", hoặc "ngắn - dài". Đây chính là các biến đổi đã được mô tả trong phần nhận xét của lý luận ở phần trước. Từ đây ta cũng thấy rõ ràng là tại sao không phải số bậc 2 nào cũng được: Ta phải lấy nhảy cách 1 để thu được "*bình phương*" của phép biến đổi này. □

E2. Dãy số được xác định theo quy tắc ở trên. Giả sử ta lấy hai khúc, mỗi khúc có n ký tự: Từ ký tự thứ $k + 1$ đến ký tự thứ $k + n$ và từ ký tự thứ $m + 1$ đến ký tự thứ $m + n$. Chứng minh rằng số các ký tự A ở trong các khúc này gần bằng nhau, cụ thể là: Số các ký tự A ở mỗi khúc cách nhau không quá 1.

Lời giải. Ta sử dụng định nghĩa 1. Giả sử rằng khẳng định không đúng. Khi đó trên tia sẽ tồn tại hai đoạn thẳng có số chữ cái bằng nhau, nhưng ở đoạn này có số chữ cái B nhiều hơn hay bằng 2 so với đoạn kia (và số chữ cái A tương ứng sẽ ít hơn).

Nhưng nếu trên một đoạn có nhiều hơn 2 chữ cái B thì hình chiếu của nó lên trục tung lớn hơn. Tương ứng, nếu trên đó có ít hơn hai chữ cái A thì hình chiếu của nó lên trục hoàng nhỏ hơn. Mâu thuẫn là hiển nhiên. □

E3. Hãy tìm thêm một dãy nào đó mà có thể được xây dựng bằng ba phương pháp tương tự (hay ít nhất là hai).

Lời giải. Điểm mấu chốt trong lời giải bài toán 1 là sự kiện khi "*nâng*" các giao điểm của tia với các đường thẳng đứng lên một số đơn vị tương ứng ta sẽ thu được tia đối xứng với tia ban đầu. Nhưng ta có thể nâng điểm nằm ở đường thẳng đứng thứ k không phải lên k đơn vị, mà $2k$ đơn vị thì dễ thấy tia nhận được sẽ đối xứng với tia ban đầu nếu α thỏa mãn phương trình

$$\alpha^2 + 2\alpha - 1 = 0.$$

Tất nhiên là có nhiều cách xây dựng khác nữa. □

- Trong chuỗi bài toán sau ta lấy $\alpha = \tau$.

P1. Tìm tất cả các giá trị có thể của L (với các n khác nhau).

P2. L có thể nhận giá trị nào đều n là số bậc 2 ?

Lời giải. Nếu $n = 2$, thì ta có hai đoạn thẳng và tỷ số hai đoạn thẳng là tỷ lệ vàng. Tiếp theo, theo công thức đã đưa ra ở đầu (trong lời giải bài **B1**), L chỉ có thể thay bằng $\frac{L}{L-1} = L^2 = L + 1$. Giá trị tiếp theo của nó là $(L + 1) - 1 = L, \ldots$ Từ đây ta thấy rằng L chỉ nhận 2 giá trị, và nếu như còn có thêm n là số bậc 2 thì L nhận giá trị duy nhất $L = \tau$. □

P3. Tìm tất cả các số bậc 2.

P4. Tìm số các số bậc 2 trong 1 triệu số đều tiên nếu $\alpha = \tau$. Chỉ cần đáp số chính xác đến 10%.

Lời giải. Các số bậc hai đối với α đã cho là các số Fibonacci, tức là các số $2, 3, 5, 8, 13, \ldots$ (mỗi số tiếp theo bằng tổng hai số trước đó).

Số Fibonacci thứ k xấp xỉ bằng τk, và số lượng của chúng trong 1 triệu số đầu tiên gần bằng $\log 10^6$ theo cơ số τ, tức là khoảng 28.

Tất nhiên là ta có thể viết rõ ra 30 số Fibonnaci đầu tiên. Số thứ 28 bằng 832040, còn số thứ 29 đã lớn hơn 1 triệu. □

- Trong chuỗi bài toán sau ta lấy $\alpha = \sqrt{2} \approx 1,4142...$

T1. Tìm tất cả các giá trị có thể của L (với các n khác nhau).

T2. L có thể nhận giá trị nào đều n là số bậc 2 ?

