ÍCH GÌ, TOÁN HỌC?

Hà Huy Khoái

HÀM MOEBIUS VÀ ĐỊNH LÝ PHẦN DƯ TRUNG HOA

Phùng Hồ Hải

DẪN NHẬP VỀ HÀM ZETA RIEMANN VÀ PHÉP BIẾN ĐỔI MELLIN

Ngô Bảo Châu

GIẢI NOBEL CỦA EINSTEIN HAY LÀ SÓNG ĐIỆN THOẠI CÓ GÂY UNG THƯ HAY KHÔNG

Đàm Thanh Sơn

VÀ CÁC CHUYÊN MỤC KHÁC

Epsilon

Tạp chí online của cộng đồng những người yêu toán

NO
tháng 6 - 2016
09

Không có gì gần với thực tiễn hơn là một lí thuyết đẹp”

ISAAC NEWTON

“Tích của hai số nguyên, mỗi số là tổng hai bình phương, cũng là tổng của hai bình phương.

DIOPHANTUS

Epsilon
Tạp chí online của cộng đồng những người yêu toán

NO
tháng 6 - 2016
09

LỜI NGỎ CHO EPSILON SỐ 9

Ban Biên tập Epsilon

Epsilon số 9, ra mắt vào tháng 6, 2016 kỷ niệm chặng đường một năm rưỡi đầy nỗ lực của Ban Biên tập, các tác giả và cộng tác viên cũng như đầy ân tình từ phía độc giả đã ủng hộ chúng tôi suốt từ buổi ban đầu.

Số tháng 9 đến được với các bạn cũng là thời điểm mùa hè bắt đầu rộn rã. Những kỳ nghỉ vẫy gọi và hoa phượng giăng đầy sân trường, lớp học, sắc đỏ lan khắp nắng, khắp những con đường khiến bất kì ai vô tình lướt ngang qua đều man mác biết bao hoài niệm. Không khí tháng sáu đã làm sống lại trong chúng tôi, những người thực hiện Epsilon, rất nhiều ký ức đẹp đẽ. Vì vậy chúng tôi muốn dành lần ra mắt này để giới thiệu về chủ đề Trung học Cơ sở.

Bên cạnh những chuyên mục định kỳ, các đề tài và kiến thức toán trung học cơ sở sẽ lần lượt được trình bày trong số tạp chí mùa hè này.

Ban biên tập và các cộng tác viên hy vọng rằng, Epsilon số 9 sẽ góp thêm niềm vui học tập vào mùa hè tràn ngập niềm vui của các em học sinh, cũng như làm sống lại ký ức một thuở bảng đen, mực tím với những độc giả đã qua tuổi hoa niên.

Trân trọng.

Ban Biên tập Epsilon.

MỤC LỤC

ÍCH GÌ, TOÁN HỌC?

(Hà Huy Khoái)

Bài giảng đại chúng, kỷ niệm 5 năm Chương trình quốc gia phát triển Toán học và thành lập Viện nghiên cứu cao cấp Toán (VIASM), 20/12/2015.

1. Câu hỏi "Ích gì?"

Trong những dịp kỷ niệm 5 năm, 10 năm, ... của tổ chức nào đó, người ta thường liệt kê những việc đã làm, những kết quả đạt được. Thực chất là cố gắng "chứng minh" rằng, việc thành lập cái tổ chức đó là cần thiết, rằng nó có ích. Vậy nên câu hỏi "*Ích gì, Chương trình quốc gia phát triển Toán học?*", "*Ích gì, VIASM?*", nếu không được phát biểu một cách công khai, thì chắc chắn cũng lởn vởn trong đầu không ít người, như nó đã từng được đặt lên bàn của những nhà hoạch định chính sách, của Bộ Tài chính, Bộ Giáo dục và Đào tạo.

Vậy nên, khi được đề nghị làm một "bài giảng đại chúng", tôi đã chọn đề tài "Ích gì, Toán học?". Mà người "mách nước" cho tôi chọn đề tài đó lại không là một nhà toán học, mà là ... Chế Lan Viên! Hình như ông cũng đã từng trăn trở với câu hỏi "Ích gì Thơ ca? Ích gì, Nghệ thuật?".

Ích gì?

Chế Lan Viên – Di cảo

Khéo rồi mất giống bò sữa, hoạ mi, ngựa đua, gà chọi ...
Khó gì? Ta không giữ, không nuôi thì nó mất
Giống các nhà thơ cũng vậy
Tuyết trên non cao không ai thấy,
Giống nàng tiên, ông Bụt hiện trong mơ
Mà chả cần ai giết
Chỉ thôi yêu là nó chết
Chỉ cần bâng quơ, vu vơ đặt ra câu hỏi
Trịnh trọng cái bâng quơ, vu vơ ấy
Hỏi rằng: Ích gì họa mi?
Ích gì bò sữa?
Ích gì xạ hương?
Ích gì thi sĩ?
Ích gì cái hôn?
Ích gì giấc mơ?
Ông Bụt ích gì? ...

Đến nhà thơ cũng khó trả lời những câu hỏi như "Ích gì cái hôn? Ích gì thi sĩ? Ích gì giấc mơ? Ích gì ông Bụt?", nói chi đến những người cầm túi tiền để cân nhắc đầu tư! Nhưng, nếu cứ luôn luôn đặt ra câu hỏi "Ích gì?", lại còn "trịnh trọng" cái câu hỏi ấy, thì đến bò sữa còn chết, huống gì họa mi và giấc mơ? Với tôi, bài thơ trên còn thiếu một câu: *Ích gì, Toán học?*

2. Đối tượng của toán học: Tìm về cội nguồn

Lo lắng như Chế Lan Viên cũng phải, nhưng làm sao có thể lảng tránh câu hỏi "Ích gì"? Nhất là đối với Toán học, khi nhìn sang "bên cạnh", hình như chưa có ai đặt ra câu hỏi: "Ích gì, Vật lý? Ích gì, Sinh học?".

Ích gì, Vật lý? Dễ trả lời thôi, vì vật lý học nghiên cứu vật chất và chuyển động của chúng trong không gian và thời gian. Có ai lại không cần những kiến thức đó?

Ích gì, Sinh học? Dễ trả lời thôi, vì sinh học nghiên cứu các cơ thể sống và tương tác của chúng với môi trường. Có ai lại không cần những kiến thức đó?

Nhưng "*Ích gì, Toán học? Toán học nghiên cứu cái gì?*" thì lại là câu hỏi không dễ trả lời. Để hiểu đối tượng của Toán học, phải tìm về cội nguồn của nó. Tức là phải tìm đến "Cơ sở" của Euclid. Trước khi cuốn "Cơ sở" ra đời (khoảng 300 năm trước Công nguyên), Toán học chưa phải là một khoa học độc lập. Nó "lẫn" vào Triết học và Thiên văn học.

Bắt đầu với những "định nghĩa cơ bản" về những đối tượng của Toán học, trong Cơ sở - cuốn I, Euclid đưa ra 23 định nghĩa cơ bản. Xin nhắc lại ba trong số đó, định nghĩa thứ 1, 2 và 15 :

- αʹ. Σημεῖόν ἐστιν, οὗ μέρος οὐθέν.
- βʹ. Γραμμὴ δὲ μῆκος ἀπλατές.
- ιεʹ. Κύκλος ἐστὶ σχῆμα ἐπίπεδον ὑπὸ μιᾶς γραμμῆς περιεχόμενον [ἣ καλεῖται περιφέρεια], πρὸς ἣν ἀφʹ ἑνὸς σημείου τῶν ἐντὸς τοῦ σχήματος κειμένων πᾶσαι αἱ προσπίπτουσαι εὐθεῖαι [πρὸς τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν] ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

Dịch nghĩa

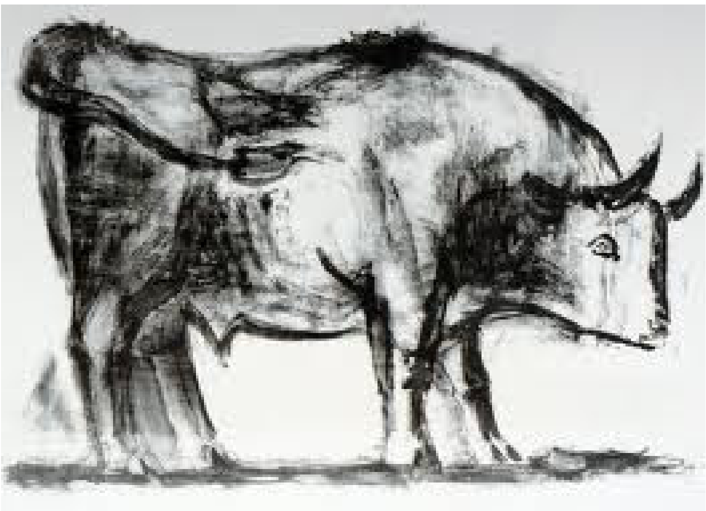
1. *Điểm là một cái không có kích thước.*
2. *Đường là cái chỉ có chiều dài, không có chiều rộng.*

15. *Đường tròn là một hình phẳng chỉ gồm một đường duy nhất (gọi là chu vi), (sao cho) mọi đường thẳng xuất phát (đến chu vi) từ một điểm nằm bên trong hình đều bằng nhau.*

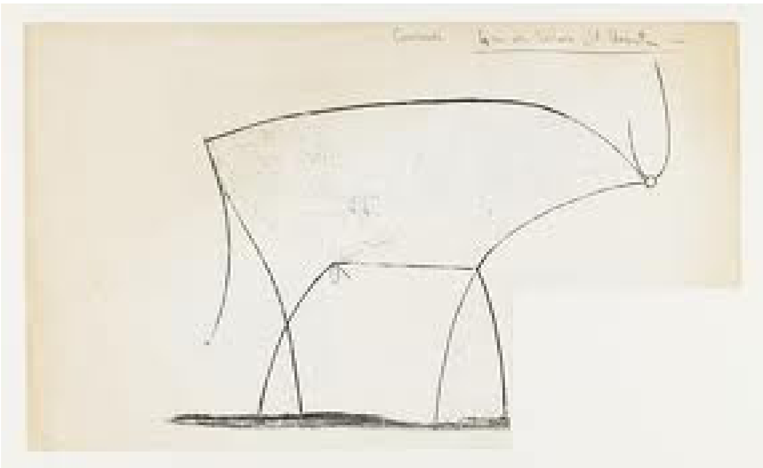
Như vậy, Toán học nghiên cứu những sự vật ... không hề tồn tại trong thực tế! Không thể tìm ra một "vật thể" không có kích thước, cũng như không thể tìm ra một cái gì đó không có chiều rộng. Và hiển nhiên, cái đường tròn "lý tưởng" của Toán học không thể tồn tại, người ta chỉ nhìn thấy "vành nón tròn, mặt trời tròn", hay "khuôn trăng đầy đặn" của Thuý Vân tròn như Mặt trăng!

Vậy thì, ích gì, cái khoa học nghiên cứu những sự vật không hề tồn tại? Tìm về cội nguồn lại không cho ta câu trả lời, mà ngược lại, hình như còn làm ta bối rối thêm. Nhưng, phải chăng những gì không tồn tại trong thực tế đều vô ích, đều cần phải biến mất sau câu hỏi "Ích gì?" Ta thử tìm về Pablo Picasso, hoạ sĩ vĩ đại của thế kỷ XX. Người ta nhìn thấy Picaso không chỉ trong những bức tranh ông để lại, mà cả trong những vật dụng hàng ngày. Ông làm thay đổi quan niệm của chúng ta về cái đẹp. Và điều kỳ diệu đó Picasso làm được, khi đưa ta về tận cùng của bản chất sự vật.

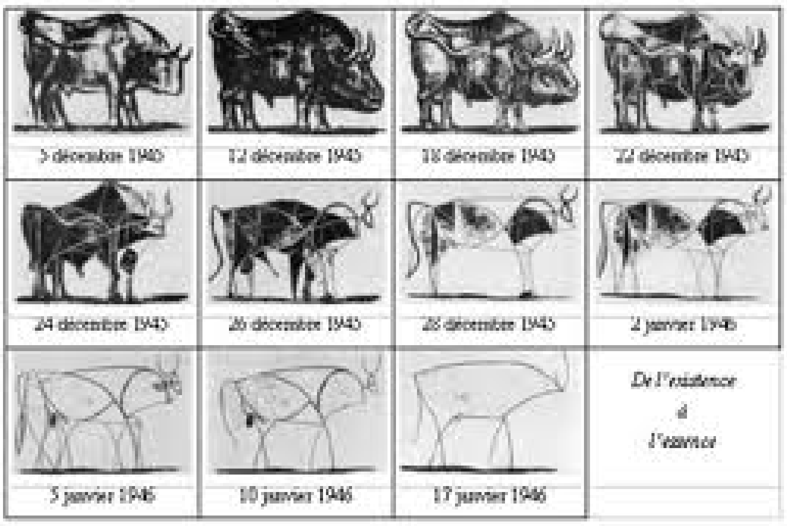
Một trong những đề tài thường gặp trong tranh Picasso là bò tót. Con bò tót, đấu bò gần như là biểu tượng của Tây Ban Nha. Nhưng trong tranh Picasso, bò tót tượng trưng cho sức mạnh u tối của chủ nghĩa phát xít Franco những năm 30 của thế kỷ trước. Ta hãy xem cách Picasso vẽ bò tót:



Nhưng đó hiển nhiên chưa phải là "con bò của Picaso" vì nó hoàn toàn giống như con bò ta vẫn nhìn thấy trên đấu trường. Con bò nổi tiếng của Picaso "đơn giản", và "xấu" hơn nhiều:



Nhưng để đi đến con bò như bức vẽ của trẻ con đó, nhà hoạ sĩ vĩ đại đã phải trải qua một quá trình sáng tạo nhọc nhằn. Ta hãy xem cách ông đi từ con bò giống như thật đến con bò với nét vẽ trẻ con:



Như vậy, Picaso đã đi từ "con bò tốt" đến "khái niệm bò"! Con bò "khái niệm" của Picasso với bộ sừng đáng sợ, với bộ óc nhỏ như một "điểm" của Euclid, đã thể hiện đầy đủ cái sức mạnh ngu muội của chủ nghĩa phát xít những năm 30. Hơn hai ngàn năm trước, Euclid cũng bằng cách đó đi từ "mặt trời tròn, vành trăng tròn" đến cái "đường tròn" của toán học.

Cái không có trong thế giới thực tại lại mô tả chân thực nhất thế giới thực tại, vì nó đưa ta về với bản chất. Phải chăng đó là lý do giải thích việc các lý thuyết toán học cho ta công cụ mô tả chính xác thế giới tự nhiên. Nói như Galilei, Thượng đế viết nên tự nhiên bằng ngôn ngữ của toán học.

3. Nghề làm Toán

Nhiều người hỏi bác Tôm (René Thom, nhà toán học Pháp, giải thưởng Fields) về nghề làm Toán. Thấy khó nói quá, bác bèn kể chuyện săn rồng. Chuyện rằng, xưa bên Trung Quốc, có anh chàng học nghề đi săn. Anh chẳng chịu học săn hổ, săn lợn, mà lại học nghề săn Rồng! Nghề này khó lắm, phải thực tập nhiều. Bởi thế nên khi anh ta thạo nghề thì trên thế gian chẳng còn lấy một con Rồng nào! Có người hỏi: Bây giờ sống bằng nghề gì? Đáp: Đi dạy nghề săn Rồng! Bác Tôm nói: Làm Toán tức là đi dạy nghề săn Rồng vậy! (thảo nào chẳng có chú Rồng nào dám bén mảng đến nhà bác Tôm!).

Thế thì, làng nước đâu có cần cái anh săn Rồng ấy. Có còn Rồng nữa đâu mà học nghề săn rồng? Ấy chết, đừng vội nói thế. Rồng thì chẳng còn, nhưng có khi vẫn phải học nghề săn Rồng đấy. Nếu anh đi học nghề săn lợn thì chắc gì đã bắn được hổ? Mà học nghề săn hổ thì chắc gì bắn được voi? Nhưng nếu đã thạo nghề săn Rồng thì hổ, báo, sư tử, voi, ... chắc chắn đều săn được tuốt! Này nhé, Rồng có thân như cá sấu, móng vuốt như hổ, đầu sư tử, ẩn hiện như trăn, vậy mà còn không thoát được tay anh săn Rồng, thì chẳng nói gì đến hổ, báo, voi, trăn, mà sau này có "nhân bản" ra con nào nữa, anh ta cũng chẳng sợ! Thành ra, đã định học nghề đi săn thì hãy cứ học nghề săn Rồng!

Từ cá sấu, hổ, sư tử, trăn, ... người xưa "trừu tượng hóa" thành con Rồng. Cũng như thế, từ thực tiễn, người ta trừu tượng hóa thành Toán học. Câu chuyện đơn giản của bác Tôm mà thâu tóm được cả cái mạnh, và cái yếu, của Toán học là vậy.

Khi đã trừu tượng hoá để tìm đến bản chất, Toán học không phải bao giờ cũng dễ dàng trở về với thực tại, vốn là nơi xuất phát của nó. Thậm chí, người ta còn nghi ngờ cái khả năng nó có thể quay về với thực tại.

Bởi thế nên mới có người hỏi khích bác Tôm: "Mấy cái anh làm Toán gàn dở bịa ra những phương trình, vi phân, tích phân,... gì gì nữa nhỉ, thực tế làm gì có? Bọn họ chỉ ngồi chơi cái trò chơi trí tuệ đấy thôi"! Bác Tôm hỏi lại: "Này nhé, nếu anh đánh rơi cái nhẫn trong góc nhà kho bừa bộn, tối om, mà lại không có đèn, thì anh tìm nó ở đâu"? Anh chàng nọ ngạc nhiên: "Hỏi lạ nhỉ, thì chui vào đó mà tìm chứ ở đâu nữa"! Bác Tôm cười: "Thế thì có khi mấy tháng trời vẫn chưa tìm ra. Cứ như tôi thì tôi sẽ chạy ra dưới ngọn đèn sáng mà tìm vậy"! Anh chàng được mẻ cười vỡ bụng: "Mấy anh làm Toán gàn quá đi mất, biết tỏng tòng tong là nhẫn rơi trong góc nhà kho, mà lại ra dưới đèn tìm thì có mà suốt đời tìm cũng không thấy". Ấy vậy mà cái anh đồ (Toán) gàn dở chẳng dại lắm đâu. Này nhé, anh ta cầm lấy chiếc nhẫn, đứng dưới ngọn đèn mà thả cho nó rơi. Tất nhiên là tìm lại được ngay (ở đó sáng lắm). Cứ như thế mười lần, hai mươi lần, một trăm lần, ... anh ta phát hiện ra quy luật: Khi rơi thì cái nhẫn nói chung chạy theo hướng nào. Bởi thế lúc vào góc nhà kho tối om, anh ta tìm ra ngay chiếc nhẫn. Mà không chỉ chiếc nhẫn ấy, nhà kho ấy, mà dù chiếc nhẫn khác, rơi ở nhà kho khác cũng tối om như vậy, thì đối với anh làm Toán, tìm nó cũng chẳng khó khăn gì!

Các phương trình, các lý thuyết Toán học cũng như ngọn đèn của bác Tôm vậy. Có nó, người ta mới "làm Toán" được, tức là mới tìm ra quy luật của sự vật. Muốn trở về được với thực tiễn thì trước tiên phải biết rời xa thực tiễn, để không còn bị che lấp bởi cái rườm rà, không bản chất của đời thường.

Ba trăm năm trước bác Tôm, Newton đã từng nói: "Không có gì gần với thực tiễn hơn là một lí thuyết đẹp!"

4. Ứng dụng Toán học

Nhưng cái câu hỏi "Ích gì, Toán học?" vẫn cứ lởn vởn đâu đây, nhất là khi nhìn những nhà toán học hàng đầu nghiên cứu những thứ hoàn toàn "xa rời thực tế" , mà ngay cả bản thân họ cũng chưa biết mình sẽ đi đến đâu.

Người ta thường hỏi nhà Toán học: Lí thuyết của anh ứng dụng vào đâu? Không phải lúc nào cũng có câu trả lời. Vào thế kỉ thứ III trước Công nguyên, nếu ai đó hỏi Apolonius rằng nghiên cứu các đường cônic (nhận được bằng cách cắt mặt nón bởi mặt phẳng) để làm gì, thì chắc Apolonius không trả lời được. Ông ta chỉ nghiên cứu các đường cônic vì thấy là chúng "đẹp". Không chỉ Apolonius không thể trả lời, mà hơn chục thế kỉ sau cũng không ai trả lời được. Phải chờ đến Kepler và Newton, tức là 20 thế kỉ sau, người ta mới biết ông già Apolonius đã từng làm trò chơi với các quỹ đạo chuyển động của các hành tinh! Chính vì bị ám ảnh bởi các đường cônic ngay từ thuở ấu thơ mà Kepler đã nghi ngờ kết luận của những người đi trước về quỹ đạo tròn, và đưa ra giả thuyết quỹ đạo đó là đường ellip, với hai tiêu cự rất gần nhau. Giả thuyết đã được Newton chứng minh, với định luật vạn vật hấp dẫn. "Cái đẹp", từ chỗ không biết để làm gì, đã tìm thấy một ứng dụng vào loại vĩ đại nhất trong lịch sử, sau hơn hai ngàn năm.

Bác Tôm có lần nói: Đối với những người mở đường, đừng hỏi họ đi đâu, khi người ta biết mình đi đâu, người ta không đi được xa "quand on sait òu va, on va pas loin". Thật thế, nếu anh định đi đến Thành phố Hồ Chí Minh thì chắc là anh cũng chỉ đi đến Cà Mau là cùng. Ngay như cái anh Armstrong, biết mình đi đến Mặt trăng thì cũng chỉ đến đó thôi, rồi về. Còn bác Tôm chẳng biết mình đi đâu, nên bác có thể đi xa hơn, đến tận sao Hỏa, hay những miền đất mới của khoa học. Và chúng ta, dù không đi xa được như bác Tôm, nhưng muốn ngày mai có bát cơm ngon, thì đừng quá sốt ruột nếu hôm nay chưa "ra ngô, ra khoai" gì! Còn nếu muốn "ra ngô, ra khoai" ngay thì có khi cả đời chỉ biết ăn ngô, ăn khoai!

Vậy nhưng, nếu các lý thuyết Toán học đều phải cần đến 2000 năm sau mới có ứng dụng, thì câu hỏi "Ích gì, Toán học?" sẽ dễ nhận được câu trả lời là "Vô ích"! Dù "nhìn xa" đến mấy, người ta cũng khó nhìn đến tận ... 2000 năm sau!

Nhưng Toán học đi vào thực tiễn với những con đường khác nhau. Có khi 2000 năm, có khi chỉ hai năm, thậm chí chỉ cần hai tháng! Ví dụ nổi tiếng là những hệ mật mã khoá công khai, như hệ mã RSA hay hệ mã dùng đường cong elliptic. Từ trang giấy của nhà nghiên cứu toán học đến ứng dụng vào cái điện thoại thông minh hay cái thẻ tín dụng gần như là tức thời.

Không chỉ là những ứng dụng dễ nhìn thấy, Toán học giúp cho con người luôn hướng đến sự đơn giản trong tư duy. Tư duy Toán học chính là lối tư duy loại bỏ tất cả những gì không cần thiết, những gì rườm rà. Sự tối giản chính là một tiêu chuẩn của sự tối ưu, và nhiều khi, còn là tiêu chuẩn của cái đẹp. Một lần nữa, Toán học lại rất gần với Nghệ thuật. Nhà điêu khắc vĩ đại người Pháp Auguste Rodin $(1840 - 1917)$ đã sáng tạo nên pho tượng bất hủ Le Penseur (Người suy tư), khắc họa hình ảnh một con người mà sự suy nghĩ căng thẳng hiện ra trên từng thớ thịt. Có người hỏi Rodin: "Làm thế nào mà ông có thể tạc nên pho tượng tuyệt vời đến vậy?". Rodin trả lời: "Đơn giản thôi, tôi lấy một khối đá, và thấy cái gì thừa thì đẽo nó đi!".

Nhưng, tại sao sau tất cả những điều đã nói, vẫn tồn tại dai dẳng câu hỏi: "Ích gì, Toán học"? Người ta hàng ngày dùng điện thoại di động để nói đủ thứ chuyện, đôi khi là để nói về cái sự vô ích của Toán học. Người ta hàng ngày dùng thẻ tín dụng để chuyển tiền, rút tiền. Nhưng sẽ không có điện thoại thông minh, không có thẻ tín dụng nếu không có mật mã khoá công khai, không có Toán học. Vậy nhưng người ta có thể vẫn rất ngại dùng tiền đó đầu tư cho Toán học, vì "Ích gì, Toán học?" Khi dùng điện thoại, khi rút tiền, không ai thấy "tích phân, vi phân, tổ hợp hay số học" trong đó. Nói khác đi, Toán học đã đến mức "trong suốt" đối với người sử dụng nó (tất nhiên chỉ khi đó nó mới được dùng cho tất cả mọi người).

Xem ra, sự "trong suốt" đôi khi lại che khuất tầm nhìn hơn ngọn núi!

Năm 1674 Mayow tìm thấy trong khí quyển một chất giúp cho sự sống. Năm 1773 Karl Scheele lần đầu tiên cô lập được chất khí đó. Antoine Lavoisier lặp lại thí nghiệm đó của Scheele và gọi đó là "oxygen". Như vậy, oxy được "tìm ra" khá muộn. Tại sao? Vì nó trong suốt. Người ta hầu như không nhận thấy mình đang cần đến oxy. Và không chịu bỏ tiền ra "cho nó". Phải đến khi con người nhìn thấy những hình ảnh sau đây:

Đó là không khí ở Bắc Kinh. Nó không còn trong suốt nữa. Và người ta buộc phải nhìn thấy nó, buộc phải họp nhau ở Rio de Janeiro, ở Kyoto, ở Paris để bàn nhau tìm cách bỏ tiền ra làm cho nó trong suốt trở lại. Giá như người ta nhìn thấy sự cần thiết từ khi nó còn trong suốt!

5. "Tính" và "Toán"

Một người bạn của bác Tôm, ông F.Hirzebruch, khi trả lời phỏng vấn của các nhà báo, trên cương vị là Chủ tịch đầu tiên của Hội Toán học Châu Âu, đã nói: "Người ta thường hay nhấn mạnh vai trò của Toán học trong phát triển công nghệ, nhưng tôi nghĩ rằng, sẽ đến lúc công nghệ phát triển để giải phóng con người, cho họ thời gian quay về với thơ ca, âm nhạc và Toán học". Phải chăng, Hirzebruch muốn ám chỉ rằng, trong Toán học có hai phần: "Tính" và "toán".

Nếu như tính rất cần thiết cho công nghệ, thì Toán, ngoài chức năng phát triển phần tính ra, còn góp phần làm nên Con Người, cũng giống như âm nhạc, nghệ thuật và thơ ca.

Nhưng có thể 5 năm nữa, trong dịp kỷ niệm 10 năm của VIASM, chúng ta lại sẽ phải bàn về câu hỏi: "Ích gì, Toán học?"

Phải chăng đó là câu hỏi vĩnh cửu, song hành với Toán học từ khi nó ra đời? Cũng như câu hỏi tương tự cũng song hành cùng Nghệ thuật và Thơ ca.

HÀM MOEBIUS VÀ ĐỊNH LÝ PHẦN DƯ TRUNG HOA

Phùng Hồ Hải

(Viện Toán học Việt Nam)

Câu lạc bộ (CLB) Toán học Viện toán học được thành lập cách đây 5 năm. Đầu tiên CLB sinh hoạt sáng chủ nhật mỗi tuần với các bài giảng toán của các GS, TS, các thầy giáo chuyên toán dành cho học sinh THPT. Sau đó để tạo điều kiện cho các học sinh tỉnh xa, CLB đã tổ chức những đợt giảng dài ngày dưới hình thức trường đông, trường hè, trường xuân. Gần đây CLB toán học Viện toán học đã tổ chức thêm các lớp học dành cho học sinh THCS với mục tiêu định hướng và tạo nguồn. Epsilon xin giới thiệu với bạn đọc bài viết của GS Phùng Hồ Hải kể lại buổi dạy ngẫu hứng của mình vào chiều thứ ba $7/6/2016$ vừa qua.

Bài viết được lấy từ trang facebook cá nhân của giáo sư Phùng Hồ Hải.

Để hiểu nội dung bài viết, ta cần đến định nghĩa của hàm Moebius. Hàm Moebius $\mu(n)$ được xác định trên tập hợp các số nguyên dương và nhận giá trị trong tập hợp $\{-1, 0, 1\}$. Ta có $\mu(1) = 1$. Khi $n > 1$, $\mu(n)$ sẽ bằng 0 nếu n có ít nhất một ước chính phương lớn hơn 1. Trong trường hợp n không có ước chính phương (lớn hơn 1) thì với $n = p_1p_2 \cdots p_r$ là tích của các số nguyên tố phân biệt ta sẽ có $\mu(n) = (-1)^r$. Ví dụ ta có bảng giá trị của hàm Moebius với $n \leqslant 15$.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\mu(n)$	1	-1	-1	0	-1	1	-1	0	0	1	-1	0	-1	1	1

Lâu rồi không report về Math Circle. Hôm nay tôi đã có một buổi dạy khá ngẫu hứng. Hàm Moebius đã được nhắc tới vài lần. Hôm nay tôi muốn thuyết phục các bạn trong lớp rằng hàm này bằng 0 tại "phần lớn" các số tự nhiên. Nói phải có sách, mách phải có chứng. Ta sẽ thử liệt kê xem hàm sẽ triệt tiêu tại những giá trị nào.

Ta biết rằng hàm sẽ triệt tiêu tại n nếu n chia hết cho bình phương một số nguyên tố. Như vậy trong 10 số tự nhiên đầu tiên, hàm sẽ triệt tiêu tại $4,\ 8,\ 9$ - ba số.

Trong 10 số tự nhiên tiếp theo hàm sẽ triệt tiêu tại $12, 16, 18, 20$ - bốn số. Tình hình sau đó kém đi một chút: $32,\ 36,\ 40$. Rồi lại khá lên: $44,\ 45,\ 48,\ 49,\ 50$.

Dù sao thì các bạn trong lớp cũng thấy rằng tình hình có chiều hướng tốt lên, nghĩa là càng ngày thì tỷ lệ các số mà tại đó hàm triệt tiêu càng tăng. Đặc biệt ta thấy xuất hiện ba số liên tiếp mà tại đó hàm triệt tiêu: $48,\ 49,\ 50$.

- Nếu chúng ta đi tiếp thì chúng ta có thể tìm thấy 10 số tự nhiên liên tiếp mà tại đó hàm Moebius triệt tiêu. Thầy tuyên bố.

Khẳng định có vẻ làm cho các bạn học sinh ngạc nhiên. - Chúng ta đã thấy ở trên có ba số liên tiếp. Bạn nào có thể chứng minh rằng tồn tại bốn số liên tiếp mà tại đó hàm triệt tiêu?

Câu hỏi có vẻ hơi khó.

- Hay là thế này: Chứng minh rằng tồn tại vô hạn cặp hai số tự nhiên liên tiếp mà tại đó hàm Moebius triệt tiêu.

Ngay lập tức có lời giải: xét hai số $a^2 - 1$ và a^2, hàm hiển nhiên triệt tiêu tại a^2, chỉ cần chọn a lẻ thì $a^2 - 1$ chia hết cho 4.

- Thế ba số thì sao, liệu có tồn tại vô hạn bộ ba số tự nhiên liên tiếp mà hàm Moebius triệt tiêu tại đó?

Sau một lúc trao đổi thì các bạn đề xuất lời giải thế này: xét số $a^3 - 1$, a^3, $a^3 + 1$. Hàm Moebius tất nhiên triệt tiêu tại a^3. Ta sẽ tìm a sao cho $a^3 - 1$ chia hết cho 4 còn $a^3 + 1$ chia hết cho 9. Tuy nhiên lời giải chưa chặt chẽ.

Thầy giải thích cho các bạn rằng $a^3 - 1$ chia hết cho 4 khi và chỉ khi $a - 1$ chia hết cho 4 còn $a^3 + 1$ chia hết cho 9 khi và chỉ khi $a + 1$ chia hết cho 3. Vậy bài toán là những số a nào thỏa mãn các điều kiện này?

Đây là một bài toán dễ đối với các bạn, câu trả lời có ngay: a chia 12 dư 5, hay $a = 12k + 5$.

- Bài toán tìm a để a đồng dư với 3 mod 4 và đồng dư với 2 mod 3 chính là bài toán "giải hệ phương trình đồng dư bậc nhất", thầy giải thích cho các bạn. Mọi người rất phấn khích.

- Bây giờ ta hãy xem nguyên tắc giải hệ như thế nào: Trước hết ta tìm một "nghiệm riêng", chính là số 5, từ đó ta chỉ cần cộng thêm "nghiệm tổng quát", là số 12 - bội chung nhỏ nhất của 3 và 4. Quá dễ hiểu đối với các bạn học sinh.

- Bây giờ ta hãy xét một hệ 3 phương trình xem sao. Chẳng hạn: a đồng dư với 1 mod 3, đồng dư với 2 mod 4 và đồng dư với 4 mod 5.

$a = 34 + 60k$, chỉ trong vài phút các bạn đã có câu trả lời.

- Chúng ta có thể giải hệ trên "dần dần", xét hai phương trình đầu tiên ta sẽ có nghiệm: a đồng dư với 10 mod 12, sau đó ta lại xét phương trình này cùng với phương trình thứ ba, a đồng dư với 4 mod 5, để suy ra nghiệm bằng phương pháp tương tự.

- Bằng cách này ta chứng minh được Định lý phần dư Trung Hoa: Mọi hệ phương trình đồng dư bậc nhất với các modun đôi một nguyên tố cùng nhau đều có nghiệm. Chỉ cần xét dần dần, mỗi lần hai phương trình.

- Bạn nào biết tại sao hệ hai phương trình đồng dư bậc nhất với modun nguyên tố cùng nhau luôn có nghiệm?

- Sử dụng hệ thức Bezout, một bạn trả lời ngay lập tức.

Thế là định lý phần dư Trung Hoa được chứng minh, ít nhất là "về nguyên tắc". Trở lại bài toán ban đầu, phương pháp sử dụng a^3 rồi thêm bớt 1 không thể cho ta lời giải cho câu hỏi: Tìm 10 số tự nhiên liên tiếp mà tại đó hàm Moebius triệt tiêu. Đó là vì phương pháp xây dựng của ta không phù hợp. Chúng ta có thể sử dụng Định lý phần dư Trung Hoa để có một cách xây dựng đơn giản hơn nhiều. Chỉ cần có 5 phút để một bạn có lời giải hoàn chỉnh cho bài toán này.

DẪN NHẬP VỀ HÀM ZETA RIEMANN VÀ PHÉP BIẾN ĐỔI MELLIN

Ngô Bảo Châu
(Đại học Chicago)

Đọc lịch sử toán học ta thấy rằng trước đây thư tín là một phương tiện trao đổi thông tin toán học rất quan trọng. Rất nhiều những ý tưởng, giả thuyết, dự đoán và cả những chứng minh hay phản ví dụ đã được trình bày lần đầu tiên ở trong những bức thư chứ không phải là ở trong các tạp chí và cuốn sách. Newton, Leibniz, Fermat, Euler, Gauss, Jacobi, Bernoulli, Mersenne, ... đều có những "công bố" ở dạng thư tín.

Ngày nay, với những phương tiện giao tiếp hiện đại như blog, trang wordpress, archiv ... ta có nhiều cách để "công bố" các ý tưởng hay tiền ấn phẩm của mình. Tuy nhiên, trao đổi học thuật bằng thư tín, email vẫn là một hình thức thông dụng và hiệu quả.

Thông tin qua email có thể sẽ không hình thức và chặt chẽ như những bài báo, những cuốn sách, có nhiều ý tưởng còn thô ráp, nôm na, nhưng chính điều đó làm độc giả dễ đọc hơn, gần gũi hơn, dễ hiểu hơn.

Chúng tôi xin giới thiệu với bạn đọc lá thư của GS Ngô Bảo Châu gửi cho GS Phùng Hồ Hải nhân việc GS Hải muốn tổ chức một khóa học về hàm zeta và phép biến đổi Mellin để chuẩn bị cho chuỗi bài giảng về lý thuyết biểu diễn của GS Ngô Bảo Châu và GS Phạm Hữu Tiệp vào tháng 8/2016.

Dịch bởi Nguyễn Vũ Duy Linh và Trần Nam Dũng hiệu đính.

From:
Đại Học CHICAGO
Khoa Toán
5734 University Avenue, Chicago IL 60637
Ngô Bảo Châu

To:
GS. Phùng Hồ Hải
Viện Toán học Việt Nam
18 Hoàng Quốc Việt, Hà Nội

Ngày 5 tháng 5 năm 2016.

Hải thân mến,

Tổ chức một seminar học tập về hàm zeta có vẻ là một ý tưởng tốt.

Tôi thiết nghĩ nên mở đầu bằng một vài vấn đề rất căn bản của lý thuyết số giải tích. Chúng ta hãy xem xét một hàm số học tức là đơn thuần một dãy số $a_1, a_2, \ldots$ được định nghĩa theo kiểu số học nào đó. Đây là một khái niệm trừu tượng và người ta không thể làm được gì ở mức độ trừu tượng như vậy. Trên một phương diện khác, ta có rất nhiều ví dụ cụ thể:

1. $a_n = 1$,

2. $a_n = \mu(n)$ là hàm Moebius,

3. $a_n = d(n)$ là số những ước số của n,

4. $a_n = r(n)$ là số cách biểu diễn n như là tổng của hai bình phương,

5. $a_n = 1$ nếu n nguyên tố và bằng 0 nếu ngược lại,

6. $a_n = \log(p)$ nếu n là lũy thừa của p và 0 nếu ngược lại, ...

Mặc dầu những dãy số này rất bất thường, ngoại trừ dãy đầu tiên, tổng Cesaro $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ có tính tiệm cận nào đó. Chẳng hạn chúng ta xác định tính tiệm cận của dãy thứ 5, chúng ta thử tính số lượng số nguyên tố nhỏ hơn một số nào đó.

Ước lượng tổng Cesaro của $d(n)$ và $r(n)$ là những vấn đề sơ cấp cổ điển trong lý thuyết số. Đối với $r(n)$, đó là những bài toán về hình tròn Gauss: Có bao nhiêu điểm nguyên nằm trong hình tròn khi bán kính tiến về ∞. Bằng những lý luận sơ cấp như Gauss đã làm, chúng ta có

$$\sum_{n<X} r(n) = \pi X + O(X^{1/2}) \tag{0.1}$$

Seminar có thể bắt đầu với bài toán này và người ta không cần có kiến thức để hiểu cách giải. Nó đã được giải thích rất kỹ lưỡng trong chương 6 của quyển "*Nhập môn lý thuyết số giải tích*" của Chandrasekharan. Tại chỗ này, ta cần đề cập rằng sai số $O(X^{1/2})$ có thể cải thiện đáng kể nhờ một công cụ giải tích tốt hơn. Chẳng hạn, nhờ công thức lấy tổng Poisson, người ta có thể đạt được $O(X^{1/3})$.

Cách truyền thống để hiểu tính tiệm cận của tổng Cesaro là tạo ra chuỗi Dirichlet

$$D(s,a) = \sum_n a_n n^{-s},$$

với biến phức s. Bằng cách áp đặt điều kiện tăng trưởng cho a_n, chuỗi Dirichlet hội tụ trên một nửa mặt phẳng $\Re(s) > \alpha$ nào đó. Chẳng hạn chuỗi Dirichlet tương ứng với dãy $a_n = 1$ chính là Riemann ς-function $\varsigma(s,a) = \sum_n n^{-s}$ hội tụ trên miền $\Re(s) > 1$.

Có một vài thao tác mà chúng ta nên làm quen khi làm việc với chuỗi Dirichlet. Chẳng hạn, trong bốn ví dụ đầu tiên, a_n có tính chất nhân tính: $a_{mn} = a_m a_n$ với $(m;n) = 1$. Chuỗi Dirichlet tương ứng có thể phân tích thành nhân tử thành tích Euler tức là tích của các thừa số đánh số bằng số nguyên tố. Chẳng hạn như:

$$\varsigma(s) = \prod_p \left(1 - p^{-s}\right)^{-1}. \tag{0.2}$$

Một nhận xét khác nhưng theo lối tương tự là chuỗi Dirichlet tương ứng với tích chập của các hàm số học. Chẳng hạn như

$$\sum_n d(n) a_n n^{-s} = \varsigma(s)^2, \tag{0.3}$$

và

$$\sum_n \mu(n) a_n n^{-s} = \varsigma(s)^{-1}. \tag{0.4}$$

Những hằng đẳng thức này là hiển nhiên khi xem xét như là chuỗi Dirichlet hình thức. Như là các hàm phức, chúng có thể được chứng minh dễ dàng trên miền mà chuỗi Dirichlet hội tụ tuyệt đối. Tất cả những điều này được giải thích hoàn hảo trong chương 2 của quyển "*Nhập môn lý thuyết số giải tích*" của Apostol.

Một trong những hướng chính của lý thuyết số giải tích cổ điển là dẫn ra một ước lượng tiệm cận của tổng Cesaro từ những cực của chuỗi Dirichlet. Đó chính là nội dung của định lý Tauberian. Một vấn đề khó chịu là có nhiều phiên bản của định lý Tauberian. Phiên bản đơn giản nhất có thể là định lý Wiener-Ikehara's được giải thích trong chương 11 của Chandrasekharan chẳng hạn.

Trong bất cứ trường hợp nào, định lý Tauberian cho ta biết một điều đại loại như sau: Giả sử rằng $D(s,a)=\sum_n a_n n^{-s}$ có thể thác triển phân hình vượt qua đường thẳng $\Re(s)=1-\varepsilon$. Giả sử rằng nó chỉ có một cực cấp 2 tại 2 và một cực cấp 1 tại 1. Khi đó biểu thức tiệm cận sẽ có dạng:

$$\sum_{n<X} a_n = c_{2,2}X^2\log(X)+c_{2,1}X^2+c_{1,1}X+\cdots \tag{0.5}$$

trong đó $c_{2,2}, c_{2,1}$ là hệ số Laurent của khai triển $D(a,s)$ thành chuỗi Laurent tại $s=2\ldots$ Ở đây số mũ 2 trong X^2 tương ứng với vị trí của cực tại 2, số hạng $\log(X)$ xuất hiện là vì cực tại 2 có cấp $2\ldots$

Mất nhiều thời gian cho các định lý Tauberian cũng không hay lắm vì trên một phương diện nó chỉ là vấn đề kỹ thuật, và trên một phương diện khác phần giải tích ít ỏi cần dùng để chứng minh các định lý Tauberian có vẻ là không thích đáng xét trên quan điểm lý thuyết số.

Nếu như tôi không lầm thì có một cách tiếp cận tốt hơn sử dụng cái gọi là "*tổng trơn*". Người ta có thể đọc bài post của Emmanuel Kowalski trên blog của ông ta để được giới thiệu về tổng trơn: https://blogs.ethz.ch/kowalski/smoothing-sums-wiki-page/

Cách tốt nhất để khởi đầu với tổng trơn là quay về với bài toán hình tròn Gauss. Chúng ta phát biểu lại bài toán hình tròn Gauss tổng quát như sau: Cho hàm $\phi: R^2\to C$, chẳng hạn như hàm đặc trưng của đĩa đơn vị, chúng ta muốn biết tiệm cận của

$$\sum_{n\in Z^2}\phi(tn) \tag{0.6}$$

khi $t\to 0$. Nếu ϕ là hàm đặc trưng của đĩa đơn vị, khi đó $\displaystyle\sum_{n\in Z^2}\phi(tn)$ sẽ là số những điểm nguyên bên trong đĩa bán kính t^{-1}.

Điểm chính yếu của chiến lược "*tổng trơn*" là nhận ra rằng thay vì làm việc với một hàm thử "*thô*", như là hàm đặc trưng của đĩa đơn vị có những bước nhảy thô trên chu vi của đường tròn, tốt hơn chúng ta làm việc với những hàm thử trơn với giả thiết compact. Đối với những hàm trơn, tiệm cận của $\sum_{n\in Z^2}\phi(tn)$ là hệ quả trực tiếp của công thức lấy tổng Poisson:

$$\sum_{n\in Z^2}\phi(tn)=t^{-1}\sum_{n\in Z^2}\hat{\phi}(t^{-1}n) \tag{0.7}$$

trong đó $\hat{\phi}$ là biến đổi Fourier của ϕ Biến đổi Fourier $\hat{\phi}$ không còn hỗ trợ compact nữa, nhưng vẫn một hàm giảm nhanh trong không gian Schwartz. Ở vế phải, khi $t^{-1}\to\infty$, mọi số hạng, ngoại trừ $n=0$, giảm rất nhanh. Do vậy ta có

$$\sum_{n\in Z^2}\phi(tn)=t^{-1}\hat{\phi}(0)+O(t^r),\ \text{với mọi } r. \tag{0.8}$$

Số hạng $\hat{\phi}$ tương ứng với diện tích của đĩa, nơi xuất hiện của số π trong bài toán hình tròn Gauss. Mặc dù vậy, nếu chúng ta áp dụng trực tiếp công thức lấy tổng Poisson cho hàm đặc trưng của đĩa đơn vị, chúng ta sẽ gặp rắc rối to vì những điểm kỳ dị lớn của ϕ sẽ dẫn tới sự tăng nhanh của biến đổi Fourier $\hat{\phi}$. Tốt hơn chúng ta xấp xỉ hàm đặc trưng của đĩa bằng một hàm trơn nào đó và cố gắng khống chế sai số. Làm như vậy theo một đường lối thông minh, chúng ta nhận được sai số $O(t^{-1/3})$. Tôi nhớ đã thấy lối giải thích rất đẹp này ở đâu đó nhưng tôi không tìm thấy nó nữa. Nhưng nó sẽ là một bài tập thật tốt cho những ai tham dự seminar của anh.

Một bài học rút ra từ phép giải bài toán hình tròn Gauss là chúng ta có thể quên đi hàm thử thô và thay vào đó chỉ làm việc một hàm trơn. Phần lý thuyết sẽ hoàn toàn nói về hàm thử trơn.

Đối với mỗi bài toán cụ thể, người ta phải cất công xấp xỉ một hàm thử thô bằng những hàm trơn. Điều này cũng cho ta một hình dung tốt hơn về các hàm số học và các chuỗi Dirichlet theo nghĩa các phân bố. Mỗi dãy a_n tăng vừa phải có thể xem như phân bố

$$\phi \mapsto a(\phi) = \sum_n a_n \phi(n) \tag{0.9}$$

Tích chập của hàm số học có thể chuyển thành tích chập của phân bố. Đồng thời chuỗi Dirichlet $\sum_n a_n n^{-s}$ chỉ là biến đổi Mellin của phân bố $\phi \to a(\phi)$. Chẳng hạn nếu biến đổi Mellin của phân bố $\phi \mapsto \sum_n \phi(n)$ là hàm Riemann zeta $\varsigma(s)$. Ta cần phải quen với các phân bố mới có thể hiểu rõ biến đổi Mellin của một phân bố. Cách làm này có một phần thưởng khá lớn: Người ta có thể tước bỏ những ước lượng trung gian cồng kềnh của giải tích Fourier và xử lý mọi thứ như tính toán đại số.

Người ta có thể định nghĩa biến đổi Mellin của một phân bố loại a như sau. Đối với một hàm Schwartz ϕ, tích chập $a * \phi$ lại là một hàm Schwartz. Cả hai biến đổi Mellin của ϕ và $a * \phi$ vẫn còn là hàm trơn với tiệm cận vừa phải. Khi đó chúng ta có thể định nghĩa biến đổi Mellin $M(\phi)$ và $M(a * \phi)$ rồi cho $M(a) = M(a * \phi)/M(\phi)$.

Ý tưởng này có vẻ được nhiều người biết, mặc dầu tôi không nhớ rõ nó được giải thích trong tài liệu nào. Ít nhất nó được giải thích trong các bức thư ngắn tôi gởi cho anh trước đây về hàm ς. Nếu không thì anh có thể đọc về phép biến đổi Mellin trong bài giảng của Igusa trong TIFR: http://www.math.tifr.res.in/publ/ln/tifr59.pdf.Zagier có viết bài giới thiệu sơ cấp hơn: http://people.mpim-bonn.mpg.de/zagier/files/tex/MellinTransform/fulltext.pdf

Bây giờ người ta có thể tiếp cận hàm Riemann zeta theo lối phân bố. Công thức lấy tổng Poisson có thể được phát biểu như sau: phân bố lược Dirac $\phi \mapsto \sigma_Z(\phi) = \sum\limits_{n \in Z} \phi(n)$, là phép biến đổi Fourier của chính nó. Bây giờ tính biến đổi Mellin và biến đổi Fourier của σ_Z ta có phương trình hàm của hàm Riemann zeta. Trong quá trình tính toán, người ta phải chứng minh rằng ς có thác triển phân hình dựa trên sự tác động lẫn nhau của phép biến đổi Mellin, tiệm cận của tổng Cesaro và công thức lấy tổng Poisson.

Một bài tập rất tốt là thử tổng quát hóa lý thuyết của các hàm zeta Riemann như đã giải thích ở trên đối với mở rộng bậc hai F của Q. Chẳng hạn trong trường hợp tách được $F = Q \times Q$, chúng ta cần phải quay trở lại dãy $a_n = d(n)$. Nếu như $F = Q[i]$ là trường hữu tỉ Gauss, chúng ta cần phải quay trở lại bài toán hình tròn Gauss ...

Tại điểm này người ta có thể hỏi, phải chăng phép lấy tổng Poisson là tất cả những gì chúng ta cần để ước lượng các tổng Cesaro? Xét cho cùng, chúng ta cần chuỗi Dirichlet để làm gì? Câu trả lời là phép lấy tổng Poisson làm việc với tổng có chỉ số nguyên và không thể làm gì với tổng có chỉ số là số nguyên tố. Chẳng hạn phép lấy tổng Poisson một mình nó không thể làm việc với các dãy (0.5) và (0.6). Nói cách khác phép lấy tổng Poisson một mình nó không thể chứng minh được định lý số nguyên tố.

Đối với định lý số nguyên tố, nói chung chúng ta cần phải xử lý như sau: Chúng ta bắt đầu với dãy (0.1), chúng ta tạo chuỗi Dirichlet chính là hàm zeta Riemann. Chúng ta dùng công thức lấy tổng Poisson để chứng minh rằng ς có thác triển phân hình và phương trình hàm. Chúng ta suy ra rằng $d\log\varsigma$ cũng có thác triển phân hình và phương trình hàm. Giờ đây $d\log\varsigma$ là chuỗi Dirichlet của dãy (0.6). Chúng ta hoàn tất công việc nếu chúng ta biết các cực của $d\log\varsigma$. Nhưng các cực của $d\log\varsigma$ căn bản là các không điểm của ς, đó chính là lý do chúng ta muốn định vị các không điểm của ς.

Chẳng hạn, định lý số nguyên tố dựa trên sự kiện là ς không có không điểm trên một miền mở nào đó chứa $\Re(s) \geqslant 1$, điều này được chứng minh bởi Hadamard cả trăm năm về trước.

Nếu anh có đủ thời gian và can đảm, anh hãy nghiên cứu lại tất cả những thứ đó cũng như định lý Dirichlet về số nguyên tố trong cấp số cộng. Đó là chỗ mà chúng ta cần một luật thuận nghịch nào đó. Nhưng anh không cần bắt đầu với luật thuận nghịch vì thật sự ra nó không phải là hướng chính trong sự phát triển ban đầu của hàm zeta, ít ra theo ý kiến của tôi. Tất nhiên về sau luật thuận nghịch sẽ trộn lẫn rất nhiều vào lý thuyết của hàm zeta cũng như trong chương trình của Langlands, nhưng mỗi lúc học một thứ thì vẫn dễ dàng hơn.

Chúc anh mọi điều tốt lành

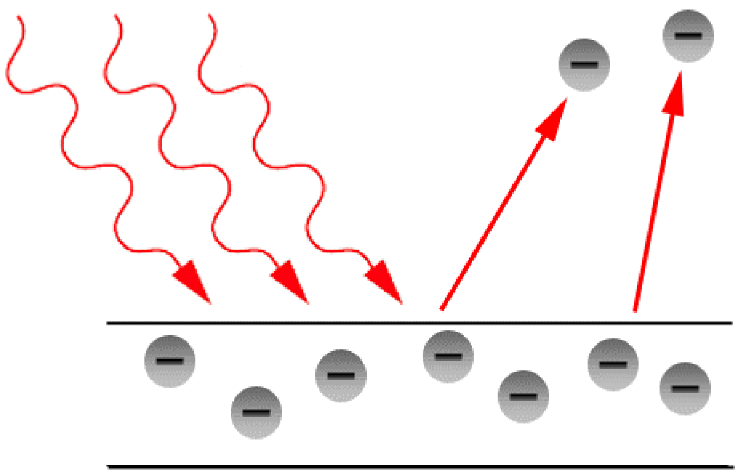
Châu

GIẢI NOBEL CỦA EINSTEIN HAY LÀ SÓNG ĐIỆN THOẠI CÓ GÂY UNG THƯ HAY KHÔNG

(Đàm Thanh Sơn - ĐH Chicago)

Bài viết được tham khảo từ blog của giáo sư Đàm Thanh Sơn.

Albert Einstein có lẽ là nhà vật lý nổi tiếng nhất từ trước đến nay. Công chúng thường biết đến ông ta như người khám phá ra thuyết tương đối, làm thay đổi quan niệm của chúng ta về không gian và thời gian. Thuyết tương đối bao gồm thuyết tương đối hẹp, được Einstein tìm ra năm 1905 và thuyết tương đối rộng được ông ta tìm ra 10 năm sau. Tuy nhiên có thể không phải ai cũng biết là giải thưởng Nobel về vật lý năm 1921 được trao cho Einstein vì một khám phá khác của ông: Hiệu ứng quang điện. Đây là công trình Einstein viết cũng vào năm 1905, cùng năm với công trình về thuyết tương đối hẹp và một công trình nữa về chuyển động Brown. Hiệu ứng quang điện là đóng góp lớn nhất của Einstein vào thuyết lượng tử, lý thuyết mà sau này được Bohr, Heisenberg, Schrödinger và nhiều người khác phát triển lên nhưng lại bị Einstein nghi ngờ đến cuối đời.



Hiệu ứng quang điện là hiện tượng khi ta chiếu ánh sáng vào một tấm kim loại thì thỉnh thoảng điện tử bị bứt ra khỏi kim loại. Ta có thể đoán là ánh sáng càng mạnh thì càng nhiều điện tử bị bứt ra. Phán đoán này hoá ra là không hoàn toàn đúng: Có những nguồn ánh sáng rất mạnh không gây ra hiệu ứng quang điện, nhưng có những nguồn yếu hơn lại gây ra hiệu ứng này. Thực nghiệm cho thấy rằng hiệu ứng quang điện phụ thuộc vào tần số của ánh sáng. Ví dụ, với cùng một mẫu kim loại, ánh sáng đỏ hoặc tia hồng ngoại không gây ra hiệu ứng nhưng ánh sáng tím hoặc cực tím lại có tác dụng.

Einstein giải thích điều này bằng cách áp dụng và mở rộng giả thuyết lượng tử của Planck. Einstein giả thuyết rằng ánh sáng bao gồm các hạt photon, mỗi hạt mang một năng lượng tỉ lệ thuận với tần số của ánh sáng.

$$E = hv.$$

Ở đây E là năng lượng của hạt photon, v là tần số của ánh sáng, và h là hằng số Planck. Công thức trên có tên là công thức Planck, công thức mà theo tôi đáng lẽ ra phải nổi tiếng hơn công thức $E = mc^2$.

Hiệu ứng quang điện là quá trình một hạt photon truyền năng lượng cho một hạt điện tử. Để bứt một điện tử ra khỏi mảnh kim loại ta cần một năng lượng tối thiểu nhất định, ta gọi là Δ. Như vậy chỉ khi $v > \frac{\Delta}{h}$ ánh sáng mới có thể bứt được điện tử ra khỏi khối kim loại. Nếu $v < \frac{\Delta}{h}$ thì nguồn sáng có mạnh thế nào cũng không có photon đủ năng lượng để gây ra hiệu ứng quang điện. Bạn có thể hỏi liệu có khi nào hai hạt photon, hoặc nhiều hơn, cùng hợp sức để bứt ra một điện tử hay không. Điều này về nguyên tắc có thể xảy ra, nhưng xác suất rất thấp, có thể bỏ qua.

Hiệu ứng quang điện có liên quan trực tiếp đến một câu hỏi hay được đặt ra hiện nay: Điện thoại di động có gây tác hại cho sức khoẻ hay không? Một trong những điều làm nhiều người lo lắng là khả năng gây ung thư của sóng điện thoại (ví dụ xem bài này). Nhiều người còn nói là sóng điện từ trong lò vi sóng cũng có thể gây ra ung thư.

Nếu ta nhớ lại công thức $E = hv$ của Einstein thì ta sẽ thấy những lo lắng này không có cơ sở. Đó là do tần số sóng của các thiết bị điện tử quá thấp để có thể gây ra những biến đổi của phân tử ADN. Tần số sóng trong lò vi sóng là 2500 MHz, tần số của điện thoại di động là 800 MHz hay 1900 MHz. Hằng số Planck là 4×10^{-9} eV/MHz, như vậy 2500 MHz tương đương với năng lượng 10 phần triệu eV, trong khi các quá trình hoá học hay sinh hoá cần năng lượng cỡ ít nhất 0.1 eV, nếu không phải là 1 eV. Sự chênh lệch đến $10 - 100$ nghìn lần giữa hai cỡ năng lượng làm cho lò vi sóng hay điện thoại di động không thể làm biến đổi gien của miếng thịt để trong lò hay cơ thể chúng ta. (Tia cực tím thì lại khác, vì tần số của tia cực tím cao hơn tần số của điện thoại di động đến cả triệu lần, nên nó có đủ năng lượng để gây tác hại cho tế bào).

Tất nhiên là điện thoại di động hay các thiết bị điện tử có thể có những tác hại khác, ví dụ cho tâm lý hay là giấc ngủ của người dùng, nhưng chúng ở ngoài khuôn khổ của bài viết này.

Epsilon
Tạp chí online của cộng đồng những người yêu toán

HỆ MẬT MÃ KHÓA CÔNG KHAI DỰA TRÊN ĐƯỜNG CONG ELLIPTIC - TỔNG QUAN VỀ HỆ MẬT MÃ KHÓA CÔNG KHAI

Đặng Minh Tuấn

(Vietkey)

Trong số này, Epsilon trân trọng gửi đến độc giả phần đầu tiên của chuyên đề về hệ mật mã khóa công khai dựa trên đường cong Elliptic của tác giả Đặng Minh Tuấn. Phần sau của chuyên đề sẽ được chuyển tải ở tạp chí số 10.

Sau đây là toàn văn của lời mở đầu và chương 1 của loạt chuyên đề.

LỜI MỞ ĐẦU

Tháng 3 năm 2016, Bộ Ngoại Giao Hoa Kỳ, đứng đầu là bộ trưởng John Kerry, đã dẫn một đoàn đại biểu tới các nước ASEAN trong đó có Việt Nam để thảo luận về phát triển Fintech và đặc biệt là về công nghệ Blockchain[1].Tháng 9 năm 2015, Ủy ban giao dịch hàng hoá tương lai Mỹ công bố, Bitcoin đã chính thức được đưa vào danh sách hàng hóa được phép giao dịch tại Mỹ[2].Công nghệ Blockchain và Bitcoin là công nghệ tiền số ra đời năm 2009 và ngày càng có nhiều quốc gia và các tổ chức, doanh nghiệp cho phép lưu hành và thanh toán bằng loại tiền số này trong không gian mạng Internet toàn cầu. Tháng 4-2016, giá trị thương mại của Bitcoin đã lên đến 6.5 tỷ USD [3]. Nền tảng cơ sở của Bitcoin chính là lý thuyết về mật mã mà cụ thể ở đây là hàm băm và lý thuyết về chữ ký số dựa trên Hệ mật đường cong Elliptic (ECC).

Bên cạnh việc sử dụng trong tiền số Bitcoin[4], ECC còn được ứng dụng rất nhiều trong thực tiễn ngành Công nghệ thông tin [1]. Các trang Web bảo mật https (http-secure) thường được dùng trong thanh toán điện tử hay ứng dụng riêng tư như gmail đều sử dụng các giao thức TLS (Transport Layer Security) mà trước đó là

[1] B. Cohen. (April 12, 2016) U.S. State Department Recommends Development of Blockchain and Distributed Ledgers to International Partners. [Online]. Available: http://www.nasdaq.com/article/us-state-department-recommendsdevelopment-of-blockchain-and-distributed-ledgers-to-international-partnerscm605334.

[2] (21/09/2015) Bitcoin chính thức được Mỹ công nhận là hàng hoá. [Online]. Available: http://vnreview.vn/tin-tuc-kinh-doanh/-/view-content/content/1654484/bitcoin-chinh-thuc-duoc-My-cong-nhan-la-hang-hoa.

[3] (15/4/2016) https://markets.blockchain.info/

[4] Địa chỉ ví Bitcoin được tính dựa trên khóa công khai của ECC với hàm băm bảo mật có độ dài 256-bit SHA256 và thuật toán Base58Encode dùng để chuyển số thành dạng 56 ký tự, RIPEMD (RACE Integrity Primitives Evaluation Message Digest) là một họ hàm băm bảo mật khác:

$$\begin{aligned}
\texttt{Version} &= 1(byte)\\
\texttt{KeyHash} &= \texttt{Version} + \texttt{RIPEMD}(\texttt{SHA256}(\texttt{PublicKeyEC}))\\
\texttt{CheckSum} &= \texttt{SHA256}(\texttt{SHA256}(\texttt{KeyHash}))\\
\texttt{BitcoinAddress} &= \texttt{Base58Encode}(\texttt{KeyHash} + \texttt{CheckSum})
\end{aligned}$$

SSL (Secure Socket Layer). Trong các giao thức này ECC được sử dụng để trao đổi khóa phiên. Các giao dịch remote access được sử dụng rất nhiều trong thế giới Unix, Linux là SSH (Secure SHell) cũng sử dụng ECC để trao đổi khóa. Ưu điểm của hệ mật sử dụng đường cong Elliptic (ECC) là có độ dài khóa nhỏ (160 bit tương đương với khóa độ dài 1024 Bit trong hệ mật RSA), do sử dụng độ dài khóa nhỏ nên tài nguyên phục vụ cho ECC thường nhỏ hơn rất nhiều, bên cạnh đó hiệu năng tính toán cũng được nâng cao rõ rệt. Hiện nay ECC đang là xu thế để thay thế RSA.

Cơ sở toán học của hệ mật ECC là nhóm giao hoán Abel các điểm nằm trên đường cong Elliptic. Ngoài việc đường cong Elliptic là cơ sở cho hệ mật ECC, hệ mật ID-Based, đường cong Elliptic (EC) còn là công cụ hữu hiệu để phân tích số nguyên ra thừa cố nguyên tố [2, 3, 4], hoặc dùng để kiểm tra tính nguyên tố của số nguyên [3]. EC cũng là cơ sở để chứng minh định lý Fermat nổi tiếng đã tồn tại nhiều trăm năm qua.

Đường cong Elliptic là một trường hợp đặc biệt của phương trình Diophant. Lý thuyết về đường cong Elliptic (EC) rất phong phú và đồ sộ. Trong [5] tác giả Serge Lang đã phát biểu về phương diện học thuật: "*Có thể viết vô tận về đường cong Elliptic*". Các lý thuyết và khái niệm liên quan tới EC có thể liệt kê một số như dưới đây:

- Lý thuyết nhóm, vành, trường trong đại số trừu tượng [3, 6];
- Đa tạp Affine, đa tạp Jacobian và đa tạp xạ ảnh trong hình học đại số [7, 8];
- Điểm Torsion, Divisor, cặp song tuyến tính Weil, Tate-Lichtenbaum [3];
- Lý thuyết trường Galois, tự đồng cấu-ánh xạ Frobenius [3, 9];
- Lý thuyết Baker-Feldman, Baker-Tijdeman và lý thuyết Kummer [5];
- Số p-adic, Isogenies, hàm Sigma và hàm Zeta [5, 7, 10, 3, 4];
- Nhóm đối đồng điều, đối đồng điều Galois và đối đồng điều phi giao hoán (Topo đại số) [8, 4];
- Nhóm Mordell–Weil, Selmer và nhóm Shafarevich–Tate [8, 11];
- Phương pháp hình học và Tựa tuyến tính (Quasilinear) [12].

Với ý nghĩa to lớn cả về thực tiễn và học thuật, EC là nền tảng toán học quan trọng trong đại số hiện đại cũng như lý thuyết mật mã hiện đại. EC cũng là nền tảng quan trọng trong chính phủ điện tử và thương mại điện tử. Chính vì những điều này mà Chuyên đề "*Hệ mật mã khóa công khai dựa trên đường cong Elliptic*" được lựa chọn để trình bày báo cáo.

Với khối lượng kiến thức và khái niệm đồ sộ như đã liệt kê ở trên việc nghiên cứu và đào sâu về đường cong Elliptic gặp không ít khó khăn cho những người làm Công nghệ thông tin (CNTT) mà toán học không phải là chuyên môn chính. Mục tiêu của chuyên đề này là tổng hợp những khái niệm và kiến thức cơ bản nhất của EC liên quan đến cơ sở toán học của Hệ mật dựa trên đường cong Elliptic. Đồng thời người viết cũng chứng minh lại một số định lý và bổ đề theo cách dễ hiểu hơn, tránh dùng đến các khái niệm quá phức tạp và xa lạ với chuyên ngành CNTT. Các phép toán của đường cong Elliptic được trình bày trong báo cáo phần lớn được cài đặt bằng phần cứng sử dụng công nghệ FPGA (Field-Programmable Gate Array) của Xilinx trong khuôn khổ Đề tài cấp Nhà nước KC01-18 (đã được nghiệm thu trong năm 2014) do người viết báo cáo làm chủ nghiệm đề tài, kết quả được công bố tại [13].

Phạm vi của chuyên đề cũng được giới hạn với những khái niệm và lý thuyết đủ cho các ứng dụng cơ bản của EC, các phát triển của EC thành hệ mật ID-Based, hoặc các ứng dụng về chữ ký số tập thể, chữ ký số nhóm, chữ ký ngưỡng, chứ ký ủy nhiệm, chứ ký số mù sẽ không được đề cập đến trong khuôn khổ của báo cáo này.

Báo cáo chuyên đề được kết cấu thành 02 chương, chương 1 trình bày các khái niệm, định nghĩa cơ bản về đường cong Elliptic (Phương trình của EC, nhóm cộng Abel các điểm trên đường cong, chứng minh định lý về nhóm...). Chương 2 trình bày về Hệ mật dựa trên đường cong Elliptic và một số ứng dụng trong mã hóa, xác thực chữ ký số, trao đổi khóa dự trên bài toán khó Logarithm rời rạc.

Ký hiệu

$\mathbb{N}$	tập hợp số tự nhiên
$\mathbb{N}^*$	tập hợp số tự nhiên khác 0
$\mathbb{Z}$	trường số nguyên
$\mathbb{Q}$	trường số hữu tỉ
$\text{char}(K)$	đặc số của trường K
$\equiv$	dấu đồng dư
∞	dương vô cùng (tương đương với $+\infty$)
$\gcd$	ước số chung lớn nhất
$\deg$	bậc của đa thức
$\det$	định thức
RSA	Hệ mã công khai dựa trên bài toán phân tích ra thừa số nguyên tố do Rivest-Shamir-Adleman phát triển
EC	Đường cong Elliptic (Elliptic Curve)
ECC	Hệ mật dựa trên đường cong Elliptic (Elliptic Curve Cryptography)
ECDLP	Elliptic Curve Logarithm Problem
ECDH	Thuật toán Elliptic Curve Diffie–Hellman
ECDSA	The Elliptic Curve Digital Signature Algorithm
ECIES	The Elliptic Curve Integrated Encryption System
ECMQV	Elliptic Curve Menezes–Qu–Vanstone protocol

1. Tổng quan về đường cong Elliptic

Năm 250 sau Công nguyên, Diophant khi giải bài toán tìm số tầng của tháp các quả cầu mà khi trải ra mặt đất có thể xếp thành một hình vuông đã dẫn đến giải phương trình (y là số quả cầu trên 1 cạnh hình vuông; x là số tầng của tháp):

$$y^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + x^2 = \frac{x(x+1)(2x+1)}{6}$$

Phương trình $y^2 = x(x+1)(2x+1)/6$ là một dạng của đường cong Elliptic.
Năm 1637, nhà toán học và vật lý học người Pháp Pierre de Fermat công bố định lý Fermat cuối cùng khi viết trên lề bản copy công trình của Diophant: Phương trình sau đây là vô nghiệm:

$$x^n + y^n = z^n, \quad n > 2$$

Hơn ba thế kỷ, đã có rất nhiều nhà toán học cố gắng chứng minh định lý này xong đều thất bại, mãi cho đến năm 1994, Andrew Wiles, giáo sư trường Princeton đã gây một tiếng vang lớn trong cộng đồng toán học thế giới vào thời điểm đó khi sử dụng đường cong Elliptic có dạng $y^2 = x(x - a^n)(x + b^n)$ cùng với lý thuyết về Modul để chứng minh định lý Fermat cuối cùng.
Năm 1987, Trong [14], Lenstra đề xuất thuật toán phân tích số nguyên ra thừa số nguyên tố sử dụng đường cong Elliptic, đó là thuật toán tương đối nhanh, chạy với thời gian dưới hàm mũ và là thuật toán nhanh thứ 3 trong việc phân tích ra thừa số nguyên tố, sau phương pháp sàng đa thức toàn phương và phương pháp sàng trường số tổng quát.
Trong lĩnh vực mật mã, vào năm 1985, Victor S. Miller công bố bài báo đầu tiên về ứng dụng đường cong EC trong mật mã "*Use of Elliptic Curves in Cryptography*" [15] và sau đó là Neal Koblitz với "*Elliptic curve cryptosystem*" [16] vào năm 1987. Từ đó cho đến nay đã có rất nhiều công bố nghiên cứu về EC về lý thuyết và trong thực tiễn càng ngày ứng dụng ECC càng được sử dụng rộng rãi, và đã được đưa thành các tiêu chuẩn.
Một số tiêu chuẩn liên quan đến đường cong Elliptic:

IEEE 1363:	Tiêu chuẩn này bao gồm gần như tất cả các thuật toán về các hệ khóa công khai trong đó có ECDH, ECDSA, ECMQV và ECIES. Trong phần phụ lục có cả các thuật toán cơ bản về lý thuyết số liên quan đến hệ mật khóa công khai.
ANSI X9.62 và X9.63:	Các chuẩn này tập trung vào đường cong Elliptic và cụ thể về ECDSA trong X9.62 và ECDH, ECMQV và ECIES trong X9.63. Các chuẩn này cũng xác định khuôn dạng các dữ liệu và danh mục các đường cong khuyến cáo sử dụng.
FIPS 186.2:	Tiêu chuẩn của NIST cho chữ ký số, mô tả chi tiết về thuật toán DSA algorithm.
SECG:	Là tiêu chuẩn được biên soạn bởi nhóm các doanh nghiệp dẫn dắt bởi công ty Certicom, gần như là ánh xạ của các chuẩn ANSI nhưng được tiếp cận trên môi trường Web từ Website http://www.secg.org/
ISO 15946-2:	Tiêu chuẩn mô tả về ECDSA và ECIES (còn được gọi là ECIES-KEM).
RFC 3278:	"Use of Elliptic Curve Cryptography (ECC) Algorithms in Cryptographic Message Syntax (CMS)" là khuyến nghị sử dụng thuật toán ECC trong mã hóa thông điệp văn bản.

2. Phương trình Weierstraß của đường cong Elliptic

Trong tài liệu này, đa phần số các đường cong Elliptic sẽ được nghiên cứu dưới dạng sau:

$$y^2 = x^3 + Ax + B, \tag{2.1}$$

Trong đó A và B là các hằng số. Các giá trị của x, y, A, B thường là các giá trị trên một trường nào đó, ví dụ như $\mathbb{R}$ (số thực), $\mathbb{Q}$ (số hữu tỷ), $\mathbb{C}$ (số phức), hoặc trường hữu hạn $\mathbb{F}_q$, với $q = p^n$ trong đó p là số nguyên tố với $n \geqq 1$. Nếu K là một trường có $a, b \in K$, khi đó ta nói đường cong Elliptic được định nghĩa trên trường K. Điểm (x, y) trên đường cong Elliptic với $(x, y) \in K$

được gọi là điểm K–Hữu tỷ. Dạng tổng quát phương trình Weierstrass của đường cong Elliptic sẽ được biểu diễn dưới dạng:

$$y^2 + a_1xy + a_3y = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6, \tag{2.2}$$

Trong đó $a_1, \cdots, a_6$ là các hằng số. Dạng (2.2) thường được sử dụng với các trường K có đặc số chap(K) bằng 2 hoặc 3. Khi K có chap(K) khác 2 có thể biến đổi (2.2) thành dạng sau:

$$\left(y + \frac{a_1x}{2} + \frac{a_3}{2}\right)^2 = x^3 + \left(a_2 + \frac{a_1^2}{4}\right)x^2 + \left(a_4 + \frac{a_1a_3}{2}\right)x + \left(\frac{a_3^2}{4} + a_6\right),$$

Có thể viết lại như sau:

$$y_1^2 = x^3 + a_2'x^2 + a_4'x + a_6',$$

Với $y_1 = y + a_1x/2 + a_3/2$ và với các hằng số a_2', a_4', a_6'. Khi K có chap(K) khác 3 có thể dùng phép thế $x_1 = x + a_2'/3$ và ta có:

$$y_1^2 = x_1^3 + Ax + B,$$

Trong đó A, B là các hằng số nào đó. Đường cong (2.1) có định thức $\Delta = -16(4A^3 + 27B)$. Đường cong này sẽ suy biến và không có đủ 3 nghiệm phân biệt khi $\Delta = 0$, trong tài liệu này chúng ta chỉ xét các đường cong có $\Delta \neq 0$.

