BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO - HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

TUYỂN TẬP 30 NĂM

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

NHÀ XUẤT BẢN
GIÁO DỤC

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO - HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

TUYỂN TẬP 30 NĂM
TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

BQ Trường

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC - 1997

LỜI NÓI ĐẦU

Tháng 10 năm 1964 báo **Toán học và tuổi trẻ** *(TH&TT) ra mắt bạn đọc số đầu tiên giữa những ngày tháng nước nhà còn đang bị chiến tranh. Tờ báo được các bạn học sinh giỏi toán, các thầy cô giáo, các anh chị bộ đội, công nhân... yêu toán trên miền Bắc đón chào nồng nhiệt. Sáu nghìn bản phát hành chưa đủ đáp ứng nhu cầu của độc giả trên khắp 26 tỉnh, thành phố và đặc khu Vĩnh Linh. Đối tượng chủ yếu mà báo hướng vào phục vụ là các bạn học sinh khá, giỏi toán cấp III.*

Năm 1975 nước nhà thống nhất, TH&TT có cơ hội đến với khắp mọi miền đất nước. Lúc cao nhất đã phát hành tới 15 nghìn bản một kì.

Năm 1992 TH&TT có thêm những cải tiến về nội dung và hình thức nhằm đáp ứng tốt hơn những đòi hỏi mới của bạn đọc. Đối tượng bạn đọc của TH&TT đã được mở rộng cho các bạn Trung học cơ sở. Số lượng phát hành nay đã vượt quá 20 nghìn bản. Năm 1994 nhân dịp kỉ niệm 30 năm ra số báo đầu tiên và thể theo nguyện vọng của đông đảo bạn đọc, Hội đồng biên tập TH&TT đã quyết định sẽ xuất bản **Tuyển tập 30 năm báo Toán học & Tuổi trẻ**.

Mãi đến nay công việc mới hoàn tất và trong tay các bạn đã có một ấn phẩm chứa đựng bao nhiêu công sức của các tác giả, của các thành viên trong hội đồng biên tập và các biên tập viên. Cuốn sách ra đời đúng vào dịp kỉ niệm 40 năm Nhà xuất bản Giáo dục nên càng mang một ý nghĩa đặc biệt.

Do khuôn khổ sách có hạn nên chỉ tập hợp được một số bài viết và đề toán đã in từ 1964 đến 1994 mà các thành viên trong ban tuyển chọn cho là hay. Nhiều tác giả có bài viết trên TH&TT chưa có bài trong Tuyển tập này. Có thể việc chọn lựa đó chưa thật tối ưu. Điều này thật là dễ hiểu vì dù sao đây cũng chỉ là một phương án chọn lựa của một ban tuyển chọn.

Sách được chia làm hai phần. Phần thứ nhất bao gồm các bài viết chọn lọc, phần thứ hai là các đề hay và lời giải tốt. Cũng do khuôn khổ sách nên phần thứ nhất chỉ bao gồm các loại bài thuộc các chuyên mục : ***Nói chuyện với các bạn trẻ yêu toán, Tìm hiểu sâu thêm toán học phổ thông, Bạn đọc tìm tòi, Bước đầu tìm hiểu toán học hiện đại, Toán học và đời sống, Tiểu sử các nhà toán học.*** *Mỗi chuyên mục đồng thời là một chương.*

Phần thứ hai gồm các đề toán và lời giải được xếp thành các chuyên đề để bạn đọc tiện theo dõi và sử dụng.

Mặc dù chúng tôi đã có rất nhiều cố gắng nhưng Tuyển tập vẫn không tránh khỏi những thiếu sót. Bây giờ cuốn sách đã ở trước mắt bạn và quyền đánh giá chất lượng nội dung, hình thức của Tuyển tập là thuộc về các bạn. Dẫu sao cũng rất mong bạn đọc lượng thứ và chỉ bảo cho những sai sót để tuyển tập lần sau được hoàn chỉnh hơn.

Thư từ xin gửi về địa chỉ :

Tạp chí **Toán học và tuổi trẻ**

81 Trần Hưng Đạo.

Hà Nội.

TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ.

Phần thứ nhất

TUYỂN CHỌN CÁC BÀI VIẾT

Chương I – NÓI CHUYỆN VỚI CÁC BẠN TRẺ YÊU TOÁN

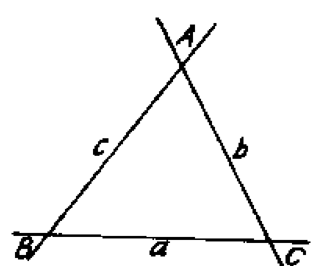
A – PHƯƠNG PHÁP SUY NGHĨ

CÁI GÌ LÀ CƠ BẢN

LÊ VĂN THIÊM

Trong học tập, cũng như trong đời sống nói chung, có những việc đã quen đi, ta tưởng như đã rõ ràng không có gì đáng suy nghĩ thêm nữa, mà thực ra trong đó vẫn còn có những vấn đề sâu sắc, suy nghĩ kĩ vẫn còn những điều đáng chú ý, đáng thắc mắc, đáng nghiên cứu. Thí dụ như trong hình học, tưởng không có gì đơn giản rõ ràng hơn là điểm và đường thẳng, mà chúng ta đã quen từ khi mới bắt đầu học môn hình.

Để có một biểu diễn cụ thể thường ta quan niệm rằng điểm là một vật gì rất nhỏ không có bề ngang, không có bề dài, đường thẳng là một vật có bề dài không có bề ngang. Nhưng một điều đáng chú ý là trong suốt quá trình học môn hình, đặc biệt khi chứng minh các định lí ta không hề dùng đến tính chất có hay không có bề dài, bề ngang của các vật nói trên. Thế thì ta phải kết luận rằng đối với điểm và đường thẳng việc có hay không có bề dài, bề ngang không phải là điều cơ bản. Vậy thì cái gì là cơ bản ? Để làm cho sáng tỏ vấn đề này, tôi xin nêu một thí dụ sau đây :

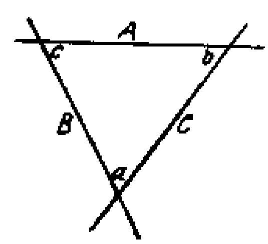


Hình 1

Trong mặt phẳng lấy 3 điểm A, B, C không thẳng hàng (Hình 1), hai điểm A, B xác định một đường thẳng c (đi qua chúng), hai điểm B, C xác định một đường thẳng a, hai điểm C, A xác định một đường thẳng b. Ngược lại hai đường thẳng a, b xác định một điểm C (nằm trên chúng) hai đường thẳng b, c xác định một điểm A, hai đường thẳng c, a xác định một điểm B.

Bây giờ ta hãy dùng một ngôn ngữ mới trong ấy cái gì trước kia gọi là đường thẳng thì nay ta gọi là "điểm", cái gì trước gọi là điểm thì nay gọi là "đường thẳng". Trong ngôn ngữ mới ấy, những điều nói trên về hình vẽ 1 sẽ trở thành như sau : hai "đường thẳng" A, B xác định một "điểm" c, hai "đường thẳng" B, C xác định một "điểm" a, hai "đường thẳng" C, A xác định một "điểm" b, ngược lại hai "điểm" a, b xác định một "đường thẳng" C, hai điểm b, c xác định một "đường thẳng" A, "hai điểm" a, c xác định một "đường thẳng" B.

Nhưng ta lại chú ý rằng câu nói thứ hai vẫn còn ý nghĩa trong ngôn ngữ cũ nếu ta đặt ra một hình học mới trong ấy các "điểm" là những đường thẳng cũ và các "đường thẳng" là những điểm cũ.



Hình 2

Ta hãy vẽ ra một hình khác (Hình 2) trong ấy các chữ nhỏ a, b, c chỉ các điểm, các chữ lớn A, B, C chỉ các đường. Đối với hình 2, thì câu nói thứ nhất lại là câu nói đúng trong hình học mới, còn câu nói thứ hai là câu nói đúng trong hình học cũ. Điều ấy tỏ rằng cả hai hình học hợp pháp như nhau.

Như vậy là ta đã tạo ra được một môn hình học hợp pháp (không có mâu thuẫn) trong ấy "điểm" thì có bề dài không có bề ngang, còn đường thẳng thì không có bề dài lẫn bề ngang. Điều ấy, xác định một lần nữa rằng việc có hay không có bề dài, bề ngang không phải là cơ bản đối với những vật gọi là điểm, đường thẳng trong hình học.

Điều này lại cho ta thấy rằng, trong khoa học cũng như trong đời sống, đối với một số phong tục tập quán có những việc mà trước kia nghĩ là phải như thế này, chỉ có thể là như thế này, nhưng suy nghĩ kĩ ta có thể thấy rằng nó có thể thế khác, có thể quan niệm khác với cách quan niệm cũ, đi con đường khác với lề thói cũ.

Bây giờ hãy tìm hiểu xem tại sao các câu nói thứ nhất và thứ hai, tùy theo cách vẽ hình, đều đúng trong cả hai hình học. Lí do là vì có những điều sau đây đúng cho cả hai hình học.

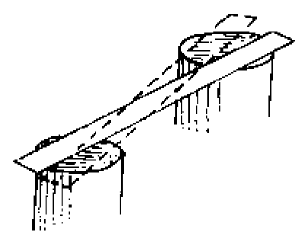
a) Hai điểm xác định một và chỉ một đường thẳng.

b) Đối với một đường thẳng có ít nhất là hai điểm xác định nó và trong mặt phẳng có ít nhất là ba điểm không cùng xác định một đường thẳng.

Những điều ấy là thuộc về loại những điều cơ bản đang tìm đối với điểm và đường thẳng. Còn có những điều cơ bản khác, chẳng hạn như : cho ba điểm trên một đường thẳng thì có nhiều nhất là một điểm nằm giữa hai điểm kia : qua một điểm chỉ vẽ được một đường song song với một đường thẳng cho trước, v.v... Những điều cơ bản như vậy gọi là những tiên đề. Không cần biết điểm là gì, đường thẳng là gì, chỉ cần đòi hỏi những vật gọi là điểm và đường thẳng thỏa mãn các tiên đề. Nói một cách khác chính các tiên đề cho định nghĩa điểm và đường thẳng bằng cách nói lên những tính chất cơ bản của chúng. Môn hình học có mục đích từ những tính chất cơ bản ấy rút ra những tính chất khác phát biểu thành những định lí. Định lí thì phải chứng minh, nghĩa là tỏ rõ ràng chúng được rút ra từ những tiên đề. Những tiên đề thì không chứng minh được, đó là cơ sở của hình học.

Các bạn sẽ hỏi rằng những tiên đề, những điều cơ bản, không chứng minh được thì làm sao mà biết được chúng là đúng hay sai ? những định lí chỉ là rút ra từ các tiên đề liệu có phù hợp với thực tế không và tại sao lại phù hợp ?

Thực ra thì hai câu hỏi ấy không tách rời nhau. Trước hết đúng là nghĩa thế nào ? ta phải nói rằng, cho đến cùng "đúng" là phải nói đúng với thực tiễn, đó là tiêu chuẩn cuối cùng của chân lí. Vậy so với thực tiễn thì như thế nào ? Một mặt thì các định lí hình học rút ra từ các tiên đề được áp dụng hàng nghìn năm và trong nhiều mặt hoạt động của con người như trong đo đạc, trong kĩ thuật và tỏ ra là có hiệu quả, là phù hợp với thực tế vậy thì các tiên đề là phù hợp với thực tế, là đúng. Mặt khác thì các tiên đề, dù trừu tượng đến đâu cũng bắt nguồn từ thực tế. Ví dụ khi ta đặt một xà ngang lên hai cái cột, thì vì tiết diện cột không phải là những điểm, xà ngang không phải là một đường thẳng, nên ta có thể đặt xà ngang xê xích một ít, nhưng ta cũng thấy rằng các vị trí của xà ngang cũng không thể xê xích nhau nhiều quá (hình 3). Sự xê xích lại càng ít nếu tiết diện cột càng bé do đó xà ngang càng hẹp. Đến trường hợp lí tưởng mà tiết diện cột là những điểm, xà ngang là đường thẳng thì vị trí của xà ngang không xê xích được nữa. Đó là một nguồn gốc thực tiễn của tiên đề nói rằng chỉ có một đường thẳng đi qua hai điểm. Vậy thì tiên đề là sự lí tưởng hóa, trừu tượng hóa của những việc thực tế. Chính vì xuất phát từ thực tế, trừu tượng hóa nó ra, nên các tiên đề đã đưa lại những định lí phù hợp với thực tế và ứng dụng có hiệu quả trong thực tiễn. Không trừu tượng hóa thì sẽ không có định lí, không xuất phát từ thực tế thì những định lí đó sẽ không phù hợp với thực tế. Xuất phát từ thực tế, trừu tượng nó thành nguyên lí (thành tiên đề) từ đó rút ra những quy luật (những định lí) có tác dụng vào thực tế là con đường đi của mọi ngành toán học cũng như của mọi môn khoa học khác.