Lời giải. Bài toán này tương tự với bài toán trước. Vì giá trị ban đầu của L (khi $n = 2$) bằng $\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}$, và các giá trị tiếp theo L sẽ bằng hoặc $\sqrt{2}$, hoặc $\sqrt{2} + 1$ hoặc $\sqrt{2} + 2$ (với các số n bậc 2 thì chỉ có hai giá trị đầu). □

T3. Tìm tất cả các giá trị có thể của L cho một số nào đó khác (ngoài $\alpha = \tau$ và $\alpha = \sqrt{2}$).

K1. Ta không biết số α. Nhưng ta biết rằng dù n bằng bao nhiêu, số L chỉ nhận một trong hai giá trị. Với những α nào điều này có thể?

Lời giải. Từ các lý luận trước đây ta thấy rằng L cần thỏa mãn điều kiện $\frac{L}{L-1} - 1 = L$, từ đây L là phép chia vàng. Từ đây dễ dàng tìm được α. □

K2. Bài toán để nghiên cứu. Ta biết số α nhưng ta biết rằng với n lớn tùy ý, số điểm trên mọi đoạn có độ dài $\frac{1}{2}$ khác với $\frac{n}{2}$ không lớn hơn 10. Ta có thể nói gì về số α ? Cụ thể:

- Hãy nêu ví dụ một vài số như thế.
- Hãy đưa ra một dấu hiệu đủ nào đó để điều này không xảy ra: Nếu α có tính chất này và tính chất này thì khẳng định bài toán không đúng.
- Hãy đưa ra dấu hiệu nào đó để có thể khẳng định số điểm trên mọi đoạn độ dài $\frac{1}{2}$ nằm trong phạm vi từ a đến b với các số a, b nào đó ($a < \frac{1}{2} < b$ và ta muốn các số này càng gần $\frac{1}{2}$ càng tốt).

K3. Cho số hữu tỷ $\alpha = \dfrac{113}{248}$ và n nhận các giá trị $n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 246$. Trong các số này có bao nhiều số bậc 2, bao nhiêu số bậc 3 ?

Lời giải. Khai triển số đã cho thành liên phân số (với số $\dfrac{113}{248}$ thì khai triển này có dạng

$$\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{3}}}}.$$

Khi đó số bậc 2 sẽ xuất hiện cách k, trong đó k là mẫu số của phân số thành phần của liên phân số, tức là các phân số

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2+\frac{1}{5}} = \frac{5}{11},\ \frac{1}{2+\frac{1}{5+\frac{1}{7}}} = \frac{36}{79},\ \ldots$$

Như vậy, các số bậc hai đầu tiên sẽ cách 1 (tức là tất cả, với $n = 2$ và $n = 3$), sau đó là dãy số bậc 2 cách 2, sau đó là dãy cách 11 và cách 79. Trong đó số các số bậc 2 trong dãy sẽ bằng mẫu số tương ứng của phân số ban đầu, tức là ở dãy đầu có 2 số, sau là 5 số và 7 số.

Nếu như số α vô tỷ thì điều này sẽ tiếp tục cho đến vô cùng, nhưng đối với số hữu tỷ thì ở cuối sẽ có quy luật khác: Tất cả các số, bắt đầu từ 169 sẽ có bậc 2.

Đáp số:

- Số 2.
- Số $3, 5, 7, 9, 11$.
- Số $13, 24, 35, \ldots$ cho đến 90.
- Cuối cùng, tất cả các số từ 169 đến 248.

□

K4. Hãy nêu ra phương pháp cho phép với số hữu tỷ α cho trước

$$\alpha = \frac{p}{q},\ p < q < 1000000,$$

tìm được số số bậc 2 và số số bậc 3, khi n chạy qua các giá trị từ 1 đến $q - 1$, trong thời gian cho phép (bằng tay).

K5. Cho số $L = L(100, \alpha)$.

Làm sao có thể xác định với mọi giá trị có thể của n và α cho trước tồn tại hữu hạn hay vô hạn các giá trị khác nhau của L ?

Nói riêng, nghiên cứu câu hỏi này ở các trường hợp sau:

(1) Nếu L là nghiệm của phương trình bậc 2 với hệ số nguyên

$$L^2 + nL + m = 0.$$

(2) Nếu L là nghiệm của phương trình bậc 3 với hệ số nguyên

$$L^3 + nL^2 + mL + q = 0.$$

K6. Biết rằng số α được viết thành liên phân số với các mẫu số đầu tiên là $3,\ 5,\ 12$ tức là

$$\alpha = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{12} + \cdots}}}.$$

Hãy tìm tất các các số bậc 2 nằm giữa 1 và 100.