3. Cộng các điểm trên đường cong Elliptic

Xét hai điểm $P_1 = (x_1, y_1)$ và $P_2 = (x_2, y_2)$ trên đường cong Elliptic $E : y^2 + a_1xy + a_3y = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6$. Phép cộng giữa hai điểm trên đường cong E được định nghĩa như sau:

$$P_3(x_3, y_3) = P_1(x_1, y_1) + P_2(x_2, y_2) \tag{3.1}$$

Trong đó $P_3(x_3, y_3) = -P_3'(x_3, y_3')$, điểm $P_3'(x_3, y_3')$ là giao điểm của đường cong E và đường thẳng đi qua P_1 và P_2. Vì 2 điểm $P_3(x_3, y_3)$ và $-P_3'(x_3, y_3')$ đều nằm trên đường cong E nên (x_3, y_3) và (x_3, y_3') phải thỏa mãn phương trình (2.2). Công thức để tính các giá trị (x_3, y_3) sẽ được chứng minh ở dưới đây.
Trong các các tài liệu cơ bản và nâng cao được tham chiếu nhiều về đường cong Elliptic như [3, 7, 8] người viết vẫn chưa thỏa mãn với các dẫn dắt và chứng minh công thức tổng quát cho các giá trị (x_3, y_3), do đó các công thức này sẽ được chứng minh chi tiết trong tài liệu này. Đường thẳng đi qua 2 điểm P_1 và P_2 có phương trình là:

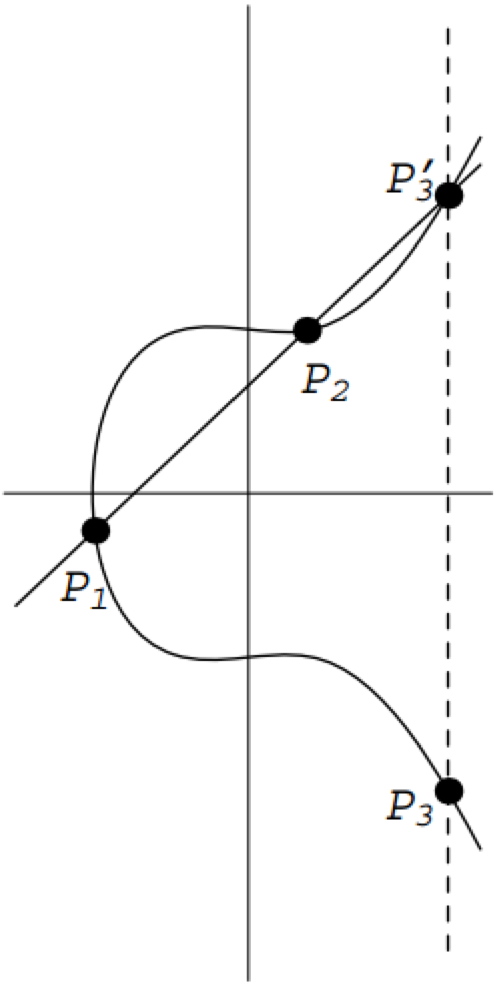
$$y = \lambda x + \mu \tag{3.2}$$

Trong đó λ là hệ số góc của đường thẳng đi qua P_1, P_2. Ta có:

$$y_1 = \lambda x_1 + \mu \tag{3.3}$$

$$y_2 = \lambda x_2 + \mu \tag{3.4}$$

$$y_3' = \lambda x_3 + \mu \tag{3.5}$$



Hình 6.1: Phép cộng trên đường cong Elliptic

3.1. Trường hợp 2 điểm không trùng nhau $P_1 \neq P_2$

Từ (3.3) và (3.4) suy ra: $y_1 - y_2 = \lambda(x_1 - x_2)$, khi $P_1 \neq P_2$, nghĩa là $x_1 \neq x_2$ ta có công thức:

$$\lambda = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \tag{3.6}$$

$$\mu = y_1 - \lambda x_1 = y_1 - \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \times x_1 = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{x_1 - x_2} \tag{3.7}$$

Tiếp theo thay y ở (3.2) vào phương trình (2.2) ta có:

$$(\lambda x + \mu)^2 + (a_1 x + a_3)(\lambda x + \mu) = x^3 + a_2 x^2 + a_4 x + a_6 \tag{3.8}$$

Từ đó dẫn đến phương trình $r(x) = 0$ với:

$$r(x) = x^3 + (a_2 - \lambda^2 - a_1\lambda)x^2 + (a_4 - 2\lambda\mu - a_3\lambda - a_1\mu)x + a_6 - \mu^2 - a_3\mu \tag{3.9}$$

Biết rằng $r(x)$ có 3 nghiệm phân biệt nên có thể viết:

$$\begin{aligned} r(x) &= (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) \\ &= (x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2)(x-x_3) \\ &= x^3-(x_1+x_2)x^2+x_1x_2x-x_3x^2+(x_1+x_2)x_3x-x_1x_2x_3 \\ &= x^3-(x_1+x_2+x_3)x^2+(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)x-x_1x_2x_3 \end{aligned} \tag{3.10}$$

Đồng nhất các hệ số x^2 của $r(x)$ ở 2 phương trình (3.9) và (3.10) ta có: $x_1+x_2+x_3 = -(a_2-\lambda^2-a_1\lambda)$ từ đây có thể tính được x_3 theo công thức sau:

$$x_3 = \lambda^2 + a_1\lambda - a_2 - x_1 - x_2 \tag{3.11}$$

Đến đây cần phải tính tiếp giá trị y_3, lúc này x_3 đã tính xong nên có thể coi là hằng số, có thể viết lại (2.2) thành dạng sau:

$$y^2 + (a_1x_3+a_3)y - (x_3^3 + a_2x_3^2 + a_4x_3 + a_6) = 0 \tag{3.12}$$

Phương trình bậc 2 này có 2 nghiệm là:

$$y_3, y_3' = \frac{-(a_1x_3+a_3) \pm \sqrt{\Delta}}{2\times 1} \tag{3.13}$$

Cộng 2 nghiệm này ta sẽ có: $y_3' + y_3 = -a_1x_3 - a_3$, mặt khác do y_3' nằm trên đường thẳng P_1, P_2 nên $y_3' = \lambda x_3 + \mu$. Từ đây có thể tính được y_3 theo công thức [5]:

$$y_3 = -\lambda x_3 - \mu - a_1x_3 - a_3 \tag{3.14}$$

Thay μ từ (3.7) ta có thể tính y_3 dưới dạng sau:

$$y_3 = \lambda(x_1 - x_3) - y_1 - a_1x_3 - a_3 \tag{3.15}$$

3.2. Trường hợp 2 điểm trùng nhau $P_1 = P_2$

Khi này $x_1 = x_2$ và $y_1 = y_2$ do đó công thức tính λ ở (3.7) không sử dụng được vì xuất hiện phép chia số 0. Trong trường hợp này λ chính là hệ số góc của đường thẳng tiếp tuyến đường cong E tại P_1 hay P_2. Hệ số góc của tiếp tuyến của E chính là đạo hàm $\frac{dy}{dx}$, sử dụng các quy tắc lấy đạo hàm của tích, đạo hàm của hàm số hợp và lấy đạo hàm 2 vế của phương trình (2.2) theo dx ta có:

$$\begin{aligned} \frac{d(y^2+a_1xy+a_3y)}{dx} &= \frac{d(x^3+a_2x^2+a_4x+a_6)}{dx} \\ \frac{d(y^2)}{dx} + \frac{d(a_1xy)}{dx} + \frac{d(a_3y)}{dx} &= 3x^2 + 2a_2x + a_4 \\ \frac{d(y^2)}{dy} \times \frac{dy}{dx} + a_1(\frac{d(xy)}{dx}) + a_3\frac{dy}{dx} &= 3x^2 + 2a_2x + a_4 \\ 2y\frac{dy}{dx} + a_1(y + x\frac{dy}{dx}) + a_3\frac{dy}{dx} &= 3x^2 + 2a_2x + a_4 \\ (2y + a_1x + a_3)\frac{dy}{dx} &= 3x^2 + 2a_2x + a_4 - a_1y \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{3x^2 + 2a_2x + a_4 - a_1y}{2y + a_1x + a_3} \end{aligned}$$

[5] Ghi chú: Các tác giả H. Cohen và G. Frey trong cuốn "*Handbook of Elliptic and Hyperelliptic Curve Cryptography*" [7] trình bày diễn giải về cách tính y_3 dựa trên sự đối xứng qua trục x là không chính xác và thiếu rõ ràng đối với đường cong Elliptic dạng tổng quát, cách giải thích của người viết bằng cách giải phương trình bậc 2 ở đây có thể coi là đúng đắn và rõ ràng hơn.

Như vậy với điểm $P_1(x_1, y_1)$ ta có:

$$\lambda = \frac{3x_1^2 + 2a_2x_1 + a_4 - a_1y_1}{2y_1 + a_1x_1 + a_3} \tag{3.16}$$

Trong tất cả các trường hợp điểm P_3 là tổng của 2 điểm P_1, P_2 sẽ là điểm có tọa độ là:

$$P_3(x_3, y_3) = (\lambda^2 + a_1\lambda - a_2 - x_1 - x_2, \lambda(x_1 - x_3) - y_1 - a_1x_3 - a_3) \tag{3.17}$$

Với đường cong E dạng (2.1), khi đó $a_1 = a_3 = a_2 = 0$ và P_3 sẽ được tính theo công thức:

$$P_3(x_3, y_3) = (\lambda^2 - x_1 - x_2, \lambda(x_1 - x_3) - y_1) \tag{3.18}$$

Trong trường hợp $P_1 = P_2$, (3.16) sẽ được biến đổi thành:

$$\lambda = \frac{3x_1^2 + a_4}{2y_1} \tag{3.19}$$

4. Nhân vô hướng các điểm trên đường cong Elliptic

Với $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ định nghĩa phép nhân vô hướng của điểm P nằm trên đường cong E là phép cộng n lần chính bản thân điểm P:

$$P \mapsto nP = \underbrace{P + P + \cdots + P}_{n \text{ lần}} = Q$$

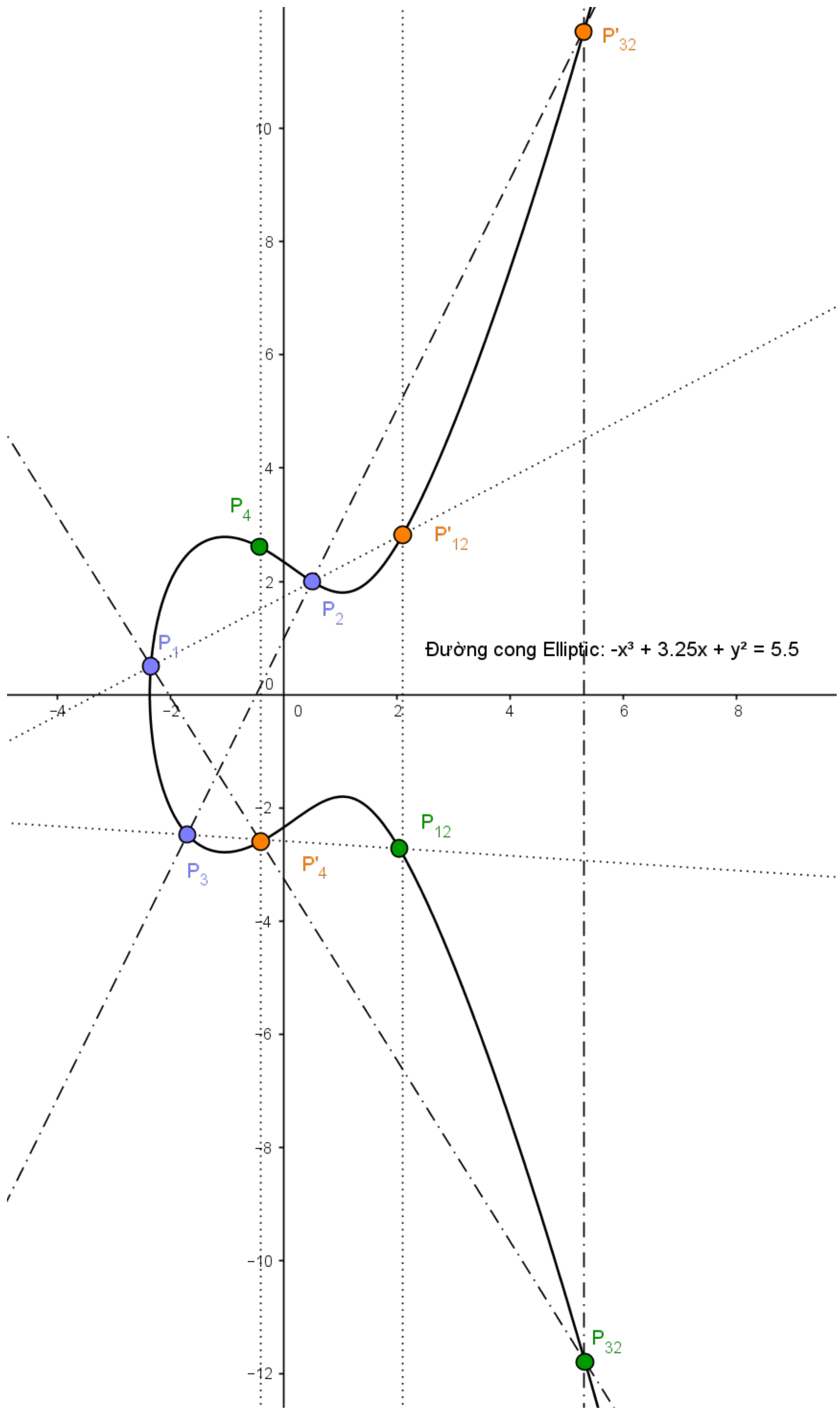
Để tối ưu phép nhân vô hướng, có thể sử dụng phương pháp *Nhân đôi-và-cộng*, đầu tiên biểu diễn số n dưới dạng: $n = n_0 + 2n_1 + 2^2n_2 + \cdots + 2^m n_m$ với $[n_0 \ldots n_m] \in \{0, 1\}$, sau đó áp dụng thuật toán:

Algorithm 1 Phương pháp Nhân đôi-và-cộng

```
1: Q ← 0
2: for i = 0 to m do
3:   if n_i = 1 then
4:     Q ← CộngĐiểm(Q,P)
5:   end if
6:   P ← NhânĐôi(P)
7: end for
8: return Q
```

Ngoài phương pháp *Nhân đôi-và-cộng*, có thể sử dụng phương pháp *Trượt-cửa-sổ*. Các phương pháp này cho phép nhân vô hướng một cách tối ưu.
Lưu ý của người viết:

- Không tồn tại phép nhân 2 điểm trên đường cong E, có nghĩa là không tồn tại $P \times Q$ với $P, Q \in E$.
- Không tồn tại thuật toán chia vô hướng $Q : n$. Biết rằng $Q = nP$, bài toán tìm số n là bài toán Logarithm rời rạc sẽ được đề cập tới ở chương sau. Đây là bài toán khó, thông thường phải thử lần lượt $n = 1, 2, \ldots, n - 1$ phép cộng điểm P, cho đến khi tổng bằng Q, tuy nhiên có một số thuật toán tối ưu hơn để tìm n nhưng vẫn không thể giải được bài toán này trong thời gian đa thức vì thế dựa vào độ khó này có thể xây dựng ra hệ mật đường cong Elliptic với các giao thức cho mã hóa, xác thực và trao đổi khóa.



Hình 6.2: Ví dụ về tính chất kết hợp trên đường cong Elliptic

5. Nhóm $(+)$ của các điểm trên đường cong Elliptic

Xét đường cong Elliptic E được định nghĩa bởi phương trình $y^2 = x^3 + Ax + B$. Xét 3 điểm nằm trên đường cong E là P_1, P_2, P_3 lần lượt có các tọa độ là $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$.

Để các điểm trên đường cong Elliptic tạo thành nhóm $(+)$, "điểm vô cùng" (∞) sẽ được thêm vào đường cong, kí hiệu là $\mathcal{O}$, điểm này sẽ nằm ở trên cùng và dưới cùng của trục y. Một trong những thuộc tính quan trọng nhất của đường cong Elliptic là tồn tại nhóm các điểm với phép cộng nằm trên đường cong.

Định lý 5.1. *Phép cộng với các điểm P, P_1, P_2, P_3 trên đường cong E thỏa mãn các tính chất của nhóm:*

1. *(Giao hoán): $P_1 + P_2 = P_2 + P_1$;*

2. *(Điểm đơn vị): $P + \infty = P$;*

3. *(Điểm nghịch đảo): Tồn tại P' của P sao cho $P + P' = \infty$;*

4. *(Kết hợp): $(P_1 + P_2) + P_3 = P_1 + (P_2 + P_3)$.*

Chứng minh. (*1. Tính chất giao hoán*) của phép cộng 2 điểm P_1, P_2 là hiển nhiên từ công thức tính tọa độ của điểm tổng, các giá trị có giao hoán thì giá trị tính bởi công thức này cũng không thay đổi, hoặc về mặt hình học đường thẳng đi qua P_1, P_2 dù có xuất phát từ P_1 hay P_2 thì đều như nhau và cùng cắt đường cong E tại một điểm chung duy nhất.
(*2. Điểm đơn vị*) không cần phải chứng minh vì nó xuất phát từ định nghĩa. Có thể lý giải rõ hơn về điểm (∞) và cách định nghĩa phép cộng trên E (theo quan điểm của người viết) như sau: Khi đường cong E không suy biến, nó sẽ cắt một đường thẳng được định nghĩa bởi phương trình (3.2) ở 3 điểm, thực vậy theo các phép biến đổi ở mục 3.1 (trang 28) phương trình (3.9) $r(x)$ sẽ có 3 nghiệm phân biệt. Mặt khác E đối xứng qua trục x do phương trình (2.1) có thành phần y^2 nên luôn tồn tại hai giá trị $y, -y$ thỏa mãn (2.1), cũng do tính đối xứng này nên đường cong E sẽ cắt các đường thẳng song song với với trục y ở 2 điểm, vì nếu cắt thêm 1 điểm nữa thì sẽ phải cắt thành 4 điểm do tính đối xứng, điều này là mẫu thuẫn vì phương trình bậc 3 chỉ có tối đa 3 nghiệm. Ở trường hợp này nếu cộng 2 điểm nằm trên đường song song trục y sẽ không tìm được điểm thứ 3 do vậy $P_1 + P_2$ sẽ không tồn tại. Chính vì để nhóm các điểm trên E có tính đóng bắt buộc chúng ta phải định nghĩa thêm điểm ∞ coi như là điểm thứ 3 nằm trên đường cong E, và nó sẽ nằm ở vô cực ở 2 đầu trục y.
Tiếp theo, có thể lý giải (của người viết[6]) về phép định nghĩa phép cộng 2 điểm trên E như sau. Để thỏa mãn tính chất tồn tại điểm đơn vị theo định nghĩa về nhóm G với mọi giá trị $a \in G$ tồn tại $e \in G$ sao cho

$$a \bullet e = e \bullet a = a \tag{5.1}$$

Xét điểm P trên đường cong E, khi đó cần tính $P + \infty$, dễ thấy điểm này chắc chắn phải nằm trên cùng đường thẳng song song trục y vì nếu không sẽ cắt E ở 2 điểm nữa cùng với ∞ tạo thành 4 điểm và điều này là phi lý. Nếu đã nằm trên đường song song y thì nó sẽ cắt E ở điểm đối xứng qua trục x, nếu coi điểm cắt này là tổng $P + \infty$ thì như vậy sẽ tồn tại $P + \infty = P'$ và điều kiện (5.1) sẽ không được thỏa mãn. Vì vậy sẽ phải định nghĩa điểm tổng không phải là giao

[6]Khi bắt đầu nghiên cứu về đường cong Elliptic, luôn có 2 câu hỏi mà người viết không thể tìm thấy trong nhiều tài liệu kể cả những cuốn kinh điển về Elliptic:

1. Tại sao phải chọn ∞ làm điểm trung hòa.

2. Tại sao $P_1 + P_2 = P_3$ mà P_3 không nằm trên đường thẳng đi qua P_1, P_2 mà phải là điểm đối xứng của giao điểm qua trục x.

Trong chuyên đề này cả 2 câu hỏi đều đã được người viết lý giải một cách rõ ràng và đầy đủ.

trực tiếp với E mà phải lấy là điểm đối xứng để đối xứng của điểm đối xứng sẽ quay lại chính P và ta có $P + \infty = P$.

(*3.Điểm nghịch đảo*) Cũng từ nhận xét rằng luôn tồn tại 2 điểm P, P' nằm trên cùng đường thẳng song song với trục y và sẽ cắt đường cong E ở điểm ∞, coi 2 điểm này là nghịch đảo của nhau và sẽ luôn có: $P + P' = \infty$.

(*4. Tính chất kết hợp*) Chứng minh $(P_1 + P_2) + P_3 = P_1 + (P_2 + P_3)$ khác hẳn với 3 điều kiện khác về nhóm, và nó đặc biệt phức tạp. Có 2 cách chứng minh điều này là dùng phương pháp hình học hoặc đại số. Có thể tham khảo chứng minh bằng hình học qua các tài liệu [3], [17] và [4], tuy nhiên chứng minh bằng phương pháp hình học tương đối khó hiểu với một số định lý trong không gian xạ ảnh. Dưới đây là một số điểm được sử dụng để chứng minh bằng phương pháp đại số. Trước tiên tính các điểm tổng sau:

$$\begin{aligned}
P_{12} &= P_1 + P_2 \\
P_{32} &= P_3 + P_2 \\
P_{123} &= (P_1 + P_2) + P_3 = P_{12} + P_3 \\
P_{321} &= (P_3 + P_2) + P_1 = P_{32} + P_1
\end{aligned}$$

Từ các công thức tính giá trị tọa độ (x, y) của điểm tổng, có thể dễ dàng biến đổi tính điểm:

$$\lambda_{12} = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)} \tag{5.2}$$

$$\lambda_{32} = \frac{(y_2 - y_3)}{(x_2 - x_3)} \tag{5.3}$$

$$x_{12} = \lambda_{12}^2 - x_1 - x_2 = \frac{(y_2 - y_1)^2}{(x_2 - x_1)^2} - x_1 - x_2 \tag{5.4}$$

$$\begin{aligned}
y_{12} &= \lambda_{12}(x_1 - x_{12}) - y_1 = -\lambda_{12}^3 + (2x_1 + x_2)\lambda_{12} - y_1 \\
&= -\frac{(y_2 - y_1)^3}{(x_2 - x_1)^3} + \frac{(2x_1 + x_2)(y_2 - y_1)}{x_2 - x_1} - y_1
\end{aligned} \tag{5.5}$$

$$x_{32} = \lambda_{32}^2 - x_3 - x_2 = \frac{(y_2 - y_3)^2}{(x_2 - x_3)^2} - x_3 - x_2 \tag{5.6}$$

$$\begin{aligned}
y_{32} &= \lambda_{32}(x_3 - x_{32}) - y_3 = -\lambda_{32}^3 + (2x_3 + x_2)\lambda_{32} - y_3 \\
&= -\frac{(y_2 - y_3)^3}{(x_2 - x_3)^3} + \frac{(2x_3 + x_2)(y_2 - y_3)}{x_2 - x_3} - y_3
\end{aligned} \tag{5.7}$$

$$\lambda_{123} = \frac{(y_{12} - y_3)}{(x_{12} - x_3)} \tag{5.8}$$

$$\lambda_{321} = \frac{(y_{32} - y_1)}{(x_{32} - x_1)} \tag{5.9}$$

Cuối cùng cách tính tọa độ của các điểm P_{123}, P_{321} theo tọa độ 3 điểm $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), P_3(x_3, y_3)$

được biểu diễn dưới các dạng công thức từ (5.10) đến (5.13).

$$x_{123} = \frac{\left(-\frac{(y_2-y_1)^3}{(x_2-x_1)^3} + \frac{(2x_1+x_2)(y_2-y_1)}{x_2-x_1} - y_1 - y_3\right)^2}{\left(\frac{(y_2-y_1)^2}{(x_2-x_1)^2} - x_1 - x_2 - x_3\right)^2} - \frac{(y_2-y_1)^2}{(x_2-x_1)^2} + x_1 + x_2 - x_3 \tag{5.10}$$

$$\begin{aligned} y_{123} = {} & \frac{\left(-\frac{(y_2-y_1)^3}{(x_2-x_1)^3} + \frac{(2x_1+x_2)(y_2-y_1)}{x_2-x_1} - y_1 - y_3\right)^3}{\left(\frac{(y_2-y_1)^2}{(x_2-x_1)^2} - x_1 - x_2 - x_3\right)^3} \\ & + \frac{\left(\frac{2(y_2-y_1)^2}{(x_2-x_1)^2} - 2x_1 - 2x_2 + x_3\right)\left(-\frac{(y_2-y_1)^3}{(x_2-x_1)^3} + \frac{(2x_1+x_2)(y_2-y_1)}{x_2-x_1} - y_1 - y_3\right)}{\frac{(y_2-y_1)^2}{(x_2-x_1)^2} - x_1 - x_2 - x_3} \\ & + \frac{(y_2-y_1)^3}{(x_2-x_1)^3} - \frac{(2x_1+x_2)(y_2-y_1)}{x_2-x_1} + y_1 \end{aligned} \tag{5.11}$$

$$x_{321} = \frac{\left(-\frac{(y_2-y_3)^3}{(x_2-x_3)^3} + \frac{(2x_3+x_2)(y_2-y_3)}{x_2-x_3} - y_3 - y_1\right)^2}{\left(\frac{(y_2-y_3)^2}{(x_2-x_3)^2} - x_3 - x_2 - x_1\right)^2} - \frac{(y_2-y_3)^2}{(x_2-x_3)^2} + x_3 + x_2 - x_1 \tag{5.12}$$

$$\begin{aligned} y_{321} = {} & \frac{\left(-\frac{(y_2-y_3)^3}{(x_2-x_3)^3} + \frac{(2x_3+x_2)(y_2-y_3)}{x_2-x_3} - y_3 - y_1\right)^3}{\left(\frac{(y_2-y_3)^2}{(x_2-x_3)^2} - x_3 - x_2 - x_1\right)^3} \\ & + \frac{\left(\frac{2(y_2-y_3)^2}{(x_2-x_3)^2} - 2x_3 - 2x_2 + x_1\right)\left(-\frac{(y_2-y_3)^3}{(x_2-x_3)^3} + \frac{(2x_3+x_2)(y_2-y_3)}{x_2-x_3} - y_3 - y_1\right)}{\frac{(y_2-y_3)^2}{(x_2-x_3)^2} - x_3 - x_2 - x_1} \\ & + \frac{(y_2-y_3)^3}{(x_2-x_3)^3} - \frac{(2x_3+x_2)(y_2-y_3)}{x_2-x_3} + y_3 \end{aligned} \tag{5.13}$$

Cần phải chứng minh rằng $P_{123} = P_{321}$ điều này có nghĩa cần phải chứng minh:

$$dx = x_{123} - x_{321} = 0 \tag{5.14}$$

$$dy = y_{123} - y_{321} = 0 \tag{5.15}$$

Triển khai vế trái của (5.14), sẽ được một phân số mà tử số và mẫu số bao gồm tổng cộng 1446 thành phần, tương tự vế trái của (5.15) có tất cả 10081 thành phần có dạng $n_k x_1^{i_1} x_2^{i_2} x_3^{i_3} y_1^{j_1} y_2^{j_2} y_3^{j_3}$, trong đó số mũ $i_1, i_2, i_3, j_1, j_2, j_3$ nằm trong khoảng $[0..12]$ và n_k là hệ số của thành phần biểu thức trên. Có thể kiểm tra tính đúng đắn của (5.14) và (5.15) bằng phần mềm Maple với các ràng buộc sau:

$$y_1^2 = x_1^3 + Ax_1 + B \tag{5.16}$$
$$y_2^2 = x_2^3 + Ax_2 + B \tag{5.17}$$
$$y_3^2 = x_3^3 + Ax_3 + B \tag{5.18}$$

□

6. Đường cong Elliptic trên trường hữu hạn $\mathbb{F}_q$

6.1. Trường hữu hạn $\mathbb{F}_q$

Các ứng dụng về mật mã của đường cong Elliptic đa số chỉ sử dụng các đường cong trên trường hữu hạn.
Xét $\mathbb{F}_q$ là một trường hữu hạn (hữu hạn số phần tử số nguyên dương):

$$\mathbb{F}_q = \{0, 1, 2 \ldots, q-1\}$$

q là một số nguyên tố hoặc có dạng $q = p^m$ với p là một số nguyên tố và m là một số nguyên dương. Khi này p được gọi là đặc số $char(q) = p$ và m là bậc mở rộng của $\mathbb{F}_q$.
Trong thực tế và đặc biệt trong các thiết bị phần cứng [18], người ta thường sử dụng trường hữu hạn $\mathbb{F}_{2^m}$. Khi đó phép cộng trong trường này đơn giản chỉ là phép toán XOR (Exclusive OR). Nhiều tài liệu cho thấy làm việc với $\mathbb{F}_{2^m}$ hiệu quả hơn 40% so với làm việc với trường $\mathbb{F}_q$. Nhóm thực hiện Đề tài cấp Nhà nước KC01.18 do người viết làm hủ nhiệm đề tài đã cài đặt toàn bộ các phép toán về đường cong Elliptic trên trường $\mathbb{F}_{2^m}$ cho Chip Spartan 6 của Xilinx cho bài toán xác thực và trao đổi khóa phiên trong thiết bị VPN IPSec.
Trường $\mathbb{F}_{2^m}$ thường được biểu diễn dưới dạng tổ hợp tuyến tính của các vector gồm m phần tử $\{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}\}$, mọi phần tử $\alpha \in \mathbb{F}_{2^m}$ đều có thể được biển diễn dưới dạng:

$$\alpha = a_0\alpha_0 + a_0\alpha_0 + \ldots + a_{m-1}\alpha_{m-1}, \qquad a_i \in \{0, 1\}$$

Có nhiều phương pháp để xây dựng cơ sở của $\mathbb{F}_{2^m}$: đa thức cơ sở và cơ sở chuẩn tắc. Các thuật toán để thực hiện các phép toán trên EC có thể tìm thấy trong [19].

6.1.1. Đa thức cơ sở

Xét đa thức $f(x) = x^m + f_{m-1}x^{m-1} + \ldots + f_2x^2 + f_1x + f_0 \quad$ (với $f_i \in \mathbb{F}_2, i = 0, \ldots, m-1$) là một đa thức bất khả quy bậc m trên trường $\mathbb{F}_2$, nghĩa là không thể phân tích $f(x)$ thành các đa thức thừa số khác có bậc nhỏ hơn m. $f(x)$ gọi là đa thức rút gọn. Trường hữu hạn $\mathbb{F}_{2^m}$ sẽ là tập tất cả các đa thức trên F_2 có bậc nhỏ hơn hoặc bằng m.

$$F_{2^m} = \{a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0 : a_i \in \{0, 1\}\}$$

Các phần tử $(a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0)$ thường được biểu diễn dưới dạng chuỗi bit $(a_{m-1} \ldots a_1a_0)$ có độ dài là m.
Các phép toán trong trường $\mathbb{F}_{2^m}$:

- Phép cộng:
  $(c_{m-1} \ldots c_1c_0) = (a_{m-1} \ldots a_1a_0) + (b_{m-1} \ldots b_1b_0), \qquad c_i = a_i \oplus b_i.$

- Phép nhân:
$(r_{m-1}\dots r_1r_0) = (a_{m-1}\dots a_1a_0).(b_{m-1}\dots b_1b_0)$
Trong đó $(r_{m-1}x^{m-1}+\dots+r_1x+r_0) = (a_{m-1}x^{m-1}+\dots+a_1x+a_0)\times(b_{m-1}x^{m-1}+\dots+b_1x+b_0) \mod f(x)$.

Đa thức rút gọn $f(x)$ thường có dạng sau:

- Trinomial basis (TPB):
$f(x) = x^m + x^k + 1, \quad 1 \leqslant k \leqslant m-1.$

- Pentanomial basis (PPB):
$f(x) = x^m + x^{k_3} + x^{k_2} + x^{k_1} + 1, \quad 1 \leqslant k_1 < k_2 < k_3 \leqslant m-1.$

6.1.2. Cơ sở chuẩn tắc

$\mathbb{F}_{2^m}$ sử dụng cơ sở có dạng $\{\beta, \beta^{2^2}, \dots, \beta^{2^{m-1}}\}$ với $\beta \in \mathbb{F}_{2^m}$, khi đó mỗi phần tử $a \in \mathbb{F}_{2^m}$ đều có dạng $a = \sum_{i=0}^{m-1} a_i\beta^{2^i}, a_i \in \{0,1\}$ và cũng được biểu diễn dưới dạng chuỗi bit $(a_0a_1\dots a_{m-1})$ có độ dài là m. Với cơ sở này phép bình phương sẽ thực hiện rất đơn giản chỉ bằng cách quay bit. Các phép toán trong trường $\mathbb{F}_{2^m}$:

- Phép cộng:
$(c_0c_1\dots c_{m-1}) = (a_0a_1\dots a_{m-1}) + (b_0b_1\dots b_{m-1}), \quad c_i = (a_i+b_i) \mod 2.$

- Phép bình phương:

$$a^2 = \left(\sum_{i=0}^{m-1} a_i\beta^{2^i}\right)^2 = \sum_{i=0}^{m-1} a_i\beta^{2^{i+1}} = \sum_{i=0}^{m-1} a_{i-1}\beta^{2^i} = (a_{m-1}a_0a_1\dots a_{m-2})$$

- Phép nhân:
Xét $p = Tm+1$ và $u \in \mathbb{F}_p$ là phần tử bậc T, định nghĩa chuỗi $F(1), F(2), \dots, F(p-1)$ ta sẽ có:

$$F(2^iu^j \mod p) = i, \quad 0 \leqslant i \leqslant m-1, 0 \leqslant j \leqslant T-1.$$
$$(c_0c_1\dots c_{m-1}) = (a_0a_1\dots a_{m-1}).(b_0b_1\dots b_{m-1})$$
$$c_l = \begin{cases} \sum_{k=1}^{p=2} a_{F(k+1)+l}b_{F(p-k)+l}, & \text{nếu } T \text{ chẵn.} \\ \sum_{k=1}^{m/2}(a_{k+l-1}b_{m/2+k+l-1} + a_{m/2+k+l-1}b_{k+l-1}) & \\ + \sum_{k=1}^{p=2} a_{F(k+1)+l}a_{F(k+1)+l}, & \text{nếu } T \text{ lẻ.} \end{cases}$$

6.2. Tổng số điểm của đường cong Elliptic trên trường hữu hạn $\mathbb{F}_q$

E là đường cong Elliptic trên trường $\mathbb{F}_q$, bởi vì cặp (x,y) với $x, y \in \mathbb{F}_q$ là hữu hạn do đó nhóm $E(\mathbb{F}q)$ cũng sẽ là nhóm hữu hạn. Các giá trị x, y là các số nguyên, dễ dàng nhận thấy không phải với mọi giá trị x đều tìm được giá trị nguyên y bởi vì không phải bao giờ $\sqrt{y}$ cũng là một số nguyên dương. Câu hỏi đặt ra là số điểm của của đường cong Elliptic trên trường $\mathbb{F}_q$ là bao nhiêu? Xác định số điểm trên đường cong E nhằm xác định không gian khóa của hệ mật.
Sau đây là phần trình bày về việc tính tổng số điểm của đường cong Elliptic trên trường hữu hạn $\mathbb{F}_q$.

Bổ đề 1. *M và N là hai ma trận* 2×2. $M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} n_{11} & n_{12} \\ n_{21} & n_{22} \end{pmatrix}$*, với các số nguyên* a, b *ta có:*

$$\det(aM + bN) = a^2 \det(M) + b^2 \det(N) + ab(\det(M + N) - \det(M) - \det(N)) \quad (6.1)$$

Chứng minh. Theo định nghĩa về định thức ta có:

$$\begin{aligned}
\det(M) &= m_{11}m_{22} - m_{21}m_{12}, \qquad \det(N) = n_{11}n_{22} - n_{21}n_{12} \\
\det(aM + bN) &= \det \begin{pmatrix} am_{11} + bn_{11} & am_{12} + bn_{12} \\ am_{21} + bn_{21} & am_{22} + bn_{22} \end{pmatrix} \\
&= (am_{11} + bn11)(am_{22} + bn_{22}) - (am_{21} + bn_{21})(am_{12} + bn_{12}) \\
&= a^2(m_{11}m_{22} - m_{21}m_{12}) + b^2(n_{11}n_{22} - n_{21}n_{12}) + \\
&+ ab(m_{11}n_{22} + n_{11}m_{22} - m_{21}n_{12} - n_{21}m_{12}) \\
&= a^2 \det(M) + b^2 \det(N) + ab(m_{11}n_{22} + n_{11}m_{22} - m_{21}n_{12} - n_{21}m_{12})
\end{aligned} \quad (6.2)$$

Khi $a = b = 1$ áp dụng công thức ở trên ta có:

$$\det(M + N) = \det(M) + \det(N) + (m_{11}n_{22} + n_{11}m_{22} - m_{21}n_{12} - n_{21}m_{12}) \quad (6.3)$$

Nhân cả 2 vế (6.3) với ab sau đó trừ vào (6.2) sẽ được kết quả (6.1) là điều cần phải chứng minh. □

Định nghĩa 6.1. *Điểm n-xoắn (Torsion): Cho đường cong Elliptic* E *được định nghĩa trên trường* K*, cho* n *là số nguyên dương, tập các điểm Torsion E[n] là tập các điểm trên đường cong có tính chất như sau:*

$$E[n] = \left\{ P \in E(\overline{K}) \mid nP = \infty \right\} \quad (6.4)$$

$\overline{K}$ là đóng đại số của K.

Định nghĩa 6.2. *Divisor: Cho đường cong Elliptic* E *được định nghĩa trên trường* K*, với mỗi điểm* $P \in E(\overline{K})$ *định nghĩa một ký hiệu hình thức (formal symbol)* $[P]$*, khi đó divisor D sẽ là:*

$$D = \sum_j a_j[P_j], \qquad a_j \in \mathbb{Z}$$

f *là một hàm trên* E *mà khác* 0*, khi đó divisor của* f *sẽ là:*

$$div(f) = \sum_{P \in E(K)} ord_P(f)[P] \in Div(E)$$

$f = u_P^r g$*, với* $r \in \mathbb{Z}$ *và* $g(P) \neq 0, \infty$*,* $u(P) = 0$*, định nghĩa bậc của* f *tại* P *là:*

$$ord_P(f) = r.$$

Định nghĩa 6.3. *Cặp Weil: là một ánh xạ từ 2 điểm trong nhóm các điểm Torsion thành giá trị bậc thứ* n *của đơn vị:*

$$e_n : E[n] \times E[n] \to \mu_n, \qquad \mu_n = \{x \in \overline{K} \mid x^n = 1\}$$

Bổ đề 2. *Với mọi tự đồng cấu bất khả tách α trên E, và với mọi $S, S_1, S_2, T, T_1, T_2 \in E[n]$ ta có:*

$$\begin{aligned} e_n(\alpha(S), \alpha(T)) &= e_n(S, T)^{\deg(\alpha)} \\ e_n(T, T) &= 1 \\ e_n(S_1 + S_2, T) &= e_n(S_1, T)e_n(S_2, T) \\ e_n(S, T_1 + T_2) &= e_n(S, T_1)e_n(S, T_2) \end{aligned}$$

Chứng minh có thể xem trong [3].
Giả thiết $\{T_1, T_2\}$ là cơ sở của $E[n]$, mỗi phần tử trong $E[n]$ đều có thể biểu diễn dưới dạng tổ hợp tuyến tính $m_1T_1 + m_2T_2$. α là một tự đồng cấu trong $E[n]$, n là một số nguyên không chia hết bởi $char(K)$. Tồn tại các số $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ sao cho:

$$\alpha(T_1) = aT_1 + cT_2, \quad \alpha(T_2) = bT_1 + dT_2$$

Do đó mỗi tự đồng cấu α đều có thể được biểu diễn bởi ma trận 2×2:

$$\alpha_n = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Bổ đề 3. *α là một tự đồng cấu trong $E[n]$, n là một số nguyên không chia hết bởi $char(K)$ khi đó $\det(\alpha_n) \equiv \deg(\alpha) \mod n$.*

Chứng minh. Đặt $\zeta = e_n(T_1, T_2)$, theo bổ đề 2 ta có:

$$\begin{aligned} \zeta^{\deg(\alpha)} &= e_n(\alpha(T_1), \alpha(T_2)) = e_n(aT_1 + cT_2, bT_1 + dT_2) \\ &= e_n(T_1, T_1)^{ab} e_n(T_1, T_2)^{ad} e_n(T_2, T_1)^{cb} e_n(T_2, T_2)^{cd} \\ &= \zeta^{ad-bc} = \zeta^{\det(\alpha_n)} \end{aligned}$$

□

Nếu α, β là 2 tự đồng cấu trên E, và a, b là các số nguyên thì tự đồng cấu $a\alpha + b\beta$ được định nghĩa như sau:

$$(a\alpha + b\beta)(P) = a\alpha(P) + b\beta(P)$$

Bổ đề 4. $\deg(a\alpha + b\beta) = a^2 \deg \alpha + b^2 \deg \beta + ab(\deg(\alpha + \beta) - \deg \alpha - \deg \beta)$

Chứng minh. Biểu diễn các tự đồng cấu α, β bằng các ma trận α_n, β_n (với một số cơ sở trong $E[n]$), theo đó $a\alpha + b\beta$ sẽ được biểu diễn bằng $a\alpha_n + b\beta_n$. Áp dụng công thức (6.1) ta có:

$$\det(a\alpha_n + b\beta_n) = a^2 \det(\alpha_n) + b^2 \det(\beta_n) + ab(\det(\alpha_n + \beta_n) - \det(\alpha_n) - \det(\beta_n))$$

Theo bổ đề 3 chúng ta sẽ có:

$$\deg(a\alpha + b\beta) = a^2 \deg(\alpha) + b^2 \deg(\beta) + ab(\deg(\alpha + \beta) - \deg(\alpha) - \deg(\beta))$$

□

Định lý 6.4. *(Hasse) Nếu E là đường cong Elliptic trên trường $\mathbb{F}_q$, và $\#E(\mathbb{F}q)$ là tổng số điểm trên đường cong đó thì:*

$$q + 1 - 2\sqrt{q} \leqslant \#E(\mathbb{F}q) \leqslant q + 1 + 2\sqrt{q}. \tag{6.5}$$

Chứng minh. Trước tiên xét ánh xạ Probenius được định nghĩa như sau:

$$\begin{aligned} \phi_q : \overline{\mathbb{F}}_q &\longrightarrow \overline{\mathbb{F}}_q, \\ x &\mapsto x^q \end{aligned}$$

Có thể viết một cách khác:

$$\phi_q(x, y) = (x^q, y^q), \quad \phi_q(\infty) = \infty$$

Khi thay các giá trị x^q, y^q vào phương trình (2.1) dễ thấy (x, y) cũng nằm trên đường cong E. Ánh xạ ϕ_q là một tự đồng cấu và có thể biểu diễn bằng hàm đa thức hữu tỷ có bậc là q. Đạo hàm của x^q là qx^{q-1} sẽ bằng 0 bởi vì $q = 0$ trong trường $\mathbb{F}_q$. Do đạo hàm bằng 0 nên ϕ_q là khả tách (separable).
Bởi vì ϕ_q là tự đồng cấu trong E do đó $\phi_q^2 = \phi_q \circ \phi_q$ cũng là tự đồng cấu và ϕ_q^n cũng là tự đồng cấu trong E. Phép nhân với -1 cũng là tự đồng cấu do đó tổng $\phi_q^n - 1$ là đồng cấu trong E.
ϕ_q là khả tách (separable) nhưng $\phi_q - 1$ sẽ là bất khả tách do đó bậc của nó sẽ bằng số phần tử của hạch $\phi_q - 1$ có nghĩa là số điểm trên đường cong E sẽ là:

$$\#E(\mathbb{F}_q) = \deg(\phi_q - 1)$$

Với các số nguyên r, s, áp dụng bổ đề 4 ta có:

$$\deg(r\phi_q - s) = r^2 \deg(\phi_q) + s^2 \deg(-1) + rs(\deg(\phi_q - 1) - \deg(\phi_q) - \deg(-1))$$

Bởi vì $\deg(-1) = 1$ và $\deg(\phi_q) = q$ nên:

$$\deg(r\phi_q - s) = r^2 q + s^2 + rs(\deg(\phi_q - 1) - q - 1))$$

Đặt $a = -(\deg(\phi_q - 1) - q - 1) = q + 1 - \#E(\mathbb{F}_q)$, bởi vì $\deg(r\phi_q - s) \geqslant 0$ suy ra $r^2 q + s^2 + rsa \geqslant 0$ hay với mọi r, s ta có:

$$q\left(\frac{r}{s}\right)^2 - a\left(\frac{r}{s}\right) + 1 \geqslant 0$$

Do đó $\Delta = a^2 - 4q \leqslant 0$ hay là $|a| \leqslant 2\sqrt{q}$ cũng có nghĩa là $|q + 1 - \#E(\mathbb{F}_q)| \leqslant 2\sqrt{q}$ và đó là điều phải chứng minh. □

Tham khảo thêm về cách tính số điểm trên đường cong E có thể xem trong [20].

Tài liệu tham khảo

[1] J. W. Bos, J. A. Halderman, N. Heninger, J. Moore, M. Naehrig, and E. Wustrow, "Elliptic Curve Cryptography in Practice," *Financial Cryptography and Data Security*, vol. 8437, pp. 157–175, 2014.

[2] J. H. Silverman and J. T. Tate, *Rational Points on Elliptic Curves - Second Edition*. Springer, 2015.

[3] L. C. Washington, *Elliptic Curves Number Theory and Cryptography, Second Edition*. CRC Press, 2008.

[4] J. W. S. Cassels, *Lectures on Elliptic Curves*. University of Cambridge, 1991.

[5] S. Lang, *Elliptic Curves Diophantine Analysis*. Springer, 1978.

[6] C. Kenig, A. Ranicki, and M. Rockner, *Elliptic Curves A Computational Approach*. Walter de Gruyter GmbH & Co., 2003.

[7] H. Cohen and G. Frey, *Handbook of Elliptic and Hyperelliptic Curve Cryptography*. Chapman Hall/CRC, 2006.

[8] J. H. Silverman, *The Arithmetic of Elliptic Curves*. Springer, 2009.

[9] L. Berger, G. Bockle, L. D. M. Dimitrov, T. Dokchitser, and J. Voight, *Elliptic curves, Hilbert modular forms and Galois deformations*. Birkhauser, 2013.

[10] I. F. Blake, G. Seroussi, and N. P. Smart, *Advances in Elliptic Curve Cryptography*. Cambridge University Press, 2005.

[11] I. Connell, *Elliptic Curve Handbook*. McGill University, 1999.

[12] T. H. Otway, *Elliptic Hyperbolic Partial Differential Equations*. Springer, 2015.

[13] Dang Minh Tuan, "Che tao thiet bi VPN IPSec bang phan cung dau tien o Vietnam," *Tap chi CNTT & TT*, no. 2, pp. 41–45, 2014.

[14] H. Lenstra., "Factoring Integers with Elliptic Curves," *The Annals of Matematics*, vol. 126, no. 3, pp. 649–673, 1987.

[15] V. S. Miller, "Use of elliptic curves in cryptography," *CRYPTO '85*, pp. 417–428, 1985.

[16] N. Koblitz, "Elliptic curve cryptosystem," *Math.Comp*, vol. 48, no. 16, pp. 203–209, 1987.

[17] A. Enge, *Elliptic Curves and Their Applications to Cryptography*. Kluwer Academic Publishers, 2001.

[18] D. Hankerson, J. L. Hernandez, and A. Menezes, "Software Implementation of Elliptic Curve Cryptography over Binary Fields," *CHES2000*, vol. 1965, pp. 243–267, 2000.

[19] D. Hankerson, A. Menezes, and S. Vanstone, *Guide to Elliptic Curve Cryptography*. Springer-Verlag, 2004.

[20] R. Schoof, "Elliptic Curves Over Finite Fields and the Computation of Square Roots," *Matematics of Computation*, pp. 483–495, 1985.

[21] I. Blake, G. Seroussi, and N. Smart, *Elliptic Curves in Cryptography*. Cambridge University Press, 1999.

[22] H. Cohen, *A Course in Computational Algebraic Number Theory*. Springer-Verlag, 1993.

[23] J. M. Pollard, "Monte Carlo Methods for Index Computations (mod p)," *Mathematics of Computation*, vol. 32, no. 143, pp. 918–924, 1978.

[24] S. C. Pohlig and M. E. Hellman, "An Improved Algorithm for Computing Logarithms over GF(p) and its Cryptographic Significance," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 24, pp. 106–110, 1978.

[25] A. J. Menezes, T. Okamoto, and S. A. Vanstone, "Reducing elliptic curve logarithms to logarithms in a finite field," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 39, no. 5, pp. 1639–1646, 1993.

[26] C. Research, *Standards For Efficient Cryptography, SEC 1: Elliptic Curve Cryptography*. Certicom Corp, 2000.

[27] L. Gao, S. Shrivastava, and G. E. Sobelman, "Elliptic Curve Scalar Multiplier Design Using FPGAs," *CHES'99*, vol. 1717, pp. 257–268, 1999.

[28] L. Laurie, M. Alfred, Q. Minghua, S. Jerry, and V. Scott, "An Efficient Protocol for Authenticated Key Agreement," *Designs Codes and Cryptography*, vol. 28, no. 2, 1998.

[29] D. Johnson, A. Menezes, and S. Vanstone, "The Elliptic Curve Digital Signature Algorithm (ECDSA)," 2001.

[30] T. E. Gamal, "A Public Key Cryptosystem and a Signature Scheme Based on Discrete Logarithms," *CRYPTO '84*, vol. 196, pp. 10–18, 1985.

[31] NIST, *Digital Signature Standard (DSS) FIPS 186-4*. National Institute of Standards and Technology, 2013.

[32] J. Massey and J. Omura, "Method and apparatus for maintaining the privacy of digital messages conveyed by public transmission," Jan. 28 1986, US Patent 4,567,600. [Online]. Available: https://www.google.com/patents/US4567600

NGHỊCH LÝ TRAI GÁI

Đặng Nguyễn Đức Tiến
(Đại học Trento, Italia)

LỜI GIỚI THIỆU

Tiếp nối các chuyên mục Toán học Giải trí ở những số Epsilon trước, số này chúng tôi giới thiệu với độc giả một nghịch lý nổi tiếng trong xác suất: Nghịch lý trai gái.

Bài toán này, lại một lần nữa như rất nhiều bài toán đố khác trong chuyên mục Toán học Giải trí, xuất phát từ cây đại thụ Martin Gardner[1] với tên gọi là bài toán hai người con (Two Children Problem) đăng ở tờ Scientific American vào năm 1954: *"Một người có hai con, biết rằng có ít nhất một con trai, hỏi khả năng cả hai đều là con trai là bao nhiêu?"*

1. Nghịch lý trai gái và bài toán ngày thứ ba

Chúng ta hãy bắt đầu với việc phân tích thử lời giải cho bài toán về hai người con của Martin. Để đơn giản, hãy cùng thống nhất với giả thiết là giới tính của mỗi người con là độc lập (nghĩa là giới tính người em không phụ thuộc vào giới tính của anh hoặc chị người đó) và khả năng mỗi người con là nam hay nữ là bằng nhau.

Trực quan và dễ thấy, vì ít nhất một người là trai, nên người còn lại sẽ hoặc trai hoặc gái với khả năng bằng nhau (theo giả thiết). Khả năng cả 2 đều là con trai do vậy là 1/2.

Vậy đâu có gì là mâu thuẫn hay nghịch lý! Nhưng dừng lại một chút, chúng ta hãy thử phân tích các khả năng có thể có của 2 người con khi chưa biết giới tính của họ. Có thể có 4 trường hợp ở đây theo thứ tự người con thứ 1 và người con thứ 2 là: nam - nam, nam - nữ, nữ - nam và nữ - nữ, khả năng xảy ra như nhau. Và vì ta biết ít nhất một trong 2 người là nam, nên trường hợp cuối nữ - nữ bị loại ra, chỉ còn có 3 trường hợp đầu và trong số này chỉ có trường hợp nam - nam là ứng với yêu cầu của câu hỏi. Vì vậy, khả năng cả 2 đều là con trai là 1/3. Nghịch lý vì lý luận ở trên chỉ ra khả năng là 1/2!

Nghịch lý này thu hút được rất nhiều người, đặc biệt là có thời điểm người ta đã chia ra làm hai “trường phái" đối lập hẳn nhau là trường phái “nhị phân" và trường phái "tam phân", ứng với 2 lý luận như đã giải thích ở trên. Và sau hơn 60 năm từ khi ra đời cho đến nay, sự mâu thuẫn giữa hai trường phái, hay có thể nhìn nhận như mâu thuẫn giữa trực quan và lý luận đối với bài toán này vẫn còn xảy ra với rất nhiều người và câu trả lời đâu là đáp án đúng thật sự không phải là đơn giản, vì thoạt nhìn, ai cũng ... có lý.

Trước khi đi vào phân tích đâu là trường phái "chiến thắng" ở nghịch lý trai gái, chúng tôi giới thiệu tiếp với độc giả một phiên bản lạ của bài toán này, đề xuất bởi Gary Foshee vào năm 2010. Bài toán như sau:

[1]Bạn đọc có thể xem lại ở Epsilon số 3 về cuộc đời của nhà toán học huyền thoại này.

"Một gia đình có hai con, nếu như biết rằng ít nhất một có một đứa là con trai và sinh vào ngày thứ ba thì khả năng để cả hai đều là con trai là bao nhiêu?"

Hẳn nhiều bạn đọc sẽ hỏi: "Thêm vào ngày thứ ba thì liên quan gì?" Và câu trả lời hẳn sẽ làm ngạc nhiên cho bạn vì xác suất để cả hai đều là con trai không phải 1/2 hay 1/3 mà là 13/27.

2. Đi tìm lời giải

Trước tiên, chúng tôi hệ thống lại hai bài toán như sau:

Một gia đình có hai người còn, hỏi khả năng cả 2 đều là con trai là bao nhiêu, biết rằng:
1. Xác suất của nam và nữ là bằng nhau và bằng 1/2.
2. Giới tính của hai người không phụ thuộc vào nhau.
3. Cho biết trước một điều kiện K.

Và tổng hợp lại các trường hợp khác nhau vào bảng sau:

Trường hợp	Điều kiện K
TH1	Không có điều kiện
TH2	Người con đầu là con trai
TH3	Ít nhất một trong hai là con trai
TH4	Ít nhất một trong hai là con trai và sinh vào ngày thứ ba

Bây giờ, chúng ta hãy cùng xét trường hợp đơn giản trước TH1, không gian mẫu ở đây là $\Omega = \{TT, TG, GT, GG\}$ với T là trai và G là gái. Và do vậy, dễ thấy xác suất TT là 1/4. Với TH2, $\Omega = \{TT, TG\}$ ứng với người đầu là con trai, và do vậy, xác suất TT xảy ra là 1/2. Với TH3, $\Omega = \{TT, TG, GT\}$, nên TT xảy ra với xác suất 1/3, chính là bài toán ở đầu đề của chúng ta. Với TH4, lời giải khó hơn vì thông tin ngày thứ 3 dường như không liên quan.

Trước tiên, giả sử mỗi người con đều thuộc và một trong hai nhóm nào đó, mà tần suất của nhóm P là p và tần suất của nhóm Q là q, với $p + q = n$ với n là tổng khả năng có thể có. Ví dụ ở TH4, hai nhóm đó là P = "sinh vào ngày thứ ba" và Q = "không sinh vào ngày thứ ba" có $p = 1$ và $q = 6$. Như vậy, không gian mẫu Ω có 16 trường hợp ứng với tần suất xảy ra như sau:

Hàng/Cột	C1	C2	C3	C4
H1	$T_P T_P$ $[p^2]$	$T_P T_Q$ $[pq]$	$T_P G_P$ $[p^2]$	$T_P G_Q$ $[pq]$
H2	$T_Q T_P$ $[pq]$	$T_Q T_Q$ $[p^2]$	$T_Q G_P$ $[pq]$	$T_Q G_Q$ $[q^2]$
H3	$G_P T_P$ $[p^2]$	$G_P T_Q$ $[pq]$	$G_P G_P$ $[p^2]$	$G_P G_Q$ $[pq]$
H4	$G_Q T_P$ $[pq]$	$G_Q T_Q$ $[q^2]$	$G_Q G_P$ $[pq]$	$G_Q G_Q$ $[q^2]$

Qua bảng trên, ta thấy tổng tất cả các khả năng xảy ra là n^4 và ứng với mỗi "khối" 2×2, số khả năng xảy ra là n^2. Với bài toán của Martin (TH3), ta thấy đáp án chính là tổng số khả năng của khối 2×2 ở trên trái (là khối toàn T) chia cho toàn bộ khả năng của bảng, sau khi đã loại bỏ khối 2×2 ở góc dưới phải (tức là khối toàn G) nên xác suất xảy ra là $\frac{n}{3n^2} = \frac{1}{3}$.

Quay lại bài toán ngày thứ ba, với ràng buộc khả năng P = "sinh vào ngày thứ ba" phải xảy ra, không gian mẫu Ω của bài toán sẽ là toàn bộ các ô ở hàng H1 và cột C1 của bảng, nghĩa là toàn bộ các ô có chứa T_p. Và yêu cầu của bài toán chính là các ô (H1, C1), (H1, C2) và (H2, C1). Xác suất (chúng tôi tạm ký hiệu là ρ), do vậy sẽ là:

$$\rho = \frac{p^2 + pq + pq}{p^2 + pq + p^2 + pq + pq + p^2 + pq} = \frac{p^2 + 2pq}{3p^2 + 4pq} = \frac{p + 2q}{3p + 4q} = \frac{2n - p}{4n - p} = \frac{2 - \frac{p}{n}}{4 - \frac{p}{n}}$$

Khi p/n tiến dần tới 0, ρ sẽ bằng $1/2$ và khi p/n tiến dần đến 1, ρ sẽ bằng 1/3. Với bài toán ngày thứ ba (TH4), $p = 1$ và $n = 7$, ta có xác suất bằng $\rho = \frac{2-1/7}{4-1/7} = 13/27$. Và như vậy, yếu tố "ngày thứ ba", thật sự có ảnh hưởng đến kết quả cuối cùng!

Chúng ta hãy thử cùng xét điều kiện sau: "có ít nhất một người là con trai và sinh vào ngày 13 tháng 6 và rơi vào thứ ba, xác suất để cả hai đều là con trai là bao nhiêu?" Bỏ qua năm nhuận, chúng ta có $\rho = \frac{2-1/(7\times365)}{4-1/(7\times365)} \approx 0.49995$.

3. Cuối cùng thì đây có phải là nghịch lý?

Như vậy, chúng ta đã cùng nhau giải quyết và có kết quả của câu hỏi: "Một gia đình có hai người con, biết rằng có ít nhất một người là con trai, hỏi khả năng cả 2 người đều là con trai là bao nhiêu" với đáp số là 1/3. Tuy nhiên, khi bài toán vừa ra đời, vẫn có nhiều tranh cãi, và chúng ta hãy thử cùng nhau khảo sát các phiên bản khác nhau của bài toán với cùng câu hỏi "xác suất để cả hai đều là con trai là bao nhiêu":

"Trong tất cả các gia đình có hai con, mà trong đó ít nhất một người là con trai, một gia đình được chọn ngẫu nhiên để hỏi." Đáp án trong câu hỏi này là 1/3, cũng chính là câu hỏi gốc của Martin.

"Trong tất cả các gia đình có hai con, một người con trong số đó được chọn ngẫu nhiên, và người đó là con trai." Đáp án lúc này lại là 1/2.

Nói cách khác, ngoài vấn đề là một kết quả khác với trực quan thì cách phát biểu bài toán cũng rất dễ dẫn đến những bối rối gây tranh cãi.

Quay lại bài toán ngày thứ ba, với yêu cầu "có ít nhất một người là con trai và sinh vào thứ ba" thì khả năng cả 2 đều là con trai là 13/27. Tuy nhiên, câu hỏi gốc của Foshee lại là: "Trong toàn bộ các gia đình có hai con mà ít nhất có một người là con trai và sinh vào ngày thứ ba, hãy cho biết tỉ lệ các gia đình mà cả hai người con đều là con trai." Và đáp án trong câu hỏi này, theo chính tác giả, là 1/2.

4. Lời kết

Chuyên mục kỳ này ngắn hơn các kỳ trước do theo chủ ý của người viết, vốn dĩ các nghịch lý đã gây rất nhiều bối rối cho người đọc, nên nếu dùng quá nhiều bài toán sẽ khiến người đọc càng khó tiếp cận hơn, mất đi bản chất của toán học giải trí. Để có được bài viết này, chúng tôi tổng hợp và sử dụng các nguồn tham khảo chính sau:

1. Wikipedia, Boy or Girl Paradox.

2. Gardner, Martin, 1954: The Second Scientific American Book of Mathematical Puzzles and Diversions. Simon & Schuster.

3. Peter Lynch, The Two-Child Paradox: Dichotomy and Ambiguity, Irish Math. Soc. Bulletin 67 (2011), pp. 67-73.

Chúng tôi kết thúc chuyên mục tại đây và hẹn gặp lại các bạn trong số tới.

PHÉP BIẾN ĐỔI FOURIER CÓ Ý NGHĨA VẬT LÝ GÌ?

Job Bouwman

(Trần Nam Dũng dịch)

Hãy tưởng tượng bạn gõ một phím đàn dương cầm, khi đó dây đàn sẽ rung lên và tạo ra một sóng âm có dạng hình sin như ta vẫn biết trong lượng giác. Bây giờ tưởng tượng ba phím được nhấn cùng một lúc, làn sóng âm này sẽ không còn là hình sin nữa, mà là một cái gì đó hỗn độn và phức tạp hơn. Nhưng ẩn trong làn sóng âm thanh lộn xộn này chỉ là một mô hình đơn giản: Sau tất cả, hợp âm tạo ra này chỉ là ba phím đánh cùng lúc, và vì vậy sóng âm thanh lộn xộn chỉ là kết quả của sự tổng hợp của ba nốt (hay ba sóng sin). Và đó chính là một ví dụ của biến đổi Fourier.

Trong số này, Epsilon tiếp tục giới thiệu với độc giả phần bình luận từ bài viết của tác giả của tác giả Job Bouwman đã được đăng ở Epsilon số 7: Phép biến đổi Fourier có ý nghĩa vật lý gì?

1. Stephen Scholnik

Thực sự tôi sử dụng phép biến đổi Fourier ... rất nhiều.

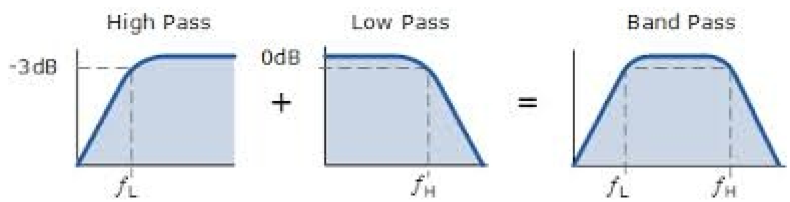
Đó là một công cụ toán học để phân tích tín hiệu, nó không có một sự tương tự chính xác về mặt vật lý (IMHO). Nhưng phải nói rằng: Sự tương tự tốt nhất mà tôi có thể nghĩ ra là nó cho ta biết giá trị tần số trung bình của một mẫu thử của, chẳng hạn như, một bản ghi âm. Như vậy nếu như đó là bản ghi âm của một bản nhạc, nói chung nó sẽ cho chúng ta biết năng lượng âm thanh trung bình (và pha) của mỗi nốt nhạc trong toàn bài. Nhưng điều đó cũng không đúng hẳn bởi vì mỗi nốt nhạc có sự hòa âm và phép biến đổi Fourier không thể phân biệt được sự hòa âm giữa nốt La và nốt La trong một quảng tám cao hơn.

Ngoài ra, như tôi đã nói, phép biến đổi Fourier cho bạn biết pha trung bình của mỗi tần số mà điều này thông thường lại không có một minh họa vật lý nào cả (mặc dầu bạn có thể nghe được những biến đổi pha động). Tệ hơn nữa là, một nốt nhạc càng gõ mạnh (tấn công sắc bén hơn và rơi xuống), phổ tần số của nó càng mờ. Như vậy có những tần số trong phép biến đổi có năng lượng đáng kể nhưng lại không tương ứng với một nốt nhạc nào cả. Do tất cả những lý do đó, sự tương tự hầu như là một sai lầm (thêm vào sau đó).

Tôi thích câu trả lời của Lionel Chiron. Ông ta đưa ra những ví dụ đích thực về những dữ liệu quan sát cụ thể tương ứng với phép biến đổi Fourier của một cái gì đó cụ thể. Ngoài ra câu trả lời của ông ta làm tôi nhớ rằng một bức ảnh toàn ký 3 chiều (thứ mà bất cứ ai đam mê khoa học đều biết và yêu thích) là một sự tương tự ở mức độ cao của phép biến đổi 2 chiều của cảnh mà nó xây dựng lại.

2. Konstantinos Konstantinides, Kỹ sư điện làm việc trên lãnh vực xử lý tín hiệu và mã hóa video

Một phép biến đổi Fourier (FT) một mình nó không có nghĩa gì cả. Đó là một hàm số. Đầu ra của phép biến đổi Fourier cho ta biễn của tín hiệu trên miền tần số. Có khi làm việc với miền thời gian tiện hơn, có khi làm việc với miền tần số tiện hơn. Chẳng hạn như, nếu có ai đó bảo với bạn rằng đây là một bộ "lọc thông thấp", bạn có thể hiểu rằng bộ lọc này sẽ lọc bỏ tất cả những tần số cao sau một phép lọc tần, mặc dầu biểu diễn trong miền thời gian (đáp ứng xung) có thể khá phức tạp.



Trong xử lý tín hiệu, tích chập trong miền thời gian tương ứng với phép nhân trong miền tần số. Điều này giúp ích rất nhiều khi bạn phân tích đáp ứng tần số của một hệ thống. Vậy là phép biến đổi Fourier có thể xem như một công cụ chuyển đổi qua lại giữa miền thời gian và miền tần số.

3. Samuel O. Ronsin, PhD, Toán ứng dụng

Thêm một ý về "ý nghĩa vật lý", thật thú vị là phép biến đổi Fourier (cụ thể là dưới dạng trực giao) là "căn bậc hai" của toán tử "đảo chiều" $\Phi : f \mapsto \Phi(f) = (x \mapsto f(-x))$ trong một không gian L_2 nào đó, do vậy $F \circ F = \Phi$.

Điều này có ý nghĩa gì? Vâng, nếu bạn muốn phân tích toán tử "đảo chiều" một hàm nào đó thành hai toán tử giống nhau, phép biến đổi Fourier chính là cái bạn muốn tìm. Dầu rằng còn có thêm một vài ví dụ nữa ...

4. Norman Corbett, PhD, Toán ứng dụng

Đối với câu trả lời hiện có: Phép biến đổi Fourier được xây dựng nhờ những tần số điều hòa ... bội nguyên của một vài tần số cơ bản. Một trong những điểm tách rời với âm nhạc là ở chỗ các nốt nhạc tuân theo thang hàm mũ (hãy nghĩ về chiếc đàn piano của bạn). Điều này không có nghĩa là phổ của mọi quá trình vật lý đều bị ràng buộc theo kiểu như vậy.

Bên cạnh đó, các tính chất toán học của phép biến đổi Fourier đảm bảo rằng nó có thể xử lý dữ liệu âm thanh, hình ảnh, vết đen trên mặt trời, ẩn tinh, ... và làm lộ ra những đặc điểm vật lý cơ bản.

Phải chăng phép biến đổi Fourier có một nguyên nhân phát sinh cụ thể? Vâng! Joseph Fourier đã khởi đầu tất cả khi nghiên cứu về sự truyền nhiệt trong khí quyển. Ở đây phân tích tín hiệu ở tần số điều hòa là hết sức thõa đáng ... (vâng cho mô hình tuyến tính).

Phép biến đổi Fourier có ý nghĩa vật lý gì không? Tất nhiên là có. Hãy xem xét nguyên nhân ban đầu thúc đẩy sự ra đời của nó. Nói rằng phép biến đổi Fourier chỉ đơn giản là một vấn đề trừu tượng cũng giống như nói Navier-Stokes không có cơ sở nào trong thực tại.

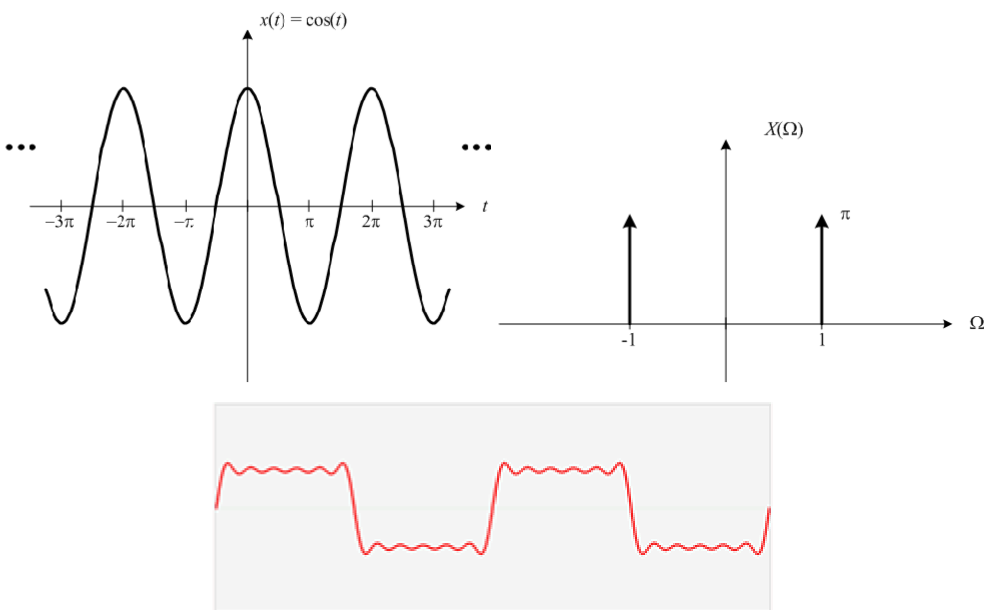
5. Singer Karthik, Kỹ sư điện xử lý tín hiệu số và điện tử số

Phép biến đổi Fourier (FT) là một mô hình/trừu tượng hóa toán học phân tích một tín hiệu thành những tín hiệu cơ bản cũng giống như một lăng kính nhận vào ánh sáng trắn và tách nó ra thành những tần số ánh sáng khác nhau. Không có sự tương tự nào tốt hơn. Trước hết, mỗi tín hiệu có một thành phần tần số chứ không phải là những đặc điểm của miền thời gian. Đa số những ai không phải là kỹ sư gặp khó khăn với khái niệm tần số. Hiểu khái niệm này trước và phép biến đổi Fourier sẽ trở nên dễ hiểu hơn.

Nói tóm lại, phép biến đổi Fourier cho phép bạn phân tích tín hiệu trong một miền xác định khác giúp ta hiểu thấu những thành phần tần số cơ bản tạo thành tín hiệu mà ta nghiên cứu. Nếu như bạn thật sự muốn phân tích nội dung của một tín hiệu bạn phải xem xét nó trong miền tần số. Đồ thị biên độ và tần số cho ta biết tần số nào là chủ đạo. Từ đó bạn có thể xác định chẳng hạn một tần số xác định chứa nhiễu và thiết kế một bộ lọc để lọc nhiễu đó đi. Hoặc giả bạn muốn làm suy yếu những tần số xác định và khuếch đại những tần số còn lại. Nó giúp bạn tạo hình tín hiệu như mong muốn.

6. Jonathan Roberts

Phép biến đổi Fourier là một phép biến đổi từ miền thời gian vào miền tần số. Nếu bạn áp dụng phép biến đổi Fourier cho một sóng cosine bạn sẽ có một đoạn thẳng đứng trên đồ thị. Mọi sóng phức tuần hoàn liên tục có thể tạo thành từ tổng của những chuỗi hình sin trực giao. Biến đổi của những sóng gián đoạn phát sinh lỗi gọi là hiện tượng Gibbs. Vài hình ảnh hữu ích



Nguồn: Steve on Image Processing, Frequency domain

7. Henk Mulder

Phép biến đổi Fourier đo sự tương quan của một tín hiệu tuần hoàn và một chuỗi những hàm điều hòa hình sin. Đây là cách mà toán học làm theo đúng nghĩa đen: tính sự tương quan của mỗi hàm điều hòa đối với tín hiệu nhập vào.

Điều này cụ thể có nghĩa là phép biến đổi Fourier đo xem tín hiệu tuần hoàn giống hàm điều hòa tới mức nào. Đối với những hàm điều hòa chủ đạo, bạn có thể nhận ra. Nhưng nếu như có nhiều hàm điều hòa thì điều này sẽ khó khăn hơn. Đó chính là lý do tại sao bạn dùng phép biến đổi Fourier để có một bức tranh chính xác về sự hiện diện của tất cả các hàm điều hòa trong tín hiệu nhận vào.

Cần nói thêm là thật thú vị khi người chị em của phép biến đổi Fourier, phép biến đổi Laplace thực hiện chính xác cách làm đó với những hàm mũ. Nó tính tương quan của hàm mũ đối với những thành phần của hàm đầu vào và biểu diễn hàm này dưới dạng những hàm mũ. Vì hàm mũ có đạo hàm là chính nó, điều này cho phép bạn xử lý dễ dàng nhiều phương trình vi phân.

8. Michael Kownacki

Làm việc trong một xí nghiệp làm giàu uranium, tôi thường xuyên dùng phép biến đổi Fourier để lấy giá trị định lượng trong việc xử lý sự cố những máy móc đồ sộ sử dụng đầu ra của gia tốc kế. Mỗi vấn đề hiện ra như một tần số đặc biệt, shaft alignment, sự rung của chong chóng turbine, ... Bằng cách lấy tích phân bình phương của phép biến đổi Fourier trong một vùng tần số đặc biệt, tôi có thể tính được năng lượng của mỗi vấn đề cụ thể.

Tôi cũng có thể xác định được chuyển động rối làm giảm hiệu quả của cả quá trình. Tất cả những thứ bạn cần làm là lắc nhẹ một cái van đầu vào để thay đổi phân bố áp suất làm cho chuyển động rối biến mất. Một khi sự rung trong vùng rối biến mất, bạn biết rằng van được bố trí đúng.

Một vấn đề nghiêm trọng xảy ra với turbine là khi áp suất không đều chung quanh chu vi của nó (thường gọi là đột biến thứ cấp). Nó làm cho chong chóng turbine chết máy mỗi khi chúng quay, tạo thành sự rung chong chóng có thể làm gãy chong chóng. Đối với những máy lớn có tốc độ cao, điều này có thể khiến cho toàn bộ cái máy nổ tung đúng theo nghĩa đen.

9. Mil Ford

Tôi nghĩ rằng một ví dụ trong đề tài của tôi, một phần trong đó là xác định độ cao của thủy triều có thể bổ ích cho các bạn.

Thủy triều xuất hiện do lực hấp dẫn của mặt trời, mặt trăng, ...

Vì mặt trăng quay chung quanh quả đất và quả đất quay chung quanh mặt trời, chiều cao của thủy triều có dạng hàm $\sin / \cos$

Tôi dùng một phương pháp gọi là Phân Tích Fourier Rời Rạc tạo thành trước Phân Tích Fourier dựa trên những điểm dữ liệu thay vì hàm.

Về căn bản chúng ta sẽ so trùng một lô những đường cong $\sin / \cos$, như là phép hồi quy phi tuyến tính đối với các điểm dữ liệu và biến đổi nó thành tần số ở đầu ra (đồ thị vẽ cái bạn nhận được sau cùng).

Kết quả là, chẳng hạn một tần số nửa ngày, chúng ta biết rằng hiệu ứng thủy triều là do sự quay của trái đất, biết tần số chúng ta dễ dàng tìm ra biên độ C_n.

Từ đó bạn có thể viết thành một hàm dài chẳng hạn như $C_1 \cdot \sin(\cdots) + C_2 \cdot \sin(\cdots)$ Vẽ hàm này ra giúp ta dự đoán thủy triều trong tương lai.

Tiến hành phép biến đổi bạn căn bản làm khi chuyển từ cõi thời gian sang không gian tần số.

10. David Tung, một nhà doanh nghiệp

Phép biến đổi Fourier kết hợp hai khái niệm vật lý: Tuần hoàn và cơ sở (đó là một tín hiệu tốt có thể phân tích thành các thành phần độc lập và các thành phần này có thể kết hợp lại tạo thành nguyên tín hiệu ban đầu).

Nhưng phép biến đổi Fourier tạo ra khái niệm tần số, một phần trong sự hiểu biết của chúng ta về thế giới vật lý, như vậy có thể cũng đúng khi nói rằng "tìm tần số tương ứng với tin hiệu chính là ý nghĩa vật lý của phép biến đổi Fourier", nếu chúng ta quên đi vấn đề con-gà-và-quả-trứng.

11. Rod Schmidt

Trong tai trong có ốc tai cuộn xoắn lại. Tưởng tượng nó không xoắn nữa và trải dài ra. Nó là một hình nón dài và hẹp. Khi âm thanh vào tai, những tần số thấp hơn (bước sóng dài nhất) tạo thành cộng hưởng rung gần đầu lớn mở của hình nón. Những tần số cao (bước sóng ngắn nhất) gây ra những cộng hưởng rung tương tự gần đỉnh của hình nón. Như vậy các tần số được phân loại. Mỗi tần số tương ứng với một khoảng cách dọc theo hình nón.

Đối với phép biến đổi Fourier ngược ... hãy hình dung ra đúng điều đó, chỉ có điều bộ phim được chiếu ngược lại.

12. Lionel Chiron

Liên quan với câu hỏi của bạn, phép biến đổi Fourier có thể xem như một hiện tượng tự nhiên.. chẳng hạn nó là trường hợp của tinh thể học khi những đốm quan sát được là phép biến đổi Fourier của cấu trúc tinh thể dưới phép rọi X-quang, đó là trường hợp của MRI khi tín hiệu đăng ký (k-không gian) là phép biến đổi Fourier trực tiếp của hình ảnh mà chúng ta muốn khám phá, đó là trường hợp của Quang Học Fourier: hiện tượng nhiễu xạ sinh ra (trong một chừng mực gần đúng phụ thuộc vào khoảng cách) một phép biến đổi Fourier của hình ảnh trước màn chắn.

Điều này là khả dĩ vì tất cả những hiện tượng nói trên dựa trên một sự kiện là có những hiện tượng thiên nhiên có thể được mô hình hóa một cách chính xác nhờ một tần số và một biên độ ...

Tổng quát hơn Cơ Học Lượng Tử sử dụng khái niệm phép quay trong không gian trừu tượng và can thiệp nhiều hơn so với vật lý cổ điển ... và do vậy sự xuất hiện tự nhiên của phép biến đổi Fourier vốn mang lại một cách nhìn mới của cùng một hiện tượng lại càng "tự nhiên" hơn nữa ... Với Cơ Học Lượng Tử, khái niệm tần số quả thật đã mở rộng sang cơ học ... Rõ ràng nó không chỉ giới hạn trong quang học và âm thanh ...

TẬP HỢP TRÙ MẬT VÀ ỨNG DỤNG

Kiều Đình Minh, Nguyễn Quang Khải
(THPT chuyên Hùng Vương, Phú Thọ)

Trong bài viết này, các tập hợp được hiểu là tập con của $\mathbb{R}$.

1. Tập hợp trù mật

Định nghĩa 1. *Cho hai tập hợp A, X với $A \subset X$. Ta nói rằng A trù mật trong X nếu với mọi $x \in X$ và mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại $\overline{x} \in A$ sao cho $|x - \overline{x}| < \varepsilon$. Một cách tương đương, với mọi x, $y \in X$, $x < y$ tồn tại $\overline{x} \in A$ sao cho $x < \overline{x} < y$.*

Nói một cách nôm na rằng, tập A trù mật trong X nếu mọi phần tử trong X đều bị kiểm soát bởi những phần tử trong A với khoảng cách bé tuỳ ý.

Định lý 1.1. *Tập hợp A trù mật trong tập hợp X khi và chỉ khi với mọi $x \in X$, tồn tại dãy (x_n) thoả mãn $x_n \in A, \forall n \in \mathbb{N}$ và $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x \quad \left(\overline{A} = X\right)$.*

Chứng minh. Thật vậy, nếu $x \in A$ thì chọn $x_n = x, \forall n$. Nếu $x \notin A$, theo định nghĩa ta có: Với mọi $x \in X$ và mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $\overline{x} \in A$ sao cho $|x - \overline{x}| < \varepsilon$. Mặt khác dễ thấy tồn tại dãy (ε_n) thoả mãn $0 < \varepsilon_n < \varepsilon, \forall n \in \mathbb{N}$ sao cho mỗi $n \in \mathbb{N}$, tồn tại $x_n \in A$ thoả mãn $|x_n - \overline{x}| < \varepsilon_n$.

Suy ra
$$|x_n - x| = |x_n - \overline{x} + \overline{x} - x| \leqslant |x_n - \overline{x}| + |x - \overline{x}| < \varepsilon_n + \varepsilon < 2\varepsilon,$$
do đó $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$. Ngược lại là hiển nhiên. □

Nhận xét. *Nếu A trù mật trong X thì với mọi $x \in X$, tồn tại hai dãy $(x_{n_1}), (x_{n_2}) \in A$ thoả mãn:*

(i) $x_{n_1} < x < x_{n_2}, \forall n_1, n_2 \in \mathbb{N}$.

(ii) $\lim\limits_{n_1\to+\infty} x_{n_1} = \lim\limits_{n_2\to+\infty} x_{n_2} = x$.