Hình 3

Tác dụng vào thực tế nói ở đây không phải chỉ nhằm vào những thực tế mà từ đó ta rút ra nguyên lí, mà lại còn có thể tác dụng vào những thực tế phức tạp hơn, phong phú hơn. Ví dụ khi ta đã có những tiên đề về hình học rồi, người ta thấy, chẳng hạn có thể lấy các điểm và đường thẳng là những loại tương quan nào đó giữa những sự vật nào đấy như các hạt trong nguyên tử, những điểm và đường thẳng mới như vậy cũng thỏa mãn những tiên đề ta nói trên kia. Xuất phát từ thực tế khác nhưng cùng nghiệm đúng tiên đề, cho nên những định lí như định lí Pitago chẳng hạn, mà ta thường áp dụng trong đo đạc, lại có thể dùng để mô tả các chuyển động trong nguyên tử, đi đến lợi dụng những chuyển động ấy. Trong trường hợp này chẳng những việc xét đến bề dài bề ngang của điểm và đường thẳng không có ích gì trong việc chứng minh định lí Pitago thông thường mà nó còn có thể che mắt ta, không cho ta nghĩ đến việc dùng hình học làm một phương tiện khảo sát, xử lí những hiện tượng không những phức tạp hơn mà lại hoàn toàn thuộc loại khác, như năng lượng nguyên tử. Điều này lại cho ta thấy rằng việc suy nghĩ sâu sắc vào cơ bản của một sự việc, không những giúp cho ta hiểu rõ sự việc ấy, xử lí tốt hơn sự việc ấy mà còn giúp ta hiểu rõ hơn sự việc khác và xử lí tốt hơn những sự việc khác.

HỌC ĐƯỢC NHỮNG GÌ QUA CÁC TRƯỜNG HỢP RIÊNG

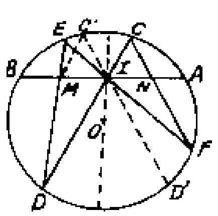
ĐINH NHO CHƯƠNG

Các bạn là những người yêu toán, ham thích học toán, chăm làm toán, và các bạn đã giải được khá nhiều bài toán, kể cả những bài "hóc búa" nhất. Nhưng xin hỏi nhỏ các bạn một câu : thường mỗi khi giải xong một bài toán, các bạn có suy nghĩ gì thêm không ? các bạn có chú ý rèn luyện cho mình thói quen phân tích các khía cạnh khác nhau của bài toán, phê phán các cách giải, nghĩ tới các bài toán tương tự, tổng quát hơn... hay không ? Nếu các bạn đã làm được những điều đó thì thật đáng hoan nghênh, những bạn chưa chú ý thực hiện các điều trên cần phải cố gắng nhiều để trở thành những người thực sự yêu toán, ham thích toán.

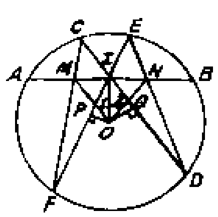
Bây giờ tôi muốn trao đổi thêm với các bạn một phương hướng suy nghĩ cần thiết, có ích và thú vị mỗi khi làm toán : *suy nghĩ tới các trường hợp riêng của bài toán.* Câu chuyện hôm nay tiếp tục những câu chuyện đã trao đổi với các bạn trong các số báo trước.

Lấy thí dụ bài toán sau đây : *"Cho một vòng tròn tâm O và một dây cung AB có điểm giữa là I. Qua I vẽ hai dây cung bất kì CD và EF. Các dây cung DE và CF cắt dây cung AB tại M và N. Chứng minh rằng IM = IN (bài ra số 6/64).*

Trong "Toán học và tuổi trẻ" số 4, tháng 1/65 đã nêu ra hai cách chứng minh bài toán này : theo cách thứ nhất, ta kẻ *C'D'* đối xứng với *CD* qua OI rồi chứng minh rằng hai tam giác *IC'M* và *ICN* bằng nhau (hình 1) ; theo cách thứ hai, ta nối *OM, ON* rồi chứng minh rằng tam giác *OMN* cân dựa vào tính chất đồng dạng của các tam giác *ICP* và *IEQ* (hình 2).



Hình 1

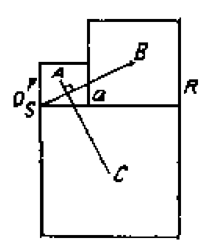


Hình 2

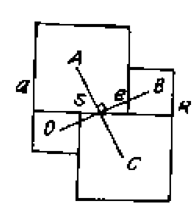
Đây là một bài toán tương đối khó (nhất là đối với các học sinh lớp 8), vì thế sau khi đã tìm ra hai lời giải, có thể các bạn đã tự thỏa mãn và không suy nghĩ phân tích gì thêm nữa. Nhưng nếu các bạn đặt vấn đề như sau : có phải hai cách chứng minh này có "giá trị" ngang nhau không ? có phải cả hai cách đều dùng được trong mọi trường hợp hay không ? thì các bạn sẽ thấy rằng không phải không cần suy nghĩ mà trả lời ngay được ? Vì sao ? vì : thí dụ ta xét cách chứng minh thứ hai trong trường hợp dây *AB* là đường kính thì không sử dụng được (các bạn thử suy nghĩ xem có đúng như vậy không) do đó ta thấy cách chứng minh thứ nhất là cách chứng minh tốt hơn, có giá trị hơn.

Trên đây là một thí dụ dùng trường hợp riêng để soi sáng việc phân tích so sánh phương pháp giải trong trường hợp chung.

Trường hợp riêng ta vừa xét là trường hợp mà các yếu tố đã cho trong bài toán có những vị trí đặc biệt trên hình vẽ. Những vị trí đặc biệt đó có khi làm cho một hình nào đó "suy biến" : một tứ giác có thể "suy biến" thành đoạn thẳng (khi bốn đỉnh thẳng hàng) hay thành tam giác (khi có hai đỉnh trùng nhau) v.v... Trong "Toán học và tuổi trẻ" số 2, tháng 11/64, sau khi giải bài toán về tâm bốn hình vuông dựng phía ngoài một tứ giác lồi (tâm của bốn hình vuông đó là đỉnh của một tứ giác có hai đường chéo vuông góc với nhau và bằng nhau !) đồng chí Nguyễn Cảnh Toàn đã nêu lên kết quả khi tứ giác suy biến thành tam giác và nói rằng định lí vẫn áp dụng được khi tứ giác suy biến thành đoạn thẳng. Quả vậy, nếu các bạn chịu khó vẽ hình thì sẽ được rất nhiều trường hợp, thí dụ hai trường hợp sau đây, trong mỗi trường hợp *AC* và *BD* vuông góc với nhau và bằng nhau (hình 3 và 4).

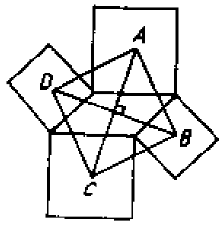


Hình 3



Hình 4

Ngoài các trường hợp riêng mà các yếu tố trong bài toán có những vị trí đặc biệt trên hình vẽ, còn có những trường hợp riêng mà các yếu tố đã cho trong bài toán có những hình dạng, kích thước đặc biệt. Thí dụ gần đây có bạn gửi thư về tòa soạn đề nghị giải quyết giúp bài toán sau : "*ở phía ngoài một hình bình hành ta dựng bốn hình vuông có cạnh là cạnh của hình bình hành đã cho, chứng minh rằng tâm của bốn hình vuông đó là đỉnh của một hình vuông (hình 5).*



Hình 5

Các bạn có thấy không, đây là trường hợp riêng của bài toán trên kia (khi tứ giác đã cho là một hình bình hành) và vì ta đã biết AC và BD vuông góc với nhau và bằng nhau, chỉ cần chứng minh chúng cắt nhau tại điểm giữa của mỗi đường nữa là đủ (điều này chứng minh khá dễ các bạn thử tự làm xem). Trong trường hợp ở hình 4, nếu giả thiết $PS = QR$ thì rõ ràng $ABCD$ cũng là một hình vuông (vì lúc đó $PQRS$ là một hình bình hành đặc biệt : đã "suy biến" thành đoạn thẳng !).

Như các bạn thấy, kết quả trong những trường hợp riêng nhiều khi rất thú vị. Giải quyết những trường hợp riêng nhiều lúc đơn giản, nhưng cũng có khi không dễ hơn giải quyết trường hợp tổng quát bao nhiêu. Tuy nhiên, kinh nghiệm cho thấy rằng *trước khi* giải các bài toán khó, việc giải các trường hợp riêng có những lúc giúp chúng ta khá nhiều trong việc đi tìm phương pháp giải, và *sau khi* giải xong các bài toán đó, việc xét các trường hợp đặc biệt cũng gây cho chúng ta nhiều hứng thú.

Việc nghiên cứu các trường hợp riêng có những lúc giúp chúng ta tìm ra những công thức mới, có những phát minh, sáng tạo nho nhỏ. Thí dụ chẳng hạn chúng ta ai cũng biết nếu xét tổng số góc trong của một đa giác lồi, sau khi xét một số trường hợp riêng :

	Số cạnh	tổng số cạnh
tam giác	3	$180^\circ = \pi$ radian
tứ giác	4	$360^\circ = 2\pi$ radian
ngũ giác		$540^\circ = 3\pi$ radian

Ta đi tới câu hỏi : *có phải là tổng số góc trong của một đa giác lồi có n cạnh bằng $(n - 2)\pi$ radian ?* và điều này có thể chứng minh chính xác.

Hay là sau khi thấy trong hình vuông, hình chữ nhật, hình thoi, các đường chéo đều *cắt nhau tại điểm giữa của mỗi đường* thì ai cũng có thể đặt vấn đề nghiên cứu xem tính chất đó có đúng trong một *hình bình hành bất kì* hay không ? và kết quả đúng như thế thực.

Hoặc là khi các bạn làm tóm tắt về đa diện đều, các bạn có bảng sau đây :

Hình đa diện	số mặt (M)	số đỉnh (D)	số cạnh (C)
tứ diện đều	4	4	6
lục diện đều (lập phương)	6	8	12
bát diện đều	8	6	12
thập nhị diện đều	12	20	30
nhị thập diện đều	20	12	30

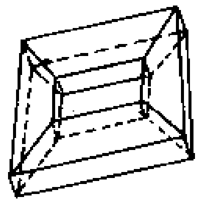
Các bạn có thể thắc mắc, và thắc mắc này rất chính đáng, là giữa số mặt (M) số đỉnh (D) và số cạnh (C) của mỗi đa diện đều có hệ thức :

$$M + D - C = 2 \qquad (1)$$

liệu hệ thức đó có đúng với mọi đa diện không ?

Các bạn thử lại với hình chóp, với hình lăng trụ bất kì thì thấy hệ thức đó đúng (thí dụ đối với một hình chóp đáy lục giác thì $M = 7, D = 7, C = 12, M + D - C = 7 + 7 - 12 = 2$, hay đối với một lăng trụ đáy ngũ giác thì $M = 7$, $D = 10$, $C = 15$ v.v...). Các bạn lại thử với nhiều khối đa diện hình thù khác nhau và thấy hệ thức đó vẫn đúng.

Nhưng, tuy vậy, các bạn chớ vội kết luận rằng các bạn đã chứng minh được một công thức, một định lí mới cho mọi đa diện. Vì sao ? Vì dù bạn có thử với nhiều khối đa diện mấy đi nữa, bạn cũng không thể thử với tất cả các khối đa diện, nên không thể nói là hệ thức (1) đúng với mọi đa diện, khi mà bạn chưa chứng minh chặt chẽ (đối với một đa diện lấy bất kì !). Và chăng, nếu các bạn chú ý một chút thì thấy ngay đối với khối đa diện như ở hình 6 (giống như một cái khung ảnh), ta có $M = 13, D = 16, C = 28$, $M + D - C = 1 \neq 2$!) tức là hệ thức (1) không được nghiệm, vì sao như vậy ? bạn thử suy nghĩ kĩ xem. Chắc là vì những khối như đa diện đều, hình chóp, hình lăng trụ... có những tính chất nào đó mà cái "khung ảnh" kia không có. Đúng như thế tính chất đó là : nếu ta nối 2 điểm của khối chóp chẳng hạn bằng một đoạn thẳng thì đoạn thẳng đó hoàn toàn thuộc khối chóp còn cái "khung cảnh" kia – thì có thể tìm thấy dễ dàng 2 điểm của "khung" mà đoạn thẳng nối liền không hoàn toàn thuộc "khung" (các bạn thử tìm xem).