VỀ KỲ THI VIỆT NAM TST 2016 VÀ DANH SÁCH ĐỘI TUYỂN VIỆT NAM

Ban Biên tập Epsilon

Kỳ thi chọn đội tuyển Việt Nam tham dự Olympic Toán quốc tế (viết tắt là IMO) 2016 diễn ra trong 2 ngày 24, 25 tháng 3. Đề thi gồm 6 bài toán, mỗi ngày 3 bài làm trong 4 giờ 30 phút. Các bài toán thuộc 4 phân môn Đại số, Hình học, Số học và Tổ hợp với mức độ khó dễ khác nhau. Cụ thể phân bố các bài toán như sau.

- Bài 1: Số học.
- Bài 2: Nằm giữa tổ hợp và đại số.
- Bài 3: Hình học.
- Bài 4: Hình học.
- Bài 5: Tổ hợp và Đại số.
- Bài 6: Đại số.

Năm nay, có tổng số 50 thí sinh tham gia kỳ thi này, gồm Vũ Xuân Trung, học sinh lớp 12 trường THPT chuyên Thái Bình, tỉnh Thái Bình, là thí sinh được HCV tại IMO 2015 cùng 49 học sinh được từ 27,5 điểm trở lên tại kỳ thi HSG quốc gia diễn ra vào đầu năm nay. Dưới đây là đề thi đầy đủ.

1. Đề thi

Bài 1.1. *Tìm a, n nguyên dương với $a > 2$ để mỗi ước nguyên tố của $a^n - 1$ cũng đều là ước nguyên tố của $a^{3^{2016}} - 1$.*

Bài 1.2. *Gọi A là tập hợp 2000 số nguyên phân biệt và B là tập hợp 2016 số nguyên phân biệt và K là số cặp (m, n) có thứ tự với m thuộc A và n thuộc B mà*

$$|m - n| \leq 1000.$$

Tìm giá trị lớn nhất của K.

Bài 1.3. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) có B, C cố định và A chuyển động trên cung BC của (O). Các phân giác AD, BE, CF giao nhau tại I. Đường tròn qua D tiếp xúc với OA tại A cắt (O) tại G. GE, GF giao (O) lần thứ hai tại M, N. BM giao CN tại H.*

1. *Chứng minh rằng AH đi qua một điểm cố định.*

2. *Giả sử BE, CF giao (O) lần lượt tại K, L. Đường thẳng AH cắt KL tại P. Giả sử Q là một điểm trên EF sao cho $QP = QI$. Gọi J là điểm nằm trên (BIC) sao cho $IJ \perp IQ$. Chứng minh rằng trung điểm IJ chuyển động trên một đường tròn cố định.*

Bài 1.4. *Cho tam giác ABC nhọn có $\angle ACB < \angle ABC < \angle ACB + \dfrac{\angle BAC}{2}$. Lấy điểm D thuộc cạnh BC sao cho $\angle ADC = \angle ACB + \dfrac{\angle BAC}{2}$. Tiếp tuyến với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại A cắt BC tại E. Phân giác $\angle AEB$ cắt AD và cắt (ADE) tại G và F, DF giao AE tại H.*

1. *Chứng minh rằng các đường tròn đường kính AE, DF, GH có một điểm chung.*

2. *Trên phân giác ngoài $\angle BAC$ và trên tia AC lần lượt lấy các điểm K và M sao cho $KB = KD = KM$, trên phân giác ngoài $\angle BAC$ và trên tia AB lần lượt lấy các điểm L và N sao cho $LC = LD = LN$. Đường tròn đi qua M, N và trung điểm I của BC cắt BC tại P ($P \neq I$). Chứng minh rằng BM, CN, AP đồng quy.*

Bài 1.5. *Cho $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ ($n \geq 3$), trong đó mỗi số a_i nhận giá trị là 0 hoặc 1. Xét n bộ số như sau:*

$$\begin{aligned} S_1 &= (a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n),\\ S_2 &= (a_2, a_3, \ldots, a_n, a_1),\\ &\ldots\\ S_n &= (a_n, a_1, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}) \end{aligned}$$

Với mỗi bộ số $r = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$, đặt

$$\omega(r) = b_1 \cdot 2^{n-1} + b_2 \cdot 2^{n-2} + \ldots + b_n \cdot 2^0.$$

Giả sử các số $\omega(S_1); \omega(S_2), \ldots, \omega(S_n)$ nhận đúng k giá trị phân biệt.