Định lý 1.2. *Tập số hữu tỷ $\mathbb{Q}$ là trù mật trong tập số thực $\mathbb{R}$.*

Chứng minh 1. Ta có nguyên lý Archimet "*với $x, y \in \mathbb{R}$ sao cho $x > 0, y \geqslant 0$ thì luôn tồn tại $n \in \mathbb{N}$ sao cho $y \leqslant nx$*". Xét $x, y \in \mathbb{R}, x < y$. Đặt $d = y - x > 0$. Theo nguyên lý Archimet tồn tại $n \in \mathbb{N}^*$ sao cho $nd > 1$, suy ra $\frac{1}{n} < d$. Gọi $m = [nx] + 1$ thì $m - 1 \leqslant nx < m$ suy ra $nx < m \leqslant nx + 1$, suy ra tiếp $x < \frac{m}{n} \leqslant x + \frac{1}{n} < x + d = y$. □

Chứng minh 2. Ta cần chỉ ra $\forall a, b \in \mathbb{R}, \exists \frac{m}{n} \, (m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}^+)$ sao cho $a < \frac{m}{n} < b$. Thật vậy, chọn $n \in \mathbb{Z}^+$ sao cho đoạn $[na, nb]$ có độ dài lớn hơn 1 hay $nb - na > 1$ tức $n > \frac{1}{b-a}$. Khi đó tồn tại $m \in (na, nb)$, suy ra $na < m < nb$ suy ra $a < \frac{m}{n} < b$. □

Chứng minh 3. Không mất tổng quát, ta cố định b và đặt $b-a=\varepsilon$. Xét tập $A=\{x\in\mathbb{Q}\backslash x<b\}$. Theo định nghĩa về Supremum: $\forall\varepsilon>0,\exists x_0$ sao cho $b-\varepsilon<x_0<b$. Như vậy ta chỉ cần chứng minh Sup$A=b$. Gọi Sup$A=s$. Xét $n\in\mathbb{N}^*$ ta chứng minh

$$s-\frac{1}{n}\leqslant b\leqslant s+\frac{1}{n}.$$

Bất đẳng thức bên trái là hiển nhiên vì $\exists x^*$ sao cho $s-\frac{1}{n}<x^*<b$. Giả sử $s+\frac{1}{n}<b$. Nếu $s\in\mathbb{Q}$ thì $s+\frac{1}{n}\in A$ và $s+\frac{1}{n}>s$ (vô lý). Nếu $s\notin\mathbb{Q}$ thì

$$\text{w}=\frac{[(n+1)\,s]}{n+1}+\frac{1}{n+1}\in\mathbb{Q},$$

và thoả mãn $s<\text{w}<s+\frac{1}{n}$. Do đó $\text{w}<b$ hay $\text{w}\in A$ (vô lý). Suy ra $|b-s|\leqslant\frac{1}{n}$ suy ra tiếp $\lim|b-s|=0$ tức $b=s$. □

Chứng minh 4. Kí hiệu $[a]$ là phần nguyên của a. Ta có

$$[a]\leqslant a<[a]+1\Rightarrow\frac{[a]}{a}\leqslant 1<\frac{[a]+1}{a}\ \ (a>0)\,.$$

Theo định lý giới hạn kẹp ta được $\lim\limits_{a\to+\infty}\frac{[a]}{a}=1=\lim\limits_{a\to-\infty}\frac{[a]+1}{a}$. Cho x là số thực dương, với mọi $n\in\mathbb{N}^*$, đặt $x_n=\frac{[10^nx]}{10^n}$ và $x'_n=\frac{[10^nx]+1}{10^n}$. Hai dãy (x_n) và (x'_n) là các giá trị hữu tỉ gần đúng dưới và gần đúng trên của x với độ chính xác 10^{-n}. Dễ thấy $x_n,x'_n\in\mathbb{Q}$ và (x_n) tăng còn (x'_n) giảm. Ngoài ra $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=x$ và $\lim\limits_{n\to+\infty}x'_n=x$. Nếu $x<0$ thì hai dãy số lập như trên sẽ tiến tới $-x$. Bởi vậy hai dãy số $(-x_n)$ và $(-x'_n)$ sẽ tiến tới x. □

Chứng minh 5. Xét một số thực x nào đó. Ta chứng minh rằng $\forall\varepsilon>0,\exists r\in\mathbb{Q}:|r-x|<\varepsilon$. Thật vậy, nếu $x\in\mathbb{Q}$ thì ta chỉ cần chọn $r=x$. Ngược lại, $x\notin\mathbb{Q}$, xét biểu diễn thập phân vô hạn không tuần hoàn của $x,\ x=\overline{a_0a_1a_2\cdots a_n\cdots a_\infty}$. Ta thấy $\forall\varepsilon>0,\exists n\in\mathbb{N}:\varepsilon>10^{-n}$. Khi đó, chọn $r=\overline{a_0a_1a_2\cdots a_{n+1}}\in\mathbb{Q}$ ta thấy ngay $|r-x|<10^{-n}<\varepsilon$. □

Chú ý. *Tập số vô tỉ là trù mật trong tập số thực $\mathbb{R}$. Thật vậy, với mọi $a,b\in\mathbb{Q},\ a<b$. Đặt $e=b-a>0$, luôn tìm được số tự nhiên n đủ lớn sao cho $ne>2$. Khi đó $n\,(b-a)>2$, suy ra $nb>2+na$. Chọn $q=\sqrt{2}+na$ là số vô tỉ, do $\sqrt{2}$ là số vô tỉ và na là số hữu tỉ. Ta có*

$$na<\sqrt{2}+na<2+na<nb\Rightarrow na<q<nb\Rightarrow a<\frac{q}{n}<b.$$

Vậy tồn tại $m=\frac{q}{n}$ là số vô tỉ thoả mãn.

Định lý 1.3. *(Kronecker) Cho θ là một số vô tỉ. Kí hiệu $\{x\}=x-[x]$. Khi đó tập hợp $\{\{n\theta\}\,|n\in\mathbb{Z}^+\}$ là trù mật trong khoảng $(0;1)$.*

Chứng minh. Xét một khoảng $\Delta=(a;b)\subset(0;1)$, ta sẽ chứng minh $\exists n\in\mathbb{Z}^+:\{n\theta\}\in(a;b)$. Thật vậy, ta chia $(0;1)$ thành một số hữu hạn các nửa khoảng $\Delta_1,\Delta_2,\ldots,\Delta_{n_0}$ sao cho độ dài của mỗi nửa khoảng đều nhỏ hơn một số thực dương ε mà ta sẽ lựa chọn về sau. Khi đó, vì ta có thể tìm được vô hạn các giá trị n,m sao cho $n\theta+m\in[0;1]$ mà lại chỉ có hữu hạn các khoảng nên theo nguyên lý Dirichlet thì tồn tại các số nguyên dương $n_1,n_2\,(n_1>n_2)$ và m_1,m_2sao cho các số $n_1\theta+m_1$ và $n_2\theta+m_2$ thuộc cùng một khoảng Δ_k nào đó. Ta có

$$0<(n_1-n_2)\,\theta+(m_1-m_2)<\varepsilon.$$

Bây giờ ta chọn ε thoả mãn $\varepsilon < \frac{b-a}{2}$. Ta có

$$\frac{b-a}{(n_1-n_2)\,\theta + (m_1-m_2)} > \frac{b-a}{\varepsilon} > 2.$$

Do đó sẽ tồn tại một số nguyên k nằm giữa $\frac{a}{(n_1-n_2)\theta+(m_1-m_2)}$ và $\frac{b}{(n_1-n_2)\theta+(m_1-m_2)}$, tức là

$$a < k\,(n_1-n_2)\,\theta + (m_1-m_2) < b.$$

Bây giờ chọn $N = k\,(n_1-n_2)$ thì số $\{N\theta\} \in (a;b)$. Vậy ta kết luận $\{\{n\theta\} \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$ trù mật trong $(0;1)$. Định lý được chứng minh xong. □

Định lý 1.4. *(Thác triển hàm liên tục) Cho hai hàm số $f, g : X \to X$, trong đó f liên tục, g liên tục hoặc đơn điệu và A là tập trù mật trong X. Khi đó nếu $f(x) = g(x), \forall x \in A$ thì $f(x) = g(x), \forall x \in X$.*

Chứng minh. Ta xét hai trường hợp:

a) g là hàm liên tục: Theo định lý 1 thì $\forall x \in X, \exists (x_n)_{n\geqslant 0} \in A : \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$. Ta có $f(x_n) = g(x_n), \forall n \in \mathbb{N}$ suy ra $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} g(x_n) \Rightarrow f(x) = g(x)$.

b) g là hàm đơn điệu: Không mất tổng quát, giả sử g là đơn điệu tăng. $\forall x \in X, \exists x_{n_1}, x_{n_2} \in A$ sao cho $x_{n_1} < x < x_{n_2}$ và $\lim\limits_{n_2\to+\infty} x_{n_1} = \lim\limits_{n_2\to+\infty} x_{n_2} = x$. Ta có

$$f(x_{n_1}) = g(x_{n_1}) < g(x) < g(x_{n_2}) = f(x_{n_2}).$$

Chuyển qua giới hạn ta được $f(x) = g(x)$.

Trong mọi trường hợp định lý đều được chứng minh. □

Nhận xét. *Từ định lý 2 và định lý 4 thì ta có nghiệm của phương trình hàm trên $\mathbb{R}$ khi biết hàm đó trên $\mathbb{Q}$ và tính liên tục hoặc đơn điệu trên $\mathbb{R}$. Tiêu biểu là lớp phương trình hàm Cauchy.*

2. Một số ví dụ minh họa

Ví dụ 1. *Cho dãy số thực dương (a_n), tăng và không bị chặn. Chứng minh rằng tập hợp $S_1 = \left\{\frac{m}{a_n} \mid m, n \in \mathbb{N}^*\right\}$ trù mật trong $\mathbb{R}^+$.*

Chứng minh. Nhận xét rằng với mọi số $\alpha > 0$ và dãy (a_n) có tính chất $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ thì cũng có $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha a_n = +\infty$. Xét $p, q \in \mathbb{R}^+$ thoả mãn $p > q$. Khi ấy $\lim\limits_{n\to+\infty} (p-q)\,a_n = +\infty$. Do đó, tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}^*$ sao cho

$$(p-q)\,a_{n_0} > 2 \Rightarrow p a_{n_0} > [p a_{n_0} - 1] > q a_{n_0}.$$

Chọn $m_0 = [p a_{n_0}] - 1$, ta có $p > \frac{m_0}{a_{n_0}} > q$. Vậy S_1 trù mật trong $\mathbb{R}^+$. □

Nhận xét. *Từ ví dụ này suy ra các tập $\left\{\frac{m}{2^n} \mid m, n \in \mathbb{N}^*\right\}, \left\{\frac{a_n}{m} | m, n \in \mathbb{N}^*\right\}$ trù mật trong $\mathbb{R}^+$.*

Ví dụ 2. *Giả sử $\mathbb{N}^*$ được chia thành hai tập con A và B, mỗi tập chứa vô hạn phần tử. Đặt $S_3 = \left\{\frac{a}{b} \,|\, a \in A, b \in B\right\}$. Chứng minh rằng tập S_3 trù mật trong $[0; +\infty)$.*

Chứng minh. Do B có vô hạn phần tử nên $\forall k \in \mathbb{N}, \forall \varepsilon > 0, \exists b \in B$ sao cho $b > \frac{k}{2\varepsilon}$. Do A có vô hạn phần tử nên

$$b(x+\varepsilon) > b(x-\varepsilon) + k, \forall x \in [0; +\infty) \Rightarrow \exists a \in A : b(x+\varepsilon) > a > b(x-\varepsilon),$$

suy ra

$$x + \varepsilon > \frac{a}{b} > x - \varepsilon \Rightarrow \left|x - \frac{a}{b}\right| < \varepsilon.$$

Vậy S_3 trù mật trong $[0; +\infty)$. □

Nhận xét. *Nếu A trù mật trong $\mathbb{R}^+$ thì $B = \left\{\frac{1}{r} \,|\, r \in A\right\}$ cũng trù mật trong $\mathbb{R}^+$.*

Ví dụ 3. *Cho $(a_n)_{n\geqslant 1}$ là dãy số nguyên dương thoả mãn $0 < a_{n+1} - a_n < \sqrt{a_n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Đặt $S_4 = \left\{\frac{a_k}{a_l} \,|\, k, l \in \mathbb{N}^*, k > l\right\}$. Chứng minh rằng tập S_4 là trù mật trong $(0; 1)$.*

Chứng minh. Ta chứng minh nhận định sau:

$$\forall\ 0 < x < y < 1, \exists k, l \in \mathbb{N}^*, k > l : x < \frac{a_k}{a_l} < y.$$

Thật vậy, từ giả thiết suy ra (a_n) là dãy số nguyên dương tăng nên $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$. Suy ra rằng $\forall x, y > 0, \exists l \in \mathbb{N}^*$ sao cho $\frac{a_1}{a_l} < x$ và $\frac{1}{\sqrt{a_l}} < y - x$. Xét các phần tử của dãy số hữu hạn

$$\frac{a_1}{a_l} < \frac{a_2}{a_l} < \cdots < \frac{a_{l-1}}{a_l} < \frac{a_l}{a_l} = 1.$$

Khi đó với $\forall k = 1, 2, \ldots, l-1$, ta đều có

$$\frac{a_{k+1}}{a_l} - \frac{a_k}{a_l} < \frac{\sqrt{a_k}}{a_l} < \frac{\sqrt{a_l}}{a_l} = \frac{1}{\sqrt{a_l}} < y - x.$$

Hơn nữa $\frac{a_1}{a_l} < x$ nên phải tồn tại k sao cho $x < \frac{a_k}{a_l} < y$. □

Ví dụ 4. *Cho dãy số dương (a_n) tăng thoả mãn $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n} = k, k \in \mathbb{R}^+$ và dãy số dương (b_n) tăng, không bị chặn. Chứng minh rằng tập $S_5 = \left\{\frac{a_m}{b_n} \,|\, m, n \in \mathbb{N}^*\right\}$ trù mật trong $\mathbb{R}^+$.*

Chứng minh. Xét $p, q \in \mathbb{R}^+, p > q$. Do $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n} = k$ nên chọn $\varepsilon > 0$ sao cho $\frac{p-q}{p+q} \cdot k > \varepsilon$. Ta có, tồn tại N sao cho

$$\left|\frac{a_n}{n} - k\right| < \frac{p-q}{p+q} \cdot k - \varepsilon, \forall n \geqslant N \Rightarrow \frac{2q}{p+q} \cdot k + \varepsilon < \frac{a_n}{n} < \frac{2p}{p+q} \cdot k - \varepsilon, \forall n \geqslant N.$$

Đặt $\alpha = \frac{q}{\frac{2q}{p+q}k + \varepsilon} < \frac{p}{\frac{2q}{p+q}k - \varepsilon} = \beta$. Theo ví dụ 1, tồn tại vô số bộ (m, n) sao cho $\alpha < \frac{n}{b_m} < \beta$. Chú ý theo thí dụ 1 chỉ có sự tồn tại hữu hạn, nhưng sự tồn tại dẫn đến sự tồn tại vô hạn vì nếu ta chọn $\alpha < \alpha_1 < \cdots < \alpha_n < \beta$ thì giữa $(\alpha_i,\ \alpha_j)$ tồn tại một số, cho $n \to +\infty$ thì tồn tại vô số số. Do đó, có thể chọn $n_0 > N$ và m_0 sao cho

$$\alpha < \frac{n_0}{b_{m_0}} < \beta, \tag{2.1}$$

mà
$$\frac{2q}{p+q}k+\varepsilon<\frac{a_{n_0}}{n_0}<\frac{2p}{p+q}k-\varepsilon. \tag{2.2}$$

Nhân vế theo vế (2.1) và (2.2) ta có $q<\frac{a_{n_0}}{b_{m_0}}<q$. Vậy S_5 trù mật trong $\mathbb{R}^+$. □

Nhận xét. *Ta thấy rằng:*

1) Tập $\left\{m!\left|\sin\frac{1}{n}\right|\middle|m,n\in\mathbb{N}^*\right\}$ trù mật trong $\mathbb{R}^+$.

2) Nếu $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_n}{n}=+\infty$ thì bài toán không còn đúng nữa. Thật vậy, chọn $a_n=2^n, b_m=2^m$ thì S_5 không trù mật trong $\mathbb{R}^+$.

3) Nếu $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_n}{n}=0$ thì bài toán không còn đúng nữa. Thật vậy, chọn $a_n=2^k$ nếu $2^{2^k}\leqslant n\leqslant 2^{2^{k+1}}-1$ và $b_m=2^m$ thì S_5 không trù mật trong $\mathbb{R}^+$.

Ví dụ 5. *Chứng minh rằng tập $S_6=\{\sin n\,|\,n\in\mathbb{N}\}$ trù mật trong $[-1;1]$.*

Chứng minh. Trước hết ta chứng minh rằng nếu α là một số vô tỉ dương, thì tập $\{n-m\alpha\,|\,m,n\in\mathbb{N}\}$ là trù mật trong $\mathbb{R}^+$(có thể xem ví dụ 6) . Để làm điều đó, lấy một khoảng $(a;b)\,,0<a<b$ ta sẽ chỉ ra rằng khoảng này chứa ít nhất một phần tử của tập đã cho. Đặt $\varepsilon=b-a>0$, tồn tại phần tử R_n sao cho
$$0<R_n-\alpha<\frac{1}{q_n^2}. \tag{2.3}$$

Thực vậy, lấy một số n lẻ và chú ý rằng $(q_nx_{n+1}+q_{n-1})\,q_n>q_n^2$. Vì $\lim\limits_{n\to+\infty}q_n=+\infty$, với n đủ lớn ta có $\frac{1}{q_n}<\varepsilon$. Từ điều này và (2.3) suy ra $0<p_n-\alpha q_n<\frac{1}{q_n}<\varepsilon$ với n đủ lớn, do đó tồn tại $n_0\in\mathbb{N}$ sao cho $n_0\,(p_n-\alpha q_n)\in(a;b)$.

Cho $t\in[-1;1]$, tồn tại số thực x sao cho $t=\sin x$. Từ nhận xét ở trên suy ra tồn tại các dãy các số nguyên dương $\{m_n\}$ và $\{k_n\}$ với $x=\lim\limits_{n\to+\infty}(m_n-2\pi k_n)$, Sử dụng tính liên tục của hàm $\sin x$ ta được
$$t=\sin x=\sin\left[\lim_{n\to+\infty}(m_n-2\pi k_n)\right]=\lim_{n\to+\infty}\sin m_n.$$

Vậy mọi số thuộc khoảng $[-1;1]$ đều là điểm giới hạn của tập $S_6=\{\sin n\,|\,n\in\mathbb{N}\}$. □

Ví dụ 6. *Cho $u,v\in\mathbb{R}^+$. Chứng minh rằng tập hợp $\{au+bv\,|\,a,b\in\mathbb{Z}\}$ trù mật trong $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $\frac{u}{v}$ là một số vô tỷ.*

Chứng minh. Ta có $\{au+bv\,|\,a,b\in\mathbb{Z}\}$ trù mật trong $\mathbb{R}$ nên $\left\{v\left(\frac{au}{v}+b\right)\,\middle|\,a,b\in\mathbb{Z}\right\}$ trù mật trong $\mathbb{R}$ do đó $\left\{\frac{au}{v}+b\,|\,a,b\in\mathbb{Z}\right\}$ trù mật trong $\mathbb{R}$ suy ra $\left\{\left\{a\frac{u}{v}\right\}\,\middle|\,a\in\mathbb{Z}\right\}$ trù mật trong $(0;1)$ vì thế $\frac{u}{v}$ là số vô tỷ. □

Nhận xét. *Với $u\neq 0, v\neq 0$ thì bài toán vẫn đúng.*

Ví dụ 7. *Cho các số thực dương a,b thoả mãn $b\,[an]=a\,[bn]\,,\ \forall n\in\mathbb{Z}^+$. Chứng minh rằng $a=b$ hoặc cả a và b đều nguyên.*

Chứng minh. Giả sử $a \neq b$ và cả a, b đều vô tỷ, ta có

$$b[an] = a[bn] \Leftrightarrow ban - b\{an\} = abn - a\{bn\} \Leftrightarrow b\{an\} = a\{bn\}. \tag{2.4}$$

Không mất tổng quát, giả sử $a > b$, ta có

$$\frac{b}{a} = \frac{\{bn\}}{\{an\}}, \forall n \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow \frac{b}{a} > \{bn\}, \forall n \in \mathbb{Z}^+,$$

điều này vô lý do b là số vô tỷ nên $\{\{bn\} \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$ là trù mật trong $(0;1)$. Do đó một trong hai số a, b là hữu tỷ. Giả sử $a \in \mathbb{Q}$, khi đó tồn tại $n_0 \in \mathbb{Z}^+$ sao cho $an_0 \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow \{an_0\} = 0$. Do đó $\{bn_0\} = 0 \Rightarrow b \in \mathbb{Q}$. Đặt $a = \frac{p}{q}$, $(p,q) = 1$ và $b = \frac{s}{t}$, $(s,t) = 1$. Trong (2.4) cho $n = q$ có

$$0 = a\{bq\} \Rightarrow \{bq\} = 0 \Rightarrow \{bq\} \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow q \,\vdots\, t.$$

Tương tự, ta có $t \,\vdots\, q$. Vậy $q = t$, do đó (2.4) tương đương với

$$s\left\{\frac{p}{q}n\right\} = p\left\{\frac{s}{q}n\right\}, \forall n \in \mathbb{Z}^+.$$

Với $q > 1$, ta chọn $n \equiv \frac{1}{s} \pmod q$, suy ra

$$\left\{\frac{sn}{q}\right\} = \left\{\frac{1}{q}\right\} = \frac{1}{q} \Rightarrow s\left\{\frac{p}{q}n\right\} = p\left\{\frac{1}{q}\right\} = \frac{p}{q}.$$

Đặt

$$pn = qk + r \Rightarrow s\left\{\frac{pn}{q}\right\} = s \cdot \frac{r}{q} \Rightarrow \frac{p}{q} = s.\frac{r}{q} \Rightarrow p = s \cdot r \Rightarrow p \,\vdots\, s.$$

Tương tự có $s \,\vdots\, p$. Do đó $p = s$, vô lý do $a \neq b$, do vậy $q = 1$ và $a,\ b \in \mathbb{Z}$. Tóm lại hoặc $a = b$ hoặc $a, b \in \mathbb{Z}$. □

Ví dụ 8. *Cho a, b là các số thực dương thoả mãn $[2an + b]$ chia hết cho 2 với mọi số nguyên dương n. Chứng minh rằng a là số nguyên dương.*

Chứng minh. Nếu a là số vô tỷ thì ta có

$$[2an + b] = [2\{an\} + b] + 2[an] \,\vdots\, 2, \forall n \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow [2\{an\} + b] \,\vdots\, 2, \forall n \in \mathbb{Z}^+. \tag{2.5}$$

Lại do $\{\{an\} \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$ là trù mật trong $(0;1)$. Suy ra tồn tại số nguyên dương n mà $[b + 2\{an\}]$ không chia hết cho 2. Thật vậy:

Nếu $2k + 1 > b \geqslant 2k$ thì chọn n sao cho $2k + 2 > 2\{an\} + b \geqslant 2k + 1$.

Nếu $2k + 2 > b \geqslant 2k + 1$ thì chọn n sao cho $2k + 2 > 2\{an\} + b \geqslant 2k + 1$. Điều này mâu thuẫn với (2.5) nên suy ra a phải là số hữu tỷ. Nếu a không nguyên thì đặt $a = \frac{p}{q}$, $(p,q) = 1$, $q \in \mathbb{Z}^+, q > 1$. Khi đó viết $n = qt + r,\ 0 \leqslant r \leqslant q - 1$ thì

$$[2an + b] = \left[2\left(pt + \frac{pr}{q}\right) + b\right] \,\vdots\, 2, \forall n \in \mathbb{Z}^+.$$

Chọn $r = 0$ thì $[2pt + b] \,\vdots\, 2 \Rightarrow [b] \,\vdots\, 2$. Do đó

$$[2an + b] = 2pt + [b] + \left[\frac{2pr}{q} + \{b\}\right] \vdots\, 2, \forall t \in \mathbb{Z}^+,$$

tương đương với

$$\left[\frac{2pr}{q} + \{b\}\right] \vdots\, 2, \forall t \in \mathbb{Z}^+,$$

hay là

$$\left[2\left\{\frac{pr}{q}\right\} + \{b\}\right] \vdots\, 2, \forall t \in \mathbb{Z}^+.$$

Mà $3 > 2\left\{\frac{pr}{q}\right\} + \{b\} > 0$ suy ra $\left[2\left\{\frac{pr}{q}\right\} + \{b\}\right] \in \{0; 2\}$. Ta xét hai trường hợp sau:

- Nếu tồn tại $r_0 \neq 0$ sao cho $\left[2\left\{\frac{pr_0}{q}\right\} + \{b\}\right] = 0$, thì

  $$1 > 2\left\{\frac{pr_0}{q}\right\} + \{b\} > 0 \Rightarrow \frac{1}{2} > \left\{\frac{pr_0}{q}\right\} \Rightarrow \left\{\frac{p2r_0}{q}\right\} = \left\{2\frac{pr_0}{q}\right\} = 2\left\{\frac{pr_0}{q}\right\},$$

  và

  $$2\left\{\frac{p2r_0}{q}\right\} + \{b\} = 4\left\{\frac{pr_0}{q}\right\} + \{b\} > 2\left\{\frac{pr_0}{q}\right\} + \{b\}.$$

  Cứ làm như vậy suy ra tồn tại số nguyên dương i mà (vì mỗi lần thực hiện thì giá trị biểu thức tăng lên)

  $$\begin{cases} 2\left\{\dfrac{p\cdot 2^i \cdot r_0}{q}\right\} + \{b\} < 1 \\ 2\left\{\dfrac{p\cdot 2^{i+1} \cdot r_0}{q}\right\} + \{b\} > 1 \end{cases}$$

  Khi đó

  $$2\left\{\frac{p\cdot 2^{i+1}\cdot r_0}{q}\right\} + \{b\} = 4\left\{\frac{p\cdot 2^i\cdot r_0}{q}\right\} + \{b\} < 2\left(2\left\{\frac{p\cdot 2^i\cdot r_0}{q}\right\} + \{b\}\right) < 2.$$

  Do đó

  $$\left[2\left\{\frac{p\cdot 2^{i+1}\cdot r_0}{q}\right\} + \{b\}\right] = 1.$$

  Gọi r_1 là số dư $2^{i+1}\cdot r_0$ khi chia cho q, suy ra vô lý.

- Nếu không tồn tại $r_0 \neq 0$ sao cho $\left[2\left\{\frac{pr_0}{q}\right\} + \{b\}\right] = 0$, thì với mọi $r_0 \neq 0$ ta có

  $$\left[2\left\{\frac{pr_0}{q}\right\} + \{b\}\right] = 2 \Rightarrow 3 > 2\left\{\frac{pr_0}{q}\right\} + \{b\} > 2,$$

  mà

  $$1 > \{b\} > 0 \Rightarrow 2\left\{\frac{pr_0}{q}\right\} > 1 \Rightarrow \left\{\frac{pr_0}{q}\right\} > \frac{1}{2} \Rightarrow \left\{\frac{p\cdot 2r_0}{q}\right\} = \left\{2\cdot\frac{pr_0}{q}\right\} = 2\left\{\frac{pr_0}{q}\right\} - 1 < \left\{\frac{pr_0}{q}\right\}.$$

Cứ làm như vậy, suy ra tồn tại số nguyên dương i sao cho (vì mỗi lần thực hiện thì giá trị biểu thức giảm xuống)

$$\begin{cases} 2\left\{\dfrac{pr_0\cdot 2^i}{q}\right\}+\{b\}>2\\ 2\left\{\dfrac{pr_0\cdot 2^{i+1}}{q}\right\}+\{b\}<2\end{cases}$$

Do $2\left\{\frac{pr_0\cdot 2^i}{q}\right\}+\{b\}>2$, nên

$$2\left\{\frac{pr_0\cdot 2^{i+1}}{q}\right\}+\{b\}=2\left(2\left\{\frac{pr_0\cdot 2^i}{q}\right\}-1\right)+\{b\}=4\left\{\frac{pr_0\cdot 2^i}{q}\right\}+\{b\}-2>2\left\{\frac{pr_0\cdot 2^i}{q}\right\}>1.$$

Suy ra $\left[2\left\{\frac{pr_0\cdot 2^{i+1}}{q}\right\}+\{b\}\right]=1$. Chọn r_1 là số dư khi chia $r_0 2^{i+1}$ cho q suy ra điều vô lý.

Tóm lại $a\in\mathbb{Z}^+$. □

Ví dụ 9. *Đặt $A=\left\{\frac{2^m}{3^n}\,|\,m,n\in\mathbb{Z}^+,2^m>3^n\right\}$. Chứng minh rằng $inf(A)=1$.*

Chứng minh. Ta đặt $B=\{\log_3 a\,|\,a\in A\}$. Khi đó ta phải chứng minh $\inf(B)=\log_3 1=0$. Ta thấy $b>0,\forall b\in B$ suy ra $\inf(B)\geqslant 0$. Lại thấy với mỗi $b\in B$, b có dạng $n\log_3 2-m$. Với mỗi số nguyên dương n mà $n\cdot\log_3 2>1$, xét $m=[n\log_3 2]\in\mathbb{Z}^+$. Khi đó, $b=\{n\log_3 2\}$. Lại thấy $\log_3 2$ là số vô tỷ dương nên theo định lý Kronecker thì $\{\{n\log_3 2\}\,|n\in\mathbb{Z}^+\}$ trù mật trong $(0;1)$. Do đó tồn tại dãy số nguyên dương n_i để $b_i=\{n_i\log_3 2\}\to 0$, khi $i\to+\infty$.

Do vậy $\inf(B)=0$, suy ra $\inf(A)=1$. □

Ví dụ 10. *(Putnam 1995) Cho $A(x)=\{[nx]\,|n\in\mathbb{Z}^+\}$. Chứng minh rằng nếu $a,b,c\in\mathbb{R}^+$ thì $A(a),A(b),A(c)$, không thể là một phân hoạch của $\mathbb{Z}^+$.*

Chứng minh. Giả sử phản chứng nếu $a,b,c\in\mathbb{R}^+$ thì $A(a),A(b),A(c)$ là một phân hoạch của $\mathbb{Z}^+$. Ta xét các trường hợp sau:

- Trong các số a,b,c có ít nhất một số hữu tỷ, giả sử là a. Đặt $a=\frac{p}{q}$, $(p,q)=1,q\in\mathbb{Z}^+$. Ta chứng minh tồn tại các số nguyên dương m,n sao cho

$$[ma]=[nb]. \tag{2.6}$$

Nếu $b\in\mathbb{Q}$ thì tồn tại $m,n\in\mathbb{Z}^+$ mà

$$\begin{cases} ma,nb\in\mathbb{Z}^+\\ ma=nb\end{cases}$$

Khi đó ta có điều phải chứng minh. Nếu $b\notin\mathbb{Q}$ thì chọn $m=qt,t\in\mathbb{Z}^+$. Khi đó $[ma]=\left[qt\frac{p}{q}\right]=pt$. Do $b\notin\mathbb{Q}$ nên theo định lý Kronecker, tồn tại $n_0\in\mathbb{Z}^+$ sao cho $\{n_0b\}<\frac{1}{p}$. Khi đó

$$[(pn_0)\,b]=[p\,[n_0b]+p\,\{n_0b\}]=p\,[n_0b]+[p\,\{n_0b\}]=p\,[n_0b].$$

Chọn $t=[n_0b]$ thì ta có điều phải chứng minh. Vậy (2.6) đúng và do đó $A(a)\cap A(b)\neq\emptyset$, trái với giả thiết phản chứng.

- Cả ba số a, b, c đều là vô tỷ. Xét $n \in \mathbb{Z}^+$ bất kỳ, khi đó số các số thuộc $A(a)$ mà nhỏ hơn hay bằng n là số các số $m \in \mathbb{Z}^+$ thoả mãn

$$[am] \leqslant n \Leftrightarrow am - 1 < n \Leftrightarrow m < \frac{n+1}{a} \Leftrightarrow m \leqslant \left[\frac{n+1}{a}\right].$$

Do đó có $\left[\frac{n+1}{a}\right]$ số thuộc $A(a)$ và nhỏ hơn hay bằng n. Tương tự với b, c. Khi đó (do giả sử)

$$\sum_{a,b,c} \left[\frac{n+1}{a}\right] = n, \forall n \in \mathbb{Z}^+,$$

suy ra

$$\sum_{a,b,c} \frac{\left[\frac{n+1}{a}\right]}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

Cho $n \to +\infty$ có $\sum\limits_{a,b,c} \frac{1}{a} = 1$, suy ra một trong ba số a, b, c nhỏ hơn 3, giả sử là a.

Ta nhắc lại định lý Beatty sau:

"*Cho $\alpha, \beta \in I^+ : \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$. Khi đó $A(\alpha)$, $A(\beta)$ là một phân hoạch của $\mathbb{Z}^+$.*"

Trở lại bài toán, do $a \in I^+, a > 1$ nên $\frac{a}{a-1} \in I^+$ và $\frac{a}{a-1} > \frac{3}{2}$. Khi đó $A(a), A\left(\frac{a}{a-1}\right)$ là một phân hoạch của $\mathbb{Z}^+$. Khi đó $A(b) \cup A(c) = A\left(\frac{a}{a-1}\right)$.

Nhận xét. *Cho $\alpha \in I, \alpha > \frac{3}{2}$ và $\beta \in \mathbb{R}^+$ sao cho $A(\beta) \subseteq A(\alpha)$, khi đó $\frac{\beta}{\alpha} \in \mathbb{Z}^+$.*

Chứng minh. Do $A(\beta) \subseteq A(\alpha)$ nên với mỗi $m \in \mathbb{Z}^+$ thì tồn tại $n \in \mathbb{Z}^+$ thoả mãn

$$[m\beta] = [n\alpha] \Rightarrow n\alpha - 1 < [m\beta] < n\alpha \Rightarrow \frac{[m\beta]}{\alpha} < n < \frac{[m\beta]}{\alpha} + \frac{1}{\alpha}. \tag{2.7}$$

Ta thấy nếu tồn tại $m \in \mathbb{Z}^+$ mà $0 < \left\{\frac{[m\beta]}{\alpha}\right\} < 1 - \frac{1}{\alpha}$ thì không tồn tại $n \in \mathbb{Z}^+$ thoả mãn (2.7), do đó

$$\left\{\frac{[m\beta]}{\alpha}\right\} \geqslant 1 - \frac{1}{\alpha}, \forall m \in \mathbb{Z}^+ \Leftrightarrow \left\{\frac{m\beta - \{m\beta\}}{\alpha}\right\} \geqslant 1 - \frac{1}{\alpha} \Leftrightarrow \left\{mx - \frac{\{m\beta\}}{\alpha}\right\} \geqslant 1 - \frac{1}{\alpha},$$

$$x = \frac{\beta}{\alpha} \Leftrightarrow \left\{\{mx\} - \frac{\{m\beta\}}{\alpha}\right\} \geqslant 1 - \frac{1}{\alpha}, \forall m \in \mathbb{Z}^+. \tag{2.8}$$

Nếu $x \in I$, khi đó với mỗi $m \in \mathbb{Z}^+$ có

$$\left[\begin{array}{l} \{mx\} - \dfrac{\{m\beta\}}{\alpha} \geqslant 1 - \dfrac{1}{\alpha} \\ -\{mx\} + \dfrac{\{m\beta\}}{\alpha} \geqslant 1 - \dfrac{1}{\alpha} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \{mx\} \geqslant 1 - \dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{\{m\beta\}}{\alpha} \geqslant 1 - \dfrac{1}{\alpha} \\ \dfrac{\{m\beta\}}{\alpha} + \dfrac{1}{\alpha} - 1 \geqslant \{mx\} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \{mx\} \geqslant 1 - \dfrac{1}{\alpha} \\ \dfrac{2}{\alpha} - 1 \geqslant \{mx\} \end{array}\right.$$

1) Nếu $\frac{2}{\alpha} - 1 \leqslant 0$ thì ta phải có $\{mx\} \geqslant 1 - \frac{1}{\alpha}, \forall m \in \mathbb{Z}^+$, trái với định lý Kronecker.
2) Nếu $\frac{2}{\alpha} - 1 > 0$ thì ta có $1 - \frac{1}{\alpha} > \frac{2}{\alpha} - 1$ do $\alpha > \frac{3}{2}$, suy ra với mọi $m \in \mathbb{Z}^+$ thì $\{mx\} \notin \left(\frac{2}{\alpha} - 1; 1 - \frac{1}{\alpha}\right)$ trái với định lý Kronecker.

Do đó $x \notin I$ suy ra $x \in \mathbb{Q}$.

Nếu $x \notin \mathbb{Z}^+$, đặt $x = \frac{p}{q}$, $(p, q) = 1, q > 1$. Xét $m = qk + 1, k \in \mathbb{Z}^+$, khi đó

$$\begin{aligned}\left\{\{mx\} - \frac{\{m\beta\}}{\alpha}\right\} &= \left\{\left\{(qk+1)\frac{p}{q}\right\} - \frac{\{(qk+1)\beta\}}{\alpha}\right\} \\ &= \left\{\left\{\frac{p}{q}\right\} - \frac{\{k \cdot q\beta + \beta\}}{\alpha}\right\} \\ &= \left\{\{x\} - \frac{\{kp \cdot \alpha + \beta\}}{\alpha}\right\}.\end{aligned} \tag{2.9}$$

Vì $\alpha \in I$ nên $p\alpha \in I$, do đó $\{\{k(p\alpha)\} \mid k \in \mathbb{Z}^+\}$ trù mật trên $(0; 1)$, từ đó suy ra $\{\{k(p\alpha) + \beta\} \mid k \in \mathbb{Z}^+\}$, trù mật trên $(0; 1)$, dẫn đến $\left\{\frac{\{k(p\alpha)+\beta\}}{\alpha} \mid k \in \mathbb{Z}^+\right\}$ trù mật trên $\left(0; \frac{1}{\alpha}\right)$. Suy ra tồn tại $k_0 \in \mathbb{Z}^+$ sao cho

$$1 > \{x\} > \frac{\{k_0 p\alpha + \beta\}}{\alpha} > \{x\} + \frac{1}{\alpha} - 1 \quad \left(\text{do } 1 > \{x\} > \{x\} + \frac{1}{\alpha} - 1;\ \frac{1}{\alpha} > \{x\} + \frac{1}{\alpha} - 1\right).$$

Khi đó, từ (2.7) xét $m = qk_0 + 1$, ta có

$$\begin{aligned}\left\{\{mx\} - \frac{\{m\beta\}}{\alpha}\right\} &= \left\{\{x\} - \frac{\{k_0 p\alpha + \beta\}}{\alpha}\right\} \\ &= \{x\} - \frac{\{k_0 p\alpha + \beta\}}{\alpha} \\ &< \{x\} - \left(\{x\} + \frac{1}{\alpha} - 1\right) = 1 - \frac{1}{\alpha},\end{aligned}$$

trái với (2.9) Do đó x phải thuộc $\mathbb{Z}^+$, hay $\frac{\beta}{\alpha} \in \mathbb{Z}^+$ và nhận xét được chứng minh.

Trở lại với bài toán, do

$$A(b) \cup A(c) = A\left(\frac{a}{a-1}\right) \Rightarrow A(b), A(c) \subset A\left(\frac{a}{a-1}\right),$$

mà $\frac{a}{a-1} > \frac{3}{2}$ nên tồn tại $b_0 \in \mathbb{Z}^+$ sao cho $b = \frac{a}{a-1} \cdot b_0$ và $c_0 \in \mathbb{Z}^+$ sao cho $c = \frac{a}{a-1} \cdot c_0$. Đặt $d = \frac{a}{a-1} \cdot b_0 c_0$ thì

$$A(d) \subset A(b),\ A(d) \subset A(c),$$

điều này vô lý do $A(b) \cap A(c) = \emptyset$.

Vậy điều giả sử ban đầu là sai, do đó ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. *Cho $a_i \in \mathbb{R}^+$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ đôi một phân biệt, khi đó nếu $A(a_1), A(a_2), \ldots, A(a_n)$ là một phân hoạch của $\mathbb{Z}^+$ thì $n \in \{1; 2\}$.*

Tiếp theo chúng ta cùng nghiên cứu một số bài toán mà cách giải được dùng phương pháp của tập trù mật.

Ví dụ 11. *(France TST 2005) Cho $A \subset \mathbb{N}^*$, $A \neq \emptyset$ sao cho $\forall x \in A$ thì $4x, [\sqrt{x}] \in A$. Chứng minh rằng $A = \mathbb{N}^*$.*

Chứng minh. Ta gọi a_0 là số nguyên dương bé nhất thuộc A. Nếu $a_0 > 1$ thì $\left[\sqrt{a_0}\right] \in A$ và $\left[\sqrt{a_0}\right] \leqslant \sqrt{a_0} < a_0$, mâu thuẫn với cách chọn a_0 vì vậy $a_0 = 1$. Từ giả thiết suy ra

$$4^n \in A, \forall n \Rightarrow \left[\sqrt{4^n}\right] = 2^n \in A, \forall n \Rightarrow \left[(2^n)^{\frac{1}{2^m}}\right] \in A, \forall m, n. \tag{2.10}$$

Ta có nhận xét sau

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \exists m, n \in \mathbb{N}^* : k^{2^m} \leqslant 2^n < (k+1)^{2^m}.$$

Thật vậy, chọn $m \in \mathbb{N}^*$ để $2^m \left[\log_2 (k+1) - \log_2 k\right] \geqslant 2$, khi đó

$$\log_2 (k+1)^{2^m} - \log_2 k^{2^m} \geqslant 2 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}^* : \log_2 k^{2^m} \leqslant n < \log_2 (k+1)^{2^m},$$

suy ra

$$k^{2^m} \leqslant 2^n < (k+1)^{2^m} \Rightarrow k = \left[(2^n)^{\frac{1}{2^m}}\right].$$

Từ (2.10) suy ra $k \in A$ nên $\mathbb{N}^* \subset A$. Do đó $A = \mathbb{N}^*$. □

Ví dụ 12. *(VMO 1997, bảng A) Cho số tự nhiên $n > 1$ không chia hết cho 1997. Xét hai dãy số (a_i) và (b_j) được xác định như sau:*

$$a_i = i + \frac{ni}{1997}, i = 1, 2, \ldots, 1996, \;\; b_j = j + \frac{1997j}{n}, j = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Xét tất cả các số của hai dãy trên và sắp thứ tự không giảm ta được $c_1 \leqslant c_2 \leqslant \cdots \leqslant c_{1995+n}$. Chứng minh rằng $c_{k+1} - c_k < 2, \forall k = 1, 2, \ldots, 1994 + n$.

Chứng minh. Thay 1997 bởi số m không là ước của n. Xét hai dãy số

$$a_i = i\left(1 + \frac{n}{m}\right), i = 0, 1, \ldots, m, \;\; b_j = j\left(1 + \frac{m}{n}\right), j = 0, 1, \ldots, n.$$

Ta có

$$a_0 = 0 < a_1 < \cdots < a_m = m + n, \;\; b_0 = 0 < b_1 < \cdots < b_n = m + n.$$

Nếu $n < m$ thì $a_{i+1} - a_i = 1 + \frac{n}{m} < 2$. Với mỗi k mà $1 \leqslant k \leqslant m + n - 2$ thì tồn tại duy nhất j để $a_j \leqslant c_k < a_{j+1}$ với $0 \leqslant j \leqslant n - 1$. Khi đó $c_{k+1} \leqslant a_{j+1}$ và

$$c_{k+1} - c_k \leqslant a_{j+1} - a_j < 2.$$

Nếu $m < n$ thì $b_{j+1} - b_j = 1 + \frac{m}{n} < 2$. Với mỗi k mà $1 \leqslant k \leqslant m + n - 2$ thì tồn tại duy nhất j để $b_j \leqslant c_k < b_{j+1}$ với $0 \leqslant j \leqslant n - 1$. Khi đó $c_{k+1} \leqslant b_{j+1}$ và

$$c_{k+1} - c_k \leqslant b_{j+1} - b_j < 2.$$

Ta có điều phải chứng minh. □

Ví dụ 13. *Với $\alpha \geqslant 1$ là một số thực sao cho $\forall m, n \in \mathbb{N}^*, m \,\vdots\, n \Rightarrow [m\alpha] \,\vdots\, [n\alpha]$. Chứng minh $\alpha \in \mathbb{N}^*$.*

Chứng minh. Giả sử $\alpha = t + r, t \in \mathbb{N}^*, 0 \leqslant r \leqslant 1$. Từ giả thiết $\forall k, n \in \mathbb{N}^*$ sao cho $[kn\alpha] \,\vdots\, [n\alpha]$, ta có

$$[kn\alpha] = [knt + knr] = k[nt] + [knr] \equiv [knr] \pmod{nt},$$

suy ra $\forall k, n \in \mathbb{N}^*$. Lại có $[knr] \,\vdots\, [n\alpha]$. Cố định k, cho $n \to +\infty$ có $nt \to +\infty$ mà $[knr]$ bị chặn nên suy ra $\{nr\} = 0 \Rightarrow r = 0 \Rightarrow \alpha = t \in \mathbb{N}^*$. Ta có điều phải chứng minh. □

Ví dụ 14. *(IMO 1997) Cho $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ thoả mãn*

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right| = 1, \quad |x_i| \leqslant \frac{n+1}{2}, \forall 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Chứng minh rằng tồn tại một hoán vị $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ của $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ sao cho

$$\left|\sum_{i=1}^{n} i y_i\right| \leqslant \frac{n+1}{2}.$$

Chứng minh. Với mọi hoán vị $\Pi = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ của $(x_1, x_2, ..., x_n)$, ta kí hiệu $S(\Pi)$ là giá trị của tổng $y_1 + 2y_2 + \dots + ny_n$. Đặt $r = \frac{n+1}{2}$. Ta cần phải chứng minh rằng tồn tại Π nào đó để $|S(\Pi)| \leqslant r$. Gọi Π_0 là hoán vị đồng nhất $\Pi_0 = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ và gọi $\overline{\Pi}$ là hoán vị đảo ngược $\overline{\Pi} = (x_n, x_{n-1}, \dots, x_1)$. Nếu $|S(\Pi_0)| \leqslant r$ hoặc $\left|S\left(\overline{\Pi}\right)\right| \leqslant r$, bài toán coi như được giải xong, do vậy, ta giả sử $|S(\Pi_0)| > r$ và $\left|S\left(\overline{\Pi}\right)\right| > r$. Để ý

$$\begin{aligned} S(\Pi_0) + S\left(\overline{\Pi}\right) &= (x_1 + 2x_2 + \dots + nx_n) + (x_n + 2x_{n-1} + \dots + nx_1) \\ &= (n+1)(x_1 + x_2 + \dots + x_n). \end{aligned}$$

Ta suy ra $\left|S(\Pi) + S\left(\overline{\Pi}\right)\right| = n + 1 = 2r$. Nhưng vì $|S(\Pi_0)| > r$ và $\left|S\left(\overline{\Pi}\right)\right| > r$ nên ta phải có $S(\Pi_0)$ và $S\left(\overline{\Pi}\right)$ trái dấu nhau, nghĩa là một số thì lớn hơn r, còn một số thì nhỏ hơn $-r$. Từ Π_0, ta có thể thu được $\Pi_m = \overline{\Pi}$ bằng cách chuyển hai phần tử kề nhau. Nói cách khác, tồn tại một dãy các hoán vị $\Pi_0, \Pi_1, \dots, \Pi_m$ sao cho $\Pi_m = \overline{\Pi}$ và với mỗi i $(i = 0, 1, \dots, m-1)$, hoán vị Π_{i+1} có được từ Π_i bằng cách hoán chuyển hai số hạng liên tiếp. Điều này có nghĩa rằng nếu $\Pi_i = (y_1, y_2, \dots, y_n), \Pi_{i+1} = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ thì tồn tại một chỉ số $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ sao cho

$$z_k = y_{k+1}, z_{k+1} = y_k, z_j = y_j, j \neq k, k+1.$$

Do giả thiết $|x_i| \leqslant r, \forall i = 1, 2, \dots, n$ nên ta có

$$|S(\Pi_{i+1}) - S(\Pi_i)| = |kz_k + (k+1)z_{k+1} - ky_k - (k+1)y_{k+1}| = |y_k - y_{k+1}| \leqslant 2r.$$

Điều này chứng tỏ rằng khoảng cách giữa hai số liên tiếp bất kỳ trong dãy số $S(\Pi_0), \dots, S(\Pi_m)$ không lớn hơn $2r$. Mặt khác, có thể xem $S(\Pi_0), S(\Pi_m)$ là những điểm nằm trên đường thẳng thực, nằm ngoài đoạn $[-r; r]$, từ đó, suy ra rằng ít nhất một trong các số $S(\Pi_i)$ phải rơi vào đoạn đó; nói cách khác; tồn tại Π_i để $S(\Pi_i) \leqslant r$. □

Trên đây chúng tôi đã nói về khái niệm tập hợp trù mật cũng như một số ứng dụng của nó trong giải toán sơ cấp nhằm phục vụ cho các kỳ thi Olympic toán phổ thông. Việc tiếp tục nghiên cứu vấn đề này sẽ được nói trong trương trình toán ở bậc đại học và các bậc học tiếp theo.

3. Bài tập tự luyện

Bài tập 1. *Cho X, Y là hai tập con của $\mathbb{R}$ sao cho X trù mật trong $\mathbb{R}$ và $X \subset Y$. Chứng minh rằng Y trù mật trong $\mathbb{R}$.*

Bài tập 2. *Cho $X \subset \mathbb{R}$ và X trù mật trong $\mathbb{R}$, và A là tập con hữu hạn của X. Chứng minh rằng $X \backslash A$ trù mật trong $\mathbb{R}$.*

Bài tập 3. *Chứng minh rằng tồn tại vô số* $(m,n)\in\mathbb{Z}^2$ *sao cho* $\left[n\sqrt{2}\right]=2^m$.

Bài tập 4. *(Isarel – Hungarian* 1998*) Tìm tất cả* $\alpha\in\mathbb{R}$ *thoả mãn*

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\exists m\in\mathbb{Z}:\left|\alpha-\frac{m}{n}\right|<\frac{1}{3n}.$$

Bài tập 5. *Cho* $a>b$ *là hai số nguyên dương thoả mãn* $\frac{a}{b}>4$. *Chứng minh rằng tồn tại số nguyên dương* l *sao cho* $b<\varphi\left(2^l\right)=2^{l-1}<2^l<a$.

Bài tập 6. *Cho tập hợp* $S=\left\{\sqrt{a}-\sqrt{b}\,|\,a,b\in\mathbb{N}\right\}$. *Chứng minh rằng tập* S *trù mật trong* $\mathbb{R}$.

Bài tập 7. *Cho các dãy số* $(a_n)_{n\geqslant 0}$ *và* $(b_m)_{m\geqslant 0}$ *thoả mãn đồng thời các điều kiện sau:*

$$\lim_{n\to+\infty}a_n=\lim_{m\to+\infty}b_m=+\infty,$$

và

$$\lim_{m\to+\infty}\left(b_{m+1}-b_m\right)=0.$$

Chứng minh rằng tập $S=\{a_n-b_m\,|\,m,n\in\mathbb{N}^*\}$ *là trù mật trong* $\mathbb{R}$.

Bài tập 8. *Cho* (a_n) *và* (b_n) *là hai dãy số dương, tăng ngặt và không bị chặn. Đặc biệt, tập hợp* $\{|a_{n+1}-a_n|\,|\,n\in\mathbb{N}^*\}$ *bị chặn.*

Chứng minh rằng tập hợp $S=\left\{\frac{a_m}{b_n}\,|\,m,n\in\mathbb{N}^*\right\}$ *trù mật trong* $\mathbb{R}^+$.

Bài tập 9. *Cho hàm* $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ *thoả mãn các điều kiện sau:*

(i) f *khả vi trên* $\mathbb{R}^+$.

(ii) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

(iii) $|f'(x)|<M,\forall x\in\mathbb{R}^+\backslash(0;1)$.

Cho (b_n) *là dãy số dương, tăng và không bị chặn. Chứng minh khi đó tập* $S=\left\{\frac{f(m)}{b_n}\,|\,m,n\in\mathbb{N}^*\right\}$ *trù mật trong* $\mathbb{R}^+$. *Do vậy tập* $\left\{\frac{\sqrt{n}}{2^m}\,|\,m,n\in\mathbb{N}^*\right\}$ *trù mật trong* $\mathbb{R}^+$.

Bài tập 10. *Cho* $a,b\in\mathbb{Z}^+$ *sao cho* $s(an)=s(bn),\forall n\in\mathbb{Z}^+$. *Chứng minh rằng* $\log\frac{a}{b}\in\mathbb{Z}$. *Trong đó,* $s(x)$ *là tổng các chữ số của* x *viết trong hệ nhị phân.*

Tài liệu tham khảo

[1] Titu Andreescu, Gabriel Dospinescu, *Problems from the book*.

[2] Art of Problem Solving: http://artofproblemsolving.com

ABOUT MEANS OF NON-NEGATIVE NUMBERS AND POSITIVE DEFINITE MATRICES

Đinh Trung Hòa
(Department of Fundamental Sciences, Ho Chi Minh University of Food Industry)

Trong bài viết ngắn này, tác giả Đinh Trung Hòa sẽ giới thiệu về lý thuyết trung bình của các số không âm và các ma trận xác định dương. Khởi đầu từ các khái niệm quen thuộc như trung bình cộng, trung bình nhân, trung bình điều hòa của hai số, tác giả đi đến khái quát hóa khái niệm trung bình. Tiếp theo bài viết giới thiệu các tính chất đặc trưng của hàm đơn điệu liên quan đến các trung bình. Cuối cùng, tác giả giới thiệu định nghĩa các dạng trung bình của hai ma trận. Từ các định nghĩa này và các bất đẳng thức số và hàm, các vấn đề tương ứng với ma trận sẽ được đặt ra một cách tự nhiên (và tác giả cùng với một số tác giả khác cũng đã thu được một số kết quả theo hướng này).

Bài viết này dựa trên các bài nói chuyện của TS Đinh Trung Hòa tại Đà Nẵng (cho nhóm học sinh THPT chuyên Lê Quý Đôn Đà Nẵng chuẩn bị dự thi HSG quốc gia năm 2014) và trong buổi seminar dành cho học sinh và sinh viên tại trung tâm Titan Education (năm 2015).

Đây là bài viết ngắn, văn phong dễ đọc nên chúng tôi để nguyên bản tiếng Anh. Để độc giả tiện theo dõi, chúng tôi xin chuyển ngữ và giải thích một số thuật ngữ tiếng Anh.

Positive definite matrices = ma trận xác định dương

Positive semidefinite = nửa xác định dương

Successive iterations = các bước lặp liên tiếp

Arithmetic, geometric, harmonic means = trung bình cộng, trung bình nhân, trung bình điều hòa.

Two-variable function = hàm 2 biến

Monotone increasing = đơn điệu tăng

One-to-one map = ánh xạ $1-1$

Reverse Cauchy inequality = bất đẳng thức Cauchy ngược

Convex function = hàm lồi

Classification = phân loại

Quantum information theory = Lý thuyết thông tin lượng tử

Matrix optimization = Tối ưu hóa ma trận

Hermitian matrices = ma trận Hermite

Eigenvalues = giá trị riêng

Eigenspaces = không gian riêng

Orthogonal projections = hình chiếu vuông góc

Axiomatic approach = cách tiếp cận tiên đề

Binary operation = phép toán 2 ngôi

Riemannian manifold = đa tạp Riemann

Weighted Heron mean = trung bình Heron có trọng

Norht and south poles = bắc cực và nam cực

Mathematical aspects = khía cạnh toán học

Theory of operator and matrix = lý thuyết toán tử và ma trận

In this short we introduce the theory of means for non-negative numbers and positive definite matrices.

1. Some information about means for scalars

1.1. Some well-known means

We list some (not all) definitions of the geometric mean as follows:

- The unique solution of $xa^{-1}x = b$;
- The common list of the successive iterations of harmonic and arithmetic means:

$$\sqrt{ab} = \lim a_n = \lim b_n,$$

  where $a_0 = a$, $b_0 = b$, $a_{n+1} = \frac{2a_nb_n}{a_n+b_n}$, $b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$.
- The maximum among real x for which $\begin{pmatrix} a & x \\ x & b \end{pmatrix}$ is positive semidefinite, or its determinant is nonnegative: $x^2 \leqslant ab$.
- The unique midpoint for the metric δ on $\mathbb{R}^+$ given by $\delta(x,y) = \left|\log \frac{x}{y}\right|$:

$$\delta(a,b) = 2\delta(a,\sqrt{ab}) = 2\delta(b,\sqrt{ab});$$

- If $x(t)$ is the solution of $x' = b - a^{-1}x$ with initial condition $x(0) = x_0 > 0$, then $\lim_{t\to\infty} x(t) = \sqrt{ab}$.

It is well-known that for two nonnegative numbers a, b and $s \in [0,1]$

$$(\frac{a^{-1}+b^{-1}}{2})^{-1} \leqslant \sqrt{ab} \leqslant \frac{a^sb^{1-s}+a^{1-s}b^s}{2} \leqslant \frac{a+b}{2}, \tag{1.1}$$

where $(\frac{a^{-1}+b^{-1}}{2})^{-1}$ is the harmonic mean, $\frac{a^sb^{1-s}+a^{1-s}b^s}{2}$ is the Heinz mean and $\frac{a+b}{2}$ is the arithmetic mean.

The AM-GM inequality states that only the square has the smallest perimeter amongst all rectangles of equal area. At the same time, we have the following geometric interpretation: The geometric mean and the arithmetic mean are the midpoints of curves $a^s b^{1-s}$ and $sa + (1-s)b$, respectively, connecting a and b. And the Heinz mean is the curve connecting the geometric mean and the arithmetic mean when s runs from 0 to 1.

Now, let us formulate a general approach of means. A mean M of nonnegative numbers is a map from $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ to $\mathbb{R}^+$ such that:

1) $M(x,x) = x$ for every $x \in \mathbb{R}^+$;
2) $M(x,y) = M(y,x)$ for every $x, y \in \mathbb{R}^+$;
3) If $x < y$, then $x < M(x,y) < y$;
4) If $x < x_0$ and $y < y_0$, then $M(x,y) < M(x_0,y_0)$;
5) M(x, y) is continuous;
6) $M(tx,ty) = tM(x,y)$ $(t, x, y \in \mathbb{R}^+$.

A two-variable function $M(x,y)$ satisfying condition (6) can be reduced to a one-variable function

$$f(x) := M(1,x). \tag{1.2}$$

Namely, $M(x,y)$ is recovered from f as $M(x,y) = xf(x^{-1}y)$. Mention that the corresponding to M function f is monotone increasing on $\mathbb{R}^+$. And that relation (1.2) forms a one-to-one map between means and monotone increasing functions on $\mathbb{R}^+$.
It is obvious that:

- The arithmetic mean is corresponding to $\frac{1+t}{2}$;
- The geometric mean is corresponding to $\sqrt{t}$;
- The harmonic mean is corresponding to $\frac{2t}{1+t}$;
- The log-mean $L(x,y) = \frac{x-y}{\log x - \log y}$ is corresponding to $\frac{t-1}{\log t}$.

1.2. Monotone functions and means

Let f be a monotone increasing function on $[0,\infty)$, then for any nonnegative number a, b,

$$f(\sqrt{ab}) \leqslant f\left(\frac{a+b}{2}\right). \tag{1.3}$$

It is natural to ask that if inequality (1.3) holds for any pair of positive number a, b will the function f be monotone increasing on $[0,\infty)$? The answer is positive, and follows from the elementary fact that for any positive numbers $a \leqslant b$ there exist positive number x, y such that a is arithmetic mean and b is geometric mean of x, y.

An interesting and useful reverse Cauchy inequality is as follows: For any positive number x, y,

$$\frac{x+y}{2} \leqslant \sqrt{xy} + \frac{1}{2}|x-y|, \tag{1.4}$$

or

$$\min\{x,y\} \leqslant \sqrt{xy}.$$

Proposition 1. *A function f on $[0,\infty)$ is monotone increasing if and only if the following inequality*

$$f(\frac{x+y}{2}) \leqslant f\left(\sqrt{xy}+\frac{1}{2}|x-y|\right), \tag{1.5}$$

hold for any pair of positive number x, y.

Chứng minh. Firstly, we show that for $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant \sqrt{2}a$ there exist positive number x, y such that

$$a = \frac{x+y}{2}, \quad b = \sqrt{xy}+\frac{1}{2}|x-y|.$$

We can assume that $x \leqslant a$. It is easy to see that for $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant \sqrt{2}a$ the equation

$$b = \sqrt{x(2a-x)} + a - x,$$

or,

$$2x^2 + 2(b-2a)x + (b-a)^2 = 0$$

has a positive solution. Consequently, if we have (1.5), then

$$f(a) = \frac{x+y}{2} \leqslant f\left(\sqrt{xy}+\frac{1}{2}|x-y|\right) = f(b).$$

For arbitrary $a \leqslant b$, it is obvious that there exist numbers $a_1, a_2, \ldots, a_m$ such that

$$a = a_0 \leqslant a_1 \leqslant \cdots \leqslant a_m = b \quad \text{and} \quad a_i \leqslant a_{i+1} \leqslant \sqrt{2}a_i.$$

Apply above arguments, we can get $f(a) \leqslant f(a_1) \leqslant f(a_2) \leqslant \cdots \leqslant f(a_n) = f(b)$. □

Of course we can get new characterization of monotone increasing functions by using other inequalities in (1.1).

1.3. Some classes of convex functions with means

Let M, N be arbitrary means and f be continuous on $\mathbb{R}^+$. We call f to be MN-convex if for any nonnegative x, y,

$$f(M(x,y)) \leqslant N(f(x), f(y)). \tag{1.6}$$

If $M(x,y) = N(x,y) = sx + (1-s)y$, then we have the class of convex functions, and inequality (1.6) is no thing but Jensen inequality for convex functions. Such functions have many applications in optimization, in information theory etc.

If $M(x,y) = sx+(1-s)y, N(x,y) = x^s y^{1-s}$, then we have the class of $\log$-convex functions.

If $M(x,y) = N(x,y) = x^s y^{1-s}$, then we have the class of geometrically convex functions.

According to applications of several kinds of convexity many mathematicians give effort to study the problem of classification of convex functions. And a such problem is more complicated for matrices.

2. A little about matrix means

In this section we talk about the matrix means that have many applications in quantum information theory, matrix optimizations etc.

Let M_n be the space of $n \times n$ complex matrices. For $A, B \in M_n$, the notation $A \leqslant B$ means that $B - A \in M_n^+$ (i.e., $< (B-A)x, x > \geqslant 0$ for any vector x). The spectrum of a matrix $A \in M_n$ is denoted by $\sigma(A)$. For a real-valued function f of a real variable and a matrix $A \in M_n^h$, the value $f(A)$ is understood by means of the functional calculus for Hermitian matrices, i.e. if $A = \sum \lambda_i P_i$ (where λ_i are eigenvalues of A, P_i are orthogonal projections on the eigenspaces of λ_i), then the matrix $f(A)$ is defined as $\sum f(\lambda_i)P_i$. We can understand $f(A)$ in another way: Let $A = U^*\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)U$ (where λ_i are the eigenvalues of A), then

$$f(A) = U^*\text{diag}(f(\lambda_1), \ldots, f(\lambda_n))U.$$

Taking an axiomatic approach, Kubo and Ando [6] introduced the notions of connection and mean. A binary operation σ defined on the set of positive definite matrices is called a *connection* if

(i) $A \leqslant C, B \leqslant D$ imply $A\sigma B \leqslant B\sigma D$;

(ii) $C^*(A\sigma B)C \leqslant (C^*AC)\sigma(C^*BC)$;

(iii) $A_n \downarrow A$ and $B_n \downarrow B$ imply $A_n\sigma B_n \downarrow A\sigma B$ If $I\sigma I = I$, then σ is called a *mean*.

For $A, B > 0$, the *t-geometric mean* of positive definite matrices A, B is

$$A\sharp_t B := A^{1/2}\left(A^{-1/2}BA^{-1/2}\right)^t A^{1/2}. \tag{2.1}$$

When $t = 1/2$, $A\sharp B := A\sharp_{1/2}B$ is called the geometric mean of A and B, and it was first introduced in [8] and is often denoted by $A\sharp B$ in the literature (the problem of defining the geometric mean of two positive definite matrices was standing for more than 25 years because we could not just take the square root of product of two positive definite matrices AB!!). The *harmonic* $A!B$ and *arithmetic* $A\nabla B$ means are defined $A!B = 2(A^{-1} + B^{-1})^{-1}$ and $A\nabla B = \dfrac{A+B}{2}$, respectively. A mean σ is called to be symmetric if $A\sigma B = B\sigma A$ for any pair of positive definite matrices A, B.

It is well-known that the arithmetic mean ∇ is the biggest among symmetric means. From the general theory of matrix means we know that $\nabla \geqslant \sigma$ and $\tau \geqslant !$. And we still have the following inequalities

$$A!B \leqslant A\sharp B \leqslant A\nabla B. \tag{2.2}$$

The proof of (2.2) is not very difficult and based on the scalar case.

The t-geometric mean is interesting from the point of view of Riemannian geometry since the set P_n of positive semidefinite matrices is a Riemannian manifold with the Riemannian metric [9]:

$$\delta(A,B) = \left(\sum_{i=1}^n \log^2 \lambda_i(A^{-1}B)\right)^{1/2}, \quad A, B \in P_n,$$

which is the distance between A and B so that the curve $\beta(t) = A\sharp_t B$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, is the unique geodesic joining A and B in P_n. The picture is more interesting if we consider the weighted Heron mean $(1-\lambda)\frac{A+B}{2} + \lambda A\sharp B(\lambda \in [0,1])$ that connects two midpoints $\frac{A+B}{2}$ and $A\sharp B$ (this model looks like the earth with A and B are the north and south poles, respectively!).

3. Concluding comment

Many properties formulated in Subsection 1.1 have been studied for matrices [10]. Some interesting information related to the last part of Subsection 1.1 an be found in [1] (Petz is one of the most active mathematicians in studying mathematical aspects of quantum information theory) where the author discusses about means of more than 2 positive semidefinite matrices. Matrix analogs of results in Subsection 1.2 recently was studied by Ando and Hiai [11] and by the author [12]. At that time, problems of characterization of matrix convex functions in sense of Subsection 1.3 are still in research interests of many mathematicians. Nowadays, the theory of operator and matrix means is one of the most studied in matrix analysis with many applications in machine learning and quantum theory etc.

Tài liệu tham khảo

[1] D.Petz. *Means of positive matrices: Geometry and a conjecture.* Annales Mathematicae et Informaticae. **32** (2005) 129-139.

[2] F. Topse. *Basic Concepts, Identities and Inequalities theToolkit of Information Theory.* Entropy, **3** (2001) 162.

[3] K. M. R.Audenaert, J. Calsamiglia, LI. Masanes, R. Munoz-Tapia, A. Acin, E. Bagan and F. Verstraete, *Discriminating States: The Quantum Chernoff Bound*, Phys. Rev. Lett. **98** (2007) 160501.

[4] D. Bini, B. Meini, F. Poloni, *An effective matrix geometric mean satisfying the Ando-Li-Mathias properties*, Math. Comp. **79** (2010) 437-452.

[5] S. Furuichi, K. Yanagi, and K. Kuriyama, *Fundamental properties of Tsallis relative entropy*, J. Math. Phys. **45**(12) (2004) 4868-4877.

[6] F. Kubo and T. Ando, *Means of positive linear operators*, Math. Ann. **246**(3) (1980) 205-224.

[7] H. Lee, Y. Lim, T. Yamazaki, *Multi-variable weighted geometric means of positive definite matrices*, Linear Algebra Appl. **435**(2) (2011) 307-322.

[8] W. Pusz, S.L. Woronowicz, Functional calculus for sesquilinear forms and the purification map, Rep. Math. Phys., **8** (1975), 159-170.

[9] R. Bhatia, *Positive Definite Matrices*, Princeton University Press, New Jersey, 2007.

[10] J. D. Lawson, Y. Lim, *The geometric mean, matrices, metrics, and more,* Amer. Math. Monthly **108** (2001), 797-812.

[11] T. Ando, F. Hiai, Log majorization and complementary Golden-Thompson type inequalities, Linear Algebra Appl., **197/198** (1994), 113–131.

[12] Dinh Trung Hoa. *On characterization of operator monotone functions.* Linear Algebra and Its Applications. **487** (2015) 260-267.

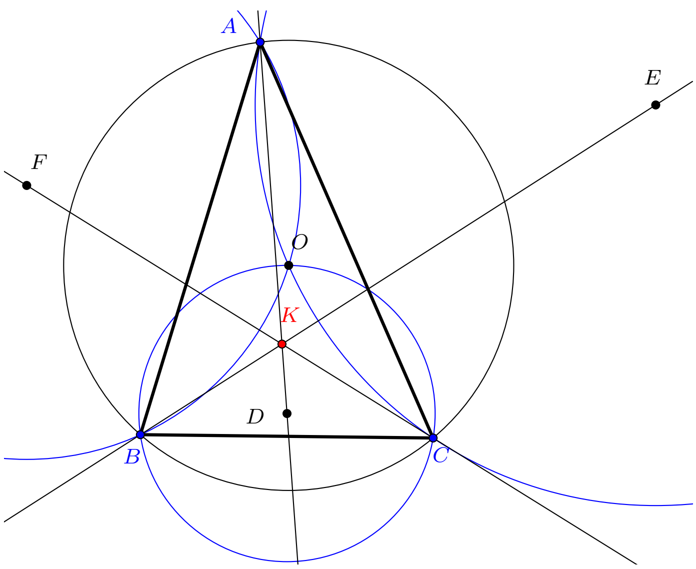
ĐIỂM KOSNITA VÀ MỘT SỐ ĐƯỜNG THẲNG ĐI QUA NÓ

Trịnh Huy Vũ (Lớp 12 A1 Toán, trường THPT Chuyên KHTN, Hà Nội)

Bài viết nêu ra định nghĩa và một số kết quả về điểm Kosnita. Đồng thời bài báo cũng sẽ đưa ra chứng minh thuần túy cho một số đường thẳng đi qua điểm Kosnita.

1. Định nghĩa

Định nghĩa 2. *Điểm* **Kosnita** *K của $\triangle ABC$ bất kì được xác định là điểm đồng quy của ba đường thẳng nối ba đỉnh A, B, C tương ứng với tâm ngoại tiếp của $\triangle OBC, \triangle OCA, \triangle OAB$ với O là tâm ngoại tiếp của $\triangle ABC$. Điểm* **Kosnita** *là* **Kimberling** *center $X(54)$ trong Encyclopedia of Triangle Center (ETC) [1].*



Hình 11.1: Điểm Kosnita

2. Một số kết quả quen thuộc

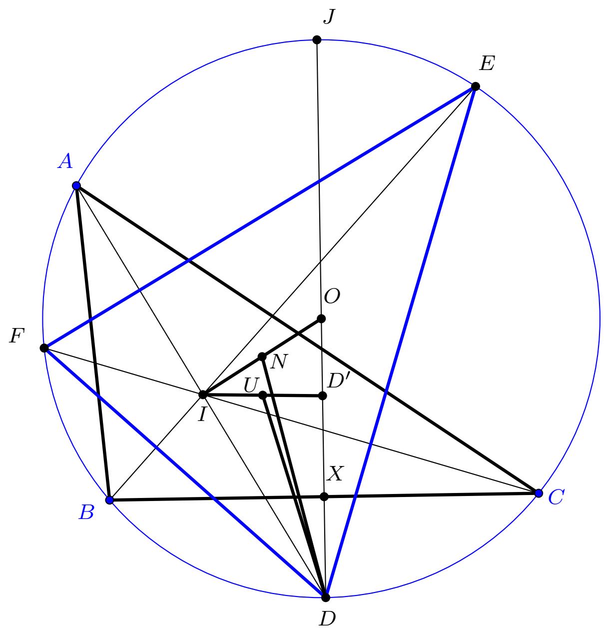
Sau đây, tác giả sẽ trình bày ra một số kết quả quen thuộc về điểm **Kosnita** mà tác giả sẽ dùng trong bài viết.

Kết quả 1. *$\triangle ABC$ có tâm đường tròn Euler N và điểm Kosnita K. Khi đó, N và K đẳng giác trong $\triangle ABC$.*

Định nghĩa 3. *Cho tam giác ABC với tâm nội tiếp I. Đường thẳng* **Euler** *của $\triangle IBC, \triangle ICA, \triangle IAB, \triangle ABC$ đồng quy tại một điểm. Điểm đồng quy đó được gọi là điểm* **Schiffler** *của $\triangle ABC$.*

Kết quả 2. *Gọi D, E, F lần lượt là trung điểm của các cung nhỏ BC, CA, AB của $\triangle ABC$. Khi đó, điểm* **Kosnita** *của $\triangle DEF$ cũng là điểm* **Schiffler** *của $\triangle ABC$.*

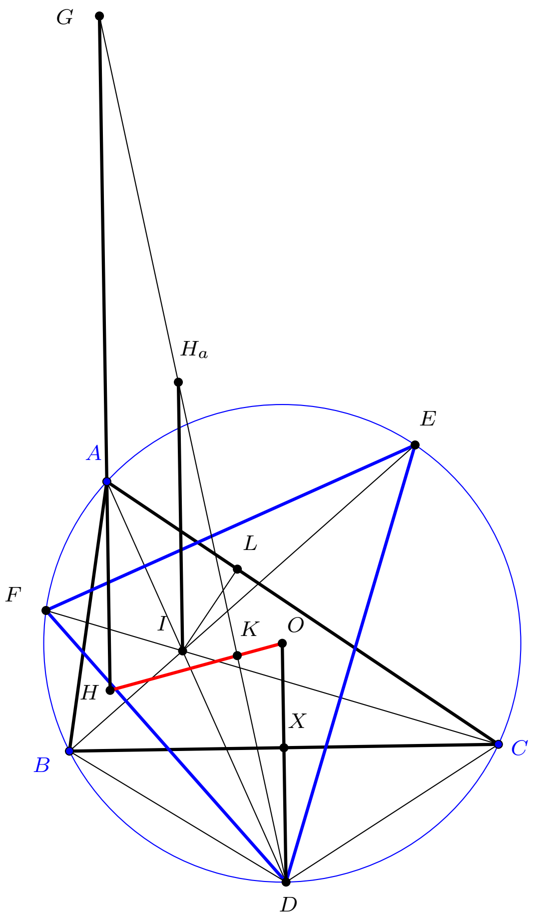
Chứng minh. X là trung điểm BC. Vẽ đường kính DJ. Lấy các điểm D', E', F' lần lượt đối xứng D, E, F qua BC, CA, AB. Gọi N, U, V, W tương ứng là trung điểm của IO, ID', IE', IF'. Ta có các kết quả quen thuộc: D, E, F tương ứng là tâm ngoại tiếp của các tam giác IBC , ICA , IAB; I, N là trực tâm và tâm đường tròn **Euler** của $\triangle DEF$.
Ta có $DI^2 = DB^2 = DC^2 = DX.DJ$ (theo hệ thức lượng trong tam giác vuông). Từ đó ta được $DI^2 = DX.DJ = 2DX.DO = DD'.DO$. Suy ra $\dfrac{DO}{DI} = \dfrac{DI}{DD'}$. Do đó, $\triangle DOI \sim \triangle DID'$(c.g.c). Mà hai tam giác này có hai trung tuyến tương ứng là DN và DU, do vậy $\angle NDI = \angle UDO$. Nói cách khác, DN và DU đẳng giác trong $\angle IDO$. Mặt khác, do I, O tương ứng là trực tâm và tâm ngoại tiếp của $\triangle DEF$ nên DH, DO đẳng giác trong $\angle EDF$. Từ đó ta thu được DN và DU đẳng giác trong $\angle EDF$. Mặt khác ta lại có U là tâm đường tròn **Euler** của $\triangle IBC$ nên DU chính là đường thẳng **Euler** của $\triangle IBC$. Vậy DN và đường thẳng **Euler** của $\triangle IBC$ đẳng giác trong $\triangle DEF$. Chứng minh tương tự ta cũng được EN, đường thẳng **Euler** của $\triangle ICA$ và FN, đường thẳng **Euler** của $\triangle IAB$ là hai cặp đường thẳng đẳng giác trong $\triangle DEF$. Do vậy điểm **Schiffler** S đẳng giác với N qua $\triangle DEF$. Theo **Kết quả 1**, điểm **Schiffler** S của $\triangle ABC$ cũng là điểm Kosnita của $\triangle DEF$ □



Hình 11.2: Điểm Kosnita của $\triangle DEF$ và điểm Schiffler của $\triangle ABC$ trùng nhau

Nhận xét. Kết quả 2 còn có cách chứng minh khác của **Telv Cohl** trong [4]. Từ kết quả này thu được hệ quả là điểm **Kosnita** của $\triangle DEF$ nằm trên đường thẳng **Euler** của $\triangle ABC$. Hơn nữa, dựa sự trùng nhau của điểm **Schiffler** và điểm **Kosnita** của $\triangle ABC$ và $\triangle DEF$, ta cũng thu được chứng minh của kết quả sau:

Kết quả 3. *Gọi D, E, F lần lượt là trung điểm của các cung nhỏ BC, CA, AB của đường tròn (O) ngoại tiếp $\triangle ABC$. H là trực tâm của $\triangle ABC$ và K là điểm* ***Kosnita*** *của $\triangle DEF$. Khi đó, $\dfrac{OK}{OH} = \dfrac{R}{2r+3R}$ với R, r tương ứng là bán kính của đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác ABC.*



Hình 11.3: Tỉ số OK/OH

Trước hết ta nêu ra một bổ đề quen thuộc, tác giả xin phép không nêu chứng minh của bổ đề này.