Hình 6

Tính chất đó gọi là tính chất "lồi" của đa diện và ta đi dần dần tới định lí Ơle về hệ thức giữa số cạnh, số đỉnh, số mặt của một đa diện (bạn thử tự phát biểu định lí xem).

Qua các thí dụ trên đây, các bạn thấy rằng việc nghiên cứu các trường hợp riêng quả là có ích lợi cho việc học toán của chúng ta : nó giúp các bạn *hiểu rõ thêm vấn đề* phải giải quyết trong trường hợp chung, nhiều trường hợp nó giúp bạn tìm ra *phương pháp giải quyết vấn đề*, không những thế nhiều lúc nó lại còn giúp các bạn *kiểm tra* lại kết quả cũng như phương pháp làm toán, và có những khi chính việc nghiên cứu các trường hợp riêng dắt dẫn các bạn tới những *phát minh sáng tạo, cải tiến* từ nhỏ đến lớn.

Chỉ cần các bạn mỗi khi học toán, làm toán không chủ quan, thỏa mãn với những kết quả đã đạt được mà chịu khó cố gắng tìm tòi suy nghĩ thì nhất định sẽ phát hiện được nhiều điều mới mẻ và ngày càng tiến bộ. Xin chúc các bạn đạt nhiều kết quả trong học tập.

PHẢI BIẾT NHÌN MỘT KHÁI NIỆM TOÁN HỌC THEO NHIỀU CÁCH KHÁC NHAU

NGUYỄN CẢNH TOÀN

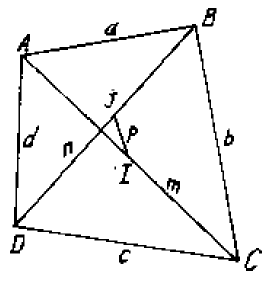
Trong khi mày mò tìm cách chứng minh một bài toán các bạn thường nhìn một khái niệm toán học lần lượt theo nhiều cách khác nhau cho đến khi tìm ra cách chứng minh. Ví dụ, trong một bài toán có hình bình hành nếu xem nó là một tứ giác có các cạnh đối diện song song mà bế tắc thì bạn đổi cách nhìn, chẳng hạn xem nó là một tứ giác trong đó hai đường chéo có chung trung điểm ; nếu lại thất bại thì bạn lại đổi cách nhìn lần nữa, như xem hình bình hành là một tứ giác lồi có các cạnh đối diện bằng nhau v.v...

Một điều có lẽ các bạn ít ngờ đến là cách làm như vậy không những chỉ được áp dụng vào các bài toán chứng minh mà, quan trọng hơn nữa, còn được áp dụng để sáng tạo, để mở rộng sự hiểu biết toán học của chúng ta. Sau đây là một vài ví dụ cụ thể : *Ví dụ 1* – Ta đọc trong sách thấy định lí : "trong một hình bình hành tổng bình phương của bốn cạnh bằng tổng bình phương của hai đường chéo". Ta hãy tự mình cố gắng mở rộng định lí này ra*.

1) Xem hình bình hành là một tứ giác đặc biệt. Như trên đã nói, có nhiều cách để xem một hình bình hành là một tứ giác đặc biệt. Ta có thể lần lượt thử từng cách, thất bại trong cách này ta sẽ dùng cách khác. Nhưng để khỏi mất thì giờ, ta có thể căn cứ vào nội dung định lí cần mở rộng để có thể, ngay từ đầu, chọn ngay được cách đưa ta đến thành công. Trong nội dung định lí cần mở rộng có nói đến hai đường chéo. Bởi vậy ta nghĩ đến cách xem một hình bình hành là một tứ giác trong đó hai đường chéo có trung điểm trùng nhau. Ta hi vọng rằng cách nhìn này sẽ đưa ta đến thành công. Câu : "Hai đường chéo có trung điểm trùng nhau" cũng có nhiều cách hiểu, ví dụ có thể hiểu là : "mỗi đường chéo chia đôi đường kia

*) Bài toán "mở rộng" này tôi đã đề ra trong bài : "Một phương pháp suy nghĩ sáng tạo" (Toán học và tuổi trẻ số 10 (7–1965)). Nhưng cho đến nay chỉ mới nhận được hai cách giải không hay. Cho nên đây cũng là một dịp để giải đáp về bài toán đó.

(hay chia đường kia theo tỉ số – 1)", hoặc có thể hiểu : "khoảng cách giữa hai trung điểm bằng không". Nên chọn cách hiểu nào ? Theo cách thứ nhất thì, đối với một tứ giác không phải là hình bình hành, ta sẽ phải xét đến các tỉ số (ít nhất có một tỉ số khác – 1) theo đó mỗi đường chéo chia đường kia. Nhưng nội dung định lí cần mở rộng lại nói đến quan hệ giữa bình phương độ dài các đoạn thẳng. Bởi vậy, ta nghiêng về cách hiểu thứ hai. Ta hãy khai thác cách hiểu này : lấy một tứ giác $ABCD$ với trung điểm của hai đường chéo là I, J (hình 1). Ta đặt : $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, $AC = m$, $BD = n$, $IJ = p$. Đối với một hình bình hành thì $p = 0$ và theo định lí trên kia thì :



Hình 1

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = m^2 + n^2 \quad (1)$$

Do đó ta ngờ rằng đối với một tứ giác không phải là hình bình hành ($p \neq 0$) thì ta sẽ có một hệ thức khác hệ thức (1) ở chỗ có thêm một số hạng phụ thuộc vào p và triệt tiêu khi $p = 0$. Vấn đề là "dò" cho ra số hạng đó. Trước hết, ta thấy ngay rằng số hạng đó phải là bậc hai (để bảo đảm cho tính đẳng cấp của hệ thức). Vậy có hai khả năng :

– Số hạng đó có dạng Kp^2 (K là một hệ số sẽ xác định sau).

– Số hạng đó có dạng Kpq (K là một hệ số và q là một đoạn thẳng nào đó) ; là có nhiều triển vọng xảy ra. Xét khả năng thứ hai thì trước hết phải đoán xem q có thể là đoạn thẳng nào. Nó không thể là m vì nếu m đã tham gia thì n cũng phải tham gia (do vai trò hoàn toàn đối xứng của m và n). Cũng vì lí do đó mà nó không thể là n, cũng không thể là a, b, c, d. Nhưng ngoài m, n, a, b, c, d ta không thấy có đoạn thẳng đáng chú ý nào khác. Bởi vậy ta nghiêng về khả năng thứ nhất nghĩa là ta có nhiều lí do để ngờ rằng đối với một tứ giác bất kì, ta sẽ có hệ thức :

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = m^2 + n^2 + Kp^2 \quad (2)$$

Vấn đề khám phá nốt hệ số K. Muốn vậy, ta hãy áp dụng hệ thức trên (mà ta cứ tạm giả thiết là đúng) vào cho một tứ giác suy biến thành tam giác (hình 2).

Đối với tứ giác đặc biệt này, ta có :

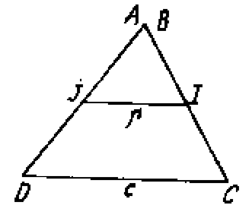
$$a = 0,\ b = m,\ d = n,\ p = \frac{c}{2}.$$

Áp dụng vào hệ thức (2), ta có :

$$b^2 + c^2 + d^2 = b^2 + d^2 + K\frac{c^2}{4}\ ;$$

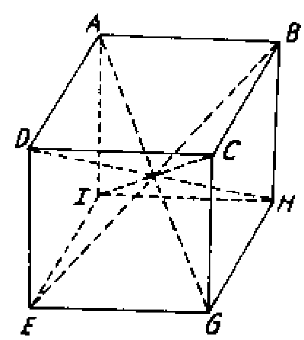
Từ đó rút ra $K = 4$.

Tóm lại, ta ngờ rằng định lí : "trong một hình bình hành, tổng bình phương của các cạnh bằng tổng bình phưng của hai đường chéo", sẽ mở rộng ra thành định lí sau đây : "trong một tứ giác lồi tổng bình phương của bốn cạnh bằng tổng bình phương hai đường chéo cộng thêm bốn lần bình phương khoảng cách giữa hai trung điểm của hai đường chéo". Đây chỉ mới là "ngờ" thôi ; muốn khẳng định xem định lí trên có đúng hay không thì phải chứng minh là nó đúng. Việc này không khó, xin nhường các bạn đọc (dùng hệ thức : $b^2 + c^2 = \frac{a^2}{2} + m^2$ trong một tam giác bất kì).



Hình 2

2) Xem hình bình hành là một hình đóng vai trò tương tự như hình hộp ở trong không gian. Với cách xem này thì tự nhiên ta nẩy ra ý nghĩ : "liệu định lí đã cho có mở rộng ra được cho hình hộp không ?", nghĩa là ta tự hỏi xem định lí : "trong một hình hộp, tổng bình phương của các cạnh bằng tổng bình phương của các đường chéo" có đúng hay không ? Ta hãy thử xem (hình 3) : trong các hình bình hành $ABGE$ và $CDIH$ ta có :



Hình 3

$$\overline{AG}^2 + \overline{BE}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BG}^2 + \overline{GE}^2 + \overline{EA}^2$$

$$\overline{CI}^2 + \overline{DH}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{CH}^2 + \overline{HI}^2 + \overline{ID}^2$$

Cộng vế với vế và chú ý rằng trong các hình bình hành $BCGH$ và $ADEI$, ta có :

$$\overline{BG}^2 + \overline{CH}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CG}^2 + \overline{GH}^2 + \overline{HB}^2$$

$$\overline{EA}^2 + \overline{ID}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DE}^2 + \overline{EI}^2 + \overline{IA}^2$$

thì ta sẽ thấy ngay định lí là đúng :

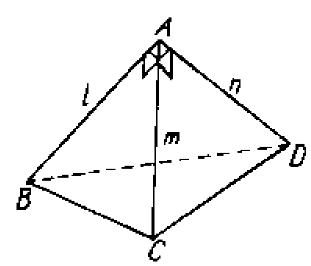
Ví dụ 2. Ta hãy lấy một tam giác vuông. Ta có định lí Pitago : $a^2 = b^2 + c^2$.

Ta hãy mở rộng định lí này bằng cách nhìn tam giác vuông theo nhiều cạnh khác nhau.

1) Xem tam giác vuông là một tam giác đặc biệt ở chỗ có một góc vuông. Bằng cách này như đã lí luận ở bài "Một phương pháp suy nghĩ sáng tạo" (Toán học và tuổi trẻ số 10, (7-1965)) ta sẽ khám phá ra được hệ thức : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ cho tam giác thường.

2) Xem tam giác vuông là một tứ giác có hai đường chéo vuông góc và một cạnh bằng không. Với cách xem này, ta sẽ thấy dễ dàng rằng định lí Pitago chỉ là một trường hợp đặc biệt của định lí sau đây : "trong một tứ giác có hai đường chéo vuông góc thì tổng bình phương của hai cạnh đối diện này bằng tổng bình phương của hai cạnh đối diện kia". Bạn đọc thử tự xét xem có đúng thế không.

3) Xem tam giác vuông là một hình đóng vai trò tương tự như tứ diện có một tam diện ba góc vuông trong không gian. Với cách xem này, dĩ nhiên ta sẽ nẩy ra ý nghĩ : có thể mở rộng định lí Pitago ra cho một tứ diện có một tam diện ba góc vuông không nhỉ ? Tam diện ba góc vuông trong tứ diện đóng vai trò như góc vuông trong tam giác. Vậy cái gì đóng vai trò như cạnh huyền ? Dĩ nhiên ta nghĩ đến mặt đối diện với tam diện ba góc vuông. Còn cái gì đóng vai trò của bề dài cạnh huyền. Dĩ nhiên ta nghĩ đến diện tích của mặt đối diện với tam diện ba góc vuông. Ta ngờ rằng định lí Pitago sẽ mở rộng ra như sau :



Hình 4

Trong một tứ diện có một tam diện ba góc vuông, bình phương diện tích của mặt đối diện với tam diện đó bằng tổng bình phương diện tích của ba mặt kia. Sau khi nghi vấn như vậy, ta mới chứng minh xem có quả đúng thế không : đặt $AB = l$, $AC = m$, $AD = n$ (hình 4 trong đó tam diện đỉnh A có ba góc vuông) ; thế thì :

$$BC = \sqrt{l^2 + m^2}$$

$$CD = \sqrt{m^2 + n^2}$$

$$DB = \sqrt{n^2 + l^2}$$

Theo công thức

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

thì, sau khi tính toán xong (bạn đọc tự làm lấy : ở đây

$$a = \sqrt{l^2 + m^2}$$

$$b = \sqrt{m^2 + n^2}$$

$$c = \sqrt{n^2 + l^2}$$

$$p = \left(\frac{\sqrt{l^2 + m^2} + \sqrt{m^2 + n^2} + \sqrt{n^2 + l^2}}{2}\right)$$

ta sẽ thấy bình phương diện tích tam giác BCD bằng

$$\frac{l^2m^2 + m^2n^2 + n^2l^2}{4};$$

Vậy quả nó bằng tổng bình phương diện tích của ba tam giác ABC, ACD, ADB.