1. *Chứng minh rằng $k \mid n$ và $\dfrac{2^n - 1}{2^k - 1} \mid \omega(S_i)$ với mọi $i = \overline{1, n}$.*

2. *Kí hiệu M và m lần lượt là max và min của $\omega(S_1), \omega(S_2), \ldots, \omega(S_n)$. Chứng minh rằng $M - m \geq \dfrac{(2^n - 1)(2^{k-1} - 1)}{2^k - 1}$.*

Bài 1.6. *Cho các số thực phân biệt là $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{16}$. Với mỗi đa thức hệ số thực $P(x)$, ta đặt*

$$V(P) = P(\alpha_1) + P(\alpha_2) + \ldots + P(\alpha_{16}).$$

Chứng minh rằng tồn tại duy nhất đa thức $Q(x)$ bậc 8 có hệ số x^8 bằng 1 thỏa mãn đồng thời hai điều kiện:

1. *$V(QP) = 0$ với mọi đa thức P có bậc bé hơn 8.*

2. *$Q(x)$ có 8 nghiệm thực (tính cả bội).*

2. Nhận xét chung.

Về độ khó thì bài 6 là khó nhất do là một bài toán lấy tư tưởng của toán cao cấp đem xuống (cụ thể là đại số tuyến tính). Để giải bài toán này, học sinh phải vừa bắt được hướng đi quy nạp, tư tưởng trực giao hóa Gram-Schmidt (hay tư tưởng tương tự) vừa phải có kỹ năng xử lý kỹ thuật rất tốt. Bài thứ hai là bài 3b với một cấu hình rất rối theo dạng hình chồng hình.

Các bài toán còn lại về cơ bản có độ khó ngang nhau, làm được hay không là tùy thuộc vào gu của các thí sinh. Bài số học là một bài toán có ý tưởng khá cũ mà lời giải chủ yếu dựa vào bổ để $(a^m - 1, a^n - 1) = a^{(m,n)} - 1$. Đó là chưa kể nếu dùng đến định lý Zsigmondy thì bài toán gần như hiển nhiên.

Bài tổ hợp số 2 cũng là một bài mà kết quả có thể đoán được dễ dàng. Bài hình số 4 là một bài toán khá đẹp và vừa sức, mang tính phân loại cao. Bài 5 lại tiếp tục là một bài toán thuần túy kỹ thuật. Chú ý là bài số 2 và bài số 5 tuy không khó nhưng để trình bày chặt chẽ thì khó hơn bài số 1 nhiều.

Có lẽ chính vì lý do đó nên mặc dù về lý thuyết thì số học sinh làm được 4 bài, 4 bài rưỡi là khá nhiều nhưng thực tế thì chỉ có 3 bạn có số điểm 27 trở lên (tức là coi như làm được 4 bài trở lên) và điểm chuẩn để vào đội tuyển chỉ là 23.5, tức là 3 bài ++. Đây cũng là điều các thí sinh phải hết sức rút kinh nghiệm. Làm được bài thì luôn phải trình bày cho thật chắc.

3. Kết quả đội tuyển

Thông tin về đội tuyển đã được công bố vào tuần vừa qua như sau:

Họ tên	Trường, lớp	Điểm
Đào Vũ Quang	Lớp 12 THPT chuyên Hà Nội – Amsterdam	30.5
Vũ Xuân Trung	Lớp 12 THPT chuyên Thái Bình	29
Hoàng Anh Dũng	Lớp 12 THPT chuyên Lam Sơn, Thanh Hoá	27
Phạm Nguyễn Mạnh	Lớp 11, PTNK - ĐHQG TP. HCM	24,5
Lê Nhật Hoàng	Lớp 12, THPT chuyên Lê Quý Đôn, Bình Định	23,5
Vũ Đức Tài	Lớp 12, THPT chuyên Lê Hồng Phong, Nam Định	23,5

Kỳ thi IMO năm nay sẽ được tổ chức tại Hong Kong, từ ngày 06/7 đến ngày 16/7/2016. Xin chúc các thí sinh có thời gian ôn tập, chuẩn bị thật tốt và có kết quả cao nhất tại kỳ thi này.

Ghi chú: Ban biên tập có tham khảo từ thông tin từ trang cá nhân trên `facebook.com` của thầy Nguyễn Khắc Minh và đề thi từ bài viết của bạn Nguyễn Văn Linh trên `mathscope.org`.