Bổ đề 5. *Cho $\triangle ABC$ với trực tâm H, tâm ngoại tiếp O và M là trung điểm BC. Khi đo, $AH = 2OM$.*

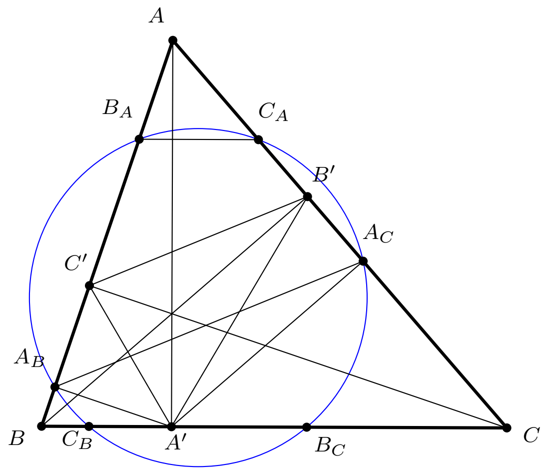
Chứng minh. L là hình chiếu của I lên AC. X là trung điểm BC. Gọi H_a là trực tâm của $\triangle IBC$. Do K nằm trên đường thẳng **Euler** của $\triangle IBC$ nên $K \in DH_a$. Đặt DH_a cắt AH tại G. Do $\triangle ALI \sim \triangle BXD$(g.g) nên $\dfrac{DI}{AI} = \dfrac{DB}{AI} = \dfrac{XD}{IL} = \dfrac{XD}{r}$. Từ đó áp dụng định lý Thales, ta suy ra $\dfrac{IH_a}{AG} = \dfrac{DI}{DA} = \dfrac{XD}{XD+r}$. Theo bổ đề thì $\dfrac{2DX}{AG} = \dfrac{XD}{XD+r}$. Do vậy, $AG = 2(XD+r)$, suy ra $HG = AH + AG = 2OX + 2(XD + r) = 2(r + R)$. Theo định lý Thales suy ra $\dfrac{OK}{KH} = \dfrac{OD}{HG} = \dfrac{R}{2(r+R)}$ hay $\dfrac{OK}{OH} = \dfrac{R}{2r+3R}$. □

3. Một số đường thẳng đi qua điểm Kosnita

Trong mục này tác giả sẽ phát biểu một số đường thẳng đi qua điểm Kosnita. Hầu hết các đường thẳng này đều đã được liệt kê trong ETC [1] nên tác giả chỉ phát biểu lại và đồng thời đưa ra những chứng minh thuần túy hình học cho chúng.

3.1. Đường thẳng đi qua ảnh nghịch đảo của trực tâm H qua đường tròn ngoại tiếp (O) và tâm của đường tròn Taylor ($X(186)X(389)$)

Định nghĩa 4. *$\triangle ABC$ với A', B', C' tương ứng là chân ba đường cao. A_B, A_C lần lượt là hình chiếu của A' trên AB, AC. Xác định các điểm B_C, B_A, C_A, C_B tương tự. Khi đó, 6 điểm $A_B, A_C, B_C, B_A, C_A, C_B$ cùng nằm trên một đường tròn. Đường tròn này được gọi là đường tròn* ***Taylor*** *[5]. Tâm đường tròn* ***Taylor*** *trong ETC là* ***Kimberling*** *center $X(389)$ [1].*



Hình 11.4: Đường tròn Taylor

Chứng minh đường tròn Taylor. Ta thực hiện phép biến đổi góc sau:

$$\begin{aligned}\angle AA_BA_C &= \angle AA'A_C\ (A, A_B, A', A_C \text{ nằm trên đường tròn } (AA'))\\ &= \angle ACB\ (\text{cùng phụ } \angle A'AC)\\ &= \angle AC'B'\ (B, C, B', C' \text{ nằm trên đường tròn } (BC))\\ &= \angle AC_AB_A\ (B', C', B_A, C_A \text{ nằm trên đường tròn} (B'C'))\end{aligned}$$

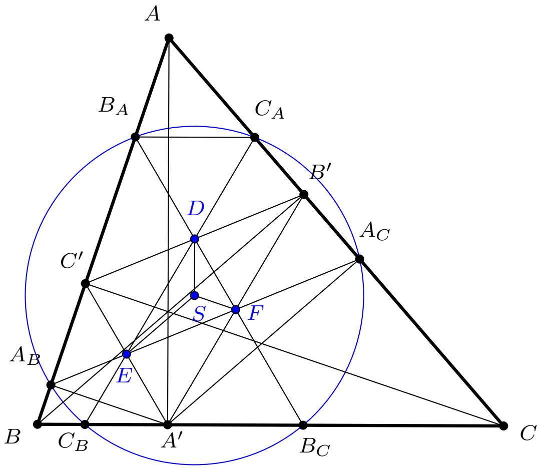
Do vậy 4 điểm A_B, A_C, B_A, C_A cùng thuộc một đường tròn. Chứng minh tương tự thì $B_AB_CC_BA_B$ và $C_AC_BB_CA_C$ đều là các tứ giác nội tiếp đường tròn. Giả sử ba đường tròn này không trùng nhau thì ta thấy B_CC_B, C_AA_C, A_BB_A lần lượt là các trục đẳng phương của 2 trong bộ 3 đường tròn $\{(A_BA_CB_AC_A); (B_AB_CC_BA_B); (C_AC_BB_CA_C)\}$, tức là B_CC_B, C_AA_C, A_BB_A phải đồng quy (mâu thuẫn). Do vậy, 3 đường tròn này trùng nhau và 6 điểm $A_B, A_C, B_C, B_A, C_A, C_B$ cùng thuộc 1 đường tròn. □

Các chứng minh khác cho đường tròn Taylor tham khảo thêm trong [6], [7].

Định nghĩa 5. *Cho $\triangle ABC$ với D, E, F lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB. Khi đó, tâm nội tiếp của $\triangle DEF$ được gọi là điểm **Spieker** của $\triangle ABC$.*

Sau đây tác giả sẽ trình bày thêm một tính chất liên quan đến tâm đường tròn **Taylor** $X(389)$ và điểm **Spieker**.

Bổ đề 6. *$\triangle ABC$ nhọn với A', B', C' lần lượt là ba chân đường cao. Khi đó, tâm của đường tròn **Taylor** của $\triangle ABC$ là điểm **Spieker** của $\triangle A'B'C'$.*



Hình 11.5

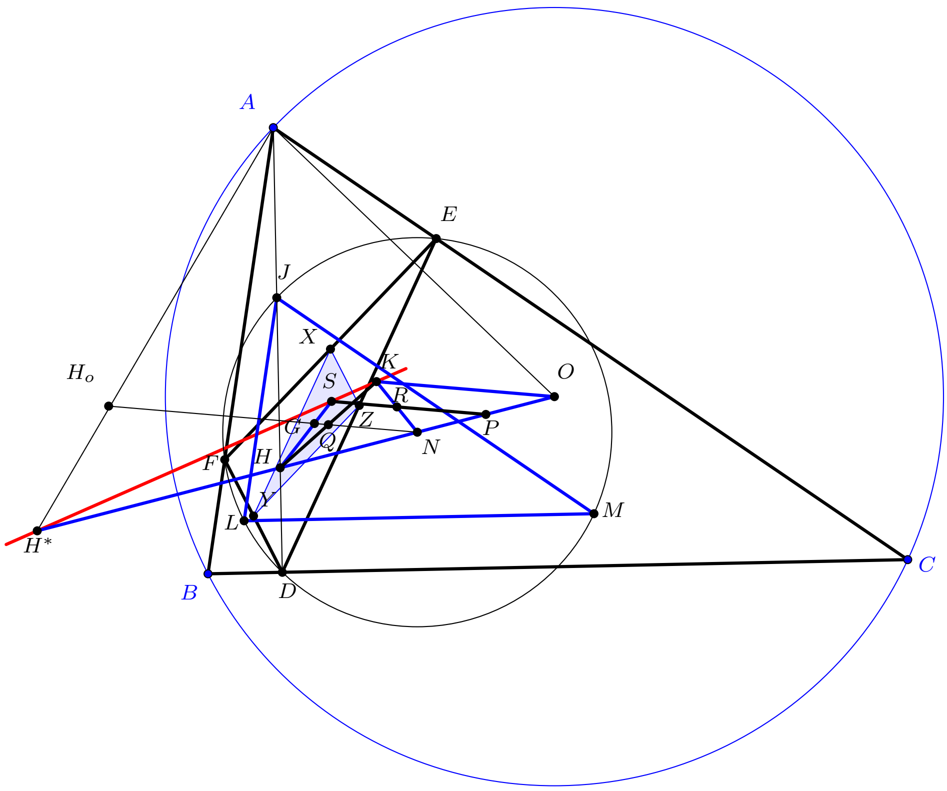
Chứng minh. S là tâm đường tròn **Taylor** của $\triangle ABC$. Gọi D, E, F lần lượt là trung điểm của $B'C', C'A', A'B'$. Trước hết ta chứng minh A_BA_C đi qua E, F. Thật vậy, do E là trung điểm của $C'A'$ nên $\angle EA_BA' = \angle C'A'A_B = 90^\circ - \angle BC'A' = 90^\circ - \angle ACB = \angle A'AA_C = \angle A_CA_BA'$. Do đó, $E \in A_BA_C$. Tương tự với F suy ra A_BA_C đi qua E, F. Chứng minh tương tự như trên ta được B_AB_C đi qua F, D và C_AC_B đi qua D, E. Mặt khác dễ thấy $B_AC_A \parallel C_BB_C$ nên $B_AC_AB_CC_B$ là một hình thang cân, mà $D = B_AB_C \cap C_AC_B$ suy ra $\triangle DB_CC_B$ là tam giác cân và DS là phân giác của $\angle B_CDC_B \equiv \angle EDF$. Tương tự, ES là phân giác của $\angle DEF$. Vậy S là tâm nội tiếp của $\triangle DEF$ và cũng là điểm **Spieker** của $\triangle A'B'C'$. □

Nhận xét. Kết quả trên chỉ đúng khi $\triangle ABC$ là tam giác nhọn. Khi $\triangle ABC$ tù lần lượt tại A, B, C thì tâm đường tròn **Taylor** của $\triangle ABC$ sẽ là tâm bàng tiếp tương ứng với các đỉnh D, E, F của tam giác trung bình DEF của $\triangle A'B'C'$.
Tác giả xin tiếp tục nêu thêm ra một kết quả nổi tiếng liên quan đến điểm **Spieker**:

Bổ đề 7. *$\triangle ABC$ với tâm nội tiếp I, trọng tâm G và điểm **Spieker** S_p và điểm **Nagel** N_a. Khi đó, I, G, S_p, N_a cùng nằm trên một đường thẳng và $IN_a = 2IS_p = 3IG$.*

Đây là một định lý nổi tiếng, bạn đọc có thể tham khảo chứng minh của nó từ trang 7-12 trong [6].

Định lý 1. *Cho $\triangle ABC$ với trực tâm H, đường tròn ngoại tiếp (O) và $\triangle DEF$ là tam giác tạo bởi ba chân đường cao của $\triangle ABC$. S là tâm đường tròn **Taylor** của $\triangle ABC$. H^* là ảnh nghịch đảo của H qua (O). Khi đó, đường thẳng SH^* đi qua điểm **Kosnita** K của $\triangle ABC$.*



Hình 11.6: Định lý 3.1

Trong đó, ảnh nghịch đảo H^* của H của (O) là **Kimberling** center $X(186)$ trong ETC [1]. Trong bài viết này tác giả sẽ nêu chứng minh của **định lý 1** trong trường hợp $\triangle ABC$ nhọn (các trường hợp còn lại chứng minh tương tự). Khi đó, tâm đường tròn **Taylor** chính là điểm **Spieker** của tam giác DEF. Do vậy, ta quy bài toán về việc chứng minh đường thẳng đi qua điểm **Spieker** của $\triangle DEF$ và ảnh nghịch đảo của H qua (O) đi qua điểm **Kosnita** K.

Chứng minh định lý. N là tâm đường tròn **Euler** của $\triangle ABC$ và P là trung điểm của NO. X, Y, Z, J, L, M tương ứng là trung điểm của EF, FD, DE, HA, HB, HC. Dễ thấy H là tâm nội tiếp của $\triangle DEF$ (kết quả nổi tiếng). Gọi H_o, G lần lượt là trực tâm và trọng tâm của $\triangle DEF$. Ta được H_o, G, N thẳng hàng trên đường thẳng **Euler** của $\triangle DEF$ và H, G, S thẳng hàng, $HG = 2GS$. Gọi Q là trung điểm của HK. r, R lần lượt là bán kính đường tròn nội tiếp và ngoại tiếp của $\triangle DEF$.

Ta có $OA^2 = OH.OH^*$ suy ra $\dfrac{OH}{OH^*} = \left(\dfrac{AH}{AH^*}\right)^2 = \left(\dfrac{OH}{OA}\right)^2 = \dfrac{NH^2}{R^2}$. Mặt khác, áp dụng công thức Euler và chú ý là H, N lần lượt là tâm nội tiếp và tâm ngoại tiếp của $\triangle DEF$, thì $NH^2 = Rr^2 - 2Rr = R(R-2r)$. Do đó, $\dfrac{OH}{OH^*} = \dfrac{R-2r}{R}$. Vậy $\dfrac{OP}{OH^*} = \dfrac{R-2r}{4R}$ hay $\dfrac{PH^*}{OH^*} = \dfrac{3R+2r}{4R}$.

Xét phép vị tự tâm H tỉ số $\dfrac{1}{2}$, $A \mapsto J; B \mapsto L; C \mapsto M; K \mapsto Q$, do đó Q là điểm **Kosnita** của $\triangle JLM$. Mặt khác, ta có kết quả nổi tiếng J, L, M lần lượt là trung điểm các cung EF, FD, DE của đường tròn (DEF). Theo kết quả 2.2, 2.3 thì Q là điểm **Schiffler** của $\triangle DEF$, $Q \in H_oN$ và

$\dfrac{NQ}{NH_o} = \dfrac{R}{2r+3R}$. Suy ra $\dfrac{NQ}{NG} = \dfrac{3R}{2r+3R}$. Mặt khác, theo định lý **Thales** ta có, $OK = 2NQ$ và $SP = \dfrac{3NG}{2}$. Do vậy,

$$\frac{PS}{OK} = \frac{\frac{3NG}{2}}{2NQ} = \frac{3NG}{4NQ} = \frac{3}{4}.\frac{2r+3R}{3R} = \frac{2r+3R}{4R}$$

Vậy $\dfrac{PH^*}{OH^*} = \dfrac{PS}{OK}$. Suy ra $\triangle PH^*S \sim \triangle OH^*K$(c.g.c) nên $\angle PH^*S = \angle OH^*K$. Vậy H^*, S, K thẳng hàng. □

3.2. Đường thẳng đi qua Trung điểm HG và tâm đường tròn Euler của tam giác tạo bởi ba đường tiếp tuyến qua A, B, C ($X(156)X(381)$)

Định lý 2. *Cho $\triangle ABC$ với trực tâm H, trọng tâm G và đường tròn ngoại tiếp (O). Các tiếp tuyến tại A, B, C của đường tròn (O) cắt nhau tạo thành $\triangle DEF$. I là trung điểm của HG. L là tâm đường tròn **Euler** của $\triangle DEF$. Khi đó, IL đi qua điểm **Kosnita** K của $\triangle ABC$*

Trong đó, trung điểm I của HG là **Kimberling** center $X(381)$ của $\triangle ABC$, tâm đường tròn **Euler** L của tam giác DEF là **Kimberling** center $X(156)$ của $\triangle ABC$ trong ETC [1].
Để chứng minh **định lý 2**, tác giả xin phát biểu không chứng minh bổ đề quen thuộc sau:

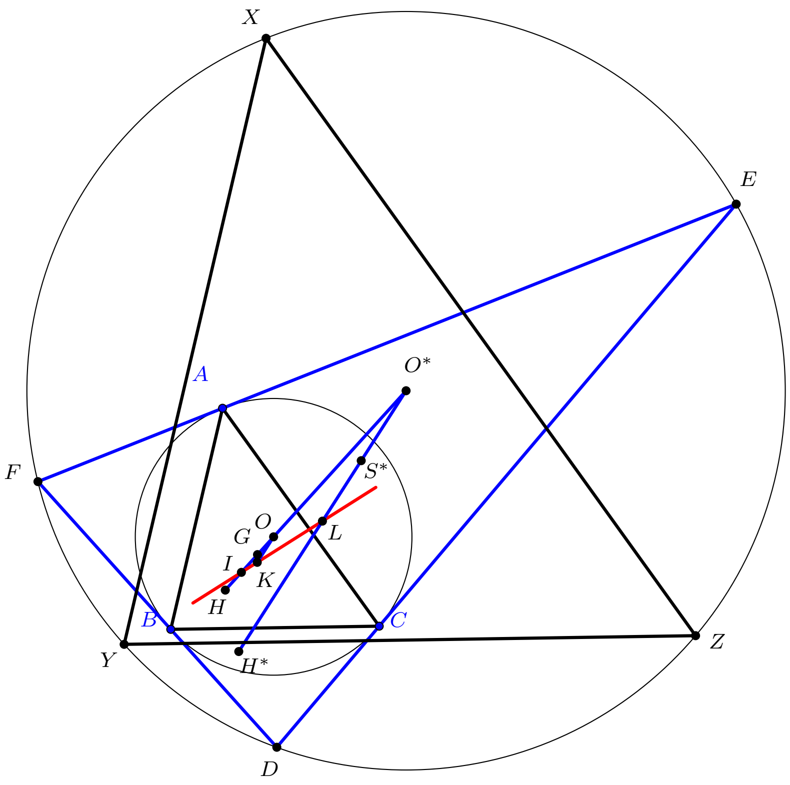
Bổ đề 8. *Cho $\triangle ABC$ với tâm ngoại tiếp O, đường tròn nội tiếp (I). Tiếp điểm của (I) với BC, CA, AB tương ứng là D, E, F. H là trực tâm $\triangle DEF$. R, r lần lượt là bán kính của đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp của $\triangle ABC$. Khi đó, OI trùng với đường thẳng **Euler** IH của $\triangle DEF$ và $\dfrac{IH}{OI} = \dfrac{r}{R}$.*

Chứng minh định lý. Gọi H^*, O^*, S^* lần lượt là trực tâm, tâm ngoại tiếp và điểm **Schiffler** của $\triangle DEF$. X, Y, Z tương ứng là trung điểm các cung EF, FD, DE của đường tròn (O^*) ngoại tiếp $\triangle DEF$. Theo **kết quả 2** thì S^* chính là điểm **Kosnita** của $\triangle XYZ$. Đặt R, R_* lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABC và DEF.
Do cùng vuông góc với OD nên $BC \parallel YZ$. Tương tự ta cũng có $CA \parallel ZX$; $AB \parallel XY$. Do đó $\triangle ABC$ và $\triangle XYZ$ vị tự nhau, mà O, O^* tương ứng là tâm ngoại tiếp của $\triangle ABC$ và $\triangle XYZ$; K, S^* tương ứng là điểm **Kosnita** của $\triangle ABC$ và $\triangle XYZ$. Từ đó suy ra $OK \parallel O^*S^* \equiv O^*H^*$ và $\dfrac{OK}{O^*S^*} = \dfrac{OA}{O^*X} = \dfrac{R}{R_*}$. Mặt khác, áp dụng **kết quả 3** suy ra $\dfrac{O^*S^*}{O^*H^*} = \dfrac{R_*}{2R+3R_*}$ hay $\dfrac{O^*S^*}{O^*L} = \dfrac{2R_*}{2R+3R_*}$. Vì vậy, ta được:

$$\frac{OK}{O^*L} = \frac{OK}{O^*S^*} \cdot \frac{O^*S^*}{O^*L} = \frac{R}{R_*} \cdot \frac{2R_*}{2R+3R_*} = \frac{2R}{2R+3R_*}$$

Mặt khác dễ thấy (O) cũng chính là đường tròn nội tiếp của $\triangle DEF$. Theo bổ đề 4 thì OO^* trùng với đường thẳng Euler của $\triangle ABC$, nói cách khác là $O^* \in OH$ và $\dfrac{OH}{OO^*} = \dfrac{R}{R_*}$. Mà I là trung điểm của HG nên $HI = IG = GO$ hay $\dfrac{OI}{OH} = \dfrac{2}{3}$. Do đó,

$$\frac{OI}{OO^*} = \frac{OI}{OH} \cdot \frac{OH}{OO^*} = \frac{2}{3} \cdot \frac{R}{R_*} = \frac{2R}{3R_*} \Longrightarrow \frac{IO}{IO^*} = \frac{2R}{2R+3R_*}$$



Hình 11.7: Định lý 2

Do vậy ta được $\dfrac{IO}{IO^*} = \dfrac{OK}{O^*L}$. Kết hợp với $OK \parallel O^*L$ suy ra $\triangle IOK \sim \triangle IO^*L$(c.g.c), nên $\widehat{OIK} = \widehat{O^*IL}$. Từ đó ta được I, K, L thẳng hàng. □

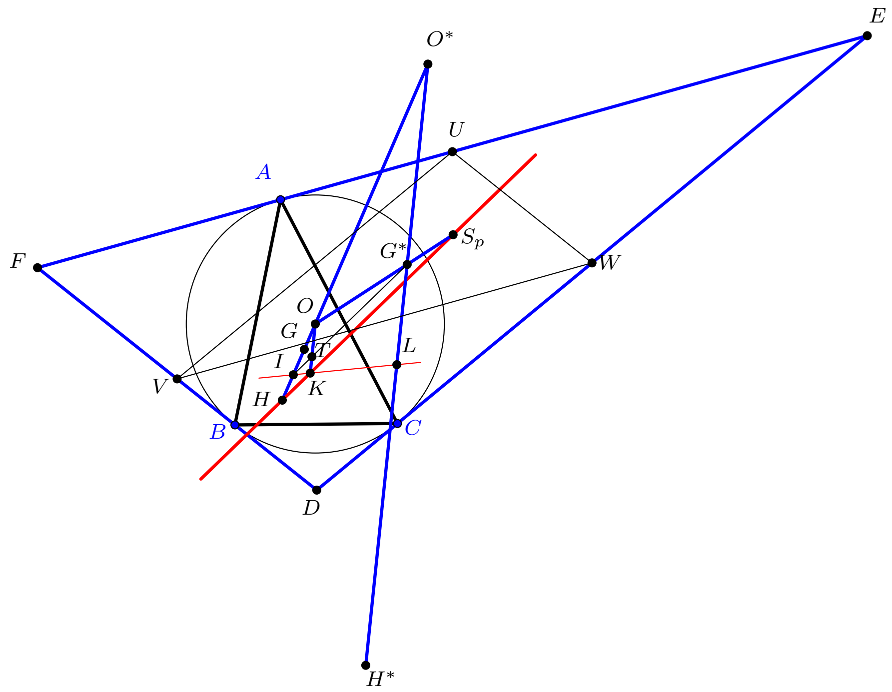
3.3. Đường thẳng đi qua trực tâm H và điểm Spieker của tam giác tạo bởi ba tiếp tuyến ($X(4)X(6759)$)

Để cho thuận tiện, tác giả sẽ sử dụng những ký hiệu của đã dùng trong việc phát biểu và chứng minh **định lý 2** để phát biểu **định lý 3**

Định lý 3. *Gọi S_p là điểm **Spieker** của $\triangle DEF$. Khi đó, đường thẳng HS_p đi qua điểm **Kosnita** K của $\triangle ABC$.*

Điểm **Spieker** của tam giác tạo bởi ba tiếp tuyến là Kimberling center $X(6759)$ của $\triangle ABC$.

Chứng minh định lý. Gọi G^* là trọng tâm của $\triangle DEF$. Ta có G^* nằm trên H^*O^* (đường thẳng **Euler** của tam giác DEF. Theo **bổ đề 3**, chú ý O là tâm nội tiếp của $\triangle DEF$ và S_p là điểm **Spieker** của $\triangle DEF$, suy ra O, G^*, S_p thẳng hàng và $OG^* = 2G^*S_p$. Đặt IG^* cắt OK tại T. Từ phép chứng minh **định lý 2** ở trên thì ta được $OK \parallel O^*L$. Áp dụng định lý **Thales**, ta có $\dfrac{OT}{O^*G^*} = \dfrac{IT}{IG^*} = \dfrac{TK}{G^*L}$. Từ đó suy ra $\dfrac{OT}{TK} = \dfrac{O^*G^*}{G^*L}$. Mặt khác, do $O^*G^* = G^*L$ nên $OT = 2TK$. Từ đó $\dfrac{OI}{IH} = \dfrac{OT}{TK} = \dfrac{OG^*}{G^*S_p}(= 2)$. Theo định lý **Thales** đảo suy ra $HK \parallel IT$ và $KS_p \parallel TG^*$. Theo tiên đề **Euclid** thì H, K, S_p thẳng hàng. □



Hình 11.8: Định lý 3

Nhận xét. Kết quả về đường thẳng đi qua 3 điểm H, K, S_p thực tế chỉ là một hệ quả của **định lý 2**. Hơn nữa, ta cũng thu được hệ quả:

Hệ quả 4. $\dfrac{HK}{HS_p} = \dfrac{2R}{2R + 3R_*}$

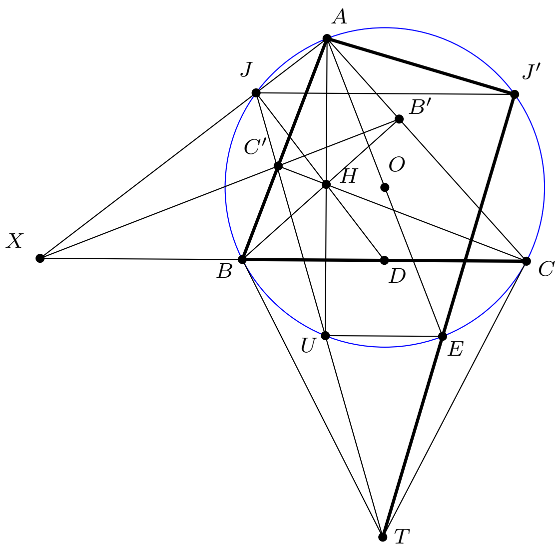
Chứng minh. Thật vậy, áp dụng định lý **Thales** cho $IG^* \parallel HS_p$ thì $\dfrac{HK}{IT} = \dfrac{OH}{OI} = \dfrac{HS_p}{IG^*}$. Từ đó suy ra $\dfrac{HK}{HS_p} = \dfrac{IT}{IG^*} = \dfrac{IO}{IO^*} = \dfrac{2R}{2R + 3R_*}$ (do $OK \parallel O^*H^*$). □

3.4. Đường thẳng đi qua đẳng giác của điểm De Longchamps và đối xứng của điểm Exeter qua tâm ngoại tiếp O ($X(64)X(378)$)

Định nghĩa 6. *Cho $\triangle ABC$ với trực tâm H và tâm ngoại tiếp O. Điểm **De Longchamps** của $\triangle ABC$ được xác định là điểm đối xứng của trực tâm H qua tâm ngoại tiếp O [8]. Điểm **de Longchamps** là **Kimberling** center $X(20)$ trong ETC [1].*

Bổ đề 9. *Cho $\triangle ABC$ nội tiếp đường tròn (O). D là trung điểm của BC và H là trực tâm của $\triangle ABC$. Tia DH cắt (O) tại J. J' là một điểm trên đường tròn (O) sao cho $JJ' \parallel BC$. Tiếp tuyến của (O) tại B, C cắt nhau tại T. Khi đó, $\angle AJ'T = 90°$.*

Chứng minh bổ đề. Dựng đường kính AE của (O). Đặt $U = AH \cap (O)$. Dễ thấy $UE \parallel BC \parallel JJ'$. Gọi BB', CC' là các đường cao của $\triangle ABC$. Ta có kết quả nổi tiếng là $AJ, BC, B'C'$ đồng quy tại một điểm, gọi điểm đó là X. Ta cũng có $A(BC, UX) = -1$ (chùm cơ bản). Từ đó suy ra $A(BC, UJ) = -1$. Do vậy, tứ giác $BJCU$ là tứ giác điều hòa. Vì vậy J, U, T là 3 điểm thẳng hàng. Mặt khác, do $UE \parallel BC \parallel JJ'$ nên bằng phép đối xứng qua trung trực BC, ta suy ra J', E, T thẳng hàng. Do vậy $\angle AJ'T = \angle AJ'E = 90°$. □



Hình 11.9: Bổ đề 5

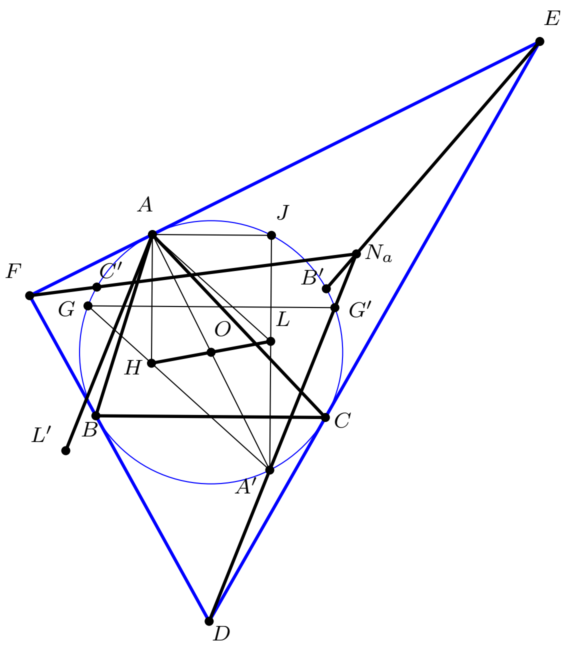
Từ bổ đề trên ta chứng minh được một tính chất liên quan đến đẳng giác của điểm **de Longchamps** dưới đây.

Bổ đề 10. *Cho $\triangle ABC$ nội tiếp đường tròn (O). Điểm **de Longchamps** L và L' là đẳng giác của L trong $\triangle ABC$. Các tiếp tuyến tại A, B, C của (O) cắt nhau tạo thành $\triangle DEF$. Vẽ đường kính AA', BB', CC' của (O). Khi đó, $DA' \parallel AL', EB' \parallel BL', FC' \parallel CL'$. Hơn nữa, ta đã biết DA', EB', FC' đồng quy tại điểm **Nagel** N_a của $\triangle DEF$ (kết quả nổi tiếng), thì N_a và L' đối xứng nhau qua O.*

Chứng minh bổ đề. Đặt $A'H$ cắt đường tròn ngoại tiếp (O) lần thứ hai tại G. Lấy $G' \in (O)$ sao cho $GG' \parallel BC$. Theo **bổ đề 5** thì D, A', G' thẳng hàng. Mặt khác, L đối xứng H qua O nên $AHA'L$ là một hình bình hành. Suy ra $A'L \parallel AH$ và $A'L \perp BC$. Đặt $A'L \cap (O) = J$ $(J \neq A')$ thì $\angle AJA' = 90°$, do đó $AJ \parallel BC \parallel GG'$. Suy ra $\angle G'A'A = \angle HA'L = \angle HAL$ (do $AHA'L$ là một hình bình hành). Mà L, L' và H, O là hai cặp đẳn giác trong $\triangle ABC$ nên $\angle L'AO = \angle HAL$. Do vậy $\angle L'AO = \angle G'A'A$. Suy ra $AL \parallel \overline{D, A', G'} \equiv DA'$. Tương tự $EB' \parallel BL', FC' \parallel CL'$.
Gọi L^* đối xứng L qua O. Ta được $AL'A'L^*$ là hình bình hành và $A'L^* \parallel A'L$. Từ đó suy ra $L^* \in DA'$. Tương tự $L^* \in EB'$ và $L^* \in FC'$. Vậy $L^* = DA' \cap EB' \cap FC'$ nên $L^* \equiv N_a$. Do đó, N_a và L đối xứng nhau qua O. □

Định nghĩa 7. *Cho $\triangle ABC$ với đường tròn ngoại tiếp (O). Các trung tuyến của tam giác ABC cắt (O) lân lượt tại X, Y, Z. Các tiếp tuyến của (O) tại A, B, C cắt nhau tạo thành tam giác DEF. Khi đó, DX, EY, FZ đồng quy tại một điểm. Điểm đồng quy này được gọi là điểm **Exeter** của $\triangle ABC$ [9]. Điểm **Exeter** là **Kimberling** center $X(22)$ trong ETC [1].*

Bổ đề 11. *Cho $\triangle ABC$ nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc BC, CA, AB tại D, E, F tương ứng. Các đường tròn **Mixtilinear** ứng với các đỉnh A, B, C lần lượt tiếp xúc (O) tại X, Y, Z. Ta có kết quả nổi tiếng AD, BE, CF đồng quy tại điểm **Gergonne** G_e của $\triangle ABC$ và AX, BY, CZ đồng quy tại một điểm J là đẳng giác của G_e trong $\triangle ABC$. Hơn nữa, J còn nằm trên OI và $\dfrac{JI}{JO} = \dfrac{r}{R}$ với R, r tương ứng là bán kính đường tròn (O) và (I).*



Hình 11.10: Bổ đề 6

Bình luận. Bổ đề trên là một kết quả nổi tiếng nên tác giả xin phép không trình bày lại chứng minh. Dựa vào bổ đề này ta có thể chứng minh được tính chất quan trọng sau của điểm **Exeter**.

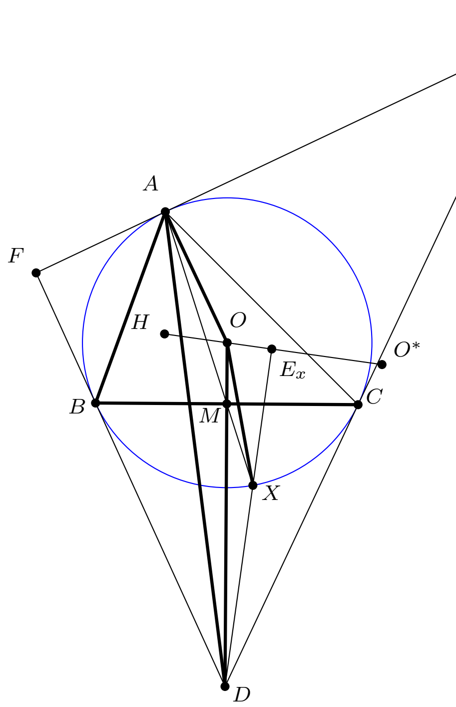
Bổ đề 12. *Điểm **Exeter** E_x nằm trên đường thẳng **Euler** của $\triangle ABC$. Hơn nữa, ta cũng có tỉ số $\dfrac{E_xO}{E_xO^*} = \dfrac{R}{R_*}$ với O, O^* là tâm ngoại tiếp của $\triangle ABC, \triangle DEF$ và R, R_* là bán kính của đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ và $\triangle DEF$.*

Chứng minh bổ đề. Gọi H là trực tâm của $\triangle ABC$. M là trung điểm BC và $X = AM \cap (O)$. Ta có các tứ giác $BOCD$ và $ABXC$ nội tiếp nên $MO \cdot MD = MB \cdot MC = MA \cdot MX$. Do đó, tứ giác $AOXD$ là tứ giác nội tiếp. Vậy $\angle XDO = \angle XAO = \angle AXO = \angle ADO$ hay DO là phân giác của $\angle ADX$. Suy ra DA và $DX \equiv DE_x$ là 2 đường đẳng giác trong $\angle EDF$. Tương tự EB và EE_x; FC và FE_x là các cặp 2 đường đẳng giác trong $\triangle DEF$. Vậy E_x là đẳng giác của điểm **Gergonne** G_e (của $\triangle DEF$) trong $\triangle DEF$. Theo **bổ đề 7** thì E_x nằm trên đường thẳng OO^*, đường thẳng này đồng thời cũng là đường thẳng Euler của $\triangle ABC$, và $\dfrac{E_xO}{E_xO^*} = \dfrac{R}{R_*}$. $\square$

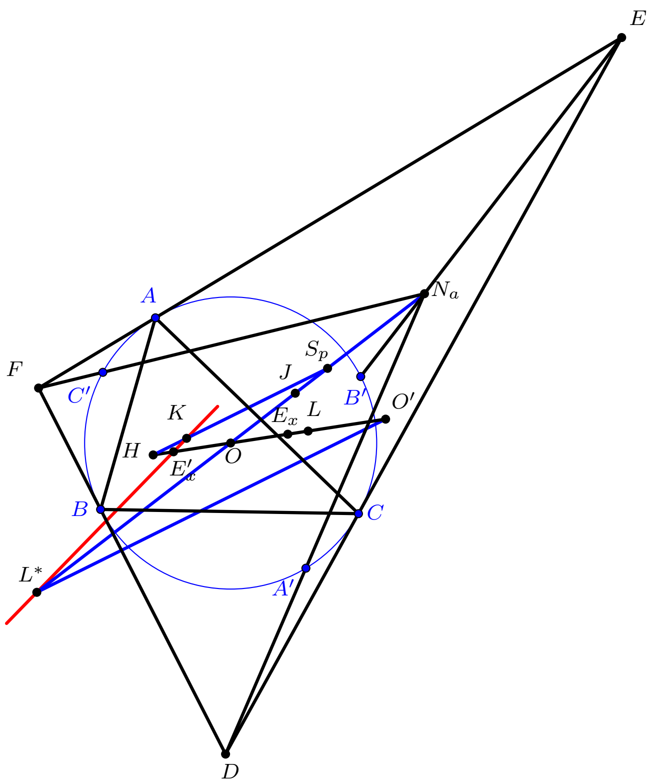
Định lý 5. *Cho $\triangle ABC$ với điểm **De Longchamps** L và điểm **Exeter** E_x. L^* là điểm đẳng giác của L trong $\triangle ABC$. E'_x đối xứng với E_x qua O. Khi đó, $L^*E'_x$ đi qua điểm **Kosnita** của $\triangle ABC$.*

Chứng minh định lý. Gọi H là trực tâm của $\triangle ABC$. O' đối xứng O qua L. Các tiếp tuyến tại A, B, C của (O) cắt nhau tạo thành tam giác DEF. S_p, N_a lần lượt là điểm **Spieker** và điểm **Nagel** của $\triangle DEF$. O^* là tâm ngoại tiếp của $\triangle DEF$. R, R^* lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp của $\triangle ABC$ và $\triangle DEF$.

Theo **bổ đề 8** thì $\dfrac{E_xO}{E_xO^*} = \dfrac{R}{R_*}$ hay $\dfrac{OE_x}{OO^*} = \dfrac{R}{R + R_*}$. Mặt khác, lại theo **bổ đề 4**, thì $O^* \in OH$ và $\dfrac{HO}{OO^*} = \dfrac{R}{R_*}$. Từ đó suy ra $\dfrac{OE'_x}{HO} = \dfrac{OE_x}{HO} = \dfrac{OE_x}{OO^*} \cdot \dfrac{OO^*}{HO} = \dfrac{R}{R+R_*} \cdot \dfrac{R_*}{R} = \dfrac{R_*}{R+R_*}$. Do vậy,



Hình 11.11: Bổ đề 8



Hình 11.12: Định lý 5

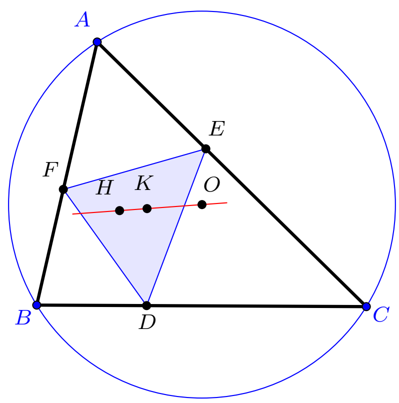
$\dfrac{HE'_x}{HO} = \dfrac{R}{R+R_*}$, mà $HO' = 3HO$ nên ta được

$$\frac{HE'_x}{HO'} = \frac{R}{3(R+R_*)} \Longrightarrow \frac{HE'_x}{E'_xO'} = \frac{R}{2R+3R_*} \ (1)$$

Chú ý rằng O, S_p, N_a lần lượt là tâm nội tiếp, điểm **Spieker** và điểm **Nagel** của $\triangle DEF$ nên ta được S_p là trung điểm ON_a (xem **bổ đề 3**). Kết hợp với L^* đối xứng N_a qua O, nên ta có $OL^* = ON_a = 2OS_p$. Từ đó theo định lý **Thales**, do $\dfrac{HO}{OO'} = \dfrac{OS_p}{OL^*}\left(=\dfrac{1}{2}\right)$ nên ta được $HK \parallel L^*O'$ và $L^*O' = 2HS_p$. Mặt khác, ta lại có $\dfrac{HK}{HS_p} = \dfrac{2R}{2R+3R_*}$ (**hệ quả 4**). Suy ra, $\dfrac{HK}{L^*O'} = \dfrac{HK}{2HS_p} = \dfrac{R}{2R+3R_*}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{HE'_x}{E'_xO'} = \dfrac{HK}{L^*O'}$. Mà $\angle KHE'_x = \angle L^*O'E'_x$ (do $HK \parallel L^*O'$). Do đó, $\triangle HKE'_x \sim \triangle OL^*E'_x$. Suy ra $\angle HE'_xK = \angle O'E'_xL^* = 180^\circ - \angle HE'_xL^*$ hay $\angle KE'_xL^* = \angle HE'_xK + \angle HE'_xL^* = 180^\circ$. Do vậy, L^*, E'_x, K thẳng hàng. □

3.5. Đường thẳng đi qua trực tâm tam giác Pedal của K và tâm ngoại tiếp O



Hình 11.13: Định lý 6

Định lý 6. *Cho tam giác ABC với điểm* **Kosnita** *K và tâm ngoại tiếp O. H là trực tâm tam giác pedal của K ứng với tam giác ABC. Khi đó, đường thẳng OH đi qua điểm* ***Kosnita*** *K.*

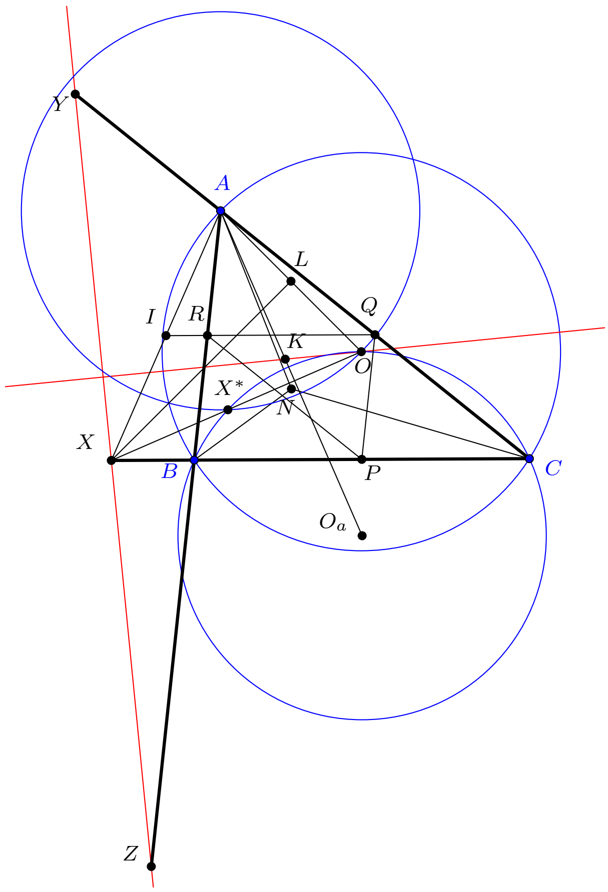
Định lý trên đã được tác giả đề xuất trên diễn đàn **AoPS** trong [2]. Để chứng minh **định lý 6**, ta cần có một bổ đề:

Bổ đề 13. *Cho $\triangle ABC$ với P là một điểm bất kỳ. Các đường thẳng qua P lần lượt vuông góc với AP, BP, CP cắt BC, CA, AB tương ứng tại X, Y, Z. Khi đó, X, Y, Z thẳng hàng.*

Đây là một kết quả nổi tiếng nên tác giả sẽ không trình bày phép chứng minh.

Trở lại chứng minh định lý. Ta gọi N là tâm đường tròn **Euler** của $\triangle ABC$. Các đường thẳng qua N lần lượt vuông góc với AN, BN, CN cắt BC, CA, AB tương ứng tại X, Y, Z. Theo bổ đề 1.1 thì X, Y, Z cùng nằm trên một đường thẳng. Sau đây, để chứng minh định lý, tác giả sẽ chia ra chứng minh hai bài toán nhỏ sau đây:

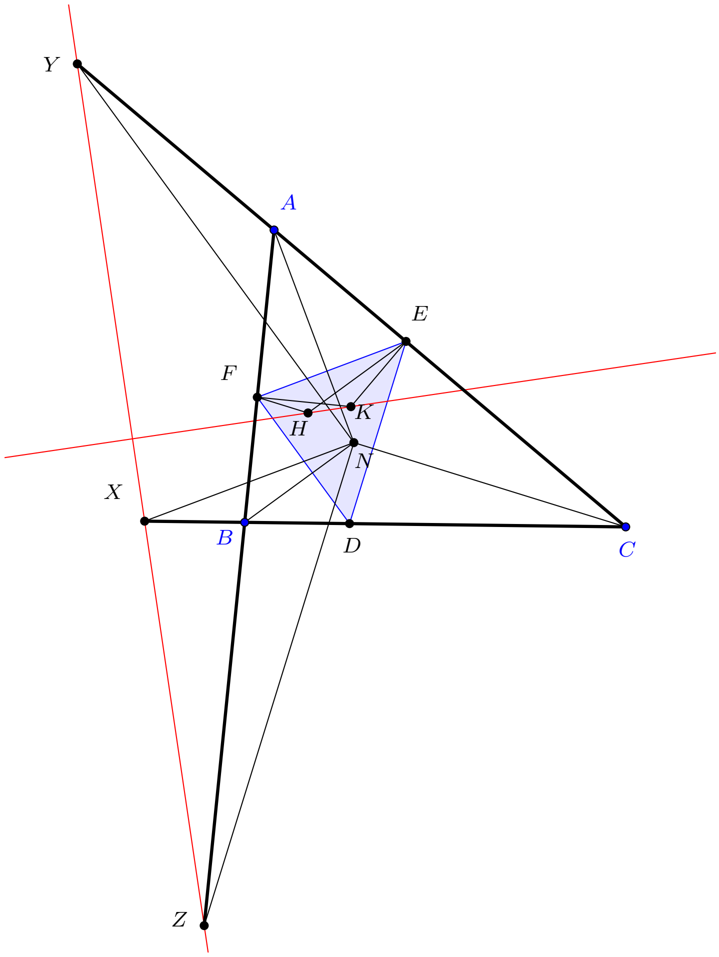
Bài toán 1. $OK \perp \overline{X, Y, Z}$.



Hình 11.14: Bài toán 1

Chứng minh. Gọi P, Q, R, L lần lượt là trung điểm BC, CA, AB, OA. I, O_a tương ứng là tâm ngoại tiếp của $\triangle ANL$ và $\triangle OBC$. Khi đó, ta có N, L là tâm ngoại tiếp của $\triangle PQR$ và $\triangle ARQ$. Mà A, D đối xứng nhau qua trung điểm qua QR nên L, N cũng đối xứng qua trung điểm QR. Mặt khác, LN lại trung trực của QR. Suy ra L, N đối xứng qua QR, nói cách khác, QR là trung trực của LN. Từ đó suy ra $I \in QR$.
Lấy X' đối xứng A qua I thì $X' \in BC$ và AX' là đường kính của (ANL). Suy ra $\angle ANX = \angle ALX = 90°$. Từ đó ta được $NX' \perp AN, X'L \perp AO$ và $X' \equiv X$. Do đó, $XL \perp AO$ nên X thuộc trung trực của AO.
Xét phép nghịch đảo **I** qua đường tròn (O). Gọi X^*, Y^*, Z^* lần lượt là ảnh của X, Y, Z qua phép nghịch đảo **I**. Do X là giao điểm của trung trực AO với BC nên X^* sẽ là giao điểm của đường tròn (A, AO) với đường tròn (OBC). Từ đó suy ra AO_a là trung trực của OX^*. Mà $K \in AO_a$ nên $KO = KX^*$. Chứng minh tương tự suy ra $KO = KX^* = KY^* = KZ^*$ hay K chính là tâm ngoại tiếp của $\triangle X^*Y^*Z^*$. Theo tính chất của phép nghịch đảo ta suy ra $OK \perp \overline{X, Y, Z}$. □

Bài toán 2. $HK \perp \overline{X, Y, Z}$



Hình 11.15: Bài toán 2

Chứng minh. Theo **kết quả 1** thì N, K là hai điểm đẳng giác trong $\triangle ABC$. Do đó, ta có $AN \perp EF, BN \perp FD, CN \perp DE$. Suy ra $NY \parallel FD \perp HE, NZ \parallel DE \perp HF$. Xét $\triangle KEF$ và $\triangle NYZ$ có $NA \perp EF, YE \perp KE, ZF \perp KF$ và NA, YE, ZF đồng quy tại A. Từ đó suy ra $\triangle KEF$ và $\triangle NYZ$ trực giao. Vậy các đường thẳng qua K, E, F lần lượt vuông góc với YZ, NY, NZ đồng quy. Mà $EH \perp NY$ và $FH \perp NZ$. Từ đó ta được $KH \perp YZ$. □

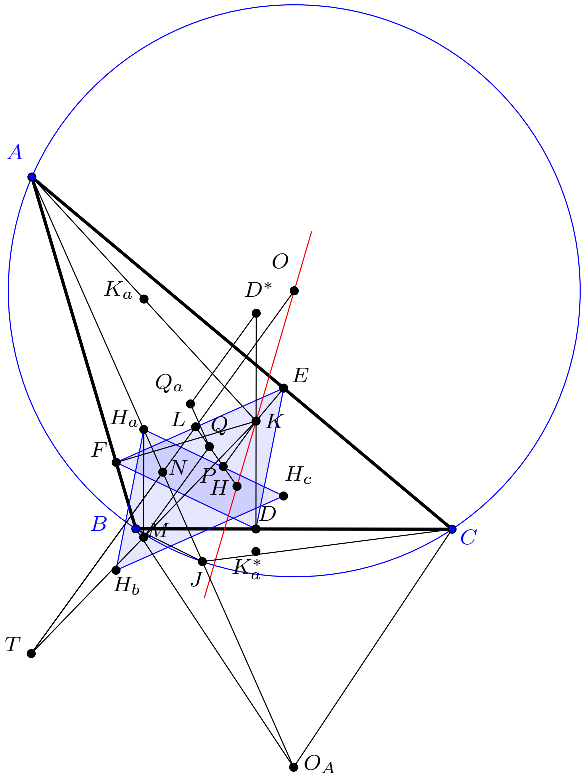
Ta đã giải quyết xong hai bài toán nhỏ, áp dụng chúng ta suy ra H, K, O thẳng hàng trên một đường thẳng vuông góc với $\overline{X, Y, Z}$. **Định lý 6** đã được chứng minh xong. □

Nhận xét. Cả hai bài toán nhỏ ở trên ngoài các chứng minh trên vẫn còn có các cách tiếp cận và chứng minh khác trong [2] và [3]. Cũng trong [2], **Telv Cohl** đã phát biểu và chứng minh thêm một tính chất liên quan đến **định lý 6** như sau:

Định lý 7. $\overline{HO} = 3\overline{HK}$

Tác giả xin dẫn lại chứng minh của **Telv Cohl** cho **định lý 7** trong [2] dưới đây:

Chứng minh định lý 7. Gọi T là trực tâm của $\triangle ABC$. K_a, H_a lần lượt là tâm ngoại tiếp và trực tâm của $\triangle AEF$ (Xác định các điểm K_b, K_c, H_b, H_c tương tự). Đặt $J \equiv AN \cap \odot(ABC)$ và K_a^*, O_A đối xứng của K_a, O qua EF, BC. Từ $\angle JBC = \angle NAC = \angle BAK = \angle FEK$



Hình 11.16: Định lý 7

và $\angle JCB = \angle NAB = \angle CAK = \angle EFK$, ta được $\triangle JBC \stackrel{-}{\sim} \triangle KEF$, do đó kết hợp với $\angle CO_AB = \angle BOC = 2\angle BAC = \angle FK_aE = \angle EK_a^*F$ (chú ý rằng $O_AB = O_AC$ và $K_a^*E = K_a^*F) \Longrightarrow \triangle JBC \cup O_A \stackrel{-}{\sim} \triangle KEF \cup K_a^*$, do vậy $\angle EKK_a^* = \angle O_AJB = \angle ACB = \angle EKD \Longrightarrow K_a^* \in DK$. Vì H_a đối xứng K qua trung điểm EF, nên $KK_a^*H_aK_a$ là một hình bình hành, dó đó từ $KK_a^* \perp BC$ ta suy ra $K_aH_a \perp BC \Longrightarrow K_aH_a$ đi qua trung điểm M của KT (vì K_a là trung điểm của KA). Tương tự, ta chứng minh được $K_bH_b \perp CA, K_cH_c \perp AB$ và $M \in K_bH_b, M \in K_cH_c$.
Vì H_a, H_b, H_c tương ứng là đối xứng của K qua trung điểm EF, FD, DE, nên $\triangle DEF$ và $\triangle H_aH_bH_c$ bằng nhau (và vị tự), đo vậy kết hợp với $H_aM \parallel DK, H_bM \parallel EK, H_cM \parallel FK \Longrightarrow \triangle DEF \cup K$, và $\triangle H_aH_bH_c \cup M$ bằng nhau (và vị tự).
Gọi P, Q là tâm đường tròn **Euler** và tâm ngoại tiếp của $\triangle DEF$. Gọi Q_a là đối xứng của Q qua EF và D^* là đối xứng của D qua K. Từ $KD^* \stackrel{\parallel}{=} DK \stackrel{\parallel}{=} MH_a \Longrightarrow H_aMKD^*$ là một hình bình hành, nên D^* đối xứng M qua trung điểm của EF, do đó P là trung điểm của $DQ_a \Longrightarrow 2PK \stackrel{\parallel}{=} Q_aD^* \stackrel{\parallel}{=} QM$. Mà M, Q là trung điểm của KT, KN, ta suy ra $2MQ \stackrel{\parallel}{=} TN \Longrightarrow 4PK \stackrel{\parallel}{=} 2MQ \stackrel{\parallel}{=} TN$, do vậy nếu $L \equiv HP \cap OT$ ta được $PK \stackrel{\parallel}{=} NL \Longrightarrow 3PK \stackrel{\parallel}{=} LO$ (vì $NO = NT) \Longrightarrow \overline{HO} : \overline{HK} = \overline{LO} : \overline{PK} = 3 : 1$.

□

Tài liệu tham khảo

[1] C. Kimberling, Encyclopedia of Triangle Center, Part 1,

http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html

[2] HK passes through the circumcenter
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h1125044

[3] Geometry Problem (23)
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h373509

[4] Euler Lines Reflected
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h610293

[5] Taylor Circle
http://mathworld.wolfram.com/TaylorCircle.html

[6] Honsberger, R. , Episodes in Nineteenth and Twentieth Century Euclidean Geometry; Washington, DC: Math. Assoc. Amer., 1995

[7] The Taylor Circle
http://www.cut-the-knot.org/triangle/Taylor.shtml

[8] De Longchamps point
http://mathworld.wolfram.com/deLongchampsPoint.html

[9] Exeter point
http://mathworld.wolfram.com/ExeterPoint.html

ĐỊNH LÝ SAWAYAMA VÀ THESBAULT TRONG CÁC BÀI TOÁN HÌNH HỌC THI OLYMPIC

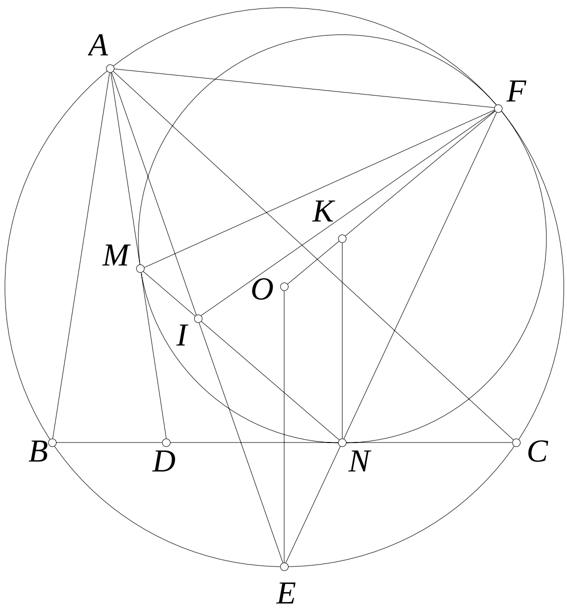
Trần Quang Hùng (Tổ toán, trường THPT Chuyên KHTN, Hà Nội)
Dương Ánh Ngọc (Lớp 10 A1 Toán, trường THPT Chuyên KHTN, Hà Nội)

Bài viết tập trung vào việc phát triển các ứng dụng định lý nổi tiếng của Sawayama và Thébault trong các bài toán hình học thi Olympic.

1. Mở đầu

Định lý Thébault là một trong những định lý đẹp bậc nhất của hình học phẳng. Nguyên liệu chủ yếu trong chứng minh định lý này là bổ đề của Sawayama. Vì vậy chúng được gộp chung thành tên gọi là định lý Sawayama và Thébault xem [1,2,3]. Bổ đề Sawayama được phát biểu như sau, tham khảo [2,3]

Bài toán 1 (Bổ đề Sawayama). *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). D là một điểm thuộc đoạn BC. Đường tròn (K) tiếp xúc DA, DC lần lượt tại M, N và tiếp xúc trong (O). Chứng minh rằng MN đi qua tâm nội tiếp tam giác ABC.*



Chứng minh. Gọi phân giác góc $\angle BAC$ cắt (O) tại E khác A. AE cắt MN tại I. (K) tiếp xúc (O) tại F. Dễ có E, N, F thẳng hàng và $EB^2 = EC^2 = EN.EF$.
Ta lại có $\angle FMN = \frac{1}{2}\angle FKN = \frac{1}{2}\angle FOE = \angle FAE$ suy ra tứ giác $AFIM$ nội tiếp. Suy ra $\angle IFN = \angle MFN - \angle MFI = \angle DMN - \angle MFI = \angle AFI - \angle MFI = \angle AFM = \angle AIM = \angle EIN$. Từ đó $\triangle EIN \sim \triangle EFI$ suy ra $EI^2 = EN.EF = EC^2 = EB^2$. Suy ra I là tâm nội tiếp tam giác ABC. Ta có điều phải chứng minh. □

Định lý Thebault là một hệ quả trực tiếp của bổ đề trên

Bài toán 2 (Định lý Thébault). *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). D là một điểm thuộc đoạn BC. Đường tròn (K) tiếp xúc DA, DC và tiếp xúc trong (O). Đường tròn (L) tiếp xúc DA, DB và tiếp xúc trong (O). Chứng minh rằng KL đi qua tâm nội tiếp tam giác ABC.*

Chứng minh xem chi tiết trong [1,4]. Sau đây là một phát biểu khác của bổ đề Sawayama trên tứ giác nội tiếp

Bài toán 3. *Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). Hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại E. Đường tròn (K) tiếp xúc với đoạn EC, ED tại M, N và tiếp xúc trong (O). Chứng minh rằng MN đi qua tâm nội tiếp của tam giác ACD và tam giác BCD.*

Bài toán 4 (Định lý Sawayama và Thébault mở rộng với tâm bàng tiếp). *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). D là một điểm thuộc tia đối tia CB. Đường tròn (K) tiếp xúc DA, DC lần lượt tại M, N và tiếp xúc ngoài (O). Chứng minh rằng MN đi qua tâm bàng tiếp ứng với đỉnh B của tam giác ABC.*

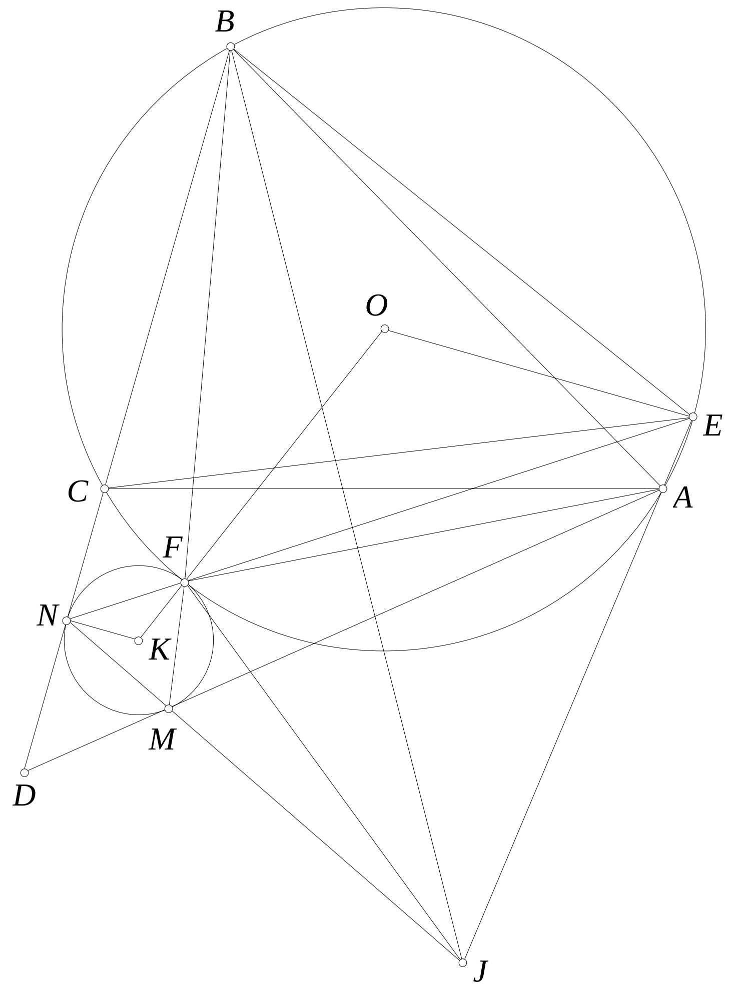
Chứng minh. Gọi phân giác ngoài tại đỉnh A cắt (O) tại E khác A. AE cắt MN tại J. (K) tiếp xúc (O) tại F. Dễ có E, N, F thẳng hàng và $EB^2 = EC^2 = EN.EF$. Ta lại có $\angle FMN = \frac{1}{2}\angle FKN = \frac{1}{2}\angle FOE = \angle FBE = \angle FAJ$ suy ra tứ giác $AFMJ$ nội tiếp. Suy ra $\angle EFJ = 180^\circ - \angle NFJ = 180^\circ - \angle NFM - \angle MFJ = 180^\circ - \angle JMA - \angle MAJ = \angle MJA$. Từ đó $\triangle EFJ \sim \triangle EJN$ suy ra $EJ^2 = EN.EF = EC^2 = EB^2$. Suy ra J là tâm bàng tiếp ứng với đỉnh B của tam giác ABC. Ta có điều phải chứng minh. □

Cả hai phát biểu trên đều rất hay dùng trong các bài toán hình học khác nhau. Trên là một vài bài toán điểm qua định lý Sawayama và Thébault cũng như một số các mở rộng.

2. Một số bài toán ứng dụng

Định lý Sawayama và Thébault có thể coi là một bổ đề thông dụng trong các bài toán Olympic khó, đôi khi việc dùng nó thông dụng và hiển nhiên tới mức khó nhận ra vai trò của nó. Chúng ta hãy bắt đầu các bài toán chọn đội tuyển Việt Nam 2014, tham khảo [4]

Bài toán 5 (VNTST 2014). *Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O). Trên cung $\overset{\frown}{BC}$ không chứa A của (O) lấy điểm D. Giả sử CD cắt AB ở E và BD cắt AC ở F. Gọi (K) là đường tròn nằm trong tam giác EBD, tiếp xúc với EB, ED và tiếp xúc với đường tròn (O). Gọi (L) là đường tròn nằm trong tam giác FCD, tiếp xúc với FC, FD và tiếp xúc với đường tròn (O). Gọi M là tiếp điểm của (K) với BE và N là tiếp điểm của (L) với CF. Chứng minh rằng đường tròn đường kính MN luôn đi qua một điểm cố định khi D di chuyển.*

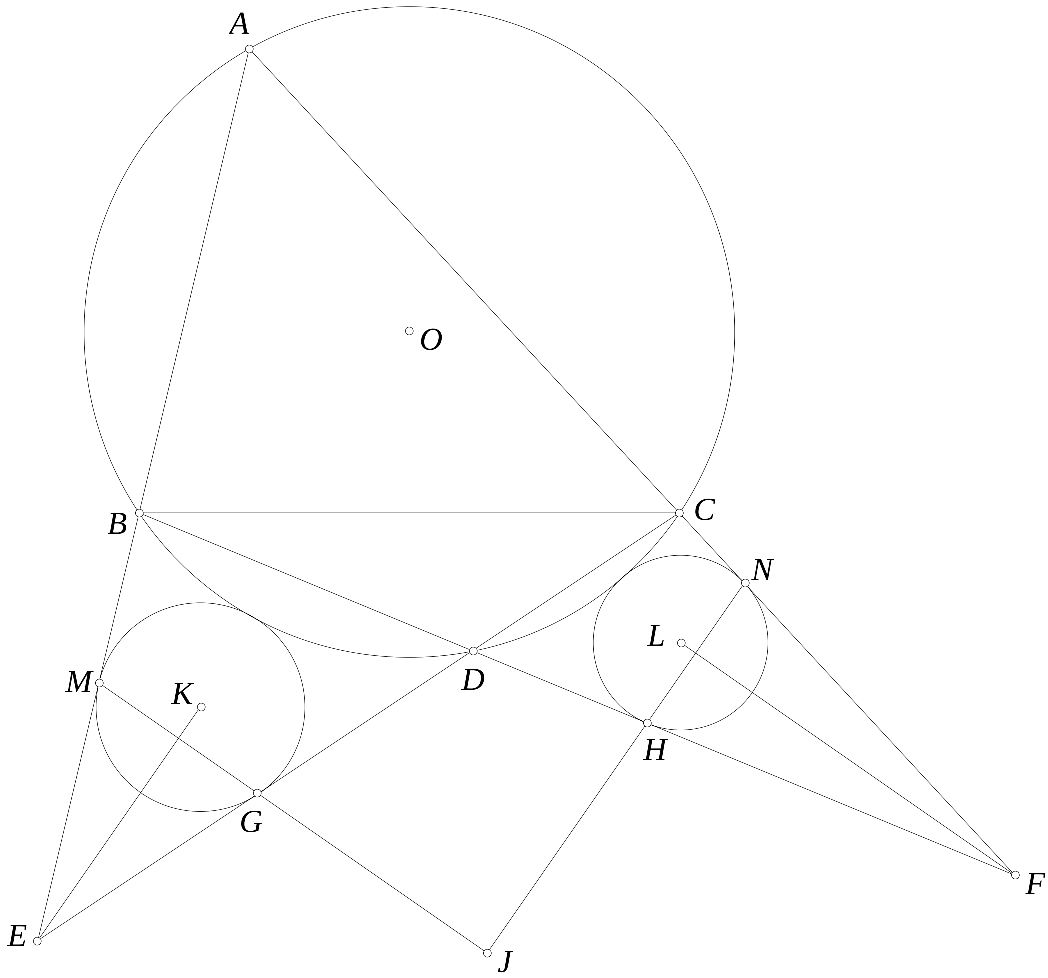


Chứng minh. Gọi (K) tiếp xúc ED tại G và (L) tiếp xúc FD tại H. Theo Định lý Sawayama và Thébault mở rộng cho tâm bàng tiếp thì MG, NH đi qua tâm bàng tiếp J ứng với đỉnh A. Từ đó theo tính chất góc của phân giác góc tạo bởi $(EK, LF) = \frac{1}{2}(\angle A + \angle D) = 90^\circ$ do đó $EK \perp LF$. Lại dễ có $MG \perp EK \perp LF \perp NH$ từ đó MG vuông góc NH tại J nên đường tròn đường kính MN đi qua J cố định. □

Bài toán có thể mở rộng thú vị hơn như sau, tham khảo [4]

Bài toán 6. *Cho tam giác ABC. Một đường tròn (O) bất kỳ cố định đi qua B, C. D là điểm di chuyển trên (O) sao cho A, D khác phía BC. Giả sử CD cắt AB ở E và BD cắt AC ở F. Gọi (K) là đường tròn tiếp xúc EB, ED lần lượt tại M, N và tiếp xúc trong (O). Gọi (L) là đường tròn tiếp xúc FC, FD lần lượt tại P, Q và tiếp xúc trong (O). Chứng minh rằng giao điểm của MN, PQ luôn nằm trên một đường tròn cố định khi D di chuyển.*

Chứng minh. Gọi AB, AC lần lượt cắt (O) tại G, H khác B, C. Áp dụng định lý Sawayama và Thébault mở rộng vào tam giác GBC, HBC thì MN đi qua tâm bàng tiếp S ứng với đỉnh G của tam giác BGC cố định và PQ đi qua tâm bàng tiếp T ứng với đỉnh H của tam giác HBC cố định. Gọi MN cắt PQ tại R chú ý $EK \perp MN, FL \perp PQ$, theo tính chất góc của phân giác thì $180^\circ - \angle(MN, PQ) = \angle(EK, FL) = \frac{1}{2}(\angle A + \angle D)$. Vì (O) cố định nên $\angle D$ không đổi, từ đó $\angle R$ không đổi và S, T cố định nên R thuộc đường tròn cố định đi qua S, T. □



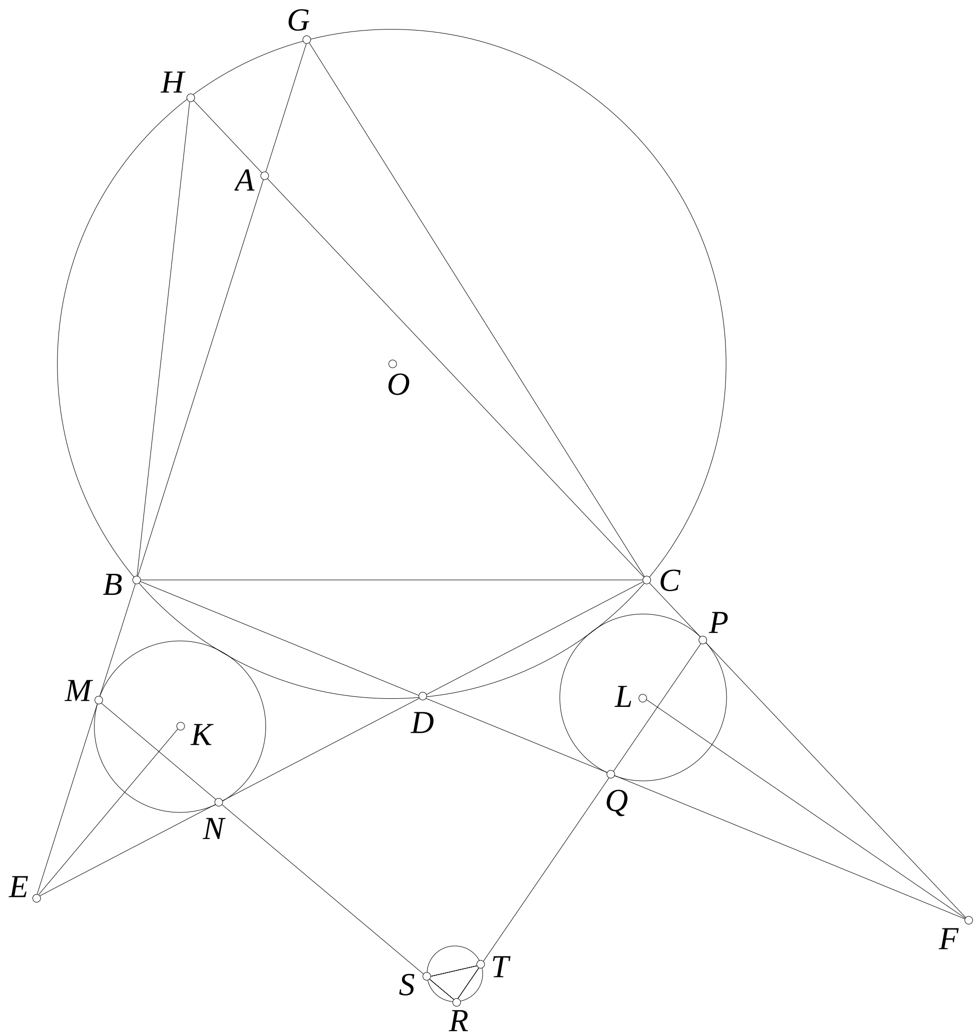
Các bạn hãy làm hai bài toán sau để luyện tập thêm về dạng này

Bài toán 7. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). P là điểm di chuyển trên cung $\widehat{BC}$ chứa A của (O). PB, PC cắt CA, AB lần lượt tại E, F. Đường tròn (K) tiếp xúc đoạn EA, EB và tiếp xúc trong (O). Đường tròn (L) tiếp xúc đoạn FB, FC và tiếp xúc $\widehat{BC}$ không chứa A của (O). (K) tiếp xúc AC tại M và (L) tiếp xúc AB tại N. Chứng minh rằng đường tròn đường kính MN luôn đi một điểm cố định khi P di chuyển.*

Bài toán 8. *Cho tam giác ABC và đường tròn (O) cố định đi qua B, C. D là điểm di chuyển trên cung $\widehat{BC}$ của (O) sao cho D, A cùng phía BC. DB, DC cắt CA, AB lần lượt tại E, F. Đường tròn (K) tiếp xúc đoạn EA, EB tại M, N và tiếp xúc trong (O). Đường tròn (L) tiếp xúc đoạn FB, FC tại P, Q và tiếp xúc (O) tại một điểm không cùng phía A so với BC. Chứng minh rằng giao điểm của MN và PQ luôn thuộc một đường tròn cố định khi P di chuyển.*

Bài toán tiếp sau tham khảo [1,5]

Bài toán 9. *Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) có AC cắt BD tại E. Đường tròn (K) tiếp xúc đoạn EA, ED và tiếp xúc trong (O). Đường tròn (L) tiếp xúc đoạn EB, EC và tiếp xúc trong (O). Chứng minh rằng trục đẳng phương của (K) và (L) chia đôi các cung $\widehat{AB}$ và $\widehat{CD}$ của (O).*

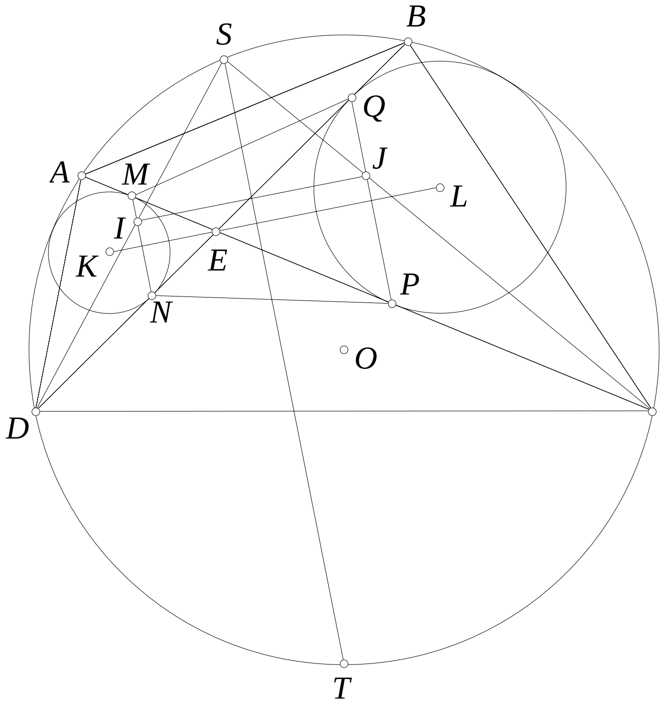


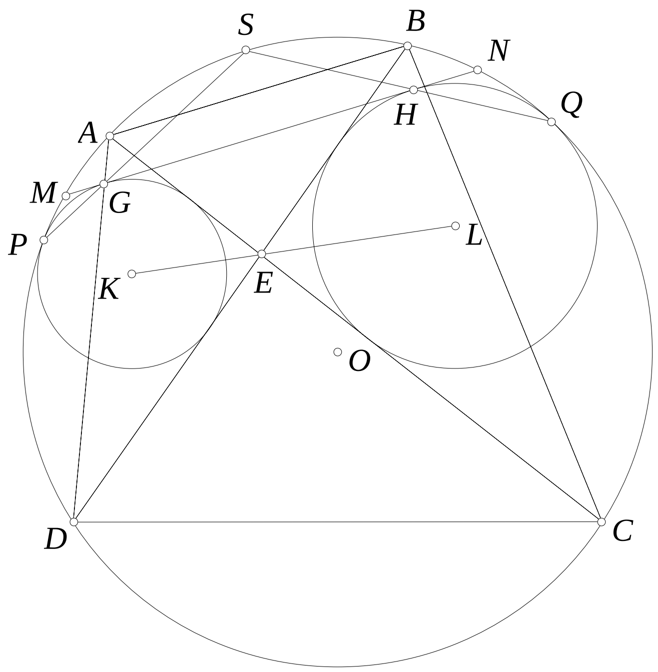
Chứng minh. Gọi (K) tiếp xúc AC, BD tại M, N. (L) tiếp xúc AC, BD tại P, Q. Theo định lý Sawayama và Thébault thì MN đi qua tâm nội tiếp I của tam giác DAB và PQ đi qua tâm nội tiếp J của tam giác CAB. Gọi S, T là trung điểm các cung $\widehat{AB}$ và $\widehat{CD}$ của (O). Ta dễ chứng minh ST song song với phân giác $\angle AEB$ và vuông góc với phân giác $\angle BEC$. Cũng dễ chứng minh tứ giác $AIJB$ nội tiếp nên IJ cắt EA, EB tạo thành một tam giác cân nên $IJ \perp ST$. Hơn nữa DI, CJ đi qua S và $SI = SA = SB = SJ$. Từ đó tam giác SIJ cân và $ST \perp IJ$ nên ST chia đôi IJ. Trong hình thang $MNPQ$ có $ST \parallel MN \parallel PQ$ và ST chia đôi IJ nên ST là đường trung bình nên ST đi qua trung điểm của MP, NQ, vậy ST chính là trục đẳng phương của (K) và (L). Đó là điều phải chứng minh. □

Bài toán tiếp sau là một hệ quả của bài trên

Bài toán 10. *Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) có AC cắt BD tại E. Đường tròn (K) tiếp xúc đoạn EA, ED và tiếp xúc trong (O). Đường tròn (L) tiếp xúc đoạn EB, EC và tiếp xúc trong (O). Chứng minh rằng có một tiếp tuyến chung ngoài của (K) và (L) song song AB.*

Chứng minh. Gọi tiếp tuyến chung ngoài của (K) và (L) gần AB hơn cắt (O) tại M, N. $(K), (L)$ tiếp xúc (O) tại P, Q và tiếp xúc MN tại G, H. Theo chứng minh của định lý Sawayama và



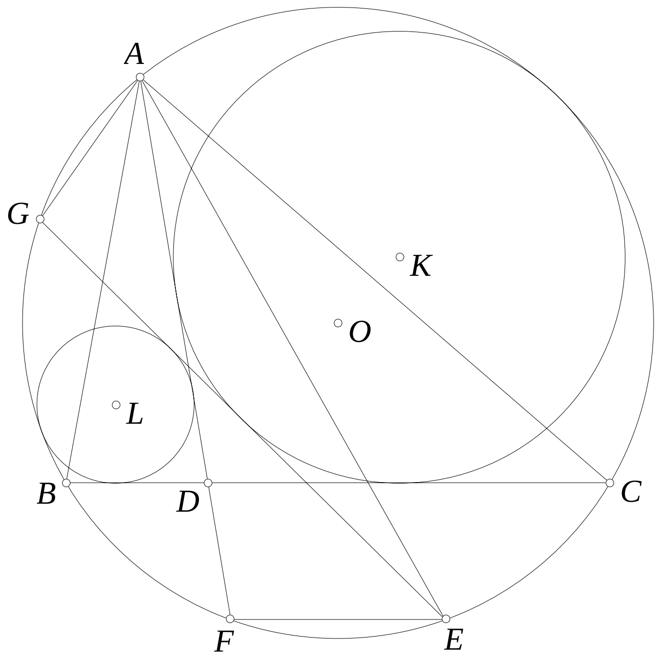


Thébault thì PQ, QH đi qua trung điểm S của cung $\widehat{MN}$. Lại có $SG.SP = SM^2 = SN^2 = SH.SQ$. Từ đó S thuộc trục đẳng phương của (K) và (L). Theo bài trước S là trung điểm cung $\widehat{AB}$. Vậy cung $\widehat{MN}, \widehat{AB}$ có chung trung điểm S nên $MN \parallel AB$. Ta có điều phải chứng minh. $\square$

Bài toán trên lại có một hệ quả thú vị khác như sau

Bài toán 11. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). D là một điểm thuộc đoạn BC. Đường tròn (K) tiếp xúc DA, DC và tiếp xúc trong (O). Đường tròn (L) tiếp xúc DA, DB và tiếp xúc trong (O). Tiếp tuyến chung trong khác AD của (K) và (L) cắt cung $\widehat{BC}$ không chứa A của (O) tại E. Chứng minh rằng $\angle DAB = \angle EAC$.*

Chứng minh. Gọi AD cắt (O) tại F khác A. Tiếp tuyến chung trong khác AD của (K) và (L) cắt (O) tại G khác E. Áp dụng bài trước vào tứ giác $AEFG$, ta thấy BC là tiếp tuyến chung ngoài của (K) và (L) gần EF hơn nên $BC \parallel EF$. Từ đó dễ thấy $\angle DAB = \angle EAC$. Ta có điều phải chứng minh. □

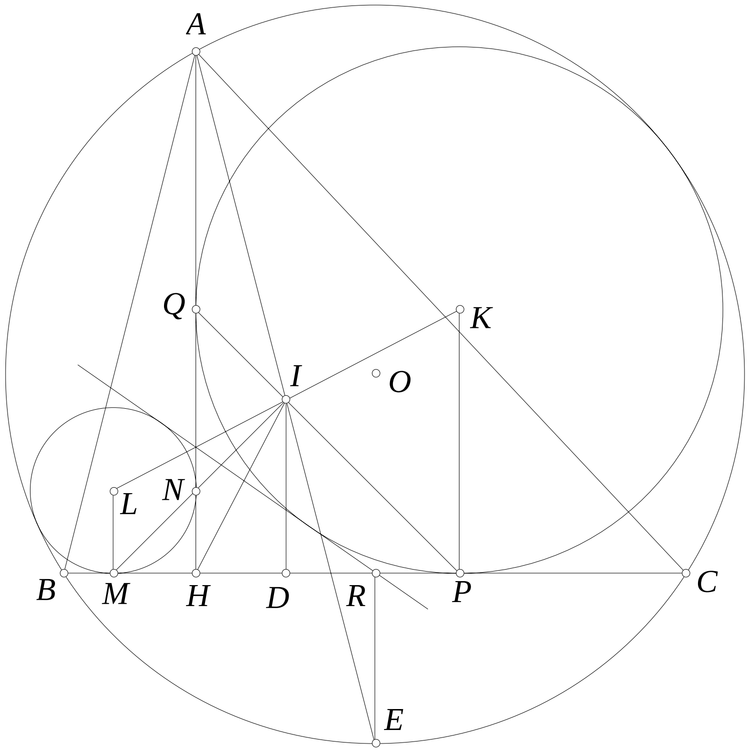


Chúng ta thu được một hệ quả đơn giản của bài toán trên như sau

Bài toán 12. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) với đường cao AH. Đường tròn (K) tiếp xúc HA, HC và tiếp xúc trong (O). Đường tròn (L) tiếp xúc HA, HB và tiếp xúc trong (O). Chứng minh rằng tiếp tuyến chung trong khác AH của (K) và (L) đi qua điểm đối tâm của A trên (O).*

Bài toán sau có một phần là đề chọn đội Romani năm 2006 và bổ sung thêm một điều kiện tham khảo [6,7,8], lời giải sau dựa vào ý tưởng của Telv Cohl trong [6]

Bài toán 13. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) với đường cao AH. Đường tròn (K) tiếp xúc HA, HC và tiếp xúc trong (O). Đường tròn (L) tiếp xúc HA, HB và tiếp xúc trong (O). Chứng minh rằng các điều kiện sau là tương đương*
1) $AB + AC = 2BC$.
2) Tiếp tuyến chung trong khác AH của (K) và (L) chia đôi BC.
3) KL đi qua trực tâm tam giác ABC.