Các bạn thấy không ? Biết cách nhìn một khái niệm theo nhiều cách khác nhau thì từ một định lí học được trong sách, ta có thể tự mình mở rộng định lí đó ra để được một hay nhiều định lí tổng quát hơn. Như thế mới là học tập một cách sáng tạo, mới là giỏi toán. Làm được những bài toán khó tất nhiên là tốt rồi nhưng như vậy cũng chỉ mới là chứng minh những kiến thức do người khác chỉ ra cho ta chứ chưa phải là tự mình khám phá ra những kiến thức mà chưa ai chỉ bảo cho mình. Cho nên làm được toán khó, được điểm 5 về toán cũng không nên thỏa mãn mà nên phấn đấu cố gắng tập sáng tạo dần đi, có thể bạn mới có nhiều triển vọng sau này trở nên một nhà toán học.

MÒ MẪM VÀ DỰ ĐOÁN

HOÀNG CHỨNG

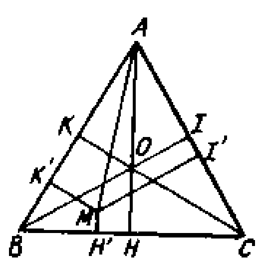
Gần đây, nhiều bạn đọc đã gửi thư về tòa soạn hỏi về bài toán khó sau đây : "*Tìm trong mặt phẳng của tam giác ABC một điểm sao cho tổng các khoảng cách từ đó tới các đỉnh của ABC là bé nhất*". Bạn đọc chưa vừa ý với cách giải đáp trong báo (TH và TT, số 7, tháng 4-1965, bài 28/64), và cho rằng cách giải quá độc đáo, không tự nhiên : vì sao trước tiên lại chứng minh một bổ đề có vẻ xa lạ với bài toán, vì sao lại nghĩ ra được rằng điểm phải tìm có tính chất đặc biệt nào đó, vì sao lại vẽ một số các đường phụ ? Bài toán có thể giải một cách đơn giản hơn không ?

Thắc mắc trên chứng tỏ các bạn đã chịu khó đào sâu suy nghĩ khi đọc lời giải các bài toán, không thỏa mãn với kết quả đã đạt được. Xin hoan nghênh các bạn.

Trước khi đi vào bài toán cụ thể trên, chúng ta cần nhận rõ rằng trong các sách người ta thường trình bày lời giải các bài toán một cách ngắn gọn, mà không phân tích quá trình tìm tòi để đi đến lời giải đó (một lí do là vì số trang sách có hạn). Thực ra, không phải tự nhiên người ta nghĩ ngay ra được bổ đề này, bổ đề nọ, vẽ đường phụ này, đường phụ kia, mà những cái đó chỉ là kết quả của một quá trình mò mẫm, suy nghĩ, tìm tòi. Ngay những ý sáng tạo độc đáo, bất ngờ nhất cũng thường nảy sinh trên con đường quanh co đi tìm lời giải của bài toán.

Vạch lại quá trình suy nghĩ để giải một bài toán khó, nêu lên những khó khăn có thể vấp phải và cách vượt qua những khó khăn đó, là một việc làm có ích cho các bạn trẻ đang đi trên con đường học tập sáng tạo.

Lấy bài toán ở trên làm thí dụ. Đây là một bài toán khó. Trước hết, nó không chỉ rõ là trong tam giác có một điểm như vậy không, và nếu có thì đó là điểm nào.



Hình 1

Vì vậy, đầu tiên ta tìm cách *dự đoán* vị trí của điểm phải tìm (nếu có), bằng cách *mò mẫm* dựa trên những *trường hợp đặc biệt*.

Ta chọn tam giác đặc biệt là *tam giác đều* vì do tính chất đối xứng của tam giác đều mà điểm phải tìm, nếu có, sẽ có tính chất đối xứng đối với ba đỉnh. Trong tam giác đều có một điểm đáng chú ý : đó là O, vừa là tâm vòng tròn nội tiếp, ngoại tiếp, vừa là trực tâm, trọng tâm. Ta dự đoán rằng trong tam giác đều thì O là điểm phải tìm, *nghĩa là :*

$$OA + OB + OC < MA + MB + MC$$

với M là một điểm bất kì, khác O, trong mặt phẳng của tam giác ABC.

Chứng minh điều này không có gì khó khăn : lấy M là điểm ở trong tam giác hoặc ở trên cạnh của tam giác. Từ M vẽ $MH' \perp BC$, $MI' \perp AC$, $MK' \perp AB$. *(hình 1). Ta có*

$$OA + OH < MA + MH'$$

$$OB + OI < MB + MI'$$

$$OC + OK < MC + MK'$$

do đó $OA + OB + OC + OH + OI +$ $+ OK < MA + MB + MC + MH' + MI' + MK'$. Mà $OH + OI + OK = MH' + MI' + MK'$ nên $OA + OB + OC < MA + MB + MC$ (đpcm).

Nếu M là một điểm ở ngoài tam giác thì có thể chứng minh dễ dàng.

Như vậy, bài toán đã cho đã được giải quyết trong *trường hợp đặc biệt là tam giác đều*. Chuyển sang trường hợp tổng quát với tam giác bất kì thì khó khăn đầu tiên là *dự đoán* xem O là điểm nào : tâm của vòng tròn nội tiếp hay ngoại tiếp, trọng tâm hay trực tâm ?

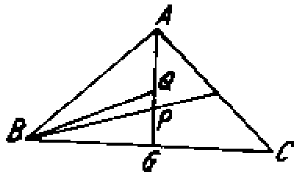
Ta lại phải tiếp tục *mò mẫm* trên một trường hợp đặc biệt khác. Ta lấy *tam giác cân* vì trong tam giác cân, các điểm đặc biệt đó đều nằm trên đường cao ứng với đáy và có thể dễ khảo sát hơn. Để dễ tính toán, ta lại chọn *tam giác vuông cân* có cạnh góc vuông bằng đơn vị, có trực tâm là đỉnh A, tâm vòng tròn ngoại tiếp là điểm giữa G của BC, trọng tâm P, tâm vòng tròn nội tiếp Q. Dễ thấy rằng (hình 2) :

$GA + GB + GC =$

$\sqrt{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} > 2 =$

$= AB + AC$

cho nên G tâm của vòng tròn ngoại tiếp ABC, không phải là



Hình 2

điểm phải tìm. Lại so sánh $AB + AC$ với $PA + PB + PC$. Ta có

$$PA = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

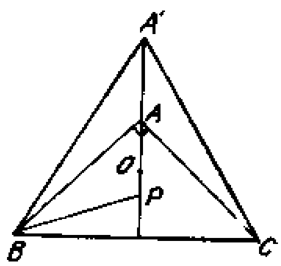
$$PB = PC = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

cho nên

$$PA + PB + PC = \frac{\sqrt{2} + 2\sqrt{5}}{3} < 2 = AB + AC$$

do đó A, trực tâm của ABC, cũng không phải là điểm phải tìm.

Còn phải xét hai điểm : trọng tâm P và tâm Q của vòng tròn nội tiếp ABC. Có thể tiếp tục so sánh tổng $PA + PB + PC$ với tổng $QA + QB + QC$, để loại trừ bớt một trong hai điểm P, Q. Nhưng việc so sánh này khá phức tạp. Đến đây, có thể thử tìm cách chứng minh rằng P là điểm phải tìm (nếu không thành công, thì lại tìm cách chứng minh cho Q). Để sử dụng được kết quả đã tìm thấy với tam giác đều, ta vẽ tam giác đều



Hình 3

$A'BC$, có tâm O (hình 3). Như đã chứng minh $OB + OC + OA' < PB + PC + PA'$ do đó trừ AA' vào hai vế của bất đẳng thức, ta có ngay :

$$OB + OC + OA < PB + PC + PA.$$

Vậy P không thể là điểm phải tìm. Điểm phải tìm chính là điểm O ! Thực vậy, lấy M bất kì trong ABC, M khác 0, ta có

$$OB + OC + OA' < MB + MC + MA'$$

do đó $OB + OC + OA = OB + OC + OA' - AA' <$ $< MB + MC + MA' - AA' < MB + MC + MA$

vì $MA' - AA' < MA$

Trong tam giác ABC, O có tính chất gì ? Đó không phải là một điểm mà ta dự đoán : trọng tâm, trực tâm, tâm của vòng tròn nội tiếp, ngoại tiếp, mà là *điểm từ đó nhìn các cạnh của ABC dưới cùng một góc* (120°). Đó là một điều khá bất ngờ.

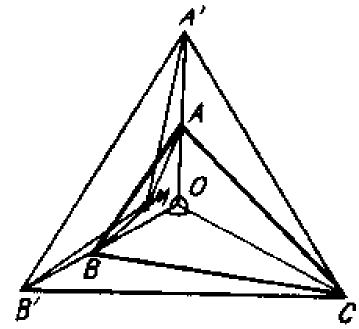
Bây giờ, rất dễ chứng minh cho trường hợp tổng quát : trong tam giác ABC, giả sử có điểm O sao cho

$$\widehat{BOA} = \widehat{COB} = \widehat{AOC} = 120^\circ$$

Ta chứng minh rằng $OA + OB + OC <$ $< MA + MB + MC$ với M khác 0. Giả sử $OC \geq OB \geq OA$. Ta kéo dài OA và OB về phía A và B, để có $OA' = OB' = OC$ (hình 4). Tam giác $A'B'C'$ là đều, do đó $OA' + OB' + OC <$ $< MA' + MB' + MC$. Vì vậy :

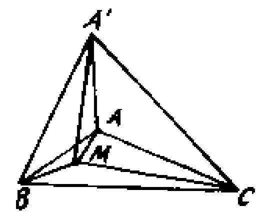
$OA + OB + OC = (OA' - AA') + (OB' - BB') + OC < (MA' - AA') + (MB' - BB') + MC <$ $< MA + MB + MC$ vì $MA' - AA' < MA$ và $MB' - BB' < MB$ (đpcm).

Vấn đề còn lại là : nếu trong tam giác ABC, không có điểm O từ đó nhìn ba cạnh dưới cùng một góc, tức là nếu ABC có góc tù $\geq$ 120°, thì điểm phải tìm là điểm nào ?



Hình 4

Nếu $\widehat{A} = 120^\circ$, thì có thể xem A như là một điểm "giới hạn", từ đó nhìn ba cạnh của ABC dưới cùng một góc (A chính là giao điểm của ba cung viên phân chứa góc 120°, dựng trên ba cạnh của ABC, và về phía trong của ABC), nên A chính là điểm phải tìm. *Có thể chứng minh trực tiếp như sau : vẽ AA', sao cho $\widehat{A'AB} = \widehat{A'AC} = 120^\circ$ (hình 5) trong tam giác $A'BC$ thì A là điểm từ đó nhìn các cạnh dưới cùng một góc, nên :*



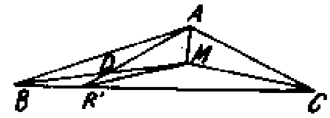
Hình 5

$$AA' + AB + AC < MA' + MB + MC$$

từ đó dễ dàng suy ra :

$$AB + AC < MA + MB + MC \text{ (đpcm)}$$

Nếu $\widehat{A} > 120^\circ$, thì A cũng là điểm phải tìm. Muốn chứng minh, ta tìm cách vận dụng điều đã chứng minh với $\widehat{A} = 120^\circ$: vẽ AB' sao cho $\widehat{B'AC} = 120^\circ$ (hình 6) Theo trên,



Hình 6

$$AB' + AC < MA + MB' + MC.$$

Ta phải chứng minh

$$AB + AC < MA + MB + MC$$

hay là $AB' + AC + (AB - AB') < MA + MB' + MC + (MB - MB')$.

Vấn đề quy lại là tìm cách chứng minh

$$AB - AB' < MB - MB'$$

hay $$AB + MB' < AB' + MB$$

Bất đẳng thức này có thể chứng minh rất dễ dàng bằng cách xét hai tam giác DAB và DMB' (*D* là giao điểm của *AB'* và *MB*). *Nếu M là điểm ở trong tam giác ABB' thì ta xét tam giác ABC' (C' trên BC), có* $\widehat{BAC'} = 120^\circ$.

Bài toán đề ra ở trên đã được giải quyết hoàn toàn. Khi trình bày lời giải, người ta chỉ trình bày vắn tắt (những đoạn in nghiêng(*). Đọc lời giải vắn tắt này bạn có thể thấy nó không tự nhiên. Nhưng thực ra, như các bạn đã thấy, quá trình đi đến lời giải không đơn giản. Phải mò mẫm dự đoán kết quả bằng cách dựa vào các trường hợp đặc biệt của bài toán, chứng minh bài toán cho các trường hợp đặc biệt, dùng các kết quả này để dự đoán và chứng minh cho trường hợp tổng quát v.v... (có thể, do một sự may mắn – hay nhạy bén nào đó mà bạn xét ngay được hình 3 mà không qua hình 2, và cũng có thể là bạn so sánh $PA + PB + PC$ với $QA + QB + QC$, sau đó xét trên một số trường hợp đặc biệt nữa mới phát hiện ra được là cả *P* lẫn *Q* đều không thể là điểm phải tìm...)

Mong rằng trong khi giải toán, các bạn cố gắng vận dụng các phương pháp suy nghĩ đó, không ngại vẽ hình, tính toán cụ thể, không ngại thí nghiệm, mò mẫm nhiều lần để dự đoán các kết quả trước khi chứng minh chúng.

CON ĐƯỜNG DẪN ĐẾN PHÁT MINH

HỒNG ANH

Một nhà toán học và sư phạm nổi tiếng đã nói : "Toán học được xem là một khoa học chứng minh. Nhưng đó chỉ mới là một khía cạnh. Toán học, trình bày dưới hình thức hoàn chỉnh, gồm toàn những chứng minh (đó là cách trình bày trong các sách giáo khoa). Nhưng toán học trong quá trình sáng tạo cũng giống như những khoa học khác trong quá trình sáng tạo. Cần phải dự đoán về một định lí toán học trước khi chứng minh nó ; cần phải dự đoán về đường lối và tư tưởng chủ đạo của chứng minh trước khi chứng minh ; cần phải sử dụng quan sát và tương tự, phải mò mẫm và mò mẫm ! Kết quả của công trình sáng tạo của nhà toán học là chứng minh một điều gì đó ; nhưng chứng minh đó được phát hiện bằng những suy luận "nghe có lí", bằng những dự đoán..." Những ý kiến trên đây rất xác đáng. Để học toán một cách sáng tạo, các bạn không nên chỉ học các định lí và các chứng minh, mà thông qua đó, phải luôn luôn luyện tập quan sát, mò mẫm, dự đoán..., tức là tập dượt làm những việc mà một người nghiên cứu toán học (hay bất cứ một khoa học nào khác) phải làm. Trên báo Toán học và Tuổi trẻ đã có nhiều bài nói về vấn đề này. Đây là một điều mà các bạn cần rèn luyện thường xuyên, và đối với một vấn đề quan trọng như vậy, nói đi nói lại – mỗi lần trên một khía cạnh khác nhau, trên những thí dụ có nhiều vẻ khác nhau – vẫn là điều cần thiết.

Các bạn hãy theo dõi cách suy nghĩ trong khi đi tìm lời giải của bài toán sau đây :

Giả sử *u* là số nguyên dương lẻ cho trước. Hãy tìm xem phương trình sau đây :

$$4u = x^2 + y^2 + z^2 + w^2$$

có *bao nhiêu nghiệm nguyên dương lẻ* (một nghiệm nguyên dương lẻ của phương trình trên là một bộ các giá trị nguyên dương lẻ của *x, y, z,* w thỏa mãn phương trình đó).

Thí dụ khi $u = 1$ thì phương trình có dạng

$$4 = x^2 + y^2 + z^2 + w^2$$

và chỉ có một nghiệm nguyên dương lẻ là

$x = y = z = w = 1$ ($x = 2, y = z = w = 0$ không phải là một nghiệm nguyên dương lẻ của phương trình).

(*) Dựa vào kết quả ở trên, bạn có thể mở rộng cho trường hợp đa giác bất kì.

Để giải bài toán này, trước hết ta phải làm gì ?

Bài toán chưa cho ta biết số phải tìm là bao nhiêu, nó phụ thuộc vào u như thế nào. Vì vậy, trước tiên ta phải tìm cách *dự đoán* điều đó. Phương pháp thường dùng là giải bài toán trong một số trường hợp đặc biệt, phân tích, so sánh các trường hợp đặc biệt này để dự đoán quy luật tổng quát.

Ở trên ta đã xét trường hợp $u = 1$; cho $u = 3$ thì phương trình có dạng

$$12 = x^2 + y^2 + z^2 + w^2$$

Số chính phương lẻ dưới 12 chỉ là 1 và 9, do đó ta có :

$12 = 9 + 1 + 1 + 1$ $(x = 3, y = z = w = 1)$

$= 1 + 9 + 1 + 1$ $(x = 1, y = 3, z = w = 1)$

$= 1 + 1 + 9 + 1$ $(x = y = 1, z = 3, w = 1)$

$= 1 + 1 + 1 + 9$ $(x = y = z = 1, w = 3)$

Như vậy, khi $u = 3$ thì phương trình có 4 nghiệm nguyên dương lẻ.

Xét tiếp trường hợp $u = 5$, ta có phương trình :

$$20 = x^2 + y^2 + z^2 + w^2$$

Số chính phương lẻ dưới 20 chỉ là 1 và 9, do đó :

$20 = 9 + 9 + 1 + 1$ $(x = y = 3, z = w = 1)$

$= 9 + 1 + 9 + 1$ $(x = 3, y = 1, z = 3, w = 1)$

$= 9 + 1 + 1 + 9$ $(x = 3, y = z = 1, w = 3)$

$= 1 + 9 + 1 + 9$ $(x = 1, y = 3, z = 1, w = 3)$

$= 1 + 9 + 9 + 1$ $(x = 1, y = z = 3, w = 1)$

$= 1 + 1 + 9 + 9$ $(x = y = 1, z = w = 3)$

và phương trình có 6 nghiệm nguyên dương lẻ.

Gọi $S(u)$ là số nghiệm nguyên dương lẻ của phương trình đã cho, ta có :

$u = 1\ 3\ 5$

$S(u) = 1\ 4\ 6$

Như vậy, có thể dự đoán rằng $S(u) = 1$ khi $u = 1$, còn $S(u) = u + 1$ khi $u > 1$ chăng ?

Ta phải kiểm tra lại dự đoán này, bằng cách xét thêm một số trường hợp đặc biệt khác.

Cho $u = 7$, ta có phương trình

$$28 = x^2 + y^2 + z^2 + w^2$$

Số chính phương lẻ dưới 28 là 1, 9, và 25, do đó ta có

$28 = 25 + 1 + 1 + 1$ (từ đây có 4 nghiệm)

$= 9 + 9 + 9 + 1$ (từ đây có 4 nghiệm)

và như vậy, ta có tất cả là 8 nghiệm, nghĩa là với $u = 7$ thì cũng có $S(u) = u + 1 = 8$, và dự đoán là đúng. Ta tiếp tục thêm.

Cho $u = 9$, ta có phương trình

$$36 = x^2 + y^2 + z^2 + w^2.$$

Số chính phương lẻ dưới 36 cũng chỉ là 1, 9, 25, và ta có

$36 = 9 + 9 + 9 + 9$ (có 1 nghiệm)

$= 25 + 9 + 1 + 1$ (từ đây có đến 12 nghiệm, bạn hãy thử lại xem !).

Như vậy với $u = 9$ thì phương trình có đến 13 nghiệm, tức là $S(u) > u + 1$, và *dự đoán trên đây của ta là sai*. Vậy quy luật phụ thuộc của $S(u)$ vào u là gì ?

Chúng ta hãy *kiên nhẫn* xét thêm một số trường hợp đặc biệt nữa. Với $u = 11$ thì $S(u) = 12$, với $u = 13$ thì $S(u) = 14$, nghĩa là dự đoán trên đây của ta lại đúng. Nhưng với $u = 15$ thì khác, $S(u)$ lên đến... 24 (!)

Ta thử tiếp tục với $u = 17, 19, 21, 23, 25$. Ta ghi tất cả các kết quả tìm được vào bảng sau đây :

u =	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25
$S(u)$ =	1	4	6	8	13	12	14	24	18	20	32	24	31.

Quy luật ở đây là gì ? Ta chú ý đến những trường hợp mà $S(u)$ đúng bằng $u + 1$, như dự đoán của ta ở trên. Đó là khi $u = 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23$, tức là khi *u là số nguyên tố*.

Còn với những giá trị khác của u, là số 1 và những hợp số 9, 15, 21, 25 thì sao ? Ta thử phân tích các hợp số này thành thừa số nguyên tố :

u =	3.3	3.5	3.7	5.5
$S(u)$ =	13	24	32	31

Quy luật là gì ? ... Nếu u là nguyên tố, thì $S(u) = u + 1$, nếu $u = 1$ thì $S(u) = 1$, còn trong các trường hợp khác thì $S(u)$ đều lớn hơn $u + 1$. Như vậy là $S(u)$ nhỏ hơn $u + 1$, bằng $u + 1$, hay lớn hơn $u + 1$ tùy theo $u = 1$, u là nguyên tố, hay u là hợp số. Nhưng quy luật này hãy còn chung quá !

Ta lại chú ý đến bảng ta vừa lập. Trong trường hợp $u = 9$ và $u = 25$, tức là *số chính phương*, thì $S(u)$ lại là *số nguyên tố* (13 và 31) ! Đối với hai số 15 và 21 thì giá trị tương ứng của $S(u)$ cũng là hợp số. Ta viết $S(u)$ dưới dạng tích của hai thừa số :

$u \quad = 15 = 3.5 \qquad 21 = 3.7$

$S(u) = 24 = 4.6 \qquad 32 = 4.8$

Thật là lạ lùng. Mỗi thừa số ở dòng dưới lớn hơn mỗi thừa số tương ứng ở dòng trên một đơn vị, mà mỗi thừa số ở dòng trên là số nguyên tố !

Như vậy ta thấy rằng :

Nếu u là số nguyên tố p

thì $\qquad S(u) = p + 1$

Nếu u là tích của hai số nguyên tố pq thì

$$S(u) = (p + 1)(q + 1)$$

Nhưng nếu u là $\quad 9 \quad 25$

thì $\qquad S(u)$ là $\quad 13 \quad 31.$

Quy luật là gì đây ?

Ta thử viết :

$$(p + 1)(q + 1) = pq + p + q + 1$$

Như vậy :

$$\frac{pq}{pq + p + q + 1} \qquad \frac{p}{p + 1}$$

Ta lại viết

$$\frac{9}{13 = 9 + 3 + 1} \qquad \frac{25}{31 = 25 + 5 + 1}$$

Phải chăng chân lí đã hé mở ?

Ta viết lại tất cả các kết quả trên :

$u \quad = p \qquad pq \qquad 9$

$S(u) = p + 1 \qquad pq + p + q + 1 \qquad 9 + 3 + 1$

$u \quad = \quad 25 \qquad 1$

$S(u) = 25 + 5 + 1 \qquad 1$

Ước số ! Mỗi số ở dòng dưới là tổng các ước số của số tương ứng ở dòng trên ! Ta đi đến dự đoán sau đây $S(u)$ *bằng tổng các ước số của u.*

Điều ta u.

Điều ta dự đoán này đã được nhà toán học nổi tiếng GAO–XƠ ("ông vua số học") chứng minh. Đó là một trong những định lí đẹp nhất của Gao–xơ :

Nếu u là số nguyên dương lẻ thì số các cách viết 4u dưới dạng tổng của bốn số chính phương lẻ là bằng tổng các ước số của u.