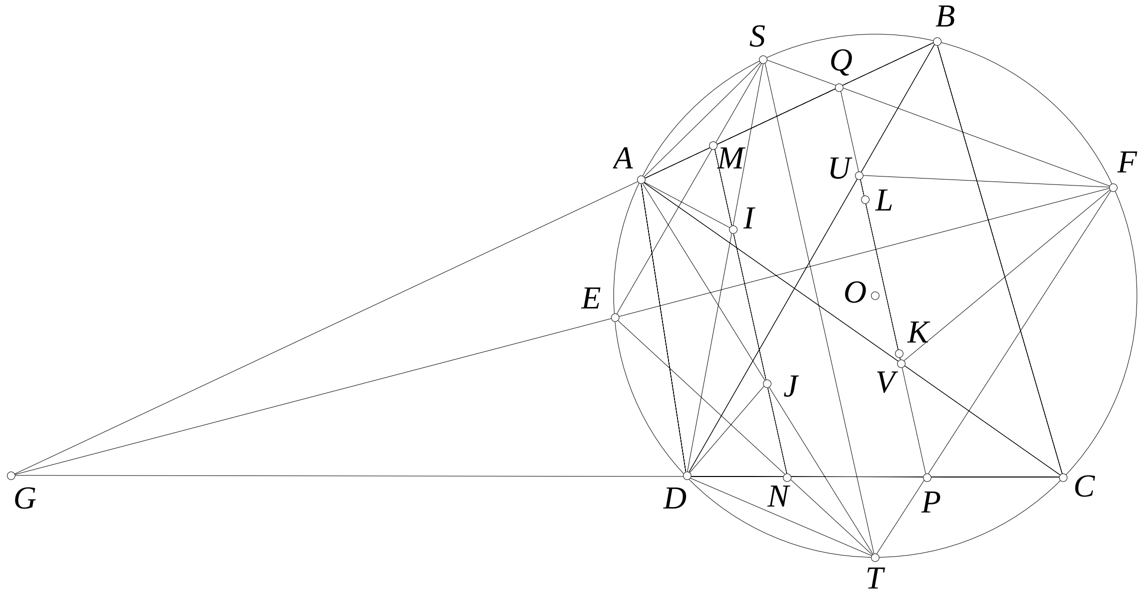
Chứng minh. Nhờ bài toán trên ta thấy các điều kiện 2) và 3) là tương đương. Ta sẽ chứng minh 1) và 3) tương đương là xong, thật vậy. Gọi (K) tiếp xúc HC, HA tại P, Q. Gọi (L) tiếp xúc HB, HA tại M, N. Theo định lý Sawayama và Thébault thì MN, PQ, KL đồng quy tại tâm nội tiếp I của tam giác ABC. Dễ thấy các tam giác HMN và HPQ vuông cân nên MI là phân giác $\angle LMH$ và PI là phân giác $\angle KPH$. Từ đó dễ có các đoạn thẳng bằng nhau $IL = IH = IK$ suy ra I là trung điểm KL. Gọi D là hình chiếu của I lên BC thì D là trung điểm MP. Gọi tiếp tuyến chung trong khác AH của (K) và (L) cắt BC tại R. Theo tính chất tiếp tuyến cắt nhau của hai đường tròn ngoài nhau dễ có $HM = RP$ nên D là trung điểm HR. Gọi AI cắt (O) tại E khác A. Ta thấy R là trung điểm BC khi và chỉ khi $ER \perp BC$ khi và chỉ khi I là trung điểm AE. Theo hệ quả định lý Ptolemy điều này tương đương $AB + AC = 2BC$. Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét 2.1. *Với ý tưởng tương tự lời giải trên bạn đọc có thể đề xuất một số vấn đề tổng quát hơn.*

Bài toán tiếp tục sau xuất hiện trong kỳ thi Olympic chuyên KHTN năm 2015 tham khảo [9]

Bài toán 14. *Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). Gọi I, J là tâm nội tiếp tam giác BAD, CAD. Gọi DI, AJ lần lượt cắt (O) tại S, T khác D, A. Đường thẳng IJ lần lượt cắt AB, CD tại M, N.*
a) Chứng minh rằng SM và TN cắt nhau trên đường tròn (O).
b) Gọi đường tròn ngoại tiếp tam giác ABN cắt CD tại P khác N. Đường tròn ngoại tiếp tam giác CDM cắt AB tại Q khác M. Chứng minh rằng PQ đi qua tâm nội tiếp hai tam giác ABC và DBC.

Chứng minh. a) Dễ thấy tam giác SAI và TDJ cân và có $\angle ASI = \angle DTJ$ nên hai tam giác đó đồng dạng. Lại dễ chứng minh tứ giác $AIJD$ nội tiếp nên $\angle MAI = \angle IAD = \angle DJN$ và



$\angle NDJ = \angle JDA = \angle AIM$. Từ đó hai tam giác MAI và NJD đồng dạng. Từ đó suy ra SMA và TNJ đồng dạng. Vậy $\angle ASM = \angle NTJ$ do đó SM và TN cắt nhau tại E trên đường tròn (O).
b) Gọi AB cắt CD tại G. GE cắt (O) tại F khác E. Ta thấy $GC.GD = GE.GF = GM.GQ$. Từ đó tứ giác $MQFE$ nội tiếp nên $\angle QFE = \angle AME = \angle MAS + \angle MSA = \angle MBS + \angle AFE = \angle SFA + \angle ASE = \angle EFS$. Từ đó S, Q, F thẳng hàng. Tương tự T, P, F thẳng hàng. Từ chứng minh trên SMA và TNJ đồng dạng nên tam giác GMN cân suy ra $GM = GN$. Lại có $GM.GQ = GN.GP$ nên $GP = GQ$ suy ra $PQ \parallel MN \parallel ST$. Từ đó đường tròn ngoại tiếp tam giác FPQ tiếp xúc (O). Vậy theo định lý Poncelet nếu PQ cắt DB, AC tại U, V thì đường tròn ngoại tiếp tam giác FUV cũng tiếp xúc (O) và tiếp xúc DB, AC. Từ đó theo định lý Sawayama và Thebaut thì PQ đi qua tâm nội tiếp hai tam giác ABC và DBC. □

Nhận xét. Đây là bài toán sử dụng hai bổ đề quan trọng là định lý Sawayama và Thebaut và định lý Poncelet. Chú ý rằng với định lý Sawayama và Thebaut thì hiểu một cách chặt chẽ phải phát biểu trên đường chéo của tứ giác nội tiếp, do đó việc sử dụng định lý Poncelet để đưa về đường tròn FUV tiếp xúc với CA, BD là cần thiết. Chúng tôi xin nhắc lại định lý Poncelet

Bài toán 15 (Định lý Poncelet). *Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn (K) tiếp xúc AB, CD tại M, N. Đường tròn (L) tiếp xúc với AC, BD tại P, Q. Chứng minh rằng nếu M, N, P, Q thẳng hàng thì $(K), (L)$ và (O) đồng trục.*

Chứng minh chi tiết và mở rộng định lý này xem trong [10]. Bài toán gốc có thể phát biểu gọn lại chỉ còn một ý như sau

Bài toán 16. *Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). Gọi I, J là tâm nội tiếp tam giác BAD, CAD. Đường thẳng IJ lần lượt cắt AB, CD tại M, N. Gọi đường tròn ngoại tiếp tam giác ABN cắt CD tại P khác N. Đường tròn ngoại tiếp tam giác CDM cắt AB tại Q khác M. Chứng minh rằng PQ đi qua tâm nội tiếp hai tam giác ABC và DBC.*

Đây là một trong những khai thác thú vị của định lý Sawayama và Thebaut. Khai thác này hoàn toàn có thể viết lại trên các đường chéo như sau

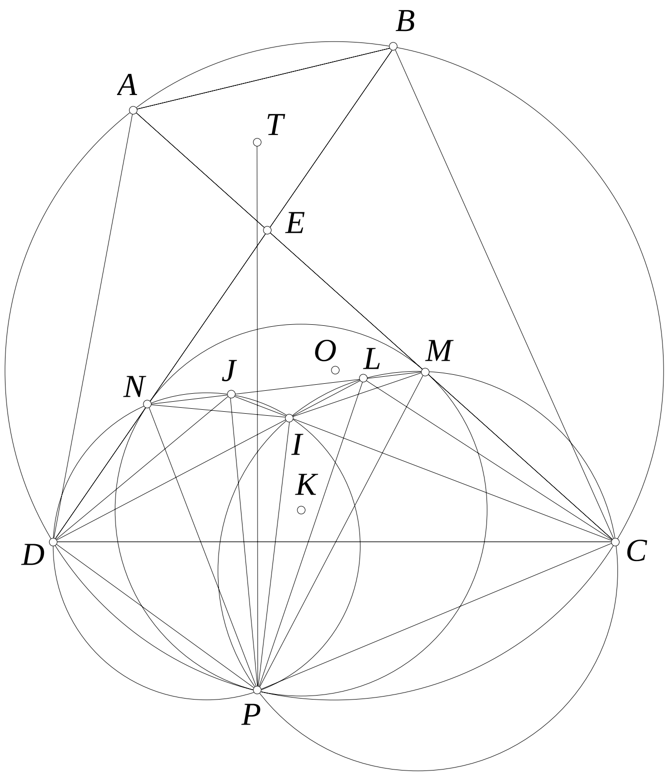
Bài toán 17. *Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). Gọi I, J là tâm nội tiếp tam giác BAD, CAD. Đường thẳng IJ lần lượt cắt AC, BD tại M, N. Gọi đường tròn ngoại tiếp tam giác ACN cắt BD tại P khác N. Đường tròn ngoại tiếp tam giác BDM cắt AC tại Q khác M. Chứng minh rằng PQ đi qua tâm bàng tiếp góc $\angle A$ và $\angle D$ của hai tam giác ABC và DBC.*

Bài toán có một mở rộng khác đơn giản nhưng thú vị như sau

Bài toán 18. *Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). Gọi S, T là trung điểm các cung nhỏ $\overset{\frown}{AB}, \overset{\frown}{CD}$. M, N lần lượt thuộc AB, CD. Gọi đường tròn ngoại tiếp tam giác ABN cắt CD tại P khác N. Đường tròn ngoại tiếp tam giác CDM cắt AB tại Q khác M. Chứng minh rằng SM và TN cắt nhau trên (O) khi và chỉ khi SQ và TP cắt nhau trên (O).*

Chúng ta sẽ chuyển sang một vấn đề tiếp theo, đây là một bài toán quan trọng liên quan tới nhiều bài toán khác, tham khảo [21,22,23]

Bài toán 19. *Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). Hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại E. Đường tròn (K) tiếp xúc với đoạn EC, ED và tiếp xúc trong (O) tại P. Chứng minh rằng phân giác $\angle CPD$ đi qua tâm nội tiếp tam giác ECD và phân giác $\angle APB$ đi qua tâm nội tiếp tam giác EAB.*



Chứng minh. Gọi (K) tiếp xúc đoạn EC, ED tại M, N. Gọi J, L là tâm nội tiếp tam giác ACD và BCD. Theo định lý Sawayama và Thebaut thì MN đi qua J, L. Hơn nữa các tứ giác $PCML$ và $PDNJ$ nội tiếp. Gọi đường tròn ngoại tiếp hai tứ giác này cắt nhau tại I khác P. Ta có $\angle DIP = \angle DNP = \angle NMP = \angle LCP$. Từ đó D, I, L thẳng hàng. Tương tự C, I, J thẳng hàng nên I là tâm nội tiếp tam giác ECD. Từ đó dễ có $\angle DPI = \angle INE = \angle IME = \angle CPI$

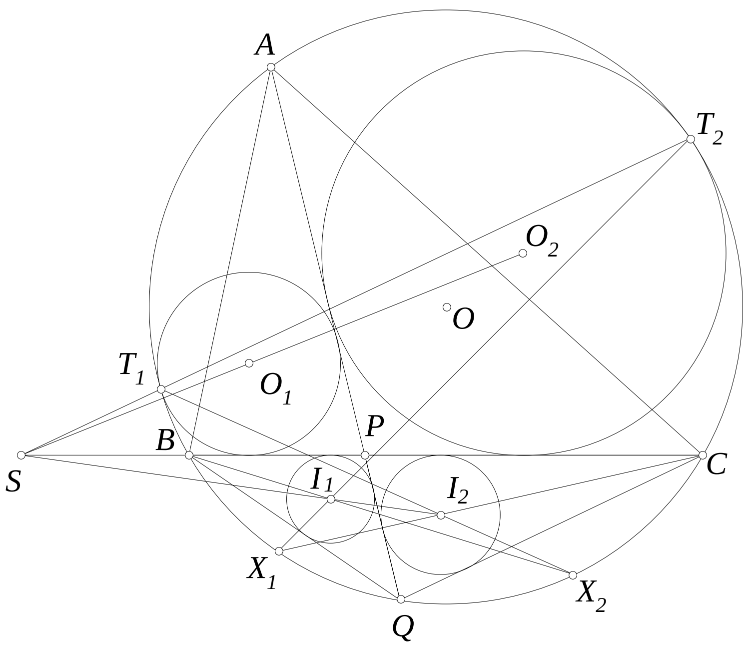
nên PI là phân giác $\angle CPD$. Xét tam giác EAB có đường tròn (O) qua A, B và (K) tiếp xúc EA, EB và tiếp xúc trong (O) tại P. Theo phần vừa chứng minh thì phân giác $\angle APB$ đi qua tâm nội tiếp tam giác EAB. $\square$

Nhận xét 2.2. *Bài toán có nhiều biến thể khác nhau ví dụ như sau*

Bài toán 20. *Cho tam giác ABC một đường tròn (K) qua B, C và cắt cạnh CA, AB. Đường tròn (L) tiếp xúc đoạn AB, AC và tiếp xúc ngoài (K) tại P. Chứng minh rằng phân giác $\angle BPC$ đi qua tâm nội tiếp tam giác ABC.*

Cách chứng minh các biến thể này các bạn có thể áp dụng một cách hoàn toàn tương tự cách chứng minh bài toán trên nhưng với các mở rộng của định lý Sawayama và Thebaut cho các tâm bàng tiếp và tiếp xúc ngoài. Bài toán trên dẫn tới một bài toán ứng dụng rất đẹp của định lý Sawayama và Thebaut đề nghị bởi, Vladimir Zajic tham khảo [11]

Bài toán 21. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). P là một điểm trên cạnh BC, AP cắt (O) tại Q khác A. Gọi (O_1) là đường tròn tiếp xúc trong với (O) và tiếp xúc với hai cạnh PA, PB. (O_2) là đường tròn tiếp xúc trong với (O) và tiếp xúc PC, PA. Gọi I_1, I_2 là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác PBQ, PCQ. Chứng minh rằng O_1O_2, I_1I_2, BC đồng quy.*



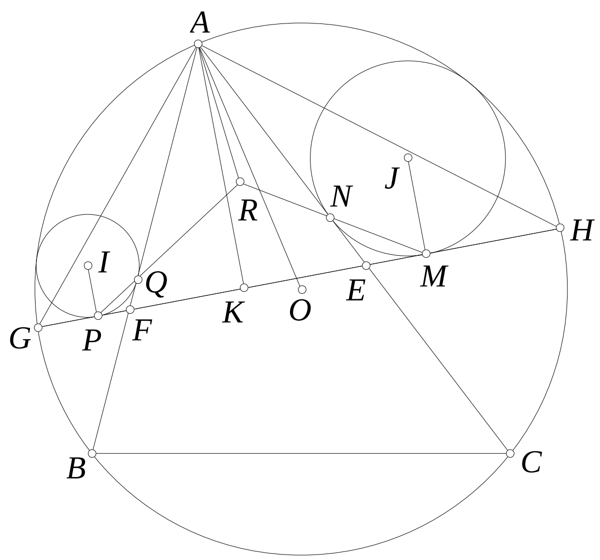
Chứng minh. Gọi $(O_1), (O_2)$ tiếp xúc (O) tại T_1, T_2. Theo chứng minh bài trước thì phân giác $\angle CT_1Q$ đi qua tâm I_2 là tâm nội tiếp tam giác PQC và đi qua X_2 là điểm chính giữa cung $\widehat{QC}$. Tương tự phân giác $\angle BT_2Q$ đi qua tâm I_1 là tâm nội tiếp tam giác PQB và đi qua X_1 là điểm chính giữa cung $\widehat{QB}$. Từ đó áp dụng Pascal cho sáu điểm $\begin{pmatrix} T_1 & B & X_1 \\ C & T_2 & X_2 \end{pmatrix}$ thu được BC cắt T_1T_2 tại S thuộc I_1I_2. Mặt khác dễ thấy S thuộc O_1O_2, nên ta có điều phải chứng minh. $\square$

Nhận xét. Sử dụng hàng điều hòa, ta cũng dễ chứng minh được O_1I_1, O_2I_2 và AP đồng quy. Bài toán được tác giả mở rộng hơn nữa, tham khảo [12]

Bài toán 22. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) với P, Q là hai điểm trên đoạn BC. AP, AQ cắt (O) tại M, N khác A. Gọi $(I_1), (I_2), (I_3), (I_4)$ là đường tròn nội tiếp các tam giác PAB, QAC, QAB, PAC. Gọi $(J_1), (J_2), (J_3), (J_4)$ là các đường tròn lần lượt tiếp xúc với các đoạn $PB, PM; QC, QN; QB, QN; PC, PM$ và tiếp xúc trong (O). Chứng minh rằng $I_1I_2, I_3I_4, J_1J_2, J_3J_4$ và BC đồng quy.*

Lời giải chi tiết bài trên các bạn có thể tham khảo [12]. Bài toán sau tham khảo trong [28]

Bài toán 23. *Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn (I) tiếp xúc với cung nhỏ AB và tiếp xúc với đoạn AB tại Q. Đường tròn (J) tiếp xúc với cung nhỏ AC và tiếp xúc với đoạn AC tại N. Tiếp tuyến chung ngoài không cắt đoạn AQ, AN của (I) và (J) tiếp xúc $(I), (J)$ lần lượt tại M, P. Chứng minh rằng MN, PQ cắt nhau trên phân giác $\angle BAC$ khi và chỉ khi $MP \parallel BC$.*



Chứng minh. Gọi MP cắt (O) tại G, H và AK là đường cao của tam giác AGH. Gọi MN cắt PQ tại R. Theo định lý định lý Sawayama và Thébault thì MN, PQ cùng đi qua tâm nội tiếp của tam giác AGH nên R là tâm nội tiếp của tam giác AGH. Từ đó AR là phân giác $\angle GAH$ hay cũng là phân giác $\angle OAK$ do AO, AK đẳng giác trong $\angle GAH$. Từ đó AR là phân giác $\angle BAC$ khi và chỉ khi AO, AK đẳng giác trong $\angle BAC$ hay AK là đường cao của tam giác AB. Từ đó R nằm trên phân giác $\angle BAC$ khi và chỉ khi $MP \parallel BC$. □

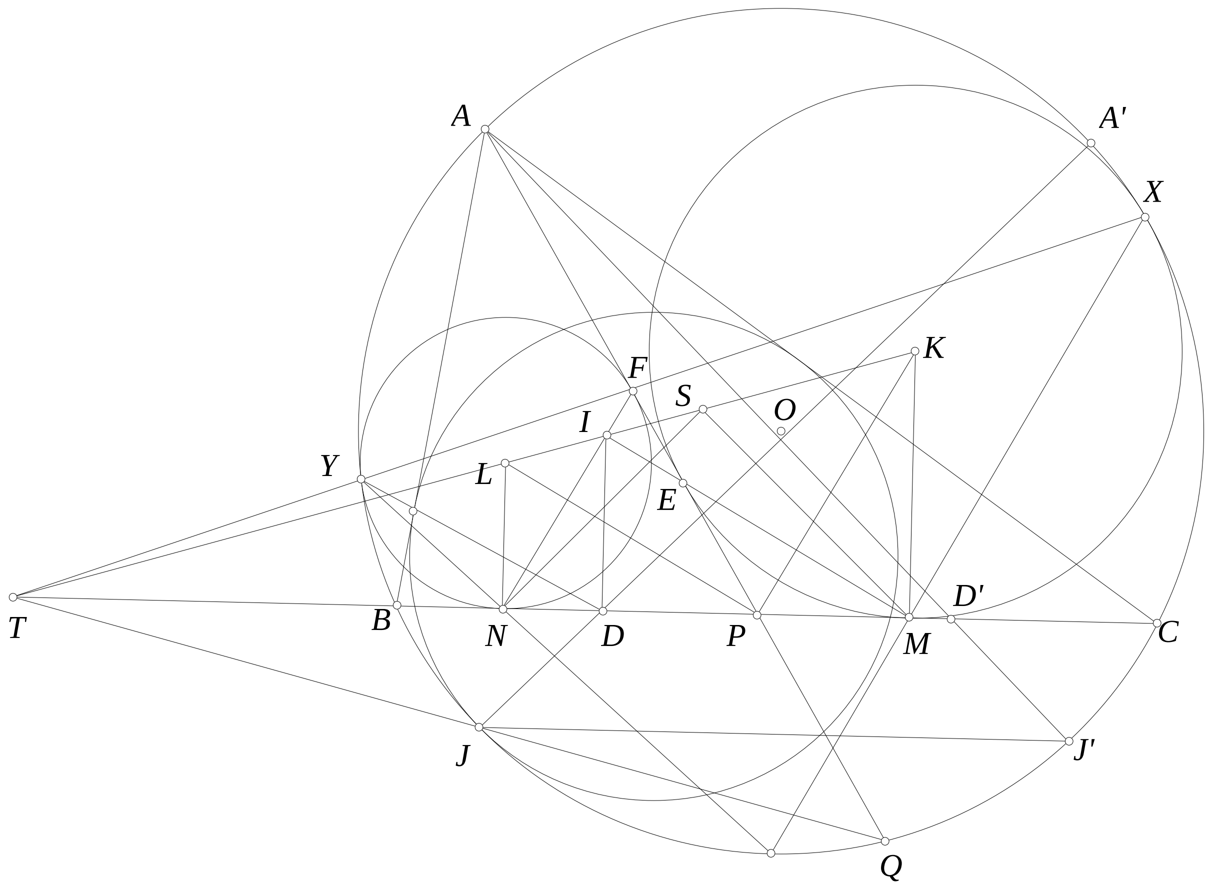
Qua một số ví dụ trên các bạn phần nào thấy được các ứng dụng quan trọng của định lý Sawayama và Thebaut trong các bài toán thi Olympic.

3. Một số bài toán liên quan

Phần này tôi xin đề nghị và sưu tập lại một số bài toán hay liên quan đến nội dung này có dẫn link tham khảo, các bạn hãy tự vẽ hình minh họa
Bài toán sau tham khảo [13]

Bài toán 24. *Cho tam giác ABC nội tiếp (O) có P di chuyển trên cạnh BC. Đường tròn (K) tiếp xúc PC tại M tiếp xúc PA và tiếp xúc trong (O). Đường tròn (L) tiếp xúc PB tại N tiếp xúc PA và tiếp xúc trong (O). AP cắt (O) tại Q khác A. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác QMN luôn đi qua một điểm cố định.*

Lời giải sau sử dụng ý tưởng của Lym trong [13]

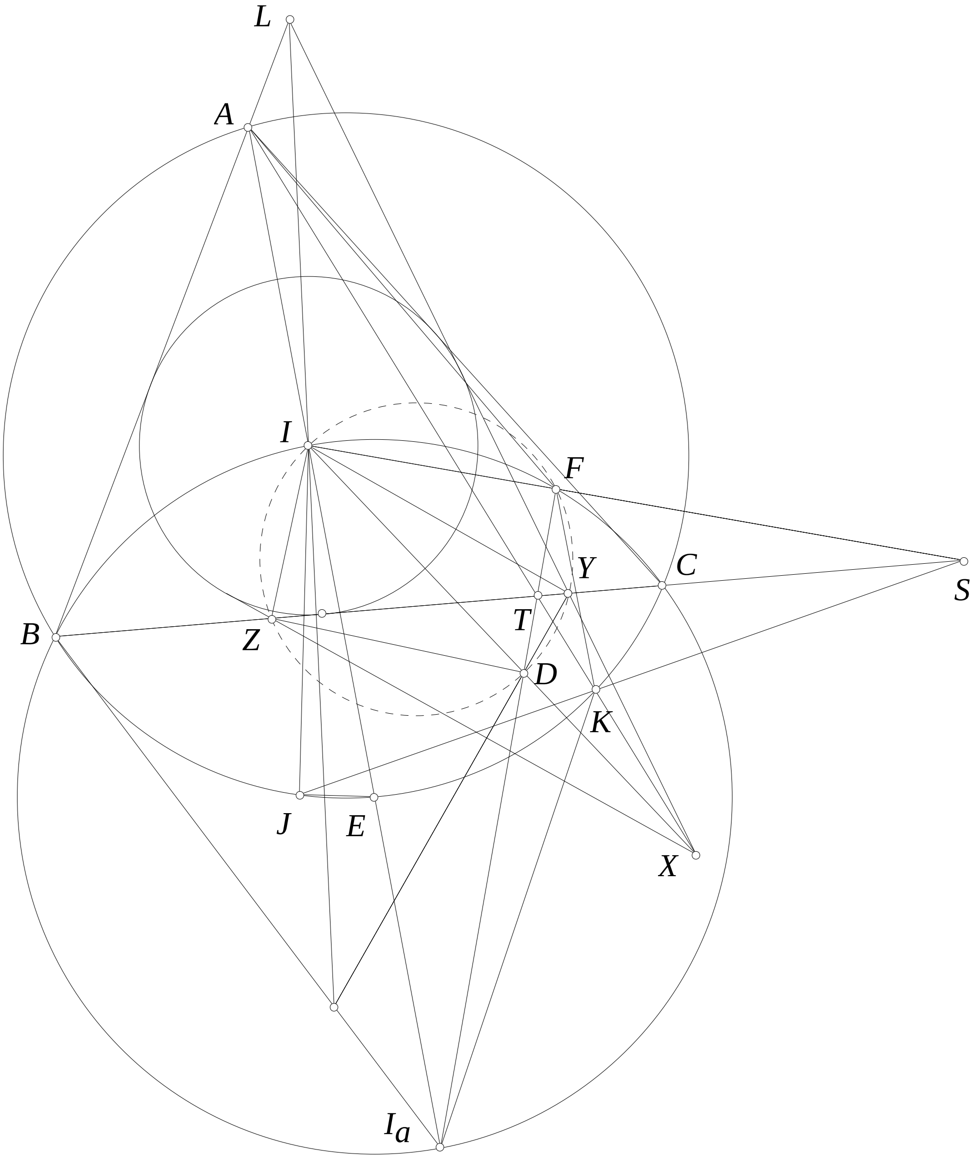


Lời giải thứ nhất. Gọi X, Y là tiếp điểm của (K) và (L) với (O). E, F là tiếp điểm của (K) và (L) với AP. (I) nội tiếp tam giác ABC và tiếp xúc BC tại D. Gọi đường tròn A-Mixtilinear của tam giác ABC tiếp xúc (O) tại J, D' là tiếp điểm của đường tròn bàng tiếp $\angle A$ với BC, J' là giao điểm của AD' với (O). Theo tính chất quen thuộc của đường tròn Mixtilinear thì $JJ' \parallel BC$, vì vậy theo tính chất đối xứng thì JD đi qua A' đối xứng A qua trung trực BC, nên $PDJQ$ nội tiếp. Mặt khác vì YN, XM cùng đi qua điểm chính giữa cung $\widehat{BC}$ không chứa A nên $YNMX$ nội tiếp.Hạ $PS \perp LK$ tại S, áp dụng định lí Sawayama và Thébault ta có K, L, I thẳng hàng và $\angle NIM = \angle NSM = 90°$. Theo tính chất của hai đường tròn cùng tiếp xúc đường tròn thứ ba, ta có BC, XY, KL đồng quy tại T, do đó $TP.TD = TS.TI = TN.TM = TY.TX = TB.TC$ suy ra $PYXD$ nội tiếp. Kết hợp với $XYQJ, PDJQ$ nội tiếp, ta chứng minh được QJ đi qua T, thu được $TQ.TJ = TY.TX = TN.TM$ suy ra (QMN) đi qua J cố định. □

Ý tưởng lời giải thứ nhất khá trực tiếp và tự nhiên, tuy nhiên với lời giải thứ hai ta nhận thấy bài toán thực chất chỉ là một trường hợp đặc biệt của một kết quả rất đẹp được đề xuất bởi Vladimir Zajic, tham khảo [26]

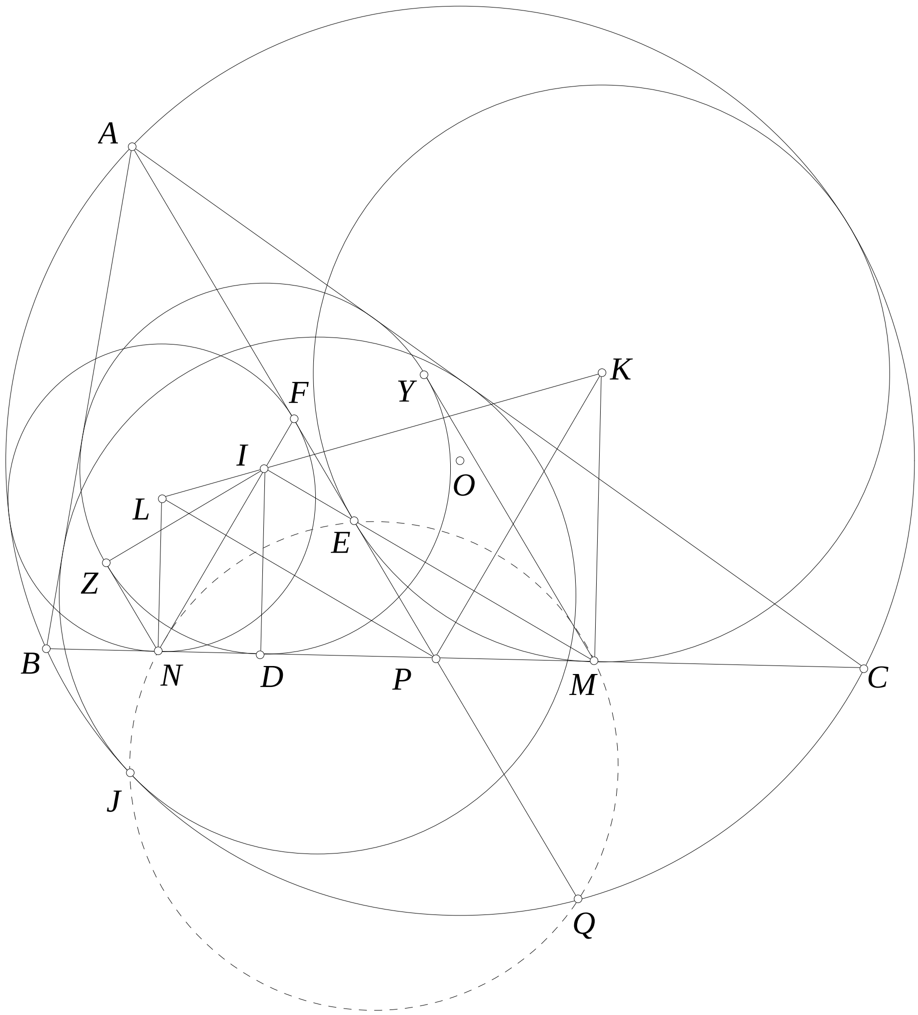
Bổ đề 14. *Gọi K là một điểm bất kì trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, X bất kì thuộc đường thẳng AK. Từ X kẻ hai tiếp tuyến tới đường tròn nội tiếp (I) của tam giác ABC, cắt BC lần lượt tại Y, Z. Khi đó (KYZ) đi qua tiếp điểm J của đường tròn A-Mixtilinear của tam giác ABC với (O).*

Lời giải sau dựa trên ý tưởng của Jean-Louis tham khảo [27]



Chứng minh. Giả sử K nằm trên cung $\widehat{BC}$ không chứa A của (O). Gọi I_a là tâm bàng tiếp $\angle A$ của tam giác ABC, E là điểm chính giữa $\widehat{BC}$ không chứa A của (O), T là giao điểm của AX và BC. I_aT giao (BIC) tại F, IX giao I_aF tại D. Từ $TK.TA = TB.TC = TF.I_aT$ suy ra A, F, K, I_a cùng thuộc cùng một đường tròn. Kết hợp với tính chất quen thuộc của đường tròn Mixtilinear $\angle IJE = 90^\circ$, ta có $\angle IJK + \angle IFK = \angle IJE - \angle EJK + \angle IFI_a + \angle KFI_a = 90^\circ - \angle EAK + 90^\circ + \angle KAI_a = 180^\circ$ nên $JKFI$ nội tiếp. Mà $IFCB, BCKJ$ nội tiếp, ta thu được KJ, BC, IF đồng quy tại S. Mặt khác, gọi XY cắt AB tại L, áp dụng định lí Desargues cho tam giác LYB và tam giác IDI_a với LB giao II_a tại A, LY giao ID tại X, BY giao I_aD

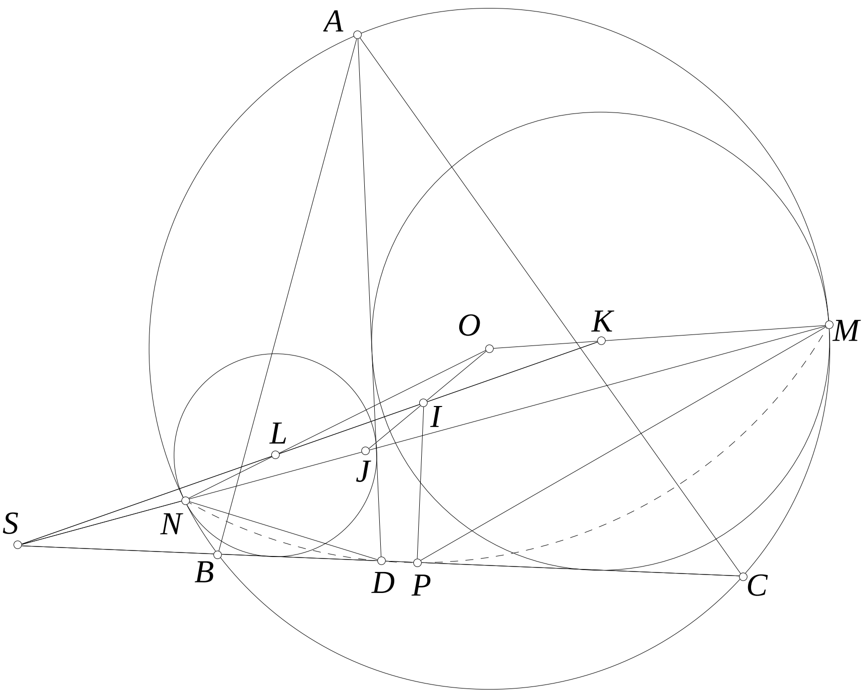
tại T, vì A, X, T thẳng hàng nên LI, BI_a, YD đồng quy tại tâm bàng tiếp $\angle L$ của tam giác LBY. Do đó $\angle IYD = 90°$. Chứng minh tương tự ta có $\angle IZD = 90°$, dễ thấy I, F, Y, Z, D thuộc cùng một đường tròn. Theo tính chất phương tích thì $SY.SZ = SI.SF = SK.SJ$, vậy Z, Y, K, J thuộc cùng một đường tròn. □



Lời giải thứ hai. Gọi D là tiếp điểm của đường tròn nội tiếp (I) với BC. Kẻ tiếp tuyến NZ, MY tới (I). Vì tam giác PNF cân nên dễ thấy $\angle ZIN + \angle NFP = \angle NID + \angle PNF = 90°$, suy ra NZ song song với AP. Tương tự ta có $MY \parallel AP \parallel NZ$ do đó có thể coi giao điểm của MY và NZ nằm trên AP. Áp dụng bổ đề trên thì (QMN) đi qua điểm cố định là tiếp điểm đường tròn A-Mixtilinear của tam giác ABC với (O). □

Bài toán sau tham khảo [14]

Bài toán 25. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). P là một điểm thuộc đoạn BC. Đường tròn (K) tiếp xúc PA, PC và tiếp xúc trong (O) tại M. Đường tròn (L) tiếp xúc PA, PB và tiếp xúc trong (O) tại N.*
a) Chứng minh rằng MN luôn đi qua một điểm cố định khi P thay đổi.
b) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác PMN luôn đi qua một điểm cố định khi P thay đổi.



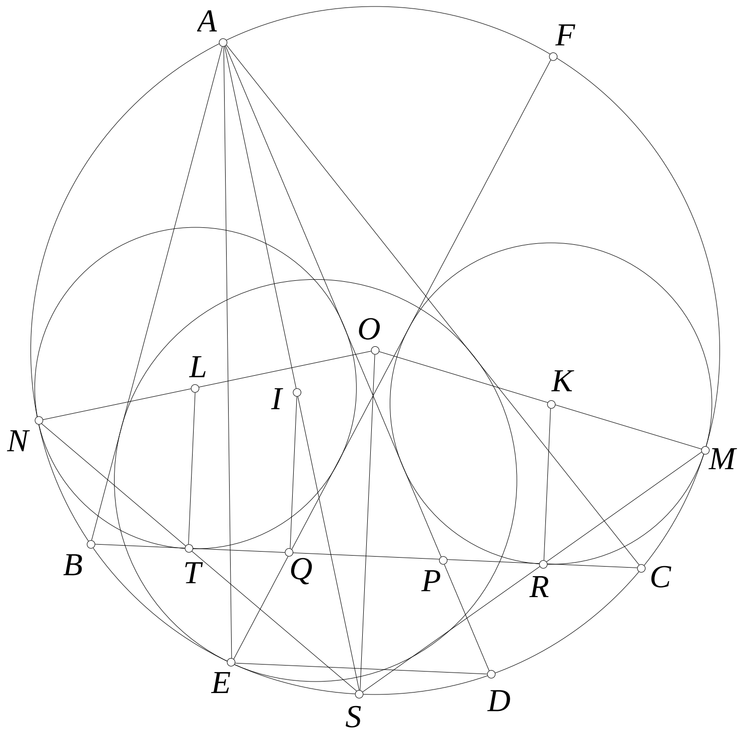
Chứng minh. a) Áp dụng định lí Sawayama và Thébault ta có KL đi qua tâm nội tiếp I của tam giác ABC. Theo tính chất của hai đường tròn cùng tiếp xúc với đường tròn thứ ba, dễ thấy KL, BC, MN đồng quy tại S. Gọi OI cắt MN tại J. Áp dụng định lí Menelaus cho tam giác IOL cát tuyến NJS ta có $\frac{\overline{JI}}{\overline{JO}} = \frac{\overline{SI}}{\overline{SL}} \cdot \frac{\overline{NL}}{\overline{NO}} = \frac{R_{(I)}}{R_{(L)}} \cdot \frac{R_{(L)}}{R_{(O)}} = \frac{R_{(I)}}{R_{(O)}}$. Vậy MN luôn đi qua J cố định với J là đẳng giác của điểm Nagel và cũng là tâm vị tự ngoài của (O) và (I).
b) Gọi D là hình chiếu của I lên BC, từ kết quả cách chứng minh thứ nhất của **Bài toán 23** ta có $PDNM$ nội tiếp, suy ra (PNM) đi qua D cố định. □

Bài toán sau tham khảo [15,16]

Bài toán 26 (Bulgaria 2010). *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). P là một điểm thuộc đoạn BC. Đường tròn (K) tiếp xúc PA, PC và tiếp xúc trong (O). Đường tròn (L) tiếp xúc PA, PB và tiếp xúc trong (O). Chứng minh rằng bán kính của (K) và (L) bằng nhau khi và chỉ khi P là tiếp điểm của đường tròn bàng tiếp góc A với BC.*

Chứng minh. Gọi I là tâm nội tiếp tam giác ABC, AP giao (O) tại D, S là điểm chính giữa cung $\widehat{BC}$ không chứa A của (O). Hạ $IQ \perp BC$ tại Q. $(K), (L)$ tiếp xúc BC tại R, T và tiếp xúc O tại M, N, dễ thấy S, T, N thẳng hàng, S, R, M thẳng hàng. Tiếp tuyến chung trong khác AP của (K) và (L) cắt (O) tại E, F sao cho E, D cùng phía với BC. Theo kết quả **Bài toán 11** dễ thấy AE, AP là hai đường đẳng giác. Ta có P là tiếp điểm của đường tròn bàng tiếp góc A với BC khi và chỉ khi E là tiếp điểm đường tròn A-Mixtilinear của tam giác ABC với (O) hay tương đương với $TRDE$ nội tiếp. Vì $DE \parallel BC$ nên điều này tương đương với T đối xứng R qua trung điểm BC. Chú ý đẳng thức $ST.SN = SR.SM$ nên giả thiết trên tương đương với $\frac{ST}{SN} = \frac{SR}{SM}$ hay $\frac{OL}{ON} = \frac{OK}{OM}$. Điều này xảy ra khi và chỉ khi (K) và (L) có cùng bán kính. □

Bài toán sau tham khảo [17]



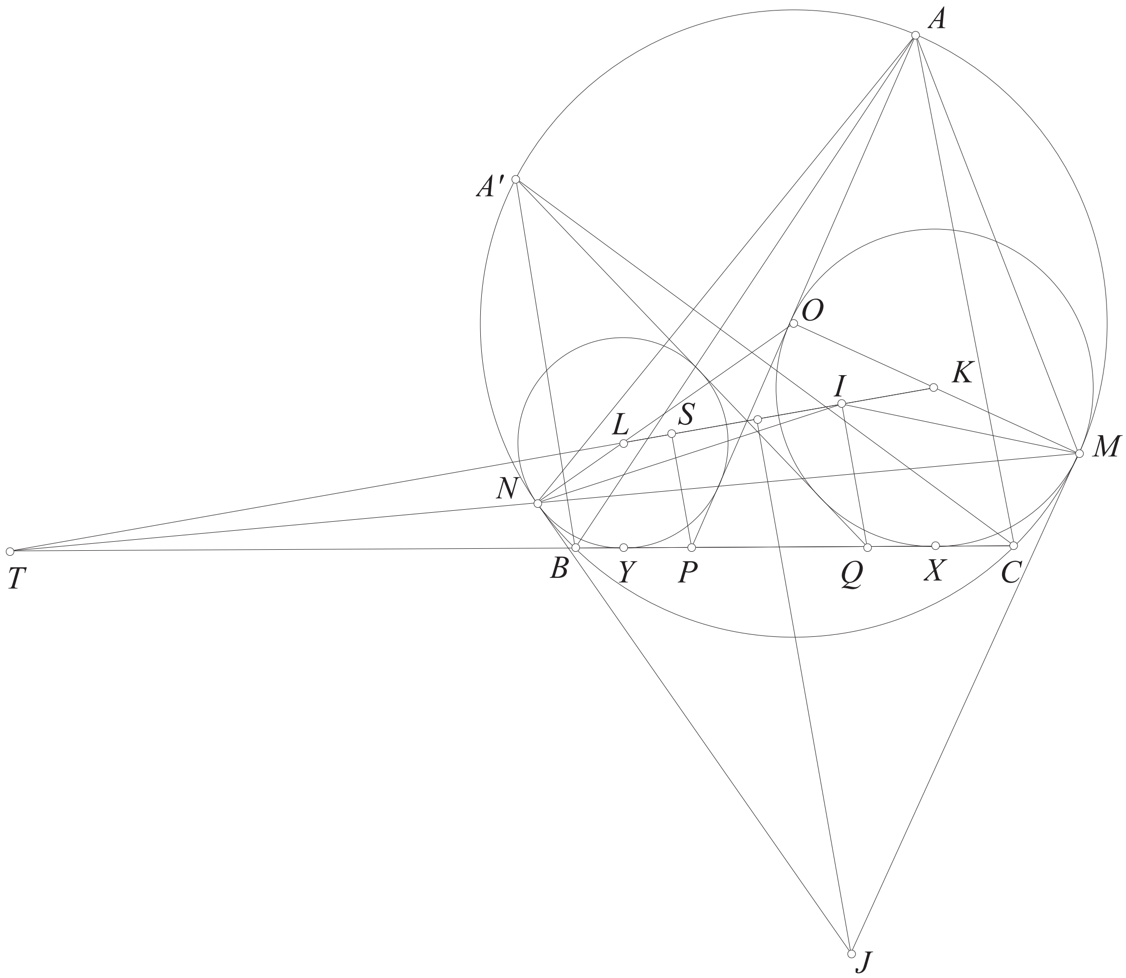
Bài toán 27. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Hai đường tròn luôn trực giao đi qua A và I cắt (O) tại M, N khác A. Chứng minh rằng đường thẳng MN luôn đi qua điểm cố định khi hai đường tròn đó thay đổi.*

Bổ đề 15. *Cho tam giác ABC với đường tròn ngoại tiếp (O), tâm nội tiếp I. P là một điểm thuộc đoạn BC. Đường tròn (K) tiếp xúc PA, PC và tiếp xúc trong (O) tại M. Đường tròn (L) tiếp xúc PA, PB và tiếp xúc trong (O) tại N. Khi đó (AIN) trực giao với (AIM).*

Chứng minh bổ đề. Gọi $(K), (L)$ tiếp xúc BC tại X, Y. Kẻ tiếp tuyến chung trong khác AP của (K) và (L) cắt (O) và BC lần lượt tại A', Q sao cho A, A' cùng phía đối với BC. Kẻ $PS \perp KL$, theo cách chứng minh thứ nhất của **Bài toán 24** ta có LK, NM và BC đồng quy tại T thì $TS.TI = TN.TM = TB.TC$ nên đường tròn ngoại tiếp tam giác BIC đi qua S. Mặt khác gọi S' là tâm nội tiếp tam giác $A'BC$ thì S' thuộc (BIC) và theo định lí Thébault, S' cũng thuộc KL, suy ra S' trùng S. Vì $PS \perp KL$ nên $IQ \perp KL$. Gọi J là giao điểm hai tiếp tuyến của (O) tại M, N. Dễ thấy J thuộc trục đẳng phương của (K) và (L), kết hợp với dữ kiện $IQ \parallel SP$ và $YP = QX$ suy ra đường thẳng qua J vuông góc KL chia đôi các đoạn thẳng XY, QP và IS. Mà $TS.TI = TB.TC = TN.TM$ suy ra I, S, M, N thuộc một đường tròn, nên J là tâm $(NSIM)$. Từ đó $\angle AMI + \angle ANI = \angle MIN - \angle MAN = 180° - \frac{1}{2}\angle MJN - \angle JMN = 90°$, suy ra (ANI) trực giao với (AMI). □

Chứng minh. Áp dụng bổ đề trên dễ thấy luôn tồn tại (K) và (L) cùng đồng thời tiếp xúc BC và (O) sao cho một tiếp tuyến chung trong của chúng đi qua A. Áp dụng kết quả bài toán 25 ta có MN luôn đi qua tâm vị tự ngoài của (I) và (O) cố định. □

Bài toán sau tham khảo [18]



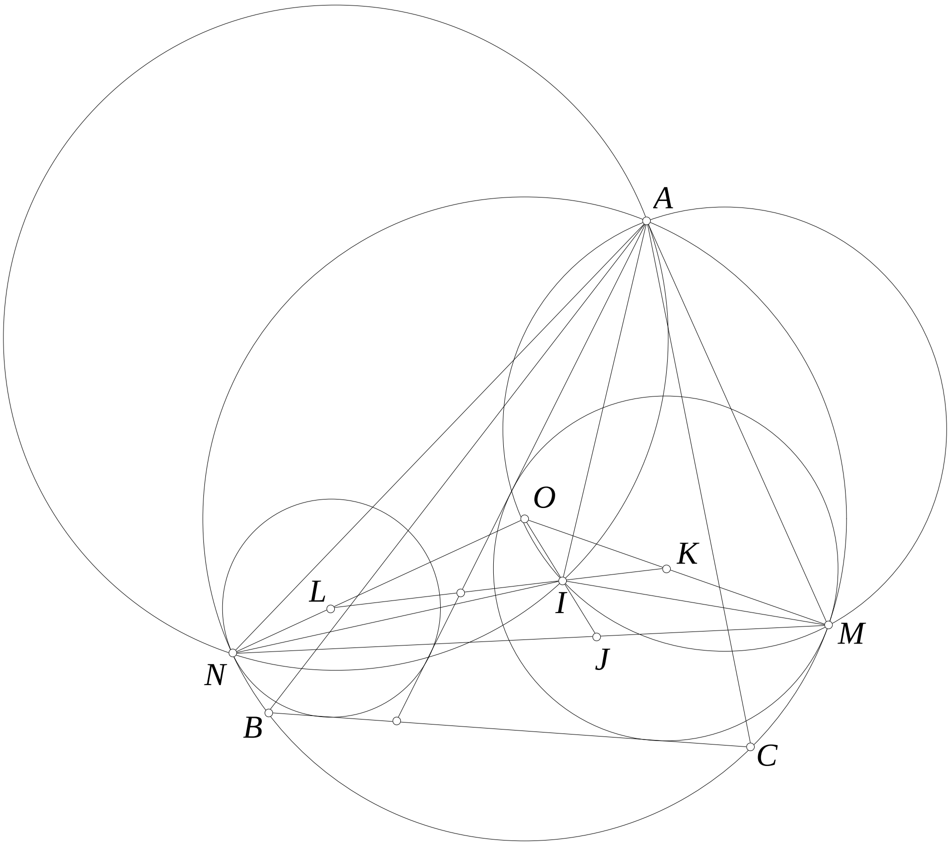
Bài toán 28. *Cho lục giác lưỡng tiếp $ABCDEF$ với tâm nội tiếp I và tâm ngoại tiếp O. khi đó các đường chép AD, BE, CF đồng quy tại G. Gọi J, K, L, M, N, P là tâm nội tiếp các tam giác $GAB, GBC, GCD, GDE, GEF, GFA$. Đường tròn tiếp xúc đoạn GA, GB và tiếp xúc trong (O) tại X. Tương tự có các điểm Y, Z, T, U, V. Chứng minh rằng bẩy đường thẳng XM, YN, ZP, TJ, UK, VL và OI đồng quy.*

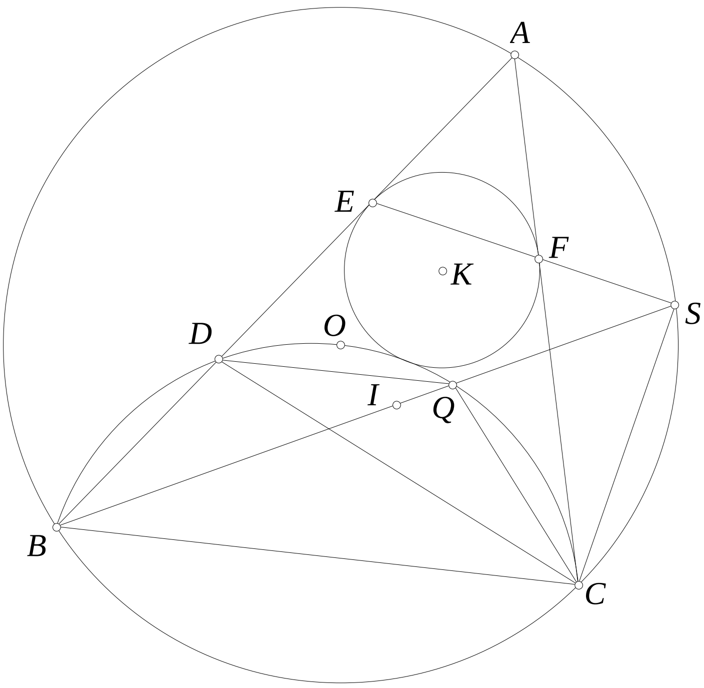
Bài toán sau tham khảo [19]

Bài toán 29. *Cho tam giác ABC có tâm ngoại tiếp O và tâm nội tiếp I. Đường tròn (K) tiếp xúc AB, AC tại E, F và tiếp xúc ngoài đường tròn ngoại tiếp tam giác OBC. Chứng minh rằng EF chia đôi AI.*

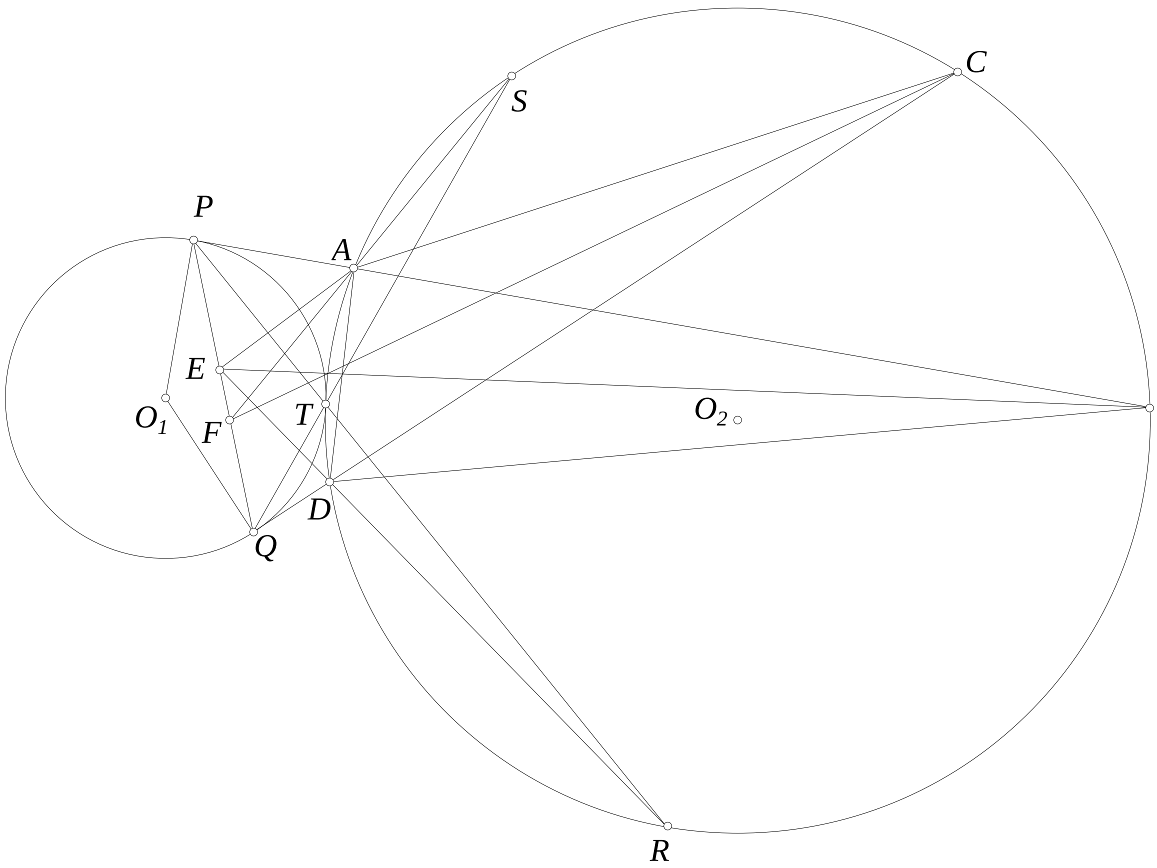
Chứng minh. Dễ thấy (K) được xác định duy nhất nên, giả sử EF chia đôi AI. Ta sẽ chứng minh (K) tiếp xúc (BOC). Gọi D là giao điểm thứ hai của (BOC) với AB, S là điểm chính giữa cung $\widehat{AC}$ không chứa B của (O). SB cắt (BOC) tại Q thì $\angle BQC = \angle BOC = 2\angle BSC$ nên $QS = QC = QD$, suy ra S là tâm bàng tiếp $\angle B$ của tam giác BDC. Dễ thấy EF đi qua S. Do đó theo dạng đảo của bổ đề Sawayama mở rộng cho tâm bàng tiếp thì (K) tiếp xúc (BOC). $\square$

Bài toán sau tham khảo [20]





Bài toán 30. *Cho đường tròn (O_1) tiếp xúc ngoài (O_2) tại T. PQ là một dây cung của (O_1). PT, QT cắt (O_2) tại R, S. Tiếp tuyến qua P của (O_1) cắt (O_2) tại A, B sao cho A nằm giữa P, B. Tiếp tuyến qua Q của (O_1) cắt (O_2) tại D, C sao cho D nằm giữa Q, C. SA giao PQ tại F, RD giao PQ tại E. Chứng minh rằng $\angle EAF = \frac{1}{2}\angle BAC$.*



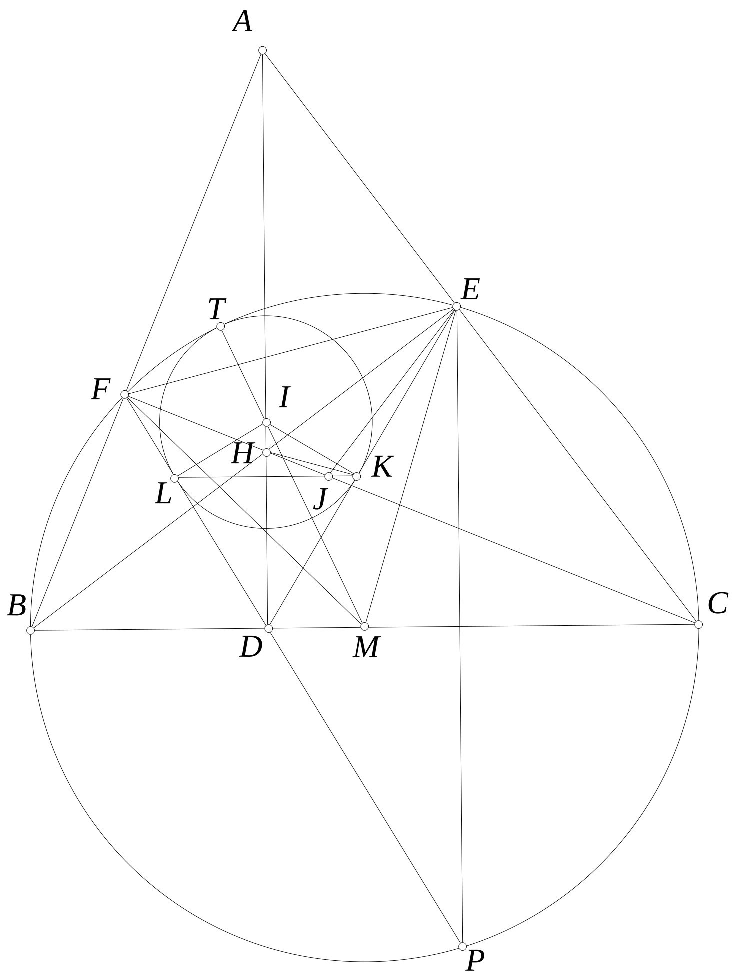
Chứng minh. Dễ thấy S là điểm chính giữa cung $\widehat{CD}$ không chứa B của (O_2). Mà theo bổ đề Sawayama mở rộng cho tâm bàng tiếp thì PQ đi qua tâm bàng tiếp $\angle C$ của tam giác CAD, suy ra F là tâm bàng tiếp tam giác CAD. Tương tự ta có E là tâm bàng tiếp $\angle B$ của tam giác BAD. Từ đó $\angle EAF = \angle DAE - \angle DAF = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle DAB - 90^\circ + \frac{1}{2}\angle DAC = \frac{1}{2}\angle BAC$. □

Bài toán sau tham khảo [24]

Bài toán 31. *Cho tam giác ABC với trực tâm H, và đường cao AD, BE. K thuộc DE sao cho $DK = DH$. Đường thẳng qua K vuông góc DE cắt AD tại I. M là trung điểm BC. Chứng minh rằng $BM = MI + IK$.*

Lời giải của Luis González. Kẻ đường cao CF của tam giác ABC, ta có H là tâm nội tiếp tam giác DEF. Đường tròn tâm I bán kính IK tiếp xúc DF tại L, dễ thấy $LK \parallel BC$. Gọi J là giao điểm của KL và FC, ta có $\angle FJL = \angle FCB = \angle FEB = \angle HEK$ suy ra $JHEK$ nội tiếp. Mặt khác gọi P là giao điểm của FD với đường tròn đường kính BC, chú ý rằng $FEMD$ nội tiếp và tam giác DHK cân, ta có $\angle FJE = \angle HKE = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle HDK = 90^\circ + \frac{1}{4}\angle FME = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle FPE$, vì vậy J là tâm nội tiếp tam giác PFE. Áp dụng dạng đảo của bổ đề Sawayama cho tam giác PFE, vì LK đi qua J nên (I) tiếp xúc (M) tại T. Do đó $MB = MT = MI + IT = MI + IK$. □

Bài toán sau tham khảo [25]

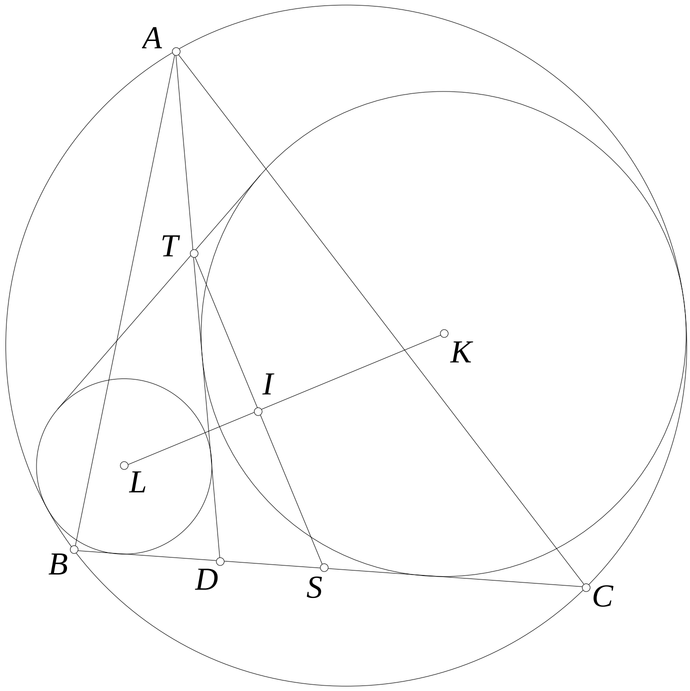


Bài toán 32. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). D là điểm trên đoạn BC. Đường tròn (K) tiếp xúc DA, DC và tiếp xúc trong (O). Đường tròn (L) tiếp xúc DA, DB và tiếp xúc trong (O). Tiếp tuyến chung trong của (K) và (L) khác AD cắt BC tại S. Tiếp tuyến chung ngoài của (K) và (L) khác BC cắt AD tại T. Chứng minh rằng ST đi qua tâm nội tiếp tam giác ABC.*

Gợi ý giải. Gọi I là tâm nội tiếp tam giác ABC, áp dụng định lí Thébault ta có L, K, I thẳng hàng. Theo cách chứng minh **Bổ đề 27.1** thì $SI \perp KL$, mà $ST \perp KL$ do đó S, I, T thẳng hàng. □

Lời kết và cảm ơn

Bài viết này mang một tính chất là hệ thống lại, tập hợp và giới thiệu các bài toán liên quan tới định lý Sawayama và Thébault trong các kỳ thi Olympic nên các tài liệu tham khảo được chúng tôi ghi rất kỹ. Chúng tôi muốn nói lời cảm ơn tới bạn **Nguyễn Tiến Dũng** sinh viên K50 Đại học Ngoại thương đã giúp chúng tôi đọc lại bản thảo và đưa ra các nhận xét, góp ý giá trị.



Tài liệu tham khảo

[1] Nguyễn Thị Hường, Lương Ánh Nguyệt, Lương Thị Thanh Mai, Đào Thị Quỳnh Nga. Định lý Sawayama và Thébault
http://analgeomatica.blogspot.com/2014/02/inh-ly-sawayama-va-thebault.html

[2] Forum Geometricorum, Sawayama and Thebault's theorem, Jean-Louis Ayme
http://forumgeom.fau.edu/FG2003volume3/FG200325.pdf

[3] Sawayama Thebault's Theorem
http://www.cut-the-knot.org/triangle/SawayamaTheBault.pdf

[4] Xung quanh một bài toán hình học trong kỳ thi chọn đội tuyển Việt Nam năm 2014
http://analgeomatica.blogspot.com/2014/03/xung-quanh-mot-bai-toan-hinh-hoc-trong.html

[5] Parallel tangent
http://artofproblemsolving.com/community/c6h15945

[6] Metric relation describing the position of the incenter
http://artofproblemsolving.com/community/c6h88823

[7] circles and circles
http://artofproblemsolving.com/community/c6h118385

[8] b+c=2a
http://artofproblemsolving.com/community/c6h210518

[9] Hai bài hình học thi Olympic chuyên KHTN 2015
http://analgeomatica.blogspot.com/2015/05/hai-bai-hinh-hoc-thi-olympic-chuyen.html

[10] Topic 3 circles with common tangency point
http://www.artofproblemsolving.com/community/q1h474157p4809875

[11] Ordinary and Thebault incircles.
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h244007p1341565

[12] Five concurrent lines
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h485516p2720041

[13] From mixtilinear incircles to the Thebault circles
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h213098p1176147

[14] Maybe Thebault have ovelooked
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h570686p3635527

[15] Prove that M = D - [Bulgaria NMO 2010]
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h349730

[16] On a particular case of Thebault's theorem
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h201858

[17] Exsimilar center
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h617532p3683327

[18] Seven concurrent lines
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h623162p3729318

[19] middle
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h517026p2914609

[20] A little hard for me
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h221652

[21] Concyclic points with triangle incenter
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h41667

[22] incenter of triangle
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h407366

[23] Fairly difficult
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h6086

[24] Prove that
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h503957p2840426

[25] Again with Thebault's circles
http://artofproblemsolving.com/community/q2h1086479p4806266

[26] Cevian and mixtilinear incircle
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h209898p1156398

[27] A new mixtilinear incircle adventure III
http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/vol4.html

[28] Mỗi tuần một bài toán: Tuần 2 tháng 6 năm 2016
http://analgeomatica.blogspot.com/2016/06/moi-tuan-mot-bai-toan-tuan-2-thang-6.html

VỀ BÀI TOÁN TAM GIÁC 80-80-20

Lê Phúc Lữ

(Thành phố Hồ Chí Minh)

Ở cấp THCS, các bạn học sinh yêu Toán đều đã quen thuộc và cũng khá sợ khi gặp bài toán tính góc. Hầu hết các bài như thế đều đòi hỏi phải kẻ thêm đường phụ, điểm phụ mới xử lý được.

Trong các bài như thế, có lẽ bài toán sau là nổi tiếng và cũng phổ biến nhất:

Cho tam giác ABC có góc A, B, C lần lượt là $20°, 80°, 80°$. Trên cạnh AC, AB, lần lượt lấy các điểm D, E sao cho

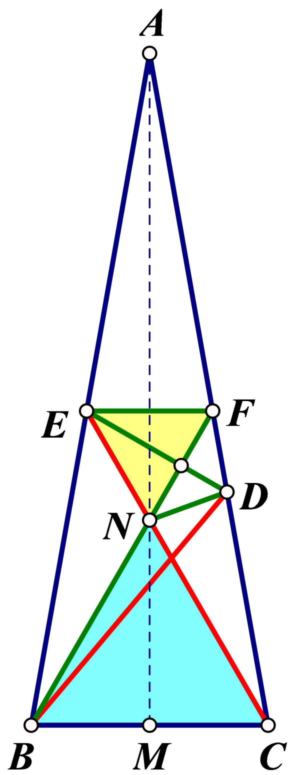
$$\angle BCE = 60^\circ, \angle CBD = 50^\circ.$$

Tính số đo góc $\angle CED$.

Bài toán này được biết đến lần đầu tiên vào năm 1909 do nhà Toán học Langland của Mỹ giới thiệu. Dưới đây chúng tôi sẽ giới thiệu một số cách chứng minh cho bài toán cùng một số vấn đề liên quan.

Các lời giải chúng tôi có tham khảo tại trang web:
`www.cut-the-knot.org/triangle/80-80-20/Classical1.shtml`

Cách 1. (đây là cách phổ biến nhất)



Qua E, dựng đường thẳng song song với BC cắt AC tại F. Gọi N là giao điểm của BF, CE. Ta có tam giác BCN cân tại N có $\angle BCN = 60^\circ$ nên là tam giác đều. Từ đó suy ra $\angle ENF = \angle BNC = 60^\circ$ nên tam giác ENF cũng đều.

Do đó, ta có $EF = EN$.

Tam giác BCD có $\angle BCD = 80^\circ, \angle CBD = 50^\circ$ nên ta tính được $\angle BDC = 50^\circ$ hay tam giác BCD cân tại C. Do đó, $CD = CB = CN$ hay tam giác CND cân tại C. Từ đó, ta cũng có $\angle CND = \angle CDN = 80^\circ$, suy ra

$$\angle DNF = 180^\circ - (\angle ENF + \angle CND) = 40^\circ$$

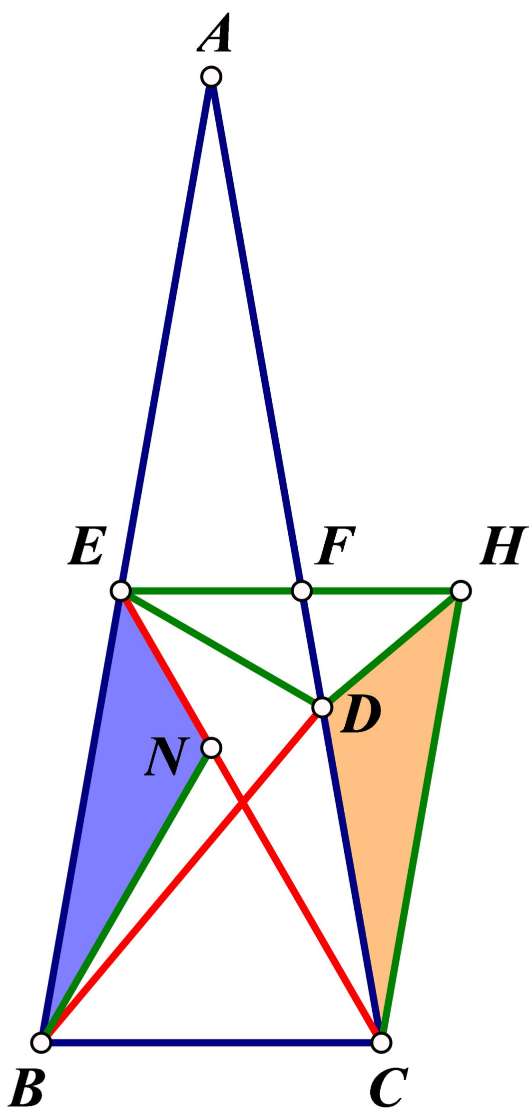
Suy ra $\angle DFN = \angle CDN - \angle DNF = 40^\circ$ hay tam giác DNF cân tại F.

Do đó, ta có $DF = DN$.

Suy ra DE là trung trực của NF hay ED là phân giác của $\angle NFE$.

Vậy ta được $\angle CED = \frac{1}{2}\angle CEF = 30^\circ$.

Cách 2.



Dựng hình bình hành $BCHE$, khi đó, ta có $BE = CH$. Trên đoạn CE, lấy điểm N sao cho tam giác BCN đều thì $BC = CN = BN$.

Chú ý rằng tam giác BCD cân tại C nên $BC = CD$. Do đó, $BN = CD$. Ta có

$$\angle NBE = \angle CBE - \angle CBN = 80^\circ - 60^\circ = 20^\circ.$$

Do $CH \parallel AB$ nên ta cũng có $\angle HCF = 20^\circ$.

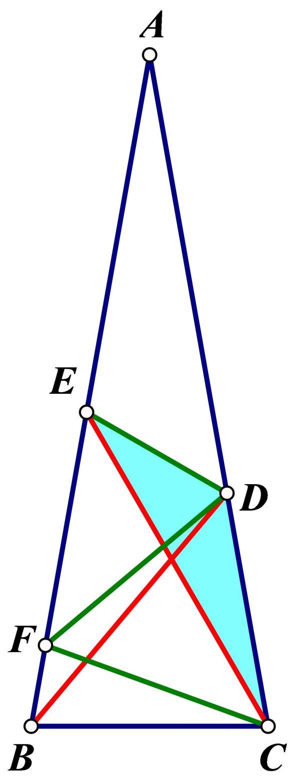
Suy ra $\Delta BNE = \Delta CDH(c.g.c)$ và $\angle CHD = \angle BEN = 40^\circ$.

Mặt khác $\angle CHF = 80^\circ$ nên HD chính là phân giác của $\angle CHF$.