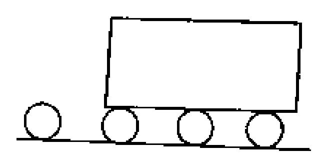
Các bạn trẻ thân mến ! Con đường mò mẫm, dự đoán trước khi chứng minh một định lí, thường là bước đầu tiên dẫn đến phát minh, là như vậy đó. Nó đòi hỏi các bạn tính *kiên trì nhẫn nại*, không được hấp tấp vội vàng, phải biết *phân tích* một vấn đề phức tạp thành những vấn đề đơn giản hơn, lại phải biết *tổng hợp* và *tổng quát hóa* v.v..., tức là những điều cần thiết cho một người làm công tác khoa học trong bất cứ một lĩnh vực nào.

TỪ MỘT TÍNH CHẤT CỦA ĐƯỜNG TRÒN

HOÀNG CHÚNG

Các bạn hàng ngày vẫn thường xuyên nhìn thấy những hình *tròn*, : mặt trăng *tròn*, miệng cốc *tròn*, *bánh xe*,..., đã biết về định nghĩa đường tròn ở lớp 6, học về đường tròn một cách có hệ thống ở lớp 7. Nếu có ai hỏi "đường tròn có những tính chất gì và những tính chất đó được *sử dụng trong thực tế như thế nào* ?" thì chắc có nhiều bạn sẽ mỉm cười cho rằng câu hỏi quá đơn giản. Tôi đã nêu câu hỏi đó với một bạn giỏi toán lớp 9 và được câu trả lời sau đây : "Đường tròn là quỹ tích (trong mặt phẳng) của những điểm cách đều một điểm cho trước. Nói cách khác, đường tròn là một đường cong phẳng khép kín, có tất cả các điểm cách đều một điểm cho trước, là tâm của đường tròn. Tính chất này của đường tròn được dùng rộng rãi, thí dụ : dùng compa để vẽ đường tròn, "lên vành" một bánh xe đạp..."

Chắc các bạn đồng ý rằng câu trả lời trên đây là đúng. Tính chất "cách đều tâm" của đường tròn là một tính chất rất quen thuộc với chúng ta. Thí dụ về vành bánh xe đạp là một thí dụ hay : các nan hoa, nối trục với vành bánh xe, là hình ảnh của các đường bán kính của hình tròn. Bánh xe đạp tròn bảo đảm cho người đi xe được di chuyển song song với mặt đường ; bạn hãy tưởng tượng đi

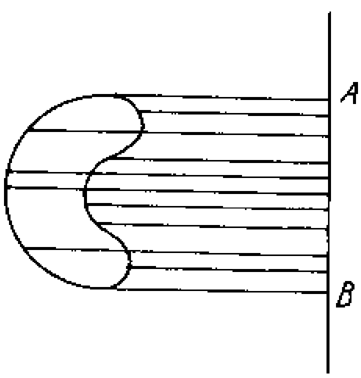


Hình 1

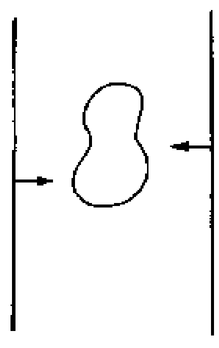
một chiếc xe đạp có bánh xe méo : vì các điểm trên vành bánh xe không cách đều trục, nên dù mặt đường rất bằng phẳng, bạn vẫn luôn luôn bị xóc lên, xóc xuống, như luôn gặp phải những "ổ gà" !

Từ thí dụ về vành bánh xe đạp, bạn hãy chú ý một ứng dụng khác thô sơ hơn : bạn hãy quan sát một cái hòm nặng được đẩy trên những khúc gỗ hình trụ lăn trên mặt đường *(h.1)*. Nếu mặt cắt thẳng của những khúc gỗ đó là hình *tròn* thì cái hòm sẽ chuyển động song song với mặt đường. Trong trường hợp này, tính chất gì của đường tròn đã được sử dụng ? Đến đây, chắc các bạn đã thấy rằng câu hỏi đặt ra ở trên : "đường tròn có những tính chất gì và các tính chất đó được sử dụng trong thực tế như thế nào" có lẽ không hẳn là một câu hỏi quá đơn giản.

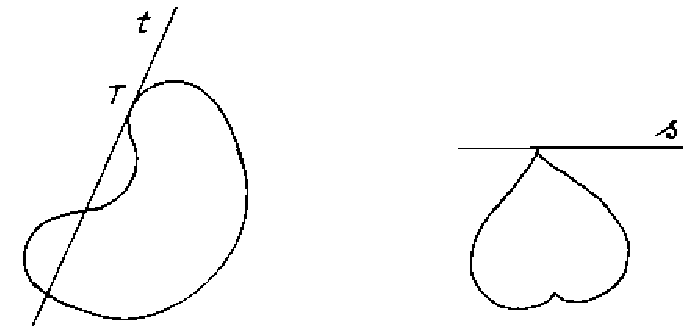
Thực vậy, phân tích kĩ hình 1, có thể thấy rằng ở đây ta không dùng tính chất "cách đều tâm" mà dùng tính chất khác : hai tiếp tuyến song song của đường tròn bao giờ cũng cách nhau một khoảng không đổi bằng đường kính của đường tròn). Nếu gọi khoảng cách giữa hai tiếp tuyến song song của đường tròn là "bề rộng" của đường tròn, thì ở đây ta đã dùng tính chất "có bề rộng không đổi" của đường tròn.



Hình 2


Hình 3

Trước khi đi sâu hơn, cần nói rõ thế nào là "bề rộng" của một đường cong phẳng khép kín. Cho một đường cong phẳng khép kín C và một phương D. Ta chiếu tất cả các điểm của đường cong C xuống một đường thẳng vuông góc với phương D. Hình chiếu của tất cả các điểm này sẽ tạo thành một đoạn thẳng AB ; chiều dài của AB là "bề rộng" của đường cong C theo phương D *(h. 2)*. Ta chú ý đến đường thẳng song song với D và đi qua A : đường thẳng này có chung với C ít nhất là một điểm và toàn bộ đường cong C nằm về một phía của đường thẳng này ; ta gọi đó là *đường tựa* của đường cong C. Tương tự như vậy, đường thẳng qua B và song song với D cũng là một đường tựa của đường cong C. Khoảng cách giữa hai đường tựa này là bề rộng của đường cong C theo phương D. Ta cũng có thể xác định các đường tựa của C theo phương D một cách khác : vẽ hai đường thẳng song song với D sao cho đường cong C ở giữa hai đường thẳng đó *(h.3)*, rồi cho hai đường thẳng này tịnh tiến lại gần nhau (vẫn luôn luôn song song với D), cho đến khi mỗi đường cắt C ở ít nhất một điểm.



Hình 4

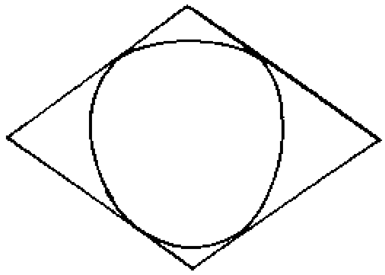
Cần chú ý phân biệt đường tựa với tiếp tuyến : trong hình 4a đường t là tiếp tuyến của đường cong tại T nhưng không phải là đường tựa ; trong hình 4*b*, đường s là đường tựa nhưng không phải là tiếp tuyến của đường cong ; riêng đối với đường tròn, thì đường tựa và tiếp tuyến trùng với nhau.

Đối với đường cong có bề rộng không đổi thì hai đường tựa song song, theo một phương bất kì, bao giờ cũng cách nhau một khoảng không đổi b (b được gọi là bề rộng của đường cong).

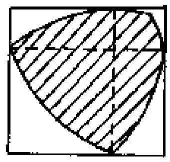
Như vậy, ta đã nói đến hai tính chất của đường tròn : tính chất "cách đều tâm" và tính chất "có bề rộng không đổi". Đối với tính chất cách đều tâm thì ta biết rằng chỉ đường tròn mới có tính chất đó (đó là *tính chất đặc trưng* của đường tròn) và vì vậy có thể định nghĩa : Đường tròn là đường cong phẳng khép kín có tất cả các điểm cách đều một điểm cho trước. Còn tính chất "có bề rộng không đổi" thì sao ? Có phải chỉ có đường tròn mới có tính chất này không ? có thể định nghĩa đường tròn là "đường cong phẳng khép kín có bề rộng không đổi" được không ?

Câu trả lời – có thể trái với sự chờ đợi của nhiều bạn – là : *không* ! Tính chất "có bề rộng không đổi" không phải chỉ riêng đường tròn mới có.

Trong thí dụ về đẩy cái hòm trên mặt đường nếu ta dùng những khúc gỗ mà mặt cắt thẳng là hình có dạng như trong hình 5 thì

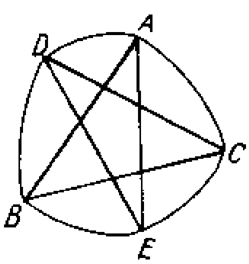


Hình 5

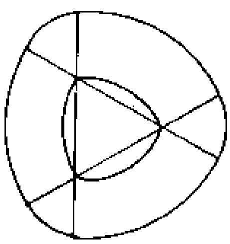


Hình 6

cái hòm vẫn chuyển động song song với mặt đường : hai tiếp tuyến song song của đường cong trong hình 5 bao giờ cũng cách nhau một khoảng không đổi (trong hình 5, ta vẽ hai cặp tiếp tuyến như vậy, tạo thành một hình thoi). Đường cong trong hình 5 – không phải là đường tròn – cũng là một đường cong có bề rộng không đổi.



Hình 7



Hình 8

Đường cong có bề rộng không đổi đơn giản nhất, mà không phải là đường tròn, là một hình "tam giác cong đều" mà mỗi cạnh là một cung tròn có tâm ở đỉnh đối diện của tam giác (h.6) tam giác cong này được gọi là tam giác *Rơlô*. Trong hai đường tựa song song bất kì của tam giác Rơ–lô, bao giờ cũng có một đường đi qua đỉnh, đường kia hoặc tiếp xúc với một cạnh hoặc đi qua đỉnh thứ hai của tam giác ; trong mọi trường hợp, khoảng cách giữa hai đường tựa song song bao giờ cũng không đổi.

Từ cách dựng tương tự cách dựng tam giác cong Rơ–lô, có thể dựng được vô số đa giác cong có bề rộng không đổi : từ một điểm B tùy ý lấy làm tâm, vẽ một cung tròn AC có bán kính b (h7) ; lấy C làm tâm, vẽ một cung tròn BD (dĩ nhiên bán kính cũng bằng b) lấy D làm tâm lại vẽ cung tròn đi qua C cắt cung tròn qua B (tâm A) tại điểm E ; lấy E làm tâm vẽ cung DA. Ngũ giác cong $ABCDE$ là một đường cong có bề rộng không đổi (bằng b). Bằng cách này, ta có thể vẽ đường cong có bề rộng không đổi dưới dạng đa giác cong có số lẻ đỉnh tùy ý cho trước.

Từ đa giác cong có bề rộng không đổi, ta có thể vẽ những đường cong có bề rộng không đổi mà *không có đỉnh*. Chẳng hạn từ tam giác Rơ–lô, ta thay mỗi cạnh của tam giác bằng một cung tròn có cùng tâm, cùng số đo (xác định bằng cách kéo dài các "đường chéo" của tam giác Rơlô) và có bán kính dài hơn bán kính của cạnh tam giác một đoạn d ; ba cung này được nối lại với nhau bởi những cung có bán kính d và có tâm tại đỉnh của tam giác (*h. 8*). Bằng cách này, từ đa giác ở hình 7, bạn có thể vẽ dễ dàng những đường cong có bề rộng không đổi mà không có đỉnh.

Nhưng bạn không nên nghĩ rằng mọi đường cong có bề rộng không đổi đều tạo thành từ những cung tròn. Người ta có thể chỉ ra những đường cong có bề rộng không đổi mà mọi cung – dù rất nhỏ – của nó *đều không phải là cung tròn.*

Các đường cong có bề rộng không đổi có nhiều ứng dụng trong thực tế ; một số chi tiết máy có hình giới hạn bởi những đường cong có bề rộng không đổi. Tam giác Rơlô là đường cong có bề rộng không đổi đầu tiên – ngoài đường tròn – được sử dụng trong kĩ thuật. Trong một công trình phân loại các chi tiết máy, nhà cơ học Rơlô đã chứng minh rằng tam giác đó có thể quay ở trong một hình vuông sao cho mỗi cạnh của hình vuông luôn luôn tiếp xúc với một cạnh của tam giác hoặc đi qua một đỉnh của tam giác (h.6).