Rõ ràng $\angle ECF = \angle HCF = 20^\circ$ nên CF là phân giác của góc $\angle HCE$. Do đó, D chính là tâm đường tròn nội tiếp tam giác CHE. Từ đây suy ra

$$\angle CED = \frac{1}{2}\angle CEF = 30^\circ.$$

Cách 3. (Đây có lẽ là cách đơn giản nhất cho bài toán này)



Trên AB, lấy điểm F sao cho $CB = CF$. Khi đó, ta cũng có $\angle BCF = 20^\circ$ và $\angle FCD = 60^\circ$. Chú ý rằng $CB = CD$ nên $CD = CF$, tức là tam giác CDF cân ở C nên nó cũng đều.

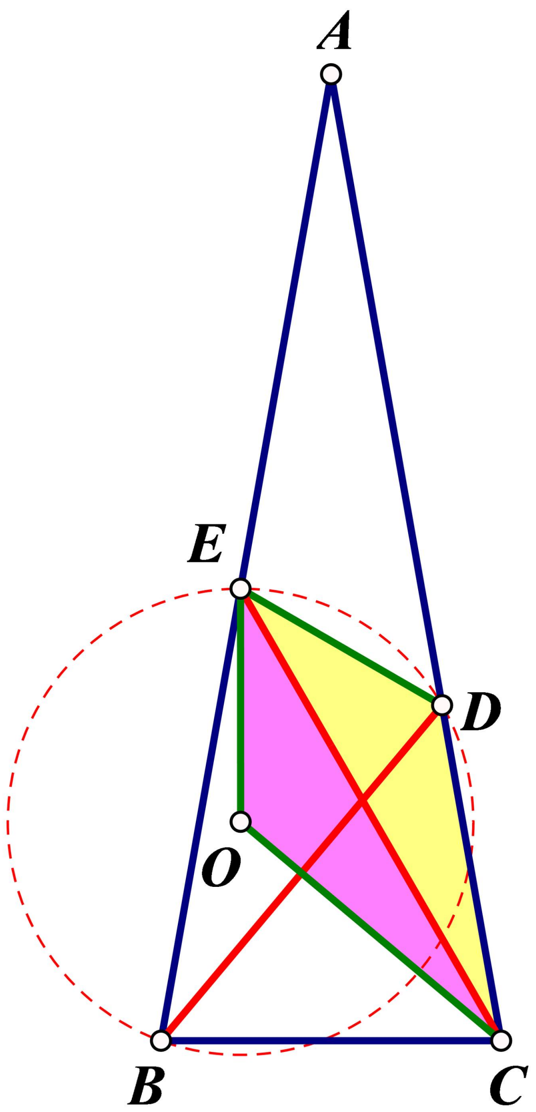
Do đó $DF = CF$.

Bằng biến đổi góc, ta cũng có $\angle FCE = \angle FEC = 40^\circ$ nên tam giác FEC cân tại F.

Từ đây suy ra $FC = FD = FE$ nên F chính là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CDE.

Vậy $\angle DEC = \frac{1}{2}\angle DFC = 30^\circ$.

Cách 4.



Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BDE. Ta có

$$\angle DBE = 30^\circ \Rightarrow \angle DOE = 60^\circ,$$

mà $OD = OE$ nên tam giác ODE đều. Do đó: $EO = ED$.

Bằng biến đổi góc, ta cũng có $\angle DCE = 80^\circ - 60^\circ = 20^\circ$.

Dễ thấy OC là trung trực của $\angle BCD$ nên $\angle OCB = \frac{80^\circ}{2} = 40^\circ$ nên

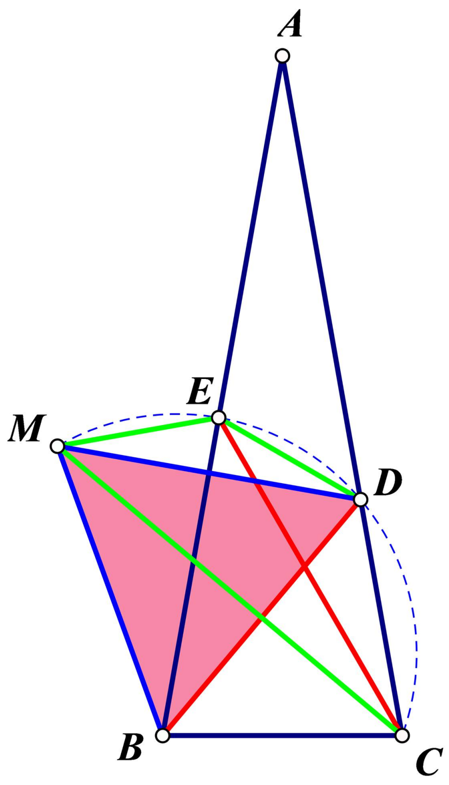
$$\angle OCE = 60^\circ - 40^\circ = 20^\circ.$$

Hai tam giác CDE và COE có cạnh CE chung, $ED = EO$ và $\angle DCE = \angle OCE$.

Tuy góc này không nằm xen giữa 2 cạnh tương ứng, nhưng do góc $\angle DEC, \angle OEC$ đều nhọn (nằm trong góc $\angle DEO$ nên nhỏ hơn 60°), vì thế $\Delta CDE = \Delta COE$ và dẫn đến

$$\angle CED = \angle CEO = \frac{1}{2}\angle DEO = 30^\circ.$$

Cách 5. (của Maria Gelband, một học sinh THPT)



Trên tia phân giác góc $\angle BCD$, lấy điểm M sao cho $\angle ABM = 30^\circ$.

Khi đó, ta có $MD = MB$ và $\angle MBD = \angle ABM + \angle ABD = 30^\circ + 30^\circ = 60^\circ$, do đó, tam giác BDM đều. Khi đó, ta cũng có CE là phân giác của góc $\angle DCM$.

Vì BE là phân giác của góc $\angle DBM$ nên nó cũng là trung trực của DM.

Trong tam giác CDM, E là giao điểm của phân giác góc $\angle DCM$ và trung trực của DM nên E thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác DCM.

Do đó,
$$\angle CED = \angle CMD = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ.$$

SỬ DỤNG TỔNG TÍCH PHÂN ĐỂ TÍNH GIỚI HẠN DÃY SỐ

Nguyễn Tài Chung
(Trường THPT Chuyên Hùng Vương, Gia Lai)

1. Giới thiệu

Có nhiều phương pháp chính thống để tính giới hạn dãy số, chẳng hạn như sử dụng định nghĩa giới hạn dãy số, sử dụng định lí Weiertrass, sử dụng dãy con, sử dụng định lí Lagrange,... Chuyên đề này sẽ trình bày một phương pháp mà nếu biết vận dụng nó một cách linh hoạt chúng ta có thể giải được nhiều bài toán về giới hạn dãy số liên quan đến tổng. Đặc biệt khi kết hợp với nguyên lí kẹp thì phương pháp này có sức công phá rất lớn, giải quyết được nhiều bài toán hay, khó và tổng quát.

2. Nội dung

2.1. Một số kiến thức thường dùng

Cơ sở của phương pháp sử dụng tổng tích phân là định nghĩa tích phân xác định sau đây.

Định nghĩa 2.1 (Định nghĩa tích phân xác định). *Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên đoạn $[a; b]$. Xét một phân hoạch (phép chia) T bất kỳ của đoạn $[a; b]$, tức là chia đoạn $[a; b]$ thành n đoạn bởi các điểm chia:*

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Trên mỗi đoạn $[x_{i-1}; x_i]$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ ta lấy bất kỳ một điểm $\alpha_i \in [x_{i-1}; x_i]$ và gọi $\Delta_i = x_i - x_{i-1}$ là độ dài của đoạn $[x_{i-1}; x_i]$. Đặt $d = \max\{\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n\}$. Khi đó

$$\sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i)\Delta_i = f(\alpha_1)\Delta_1 + f(\alpha_2)\Delta_2 + \cdots + f(\alpha_n)\Delta_n$$

gọi là tổng tích phân của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$ ứng với phép phân hoạch T. Tổng này phụ thuộc vào phân hoạch T, số khoảng chia n và phụ thuộc vào cách chọn điểm α_i. Nếu tồn tại $\lim\limits_{d\to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\alpha_i)\Delta_i$ (là một số xác định), không phụ thuộc vào phép phân hoạch đoạn $[a; b]$ và cách chọn điểm α_i thì giới hạn này gọi là tích phân xác định của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$ và ký hiệu là $\int\limits_a^b f(x)dx$. Khi đó hàm số $f(x)$ được gọi là khả tích trên đoạn $[a; b]$.

Lưu ý.

- Như vậy nếu hàm số $f(x)$ khả tích trên đoạn $[a;b]$ thì mọi phép phân hoạch T của đoạn $[a;b]$ và mọi cách chọn các điểm $\alpha_k \in [x_{k-1};x_k]$ (k là số nguyên dương), ta luôn có:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i)\Delta_i.$$

- Trong thực hành, chúng ta đặc biệt chú ý đến một số lớp hàm khả tích đơn giản và dễ nhận biết sau đây:
  - Nếu hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ thì khả tích trên đoạn đó.
  - Nếu hàm số $y=f(x)$ bị chặn trên đoạn $[a;b]$ và chỉ có một số hữu hạn điểm gián đoạn thì khả tích trên đoạn đó.
  - Nếu hàm số $y=f(x)$ bị chặn và đơn điệu trên đoạn $[a;b]$ thì khả tích trên đoạn đó.

Chú ý 2.1. *Cho đoạn $[a;b]\subset\mathbb{R}$. Khi đó với mọi $\alpha \geqslant 0,\ \beta \geqslant 0$ sao cho $\alpha+\beta=1$, ta có*

$$\alpha a+\beta b\in[a;b].$$

2.2. Tính giới hạn của dãy số $S_n=\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$

Có rất nhiều bài toán giới hạn dãy số mà việc tính tổng trực tiếp S_n rất khó khăn hoặc không thể thực hiện được. Tuy nhiên có thể biến đổi tổng này về dạng tổng tích phân (của hàm $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$ ứng với một phép phân hoạch T nào đó). Vậy để tính giới hạn của một tổng nhờ tích phân xác định ta thường tiến hành theo các bước như sau:

Bước 1: Biến đổi tổng S_n thành biểu thức

$$S_n=\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(a+i\frac{b-a}{n}).$$

Bước 2: Chọn được hàm $f(x)$ khả tích trên đoạn $[a;b]$.

- Lập phép phân hoạch đều trên $[a;b]$ bởi các điểm chia

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b.$$

- Lập tổng tích phân của hàm $f(x)$ trên $[a;b]$:

$$S_n=\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(a+i\frac{b-a}{n}).$$

Bước 3: Khi đó $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=\int\limits_a^b f(x)dx.$

Đặc biệt: Nếu $a = 0$ và $b = 1$ thì các bước trên trở thành:

Bước 1: Biến đổi tổng S_n thành:

$$S_n = \frac{1}{n}\left[f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{n}{n}\right)\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right).$$

Bước 2: Chỉ ra hàm $f(x)$ khả tích trên đoạn $[0; 1]$.

- Lập phép phân hoạch đều trên $[0; 1]$ bởi các điểm chia

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = 1.$$

- Lập tổng tích phân của hàm $f(x)$ trên $[0; 1]$:

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\frac{i}{n}).$$

Bước 3: Khi đó $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \int\limits_0^1 f(x)dx.$

Bài toán 2.1. *Cho* $S_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2}$. *Tìm* $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

Lời giải. Ta có:

$$S_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \cdots + \frac{n}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}.$$

Xét hàm số $f(x) = x$ khả tích trên $[0; 1]$. Chia đoạn $[0; 1]$ bởi các điểm chia $x_i = \frac{i}{n}$, $i = 0, 1, \ldots, n$, tức là chia đoạn $[0; 1]$ thành n đoạn đều nhau:

$$x_0 = \frac{0}{n} = 0 < x_1 = \frac{1}{n} < x_2 = \frac{2}{n} < \cdots < x_{n-1} = \frac{n-1}{n} < x_n = \frac{n}{n} = 1.$$

Chọn $\alpha_i = \frac{i}{n} \in [x_{i-1}; x_i], \forall i = 1, 2, \ldots, n$. Khi đó tổng tích phân của hàm số $f(x)$ trên $[0; 1]$ ứng với phép phân hoạch nói trên là

$$S_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \cdots + \frac{n}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}.$$

Ta có

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}\right) = \int\limits_0^1 xdx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

□

Lưu ý. Trong bài toán 2.1 này, ta phải chọn $\alpha_i = \frac{i}{n}$ trùng với đầu mút phải của đoạn $[x_{i-1}; x_i]$, để cho với $f(x) = x$ thì $f(\alpha_i) = \frac{i}{n}$.

Bài toán 2.2 (Olympic toán Sinh viên toàn quốc năm học 2007-2008). *Tìm* $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ *biết*

$$S_n = \frac{1^{2008} + 2^{2008} + \cdots + n^{2008}}{n^{2009}}.$$

Lời giải. Ta có:

$$S_n = \frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^{2008} + \left(\frac{2}{n}\right)^{2008} + \cdots + \left(\frac{n}{n}\right)^{2008}\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^{2008}.$$

Xét hàm số $f(x) = x^{2008}$. Khi đó $f(x)$ khả tích trên đoạn $[0;1]$. Chia đều đoạn $[0;1]$ bởi các điểm chia $x_i = \frac{i}{n}$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ và chọn

$$\alpha_i = \frac{i}{n} \in [x_{i-1}; x_i], \forall i = 1, 2, \ldots, n.$$

Khi đó tổng tích phân của hàm số $f(x)$ trên $[0;1]$ là $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\frac{i}{n}) = S_n$. Vậy

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \int\limits_0^1 f(x)dx = \int\limits_0^1 x^{2008}dx = \left.\frac{x^{2009}}{2009}\right|_0^1 = \frac{1}{2009}.$$

□

Bài toán 2.3. *Chứng minh rằng giới hạn*

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{n+1}}{1} + \frac{\sin\frac{2\pi}{n+1}}{2} + \cdots + \frac{\sin\frac{n\pi}{n+1}}{n}\right)$$

là một số dương.

Lời giải. Xét hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{nếu } x \in (0;\pi] \\ 1 & \text{nếu } x = 0. \end{cases}$

Vì $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1 = f(0)$ nên hàm số f liên tục trên đoạn $[0;\pi]$, do đó hàm số f khả tích trên đoạn $[0;\pi]$. Hơn nữa:

$$\int\limits_0^\pi f(x)dx > 0 \quad (\text{do } f(x) > 0,\ \forall x \in [0;\pi]).$$

Như vậy:

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\frac{i\pi}{n+1}}{i} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\pi}{n+1}\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\frac{i\pi}{n+1}}{\frac{i\pi}{n+1}}\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\pi}{n+1}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i\pi}{n+1}\right)\right)$$
$$= \int_0^{\pi} f(x)dx > 0.$$

Ta có điều phải chứng minh. □

Bài toán 2.4. *Tính* $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$*, với:*

$$S_n = \frac{1}{n+\dfrac{2}{3}} + \frac{1}{n+\dfrac{8}{3}} + \frac{1}{n+\dfrac{14}{3}} + \cdots + \frac{1}{n+\dfrac{6n-4}{3}}, \forall n = 1, 2, \ldots$$

Phân tích. Ta biến đổi:

$$S_n = \frac{1}{c}.c\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+\dfrac{6i-4}{3}} = \frac{1}{c}.\frac{c}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\dfrac{6i-4}{3n}},$$

với c sẽ là độ dài của đoạn lấy tích phân. Ta dự đoán hàm số dưới dấu tích phân sẽ là $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ và đoạn lấy tích phân sẽ là $[d; d+c]$. Xét phép phân hoạch đều đoạn $[d; d+c]$ bởi các điểm chia

$$x_0 = d,\ x_1 = d + \frac{c.1}{n},\ x_2 = d + \frac{c.2}{n}, \ldots, x_n = d + \frac{c.n}{n} = d + c.$$

Khi đó $\Delta_i = x_i - x_{i-1} = \dfrac{c}{n}, \forall i = 1, 2, \ldots, n$. Giả sử $\alpha_i \in [x_{i-1}; x_i]$, suy ra α_i có dạng:

$$\alpha_i = ax_{i-1} + bx_i,\ \text{với } a \geqslant 0,\ b \geqslant 0,\ a + b = 1.$$

Ta cần tìm a và b sao cho: $\dfrac{6i-4}{3n} = ax_{i-1} + bx_i$. Tức là tìm a và b sao cho

$$\frac{2i}{n} - \frac{4}{3n} = a\left[d + \frac{c(i-1)}{n}\right] + b\left[d + \frac{ci}{n}\right] = \frac{(a+b)ci}{n} - \frac{ac}{n} + d(a+b).$$

Suy ra:

$$\begin{cases} (a+b)c = 2 \\ ac = \dfrac{4}{3} \\ d(a+b) = 0 \end{cases} \overset{\text{do } a+b=1}{\Rightarrow} \begin{cases} c = 2 \\ a = \dfrac{2}{3},\ b = \dfrac{1}{3} \\ d = 0. \end{cases}$$

Bởi vậy ta có lời giải như sau.

Lời giải. Ta có:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+\dfrac{6i-4}{3}} = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\dfrac{6i-4}{3n}}\right].$$

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ trên đoạn $[0; 2]$. Rõ ràng $f(x)$ liên tục trên $[0; 2]$ nên nó khả tích trên đoạn đó. Xét phép phân hoạch đều đoạn $[0; 2]$ bởi các điểm chia

$$x_0 = 0,\ x_1 = \frac{2.1}{n},\ x_2 = \frac{2.2}{n}, \dots, x_{n-1} = \frac{2.(n-1)}{n},\ x_n = \frac{2.n}{n} = 2.$$

Khi đó $\Delta_i = x_i - x_{i-1} = \dfrac{2}{n}, \forall i = 1, 2, \dots$ Xét:

$$\alpha_i = \frac{2}{3}x_{i-1} + \frac{1}{3}x_i \in [x_{i-1}; x_i].$$

Khi đó:

$$\alpha_i = \frac{2}{3}.\frac{2(i-1)}{n} + \frac{1}{3}.\frac{2i}{n} = \frac{6i-4}{3n},\ f(\alpha_i) = \frac{1}{1 + \dfrac{6i-4}{3n}}.$$

Suy ra:

$$S_n = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1 + \dfrac{6i-4}{3n}}\right] = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i)\Delta_i.$$

Đây chính là tổng tích phân của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[0; 2]$ (ứng với phép phân hoạch đoạn $[0; 2]$ và phép chọn điểm α_i như đã nói ở trên). Do đó theo định nghĩa tích phân ta có

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{2}\int_0^2 f(x)dx = \frac{1}{2}\ln 3 = \ln\sqrt{3}.$$

$\square$

Bài toán 2.5. *Tính* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1^k + 3^k + \dots + (2n-1)^k}{n^{k+1}}$

Lời giải. Ta có:

$$\frac{1^k + 3^k + \dots + (2n-1)^k}{n^{k+1}} = \frac{1}{n}\left(\frac{1^k + 3^k + \dots + (2n-1)^k}{n^k}\right)$$
$$= \frac{2^k}{n}\left(\left(\frac{1}{2n}\right)^k + \left(\frac{3}{2n}\right)^k + \dots + \left(\frac{2n-1}{2n}\right)^k\right).$$

Do $\dfrac{2i-1}{2n} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{i-1}{n} + \dfrac{i}{n}\right)$ là trung điểm của đoạn

$$\left[\frac{i-1}{n}; \frac{i}{n}\right],\ i = 1, 2, \dots, n$$

nên $\dfrac{2^k}{n}\left(\left(\dfrac{1}{2n}\right)^k + \left(\dfrac{3}{2n}\right)^k + \dots + \left(\dfrac{2n-3}{2n}\right)^k + \left(\dfrac{2n-1}{2n}\right)^k\right)$ là tổng tích phân của hàm số $f(x) = 2^k.x^k$ trên đoạn $[0; 1]$ ứng với phép phân hoạch đều đoạn $[0; 1]$ bởi các điểm chia $x_i = \dfrac{i}{n}$ $(i = 0, 1, \dots, n)$ và chọn $\alpha_i = \dfrac{2i-1}{2n}$ là trung điểm của đoạn

$$[x_{i-1}; x_i], \forall i = 1, 2, \dots, n.$$

Như vậy:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1^k+3^k+\cdots+(2n-1)^k}{n^{k+1}}=\int_0^1 2^k.x^k dx=2^k\left.\frac{x^{k+1}}{k+1}\right|_0^1=\frac{2^k}{k+1}.$$

□

Bài toán 2.6. *Tính* $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$, *với:*

$$S_n=2n\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{(2i+1)^2+4n^2},\forall n=0,1,2,\ldots$$

Lời giải. Xét hàm số $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$, ta có $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{4}$. Ta chia đoạn $[0;1]$ thành $2n$ phần bằng nhau bởi các điểm chia

$$x_0=0,\ x_1=\frac{1}{2n},\ x_2=\frac{2}{2n},\ldots,x_{2n-1}=\frac{2n-1}{2n},\ x_{2n}=\frac{2n}{2n}=1.$$

Khi đó $\Delta_i=x_i-x_{i-1}=\dfrac{1}{2n},\forall i=1,2,\ldots,2n$. Trên các đoạn $[x_{2i};x_{2i+1}]$ hay $[x_{2i+1};x_{2i+2}]$ $(i=0,1,\ldots,n-1)$ ta đều chọn điểm $\alpha_i=\dfrac{2i+1}{2n}$. Thế thì tổng tích phân của hàm $f(x)$ trên $[0;1]$ là

$$\begin{aligned}
&f(\alpha_0)\Delta_1+f(\alpha_1)\Delta_2+f(\alpha_2)\Delta_3+\cdots+f(\alpha_{2n-2})\Delta_{2n-1}+f(\alpha_{2n-1})\Delta_{2n}\\
=&\frac{1}{2n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{4n^2}}+\frac{1}{1+\frac{3^2}{4n^2}}+\frac{1}{1+\frac{5^2}{4n^2}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{(2n-1)^2}{4n^2}}\right)\\
=&\frac{1}{2n}\left(\frac{4n^2}{1+4n^2}+\frac{4n^2}{3^2+4n^2}+\frac{4n^2}{5^2+4n^2}+\cdots+\frac{4n^2}{(2n-1)^2+4n^2}\right)\\
=&\frac{1}{2n}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{4n^2}{(2i+1)^2+4n^2}=S_n.
\end{aligned}$$

Vậy $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}S_n=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{4}$. □

Lưu ý.

- Trong cách chọn ở trên thì α_i được chọn chính là đầu mút chung của hai đoạn liền kề nhau.
- Để áp dụng thành công phương pháp tổng tích phân, chúng ta phải biến đổi

$$S_n=x_1+x_2+\cdots+x_n$$

thành tổng tích phân của một hàm nào đó:

- Trên đoạn $[0;1]$, $[0;a]$ hay $[a;b]$ phù hợp;
- Thường với phép chia đều miền lấy tích phân (rất cần thừa số $\frac{1}{n}$);
- Chọn điểm trung gian α_i ở mút trái, mút phải, đầu mút của hai đoạn liền kề nhau, hay trung điểm đoạn thứ i, thậm chí phải chứng minh α_i chính là một điểm nào đó của đoạn thứ i.

- Nhiều khi tổng $S_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ không phải là tổng tích phân, mà chỉ "gần như" vậy, trong trường hợp này phương án đưa ra thường là đổi tổng; thay thế các số hạng trong tổng; thêm bớt lượng thích hợp để đưa về tổng tích phân của một hàm số nào đó

2.3. Phương pháp đổi tổng

- Trong tổng tích phân của hàm số f có biểu thức $\sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i)$, tuy nhiên trong một số bài tập i không phải là chạy từ 1 đến n, mà là một quá trình khác. Lúc đó ta phải đổi tổng, tức là thay i bởi một biểu thức nào đó.

- Cũng có khi giới hạn cần tính không phải là tổng tích phân của bất kì một hàm nào, lúc đó ta hãy cố gắng thay thế số hạng tổng quát của tổng bởi một số hạng khác. Phương pháp ở đây thường là sử dụng tính liên tục của hàm số (xem bài toán 2.9 ở trang 130) hoặc sử dụng định lí Lagrange (xem bài toán 2.10 ở trang 130, bài toán 2.11 ở trang 130).

Bài toán 2.7. *Tính* $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{k^2}\right)$.

Lời giải. Ta sẽ đổi tổng k chạy từ n đến $2n-1$ bằng tổng i chạy từ 0 như sau:

$$\begin{aligned} n\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{k^2} &= n\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{(i+n)^2} \quad \text{(do thay } k \text{ bởi } i+n\text{)} \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{\left(1+\frac{i}{n}\right)^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{i}{n}\right), \end{aligned}$$

với f là hàm số $f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$. Chia đoạn $[0;1]$ bởi các điểm chia

$$x_i = \frac{i}{n},\ i = 0, 1, \ldots, n,$$

tức là chia đoạn $[0;1]$ thành n đoạn đều nhau:

$$x_0 = \frac{0}{n} = 0 < x_1 = \frac{1}{n} < x_2 = \frac{2}{n} < \cdots < x_{n-1} = \frac{n-1}{n} < x_n = \frac{n}{n} = 1.$$

Chọn $\alpha_i = \dfrac{i}{n} \in [x_i; x_{i+1}], \forall i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. Khi đó tổng tích phân của hàm số $f(x)$ trên $[0; 1]$ ứng với phép phân hoạch nói trên là $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\dfrac{i}{n}\right)$. Như vậy:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(n\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{k^2}\right) = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{i}{n}\right) = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x)^2}$$
$$= -\frac{1}{x+1}\bigg|_0^1 = -\frac{1}{2}+1 = \frac{1}{2}.$$

□

Bài toán 2.8. *Tính* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{2k+1}$.

Lời giải. Trong $u_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{2k+1}$, thay k bởi $i+n$, ta được:

$$u_n = \sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{2k+1} = \sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{2i+2n+1}.$$

Đặt $v_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{2i+2n}$, khi đó:

$$v_n = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{1+\dfrac{i}{n}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{i}{n}\right),$$

với f là hàm số $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$. Như vậy:

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{1}{2}\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}\int_0^1\frac{dx}{1+x} = \frac{1}{2}\ln(1+x)\bigg|_0^1 = \frac{1}{2}\ln 2.$$

Lại có:

$$|u_n - v_n| = \left|\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2i+2n+1} - \frac{1}{2i+2n}\right)\right|$$
$$= \left|\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{(2i+2n)(2i+2n+1)}\right| \leqslant \frac{n}{2n(2n+1)}, \forall n = 1, 2, \ldots$$

Mà $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{2n(2n+1)}$ nên sử dụng nguyên lí kẹp suy ra $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}|u_n - v_n| = 0$.
Như vậy:

$$\left|u_n - \frac{1}{2}\ln 2\right| = \left|(u_n - v_n) + \left(v_n - \frac{1}{2}\ln 2\right)\right| \leqslant |u_n - v_n| + \left|v_n - \frac{1}{2}\ln 2\right|.$$

Từ đây lại sử dụng nguyên lí kẹp ta được $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{2}\ln 2$. □

Bài toán 2.9. *Tìm giới hạn:*

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2^{\frac{1}{n}}}{n+1}+\frac{2^{\frac{2}{n}}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{2^{\frac{n}{n}}}{n+\frac{1}{n}}\right).$$

Lời giải. Biến đổi tổng dưới dấu giới hạn về dạng

$$S_n=\frac{2^{\frac{1}{n}}}{n+1}+\frac{2^{\frac{2}{n}}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{2^{\frac{n}{n}}}{n+\frac{1}{n}}=\sum_{i=1}^{n}\frac{2^{\frac{i}{n}}}{n+\frac{1}{i}}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}.\frac{2^{\frac{i}{n}}}{1+\frac{1}{ni}}.$$

Dường như vế phải không phải là tổng tích phân của bất kỳ hàm nào trên đoạn $[0;1]$ với phép chia đều thành n đoạn và chọn điểm α_i ở mút trái, mút phải cũng như trung điểm thông thường. Tuy nhiên dễ chứng minh rằng

$$2^{\frac{i-1}{n}}=\frac{2^{\frac{i}{n}}}{2}\leqslant\frac{2^{\frac{i}{n}}}{1+\frac{1}{ni}}\leqslant 2^{\frac{i}{n}},\forall i=1,2,\ldots,n\ \left(\text{do } 1<1+\frac{1}{ni}\leqslant 2\right).$$

Vì hàm số $g(x)=2^x$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên tồn tại $\alpha_i\in\left[\frac{i-1}{n};\frac{i}{n}\right]$ để

$$2^{\alpha_i}=\frac{2^{\frac{i}{n}}}{1+\frac{1}{ni}}.$$

Từ đó $S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{n}.2^{\alpha_i}$. Mà $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{n}.2^{\alpha_i}$ là tổng tích phân của hàm số $g(x)=2^x$ trên đoạn $[0;1]$ với phép chia đều đoạn $[0;1]$ thành n đoạn và cách chọn điểm α_i như đã chỉ. Do đó

$$\lim_{n\to+\infty}S_n=\int_0^1 2^x dx=\left.\frac{2^x}{\ln 2}\right|_0^1=\frac{1}{\ln 2}.$$

□

Bài toán 2.10. *Giả sử hàm số $f(x)$ có đạo hàm khả tích và bị chặn trên đoạn $[a;b]$. Đặt $S_n=\frac{b-a}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}f\left(a+i\frac{b-a}{n}\right)$. Chứng minh rằng:*

$$\lim_{n\to+\infty}n\left(S_n-\int_a^b f(x)dx\right)=\frac{b-a}{2}\left[f(b)-f(a)\right].$$

Bài toán 2.11. *Giả sử hàm số $f(x)$ có đạo hàm cấp hai khả tích và bị chặn trên đoạn $[a;b]$. Đặt $S_n=\frac{b-a}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}f\left(a+(2i-1)\frac{b-a}{2n}\right)$. Chứng minh rằng:*

$$\lim_{n\to+\infty}n^2\left(\int_a^b f(x)dx-S_n\right)=\frac{(b-a)^2}{24}\left[f'(b)-f'(a)\right].$$

Lưu ý. Bài toán 2.10, bài toán 2.11 là những kết quả quan trọng, định hướng cho việc tính giới hạn của một số dãy số liên quan đến tổng và xây dựng hệ thống bài tập. Còn việc giải bài toán 2.10 và bài toán 2.11 bạn đọc có thể tham khảo trong tài liệu tham khảo sách *Chuyên khảo Dãy số* (NXB ĐHQG Hà Nội) xuất bản năm 2013 của cùng tác giả.

(*Kỳ sau đăng tiếp*)

SÁNG TẠO VỚI MỘT BÀI TOÁN HÌNH HỌC TRUNG HỌC CƠ SỞ

Nguyễn Ngọc Giang (TP Hồ Chí Minh)

Ở Trung học cơ sở, các bài toán về đường phân giác và bài toán về đường trung tuyến chiếm vai trò quan trọng. Sở dĩ chúng quan trọng vì chúng có một số tính chất đẹp và được áp dụng nhiều trong giải toán. Sáng tạo toán ở bậc học này khó hơn ở các bậc học cấp trên vì công cụ giải toán còn tương đối ít. Đối với hình học, thì việc sáng tạo toán ngoài việc tìm các cách giải áp dụng các định lí quen thuộc như Thales, Menelaus, ... thì phương pháp vẽ đường phụ là phương pháp được yêu thích. Thêm vào đó, các phương pháp tương tự hóa, khái quát hóa cũng là các phương pháp được ưa dùng. Xin giới thiệu với các bạn những điều vừa nói qua bài toán hay sau đây

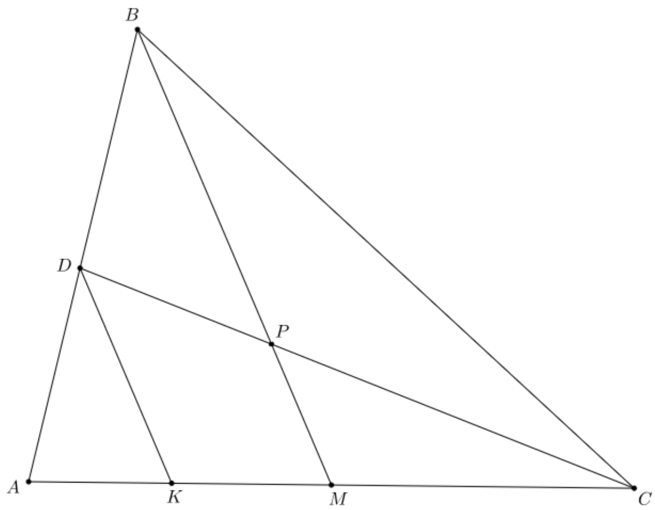
Bài toán 1. Cho $\triangle ABC$ đường trung tuyến BM cắt đường phân giác CD tại P. Chứng minh rằng

$$\frac{PC}{PD} - \frac{AC}{BC} = 1$$

Sau đây là các cách giải bài toán 1:

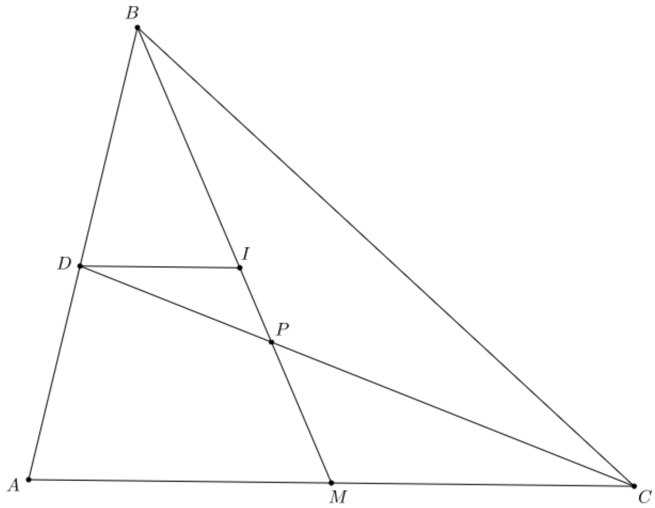
Cách 1 Vẽ $DK \parallel BM$. Ta có

$$\begin{aligned}\frac{PC}{PD} &= \frac{MC}{MK} = \frac{MA}{MK} \\ &= \frac{AB}{BD} = \frac{AB}{BC} + 1\end{aligned}$$



Cách 2 Vẽ $DI \parallel AC$. Ta có

$$\begin{aligned}\frac{PC}{PD} &= \frac{MC}{DI} = \frac{MA}{DI} \\ &= \frac{AB}{BD} = \frac{AB}{BC} + 1\end{aligned}$$

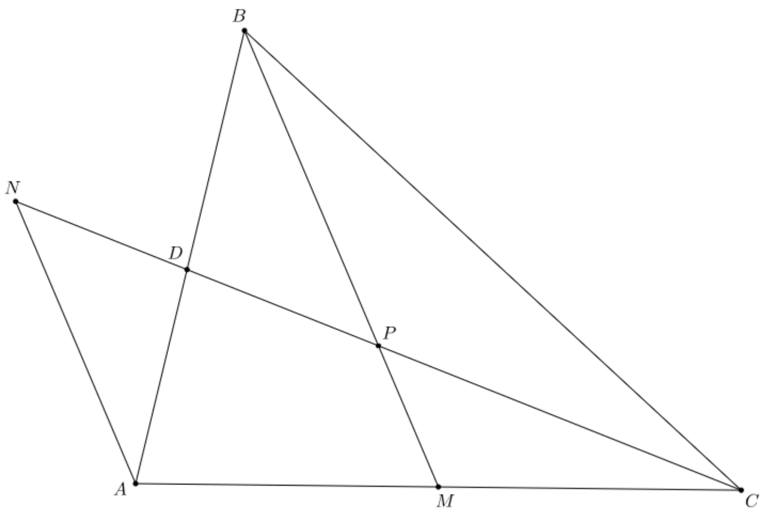


Cách 3 Kẻ $AN \parallel BM$. Suy ra PM là đường trung bình của $\triangle ANC$, tức là $PN = PC$. Ta có $\dfrac{PC}{PD} = \dfrac{PN}{PD}$.

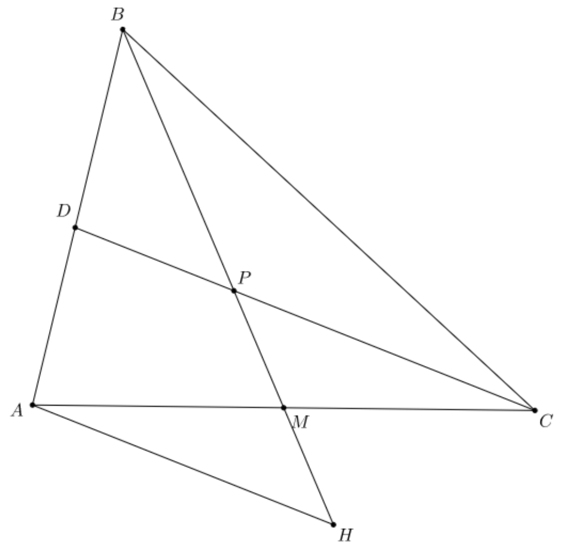
Mà $\dfrac{ND}{DP} = \dfrac{AD}{BD} = \dfrac{AC}{BC}$(do $AN \parallel BP$)

$\Rightarrow \dfrac{ND}{DP} + 1 = \dfrac{AC}{BC} + 1$

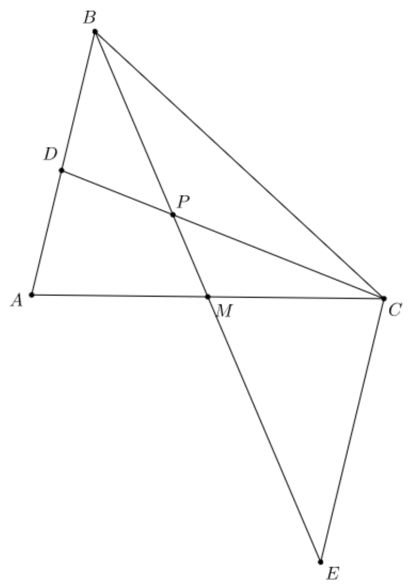
$\Rightarrow \dfrac{PC}{PD} = \dfrac{PN}{PD} = \dfrac{AC}{BC} + 1$



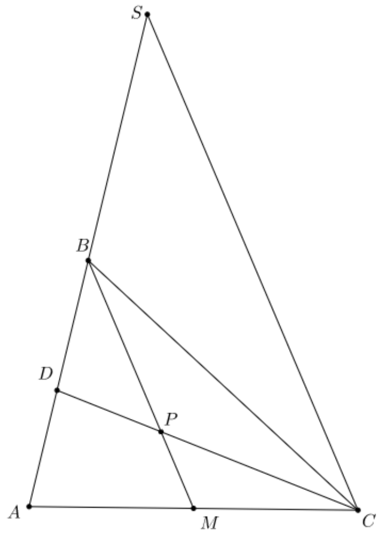
Cách 4 Kẻ $AH \parallel PC$.
Suy ra $\dfrac{PC}{PD} = \dfrac{AH}{DP}$(do $\triangle AMH = \triangle CMP$ nên $PC = AH$)



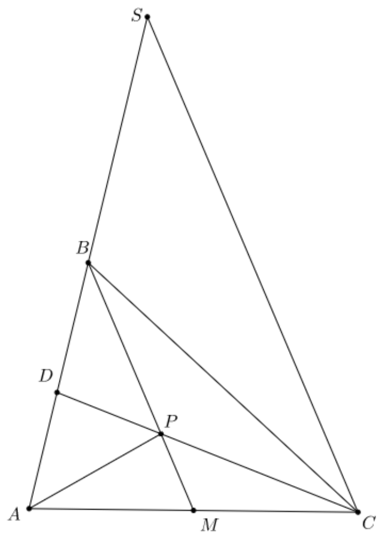
Hay $\dfrac{PC}{PD} = \dfrac{AC}{BC} + 1$(do $DP \parallel AH$)
Cách 5 Trên tia đối của tia MB lấy điểm E sao cho $MB = ME$.
Do $MA = MC \Rightarrow AB \parallel CE$ và $AB = CE$.



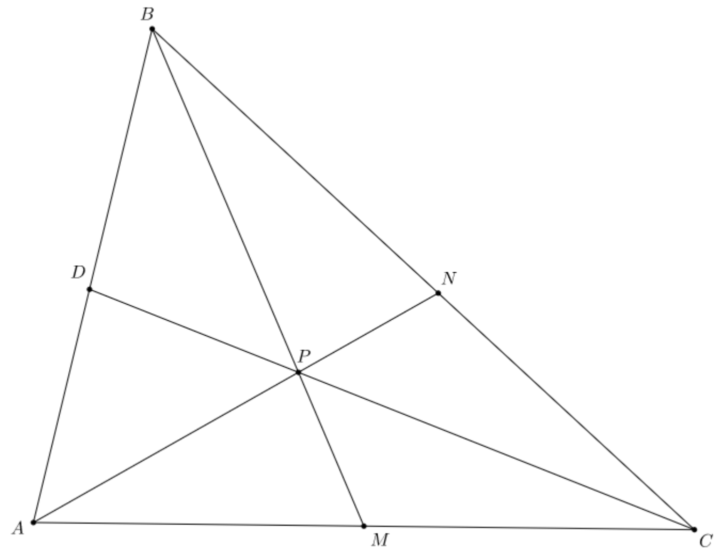
Ta có $\dfrac{PC}{PD} = \dfrac{CE}{BD} = \dfrac{AB}{BD} = \dfrac{AC}{BC} + 1$
Cách 6 Vẽ $CS \parallel BM$.
Suy ra BM là đường trung bình của $\triangle ACS$ nên $BS = AB$.



Do $BM \parallel CS \Rightarrow \dfrac{PC}{PD} = \dfrac{BS}{BD} = \dfrac{AB}{BD}$. Hay
$\dfrac{PC}{PD} = \dfrac{AB}{BD} = \dfrac{AC}{BC} + 1$.
Cách 7 $\dfrac{PC}{PD} = \dfrac{S_{BPC}}{S_{DBP}}$ và $\dfrac{AB}{BD} = \dfrac{S_{ABP}}{S_{DBP}}$.



Mà $S_{ABM} = S_{BMC}$, $S_{APM} = S_{CPM} \Rightarrow S_{ABP} = S_{BPC}$
Suy ra $\dfrac{PC}{PD} = \dfrac{AB}{BD} = \dfrac{AC}{BC} + 1$
Cách 8 Kéo dài AP cắt BC tại N.
Áp dụng định lí Ceva ta có $\dfrac{MA}{MC} \cdot \dfrac{NC}{NB} \cdot \dfrac{DB}{DA} = 1(1)$
Vì M là trung điểm AC nên $MA = MC$ (2)

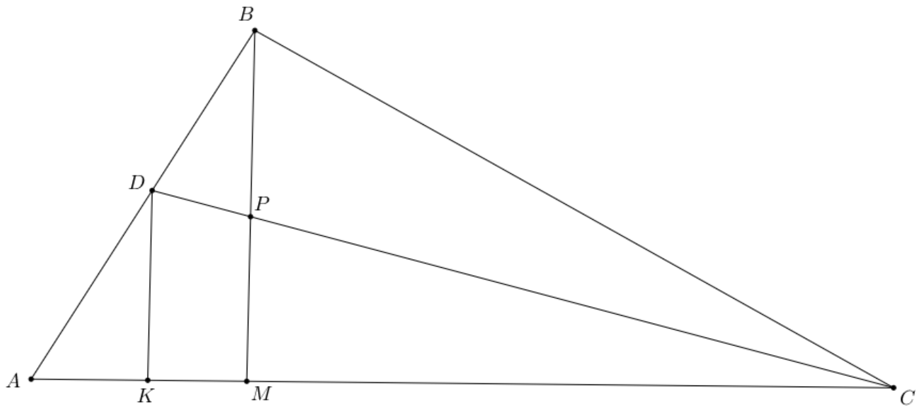


Vậy $\dfrac{NC}{NB} = \dfrac{DA}{DB}(3)$
Áp dụng định lí van Aubel ta có $\dfrac{PC}{PD} = \dfrac{MC}{MA} + \dfrac{NC}{NB}(4)$
Từ (1), (2), (3), (4) $\Rightarrow \dfrac{PC}{PD} = 1 + \dfrac{AC}{BC}$.
Suy ra điều phải chứng minh.
Bài toán tương tự bài toán 1 là bài toán sau
Bài toán 2 Cho $\triangle ABC$, M là điểm nằm trên AC sao cho $\dfrac{AM}{MC} = \dfrac{1}{3}$. Đường thẳng BM cắt đường phân giác CD của $\triangle ABC$ tại P. Chứng minh rằng

$$\frac{PC}{PD} - \frac{3AC}{BC} = 3$$

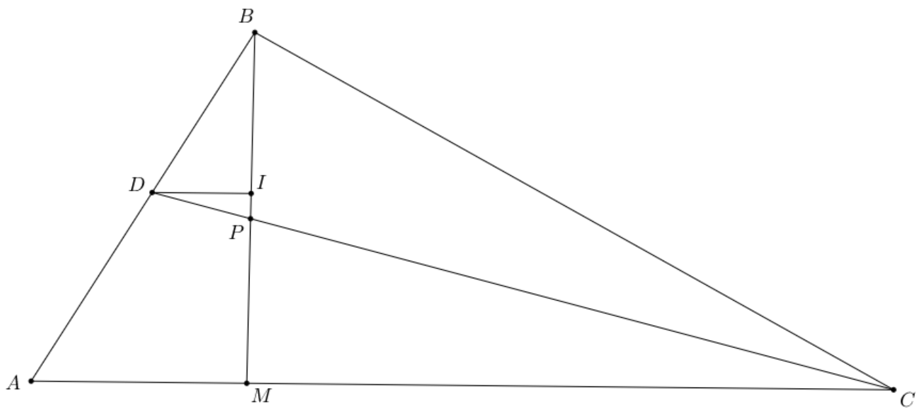
Cách 1 Vẽ $DK \parallel BM$. Ta có

$$\begin{aligned}\frac{PC}{PD} &= \frac{MC}{MK} = \frac{3MA}{MK} \\ &= \frac{3AB}{BD} = \frac{3AC}{BC} + 3\end{aligned}$$

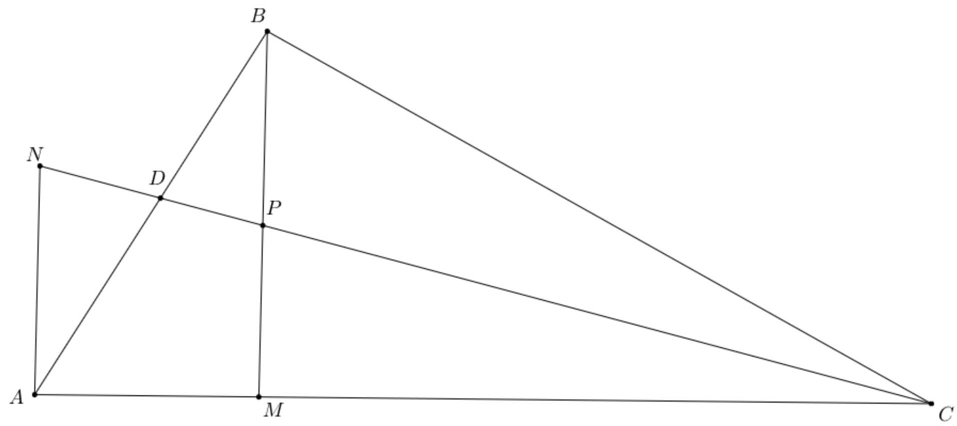


Cách 2 Vẽ $DI \parallel AC$. Ta có

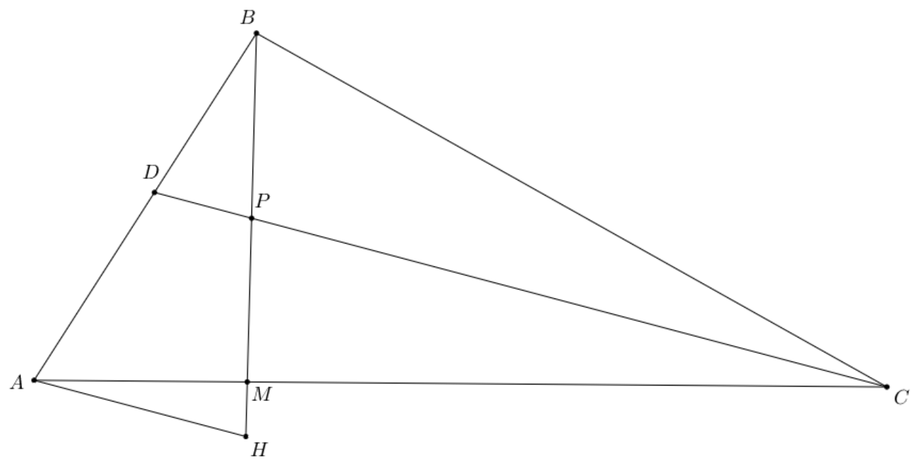
$$\begin{aligned}\frac{PC}{PD} &= \frac{MC}{DI} = \frac{3MA}{DI} \\ &= \frac{3AB}{BD} = \frac{3AC}{BC} + 3\end{aligned}$$



Cách 3 Kẻ $AN \parallel BM$.
Suy ra PM là đường thẳng song song với cạnh AN của $\triangle ANC$.
Theo định lí Thales ta có $3PN = PC$.

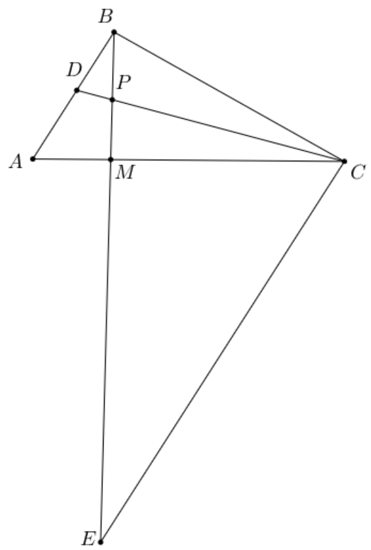


Vậy $\dfrac{PC}{PD} = \dfrac{3PN}{PD}$.
Mà $\dfrac{ND}{DP} = \dfrac{AD}{BD} = \dfrac{AC}{BC}$(do $AN \parallel BP$)
Suy ra $\dfrac{3ND}{DP} + 3 = \dfrac{3AC}{BC} + 3$
Suy ra $\dfrac{PC}{PD} = \dfrac{3PN}{PD} = \dfrac{3AC}{BC} + 3$
Cách 4 Kẻ $AH \parallel PC$. Theo định lí Thales, $\dfrac{PC}{AH} = \dfrac{MC}{MA} = 3$



Suy ra $\dfrac{PC}{PD} = \dfrac{3AH}{DP}$.
Hay $\dfrac{PC}{PD} = \dfrac{3AC}{BC} + 3$ (do $DP \parallel AH$)
Cách 5 Trên tia đối của tia MB lấy điểm E sao cho $\dfrac{MA}{MC} = \dfrac{MB}{ME} = \dfrac{AB}{CE} = \dfrac{1}{3}$.

Vậy theo định lí Thales đảo, ta có $AB \parallel CE$.

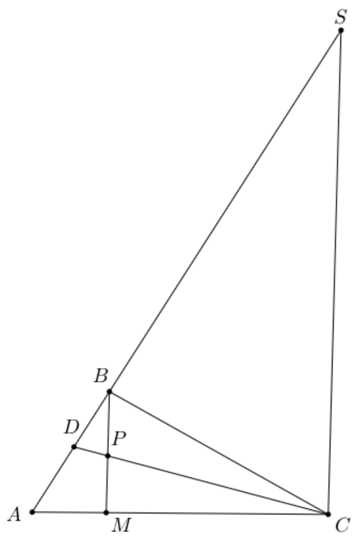


$\Rightarrow \dfrac{PC}{PD} = \dfrac{CE}{BD} = \dfrac{3AB}{BD} = \dfrac{3AC}{BC} + 3$

Cách 6 Vẽ $CS \parallel BM$.

Theo định lí Thales, ta có BM là đường thẳng song song với CS nên $\dfrac{BS}{AB} = \dfrac{MC}{MA} = 3$. Mà $BM \parallel CS \Rightarrow \dfrac{PC}{PD} = \dfrac{BS}{BD} = \dfrac{3AB}{BD}$(1)

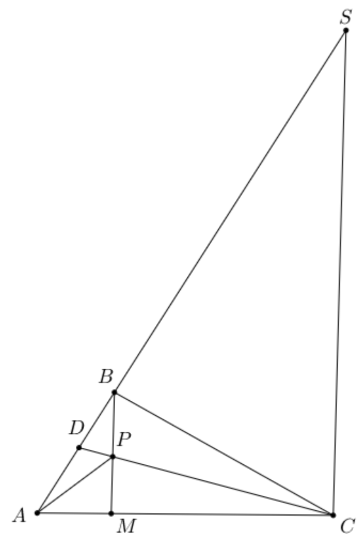
Ta có $\dfrac{3AB}{BD} = \dfrac{3AC}{BC} + 3$(2)



Từ (1), (2), ta có $\dfrac{PC}{PD} = \dfrac{3AC}{BC} + 3$

Cách 7 $\dfrac{PC}{PD} = \dfrac{S_{BPC}}{S_{DBP}}, \dfrac{AB}{BD} = \dfrac{S_{ABP}}{S_{DBP}}$

mà $S_{ABM} = \frac{1}{3}S_{BMC}$, $S_{APM} = \frac{1}{3}S_{CPM} \Rightarrow S_{ABP} = \frac{1}{3}S_{BPC}$.



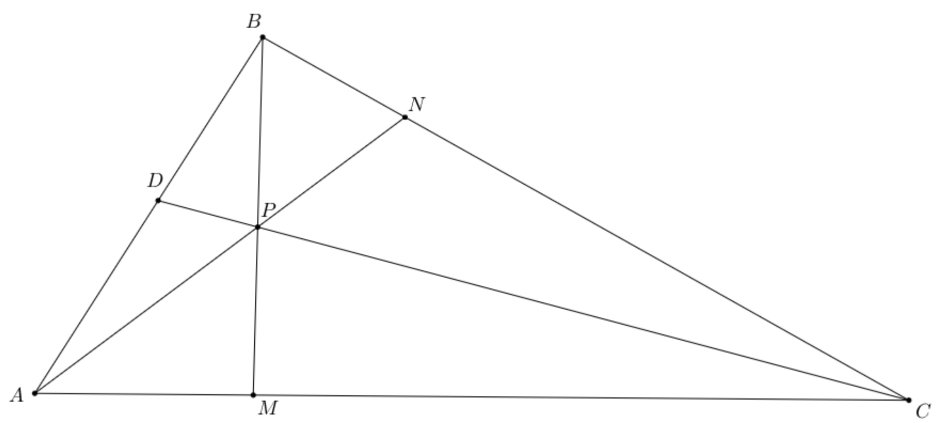
Suy ra $\dfrac{PC}{PD} = \dfrac{3AB}{BD} = \dfrac{3AC}{BC} + 3$

Cách 8 Kéo dài AP cắt BC tại N. Áp dụng định lí Ceva ta có $\dfrac{MA}{MC} \cdot \dfrac{NC}{NB} \cdot \dfrac{DB}{DA} = 1(1)$

Theo giả thiết $MA = \frac{1}{3}MC$

Vậy $\dfrac{NC}{NB} = \dfrac{3DA}{DB}(2)$

Áp dụng định lí van Aubel, suy ra $\dfrac{PC}{PD} = \dfrac{MC}{MA} + \dfrac{NC}{NB}(3)$



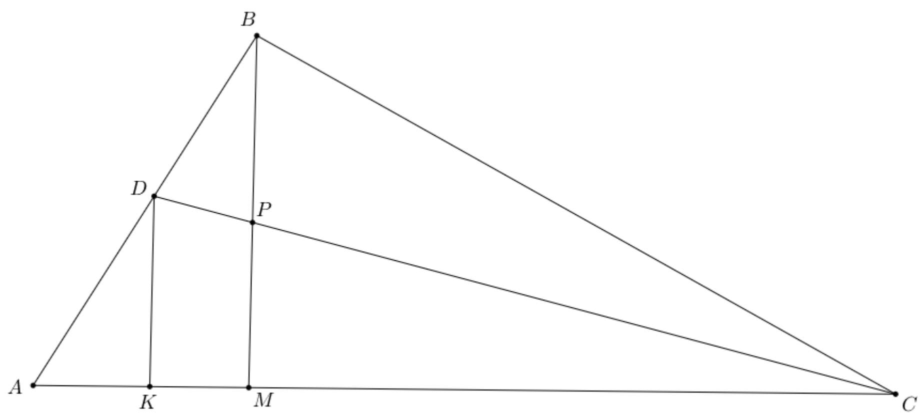
Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow \dfrac{PC}{PD} = 3 + \dfrac{3AC}{BC}$ Bài toán tổng quát của bài toán 1 và bài toán 2 là bài toán

Bài toán 3 Cho $\triangle ABC$, M là điểm nằm trên AC sao cho $\dfrac{MC}{MA} = n(n > 0)$ Đường thẳng BM cắt đường phân giác CD của $\triangle ABC$ tại P. Chứng minh rằng

$$\frac{PC}{PD} = \frac{nAC}{BC} + n$$

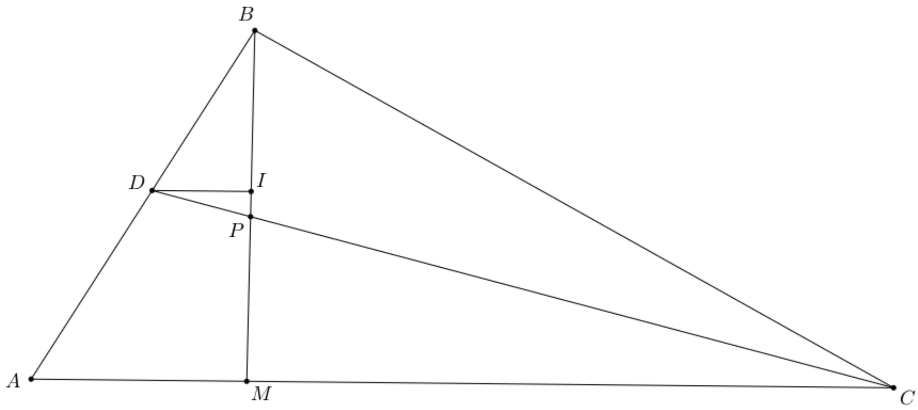
Cách 1 Vẽ $DK \parallel BM$. Ta có

$$\begin{aligned}\frac{PC}{PD} &= \frac{MC}{MK} = \frac{nMA}{MK} \\ &= \frac{nAB}{BD} = \frac{nAC}{BC} + n\end{aligned}$$

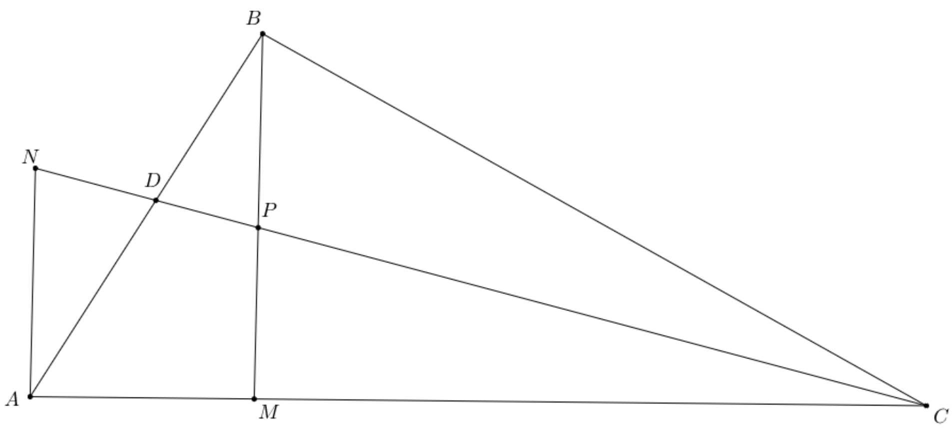


Cách 2 Vẽ $DI \parallel AC$. Ta có

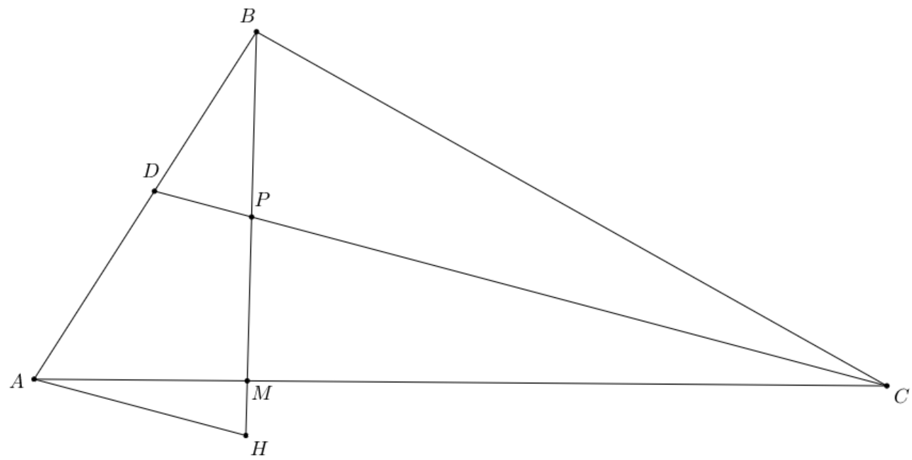
$$\begin{aligned}\frac{PC}{PD} &= \frac{MC}{DI} = \frac{nMA}{DI} \\ &= \frac{nAB}{BD} = \frac{nAC}{BC} + n\end{aligned}$$



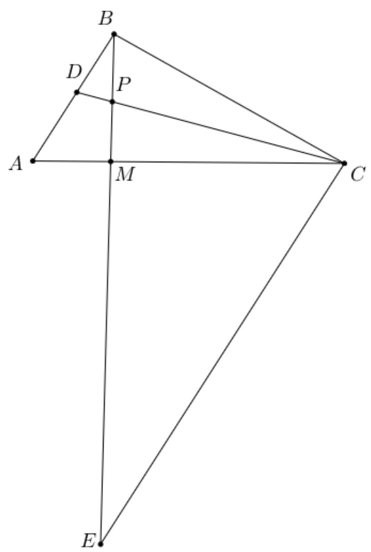
Cách 3 Kẻ $AN \parallel BM$.
Suy ra PM là đường thẳng song song với cạnh AN của $\triangle ANC$. Theo định lí Thales ta có $PC = nPN$.



Vậy $\dfrac{PC}{PD} = \dfrac{nPN}{PD}$.
Mà $\dfrac{ND}{DP} = \dfrac{AD}{BD} = \dfrac{AC}{BC}$ (do $AN \parallel BP$).



$\Rightarrow \dfrac{nND}{DP} + n = \dfrac{nAC}{BC} + n$
$\Rightarrow \dfrac{PC}{PD} = \dfrac{nPN}{PD} = \dfrac{nAC}{BC} + n$
Cách 4 Kẻ $AH \parallel PC$. Theo định lí Thales ta có $\dfrac{PC}{AH} = \dfrac{MC}{MA} = n$. Suy ra $PC = nAH$.
$\Rightarrow \dfrac{PC}{PD} = \dfrac{nAH}{DP}$.
Hay $\dfrac{PC}{PD} = \dfrac{nAB}{BD} = \dfrac{nAC}{BC} + n$
Cách 5 Trên tia đối của MB lấy điểm E sao cho $\dfrac{MC}{MA} = \dfrac{ME}{MB} = \dfrac{CE}{AB} = n$.



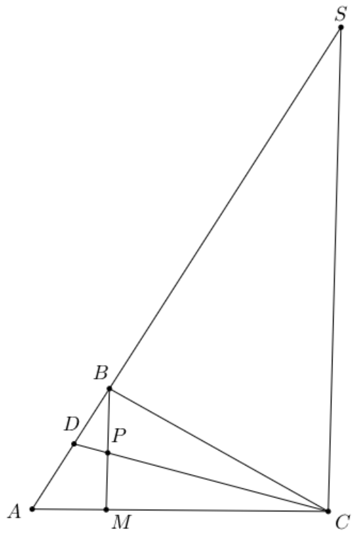
Theo định lí Thales đảo, ta có $AB \parallel CE$.
$\Rightarrow \dfrac{PC}{PD} = \dfrac{CE}{BD} = \dfrac{nAB}{BD} = \dfrac{nAC}{BC} + n$

Cách 6 Vẽ $CS \parallel BM$.

Theo định lí Thales, ta có BM là đường thẳng song song với CS nên $\dfrac{BS}{AB} = \dfrac{MC}{MA} = n$ mà $BM \parallel CS$.

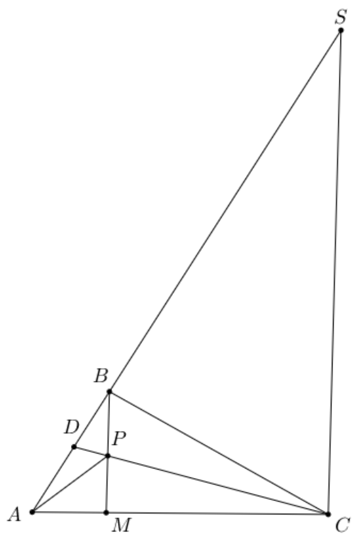
$\Rightarrow \dfrac{PC}{PD} = \dfrac{BS}{BD} = \dfrac{nAB}{BD}(1)$

Ta có $\dfrac{nAB}{BD} = \dfrac{nAC}{BC} + n(2)$



Từ (2), (3), ta có $\dfrac{PC}{PD} = \dfrac{nAC}{BC} + n$

Cách 7 $\dfrac{PC}{PD} = \dfrac{S_{BPC}}{S_{DBP}}, \dfrac{AB}{BD} = \dfrac{S_{ABP}}{S_{DBP}}$. Mà $S_{ABM} = \dfrac{1}{n}S_{BMC}$, $S_{APM} = \dfrac{1}{n}S_{CPM} \Rightarrow S_{ABP} = \dfrac{1}{n}S_{BPC}$.

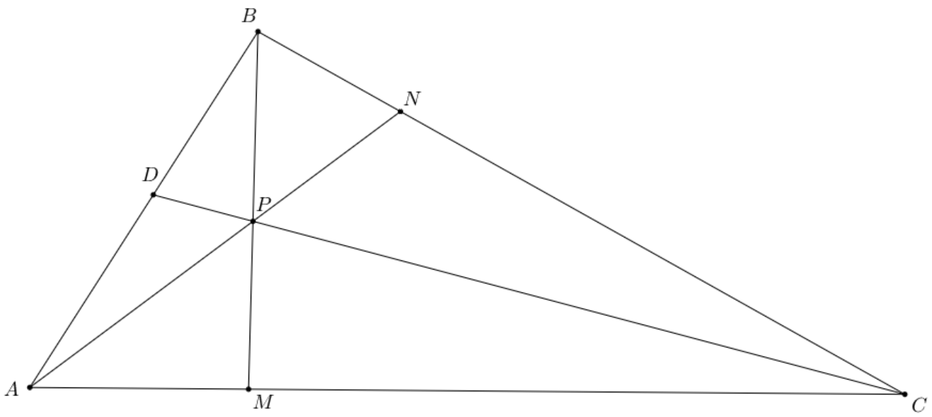


$\Rightarrow \dfrac{PC}{PD} = \dfrac{nAB}{BD} = \dfrac{nAC}{BC} + n$

Cách 8 Kéo dài AP cắt BC tại N. Áp dụng định lí Ceva ta có

$\dfrac{MA}{MC} \cdot \dfrac{NC}{NB} \cdot \dfrac{DB}{DA} = 1(1)$

Theo giả thiết $MC = nMA$. Vậy $\dfrac{NC}{NB} = \dfrac{nDA}{DB}$



Áp dụng định lí van Aubel ta có

$$\frac{PC}{PD} = \frac{MC}{MA} + \frac{NC}{NB} \, (3)$$

Từ (1),(2),(3), $\dfrac{PC}{PD} = n + \dfrac{nAC}{BC}$.

Chúng ta vừa có một số khám phá thú vị xoay quanh bài toán về giao điểm của đường trung tuyến và đường phân giác. Các cách giải khác nhau, các bài toán tương tự và mở rộng đã đem đến cho chúng ta nhiều điều thú vị. Bài viết này cần trao đổi gì thêm? Mong được sự chia sẻ của các bạn.

Sau đây là một số bài toán luyện tập

Bài toán 4 Cho $\triangle ABC$ có trung tuyến BM. D là điểm trên AB sao cho $\dfrac{DB}{DA} = \dfrac{2CB}{CA}$. Gọi P là giao điểm của CD và BM. Tính tỉ số $\dfrac{PC}{PD}$ theo $\dfrac{CA}{CB}$.

Bài toán 5 Cho $\triangle ABC$ có trung tuyến BM. D là điểm trên AB sao cho $\dfrac{DB}{DA} = \dfrac{nCB}{CA}$. Gọi P là giao điểm của CD và BM. Tính tỉ số $\dfrac{PC}{PD}$ theo $\dfrac{CA}{CB}$.

Tài liệu tham khảo

[1]Phan Đức Chính, Tôn Thân, Vũ Hữu Bình, Trần Đình Châu, Ngô Hữu Dũng, Phạm Gia Đức, Nguyễn Duy Thuận(2011), Toán 8 tập 1, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam.

[2]Phan Đức Chính, Tôn Thân, Nguyễn Huy Đoan, Lê Văn Hồng, Trương Công Thành, Nguyễn Hữu Thảo (2011), Toán 8 tập 2, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam.

[3]Nguyễn Đức Tấn (2005), Giải bằng nhiều cách các bài toán lớp 9, Nhà xuất bản Tổng hợp Thành phố Hồ Chí Minh.

"NẾU BẠN KHÔNG NUÔI DƯỠNG, ĐAM MÊ SẼ TỪ BỎ BẠN" - TRÒ CHUYỆN VỀ CON ĐƯỜNG ĐẾN VỚI CMU CỦA PHẠM HY HIẾU

(Trung Dũng - Tạp chí Người đô thị)

Được Google ba lần gửi lời mời làm việc. Nghiên cứu trong lĩnh vực khá thời sự hiện nay của công nghệ cao: Trí thông minh nhân tạo. Xác định chỉ làm ở Google một năm, sau đó dành thời gian cho chương trình tiến sĩ của Đại học Carnegie Mellon (CMU) ... Phạm Hy Hiếu là một trong những trường hợp người Việt trẻ nỗ lực khẳng định bản thân đã tìm được vị trí của mình trong thế giới ngày càng phẳng và xích lại gần nhau hơn nhờ những bước tiến vũ bão của công nghệ.

Thế nhưng cũng ít người biết rằng, để có được những hoạch định ấy, người bạn trẻ này đã không ít lần bị thách thức bởi những bài toán hóc búa đặt ra từ chính cuộc sống ...

Báo chí trong nước dẫn nguồn tin từ các du học sinh Việt Nam tại Mỹ, về giai thoại ba lần bạn nhận được lời mời của Google (trong đó hai lần đầu từ chối). Lựa chọn và con đường đến với "gã khổng lồ" Google của bạn thực sự như thế nào? Đó hẳn là một quyết định đầy cân nhắc bởi bạn cũng có nhưng cơ hội đến từ Apple, Microsoft?

Con đường đến với Google của tôi rất dài. Tôi đã thay đổi từ chỗ muốn làm cho Google vì danh tiếng của công ty này đến chỗ đồng ý làm cho Google vì nghĩ rằng mình sẽ học được nhiều kinh nghiệm có ích từ họ.

Nhớ hồi năm nhất đại học, bỡ ngỡ và thiếu thông tin về các công ty, tôi đánh liều gửi hồ sơ xin thực tập ở Google. Họ nói "không phỏng vấn" vì tôi chưa từng có kinh nghiệm lập trình. Thấy vậy, tôi học một vài lớp lập trình ở Stanford rồi năm hai xin việc lại. Năm thứ hai đại học, tôi được phỏng vấn và vượt qua tất cả các câu hỏi của họ, nhưng cuối cùng không được nhận vì họ nói tôi "không hợp với các đề án thực tập". Lúc này tôi thật sự không hiểu Google muốn gì khi tuyển một ứng viên nữa.

Cũng trong thời gian này, suy nghĩ của tôi về việc học dần thay đổi. Tôi nhận ra mình phải học cái mà mình thích và cố gắng để trở thành một người có năng lực, chứ không phải học để kiếm một công việc hay để gây ấn tượng với một công ty nào cả. Nghĩ thế, tôi không quan tâm gì đến Google nữa. Tôi bắt đầu học về trí tuệ nhân tạo, thích gì học đó, và cố gắng để tiến bộ.

Năm ba, tôi lại nộp hồ sơ cho Google. Họ tuyển tôi vào thực tập, nhưng bằng một quy trình mà theo tôi là vô lý. Thứ nhất, các câu hỏi phỏng vấn của Google, theo tôi, là những câu hỏi xuất hiện đầy rẫy trong các sách giáo khoa hoặc biến đổi chút ít. Thứ hai, theo suy luận của tôi, với các câu hỏi dễ, phần lớn các ứng viên đều vượt qua vòng phỏng vấn. Google cho các kỹ sư của mình đọc lại hồ sơ của mọi người đã vượt qua vòng phỏng vấn để chọn xem ai hợp với các đề án thực tập. Những ai không hợp sẽ bị loại. Với tôi, "hợp với các đề án thực tập" là một thước đo đầy cảm tính và thiếu công bằng. Theo đó, nếu tôi không được nhận (điều này đã xảy ra ở năm hai đại học của tôi), tôi không hiểu tại sao. Còn khi tôi được nhận, tôi nghĩ việc mình được nhận chẳng có giá trị gì cả. Vì nghĩ vậy nên tôi từ chối Google, đồng thời nói với họ những suy nghĩ tôi vừa nói ở trên.

Sau khi tốt nghiệp, tôi lại được Google nhận làm việc chính thức. Lần này, tôi cảm thấy các câu hỏi phỏng vấn của họ đã bắt đầu làm khó mình. Nhưng khi tôi hỏi họ còn giữ chính sách "hợp với đề án" không và biết họ vẫn còn giữ, tôi nói với họ rằng tôi không cảm thấy thoải mái nếu cống hiến cho một công ty đối xử với ứng viên của mình như vậy, và tôi lại từ chối họ.

Phạm Hy Hiếu trong màu áo đội Cardinal của Đại học Stanford tham dự vòng chung kết Cuộc thi lập trình ACM dành cho sinh viên đại học toàn thế giới tổ chức tại Nga năm 2014. Việt Nam có một số sinh viên từng tham gia cuộc thi tin học quốc tế (IOI) được tham gia vòng chung kết thế giới trong màu áo các đại học MIT (Mỹ), NUS (Singapore), ... nhưng chuyển từ thi toán quốc tế (IMO) sang thi ACM thì Phạm Hy Hiếu là trường hợp đặc biệt - Ảnh CTV.

Đến tháng 3.2016 vừa rồi, Google một lần nữa mời tôi làm việc. Tôi lại hỏi chính sách tuyển dụng của họ, và khi biết rằng họ đã thay đổi, tôi bắt đầu cân nhắc việc làm sẽ vào làm cho Google. Lúc này, tôi so sánh Google với Facebook, Apple, Microsoft và việc đi học tiến sĩ ở Đại học Carnegie Mellon (CMU). Đây là một quyết định khó khăn. Tôi hỏi xin lời khuyên từ giáo sư hướng dẫn mình ở Stanford cũng như nhiều bậc đàn anh và cả các giáo sư có thể sẽ hướng dẫn mình ở CMU. Cuối cùng, sau khi suy nghĩ và nghe các lời khuyên, tôi quyết định sẽ làm việc ở Google Brain trong một năm rồi sẽ vào CMU làm tiến sĩ.

Bí quyết để "lọt vào mắt xanh" của những công ty hàng đầu đó là gì? Bởi thực tế ngay cả việc xét hồ sơ trao học bổng các trường đại học nhắm đến những học sinh giỏi và tài năng chứ không còn quan niệm con nhà nghèo học giỏi, trong khi đó các công ty nhắm đến những ứng viên có năng lực thực sự, ranh giới về vùng miền, chủng tộc hay quốc gia có vẻ rất mờ. Bạn có đồng tình quan điểm đó?

Bí quyết của tôi là đừng quan tâm đến các công ty đó. Có lần tôi được nghe một buổi nói chuyện của GS. Ngô Bảo Châu ở Đại học KHTN TP.HCM. Có một người hỏi giáo sư rằng ông có đặt kế hoạch đến khi nào thì nhận được giải thưởng Fields không. Câu trả lời của giáo sư làm tôi rất tâm đắc: "Không bạn ạ. Tôi nghĩ những ai đi nghiên cứu toán vì Giải thưởng Fields thì một là không được, hai là rất dễ vào bệnh viện tâm thần". Câu nói này đã trở thành "kim chỉ nam" cho định hướng học tập của tôi. Tôi học cái mà tôi thích và học theo sự đam mê của mình. Tôi học vì tôi muốn nâng cao năng lực của bản thân, để có thể cống hiến cho lĩnh vực mình yêu thích. Tôi nghĩ khi bạn đã có năng lực, Apple, Facebook, Google, Microsoft, hay bất cứ cái gì tương tự, sẽ tự tìm đến. Ngược lại, nếu bạn học vì những điều đó thì cơ hội của bạn sẽ giảm đi nhiều.

Tôi không đồng tình với quan điểm "ranh giới vùng miền, chủng tộc có vẻ rất mờ". Tôi tin rằng thế giới của chúng ta ngày càng phẳng và gần nhau hơn, nhưng ở chừng mục nào đó, các ranh giới trên vẫn còn đó. Tôi hy vọng trong tương lai, các ranh giới này mờ dần và tiến tới chỗ cơ hội mở ra cho tất cả mọi người.

Hãy kể một chút về công việc hiện nay đi bạn?

Tôi đang tham gia nghiên cứu sau đại học về trí tuệ nhân tạo ở Đại học Stanford. Hướng nghiên cứu của tôi là các ứng dụng của mạng nơ-rôn giúp máy tính hiểu được ngôn ngữ của con người. Tôi tập trung vào các nghiên cứu đa ngôn ngữ, nhằm giúp máy tính hiểu và giao tiếp được với người dùng bằng nhiều ngôn ngữ khác nhau. Hiện nay, nhiều trí tuệ nhân tạo tương tác với con người bằng tiếng Anh tốt hơn so với các ngôn ngữ khác. Nguyên nhân là do sự phổ biến của tiếng Anh, khiến người ta có thể dễ dàng thu thập dữ liệu cho máy tính học. Tuy nhiên, nếu máy tính có thể sử dụng các ngôn ngữ khác, cũng tốt như tiếng Anh, thì người dân ở nhiều nước trên thế giới sẽ có thể tiếp cận các công nghệ này.

Khi các công nghệ đa ngôn ngữ trở nên hoàn thiện hơn, tôi tin rằng con người không nhất thiết phải học tiếng Anh chỉ để nhằm mục đích tiếp cận công nghệ. Thay vào đó, họ có thể đầu tư thời gian rèn luyện thật giỏi một kỹ năng nào đó, sau đó dựa vào máy tính để tiếp nhận và truyền đạt kiến thức của mình cho toàn thế giới.

Từ tháng 6.2016, tôi sẽ bắt đầu làm việc ở Google và sau đó một năm sẽ bước vào chương trình tiến sĩ của CMU. Có thể hướng nghiên cứu của tôi sẽ thay đổi. Tôi không nói trước được, phải nhờ vào duyên số thôi.

Vừa qua mọi người quan tâm sự kiện trí thông minh nhân tạo chiến thắng con người. Bạn có thể cho mọi người hình dung một chút về AlphaGo? Theo bạn, tại sao chiến thắng đó được giới nghiên cứu trí tuệ nhân tạo đánh giá cao?

AlphaGo là một hệ thống sử dụng hai mạng nơ-rôn tương tác với nhau. Một mạng nơ-rôn tìm ra nước cờ tốt nhất cho mỗi lượt đi, còn mạng kia đánh giá thế cờ xem lợi thế hay thiệt hại của chương trình so với đối thủ như thế nào.

Chiến thắng của AlphaGo được đánh giá cao vì Go (cờ vây) là một trò chơi được cho rằng rất khó đối với trí tuệ nhân tạo. Trước AlphaGo, các chuyên gia về trí tuệ nhân tạo vẫn tin rằng sớm muộn gì máy tính cũng sẽ chiến thắng con người về cờ vây, tuy nhiên họ dự đoán rằng điều đó sẽ xảy ra trong vòng 10 năm, tức là khoảng năm 2025.

Thành công của AlphaGo cho thấy tốc độ phát triển của trí tuệ nhân tạo đã vượt qua dự đoán của họ, vì thế nó được đánh giá cao. AlphaGo cũng mở ra nhiều hướng đi mới trong nghiên cứu trí tuệ nhân tạo. Các thuật toán dùng trong trí tuệ nhân tạo này cũng có thể được ứng dụng để giúp máy tính hiểu được ngôn ngữ tự nhiên hay nhận diện được giọng nói và hình ảnh. Ngoài ra, thành công của AlphaGo cũng khiến các nghiên cứu về trí tuệ nhân tạo nhận được nhiều sự quan tâm hơn của cộng đồng. Thông qua đó, các nghiên cứu này có thể thu hút nhiều nguồn đầu tư, từ đó tạo ra tiềm năng phát triển thêm.

Là người đang góp phần giúp cho những cỗ máy trở nên thông minh, biết tư duy và cảm xúc, có bao giờ bạn lo ngại con người sẽ bị chính máy móc điều kiển lại? Bởi, theo một cách hiểu nào đó, con người đang làm biếng suy nghĩ mà phụ thuộc vào công nghệ; hiện chứng nghiện smartphone hay mạng xã hội đang làm con người ít giao tiếp với nhau, tưởng rất gần nhưng lại rất xa?

Trí tuệ nhân tạo đúng là đang phát triển rất nhanh, nhưng chúng còn rất xa mới đến chỗ có thể điều khiển được con người. Lo lắng về điều đó trong lúc này sẽ chỉ khiến các nghiên cứu trí tuệ nhân tạo mất tập trung một cách không cần thiết. Bản thân tôi không cho rằng con người đang làm biếng suy nghĩ hay phụ thuộc vào công nghệ. Trước khi có máy tính, con người phải tự thực hiện rất nhiều phép toán. Sau khi các ứng dụng tính toán được phát triển, chúng ta sử dụng các ứng dụng này thay mình, nhưng chúng ta đâu có nói mình phụ thuộc vào các ứng dụng này? Trí tuệ nhân tạo cũng vậy. Tôi nghĩ chúng chỉ là những phần mềm giúp chúng ta làm việc hiệu quả hơn, tiết kiệm công sức và thời gian để tập trung cho những công việc quan trọng hơn.

Bạn có dõi theo hoạt động cũng như đời sống toán học trong nước? Những chuyển động đó mang lại cho bạn suy nhĩ gì về những thế hệ đàn em đang tiếp bước?

Tôi không có chuyên môn về toán cao cấp nên không hiểu được nhiều về các nghiên cứu và hoạt động chuyên sâu về toán, cả trong và ngoài nước. Hoạt động toán học duy nhất trong nước mà tôi còn theo dõi được là phong trào olympic toán. Tôi thấy bây giờ việc dạy và học toán olympic trong nước đã cởi mở hơn. Các em học sinh do đó có nhiều cơ hội hơn để tiếp xúc với các tài liệu cũng như tham gia các hoạt động giao lưu và học hỏi. Do đó, chất lượng dạy và học đang tăng lên. Tôi nghĩ nếu các em biết kiên trì với đam mê và định hướng của mình, các em sẽ đi xa hơn thế hệ chúng tôi.

Toán học đang hỗ trợ cho bạn như thế nào trong công việc hiện nay – nghiên cứu về trí tuệ nhân tạo? Thuật toán học sâu - Deep Learning có vẻ là hướng đi khá thời thượng cho việc nghiên cứu trí tuệ nhân tạo? Cơ hội này có quá tầm cho các bạn trẻ Việt Nam?

Việc bạn bước ra khỏi trường đại học như thế nào quan trọng hơn rất nhiều so với việc bạn bước vào trường đại học nào.

Toán xây dựng cho tôi một đầu óc biết tư duy logic và không sợ công thức. Điều này có thể hơi buồn cười, nhưng hiện nay có nhiều kỹ sư phần mềm và thậm chí là các nhà nghiên cứu rất sợ nhìn thấy các phương trình toán học. Điều này dẫn đến nhiều sản phẩm công nghệ được tạo ra một cách máy móc mà không hiểu tại sao mình làm như thế lại cho ra kết quả tốt. Điều này về lâu dài sẽ tạo ra rào cản cho sự phát triển các thuật toán và sản phẩm mới. Tôi cảm thấy mình may mắn vì chẳng những không sợ toán mà còn thích thú đào sâu tìm hiểu về bản chất toán học của nhiều thuật trong trí tuệ nhân tạo.

Deep learning đúng là hướng đi thời thượng hiện nay và có thể là trong nhiều năm nữa.Thuật toán này đã chuyển các khó khăn trong trí tuệ nhân tạo từ việc thu thập dữ liệu, vốn mất thời gian và tốn kém, thành việc lập trình được những mạng nơ-rôn lớn, có khả năng xử lý nhiều dữ liệu đơn giản một cách nhanh và hiệu quả.Với sự phát triển của phần cứng máy tính, việc giải quyết nhìn chung là khả thi hơn. Vì thế deep learning mới đạt được nhiều thành tựu như vậy.

Deep learning cũng không hề quá tầm so với các bạn trẻ ở Việt Nam. Ngược lại, nó đang trở nên phổ biến và dễ tiếp cận hơn nhiều. Lấy ví dụ, năm 2012, TS. Lê Viết Quốc cùng Google công bố một phương pháp dùng deep learning để xây dựng khái niệm con mèo từ các video YouTube bằng cách kết hợp 16.000 CPU của rất nhiều máy tính. Giá của mô hình này thời điểm đó khoảng 1 triệu USD. Tuy nhiên, chỉ vài tháng sau đó, một nhóm nghiên cứu của Stanford đã công bố một mô hình deep learning khác, có thể cho ra kết quả tương tự nhưng chỉ có giá khoảng 20 nghìn USD. Đó là năm 2012, còn hiện nay các thiết bị này có thể mua được với vài nghìn USD. Chi phí này, theo tôi, không phải là quá tầm đối với nhiều cơ sở nghiên cứu của nước ta hiện nay. Một khi đã có được thiết bị, làm được hay không hoàn toàn phụ thuộc vào con người.

Đâu là lựa chọn khó nhất của bạn trong công việc và cuộc sống?

Điều khó nhất tôi từng lựa chọn là từ chối học bổng của Đại học NUS (Singapore) đồng thời ở nhà một năm để học tiếng Anh và tìm học bổng để đi Mỹ. Thật ra đây không phải là lựa chọn của tôi mà là định hướng của bố mẹ. Càng về lâu dài, tôi và gia đình càng nhận ra đây là một quyết định sai lầm. Nó để lại nhiều hậu quả cho bản thân tôi mà đến bây giờ tôi vẫn đang phải khắc phục.

Và bạn đã dung hoà và giữ được sự tự lập, thích nghi với môi trường mới như thế nào? Nếu được lựa chọn lại, bạn có phủ nhận ước mơ trước đây về Singapore là hơi lãng mạn, mang tính háo hức của tuổi trẻ?

Bây giờ mỗi khi nghĩ lại chuyện Singapore, tôi vẫn chưa vượt qua được cảm giác tiếc nuối. Để đi du học đại học ở Mỹ, tôi phải trả cái giá quá đắt đối với tôi: một năm không được học và làm những điều mình thích. Thời cấp ba, tôi chỉ đầu tư cho các cuộc thi học sinh giỏi nên trình độ tiếng Anh không đủ để vượt qua các kỳ thi chuẩn hóa vào đại học của Mỹ như TOEFL và SAT. Tôi cũng không hiểu biết gì về phong tục và văn hóa của người Mỹ để viết một essay tuyển sinh cho họ đọc. Cái giá của tất cả những điều này là một năm bỏ ra để học những điều tôi chưa từng quan tâm trước đó.

Một năm này đối với tôi tai hại vô cùng. Tôi phải học những điều tôi cho là vô nghĩa. Tai hại hơn, để học tiếng Anh và văn hóa Mỹ, tôi phải cấm bản thân mình không được học toán, bởi chỉ cần đụng vào toán, tôi sẽ dễ dàng bỏ ra vài giờ để tìm hiểu một vấn đề mình thích mà quên đi nhiệm vụ chính: học tiếng Anh. Những ai đã từng thi toán olympiad đều hiểu, chỉ cần vài tuần không luyện tập, kỹ năng từng rèn luyện nhiều năm sẽ mất dần đi, đừng nói gì đến một năm như tôi.

Điều tồi tệ nhất, tôi cảm thấy lòng tự trọng của mình bị xúc phạm. Tôi tham gia vào một vài nhóm tư vấn dành cho các bạn trẻ xin vào các đại học lớn ở Mỹ. Trong các nhóm này, tôi được nghe rằng các thành tích trong những cuộc thi olympiad không có giá trị trong mắt các nhà tuyển sinh. Họ chỉ quan tâm đến điểm SAT cao.

Phạm Hy Hiếu (áo trắng) nhận giải thưởng Ben Wegbreit dành cho luận văn tốt nghiệp xuất sắc nhất của khoa Khoa học máy tính, Đại học Stanford 2015 - Ảnh tư liệu của gia đình.

Tuy nhiên điểm SAT của tôi không cao. Tôi thi 4 lần mới được 2.090, điểm số nằm trong 25% thấp nhất trong khóa học tại Stanford của tôi. Khi tôi vào Stanford, điểm SAT đã không cao mà kỹ năng toán của tôi cũng giảm sút. Hồi năm nhất, có lần một giáo sư nói chuyện với tôi có đề cập đến bổ đề Cauchy-Davenport. Tôi nhớ tên của bổ đề này, nhưng không thể nhớ nổi nội dung của nó. Vị giáo sư này ngạc nhiên vì sao tôi có thể đại diện Việt Nam tại IMO mà không biết bổ đề quan trọng này. Tôi xấu hổ vô cùng. Tôi kể điều này để thấy rằng, tôi phải bỏ lại những điều mình đã mất rất nhiều thời gian và công sức để học như thế nào. Tôi còn gặp nhiều rắc rối khác với Stanford. Từ ngôn ngữ, văn hoá, cách sinh hoạt, cách hoà nhập. Tôi sống qua thời đại học với nhiều buồn hơn là vui.

Đổi lại, tôi tin rằng nếu đi Singapore, điều đầu tiên là tôi không phải mất một năm để học SAT, TOEFL, ... Xung quanh tôi cũng sẽ có nhiều bạn bè mà tôi đã quen từ cấp 3 hơn. Những người bạn đó, tôi tin là họ hiểu tôi và có thể giúp tôi cùng học tập, cùng tiến bộ, tốt hơn nhiều so với thực tế mà tôi phải trải qua.

Tôi xin gửi đến bản thân tôi của 6 năm trước, cũng như những bạn trẻ đang nghĩ về đại học, du học, v.v. một lời nhắn nhủ: Hãy hỏi bản thân các bạn thích điều gì và cố gắng làm điều đó thật tốt. Đừng vì cái tên Stanford, MIT hay Harvard hay bất cứ gì mà "gác lại" đam mê của mình, để làm một điều mình không thích. Bởi vì nếu bạn không nuôi dưỡng, đam mê sẽ từ bỏ bạn. Cuộc đời của các bạn có khoảng 4 năm ở trường đại học và phần sau đó dài hơn rất nhiều. Vì thế, việc bạn bước ra khỏi trường đại học như thế nào quan trọng hơn rất nhiều so với việc bạn bước vào trường đại học nào. Dù các bạn thích toán, tin học, văn học, piano, nhảy hiện đại hay hoạt động xã hội, đam mê của các bạn đều đáng trân trọng như nhau. Hãy đầu tư vào đam mê đó. Chính những điều này sẽ là chìa khoá để các bạn thành công.

Ai là người ảnh hưởng tới bạn, đến lựa chọn con đường đi, những ước mơ sau này của bạn nhiều nhất?

Tôi nhận được nhiều ảnh hưởng trong việc định hình tính cách từ chính bố mẹ của mình. Tôi học từ mẹ tôi cá tính phải bảo vệ quan điểm của mình cho đến khi biết được mình đã sai. Thật ra chính sự cứng nhắc này cũng khiến mẹ tôi và tôi nhiều lần bất đồng quan điểm. Càng lớn, tôi càng bảo vệ được quan điểm của mình trước mẹ. Ngược lại, tôi học từ bố mình đức tính coi trọng năng lực của con người và phần nào quan niệm về sự được - mất ở đời. Khi tôi làm việc trong một nhóm và đạt được phần thưởng, tôi thường tự đóng góp phần của mình vào một cuộc liên hoan hoặc vào quỹ chung. Bởi lẽ tôi quan điểm rằng cái quý nhất, là kỹ năng để đạt được phần thưởng kia, thì mình đã học được rồi.

Là người có trải nghiệm môi trường học khá đặc biệt, bởi trong nước bạn được học tại những trường Top đầu của thành phố, và đi du học với học bổng toàn phần đại học và thạc sĩ của Stanford. Dành được nhiều phần thưởng giá trị trong thời gian đi học, đặc biệt là bằng danh dự Stanford. Những phần thưởng đó ngẫu nhiên đến với bạn hay đó là những mục tiêu bạn ngắm đến từ trước? Bạn có thấy bản thân mình may mắn? Bí quyết sống và học nơi xứ người, duy trì được "phong độ" là gì?

Tôi nghĩ rằng mình đã gặp nhiều may mắn. Người ngoài nhìn vào tôi bây giờ có thể sẽ thấy các giải thưởng, những lời mời làm việc và những học bổng. Nhưng bất cứ ai thân với tôi sẽ hiểu tôi đã trải qua những thời khắc khó khăn như thế nào. Tôi chưa từng dám nghĩ mình sẽ đạt được những gì tôi đang có hiện nay. Tôi cảm thấy những điều đó đến với tôi một cách ngẫu nhiên, như một nụ cười của số phận, khuyến khích tôi hãy tiếp tục theo đuổi con đường mình chọn.

Khi tôi làm việc trong một nhóm và đạt được phần thưởng, tôi thường tự đóng góp phần của mình vào một cuộc liên hoan hoặc vào quỹ chung. Bởi lẽ tôi quan điểm rằng cái quý nhất, là kỹ năng để đạt được phần thưởng kia, thì mình đã học được rồi.

Hiện tại, tôi vẫn đang tìm bí quyết để sống vui vẻ và học tập, làm việc hiệu quả ở xứ người. Tôi nghĩ điều quan trọng nhất là xác định được một đam mê, một mục tiêu gắn liền với đam mê đó và một định hướng để đạt được mục tiêu này. Nhìn vào tương lai, tôi chỉ thấy mình cần bổ sung nhiều hiểu biết về trí tuệ nhân tạo, trau dồi các kỹ năng lập trình và phát triển các kỹ thuật nghiên cứu khoa học của bản thân. Tôi không thể biết mình sẽ đi đến đâu, nhưng tôi nghĩ cuộc đời như thế mới thú vị.

Nhiều người đánh giá bạn là người tài nhưng cũng đầy cá tính, không ngại bộc lộ quan điểm cá nhân. Tính cách mạnh mẽ đó được hình thành nhờ những yếu tố gì?

Cảm ơn những người đã đánh giá cao về tôi. Tôi chưa nghĩ mình là người tài năng, còn cá tính của tôi hình thành khi tôi suy nghĩ về hậu quả của những lần mình im lặng. Ví dụ, ở trên tôi đã trả lời việc không đi Singapore gây ra cho tôi những hậu quả như thế nào. Một trong những lý do là vì tôi im lặng, không nói lên quan điểm của mình khi bố mẹ tôi nói tôi phải đi Mỹ. Tôi nghĩ nếu được nghe những điều tôi đáng lẽ nên nói, bố mẹ tôi sẽ nghĩ lại và giúp tôi có được quyết định tốt hơn cho cuộc sống của mình. Vì vậy, bây giờ tôi luôn phải nói lên những gì mình nghĩ. Như thế, dù tôi có sai, tôi cũng có cơ hội bảo vệ quan điểm của mình cho đến khi tôi nhận ra những quan điểm đó là sai.

Phương châm, hay triết lý cuộc sống của bạn là gì? Bạn có lựa chọn một câu châm ngôn nào cho riêng mình?

Tôi đã quan niệm mình phải tìm được một việc mình thích làm và làm thật giỏi việc đó. Đây là cách tốt nhất để cống hiến cho xã hội. Tôi thường xuyên gặp bế tắc trong việc tìm ra con đường cho mình, từ những quyết định cá nhân cho đến các vấn đề nghiên cứu, học tập. Hiện nay, tôi nghĩ điều tốt nhất nên làm là bước lên phía trước. Có thể bạn sẽ vấp ngã nhưng từ những sai lầm của mình, bạn sẽ tìm ra con đường tốt cho bản thân. Vì thế, tôi rất thích câu của Lỗ Tấn "Trên đời này làm gì có đường. Người ta đi mãi thì thành đường thôi". Tôi cũng thích một phiên bản "văn học mạng" của câu nói này, nghe có vẻ "thơ" hơn: "Cứ đi. Phía trước sẽ có đường."

Dành được không ít vinh quang nhưng có khi nào bạn thấy mình thất bại hay bế tắc? Bạn đã vượt qua điều đó như thế nào?

Tôi thất bại nhiều hơn thành công rất nhiều lần. Đối với tôi, thất bại rất khó chịu, nhưng không bao giờ là dấu chấm hết. Thất bại luôn sửa chữa được. Tôi làm thí nghiệm huấn luyện cho máy tính học bằng một thuật toán mới, để rồi nhận ra thuật toán của mình hoàn toàn sai và máy... chẳng học được gì cả. Đó là loại thất bại không làm mất quá nhiều thời gian để sửa. Nó làm tăng thêm kinh nghiệm của tôi, tôi chỉ cần ghi lại và tự nói với mình rằng sau này đừng dùng thuật toán đó nữa.

Giáo dục gia đình đã ảnh hưởng nhiều đến tính cách của Hy Hiếu trong nghiên cứu. Trong ảnh Hy Hiếu cùng mẹ và em trai - Ảnh Tư liệu gia đình.

Cũng có loại thất bại cần nhiều thời gian hơn để sửa chữa. Trước đây, có một lần tôi đến xin giáo sư hướng dẫn của mình viết thư giới thiệu để xin vào chương trình Tiến sĩ. Lúc đó kinh nghiệm nghiên cứu của tôi chưa nhiều. Thầy nói thẳng với tôi là nếu tôi chưa viết được một bài báo khoa học với thầy thì thầy có viết gì đi nữa, cơ hội tôi đậu vào Tiến sĩ cũng rất thấp. Tôi nhớ hôm đó gặp thầy xong, mình đi lang thang khắp nơi, chẳng thiết làm việc gì cả. Nhưng cũng nhờ đó mà tôi hiểu ra tầm quan trọng của việc công bố những công trình trong chặng đường nghiên cứu của một nhà khoa học. Một năm sau đó, sau khi làm và công bố một số nghiên cứu, tôi gặp lại vị giáo sư này và hỏi xin thư giới thiệu. Thầy đồng ý viết và tôi đã đạt được những gì mình muốn.

Tôi nghĩ điểm mấu chốt để vượt qua thất bại là kiểm soát được cảm xúc của bản thân, tìm ra những điều mình đã làm chưa đúng để dẫn đến thất bại và sau này đừng làm như vậy nữa. Nói thì dễ, nhưng bản thân tôi nhiều khi cũng không làm được.

Còn trong công việc, mục tiêu tối thượng mà bạn hướng tới là gì? Hãy chia sẻ về lựa chọn khi đến với chương trình Tiến sĩ của Đại học Carnegie Mellon (CMU) đi Hiếu? Ước mơ nào mà bạn đang tiếp tục đeo đuổi?

Có nhiều lý do khiến CMU là một môi trường nghiên cứu lý tưởng đối với tôi. Thứ nhất, ở CMU có nhiều chuyên gia hàng đầu về lĩnh vực hẹp của tôi là xử lý ngôn ngữ tự nhiên. Khi lựa chọn trường để làm tiến sĩ, không những phải nghĩ đến danh tiếng của người giáo sư hướng dẫn mà còn phải nghĩ đến việc vị giáo sư đó có thời gian dành cho mình không, có thể quan tâm đến đề tài của mình không, ... Tôi thấy CMU có đủ những điều này. Thứ hai, CMU nằm ở thành phố Pittsburgh, một nơi tương đối cách biệt với các thành phố lớn khác của Mỹ nhưng lại không cô lập. Tôi hy vọng sự cách biệt này có thể giúp tôi tập trung vào việc nghiên cứu mà không bị phân tâm vì những yếu tố bên ngoài.

Tôi từng mơ ước mình trở thành một giáo sư để dẫn dắt các nghiên cứu trí tuệ nhân tạo và giảng dạy lại kiến thức mình tích luỹ được cho các thế hệ sau. Tuy nhiên, càng ngày tôi càng nhận ra có rất nhiều cách để cống hiến cho xã hội. Tôi không biết liệu mình có thể trở thành một giáo sư được không – cái đó còn phải nhờ vào cái duyên nữa. Hiện tại tôi chỉ muốn học được thật nhiều để mở rộng hiểu biết, trau dồi các kỹ năng.

VỀ PHONG TRÀO OLYMPIC TOÁN Ở SAUDI ARABIA

Võ Quốc Bá Cẩn
(Archimedes Academy)

Hai năm trở lại đây, chúng tôi có may mắn được sang thăm và làm việc cùng đội tuyển Toán Saudi Arabia một thời gian. Những ngày tháng làm việc tại đây đã cho chúng tôi hiểu thêm về phong trào học Toán phổ thông ở xứ Hồi giáo này.

Bài viết dưới đây xin được chia sẻ những cảm nhận của chúng tôi về cách các thành viên đội tuyển Olympic nước bạn học Toán. Những chia sẻ ở đây có phần hơi chủ quan nhưng hy vọng rằng bạn đọc sẽ có cái nhìn khái quát về phong trào ở nước bạn, cũng như thấy được những cái hay, cái chưa hay để rút kinh nghiệm cho mình.

Trước hết, xin được nói qua về cách thức tổ chức tuyển chọn và bồi dưỡng học sinh giỏi ở Saudi Arabia. Trước đây, Saudi Arabia tổ chức tuyển chọn những em học sinh có năng khiếu về Toán học bồi dưỡng ở Riyadh. Sau đó, trước mỗi kỳ thi Quốc tế quan trọng, các em sẽ được làm bài thi loại, những bạn có kết quả làm bài tốt nhất sẽ được chọn vào đội tuyển đi thi với hy vọng mang vinh quang về cho nước nhà.

Từ năm 2014 đến nay, Saudi Arabia có chương trình hợp tác huấn luyện với thầy Lê Anh Vinh, những khóa học tập trung được chuyển về trường Đại học Khoa học và Công nghệ mang tên nhà vua Abdullah (gọi tắt là KAUST). Các học sinh sẽ được tập huấn trực tiếp với các huấn luyện viên từ Việt Nam sang về các chủ đề liên quan đến Olympic Toán. Và ngoài những khóa học tập trung này, học sinh cũng được rèn luyện trực tuyến ở nhà với những bài tập được thầy Vinh trực tiếp biên soạn và đưa lên website của mình hàng tuần.

Các em học sinh level 3, 4 cùng các huấn luyện viên

Tiếp theo, chúng tôi sẽ phân tích những điểm tốt và điểm chưa tốt về phong trào học Toán ở đây.

Điểm tốt: Các em học sinh rất thân thiện, năng động, thích đào sâu suy nghĩ những vấn đề mà giáo viên giao và thường xin thêm thời gian để tìm cách giải các bài toán khi giáo viên yêu cầu được chữa để tiếp tục bài giảng.

Sự tương tác của các em với giáo viên thực sự rất tốt. Chúng tôi đã rất bất ngờ ở buổi giảng đầu tiên của mình, khi hầu như em nào cũng muốn chia sẻ ý kiến về vấn đề mà chúng tôi giảng. Nhờ đó mà vấn đề càng thêm sáng tỏ, lớp học trở nên sôi động hơn hẳn, khiến người thầy cũng trở nên hào hứng hơn khi giảng bài.

Điều này trái ngược với ở Việt Nam, học sinh thường rụt rè hơn khi trao đổi với giáo viên. Nhiều em chỉ tiếp nhận bài giảng của thầy cô một cách thụ động mà không dám đặt vấn đề hay đưa ra ý kiến cá nhân. Có lẽ học sinh Việt Nam ta nên thay đổi dần cách học để trở nên tích cực hơn.

Các em học sinh level 4+ cùng các huấn luyện viên

Điểm chưa tốt: Tương tác tốt trên lớp là vậy, nhưng khả năng tự học của học sinh ở đây chưa được tốt. Học sinh khá lười ghi chép bài vở khi học trên lớp, do đó khi về nhà thường không xem lại bài để hiểu rõ vấn đề hơn, và các em… hay quên. Sẽ rất khó để nhớ và hiểu những lý thuyết khó nếu như chúng ta không nghiền ngẫm thường xuyên. Chúng tôi vẫn thường… "thử" các em bằng cách cho lại những bài toán đã dạy ở buổi trước vào các buổi tiếp theo cách buổi đầu hơi xa một chút, và sự thật là có rất ít em nhận ra các bài toán đó.

Một điều đáng nói nữa là các em không tự giác cao khi ở nhà, không tìm kiếm tài liệu để đọc thêm. Cũng như đề cập ở trên, thầy Vinh có đưa lên website của mình các bài tập để học sinh rèn luyện thêm, nhưng có rất ít em chịu làm và nộp bài (dù điều đó gần như là bắt buộc). Rõ ràng là nếu chỉ phụ thuộc vào những điều giáo viên giảng trên lớp thì khó có thể có những tiến bộ đáng kể được.

Học sinh ở đây chỉ thích thử sức những bài toán trong đề thi Olympic Toán thay vì tập trung xây dựng cho mình một nền tảng Toán thật tốt rồi mới luyện các bài Olympic. Mỗi khi chúng tôi giảng lý thuyết, nhiều em tỏ ra ngán ngẩm, không tập trung, có em còn làm việc riêng. Cứ bài toán nào thầy cho mà "dáng dấp" khác Olympic Toán là các em không cố gắng làm, có bạn đã biện minh rằng những bài như thế sẽ không bao giờ xuất hiện trong các kỳ thi Toán.

Điều này trái ngược với cách học Toán khoa học là phải thấm nhuần ý tưởng trong các lý thuyết Toán học rồi mới "luyện" các bài Olympic để tiếp cận các ý tưởng mới. Một cái cây sẽ không thể đứng vững nếu phần gốc bị sâu mọt.

Tuy nhiên, một điều đáng mừng là sau hai năm làm việc cùng các bạn đội tuyển Saudi, chúng tôi cũng dần tác động và cải thiện được tư tưởng của các em. Nhiều em đã bắt đầu ghi chép bài vở cẩn thận để về xem lại, có em cũng đã tìm đến các diễn đàn Toán mà chúng tôi giới thiệu để tìm kiếm thêm tư liệu tự trau dồi, rèn luyện.

Có một điều hạn chế nữa thuộc về vấn đề tôn giáo, Saudi Arabia là một quốc gia Hồi giáo với 100% dân số theo đạo Hồi, mà tín đồ Hồi giáo mỗi ngày phải cầu nguyện 5 lần từ sáng sớm cho đến tối. Do đó, thời gian học của học sinh bị ảnh hưởng khá lớn, gần một phần ba thời gian các buổi học chỉ dành cho việc cầu nguyện.

Ngoài ra, cũng do tôn giáo nên ở Saudi, nam nữ nếu không phải cùng huyết thống hoặc có quan hệ vợ chồng thì không được nói chuyện tự do với nhau, không được ngồi gần nhau. Có cả một đội ngũ cảnh sát tôn giáo chuyên kiểm soát việc này. Do đó, nam nữ không được học chung với nhau.

Ở KAUST thì mọi việc thoáng hơn một chút vì ở đây học viên đa phần là du học sinh quốc tế, nam nữ có thể học chung với nhau. Nhưng do tư tưởng tôn giáo đã thấm vào các em nên học sinh nam và học sinh nữ thường không trao đổi ý kiến với nhau, thậm chí có những bài toán các em nữ làm được, giáo viên yêu cầu lên bảng trình bày lại cho các bạn khác cùng nghe thì các em nam cũng thường không tập trung lắng nghe bạn trình bày. Điều này cũng gây ảnh hưởng ít nhiều đến hiệu quả học tập của lớp học.

Đó là điều chúng tôi nhận thấy được khi làm việc ở đây, tuy nhiên do đây là vấn đề thuộc về tôn giáo, văn hóa của nước bạn nên chúng ta chỉ có thể tôn trọng mà không thể góp ý.

Mặc dù còn nhiều điểm chưa tốt, nhưng mọi việc vẫn đang chuyển biến theo chiều hướng tích cực. Điều đó thể hiện rõ ràng qua kết quả của đội tuyển Saudi ở các kỳ thi Quốc tế. Đội tuyển đã đạt kết quả tốt hơn so với các năm trước, thậm chí đã có huy chương vàng ở BMO, JBMO, APMO, điều chưa từng có ở những năm trước đây.

Tin rằng với việc đổi mới tư tưởng của học sinh, phong trào Olympic Toán ở Saudi Arabia sẽ ngày càng phát triển tích cực hơn. Bài viết xin được kết thúc ở đây.

BÀI TOÁN HAY LỜI GIẢI ĐẸP

Trần Nam Dũng
(Đại học Khoa học Tự nhiên - ĐHQG TP.HCM)

LỜI GIỚI THIỆU

Chuyên mục này được lấy cảm hứng từ bài viết của thầy Nguyễn Duy Liên ở số báo trước về bài toán số 6 trong kỳ thi IMO 2001 với 5 cách giải khác nhau. Mục này sẽ để dành viết về những bài toán hay, lời giải đẹp và những câu chuyện thú vị xung quanh những bài toán và lời giải đó.

Tên của chuyên mục được mượn từ tên của một nhóm những người yêu toán trên Facebook do anh Nguyễn Văn Lợi sáng lập "*Bài toán hay – Lời giải đẹp – Đam mê toán học*". Chuyên mục ghi nhận các đề cử của bạn đọc và sẽ chọn đăng mỗi kỳ 1, 2 bài toán.

Số này chúng tôi sẽ giới thiệu với bạn đọc về bài toán số 6 trong đề thi toán quốc tế năm 1995 với những lời giải sau này đã được đưa vào những sách giáo khoa về phương pháp giải toán.

Bài toán. *(IMO 1995, bài toán 6) Cho p là số nguyên tố lẻ. Có bao nhiêu tập con A gồm p phần tử của tập hợp $\{1, 2, \ldots, 2p\}$ có tổng các phần tử chia hết cho p?*

Chứng minh. Đặt $X = \{1, 2, \ldots, p\}$, $Y = \{p+1, p+2, \ldots, 2p\}$. Với tập con $A \subset X$ ta định nghĩa phép tịnh tiến theo số k là $k + A = \{y \in X : y \equiv k + x \pmod p$, với $x \in A$ nào đó$\}$. Ta cũng định nghĩa điều tương tự trong Y.

Bây giờ ta chú ý rằng nếu $P \subset \{1, 2, \ldots, 2p\}$ và $|P| = p$ thì $P = X$, $P = Y$ hoặc $0 < |P \cap X|, |P \cap Y|$.

Tiếp theo ta xét $P \neq X, Y$ và định nghĩa

$$k + P = (k + (P \cap X)) \cup (P \cap Y),\ k \in X.$$

Chú ý rằng vì $0 < |P \cap X| < p$ nên tổng của các phần tử của $k + P$ sẽ lấy mọi thặng dư modulo p, trong đó chỉ có một thặng dư là thỏa mãn bài toán của chúng ta. Ta có thể định nghĩa quan hệ tương đương trên các tập hợp $P \subset \{1, 2, \ldots, 2p\}$ với p phần tử, $P \neq X, Y$ như sau:

$$P \sim Q \Leftrightarrow (P \cap Y = Q \cap Y \ \ \&\ \ k + P \cap X = Q \cap X,\ k \in X).$$

Quan hệ tương đương này xác định một phân hoạch của họ các tập con p phần tử của $\{1, 2, \ldots, 2p\}$ khác với X và Y. Mỗi một lớp tương đương của phân hoạch có p phần tử và từ mỗi lớp có đúng một phần tử thỏa mãn điều kiện của bài toán.

Suy ra đáp số của bài toán là $\frac{C_{2p}^p - 2}{p} + 2$. $\square$

Chứng minh. Gọi ω là căn nguyên thủy bậc p của đơn vị. Khi đó

$$\prod_{i=1}^{2p}(x-\omega^i)=(x^p-1)^2=x^{2p}-2x^p+1.$$

So sánh hệ số của x^p ta có

$$2=\sum \omega^{i_1+i_2+\cdots+i_p}=\sum_{j=0}^{p-1} n_j\omega^j.$$

Trong đó tổng thứ nhất tính theo tất cả các tập con p phần tử $\{i_1,\, i_2,\, \ldots,\, i_p\}$ của $\{1,\, 2,\, \ldots,\, 2p\}$ và n_j trong tổng thứ hai là số các tập con sao cho

$$i_1+i_2+\cdots+i_n\equiv j \pmod p.$$

Từ đây suy ra rằng ω là nghiệm của

$$G(x)=(n_0-2)+\sum_{j=1}^{p-1} n_j x^j,$$

là một đa thức có bậc $p-1$. Vì đa thức tối tiểu của ω trên trường các số hữu tỷ là $F(x)=1+x+\cdots+x^{p-1}$, cũng có bậc $p-1$. Từ đây suy ra $G(x)$ phải có dạng $k\cdot F(x)$ với k là hằng số. Như thế $n_0-2=n_1=n_2=\cdots=n^{p-1}$. Vì

$$n_0+n_1+\cdots+n_{p-1}=C_{2p}^p,$$

nên từ đây ta suy ra $n_0=\frac{C_{2p}^p-2}{p}+2.$ □

Lời giải thứ nhất, sử dụng phân hoạch và song ánh, thuộc về tác giả bài toán, Marcin Kuczma, trưởng đoàn Ba Lan. Lời giải thứ hai, sử dụng số phức, cụ thể là căn đơn vị, thuộc về Roberto Dvornicich, trưởng đoàn Ý. Nikolay Nikolov, học sinh người Bulgaria đã được trao giải đặc biệt cho lời giải của mình, khá giống với lời giải thứ hai nhưng trình bày cô đọng hơn nữa, chỉ trong 2 dòng. Nikolay đã đoạt 2 huy chương vàng và 1 huy chương bạc trong các kỳ IMO trước đó và tại kỳ IMO năm 1995 đã đoạt giải quán quân với số điểm tuyệt đối. Đoàn Việt Nam năm đó có bạn Ngô Đắc Tuấn giải được bài này.

ĐỒNG NHẤT THỨC BRAHMAGUPTA - FIBONACCI VÀ ỨNG DỤNG

Trần Nam Dũng

(Đại học Khoa học Tự nhiên - ĐHQG TP.HCM)

Một học sinh chuyển từ lớp 7 lên lớp 8 ắt là sẽ được yêu cầu chứng minh hằng đẳng thức:

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac+bd)^2 + (ad-bc)^2,$$

và sẽ chẳng gặp mấy khó khăn. Bạn ấy sẽ không ngờ rằng ngày xưa, để chứng minh nó, nhà toán học nổi tiếng Fibonacci đã phải mất đến 5 trang giấy. Và cũng không ngờ rằng, hằng đẳng thức này, mà ở dạng tổng quát hơn sẽ có tên gọi là đồng nhất thức Brahmagupta - Fibonacci, sẽ có nhiều ứng dụng đẹp đẽ, hiệu quả và bất ngờ. Chúng ta cùng đi vào một chuyến tham quan đến với lịch sử của đồng nhất thức đẹp đẽ này, những ứng dụng kinh điển và những bài toán mới nhất còn nóng hổi. Điều đặc biệt là các bạn học sinh THCS có thể hiểu được đa số các bài toán và ví dụ trong bài viết này.

1. Đôi dòng lịch sử

Phần dẫn dắt lịch sử này chủ yếu được lấy từ [4].

Đồng nhất thức mà ngày nay thường được gọi là *đồng nhất thức Brahmagupta - Fibonacci* rất đơn giản nhưng có một lịch sử thú vị và có những ứng dụng bất ngờ

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac+bd)^2 + (ad-bc)^2 = (ac-bd)^2 + (ad+bc)^2.$$

Người ta tin rằng người đầu tiên đã nhắc đến đồng nhất thức này là Diophantus (thế kỷ thứ III trước công nguyên) người đã viết trong cuốn Số học của mình (Quyển III, Bài toán 19) [Stillwell, trang 174]: "65 *một cách tự nhiên được chia thành hai bình phương bằng hai cách ... vì* 65 *là tích của* 13 *và* 5, *mỗi một số này đều là tổng của hai bình phương*".

John Stillwell đề cập rằng năm 950 sau công nguyên, nhà toán học vùng Ba Tư al-Khazin $(900-971$ SCN) đã giải thích khẳng định của Diophantus trong dạng tổng quát hơn gần như giống với công thức nêu trên. Một giải thích tương tự cũng xuất hiện trong cuốn sách của Fibonacci *Liber Quadratorum* vào năm 1225. Lúc đó ngôn ngữ toán học còn ở vào thời thơ ấu nên Fibonacci đã phải mất 5 trang giấy để chứng minh công thức này.

Ý tưởng của Diophantus đã được tổng quát hóa trước đó bởi nhà toán học Ấn Độ Brahmagupta $(597-668$ SCN), người đã chứng minh

$$(a^2+Nb^2)(c^2+Nd^2) = (ac+bd)^2 + N(ad-bc)^2 = (ac-bd)^2 + N(ad+bc)^2.$$

Và sử dụng nó để giải phương trình Pell $x^2 - Ny^2 = 1$.

Công thức, trong dạng cơ bản của nó là trường hợp riêng (khi $n = 2$) của đồng nhất thức Lagrange

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right) = \left(\sum_{i=1}^n a_ib_i\right)^2 + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_kb_j - a_jb_k)^2.$$

Đúng với mọi $n \geqslant 2$, ví dụ, với $n = 3$ có dạng sau

$$(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) = (ax + by + cz)^2 + (ay - bx)^2 + (az - cx)^2 + (bz - cy)^2,$$

và được sử dụng để chứng minh các tính chất của điểm đối trung.

Tuy nhiên, đồng nhất thức Brahmagupta - Fibonacci ($n = 2$) sở hữu những tính chất đặc biệt không còn đúng với đồng nhất thức Lagrange, cũng như trường hợp $n = 3$ của nó. Đó là cách mà Diophantus đã có thể phát biểu tổng quát hóa của bài toán 19 của ông:

Tích của hai số nguyên, mỗi số là tổng hai bình phương, cũng là tổng của hai bình phương.

Ta không thể nói điều này cho tổng của ba bình phương. Nhưng vào năm 1748, Euler thông báo về đồng nhất thức bốn bình phương:

$$\begin{aligned}(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2) &= (a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3 - a_4b_4)^2 \\ &+ (a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_4 - a_4b_3)^2 + (a_1b_3 - a_2b_4 + a_3b_1 + a_4b_2)^2 + (a_1b_4 + a_2b_3 - a_3b_2 + a_4b_1)^2.\end{aligned}$$

Trường hợp $n = 2$ liên quan đến lý thuyết số phức mà ở đó có thể diễn đạt như là "chuẩn (mô-đun, giá trị tuyệt đối) của hai số phức bằng tích các chuẩn của chúng." Vai trò tương tự cũng được dành cho đồng nhất thức bốn bình phương trong lý thuyết quaternion và đồng nhất thức tám bình phương Degen trong lý thuyết octonion [*Conway and Smith*].

Bài tập 1. *Hãy chứng minh đồng nhất thức Brahmangupta - Fibonacci*

$$(a^2 + Nb^2)(c^2 + Nd^2) = (ac + bd)^2 + N(ad - bc)^2 = (ac - bd)^2 + N(ad + bc)^2.$$

2. Ứng dụng trong bài toán biểu diễn số nguyên

Bài toán biểu diễn số nguyên là bài toán tìm điều kiện để một số nguyên có thể biểu diễn được dưới một dạng cho trước, ví dụ dưới dạng tổng của hai bình phương (số $0, 1, 2, 4, 5$ biểu diễn được nhưng 3 thì không), tổng của ba bình phương (số $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ biểu diễn được, nhưng 7 thì không). Định lý Langrange lại nói rằng một số tự nhiên bất kỳ có thể biểu diễn được dưới dạng tổng của bốn bình phương.

Tuy nhiên, chúng ta sẽ tạm thời không đi xa như vậy, vì các kết quả nêu trên tuy là những kết quả kinh điển nhưng cũng là hơi quá sức đối với học sinh THCS, đối tượng chính của bài viết này. Ta sẽ đi vào một số vấn đề cụ thể và có giới hạn hơn.

Bài toán 1. *Ta nói số nguyên dương n là biểu diễn được nếu tồn tại các số nguyên a, b sao cho*

$$n = a^2 + b^2.$$

a) Chứng minh rằng nếu m, n là biểu diễn được thì mn cũng biểu diễn được.

b) Chứng minh rằng nếu $2m$ biểu diễn được thì m cũng biểu diễn được.

c) Xét xem trong các số $2013, 2014, 2015, 2016, 2017$ số nào biểu diễn được.

Chứng minh. a) Kết luận này chính là kết quả mà Diophantus đã phát biểu và được chứng minh trực tiếp nhờ đồng nhất thức Brahmagupta - Fibonacci.

b) Giả sử $2m = a^2 + b^2$ thì a, b cùng tính chẵn lẻ, suy ra $a + b$ và $a - b$ là số chẵn và ta có

$$m = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2,$$

từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Đẳng thức trên chính là đồng nhất thức Brahmagupta - Fibonacci áp dụng cho $\frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$ và $2m = a^2 + b^2$. Ta lưu ý thủ thuật nhỏ có thể hữu ích cho các tình huống ở sau.

c) Ta có một số chính phương chia 3 dư 0 hoặc 1 và chia 4 dư 0 hoặc 1. Do đó nếu $a^2 + b^2$ chia hết cho 3 thì a và b đều phải chia hết cho 3, do đó $a^2 + b^2$ chia hết cho 9. Cũng từ đó số có dạng $4k + 3$ không thể biểu diễn dưới dạng tổng của hai bình phương. Áp dụng tính chất này ta suy ra các số sau đây không biểu diễn được:

Số 2013 (chia hết cho 3 mà không chia hết cho 9), 2015 (có dạng $4k + 3$).

Số $2014 = 2 \cdot 1007$ không biểu diễn được do 1007 có dạng $4k + 3$ không biểu diễn được (áp dụng tính chất b)). Số $2016 = 2^7 \cdot 63$ không biểu diễn được do 63 có dạng $4k + 3$ không biểu diễn được (áp dụng nhiều lần tính chất b).

Số 2017 biểu diễn được (ta dùng thuật toán ăn tham để thử từ trên xuống dưới và tìm được $2017 = 44^2 + 9^2$). □

Bài toán 2. *Cho m và n là các số nguyên dương phân biệt. Hãy biểu diễn $m^6 + n^6$ dưới dạng tổng của hai bình phương khác với m^6 và n^6.*

Chứng minh. Ta có

$$\begin{aligned} m^6 + n^6 &= (m^2)^3 + (n^2)^3 = (m^2 + n^2)(m^4 - m^2n^2 + n^4) \\ &= (m^2 + n^2)\left[(m^2 - n^2)^2 + (mn)^2\right]. \end{aligned}$$

Bây giờ áp dụng đồng nhất thức Brahmagupta - Fibonacci cho $a = m$, $b = n$, $c = m^2 - n^2$ và $d = mn$ ta thu được

$$m^6 + n^6 = (m^3 - mn^2 + mn^2)^2 + (m^2n - m^2n + n^3)^2.$$

Đây không phải là điều mà ta mong muốn vì biểu diễn này trùng với biểu diễn ban đầu. Nhưng không có gì mất mát ở đây nếu ta để ý rằng hằng đẳng thức Brahmagupta - Fibonacci sẽ có dạng khác đi một chút nếu ta thay d bằng $-d$

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2.$$

Lúc này ta có thể viết

$$\begin{aligned} m^6 + n^6 &= (m^3 - mn^2 - mn^2)^2 + (-m^2n - m^2n + n^3)^2 \\ &= (m^3 - 2mn^2)^2 + (n^3 - 2m^2n)^2. \end{aligned}$$

Đây chính là kết quả cần tìm. □

Ta có thể thấy rằng yêu cầu m và n nguyên dương có thể bỏ qua: Đồng nhất thức mà ta thu được là đồng nhất thức đại số và đúng với mọi biến số (hay ẩn số) m và n.

Bài toán trong đề thi vô địch toán Moscow sẽ đặt ra một vấn đề khó khăn hơn một chút:

Bài toán 3. *(Moscow MO) Chứng minh rằng với mọi $n \geqslant 3$, tồn tại các số lẻ $x,\ y$ sao cho*

$$7x^2 + y^2 = 2^n.$$

Chứng minh. Nếu không có điều kiện $x,\ y$ lẻ thì bài này có thể giải đơn giản nhờ vào quy nạp. Chú ý với $n = 3$ ta có biểu diễn $7 \cdot 1^2 + 1^2 = 2^3$ và với $n = 4$ thì $7 \cdot 1^2 + 3^2 = 2^4$ và nếu $7x^2 + y^2 = 2^n$ thì $7(2x)^2 + (2y)^2 = 2^{n+2}$. Tuy nhiên, với điều kiện $x,\ y$ lẻ thì bước chuyển từ n lên $n + 2$ không dùng được. Ta dùng đến giải pháp gần giống với giải pháp ở bài 1, với chú ý là

$$7 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 2.$$

Từ đó, nếu giả sử $2^n = 7x^2 + y^2$ với $x,\ y$ lẻ, thì áp dụng đồng nhất thức Brahmagupta - Fibonacci ta có

$$\begin{aligned}2^{n+1} = 2 \cdot 2^n &= \left[7 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right](7x^2 + y^2)\\ &= \left(\frac{7x + y}{2}\right)^2 + 7\left(\frac{x - y}{2}\right)^2\\ &= \left(\frac{7x - y}{2}\right)^2 + 7\left(\frac{x + y}{2}\right)^2.\end{aligned}$$

Do $x,\ y$ đều lẻ nên các số ở trong ngoặc đều nguyên. Tuy nhiên, theo yêu cầu đề bài, ta cần chúng lẻ. Đến đây ta chỉ cần xét 2 trường hợp

- Nếu $x,\ y$ cùng số dư $\bmod 4$ thì ta chọn biểu diễn thứ 2.
- Nếu $x,\ y$ khác số dư $\bmod 4$ thì ta chọn biểu diễn thứ 1.

Trong mọi trường hợp phương trình $2^{n+1} = 7x^2 + y^2$ có nghiệm $x,\ y$ lẻ. Theo nguyên lý quy nạp toán học ta có điều phải chứng minh. □

Bài tập 2. *(Saudi Arabia TST 2016, Juniors) Cho k là số nguyên dương. Chứng minh rằng tồn tại các số nguyên x, y không số nào chia hết cho 3 sao cho $x^2 + 2y^2 = 3^k$.*

Bài tập 3. *(VMO 2010) Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, phương trình*

$$x^2 + 15y^2 = 4^n,$$

có ít nhất n nghiệm nguyên không âm.

Bài tập 4. *(Saudi Arabia Training Camp 2016) Cho S là tập hợp tất cả các số tự nhiên biểu diễn được dưới dạng $x^2 + 3y^2$ với x, y là các số nguyên. Chứng minh các tính chất sau đây của S*

i) Nếu $m \in S$, $n \in S$ thì $mn \in S$.

ii) Nếu $N \in S$ và $2 \mid N$ thì $\frac{N}{4} \in S$.

iii) Nếu $N \in S$, số nguyên tố $p \in S$ và $p|N$ thì $\frac{N}{p} \in S$.

3. Ứng dụng trong phương trình Pell

Theo một số nhà nghiên cứu lịch sử toán học thì phương trình Pell, tức là phương trình nghiệm nguyên dạng

$$x^2 - Ny^2 = 1, \tag{3.1}$$

với N là số nguyên dương không chính phương đáng ra phải được gọi là phương trình Brahmagupta - Bhaskara. Tuy nhiên chúng ta sẽ không đi sâu về khía cạnh lịch sử để phân tích xem hai ông đã tiến xa như thế nào trong việc giải phương trình (3.1) mà chỉ nếu ra ứng dụng cơ bản của đồng nhất thức Brahmagupta-Fibonacci trong việc giải phương trình Pell và phương trình dạng Pell.

Bài toán 4. *Chứng minh rằng phương trình*

$$x^2 - 2y^2 = 1, \tag{3.2}$$

có vô số nghiệm nguyên không âm.

Chứng minh. Ta thấy rằng nếu $a^2 - 2b^2 = 1$ và $x^2 - 2y^2 = 1$ thì áp dụng đồng nhất thức Brahmagupta - Fibonacci ta có

$$1 = (a^2 - 2b^2)(x^2 - 2y^2) = (ax + 2by)^2 - 2(ay + bx)^2. \tag{3.3}$$

Từ đây dễ dàng suy ra nếu (3.2) có nghiệm thì (3.2) sẽ có vô số nghiệm. Dễ thấy $x = 3,\ y = 2$ là nghiệm của (3.2) do đó (3.2) có vô số nghiệm. Hơn nữa, nếu áp dụng (3.3) cho $a = 3,\ b = 2$ và $x,\ y$ là một nghiệm nguyên không âm của (3.2) thì ta thấy: Nếu (x, y) là nghiệm của (3.2) thì $(3x + 4y, 2x + 3y)$ cũng là nghiệm của (3.2).

Ví dụ từ cặp $(3, 2)$ theo cách này ta lần lượt có các nghiệm $(17, 12)$, $(99, 70)$, $(577, 408)$, ... □

Điều thú vị là cách xây dựng này sẽ vét hết tất cả các nghiệm nguyên không âm của phương trình (3.2) (tất nhiên phải bổ sung nghiệm hiển nhiên $x = 1, y = 0$). Tuy nhiên chúng ta sẽ không chứng minh sự kiện này.

Cũng từ cách chứng minh trên, ta thấy rằng phương trình (3.1) nếu có nghiệm nguyên dương sẽ có vô số nghiệm nguyên dương. Hơn nữa, nếu (3.1) có nghiệm nguyên dương và phương trình

$$x^2 - Ny^2 = a, \tag{3.4}$$

có nghiệm nguyên dương thì (3.4) sẽ có vô số nghiệm nguyên dương.

Người ta đã chứng minh được rằng nếu N là số nguyên dương không chính phương trình phương trình (3.1) luôn có nghiệm nguyên dương, và theo như lập luận ở trên, có vô số nghiệm nguyên dương. Hơn thế nữa, ta có thể tìm được tất cả những nghiệm đó. Kết quả trọn vẹn này thuộc về Langrange $(1767 - 1838)$ dựa vào lý thuyết liên phân số. Tuy nhiên, ta cũng sẽ không đi sâu như vậy mà xem xét một ví dụ áp dụng sự tồn tại vô số nghiệm của phương trình dạng Pell.

Bài toán 5. *(EGMO 2016) Gọi S là tập hợp các số nguyên dương sao cho n^4 có ước số nằm trong đoạn $[n^2 + 1, n^2 + 2n]$. Chứng minh rằng có vô số các phần tử của S có dạng $7m$, $7m+1$, $7m+2$, $7m+5$, $7m+6$ nhưng không có phần tử nào của S có dạng $7m+3$, $7m+4$.*

Chứng minh. Mấu chốt của lời giải này là nhận xét

$$n^2 + k \mid n^4 \Leftrightarrow n^2 + k \mid n^4 - k^2 + k^2 \Leftrightarrow n^2 + k \mid k^2.$$

Tiếp theo, sử dụng điều kiện k thuộc $[n^2 + 1,\ n^2 + 2n]$ dễ dàng suy ra $\frac{k^2}{n^2+k} \in \{2, 3\}$.

Cuối cùng ta chứng minh các phương trình $k^2 = 2(n^2 + k), k^2 = 3(n^2 + k)$ không có nghiệm n có dạng $7m + 3, 7m + 4$ (dùng mô-đun) và có vô số nghiệm dạng $7k, 7k + 1, 7k + 2, 7k + 5$ (phương trình thứ nhất) và dạng $7k, 7k + 6$ (phương trình thứ hai) bằng cách sử dụng công thức Brahmagupta - Fibonacci. □

Bài tập 5. *(VMO 1999) Cho hai dãy số (x_n), (y_n) xác định như sau*

$$x_1 = 1,\ x_2 = 4,\ x_{n+2} = 3x_{n+1} - x_n,\ \text{với mọi } n \geqslant 1,$$

$$y_1 = 1,\ y_2 = 2,\ y_{n+2} = 3y_{n+1} - y_n,\ \text{với mọi } n \geqslant 1.$$

Chứng minh rằng các số nguyên dương a, b thỏa mãn phương trình $a^2 - 5b^2 = -4$ khi và chỉ khi tồn tại số nguyên dương k sao cho $a = x_k$, $b = y_k$.

4. Một số ứng dụng khác

Đồng nhất thức Lagrange, trường hợp tổng quát của đồng nhất thức Brahmagupta - Fibonacci cho ta hệ quả là bất đẳng thức Cauchy - Schwarz, một bất đẳng thức cổ điển có nhiều ứng dụng quan trọng.

Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz trường hợp $n = 2$: *Nếu a, b, c, d là các số thực bất kỳ thì ta có bất đẳng thức*

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \geqslant (ac + bd)^2.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a : b = c : d$.

Cũng đi theo hướng bất đẳng thức, nhưng thiên về biểu diễn, định lý sau đây là một kết quả tương tự với kết quả trong lý thuyết số (về điều kiện cần và đủ để một số nguyên dương có thể biểu diễn dưới dạng tổng bình phương của hai số nguyên) dành cho đa thức. Hóa ra điều kiện cần và đủ để một đa thức với hệ số thực có thể biểu diễn được dưới dạng tổng bình phương của hai đa thức với hệ số thực là $P(x) \geqslant 0$ với mọi x. Tuy nhiên, kết quả này chứng minh đơn giản hơn kết quả trong lý thuyết số rất nhiều. Chứng minh thực tế chỉ dùng đến đồng nhất thức Brahmagupta - Fibonacci.

Bài toán 6. *Cho $P(x)$ là đa thức với hệ số thực sao cho $P(x) \geqslant 0$ với mọi x thuộc $\mathbb{R}$. Chứng minh rằng tồn tại các đa thức $Q_1(x)$ và $Q_2(x)$ với hệ số thực sao cho*

$$P(x) = Q_1^2(x) + Q_2^2(x).$$

Chứng minh. Vì $P(x)$ không âm nên hoặc $P(x)$ không có nghiệm thực, hoặc mỗi nghiệm thực của nó có bội chẵn. Từ đây suy ra

$$P(x) = c\prod_{k=1}^{n}(x^2 + p_k x + q_k),$$

trong đó c và $p_k, q_k, k = 1, 2, \ldots, n$ là các số thực, với $c \geqslant 0$ và $p_k^2 - 4q_k \leqslant 0, k = 1, 2, \ldots, n$.

Nhưng với mỗi k, phương pháp gom bình phương đúng chứng tỏ rằng

$$x^2 + p_k x + q_k = \left(x + \frac{p_k}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{4q_k - p_k^2}}{2}\right)^2,$$

do đó

$$P(x) = c\prod_{k=1}^{n}(U_k^2(x) + V_k^2(x)).$$

Bây giờ, áp dụng đồng nhất thức Brahmagupta - Fibonacci nhiều lần, ta có thể biến số các thừa số từ n trở về 1. □

Cuối cùng, ta sẽ nêu ra một ứng dụng thú vị của đồng nhất thức bốn bình phương của Euler.

Bài toán 7. *Chứng minh rằng:*

a) *Phương trình $x^2 + y^2 + z^2 = 7$ không có nghiệm hữu tỷ.*

b) *Phương trình sau không có nghiệm hữu tỷ*

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 7,\ a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1,\ ax + by + cz + d = 0.$$

Chứng minh. a) Điều cần chứng minh tương đương với "chứng minh không tồn tại nghiệm $(x,\ y,\ z,\ t)$ khác $(0, 0, 0, 0)$ của phương trình

$$x^2 + y^2 + z^2 = 7t^2. \tag{4.1}$$

Giả sử tồn tại nghiệm nguyên không âm không đồng thời bằng 0. Chọn x, y, z, t là nghiệm của (4.1) có $x + y + z + t$ nhỏ nhất.

Nếu t lẻ thì vế trái $\equiv 7 \pmod 8$ trong khi $x^2 + y^2 + z^2$ chỉ có thể có số dư là $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ $(\text{mod } 8)$, mâu thuẫn. Vậy t chẵn, suy ra vế phải đồng dư 0 hoặc $4 \pmod 8$. Suy ra x, y, z phải cùng chẵn. Nhưng lúc đó thì $\frac{x}{2}, \frac{y}{2}, \frac{z}{2}, \frac{t}{2}$ cũng là nghiệm của (4.1) mâu thuẫn với cách chọn x, y, z, t. Vậy điều giả sử là sai, suy ra điều phải chứng minh.

b) Giả sử hệ có nghiệm hữu tỷ thì từ đồng nhất thức Euler ta sẽ suy ra

$$\begin{aligned}
7 &= (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(x^2 + y^2 + z^2 + t^2)\\
&= (ax + by + cz + dt)^2 + (ay - bx + ct - dz)^2 + (az - bt - cx + dy)^2 + (at + bz - cy - dx)^2\\
&= (ay - bx + ct - dz)^2 + (az - bt - cx + dy)^2 + (at + bz - cy - dx)^2.
\end{aligned}$$

Suy ra phương trình $X^2 + Y^2 + Z^2 = 7$ có nghiệm hữu tỷ, mâu thuẫn với a). □

Tài liệu tham khảo

[1] A. Shenitzer, J. Stillwell, *Mathematical Evolutions*, MAA, 2002.

[2] J. H. Conway, D. A. Smith, *On Quoternions and Octonions*, A K Peters, 2003.

[3] S. Savchev, T. Andreescu, *Mathematical Miniatures*, MAA, 2003, p. $6 - 7$.

[4] Alexander Bogomolny:
http://www.cut-the-knot.org/m/Algebra/BrahmaguptaFibonacci.shtml

MỘT SỐ BÀI TOÁN TRONG ĐỀ THI VÀO CÁC TRƯỜNG CHUYÊN

(Ban biên tập)

Trong bài viết này, chúng tôi giới thiệu một số bài toán trích trong các đề thi vào các trường Chuyên trên toàn Quốc vừa diễn ra trong cuối tháng 5 và đầu tháng 6.

Bài 0.1. ***(Trích đề thi vào 10 Chuyên Phan Bội Châu-Nghệ an)***
Giải phương trình

$$\sqrt{5-3x}+\sqrt{x+1}=\sqrt{3x^2-4x+4}.$$

Lời giải. Điều kiện: $-1 \leqslant x \leqslant \frac{5}{3}$.
Bình phương hai vế của phương trình ta được

$$2\sqrt{(5-3x)(x+1)}=3x^2-2x-2.$$

Đặt $t=\sqrt{(5-3x)(x+1)}=\sqrt{-3x^2+2x+5},\ t \geqslant 0$ ta có phương trình

$$t^2+2t-3=0 \Leftrightarrow t=1 \ \ (\text{do } t \geqslant 0).$$

Suy ra

$$\sqrt{-3x^2+2x+5}=1 \Leftrightarrow 3x^2-2x-4=0 \Leftrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{13}}{6}.$$

Kết hợp điều kiện ta có: $x=\dfrac{1\pm\sqrt{13}}{6}$ là nghiệm của phương trình. □

Bài 0.2. ***(Trích đề thi vào 10 Chuyên Toán PTNK)***
Tìm $a \geqslant 1$ để phương trình

$$ax^2+(1-2a)x+1-a=0$$

có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn

$$x_2^2-ax_1=a^2-a-1 \qquad (1).$$

Lời giải. Với bài toán liên quan đến nghiệm của phương trình bậc hai thì công cụ ta thường sử dụng là định lí Vi-et. Với điều kiện $x_2^2-ax_1=a^2-a-1$thì ta kết hợp với điều kiện $ax_2^2+(1-2a)x_2+1-a=0$ (2) để xử lí. Dựa vào định lí Vi-et, ta có thể thay $x_1=\frac{2a-1}{a}-x_2$ để biến đổi (1) về đẳng thức chỉ chưa x_2 và a. Cụ thể:

$$\begin{aligned}&x_2^2-ax_1=a^2-a-1\\ \Leftrightarrow\ &x_2^2-a\left(\frac{2a-1}{a}-x_2\right)=a^2-a-1\\ \Leftrightarrow\ &ax_2^2+a^2x_2=a^3+a^2-2a \ \ (3).\end{aligned}$$

Kết hợp (2) với (3) ta được

$$\begin{aligned}\left(a^2+2a-1\right)x_2 &= a^3+a^2-3a+1\\ &= (a-1)\left(a^2+2a-1\right)\\ &\Leftrightarrow x_2 = a-1\end{aligned}$$

(do $a \geqslant 1$ nên $a^2+2a-1>0$).
Thay $x_2 = a-1$ vào (2) ta tìm được $a=1, a=3$. □

Bài 0.3. ***(Trích đề thi vào Trường Chuyên Lê Qúy Đôn Khánh Hòa)***
Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}(x^2-xy)(xy-y^2)=25 & (1)\\ \sqrt{x^2-xy}+\sqrt{xy-y^2}=3(x-y) & (2)\end{cases}.$$

Lời giải. Từ phương trình (2) ta có $x-y \geqslant 0$ nên $x, y \geqslant 0$. Hơn nữa $x=y$ không là nghiệm của hệ, do đó (2) tương đương với

$$\begin{aligned}&\sqrt{x}+\sqrt{y}=3\sqrt{x-y}\\ &\Leftrightarrow x+y+2\sqrt{xy}=9(x-y)\\ &\Leftrightarrow 4x-\sqrt{xy}-5y=0\\ &\Leftrightarrow (\sqrt{x}+\sqrt{y})(4\sqrt{x}-5\sqrt{y})=0\\ &\Leftrightarrow y=\frac{16}{25}x \text{ (do } x=y=0 \text{ không là nghiệm).}\end{aligned}$$

Thay vào (1) ta tìm được nghiệm của hệ: $(x;y)=\left(\dfrac{25}{6};\dfrac{8}{3}\right)$. □

Bài 0.4. ***(Trích đề thi vào Trường Chuyên Lê Qúy Đôn Vũng Tàu)***
Cho đa thức $f(x)=x^2+bx+c$. Biết $b,\ c$ là các hệ số dương và $f(x)$ có nghiệm. Chứng minh $f(2)\geqslant 9\sqrt[3]{c}$.

Lời giải. Từ giả thiết $f(x)$ có nghiệm ta có:

$$\Delta = b^2-4c \geqslant 0 \Rightarrow b^2 \geqslant 4c \Leftrightarrow b \geqslant 2\sqrt{c}.$$

Và $f(2)=2b+c+4 \geqslant 4\sqrt{c}+c+4$. Do đó, để chứng minh bài toán ta chỉ cần chứng minh được:

$$c+4\sqrt{c}+4 \geqslant 9\sqrt[3]{c}. \qquad (1)$$

Để chứng minh (1) ta có thể sử dụng bất đẳng thức Cô si hoặc biến đổi tương đương. Chẳng hạn ta dụng bất đẳng thức Cô si như sau

$$c+4\sqrt{c}+4=2\left(\sqrt{c}+\sqrt{c}+1\right)+(c+1+1)\geqslant 2.3\sqrt[3]{c}+3\sqrt[3]{c}=9\sqrt[3]{c}.$$

□

Bài 0.5. ***(Trích đề thi vào 10 Trường Chuyên Lý Tự Trọng - Cần Thơ)***
Cho a,b,c là độ dài ba cạnh của một tam giác thỏa mãn $2ab+3bc+4ca=5abc$. Tìm GTNN của biểu thức

$$P=\frac{7}{a+b-c}+\frac{6}{b+c-a}+\frac{5}{c+a-b}.$$

Lời giải. Từ giả thiết ta có $\frac{3}{a}+\frac{4}{b}+\frac{2}{c}=5$. Nhận thấy $(a+b-c)+(b+c-a)=2b$, $(b+c-a)+(c+a-b)=2c$, $(c+a-b)+(a+b-c)=2a$ và $7=4+3,\ 6=4+2,\ 5=3+2$ nên ta phân tích

$$P=4\left(\frac{1}{a+b-c}+\frac{1}{b+c-a}\right)+3\left(\frac{1}{a+b-c}+\frac{1}{c+a-b}\right)+2\left(\frac{1}{b+c-a}+\frac{1}{c+a-b}\right).$$

Áp dụng bất đẳng thức $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geqslant\frac{4}{x+y}\ \forall x,y>0$, ta có

$$P\geqslant\frac{16}{2b}+\frac{12}{2a}+\frac{8}{2c}=2\left(\frac{3}{a}+\frac{4}{b}+\frac{2}{c}\right)=10.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=\frac{9}{5}\Leftrightarrow x=y=z=\frac{9}{5}$.

Vậy GTNN của P bằng 10. □

Bài 0.6. ***(Trích đề thi vào Trường Chuyên Lê Hồng Phong, Nam Định)***

Cho x,y,z là các số thực thỏa mãn $(x-y)(x-z)=1$ và $y\neq z$. Chứng minh:

$$\frac{1}{(x-y)^2}+\frac{1}{(y-z)^2}+\frac{1}{(z-x)^2}\geqslant 4.$$

Lời giải. Ta có

$$(x-y)+(y-z)+(z-x)=0,$$

nên đặt $a=x-y,\ b=x-z$ ta có $y-z=a-b$ và $ab=1$. Khi đó

$$\begin{aligned}P&=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{(a-b)^2}\\&=ab\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{a^2+b^2-2ab}\right)\\&=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{1}{\frac{1}{b}+\frac{b}{a}-2}\\&=t+\frac{1}{t-2}\quad(\text{với } t=\frac{a}{b}+\frac{b}{a})\\&=\frac{(t-3)^2}{t-2}+4\geqslant 4.\end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra chẳng hạn khi $\begin{cases}y=x-\frac{\sqrt{5}-1}{2}\\z=x-\frac{\sqrt{5}+1}{2}\end{cases}$

Vậy GTNN của P bằng 4. □

Bài 0.7. ***(Trích đề thi vào Trường Chuyên KHTN Vòng 2)***

1) Với x,y là những số nguyên thỏa mãn đẳng thức $\frac{x^2-1}{2}=\frac{y^2-1}{3}$. Chứng minh rằng:

$$x^2-y^2\vdots 40.$$

2) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn đẳng thức : $x^4+2x^2=y^3$.

Lời giải. 1) Đề bài yêu cầu chứng minh $x^2 - y^2 \vdots 40 = 8.5$ nên ta cần chứng minh $x^2 - y^2 \vdots 5$ và $x^2 - y^2 \vdots 8$.
Ta biết: Nếu x, y cùng lẻ thì $x^2 - y^2 \vdots 8$ nên ta đi chứng minh x, y lẻ.
Sử dụng tính chất tỉ lệ thức ta có:

$$\frac{x^2-1}{2} = \frac{y^2-1}{3} = y^2 - x^2$$

nên $\dfrac{x^2-1}{2}$ và $\dfrac{y^2-1}{3}$ là số nguyên.
Do đó x là số lẻ, suy ra $\dfrac{x^2-1}{2}$ là số chẵn do đó $\dfrac{y^2-1}{3}$ là số chẵn do đó y^2 là số lẻ.
Suy ra $x^2 - y^2 \vdots 8$.
Để chứng minh $x^2 - y^2 \vdots 5$ ta chứng x^2 và y^2 có cùng số dư khi chia cho 5.
Từ giả thiết ta suy ra $\dfrac{x^2-1}{2} = \dfrac{y^2-1}{3} = \dfrac{x^2+y^2-2}{5}$, từ đây ta có $x^2 + y^2 - 2 \vdots 5$.
Do $a^2 \equiv 0, 1, -1 \pmod 5$ nên ta có

$$x^2 \equiv y^2 \equiv 1 \pmod 5 \Rightarrow x^2 - y^2 \vdots 5.$$

2) Ta có

$$x^4 + 2x^2 = y^3 \Leftrightarrow \left(x^2+1\right)^2 = (y+1)\left(y^2 - y + 1\right).$$

Gọi

$$d = \left(y+1, y^2 - y + 1\right) = (y+1, (y+1)(y-2)+3) = (y+1, 3) \Rightarrow d|3.$$

Do $d|x^2+1$ và không tồn tại x để $x^2 + 1 \vdots 3$ nên ta có $d = 1$.
Từ đó suy ra

$$\begin{cases} y+1 = m^2 \\ y^2 - y + 1 = n^2 \end{cases}.$$

Mặt khác, ta có $y + 1 > 0 \Rightarrow y \geqslant 0$.
+) Với $y = 0$ ta có $x = 0$.
+) Xét $y > 0$, ta có

$$\left(m^2-2\right)^2 = y^2 - 2y + 1 < y^2 - y + 1 = n^2 < (y+1)^2 = m^4.$$

Suy ra $n = m^2 - 1 = y \Rightarrow y^2 - y + 1 = y^2 \Rightarrow y = 1$ (không thỏa).
Vậy $x = y = 0$ là cặp nghiệm cần tìm. □

Bài 0.8. ***(Trích đề thi vào Trường Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định)*** *Trên bảng ban đầu ta ghi số 2 và số 4. Ta thực hiện cách viết thêm các số lên bảng như sau: nếu trên bảng đã có hai số, giả sử là a, b; với $a \neq b$, ta viết thêm lên bảng số có giá trị là $a + b + ab$. Hỏi với cách thực hiện như vậy, trên bảng có thể xuất hiện số 2016 được hay không? Giải thích.*

Lời giải. Ta có $a + b + ab + 1 = (a+1)(b+1)$, do đó các số ghi trên bảng ngoài hai số 2 và 4 thì các số khác khi cộng thêm 1 ta được một hợp số. Tuy nhiên $2016 + 1 = 2017$ là số nguyên tố, nên 2016 không thể xuất hiện trên bảng. □

Bài 0.9. ***(Trích đề thi vào Trường Chuyên Toán PTNK)***
Với mỗi số nguyên dương $m > 1$, kí hiệu $s(m)$ là ước nguyên dương lớn nhất của m và khác m. Cho số tự nhiên $n > 1$, đặt $n_0 = n$ và lần lượt tính các số

$$n_1 = n_0 - s(n_0), \; n_2 = n_1 - s(n_1), ..., n_{i+1} = n_i - s(n_i), ..$$

Chứng minh rằng tồn tại số nguyên dương k để $n_k = 1$ và tính k khi $n = 2^{16}.14^{17}$.

Lời giải. Ta thấy dãy $n_0, n_1, ...$ là dãy giảm, do đó đến một lúc nào đó giá trị của dãy bằng 1. Nên để chứng minh ý thứ nhất của bài toán ta có thể dùng phương pháp phản chứng.
Nếu không tồn tại k để $n_k = 1$ thì dãy các số $n_1, n_2, ..., n_{i+1}, ...$ là dãy giảm và chứa vô hạn số nguyên dương không vượt quá n. Điều này vô lí. Suy ra tồn tại k để $n_k = 1$.
Ta phân tích $n = 2^{16}.14^{17} = 2^{33}.7^{17}$.
Bằng cách thử một số trường hợp đặc biệt ta rút ra được các nhận xét sau:
NX 1: Với $n_0 = 2t$ thì $n_1 = t$. Suy ra: Nếu $n_0 = 2^\alpha$ thì $n_t = 2^{\alpha - t}$ nên $n_\alpha = 1$.
NX 2: Nếu $n_0 = 3t$, $(t, 2) = 1$ thì $n_2 = t$.
NX 3: Nếu $n_0 = 7t$, t không có ước nguyên tố nhỏ hơn 7 thì $n_4 = t$. Suy ra $n = 7^\alpha$ thì $n_{4\alpha} = 1$.
Từ các nhận xét trên ta có:
Với $n = 2^{33}.7^{17}$ thì $n_{33} = 7^{17}$ nên $n_{4.17+33} = 1$ hay $k = 4.17 + 33$. □

Bài 0.10. ***(Trích đề thi vào Trường Chuyên KHTN Vòng 2)***
Cho tập hợp $A = \{1, 2, 3, ..., n\}$. Chứng minh rằng tồn tại một hoán vị của A là

$$B = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$$

sao cho với mọi $1 \leqslant i < j < k \leqslant n$ thì $a_i + a_k \neq 2a_j$.

Lời giải. Ta sẽ chứng minh bài toán bằng quy nạp một kết quả mạnh hơn là :
Cho tập hợp $A = \{1, 2, ..., n\}$. Chứng minh rằng tồn tại một hoán vị của A là $B = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ được xếp trên đường tròn sao cho trung bình cộng của hai số bất kì không được đặt nằm giữa hai số đó.
Rõ ràng yêu cầu $1 \leqslant i < j < k \leqslant n$ thì $a_i + a_k \neq 2a_j$ thể hiện tính chất là trung bình cộng của hai số không nằm giữa hai số đó và trong trường hợp này là xét khi các số đặt trên một đường thẳng ; bài toán vừa phát biểu rõ ràng là mạnh hơn.
Ta chứng minh rằng với mọi $n = 2^m, m = 0, 1, 2, ...$ thì có thể sắp xếp các số $\{1, 2, 3, ..., n\}$ lên đường tròn sao cho điều kiện được thoả mãn và sẽ quy nạp theo m.
- Với $m = 0$, hiển nhiên kết quả đúng.
- Giả sử $(a_1, a_2, a_3, ..., a_{2^m})$ là một cách sắp xếp thoả điều kiện. Xét các số $\{1, 2, 3, ..., 2^{m+1}\}$.
Ta có cách sắp xếp sau

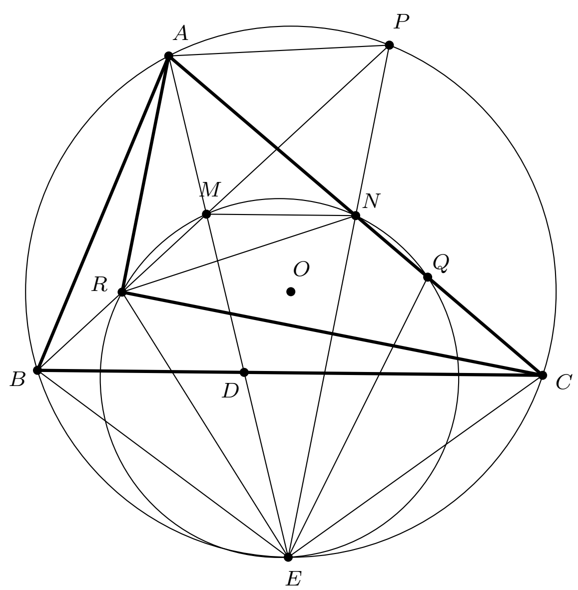
$$(b_1, b_2, ..., b_{2^m}, ..., b_{2^{m+1}}) = (2a_1 - 1, 2a_2 - 1, ..., 2a_{2^m} - 1, 2a_1, ..., 2a_{2^m})$$

cũng thoả điều kiện.
Thậy vậy, xét hai số b_i, b_j bất kỳ. Nếu b_i, b_j cùng tính chẵn lẻ thì theo giả thiết quy nạp, trung bình cộng của b_i, b_j không nằm ở giữa chúng. Còn nếu b_i, b_j khác tính chẵn lẻ thì trung bình cộng của chúng không phải là số nguyên và tất nhiên không thuộc dãy đã cho.
Do đó, trong trường hợp $n = 2^{m+1}$, ta đã điền được thỏa mãn đề bài nên theo nguyên lí quy nạp thì có thể sắp xếp với mọi số tự nhiên n có dạng $n = 2^m$.
Rõ ràng nếu có thể điền số đúng với số a thì với $b < a$, ta cũng có thể xóa bớt một số số và quy tắc của đề bài vẫn được thỏa mãn.
Như thế ta có thể sắp xếp các số với mọi số tự nhiên n. Ta có đpcm. □

Bài 0.11. ***(Trích đề thi vào 10 Chuyên Toán khu vực TP Hà nội)***
Cho 2017 số hữu tỉ dương được viết trên đường tròn. Chứng minh rằng tồn tại hai số cạnh nhau được viết trên đường tròn sao cho khi bỏ hai số đó thì 2015 số còn lại không thể chia thành hai nhóm sao cho tổng các số ở mỗi nhóm bằng nhau.