Người ta đã xây dựng cả một lí thuyết về các đường cong có bề rộng không đổi, trong đó có những định lí khá lí thú, chẳng hạn mọi đường cong có bề rộng không đổi b đều có cùng một chu vi (bằng πb, tức là chu vi đường tròn đường kính b) ; góc ở đỉnh (nếu có của đường cong có bề rộng không đổi không bé hơn 120°, đường cong có bề rộng không đổi duy nhất có góc ở đỉnh bằng 120° là tam giác Rơlô ; trong mọi đường cong có bề rộng không đổi b thì tam giác Rơlô giới hạn một diện tích bé nhất...

Các bạn thân mến ! Các bạn thấy đấy, ngay những câu hỏi tưởng chừng rất đơn giản, những ứng dụng thực tế rất thô sơ của toán học cũng có thể chứa đựng những kiến thức rất phong phú. Các bạn cần rèn luyện cho mình một *óc quan sát, phân tích* sâu sắc những hiện tượng trong đời sống, vận dụng những kiến thức đã học, từ đó nêu ra những thắc mắc, đề xuất những vấn đề mới, thôi thúc mình suy nghĩ, học tập không ngừng.

TRỞ LẠI NHỮNG TÍNH CHẤT CỦA ĐƯỜNG TRÒN

HOÀNG CHÚNG

1. Trong báo Toán học tuổi trẻ số 62 chúng ta đã nói đến một tính chất đặc trưng và một tính chất không đặc trưng của đường tròn. Xin nhắc qua lại để các bạn dễ theo dõi tiếp bài này :

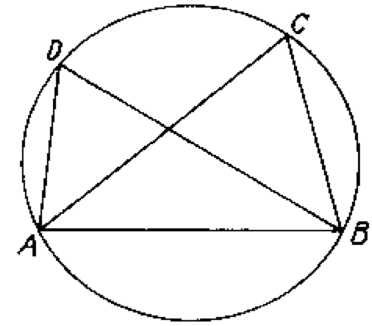
– Đường tròn có một tính chất quen thuộc : đó là đường cong khép kín, có tất cả các điểm cách đều một điểm cho trước (tâm đường tròn). Đây là *tính chất đặc trưng* của đường tròn, vì chỉ đường tròn mới có tính chất đó. Vì vậy ta có thể định nghĩa "đường tròn là quỹ tích của những điểm cách đều một điểm cho trước".

– Đường tròn còn có một tính chất khác mà chúng ta vẫn thường sử dụng trong thực tế mà ít chú ý : đó là tính chất "có bề rộng không đổi". Tuy nhiên, đây không phải là tính chất đặc trưng của đường tròn, vì ngoài đường tròn ra, còn có những đường cong khác cũng có bề rộng không đổi (đơn giản nhất là tam giác cong Rơlô). Do đó, *không thể* định nghĩa "đường tròn là đường cong có bề rộng không đổi" được.

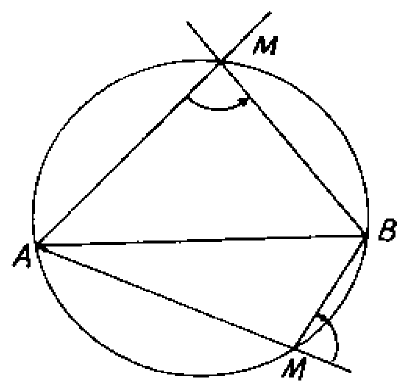
Đến đây, các bạn thử nghĩ xem đường tròn có tính chất đặc trưng và không đặc trưng gì quan trọng, lí thú nữa không ? Có thể định nghĩa đường tròn bằng những cách nào khác nữa không ?

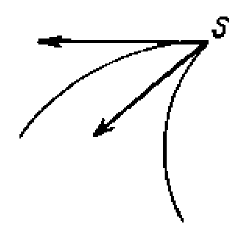
2. Khi giải các bài toán hình học, nếu chú ý, các bạn có thể thấy rằng ta đã dùng thường xuyên định lí về góc nội tiếp : "hai góc nội tiếp cùng chắn một dây cung thì bằng nhau" (hình 1). Ngược lại, "mọi điểm, từ đó một đoạn thẳng cho trước được nhìn dưới những góc bằng nhau, đều nằm trên một cung tròn (hay hai cung tròn đối xứng). Hai định lí thuận và đảo này nêu lên một *tính chất đặc trưng* nữa của cung tròn. Cần chú ý rằng tính chất này chính là điểm trung tâm của toàn bộ lí thuyết về đường tròn mà ta đã học, vì những định lí quan trọng nhất, lí thú nhất của đường tròn đều dựa vào định lí về góc nội tiếp.

Dựa vào tính chất đặc trưng này. ta có một định nghĩa khác của đường tròn, nếu biết khái niệm "góc định hướng". Ta gọi góc định hướng giữa hai đường thẳng *MA*. *MB* là góc quét bởi *MA* khi quay để đến trùng với *MB*, góc này mang dấu *dương hay âm* tùy theo chiều quay đó trùng hay ngược với chiều quay của kim đồng hồ.



Hình 1



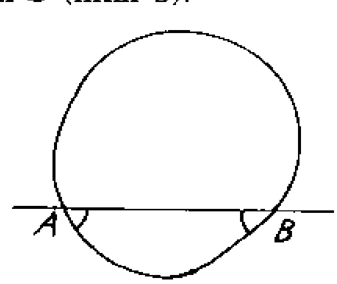


Hình 2 *Hình 3*

Từ tính chất đặc trưng của cung tròn nói trên và dựa vào khái niệm góc định hướng, có thể định nghĩa đường tròn qua hai điểm *A, B* là "quỹ tích của những điểm M sao cho góc định hướng giữa hai đường thẳng *MA*, *MB* là không đổi (hình 2).

3. Ta lại có thể nêu lên một tính chất khác nữa của đường tròn. Trước hết, ta nêu ra một khái niệm đơn giản : *góc của hai đường cong* (góc cong) đó là góc của hai tiếp tuyến với hai đường cong đó tại đỉnh *S* (hình 3).

Bây giờ, ta hãy xét một dây cung *AB* tùy ý của đường tròn. Hai tiếp tuyến của đường tròn tại *A* và *B* làm thành với đường tròn hai góc cong bằng nhau.



Hình 4

Một câu hỏi được đặt ra là : tính chất này có phải là tính chất đặc trưng của đường tròn không ? Nói cách khác, mọi đường cong khép kín, tạo thành với một dây cung tùy ý của nó hai góc cong bằng nhau (hình 4), có phải là đường tròn không ? Có những đường cong nào khác, không phải đường tròn, cũng có tính chất đó không ?

Sau đây, ta sẽ chứng minh rằng tính chất nói trên đúng là một tính chất đặc trưng của đường tròn. Thực vậy, giả sử có một đường cong khép kín có tính chất đó (hình 5).

Giả sử AB, BC, CA – ba dây cung của nó. Từ A, B, C ta vẽ các tiếp tuyến của đường cong và có các góc α, β, γ như hình vẽ. Mặt khác, ta có

$$\widehat{CAB} + \beta + \gamma = 180^\circ$$
$$\alpha + \widehat{ABC} + \gamma = 180^\circ$$
$$\alpha + \beta + \widehat{BCA} = 180^\circ \qquad (1)$$

Do đó

$$(\widehat{CAB} + \widehat{ABC} + \widehat{BCA} + $$
$$+ 2(\alpha + \beta + \gamma) = 3.180^\circ$$

mà

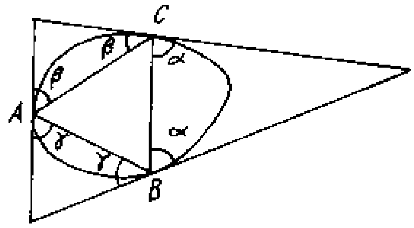
$$(\widehat{CAB} + \widehat{ABC} + \widehat{BCA} = 180^\circ$$

cho nên $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \qquad (2)$

Từ (1) và (2), suy ra $\widehat{BCA} = \gamma$.

Bây giờ, ta lấy một điểm D khác tùy ý trên đường cong. Xét ba dây cung AD, DB, BA như đã làm với ba dây cung AC, CB, BA và cũng lí luận tương tự như trên, ta đi đến $BDA = \gamma$.

Như vậy, dây AB được nhìn từ D và C dưới cùng một góc γ, nghĩa là C và D cùng nằm trên một đường tròn qua AB. Vì D là một điểm tùy ý trên đường cong, cho nên mọi điểm trên đường cong đều nằm trên đường tròn xác định bởi ba điểm A, B, C. Do đó, đường cong cho trước là một đường tròn.



Hình 5

Từ những điều vừa chứng minh, ta có thể phát biểu định nghĩa sau đây về đường tròn : "Đường tròn là đường cong khép kín sao cho mỗi dây cung của nó đều làm thành với nó hai góc cong bằng nhau".

Câu chuyện về đường tròn xin tạm dừng ở đây với một lời kết luận : trong những vấn đề quen thuộc, tưởng chừng hết sức đơn giản, cũng có thể chứa đựng những điều lí thú, sâu sắc. Bản thân kết luận này – đã được nhắc đi nhắc lại nhiều lần trên tờ báo này – có thể đã quen thuộc và có vẻ đơn giản với các bạn. Mong các bạn tiếp tục suy nghĩ thêm !

MỘT PHƯƠNG PHÁP ĐỂ CHỨNG MINH VÀ SÁNG TẠO BẤT ĐẲNG THỨC

NGUYỄN NGỌC KHUÊ

Các bạn thân mến !

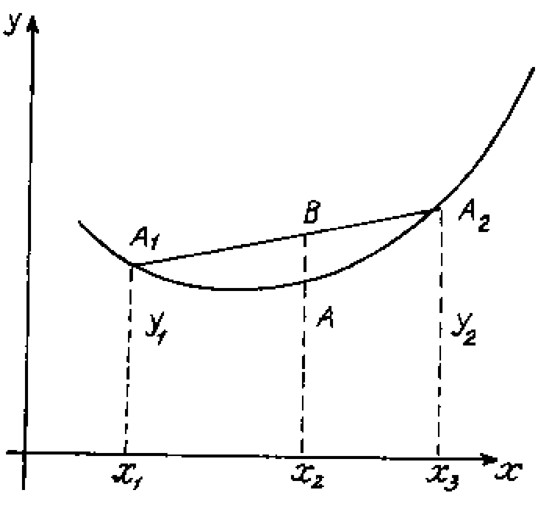
Sự phát triển đi lên của toán học là một quá trình khái quát. Những hiểu biết lẻ tẻ dần dần được thống nhất lại trong những lí thuyết tổng quát. Mỗi lần đạt được một sự khái quát hóa như vậy, không những chúng ta có một công cụ lợi hại hơn để chứng minh những hiểu biết cũ theo một cách nhìn thống nhất mà còn là một công cụ để sáng tạo cái mới. Lâu nay, các bạn hay gặp trong báo Toán học và tuổi trẻ hay trong các kì thi giỏi toán những bài chứng minh về bất đẳng thức ; mỗi lần phải chứng minh như vậy lại phải đau đầu nghĩ ra một cách riêng. Và chắc có bạn cũng băn khoăn không biết người đầu tiên tìm ra bất đẳng thức đó họ tìm ra bằng cách nào. Trong bài này tôi cố gắng cung cấp cho các bạn một phương pháp để chứng minh và sáng tạo bất đẳng thức. Bạn sẽ gặp lại ở đây một số bất đẳng thức đã từng gặp trong báo Toán học và tuổi trẻ nhưng lần này được chứng minh bằng một phương pháp chung. Và bạn hãy thử dùng phương pháp này để tự tìm ra những bất đẳng thức mới. Phương pháp tôi sắp trình bày là phương pháp dùng tính chất lồi, lõm của hàm số ; nó rất đơn giản vì phát hiện ra một hàm số là lồi hay lõm là một việc rất đơn giản, chỉ việc dựa vào dấu của đạo hàm cấp hai (cụ thể là trong khoảng nào mà $y'' > 0$ thì hàm số lồi trong khoảng đó, $y'' \leqslant 0$ thì hàm số lõm, và ngược lại).

I - ĐỊNH NGHĨA HÀM SỐ LỒI

1. Hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trong khoảng X gọi là lồi trong khoảng đó nếu đối với mọi $x_1, x_2 \in X$ và với mọi số dương $q_1, q_2 > 0$ $(q_1 + q_2 = 1)$ ta có :

$$f(q_1x_1 + q_2x_2) \leqslant q_1f(x_1) + q_2f(x_2) \qquad (1)$$

2. Về mặt hình học điều đó có nghĩa là mọi điểm của bất cứ cung $\widehat{A\ A}$ nào của đồ thị đều nằm dưới cát tuyến A_1A_2 hoặc cùng lắm là nằm ngay trên cát tuyến A_1A_2.