Lời giải. Ta thấy nếu bộ $x_1, x_2, ..., x_{2017}$ thỏa yêu cầu bài toán thì bộ $kx_1, kx_2, ..., kx_{2017}$ cũng thỏa yêu cầu bài toán với k là số hữu tỉ dương bất kì. Do đó, ta chỉ cần chứng minh bài toán với 2017 số nguyên dương và trong đó có ít nhất một số lẻ (vì các số đó đều là chẵn thì ta chia mỗi số cho 2).
+) Nếu 2017 số đó đều lẻ thì ta có thể bỏ hai số liên tiếp bất kì và 2015 số còn lại không thể chia thành hai nhóm có tổng các phần tử bằng nhau (vì tổng của 2015 số đó là số lẻ).
+) Nếu trong 2017 có ít nhất một số chẵn thì sẽ tồn tại hai số liên tiếp nhau khác tính chẵn lẻ và hai số liên tiếp nhau cùng tính chẵn lẻ. Do đó, nếu tổng của 2017 số đã cho là số chẵn thì ta xóa hai số liên tiếp nhau mà khác tính chẵn lẻ, nếu tổng đó là số lẻ thì ta xóa hai số liên tiếp nhau cùng tính chẵn lẻ. Khi đó tổng của 2015 số còn lại là số lẻ, nên không thể chia thành hai nhóm có tổng bằng nhau. □

Bài 0.12 (THPT chuyên KHTN 2016 vòng 1). *Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) với $AB < AC$. Phân giác của $\angle BAC$ cắt BC tại D và cắt (O) tại E khác A. M là trung điểm của đoạn thẳng AD. Đường thẳng BM cắt (O) tại P khác B . Giả sử các đường thẳng EP và AC cắt nhau tại N.*
1) Chứng minh rằng tứ giác $APNM$ nội tiếp và N là trung điểm của AC.
2) Giả sử đường tròn (K) ngoại tiếp tam giác EMN cắt đường thẳng AC tại Q khác N. Chứng minh rằng B và Q đối xứng qua AE.
3) Giả sử (K) cắt đường thẳng BM tại R khác M. Chứng minh rằng $RA \perp RC$.



Hình 20.1

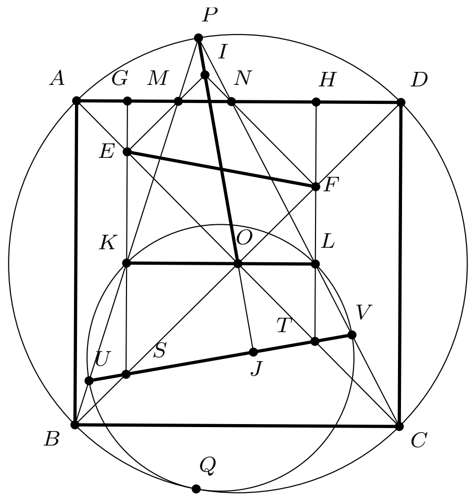
Lời giải. 1) Do tứ giác $ABEP$ nội tiếp nên $\angle MPN = \angle BPE = \angle BAE$. Mà AE lại là phân giác của $\angle BAC$, do vậy $\angle BAE = \angle EAC = \angle MAN$. Suy ra $\angle MPN = \angle MAN$. Vậy tứ giác $APNM$ nội tiếp.

Do $P \in (O)$ nên $\angle APB = \angle ACB$. Mặt khác, $\angle APM = \angle ANM$ (do tứ giác $APNM$ nội tiếp). Suy ra $\angle ACB = \angle ANM$. Do đó ta được $MN \parallel BC$. Mà M lại là trung điểm của AD nên theo tính chất đường trung bình suy ra N là trung điểm của AC.
2) Do $EMNQ$ và $APNM$ là các tứ giác nội tiếp nên $\angle EQC = \angle EMN = \angle APE = 180° - \angle ABE$. Suy ra $\angle AQE = \angle ABE$, kết hợp với $\angle QAE = \angle BAE$ ta được $\angle AEB = \angle AEQ$. Ta được $\triangle AEB = \triangle AEQ$(g.c.g). Từ đó suy ra B, Q đối xứng qua AE.
3) Do $ERMN$ và $APNM$ là các tứ giác nội tiếp nên $\angle ERB = \angle MNE = \angle EAP = \angle EBR$. Suy ra tam giác EBR cân tại E, kết hợp với $EB = EC$ (do E là trung điểm cung BC không chứa A), ta được $ER = EC$. Mặt khác ta cũng có $\angle REN = \angle PMN = \angle PAC = \angle NEC$. Từ đó suy ra $\triangle REN = \triangle CEN$ (c.g.c), do đó $NR = NC = NA$. Suy ra $\angle ARC = 90°$ hay $RA \perp RC$. □

Nhận xét 1. *Đây là bài toán mới và nằm ở đề chung cho các thí sinh, ý 1) khá nhẹ nhàng ý 2) khó hơn một chút và ý 3) có tính phân loại. Cấu trúc đề bài chặt chẽ với 3 câu, ý 2) dùng ý 1) và ý 3) dùng cả ý 1) và 2). Kết quả này cũng nằm trong một bài toán có ý nghĩa khi thu gọn lại đề bài như sau*

Bài 0.13 (THPT chuyên KHTN 2016 vòng 2). *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Phân giác AD cắt (O) tại E khác A. N là trung điểm AC. Đường tròn ngoại tiếp tam giác EMN cắt MB tại R khác M. Chứng minh rằng $RA \perp RC$.*

Bài 0.14 (THPT chuyên KHTN 2016 vòng 2). *Cho hình vuông $ABCD$ nội tiếp đường tròn tâm (O). P là điểm thuộc cung nhỏ AD của đường tròn (O) và P khác A, D. Các đường thẳng PB, PC lần lược cắt AD tại M, N. Đường trung trực của AM cắt đường thẳng AC, PB lần lượt tại E, K. Đường trung trực DN cắt các đường thẳng BD, PC lần lượt tại F, L.*
1) Chứng minh rằng ba điểm K, O, L thẳng hàng.
2) Chứng minh rằng đường thẳng PO đi qua trung điểm của đoạn thẳng EF.
3) Giả sử đường thẳng EK cắt đường thẳng BD tại S, các đường thẳng FL và AC cắt nhau tại T, đường thẳng ST cắt các đường thẳng PB, PC lần lượt tại U và V. Chứng minh rằng bốn điểm K, L, U, V cùng thuộc một đường tròn.



Hình 20.2

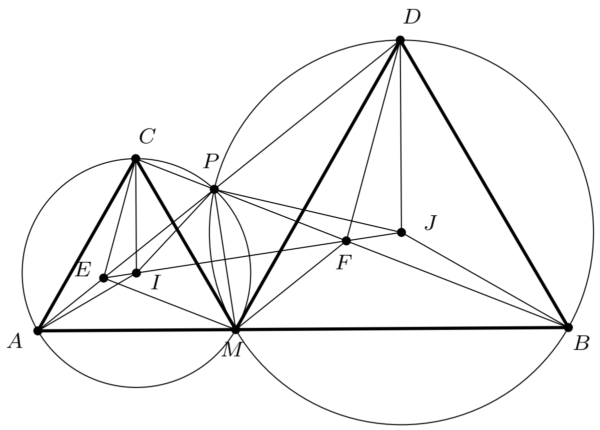
Lời giải. 1) Gọi G, H lần lượt là trung điểm của AM và DN. Ta có $GK \parallel AB(\perp AM)$ và $HL \parallel DC(\perp DN)$. Do vậy theo tính chất đường trung bình suy ra K, L tương ứng là trung điểm của MB và NC. Từ đây ta có OK và OL là đường trung bình của $\triangle BMD$ và $\triangle CNA$. Suy ra $OK \parallel MD$ và $OL \parallel AN$. Do đó, K, O, L thẳng hàng (tiên đề Euclid).
2) Xét các tam giác AME và DNF lần lượt cân tại E, F, có $\angle EAM = \angle FDN = 45^\circ$ nên $\triangle AME$ và $\triangle DNF$ là các tam giác vuông cân, do đó $ME \perp OA$ và $NF \perp OD$. Đặt ME cắt PO tại I. Áp dụng định lý Thales cho $MN \parallel BC$ và $MI \parallel BD(\perp OA)$, ta được $\dfrac{PI}{PO} = \dfrac{PM}{PB} = \dfrac{PN}{PC}$. Suy ra $IN \parallel OC$ và $IN \perp OD$. Từ đó, I, N, F thẳng hàng. Ta được $OEIF$ là hình chữ nhật. Vì vậy IO đi qua trung điểm EF. Mà $I \in PO$, nên ta được PO đi qua trung điểm EF.
3) Đặt PO cắt ST tại J. Do $IM \parallel OB$ và $IN \parallel OC$ nên $\angle IMP = \angle OBP = \angle OPM$ và $\angle INP = \angle OCP = \angle IPN$, vì vậy $IP = IM = IN$ hay I là tâm ngoại tiếp của $\triangle PMN$. Mặt khác, từ $ME \parallel SB$ và $KM = KB$, áp dụng định lý Thales suy ra $KE = KS$ và $\triangle OES$ vuông cân tại O. Tương tự $FL = LT$ và $\triangle OFT$ vuông cân tại O. Từ đó ta được $\triangle OEF = \triangle OST$. Suy ra $\angle OTS = \angle OFE = \angle POF = 90^\circ - \angle POE = 90^\circ - \angle JOT$, vì vậy $\angle OJT = 90^\circ$ hay $PO \perp ST$. Từ đó suy ra $\angle PVU = 90^\circ - \angle IPV = \dfrac{1}{2}\angle PIN = \angle PMN = \angle PKL$ (do I là tâm ngoại tiếp $\triangle PMN$ và $MN \parallel KL$). Do đó ta được tứ giác $KLVU$ nội tiếp. □

Nhận xét 2. *Đây là bài toán mới và nằm ở đề thi vào các lớp chuyên toán, ý 1) khá nhẹ nhàng, ý 2) khó hơn một chút và ý 3) có tính phân loại. Cả ý 2) và ý 3) đều đòi hỏi phải dựng thêm hình phụ để làm bài, mục đích này làm đề thi trở nên rất khác biệt so với các đề trường khác. Cấu trúc đề bài chặt chẽ với 3 câu, ý 2) dùng ý 1) và ý 3) dùng ý 2). Kết quả này cũng nằm trong một bài toán có ý nghĩa khi thu gọn lại đề bài như sau*

Bài 0.15. *Cho hình vuông $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn (O). P là một điểm thuộc cung nhỏ AD của (O). PB, PC lần lượt cắt đoạn AD tại M, N. Trung trực của AM, DN lần lượt cắt BD, AC tại S, T. ST cắt PC, PB lần lượt tại U, V. Chứng minh rằng đường tròn đường kính UV tiếp xúc (O).*

Bài 0.16 (THPT chuyên ĐHSP 2016 vòng 1). *Cho ba điểm phân biệt A, M, B thẳng hàng và M nằm giữa A và B. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng AB dựng hai tam giác đều AMC và BMD. Gọi P là giao điểm của AD và BC.*
1) Chứng minh $AMPC$ và $BMPD$ là các tứ giác nội tiếp.
2) Chứng minh rằng $\sqrt{CP.CB} + \sqrt{DP.DA} = AB$
3) Đường nối tâm của hai đường tròn ngoại tiếp các tứ giác $AMPC$ và $BMPD$ cắt PA và PB tại E và F. Chứng minh $CDFE$ là hình thang.

Lời giải. 1) Ta có $MC = MA, MB = MD$ và $\angle CMB = \angle AMD = 120^\circ$, do đó $\triangle MCB = \triangle MAD$(c.g.c). Từ đó suy ra $\angle MCP = \angle MAP$ và $\angle MBP = \angle MDP$. Vậy $AMPC$ và $BMPD$ là các tứ giác nội tiếp.
2) Do $\angle CMD = 180^\circ - \angle AMC - \angle BMD = 60^\circ = \angle MBD$ nên CM tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp $\triangle BMD$. Ta được $\angle CMP = \angle MBP$, suy ra $\triangle CPM \sim \triangle CMB$(g.g), suy ra $\dfrac{CP}{CM} = \dfrac{CM}{CB}$ hay $CM^2 = CP \cdot CB$. Chứng minh tương tự ta cũng được $DM^2 = DP \cdot DA$.
Vậy $\sqrt{CP \cdot CB} + \sqrt{DP \cdot DA} = CM + DM = AM + BM = AB$.
3) Gọi I, J lần lượt tâm ngoại tiếp của các tứ giác $AMPC$ và $BMPD$. Ta có $\angle EPM = \angle FPM = 60^\circ$ nên E, F đối xứng qua PM và $PEMF$ là hình thoi. Do đó theo định lý Thales



Hình 20.3

ta được $\dfrac{AE}{AP} = \dfrac{AM}{AB} = \dfrac{PF}{PB}$ hay $\dfrac{AE}{PF} = \dfrac{AP}{PB}$. Mặt khác ta có $\angle PIA = 2\angle PMA = 2\angle PDB = \angle PJB$ hay $\triangle PIA \sim \triangle BJP$, suy ra $\dfrac{IA}{JP} = \dfrac{AP}{PB} = \dfrac{AE}{PF}$, suy ra $\triangle IAE \sim \triangle JPF$(c.g.c). Từ đó ta được $\dfrac{IE}{JF} = \dfrac{IA}{JP} = \dfrac{IC}{JD}$, kết hợp $\angle CIE = \angle DJF$ (do $IC \parallel JD(\perp AB)$), ta được $\triangle CIE \sim \triangle DJF$(c.g.c), suy ra $\angle CEI = \angle DFJ$. Do vậy, $CE \parallel DF$ hay $CDFE$ là hình thang. □

Nhận xét 3. *Cấu hình của đề ra không mới nhưng ý 3) mới và phù hợp với phân loại. Bài toán có ba ý đúng theo cấu trúc một bài toán thi hình học rõ ràng kết hợp với hau ý đầu dễ và ý 3) phân loại phù hợp cho một đề thi chung. Kết quả này cũng nằm trong một bài toán có ý nghĩa khi tổng quát như sau*

Bài 0.17. *Cho tam giác ABC với D thuộc đoạn BC. E, F thuộc đoạn CA, AB sao cho $DE \parallel AB, DF \parallel AC$. Đường tròn $(K), (L)$ ngoại tiếp tam giác DCF và DBE cắt nhau tại G khác D. KL cắt GB, GC tại M, N. Chứng minh rằng $FM \parallel EN$.*

Nhận xét 4. *Các năm gần đây, phần hình học trong một số đề thi vào các lớp chuyên toán ở các trường chuyên có truyền thống có nhiều bài toán hình mới có nội dung khác các đề thi vào lớp 10 thông thường. Là một giáo viên theo sát đội tuyển và có tham gia vào công việc bồi dưỡng học sinh giỏi thì tôi cũng có một đôi lời bàn. Việc các trường đổi mới đề thi theo phong cách sát hơn cho các đối tượng học sinh giỏi không làm mất đi tính truyền thống của đề thi cấp 2 vào cấp 3, vì mục đích chính của thi vào trường chuyên là để lọc ra học sinh giỏi toán. Như khảo sát qua điểm số một số trường thì vẫn có luôn điểm 10 toán chuyên và phổ để 8,9 khá cao, điều đó cho thấy đề thi vẫn phù hợp. Mặt khác như đáp án đã công bố thì rõ ràng các bài toán đó nằm hoàn toàn trong chương trình cấp 2. Một số ý kiến cho rằng các bài toán đó phù hợp hơn khi giải trên máy tính với các công cụ hình học mạnh có trên mạng, liệu rằng có mất tính khách quan khi bắt học sinh phải tự vẽ hình và giải. Trả lời cho ý kiến này khá đơn giản, bản thân tôi là một người hay ra đề hình thì đối với tôi máy tính hoàn toàn chỉ là công cụ để giúp đỡ con người chứ chắc chắn không thay con người ra đề. Chẳng hạn khi bạn cộng hoặc nhân hai số lớn để đỡ mất thời gian thì bấm máy tính bỏ túi, đối với các bài toán hình cũng vậy, nếu thiếu thời gian vẽ tay căn chỉnh tay thì dùng máy cho đỡ mất thời gian. Nhưng một đề hình hay là hoàn toàn nằm ở tính chất hình mà người ra đề đạt được và muốn kiểm tra kiến thức đó của học sinh. Sự thực rằng một học sinh có tư duy hình tốt thì cũng không cần vẽ hình bằng thước và compa cũng có thể* *nghĩ ra lời giải và viết lại. Tất nhiên rằng với các bài toán phức tạp như hiện nay thì sự tưởng tượng là chửa đủ mà phải nhìn hình vẽ, nhưng điều đó không có nghĩa là máy tính đã thay thế con người, nó chỉ đóng vai trò hỗ trợ. Vậy nên cái việc có máy tính hay không có máy tính khi giải hình cũng không quan trọng bằng người giải có tư duy hình học sắc xảo tới đâu.*

Lời giải 3 bài toán trên là của em Trịnh Huy Vũ, học sinh lớp 12 A1 Toán, THPT chuyên KHTN. Phần nhận xét là của Trần Quang Hùng, giáo viên THPT chuyên KHTN.

Tuyển chọn các đề thi Olympic năm 2016 dành cho học sinh THCS

(Ban biên tập)

Đề thi 1. *(EGMO 2016) Cho n là số nguyên dương lẻ và $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là các số thực không âm. Chứng minh rằng*

$$\min_{1\leqslant i\leqslant n}(x_i^2+x_{i+1}^2)\leqslant \max_{1\leqslant j\leqslant n}(2x_jx_{j+1}),$$

trong đó $x_{n+1}=x_1$.

Đề thi 2. *(Saudi Arabia TST 2016, Junior) Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c=3$. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{\sqrt{abc}}\geqslant\frac{4}{3}.$$

Đề thi 3. *(ĐHSP HN, tuyển sinh 10) Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $a+b+c=1$. Chứng minh rằng ta có bất đẳng thức*

$$\sqrt{5a+4}+\sqrt{5b+4}+\sqrt{5c+4}\geqslant 7.$$

Đề thi 4. *(AMC 2016, 10B) Giả sử $f(x)=\sum\limits_{k=2}^{10}([kx]-k[x])$ trong đó $[x]$ ký hiệu số nguyên lớn nhất không vượt quá x. Nếu $x\geqslant 0$ thì $f(x)$ có thể nhận được bao nhiêu giá trị?*

Đề thi 5. *(APMOPS 2016) Biết số $a_1=1000$, $a_2=1016$ và $a_3=\frac{a_1+a_2}{2}$, $a_4=\frac{a_2+a_3}{2}, \ldots$ Tính giá trị của $\lfloor a_{15}\rfloor$ trong đó $\lfloor x\rfloor$ là phần nguyên của x.*

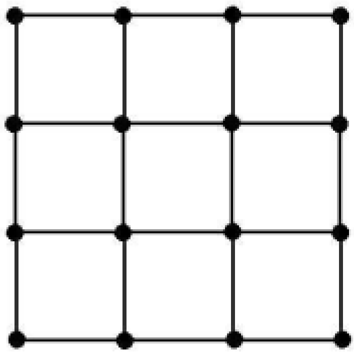
Đề thi 6. *(Tournament of the towns 2016) Tất cả các số nguyên từ 1 đến 1000000 được viết trên một băng giấy theo một thứ tự nào đó. Sau đó băng giấy được cắt thành các mẩu chứa hai chữ số liên tiếp. Chứng minh rằng các mẩu giấy này luôn chứa tất cả các số có hai chữ số, cho dù thứ tự ban đầu của các số là như thế nào.*

Đề thi 7. *(SASMO 2016, G8) Từ 72 số $1, 2, 3, \ldots, 72$ có thể chọn nhiều nhất bao nhiêu số sao cho trong các số được chọn, không có số nào có tích bằng 72?*

Đề thi 8. *(Moscow MO 2016, G8) Tìm số nguyên dương nhỏ nhất là bội của 99 mà trong cách viết thập phân của nó chỉ có các chữ số chẵn.*

Đề thi 9. *(PTNK 2016, tuyển sinh lớp 10) Lớp 9A có 27 học sinh nam và 18 học sinh nữ. Nhân dịp sinh nhật bạn X (là một thành viên của lớp), các bạn trong lớp có rất nhiều món quà tặng X. Ngoài ra mỗi bạn nam của lớp làm 3 tấm thiệp và mỗi bạn nữ xếp 2 hoặc 5 con hạc để tặng bạn X. Biết số tấm thiệp và số con hạc bằng nhau, hỏi bạn X là nam hay nữ?*

Đề thi 10. *(Purple Comet 2016) Có 16 điểm được xếp vào lưới 4×4 như hình vẽ.*



Khoảng cách giữa hai điểm là số bước đi ít nhất theo chiều ngang và chiều dọc theo các đường lưới để đi từ điểm này đến điểm kia. Ví dụ hai điểm cạnh nhau có khoảng cách 1 còn hai điểm ở hai góc đối nhau của lưới có khoảng cách 6. Gọi khoảng cách trung bình giữa hai điểm khác nhau của lưới là $\frac{m}{n}$ với m, n là các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau. Hãy tìm $m + n$.

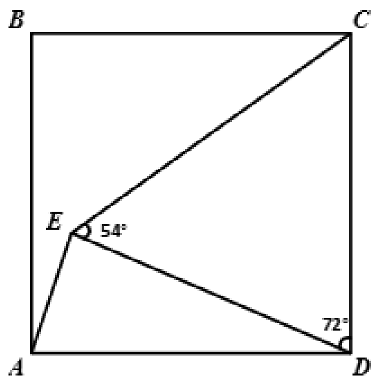
Đề thi 11. *(Moscow MO 2016, G7) Một góc của tam giác bằng 60° và cạnh đối diện với góc này bằng một phần ba chu vi tam giác. Chứng minh tam giác đó là tam giác đều.*

Đề thi 12. *(Tournament of the towns 2016) Cho tam giác nhọn ABC với $\angle C = 60^\circ$. Gọi H là trực tâm tam giác. Đường tròn tâm H bán kính HC cắt các đường thẳng CA và CB tại các điểm thứ hai M và N tương ứng. Chứng minh rằng đường thẳng AN và BM song song hoặc trùng nhau.*

Đề thi 13. *(Moscow MO 2016, G8) Điểm O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác nhọn ABC. Đường thẳng vuông góc với cạnh AC cắt đoạn BC và đường thẳng BC ở các điểm Q và P tương ứng. Chứng minh rằng các điểm B, O và trung điểm các đoạn AP và CQ nằm trên một đường tròn.*

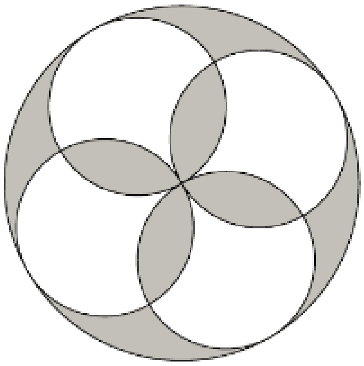
Đề thi 14. *(EGMO 2016) Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp. Hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại X. Giả sử C_1, D_1, M lần lượt là trung điểm của CX, DX và CD. Đường thẳng AD_1 và BC_1 cắt nhau tại Y, MY cắt AC và BD tại điểm thứ hai E, F tương ứng. Chứng minh rằng XY tiếp xúc đường tròn đi qua E, F, X.*

Đề thi 15. *(SASMO 2016, G7) Trong hình dưới đây, $ABCD$ là hình vuông, biết $\angle CDE = 72^\circ$ và $\angle CED = 54^\circ$.*



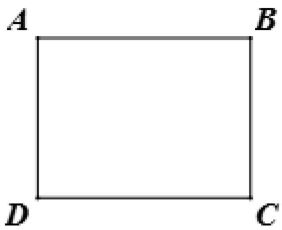
Tìm góc $\angle EAD$.

Đề thi 16. *(APMOPS 2016) Bốn đường tròn bằng nhau cùng đi qua một điểm và tiếp xúc với đường tròn lớn. Biết rằng bán kính của đường tròn lớn bằng 14.*



Lấy $\pi = \frac{22}{7}$. Tính diện tích phần tô đậm.

Đề thi 17. *(SASMO 2016, G9) Cho $ABCD$ là tờ giấy hình chữ nhật với $AB = 18$ và $AD = 12$. Điểm E là điểm trên CD sao cho $DE : CD = 1 : 2$. Hình chữ nhật $ABCD$ được gấp lại sao cho A trùng với E.*



Tính chiều dài đoạn gấp.

Đề thi 18. *(Saudi Arabia TST 2016, Junior) Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). AC cắt BD tại P. Gọi Q, R là hai điểm trên cung ACD không chứa các điểm A, B. Các đường thẳng RA, RC cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác PQR tại các điểm thứ hai L, K. PK, PL cắt BC, AD tại M, N tương ứng. Chứng minh rằng BC và AD cắt nhau tại điểm nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác QMN.*

Đề thi 19. *(Moscow MO 2016, G7) Hãy thay vào các dấu $*$ sáu chữ số phân biệt sao cho các phân số đều tối giản và đẳng thức đúng*

$$\frac{*}{*} + \frac{*}{*} = \frac{*}{*}.$$

Đề thi 20. *(SASMO 2016, G8) Trong phép tính dưới đây, các chữ cái khác nhau đại diện cho các chữ số khác nhau.*

$$\begin{array}{cccccc} & S & A & S & M & O \\ \times & & & & & 3 \\ \hline & M & A & T & H & S \\ \hline \end{array}$$

Hãy tìm số có 5 *chữ số* ***MATHS***.

Đề thi 21. *(SASMO 2016, G9) Trong phép tính dưới đây, các chữ cái khác nhau đại diện cho các chữ số khác nhau.*

$$\begin{array}{cccccc} & & S & T & A & Y \\ \times & & C & O & O & L \\ \hline & S & A & S & M & O \\ \hline \end{array}$$

Hãy tìm số có 5 *chữ số* ***SASMO***.

Đề thi 22. *(AMC 2016, 10A) Phép toán* $\diamondsuit$ *có các tính chất* $a \diamondsuit (b \diamondsuit c) = (a \diamondsuit b) \cdot c$ *và* $a \diamondsuit a = 1$ *với mọi các số thực không âm* a, b *và* c *(ở đây* ı · ȷ *biểu thị phép nhân). Nghiệm của phương trình* $2016 \diamondsuit (6 \diamondsuit x) = 100$ *được viết dưới dạng* $\frac{p}{q}$, *trong đó* p *và* q *là các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau. Hãy tính* $p + q$.

Đề thi 23. *(IMC 2016, 2nd round, G8)* $P(x)$ *là một đa thức bậc* 8 *thỏa mãn điều kiện*

$$P(1) = P(˘1), P(2) = 6 + P(˘2), P(3) = 24 + P(˘3),$$

và $P(4) = 60 + P(˘4)$. *Hãy tính giá trị của* $P(5)˘P(˘5)$.

Đề thi 24. *(Purple Comet 2016) Đa thức bậc ba* $p(x)$ *và* $q(x)$ *thỏa mãn các điều kiện*

$$p(1) = q(2),\ p(3) = q(4),\ p(5) = q(6),$$

và $p(7) = q(8) + 13$. *Hãy tìm* $p(9) - q(10)$.

Đề thi 25. *(Saudi Arabia TST 2016, Junior) Cho* k *là số nguyên dương. Chứng minh rằng tồn tại các số nguyên* x, y *không số nào chia hết cho* 3 *sao cho* $x^2 + 3y^2 = 3^k$.

Đề thi 26. *(Saudi Arabia Training Camp 2016) Cho* S *là tập hợp tất cả các số tự nhiên biểu diễn được dưới dạng* $x^2 + 3y^2$ *với* x, y *là các số nguyên, tức là* $S = \{n \in N \mid n = x^2 + 3y^2$ *trong đó* x, y *là các số nguyên* $\}$. *Chứng minh các tính chất sau đây của* S :

i) *Nếu* $m \in S$, $n \in S$ *thì* $m \cdot n \in S$.

ii) *Nếu* $N \in S$ *và* $2 \mid N$ *thì* $\frac{N}{4} \in S$. *Nếu* $N \in S$, *số nguyên tố* $p \in S$ *và* $p \mid N$ *thì* $\frac{N}{p} \in S$.

iii) *Cho* p *là số nguyên tố dạng* $3k + 1$. *Chứng minh rằng tồn tại số nguyên* N *sao cho* $N^2 + 3$ *chia hết cho* p. *Từ đó suy ra* $p \in S$.

iv) *Tìm điều kiện cần và đủ để một số nguyên dương* $N > 1$ *thuộc* S.

Đề thi 27. *(SASMO 2016, G7) Có bao nhiêu cách sắp xếp các chữ cái của từ SASMO sao cho hai chữ S xếp cạnh nhau?*

Đề thi 28. *(APMOPS 2016) Có* 6 *chữ* A, P, M, O, P, S. *Một cái máy tính sắp xếp các từ theo thứ tự trong từ điển:* $AMOPPS$, $AMOPSP$, $AMOSPP, \ldots, SPPOMA$. *Hỏi từ* $POAMSP$ *ở vị trí thứ bao nhiêu?*

Đề thi 29. *(Moscow MO* 2016*, G6) Ở một thành phố nhỏ chỉ có một tuyến tàu điện. Nó chạy vòng tròn và tàu điện chạy theo vòng tròn theo cả hai phía. Trên vòng có* 3 *bến là Rạp xiếc, Công viên và Sở thú. Từ Công viên đến Sở thú thì đường đi qua Rạp xiếc dài gấp* 3 *lần đường đi không qua Rạp xiếc. Từ Rạp xiếc đến Sở thú thì đường đi qua Công viên ngắn bằng một nửa đường đi qua đường đi không qua Công viên. Hỏi đường đi nào từ Công viên đến Rạp xiếc ngắn hơn – Qua Sở thú hay không qua Sở thú và ngắn hơn bao nhiêu lần?*

Đề thi 30. *(Moscow MO* 2016*, G8) Có* $2n$ *viên sỏi* (n *nguyên dương cho trước) đang được xếp thành* 3 *đống. Mỗi lần thực hiện cho phép lấy một nửa số viên sỏi từ đống sỏi có chẵn viên sỏi và chuyển sang đống khác. Chứng minh rằng, dù các đống sỏi ban đầu được xếp thế nào, sau một số hữu hạn bước thực hiện như thế, ta có thể tạo ra một đống sỏi có đúng* n *viên sỏi.*

Đề thi 31. *(Moscow MO 2016, G8) Xung quanh một bàn tròn có* 10 *người đang ngồi, mỗi người trong họ hoặc là hiệp sĩ, là người luôn nói thật và kẻ nói dối là người luôn nói dối. Có hai người trong họ tuyên bố "Cả hai người ngồi cạnh tôi đều là kẻ nói dối" còn tất cả những người còn lại đều nói "Cả hai người ngồi cạnh tôi đều là hiệp sĩ". Hỏi có bao nhiêu hiệp sĩ trong số* 10 *người này (liệt kê tất cả các phương án có thể và chứng minh không còn phương án nào khác).*

Đề thi 32. *(Gulf MO* 2016*) Giả sử có* 4 *người* A, B, C *và* D *đánh tennis đôi với nhau. Họ có thể tổ chức các trận đấu như sau: Trận đấu* A *và* B *đấu với* C *và* D, *trận tiếp theo* A *và* C *đánh với* B *và* D, *cuối cùng* A *và* D *đánh với* B *và* C. *Cái hay của cách sắp xếp này là hai điều kiện sau được thỏa mãn:*

a) Hai cây vợt bất kỳ chung đội với nhau đúng 1 *lần.*

b) Hai cây vợt bất kỳ đấu ở hai đội khác nhau đúng 2 *lần.*

Hỏi có thể sắp xếp các trận đấu sao cho các điều kiện a) và b) được thỏa mãn trong các trường hợp sau? Giải thích rõ câu trả lời.

i) Có 5 *người chơi.*

ii) Có 7 *người chơi.*

iii) Có 9 *người chơi.*

Đề thi 33. *(IMC 2016, 2nd round, G6) Ông* A *có khoảng hơn* 1000 *con gà. Ông* A *đếm số gà của mình rồi báo cho* B. *Ông* B *lại báo cho* C. *Ông* C *báo cho* D *và* D *lại báo cho* E. *Trớ trêu là tất cả đều nhầm lẫn hoặc cố tính nhầm lẫn:* A *đếm thừa* 9 *con gà so với thực tế.* B *trước khi báo cho* C *đã đổi chỗ hai chữ số cuối cùng.* C *đã đổi chỗ chữ số đầu tiên và chữ số thứ ba trước khi báo cho* D. D *nhân đôi số nhận được rồi mới báo cho* E. *Kỳ lạ thay, số mà* E *nhận được lại đúng bằng số gà mà* A *có. Hỏi* A *có bao nhiêu con gà?*

Đề thi 34. *(IMC 2016, 2nd round, G8) Ở một khu đô thị có* 12 *con đường, gồm* 6 *con đường ngang song song với nhau và* 6 *đường dọc, các đường dọc đều song song với các đường ngang.* 12 *con đường tạo thành* 36 *ngã tư (nơi giao nhau giữa các đường dọc và đường ngang). Một người đi bộ đang không đứng ở ngã tư nào, và anh ta có ý định sẽ đi qua tất cả các ngã tư rồi trở về nơi đang đứng. Hỏi anh ta sẽ phải rẽ ít nhất bao nhiêu lần?*

Đề thi 35. *(Purple Comet 2016) Có* 10 *viên gạch lát nền được sắp thành một hàng dọc, mỗi viên có thể được sơn bằng một trong* 4 *màu đỏ (Đ), vàng (V), xanh (X), và trắng (T). Tìm số cách sơn sao cho mỗi một blốc* 5 *viên gạch liên tiếp đều chứa đủ* 4 *màu. Ví dụ cách tô ĐTXTVĐĐXTV và TTXVĐTVXTĐ thì được nhưng ĐTXVVXTTĐV thì không được vì 5 viên gạch liền nhau XVVXT không chứa màu đỏ.*

Đề thi 36. *(AMC 2016, 10B) Một số đội bóng thi đấu vòng tròn* 1 *lượt, hai đội bất kỳ đấu với nhau đúng* 1 *trận. Mỗi đội thắng* 10 *trận và thua* 10 *trận, không có hòa. Hỏi có bao nhiêu bộ* 3 *đội* $\{A, B, C\}$ *mà* A *thắng* B, B *thắng* A, C *thắng* A*?*

Đề thi 37. *(SASMO 2016, G6) Một chiếc xe mất* 3 *giờ* 41 *phút để đi từ thành phố* A *đến thành phố* B *và quay về từ* B *về* A*. Xe đi xuống dốc với vận tốc* 6*km/h (kilômét/giờ), trên đường bằng với vận tốc* 5*km/h và đi lên dốc với vận tốc* 4*km/h. Đoạn đường từ* A *đến* B *có* 4*km đường bằng. Tính khoảng cách giữa hai thành phố.*

Đề thi 38. *(SASMO 2016, G7) Khoảng cách giữa nhà của Tom và nhà của Ben là* 36*km. Vào lúc* 11 *giờ sáng, Tom và Ben bắt đầu đi đến nhà của nhau. Cứ sau* 10 *phút chạy nhanh với vận tốc* 5*m/s (mét/ giây), Tom lại chạy chậm với vận tốc* 0.5*m/s trong* 4 *phút còn Ben thì cứ sau* 15 *phút đi xe đạp với vận tốc* 5*m/s lại nghỉ* 3 *phút. Hỏi họ gặp nhau vào lúc mấy giờ?*

LỜI GIẢI ĐỀ THI TOÁN QUỐC TẾ FORMULA OF UNITY THE THIRD MILLENNIUM

(Ban biên tập)

Tiếp theo Epsilon số 6, Ban biên tập xin giới thiệu với bạn đọc lời giải của đề thi của kỳ thi Formula of Unity. Phần 1 gồm các đề của khối lớp 5, 6, 7, 8. Các khối còn lại sẽ được giới thiệu vào kỳ tới.

1. Đề thi cho khối lớp R5

Bài 1. *Peter, Basil và Anatoly góp tiền tiết kiệm để mua một quả bóng giá 9 đô la. Biết rằng, số tiền góp của mỗi người không nhiều hơn một nửa tổng số tiền góp của hai người còn lại. Hỏi Peter đã đóng góp bao nhiêu tiền?*

Lời giải. Nếu số tiền của ba bạn không bằng nhau thì phải có người có có nhiều tiền nhất. Giả sử người đó là Peter. Khi đó, số tiền của Peter sẽ nhiều hơn trung bình cộng số tiền của hai bạn còn lại. Tuy nhiên, theo đề bài thì số tiền của Peter lại không nhiều hơn nửa tổng số tiền của hai bạn còn lại. Do đó, số tiền của 3 bạn đã góp là bằng nhau và bằng 3 đô la.

Bài 2. *Pauline viết hai số A và B lên bảng. Victoria xóa hai số A; B và viết tổng C và tích D của chúng. Sau đó, Pauline lại xoá hai số C và D; thay bởi tổng E và tích F của chúng. Biết rằng một trong hai số E và F là số lẻ. Hỏi đó là số nào?*

Lời giải. Theo đề bài thì:

$$\begin{aligned} C &= A + B \\ D &= AB \\ E &= A + B + AB \\ F &= (A + B)AB \end{aligned}$$

Ta thấy F luôn là số chẵn, vì nếu trong 2 số A, B có một số chẵn thì F chẵn; còn nếu A, B cùng lẻ thì $A + B$ chẵn và F cũng chẵn.

Do đó, nếu một trong hai số E, F lẻ thì số đó chỉ có thể là E (chẳng hạn khi A chẵn, B lẻ).

Bài 3. *Ta nói rằng học sinh A học tốt hơn học sinh B nếu điểm của A cao hơn điểm của B trong phần lớn các bài kiểm tra. Sau 3 bài kiểm tra, thầy giáo nhận xét rằng học sinh A học tốt hơn học sinh B, học sinh B học tốt hơn học sinh C và học sinh C lại học tốt hơn học sinh A. Liệu điều này có thể xảy ra không?*

Lời giải. Điều này có thể xảy ra. Ta đưa ra một ví dụ sau:

1. Học sinh A được: $9, 10, 8$.

2. Học sinh B được: $8, 9, 10$.

3. Học sinh C được: $10, 8, 9$.

Ghi chú: bài này có lẽ lấy ý tưởng từ đề IMO Shortlist 2014 như sau: Có một bộ bài có vô số quân mà mỗi quân được viết bởi 1 số thực; ngoài ra, với mỗi số thực x thì chỉ có đúng một quân được viết số x.

Hai người chơi lựa chọn tùy ý 2 tập hợp rời nhau A, B mà mỗi tập gồm 100 quân bài từ bộ bài trên. Nhiệm vụ của chúng ta là chọn một luật chơi nào đó để căn cứ trên các quân bài đã chọn, có thể xác định ai là người thắng cuộc. Đặc biệt, luật đó lại phải thỏa mãn một số ràng buộc như sau:

1. Nó chỉ dựa trên việc so sánh các số được viết trên hai bộ 100 quân bài (không quan tâm đến giá trị cụ thể của chúng là bao nhiêu).

2. Nếu liệt kê các tập hợp theo thứ tự tăng dần: $A = \{a_1, a_2, ..., a_{100}\}$ và $B = \{b_1, b_2, ..., b_{100}\}$ Ngoài ra, ta có $a_i > b_i$ với $i = 1, 2, 3, ..., 100$ thì khi đó A phải thắng B.

3. Nếu có 3 người chơi lần lượt chọn được ba bộ 100 quân bài là A, B, C mà bộ A thắng bộ B, bộ B thắng bộ C thì bộ A cũng phải thắng bộ C.

Hỏi có tất cả bao nhiêu cách định nghĩa luật chơi như thế?

Hai luật chơi là khác nhau nếu tồn tại 2 tập hợp A, B mà A thắng B trong luật này, nhưng lại thua B trong luật kia.

Bài 4. *Nếu Leon bị điểm kém ở trường, cậu ta sẽ dành cả buổi tối để nói dối mẹ. Còn nếu ngược lại, cậu ta sẽ luôn nói thật. Leon có một cô em gái luôn được mẹ cho kẹo nếu như hôm đó cô bé không bị điểm kém. Một buổi tối, Leon nói với mẹ: "Hôm nay con bị nhiều điểm kém hơn em". Hỏi cô em gái của Leon có được mẹ cho kẹo hay không?*

Lời giải. Câu nói của Leon không thể là câu nói thật. Suy ra Leon bị điểm kém và em gái Leon có số điểm kém bằng hoặc nhiều hơn Leon. Suy ra cô gái của Leon không được mẹ cho kẹo. Câu trả lời là phủ định.

Bài 5. *Một tờ lịch ma thuật chỉ đúng ngày tất cả các ngày chẵn của tháng và sai ngày vào tất cả các ngày lẻ. Hỏi số lớn nhất các ngày liên tiếp nhau được ghi cùng ngày trên lịch là bao nhiêu? Và ngày đó có thể là ngày nào trong tháng?*

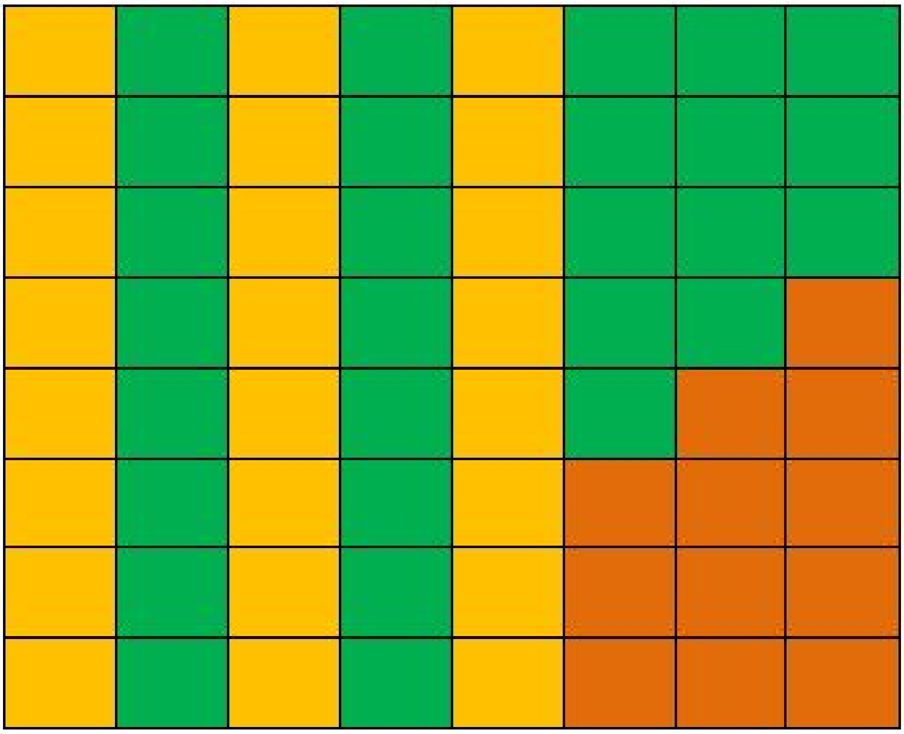
Lời giải. Số lớn nhất thỏa mãn là 4. Đó là các ngày $31, 1, 2, 3$ và được ghi là ngày 2.

Bài 6. *Có bao nhiêu số có biểu diễn thập phân gồm 10 chữ số khác nhau và có chứa đoạn* 0123*?*

Lời giải. Coi 0123 là 1 chữ số, còn $4, 5, 6, 7, 8, 9$ là 6 chữ số khác. Vì 0123 không được xếp đầu nên có 6 cách chọn vị trí cho 0123. Sau đó có 6! cách xếp 6 chữ số còn lại vào 6 chỗ còn lại. Đáp số là $6.6! = 4320$.

Bài 7. *Hình vuông 8×8 được vẽ trên tờ giấy kẻ ô vuông dọc theo các đường kẻ. Alex cắt hình vuông 8×8 theo các đường kẻ thành 7 phần với chu vi bằng nhau. Hãy chỉ ra một cách cắt của Alex.*

Lời giải. Cách cắt mô tả như hình bên dưới:



2. Đề thi cho khối lớp R6

Bài 1. *Có 14 người ngồi quanh một vòng tròn. Peter, Victoria, Anatoly và Genghis đang ngồi cạnh nhau theo thứ tự và các bạn có các đồng xu mệnh giá 1, 2, 5 và 10 rúp. Một người bất kì có thể đưa một đồng xu của mình cho người ở bên trái hoặc bên phải của mình nếu có đúng 3 người ngồi giữa họ. Sau một lúc chuyển như vậy, các bạn Peter, Victoria, Anatoly và Gengis lại nhận được các đồng xu. Hỏi lúc này, bạn nào đang cầm đồng xu nào? Hãy chỉ ra tất cả các khả năng và chứng minh không còn trường hợp nào khác.*

Lời giải. Ta thầy người số 1 sẽ có thể lần lượt chuyển tiền cho người thứ 5, 9, 13, 3, … tức là những người vị trí lẻ sẽ chuyển tiền cho nhau. Tương tự, những người ở vị trí chẵn chuyển tiền cho nhau. Suy ra các phương án trên là tất cả các phương án thỏa mãn. 1, 2, 5, 10; 1, 10, 5, 2; 5, 2, 1, 10, 5, 10, 1, 2.

Bài 2. *Pauline viết hai số A và B lên bảng. Victoria xóa hai số A; B và viết tổng C và tích D của chúng. Sau đó, Pauline lại xoá hai số C và D; thay bởi tổng E và tích F của chúng. Biết rằng một trong hai số E và F là số lẻ. Hỏi đó là số nào?*

Lời giải. Xem lời giải của phần trước.

Bài 3. *Ta nói rằng học sinh A học tốt hơn học sinh B nếu điểm của A cao hơn điểm của B trong phần lớn các bài kiểm tra. Sau 3 bài kiểm tra, thầy giáo nhận xét rằng học sinh A học tốt hơn học sinh B, học sinh B học tốt hơn học sinh C và học sinh C lại học tốt hơn học sinh A: Liệu điều này có thể xảy ra không?*

Lời giải. Xem lời giải của phần trước.

Bài 4. *Nếu Leon bị điểm kém ở trường, cậu ta sẽ dành cả buổi tối để nói dối mẹ. Còn nếu ngược lại, cậu ta sẽ luôn nói thật. Leon có một cô em gái luôn được mẹ cho kẹo nếu như hôm đó cô bé không bị điểm kém. Một buổi tối, Leon nói với mẹ: "Hôm nay con bị nhiều điểm kém hơn em". Hỏi cô em gái của Leon có được mẹ cho kẹo hay không?*

Lời giải. Xem lời giải của phần trước.

Bài 5. *Một tờ lịch ma thuật chỉ đúng ngày tất cả các ngày chẵn của tháng và sai ngày vào tất cả các ngày lẻ. Hỏi số lớn nhất các ngày liên tiếp nhau được ghi cùng ngày trên lịch là bao nhiêu? Và ngày đó có thể là ngày nào trong tháng?*

Lời giải. Xem lời giải của phần trước.

Bài 6. *Có bao nhiêu số có biểu diễn thập phân gồm 10 chữ số khác nhau và có chứa đoạn 0123 hoặc đoạn 3210?*

Lời giải. Kết quả là 6.6! + 7! = 9360. Lập luận tương tự bài 6 của lớp 5.

Bài 7. *Hình vuông 8×8 được vẽ trên tờ giấy kẻ ô vuông dọc theo các đường kẻ. Alex cắt hình vuông 8×8theo các đường kẻ thành 7 phần với chu vi bằng nhau. Hãy chỉ ra một cách cắt của Alex.*

Lời giải.
Xem lời giải của phần trước.

3. Đề thi dành cho khối lớp R7

Bài 1. *Một tờ lịch ma thuật chỉ đúng ngày tất cả các ngày chẵn của tháng và sai ngày vào tất cả các ngày lẻ. Hỏi số lớn nhất các ngày liên tiếp nhau được ghi cùng ngày trên lịch là bao nhiêu? Và ngày đó có thể là những ngày nào?*

Lời giải. Xem lời giải của phần trước.

Bài 2. *Hãy điền vào các ô của bảng vuông 5×5 các số nguyên dương phân biệt sao cho tổng các số trên mỗi hàng, mỗi cột là bằng nhau và nhỏ nhất có thể. Biết rằng, các số $1, 2, 3, 4, 2015$ đã được điền trước trên một đường chéo.*

1				
	2			
		3		
			4	
				2015

Lời giải. Do các số là phân biệt nên tổng 8 số cùng hàng hoặc cùng cột với 2015 tối thiểu là $5+6+\cdots+12 = 68$. Suy ra tổng chung của các hàng, các cột phải ít nhất bằng $2015+34 = 2049$. Và ta có thể sắp được như sau:

1				7
	2			8
		3		9
			4	10
5	6	11	12	2015

Bài 3. *Hình vuông 8×8 được vẽ trên tờ giấy kẻ ô vuông dọc theo các đường kẻ. Alex cắt hình vuông 8×8 theo các đường kẻ thành 7 phần với chu vi bằng nhau. Hãy chỉ ra một cách cắt của Alex.*

Lời giải. Xem lời giải của phần trước.

Bài 4. *Có 27 con gián tham gia một cuộc chạy đua. Trong mỗi vòng sẽ có ba con gián chạy. Mỗi con gián chạy với tốc độ cố định, không đổi giữa các vòng đua, và tốc độ của các con gián là đôi một khác nhau. Sau mỗi vòng, người ta ghi lại thứ tự về đích của các con gián tham gia vòng đua đó. Hỏi 14 vòng đua có đủ để xác định chính xác theo thứ tự hai con gián chạy nhanh nhất không?*

Lời giải. Câu trả lời là khẳng định.

Ta dùng 9 vòng đầu loại 9 con chậm nhất. 3 vòng tiếp theo chọn ra con nhanh nhất trong 9 con nhanh nhất và loại 3 con chậm nhất. Vòng 13 chọn ra con nhanh nhất (vô địch) trong 3 con nhanh nhất. Lúc này chỉ còn 3 con có thể đứng nhì là con đứng nhì ở vòng 13, con đứng nhì trong cuộc đua với con vô địch ở vòng 3 trận và con đứng nhì ở cuộc đua với con vô địch ở 9 vòng đầu. Dùng trận 14 để tìm ra con thứ nhì từ 3 con này.

Bài 5. *Ta nói rằng học sinh A học tốt hơn học sinh B nếu điểm của A cao hơn điểm của B trong phần lớn các bài kiểm tra. Sau 3 bài kiểm tra, thầy giáo nhận xét rằng học sinh A học tốt hơn học sinh B; học sinh B học tốt hơn học sinh C và học sinh C lại học tốt hơn học sinh A: Liệu điều này có thể xảy ra không?*

Lời giải. Xem lời giải của phần trước.

Bài 6. *Ta nói một số nguyên dương là đẹp nếu nó là tích các giai thừa của các số nguyên tố (không nhất thiết phải phân biệt). Ta gọi một số hữu tỉ dương là tốt nếu nó là tỉ số giữa hai số nguyên dương đẹp. Chứng minh rằng tất cả các số hữu tỉ dương đều tốt.*

Lời giải. Trước hết, ta thấy rằng nếu một số hữu tỉ dương là tốt thì tích và thương của chúng cũng đều tốt.

Ngoài ra, mỗi số nguyên dương n đều có thể viết thành $\frac{n!}{(n-1)!}$.

Từ đó, ta đưa bài toán về chứng minh mọi số nguyên dương đều tốt và ta sẽ thực hiện điều này bằng quy nạp.

Với $n = 1$, ta có $1 = \frac{2!}{2!}$ là số tốt.

Với $n = 2$, ta có $2 = \frac{2!2!}{2!}$ cũng là số tốt.

Với $n = 3$, ta có $3 = \frac{3!}{2!}$ cũng là số tốt.

Khi đó, với $n \geqslant 4$, nếu nó là hợp số, ta có thể viết nó thành tích của các số nguyên tố nhỏ hơn và theo giả thiết quy nạp, nó cũng là số tốt.

Nếu $n \geqslant 4$ là số nguyên tố, ta viết $n = \frac{n!}{(n-1)!}$ và $n - 1$ là hợp số, khi đó nó cũng là số tốt nên suy ra n là số tốt.

Theo nguyên lý quy nạp thì nhận xét được chứng minh. Bài toán được giải quyết.

Chẳng hạn $5 = \frac{5!}{4!} = \frac{5!}{2\cdot3\cdot4} = \frac{5!}{2^3\cdot3} = \frac{5!}{(2!)^3\cdot\frac{3!}{2!}} = \frac{5!}{(2!)^2\cdot3!}$.

Bài 7. *Ta gọi một số nguyên dương là đẹp nếu dãy các chữ số của nó tăng thực sự, ví dụ 1589 là số tăng còn 447 thì không. Hãy tìm số nhỏ nhất các số nguyên dương đẹp với tổng là* 2015.

Lời giải. Ta sẽ cần 3 số là: $1789 + 189 + 37 = 2015$. Rõ ràng bản thân số 2015 không đẹp nên không thể dùng 1 số để biểu diễn.

Ta sẽ chứng minh rằng không thể dùng 2 số để biểu diễn được 2015.

Giả sử $x + y = 2015$ và $x < y$ (hai số này không thể bằng nhau vì 2015 lẻ). Dễ thấy rằng số đẹp lớn nhất không vượt quá 2015 là 1789. Suy ra $x < y \leqslant 1789$.

Dễ thấy nếu cả hai số cùng có 4 chữ số trở lên thì không thỏa nên ta có thể đặt $x = \overline{abc}, y = \overline{1def}$, trong đó $0 < a < b < c, 1 < d < e < f$. Ta thấy $\overline{abc} + \overline{1def} = 2015$. Ta thấy $c + f = 5$ hoặc $c + f = 15$, nhưng nếu $c + f = 5$ thì c, f quá nhỏ, không thỏa. Thế nên $c + f = 15$ và dẫn đến $b + e = 9$ (vì phép tính trước có nhớ, và kết quả phải tận cùng là 0). Khi đó phép tính $a + d = 9$ (tương tự trên, phép tính trước có nhớ và kết quả phải tận cùng là 0). Nhưng khi đó, ta có $b + e = a + d$, mâu thuẫn vì $a < b, d < e$. Do đó, không tồn tại 2 số đẹp có tổng là 2015. Đáp số là 3. Ghi chú. Số lớn nhất không vượt quá 2015 thỏa mãn tính chất: là tổng của 2 số đẹp là số 1978. Khi đó: $1978 = 189 + 1789$.

4. Đề thi dành cho Khối lớp R8

Bài 1. *Hãy điền vào các ô của bảng vuông* 5×5 *các số nguyên dương phân biệt sao cho tổng các số trên mỗi hàng, mỗi cột là bằng nhau và nhỏ nhất có thể. Biết rằng, các số* $1, 2, 3, 4, 2015$ *đã được điền trước trên một đường chéo.*

Lời giải. Xem lời giải của phần trước.

Bài 2. *Có 27 con gián tham gia một cuộc chạy đua. Trong mỗi vòng sẽ có ba con gián chạy. Mỗi con gián chạy với tốc độ cố định, không đổi giữa các vòng đua, và tốc độ của các con gián là đôi một khác nhau. Sau mỗi vòng, người ta ghi lại thứ tự về đích của các con gián tham gia vòng đua đó. Hỏi 14 vòng đua có đủ để xác định chính xác theo thứ tự hai con gián chạy nhanh nhất không?*

Lời giải. Xem lời giải của phần trước.

Bài 3. *Hãy tìm một số nguyên dương sao cho tích các ước tự nhiên của nó là* 10^{90}.

Lời giải. Ta tìm số dưới dạng 2^m5^n. Các ước của số này có dạng $2^a \cdot 5^b$ với $0 \leqslant a \leqslant m, 0 \leqslant b \leqslant n$. Từ đó tích các ước bằng $10^{\frac{mn(m+1)(n+1)}{4}}$ nên ta đưa về $mn(m+1)(n+1) = 360$. Chọn $m = 3, n = 5$ thì ta được một số thỏa mãn yêu cầu bài toán là $2^3 \cdot 5^5 = 25000$.

Bài 4. *John có 12 que gỗ với độ dài mỗi que là một số nguyên dương không vượt quá 56. Chứng minh rằng John có 3 que có thể tạo thành một tam giác.*

Lời giải. Giả sử ngược lại, không có 3 que tạo thành tam giác. Xếp thứ tự chiều dài các que gỗ $a_1 \leqslant a_2 \leqslant ... \leqslant a_{12}$ thì từ giả thiết, ta sẽ suy ra $a_{n+2} \geqslant a_{n+1} + a_n$. Từ đây lần lượt suy ra $a_3 \geqslant a_2 + a_1 \geqslant 2, a_4 \geqslant a_3 + a_2 \geqslant 3, a_5 \geqslant a_4 + a_3 \geqslant 5$ Cứ như thế $a_6 \geqslant 8, a_7 \geqslant 13, a_8 \geqslant 21, a_9 \geqslant 34, a_{10} \geqslant 55, a_{11} \geqslant 89$. Điều này mâu thuẫn, suy sẽ John sẽ luôn tạo được tam giác.

Bài 5. *Ta nói một số nguyên dương là đẹp nếu nó là tích các giai thừa của các số nguyên tố (không nhất thiết phải phân biệt). Ta gọi một số hữu tỉ dương là tốt nếu nó là tỉ số giữa hai số nguyên dương đẹp. Chứng minh rằng tất cả các số hữu tỉ dương đều tốt.*

Lời giải. Xem lời giải của phần trước.

Bài 6. *Cho tam giác ABC với* $\angle B = 30°, \angle C = 105°$ *và D là trung điểm đoạn thẳng BC.*

Tìm góc $\angle BAD$? **Lời giải.** Hạ CH vuông góc với AB thì suy ra CHD là tam giác đều và AHC là tam giác vuông cân tại H. Từ đây suy ra tam giác AHD cân tại H và

$$\angle BAD = \angle HAD = 15°.$$

Bài 7. *Ta nói rằng học sinh A học tốt hơn học sinh B nếu điểm của A cao hơn điểm của B trong phần lớn các bài kiểm tra. Sau 3 bài kiểm tra, thầy giáo nhận xét rằng học sinh A học tốt hơn học sinh B; học sinh B học tốt hơn học sinh C và học sinh C lại học tốt hơn học sinh A. Liệu điều này có thể xảy ra không?*

Lời giải. Xem lời giải của phần trước.

CÁC VẤN ĐỀ CỔ ĐIỂN VÀ HIỆN ĐẠI

Trần Nam Dũng - Đại học Khoa học Tự nhiên - ĐHQG TP.HCM

LỜI GIỚI THIỆU

Chuyên mục này dành cho các vấn đề cổ điển và hiện đại được trình bày dưới dạng các bài toán xâu chuỗi. Đó có thể là chuỗi các bài để giải bài toán đẳng chu, chứng minh đẳng thức Euler kỳ diệu $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$, một chuỗi bài toán vận trù ... Cách trình bày xuất phát từ những vấn đề đơn giản, dễ hiểu, những khái niệm mới sẽ được định nghĩa luôn trong bài để có thể đọc tương đối độc lập. Và mỗi một chuỗi bài sẽ nêu ra những vấn đề nhất định, có thể là giải quyết một bài toán kinh điển hay nêu ra những giả thuyết mới, những vấn đề mới. Lời giải và thảo luận về các bài toán sẽ được đăng ở số $N + 3$.

Trong số này, chúng tôi xin giới thiệu với bạn đọc hai đề thi chính thức và hai đề đề nghị dành cho học sinh phổ thông trong kỳ thi Olympic Toán học sinh viên và học sinh toàn quốc diễn ra từ ngày 11/4/2016 - 17/4/2016 tại thành phố Quy Nhơn, tỉnh Bình Định.

Đề thi chính thức

Chủ đề: Đại số

Mục tiêu của bài thi này là tìm hiểu một số trường hợp riêng của định lý Markov: Nếu $P(x)$ là một đa thức với hệ số thực và có bậc không vượt quá n thì

$$\max_{|x|\leqslant 1} |P^{'}(x)| \leqslant n^2 \max_{|x|\leqslant 1} |P(x)|.$$

Chứng minh của định lý Markov vượt quá chương trình toán THPT. Ta sẽ tìm cách chứng minh những trường hợp riêng khi $n \leqslant 3$ của định lý và khảo sát một số bài toán xung quanh các trường hợp đó.

Trong các bài toán dưới đây, biến số x chỉ nhận giá trị thực.

A - Bất đẳng thức Markov cho đa thức bậc nhất

Bài PT. 1. *Giả sử a, b là hai số thực sao cho $|ax+b| \leqslant 1$ khi $|x| \leqslant 1$. Chứng minh rằng:*

(i) $|a| \leqslant 1.$

(ii) $|bx+a| \leqslant 1$ *khi* $|x| \leqslant 1.$

B - Bất đẳng thức Markov cho các đa thức bậc hai và bậc ba

Bài PT. 2. *Giả sử a, b, c là ba số thực sao cho các giá trị của đa thức ax^2+bx+c tại 1, 0, -1 đều thuộc đoạn $[-1,1]$.*

(i) Chứng minh rằng $|2ax+b| \leqslant 4$ khi $|x| \leqslant 1$.

(ii) Chứng minh rằng $|cx^2+bx+a| \leqslant 2$ khi $|x| \leqslant 1$.

Bài PT. 3. *Giả sử a, b, c, d là bốn số thực sao cho các giá trị α, β, γ và δ của đa thức ax^3+bx^2+cx+d tương ứng tại -1, $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, 1 đều thuộc đoạn $[-1,1]$.*

(i) Chứng minh rằng với mọi số thực A, B ta có $|A+B|+|A-B| = 2\max\{|A|,|B|\}$.

(ii) Bằng cách biểu diễn $3ax^2+2bx+c$ theo $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ và x, hãy chứng minh bất đẳng thức $|3ax^2+2bx+c| \leqslant 9$ khi $|x| \leqslant 1$.

(iii) Chứng minh rằng $|dx^3+cx^2+bx+a| \leqslant 4$ khi $|x| \leqslant 1$.

C - Hai bất đẳng thức khác cho các tam thức

Bài PT. 4. *Cho a, b, c là ba số thực và n là một số nguyên dương. Giả sử rằng đa thức $f(x) = ax^{2n}+bx+c$ có các giá trị tại $1, 0, -1$ đều thuộc đoạn $[-1,1]$. Chứng minh*

(i) $|f(x)| \leqslant \frac{2n-1}{2n-1\sqrt[n]{4^n n^{2n}}}$ *khi* $|x| \leqslant 1$.

(ii) *Với mỗi* $1 \leqslant M < \infty$ *ta có* $|f(x)| \leqslant 2M^{2n} - 1$ *khi* $1 \leqslant |x| \leqslant M$.

Chủ đề: Số học

Thí sinh được sử dụng kết quả của các câu trước trong chứng minh của câu sau.

Sự phân bố của số nguyên tố trong tập hợp số tự nhiên, cách xây dựng các số nguyên tố là những bài toán được quan tâm từ rất lâu trong Số học. Dưới đây chúng ta sẽ tìm cách chứng minh trường hợp đặc biệt của một trong những kết quả đẹp nhất của Số học: Định lý Dirichlet về sự tồn tại vô hạn số nguyên tố trong một cấp số cộng mà số hạng đầu tiên và công sai nguyên tố cùng nhau.

A - Khái niệm cấp

Bài PT. 5. *Cho* a, n *là các số nguyên nguyên tố cùng nhau với* $n \geqslant 2$. *Chứng minh rằng tồn tại một số nguyên dương* c *nhỏ nhất với tính chất* $a^c \equiv 1 \pmod{n}$.

Số nguyên c *được gọi là cấp của* a *modulo* n *và được kí hiệu là* $ord_n(a)$.

Bài PT. 6. *Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương* k, $a^k \equiv 1 \pmod{n}$ *khi và chỉ khi* $ord_n(a) \mid k$.

Bài PT. 7. *Chứng minh rằng* $ord_n(a) \mid \varphi(n)$, *trong đó* φ *kí hiệu hàm số phi của Euler, định nghĩa bởi công thức:* $\varphi(1) = 1$ *và với* $n > 1$,

$$\varphi(n) = \prod_{p \text{ là ước nguyên tố của } n} \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

(Nhắc lại rằng kí hiệu $x \mid y$ *nghĩa là* x *là một ước của* y*).*

B - Sự tồn tại số nguyên tố trong một số cấp số cộng

Bài PT. 8. *Chứng minh rằng tồn tại vô hạn số nguyên tố có dạng* $4k + 3$.

Bài PT. 9. *(i) Chứng minh rằng ước nguyên tố lẻ của một số có dạng* $n^2 + 1$ *luôn đồng dư với* 1 *modulo* 4.

(ii) Chứng minh rằng tồn tại vô hạn số nguyên tố có dạng $4k + 1$.

Bài PT. 10. *(i) Chứng minh rằng ước nguyên tố khác* 3 *của số tự nhiên có dạng* $n^2 - n + 1$ *phải đồng dư với* 1 *modulo* 6.

(ii) Chứng minh rằng tồn tại vô hạn số nguyên tố có dạng $6k + 1$.

C - Sự tồn tại số nguyên tố trong cấp số cộng có dạng $nk + 1$

Trong các bài tập sau đây, ta cố định một số nguyên $k \geqslant 3$.

Với a là một số nguyên khác 0 và p là một số nguyên tố, ta dùng kí hiệu $v_p(a)$ để chỉ số mũ đúng của p trong phân tích của a ra thừa số nguyên tố, nói cách khác $p^{v_p(a)} \mid a$ nhưng $p^{v_p(a)+1} \nmid a$.

Bài PT. 11. *Giả sử p là một ước nguyên tố của $k^k - 1$. Ký hiệu c là cấp của k modulo p. Chứng minh rằng $v_p(k^c - 1) = v_p(k^k - 1)$.*

Ta nhắc lại rằng một số nguyên dương được gọi là không có ước chính phương nếu trong phân tích ra thừa số nguyên tố của nó, mỗi số nguyên tố đều xuất hiện với số mũ $\leqslant 1$. Như vậy, các số nguyên dương không có ước chính phương đầu tiên là $1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 13, 14, 15, 17, \dots$

Bài PT. 12. *Kí hiệu $\mathfrak{D}$ là tập tất cả các ước nguyên dương d của k sao cho $d < k$ mà $\frac{k}{d}$ là một số nguyên không có ước chính phương. Kí hiệu $\mathfrak{D}_1 = \{d \in \mathfrak{D} \mid$ số ước nguyên tố của $\frac{k}{d}$ là lẻ $\}$, $\mathfrak{D}_2 = \{d \in \mathfrak{D} \mid$ số ước nguyên tố của $\frac{k}{d}$ là chẵn $\}$. Đặt*

$$A = \prod_{d \in \mathfrak{D}_1} (k^d - 1), \ B = \prod_{d \in \mathfrak{D}_2} (k^d - 1).$$

Chứng minh rằng với mọi số nguyên tố p mà $p \mid k^k - 1$ nhưng $p \not\equiv 1 \pmod{k}$ thì ta có

$$v_p(A) = v_p(B) + v_p(k^k - 1).$$

(Ta qui ước $A = 1$ nếu $\mathfrak{D}_1 = \emptyset$ và tương tự $B = 1$ nếu $\mathfrak{D}_2 = \emptyset$).

Bài PT. 13. *Chứng minh rằng $k^k - 1$ có một ước nguyên tố dạng $nk + 1$.*

Bài PT. 14. *Chứng minh rằng tồn tại vô hạn số nguyên tố có dạng $nk + 1$.*

Đề thi đề nghị

Chủ đề: Đại số

Trong các phương pháp giải toán bất đẳng thức và cực trị, phương pháp hàm số là một phương pháp hiệu quả và có tầm áp dụng rộng. Có thể kể đến việc sử dụng tính đơn điệu của hàm số, khảo sát hàm số, bất đẳng thức Jensen, bất đẳng thức Karamata, phương pháp tiếp tuyến ... Thậm chí phương pháp dồn biến, một phương pháp có vẻ ngoài thuần đại số cũng mang hơi hướng của phương hàm số.

Qua việc giải loạt bài toán dưới đây, chúng ta sẽ hiểu sâu hơn về tầm áp dụng của các phương pháp hàm số, cũng như rèn luyện khả năng áp dụng đồng thời nhiều phương pháp để xử lý những tình huống phức tạp. Mục tiêu cuối cùng của chúng ta là giải quyết bài toán sau:

Với n là số nguyên dương cho trước và $x_1, x_2, \dots, x_n$ là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{3x_1+1}{5x_1^2-2x_1+1} + \frac{3x_2+1}{5x_2^2-2x_2+1} + \dots + \frac{3x_n+1}{5x_n^2-2x_n+1}.$$

Trong lời giải bài toán này, chúng ta sẽ sử dụng các tính chất cơ bản sau đây của hàm số lồi và hàm số lõm.

Xét hàm số $f(x)$ có đạo hàm bậc 2 trên đoạn $[a, b]$.

- Nếu $f''(x) \leqslant 0$ trên $[a, b]$ thì với mọi $x_1, x_2, \dots, x_n$ thuộc $[a, b]$ ta có

$$f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n) \leqslant nf\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right).$$

(Bất đẳng thức Jensen)

- Nếu $f''(x) \geqslant 0$ trên $[a, b]$ thì với x, y, z, t thuộc $[a, b]$ mà $x \leqslant y \leqslant z \leqslant t$ và $x + t = y + z$ thì $f(y) + f(z) \leqslant f(x) + f(t)$.

1) Hãy giải bài toán khi $n = 2$.

2) Đặt $f(x) = \frac{3x+1}{5x-2x+1}$, hãy tính $f'(x)$. Chứng minh rằng với $3 \leqslant n \leqslant 9$ thì ta có bất đẳng thức

$$f(x) \leqslant f'\left(\frac{1}{n}\right)\left(x - \frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{1}{n}\right),$$

với mọi $x \in [0, 1]$. Từ đó suy ra lời giải bài toán trong trường hợp $3 \leqslant n \leqslant 9$.

3) Xét $n = 10$, hãy tìm một hằng số $x^* > 0$ sao cho bất đẳng thức

$$f(x) \leqslant f'\left(\frac{1}{10}\right)\left(x - \frac{1}{10}\right) + f\left(\frac{1}{10}\right),$$

đúng với mọi $x \in [x^*, 1]$ (x^* không nhất thiết phải là số nhỏ nhất thỏa mãn điều kiện này). Từ đó giải bài toán trong hai trường hợp sau

- $\min\{x_1, x_2, \ldots, x_{10}\} \geqslant x^*$.
- $\min\{x_1, x_2, \ldots, x_{10}\} < x^*$.

4) Tính $f''(x)$, chứng minh rằng phương trình $f''(x) = 0$ có 2 nghiệm α, β thuộc $[0, 1]$ với

$$\frac{1}{15} < \alpha < \frac{1}{2} < \beta < 1.$$

5) Hãy sử dụng 4. và các tính chất của hàm lồi, lõm ở phần dẫn nhập, giải bài toán trong trường hợp $n > 10$.

Chủ đề: Hình học

Hình học tam giác luôn hấp dẫn và kỳ bí. Các nhà toán học từ thời cổ đại cho đến tận ngày nay vẫn không ngừng phát hiện ra những tính chất tuyệt đẹp liên quan đến tam giác. Nhà toán học vĩ đại Leonard Euler là người đã đóng góp nhiều kết quả đẹp về tam giác như công thức Euler $IO^2 = R^2 - 2Rr$, định lý Euler về tam giác Pedal, đường thẳng Euler, đường tròn Euler, ... Trong bài toán này, chúng ta sẽ đề cập tới một kết quả ít nổi tiếng hơn và cũng khó hơn, đó là định lý Feuerbach về 5 đường tròn.

Chúng ta đều biết rằng trong một tam giác bất kỳ, có 4 đường tròn tiếp xúc đồng thời với các đường thẳng chứa 3 cạnh của tam giác là đường tròn nội tiếp và 3 đường tròn bàng tiếp. Chúng ta cũng biết rằng trong một tam giác, chân 3 đường cao, trung điểm 3 cạnh và trung điểm các đoạn nối trực tâm H với các đỉnh cùng nằm trên một đường tròn, gọi là đường tròn 9 điểm Euler. Chúng ta cũng biết rằng tâm đường tròn Euler E là trung điểm của đoạn OH với O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và bán kính đường tròn Euler bằng một nửa bán kính đường tròn ngoại tiếp. Nhưng kết quả tuyệt đẹp sau thì chúng ta ít biết hơn, và nếu biết cũng ít ai biết cách chứng minh.

Định lý Feuerbach: *Đường tròn 9 điểm Euler tiếp xúc với đường tròn nội tiếp và các đường tròn bàn tiếng của tam giác.*

Mục tiêu của loạt bài toán này là chứng minh định lý trên. Có nhiều cách khác nhau để chứng minh định lý này. Ở đây chúng ta sẽ sử dụng phép nghịch đảo.

Nhắc lại, phép nghịch đảo tâm A bán kính k là phép biến hình biến điểm M thành điểm M' trên tia AM thỏa mãn điều kiện $AM \cdot AM' = k^2$. Ta ký hiệu phép nghịch đảo này là $\text{Inv}(A, k^2)$. Phép nghịch đảo tâm A bán kính k có các tính chất cơ bản sau:

- Nếu A thuộc đường tròn $C(O; r)$ tâm O bán kính r thì phép nghịch đảo (tâm A bán kính k) biến $C(O; r)$ thành đường thẳng l vuông góc với OA.
- Nếu l là một đường thẳng không qua A thì ảnh của l qua phép nghịch đảo là một đường tròn mà đường thẳng l vuông góc với đường thẳng nối A với tâm đường tròn đó.
- Nếu A không nằm trên $C(O; r)$ thì ảnh của $C(O; r)$ qua phép nghịch đảo là đường tròn $C'(O; r')$ với

$$r' = r\frac{k^2}{|AO^2 - r^2|}.$$

- Nếu $M^{'}, N^{'}$ tương ứng là ảnh của M và N qua phép nghịch đảo tâm A bán kính k thì
$$M^{'}N^{'} = MN \cdot \frac{k^2}{AM \cdot AN}.$$
- Cho A là một điểm không nằm trên đường tròn $C(O;r)$. Gọi $PC(A)$ là phương tích của điểm A đối với đường tròn C. Khi đó phép nghịch đảo tâm A bán kính k với $k^2 = PC(A)$ sẽ biết $C(O;r)$ thành chính nó.

1) Cho tam giác ABC. Xét Inv là phép nghịch đảo tâm A bán kính k như một ánh xạ từ $R^2 \setminus \{A\}$ vào $R^2 \setminus \{A\}$. Chứng minh rằng nếu $C(O;R)$ là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC thì Inv$(C(O;R))$ là đường thẳng l đối song song đường thẳng BC đối với góc $\angle BAC$ (tức là l và BC tạo với phân giác của góc $\angle BAC$ những góc đồng vị bù nhau).

2) Cho tam giác ABC. Đường tròn nội tiếp tam giác ABC tâm I bán kính r tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB tại P, Q, R tương ứng. Đặt $p = \frac{a+b+c}{2}$ là nửa chu vi của tam giác:

a) Chứng minh rằng $CP = CQ = p\breve{}c,\ BP = BR = p\breve{}b,\ AR = AQ = p\breve{}a.$

b) Giả sử đường tròn bàng tiếp góc A tâm I_a bán kính ra tiếp xúc với cạnh BC và các cạnh CA, AB nối dài ở P_a, Q_a, R_a. Chứng minh rằng $BP_a = p\breve{}c$ và $CP_a = p\breve{}b$.

c) Gọi A_3 là chân đường phân giác trong của góc A. Chứng minh rằng
$$BA_3 = \frac{ac}{b+c},\ CA_3 = \frac{ab}{b+c}.$$

d) Gọi A_1 là trung điểm cạnh BC và A_2 là chân đường cao hạ từ A xuống BC. Chứng minh
$$A_1A_2 = \frac{|b^2 - c^2|}{2a}.$$

3) Cho $C(O;r)$ là đường tròn tâm O bán kính r và A là một điểm không thuộc C. Xét phép nghịch đảo tâm A bán kính k với $k^2 = PC(A)$ là phương tích của điểm A đối với đường tròn $C(O;r)$. Khi đó đường tròn $C(O;r)$ bất biến đối với phép nghịch đảo Inv$(A; PC(A))$.

4) Trong tam giác ABC gọi A_1, A_2, A_3 lần lượt là trung điểm cạnh BC, chân đường cao hạ từ đỉnh A và chân đường phân giác trong góc A, P là tiếp điểm của đường tròn nội tiếp với BC. Chứng minh rằng $A_1P = A_1A_2 \cdot A_1A_3$.

5) Xét tam giác ABC với các điểm A_1, A_2, A_3, P, P_a được ký hiệu như trên. Xét phép nghịch đảo tâm A_1 bán kính k với $k^2 = A_1P$, được ký hiệu là Inv.

a) Chứng minh rằng $C(I;r)$ và $C(I_a;r_a)$ đều bất biến đối với Inv.

b) Giả sử C_9 là đường tròn 9 điểm Euler và d là ảnh của C_9 qua phép nghịch đảo Inv, $d =$ Inv(C_9), chứng minh rằng d đối song song đường thẳng BC đối với góc $\angle BAC$.

c) Chứng minh rằng d đi qua A_3.

d) Gọi $B^{'}C^{'}$ là tiếp tuyến chung thứ hai của hai đường tròn $C(I;r)$ và $C(I_a, r_a)$ với $B^{'}$ thuộc AB, $C^{'}$ thuộc AC (tiếp tuyến chung thứ nhất chính là BC). Chứng minh rằng $B^{'}C^{'}$ đối song song BC đối với góc $\angle BAC$, suy ra $d = B^{'}C^{'}$ và từ đó suy ra C_9 tiếp xúc với $C(I;r)$ và $C(I_a;r_a)$.