Thực vậy, biểu thức $x = q_1x_1 + q_1x_2$ (2) (với $x_1 < x_2$) với sự lựa chọn q_1, q_2 như trên sẽ thỏa mãn $x_1 < x < x_2$ (tức là nằm trong khoảng x_1 đến x_2) : vì $x = q_1x_1 + q_2x_2 > q_1x_1 + q_2x_1 = (q_1 + q_2)x_1 = x_1$, $x = q_1x_1 + q_2x_2 < q_1x_2 + q_2x_2 = (q_1 + q_2)x_2 = x_2$. Ngược lại bất cứ điểm x nào trong $[x_1, x_2]$ đều biểu diễn được ở dạng (2) với

$$q_1 = (x_2 - x)/(x_2 - x_1),\ q_2 = (x - x_1)/(x_2 - x_1).$$

Phương trình cát tuyến A_1A_2 là

$$y(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_2)$$

do đó $y(B) = y(q_1x_1 + q_2x_2) = q_1y_1 + q_2y_2 = q_1f(x_1) + q_2f(x_2)$ = vế phải ở (1).

Về mặt hình học $f(A) < y(B)$ chính là (1).

3. Có thể chứng minh bằng quy nạp rằng bất đẳng thức (1) là trường hợp $n = 2$ của bất đẳng thức sau đây :

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} q_ix_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} q_if(x_i) \qquad (3)$$

(với mọi $q_i > 0$ và $\sum_{i=1}^{n} q_i = 1$)

Bất đẳng thức (3) gọi là bất đẳng thức Jensen : có thể dùng nó để định nghĩa cho hàm số lồi. (3) được mở rộng cho các số $q_i > 0$ bất kì không nhất thiết có tổng bằng đơn vị, cụ thể là :

$$f(\sum q_ix_i/\sum q_i \leqslant \sum q_if(x_i)/\sum q_i (4)$$

II - CÁC VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ 1. Chứng minh rằng với mọi số $a_i, b_i > 0$, ta có :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^kb_i^{1-k} \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^k \left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)^{1-k}$$

với $k \geqslant 1$ và $k < 0$.

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^kb_i^{1-k} < \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^k \left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)^{1-k}$$

với $0 < k < 1$

(mở rộng bất đẳng thức thứ hai của bạn Lê Quốc Hán đăng trong báo THvTT số 95 tháng 2 năm 1977).

Rõ ràng khi $k = 1$ thì ta có đẳng thức. Xét hàm số $y = x^k$ với $x > 0$: rõ ràng $y'' = k(k-1) \times x^{k-2} \Rightarrow y'' > 0$ với $k > 1$ và $k < 0$ còn $y'' < 0$ với $0 < k < 1$ nên hàm số $y = x^k$ là hàm số lồi trong khoảng $(0, \infty)$ với $k > 1$ và $k < 0$ và hàm số $z = x^k$ là hàm số lồi trong khoảng $(0, \infty)$ với $0 < k < 1$.Áp dụng (3) với $q_1 = b_i/\sum_i b_i$, $x_i = a_i/b_i$ cho hàm số y và z ta có :

$$1)\ \sum_i \frac{a_i^k}{b_i^{k-1}}/\sum_i b_i > (\sum_i a_i/\sum_i b_i)^k$$

$$\Leftrightarrow \sum_i a_i^kb_i^{1-k} > (\sum_i a_i)^k(\sum_i b_1)^{1-k}$$

với $k > 1$ và $k < 0$.

$$2)\ \sum_i(-a_i^k b_i^{-k})[b_i(\sum_i b_i)^{-1}] > -$$

$$> [\sum_i(a_i / \sum_i b_i)]^k,$$

đổi dấu hai vế và để ý đơn giản cả hai vế cho $B = \sum_i b_i$ ta có :

$$\sum_i a_i^k b_i^{1-k} < (\sum_i a_i)^k \left(\sum_i b_i\right)^{1-k} \text{ với } 0 < k < 1.$$

Ví dụ 2. (Bài thi đại số học sinh giỏi lớp 10 toàn miền Bắc năm học 1964 – 1965, đăng trong báo THvTT số 14, tháng 11 năm 1965).

1) Cho n số không âm x_i có tổng bằng a không đổi. Chứng minh rằng tổng $\sum_{i=1}^{n} x_i^m$ bé nhất khi $x_1 = x_2 = \ldots x_n$ (m $\geq$ 1).

2) người ta muốn chứa 1m^3 ? ? ? hóa chất vào 8 thùng gỗ hình lập phương n ? ? mỗi mặt là một tấm gỗ có bề dày không đáng kể. Giá tiền mỗi tấm như thế tỉ lệ với bình phương diện tích của nó. Hỏi phải chọn các cạnh $x_1, x_2, \ldots x_8$ của tấm thùng gỗ ấy là bao nhiêu để tốn ít tiền nhất ?

Bài giải : 1) Hàm $y = x^m$ $(m \geq 1)$ là hàm lồi vì $y'' \geq 0$ nên áp dụng bất đẳng thức Jensen (4) ta có (với $p_1 = p_2 = \ldots = 1$)

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^m \geq n(\sum x_1/n)^m \equiv a^m/n^{m-1}$$

và chỉ có dấu bằng khi $m = 1$ hoặc m > 1 và $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = a/n$.

2) Theo đầu bài $x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_8^3 = 1$.

Mỗi thùng thứ i cần 6 tấm gỗ diện tích x_j^2 mà giá tiền mỗi tấm tỉ lệ với bình phương diện tích cho nên giá tiền ít nhất nếu $\sum_{i=1}^{8} x_i^4$ bé nhất. Đặt $y_i = x_1^3 \geq 0$, vấn đề là tìm cực tiểu của $T = \sum_{j=1}^{8} y_j^{4/3}$ với $y_i \geq 0$ và $y_1 + y_2 + \ldots + y_8 = 1$.

Theo phần trên ta có $y_1 = y_2 = \ldots = y_8 = 1/8$ tức là $x_1 = x_2 = \ldots = x_8 = 1/2$.

NIỀM VUI CỦA TOÁN HỌC

PETER HILTON

(DOÀN QUỲNH *dịch*)

(Bài nói chuyện của Peter Hilton, giáo sư trường Đại–học New York, Mỹ, tại buổi công bố kết quả cuộc thi Toán lần thứ 4 của Bỉ, ngày 24–5–1989 ở trường Đại học Antwerp. Bài dịch của giáo sư Doãn Quỳnh)

Trước hết cho tôi gửi đến tất cả các bạn thi chung kết lời chúc mừng nồng nhiệt về thành tựu đẹp đẽ của các bạn. Các bạn đã chứng tỏ khả năng, sự thông minh, trí tưởng tượng và tính sáng tạo ở một mức độ cao trong một lĩnh vực là toán học mà tôi dám cả gan cho là một trong những biểu hiện đẹp đẽ nhất của trí óc con người. Như nhà toán học lớn của Anh, ông G. H. Hardy, đã nói đầy ý nhị kiểu Anh : "Một lĩnh vực không phải đã bắt đầu với Archimède và sẽ không tận cùng với Einstein chắc chắn phải có điều gì đó đáng thán phục". Do đó đối với tất cả các bạn, những người đang tiếp tục một cách tạm coi là khá gương mẫu truyền thống lớn lao của Archimède và Einstein, tôi nói : "Các bạn đã làm giỏi".

Bây giờ hãy cho phép tôi đi vào nội dung chính của buổi nói chuyện này. Tôi muốn mở đầu bằng cách kể lại một dịp cách đây vài năm khi tôi được mời nói chuyện với một nhóm thầy dạy toán ở phổ thông cơ sở và phổ thông trung học ở Salt Lake City (thủ phủ bang Utah, Mỹ). Tôi đã chọn đề tài nói chuyện là "cải cách chương trình và sư phạm trong giảng dạy toán học" và trong khi nói những nhận xét của tôi về những chiến lược sư phạm có hiệu quả, tôi đã phát biểu quan điểm là giảng dạy toán học không thể thành công nếu học sinh không được hấp dẫn bởi những tinh tế của toán học và không coi việc làm toán là một thú vui. Trong quá trình thảo luận, tiếp sau những nhận xét của tôi và thực ra có thể coi là đóng góp đầu tiên cho cuộc thảo luận đó, một giáo viên trung học không đồng ý với tôi mà nói rằng toán học là một lĩnh vực nghiêm túc và không thể để học sinh quan niệm hoặc được thầy giáo trình bày như một trò vui.

Bây giờ tôi bảo vệ ý kiến, tất nhiên một cách rất tế nhị, và nay tôi vẫn giữ ý kiến là người thầy giáo đó, làm việc với một niềm tin phổ biến nhưng không đúng rằng có một đối chọi cơ bản giữa sự gây hứng thú và tính nghiêm túc của toán học. Đó là một sự tách biệt giả tạo, tương tự dưới nhiều khía cạnh, với sự tách biệt giả tạo quen biết giữa toán học thuần túy và ứng dụng.

Tất nhiên, toán học là quan trọng và quả là ngày càng quan trọng. Một số lĩnh vực nghiên cứu của loài người, chẳng hạn xã hội học tâm lí học, sinh hóa học cho đến nay kháng cự sự thâm nhập của mọi cái khác trừ ảnh hưởng toán học thô thiển nhất thì nay đang dùng những kĩ thuật và ý tưởng toán học rất tinh vi. Một số bộ phận của toán học cho đến nay là thuần túy không thể chối cãi được chẳng hạn lí thuyết bất biến cổ điển, lí thuyết trường hữu hạn, lí thuyết đồng điều thì nay đang được ứng dụng cho những vấn đề thời sự quan trọng của thế giới hiện thực. Máy tính phổ cập được đòi hỏi rộng rãi mà có lúc trước đây chỉ mới đòi hỏi sự tồn tại, là một sự kiện đáng chú ý của toán học ngày nay. Vâng, toán học là cực kì quan trọng trong xã hội hiện đại ; tuy thế, tôi phải thừa nhận với đầy đủ sự trung thực rằng tính quan trọng của nó không phải là lí do chủ yếu mà chúng tôi, những nhà toán học, đã hành nghề một cách cần cù và đầy hứng–thú như thế. Tôi nhớ đến người thầy giáo và bạn tôi, ông Henry Whitebead, nhà tôpô học Anh nổi tiếng, một lần đã nói về điều độ : "không gì có thể cho tôi niềm vui lớn hơn là một buổi sáng nào đó thức dậy được báo tin rằng một trong các định lí của tôi đã làm cho chiến tranh trở thành lỗi thời. Tuy vậy tôi vẫn phải thừa nhận rằng điều đó không có liên quan gì đến các lí do vì sao tôi đã cố gắng chứng minh định lí ấy".

Lí do chúng ta làm toán là nó hấp dẫn chúng ta. Nó kích thích lòng tò mò tri thức và mĩ cảm của chúng ta. Nó đặt ra những câu hỏi có ý nghĩa sâu sắc, mà những câu trả lời của chúng nếu chúng ta khá may mắn tìm ra được một câu nào đấy sẽ cho ta một phần thưởng tinh thần trực tiếp mà ngay tức khắc mở đường cho một cơn sóng hiếu kì mới, một loạt những câu hỏi mới.

Bây giờ có thể có một lập luận ở một mức độ triết học sâu sắc rằng toán bọc hấp dẫn chúng ta chính vì tính quan trọng của nó. Tuy nhiên nếu chúng ta nói đến sự quan trọng trong một ý nghĩa xã hội, ngoại lai như chúng ta đang nói thì tôi không tin rằng điều đó đúng. Vì mối liên quan triết học, nếu nó có và đó là một điều cần nghiên cứu sâu sắc và lâu dài chứ không phải một suy nghĩ thoáng qua, chắc chắn là giữa sự hấp dẫn trí thức của toán học và tính quan trọng nội tại của nó như là một lĩnh vực cơ bản của các cố gắng của loài người.

Tất nhiên tôi tin sâu sắc rằng toán học quan trọng theo nghĩa đó. Nếu được phép lại nhắc đến thầy giáo Henry Whitehead của tôi thì tôi nhớ đến việc ông cố gắng thuyết phục một đồng nghiệp trẻ đang nghĩ tìm một chức vụ trong công việc chính quyền rằng trái lại nên vẫn tiếp tục làm một nhà toán học ở Đại học. (Thầy giáo tôi đã không thành công trong việc thuyết phục người thanh niên, nhưng tôi cho rằng lí lẽ của ông đưa ra là cực kì đanh thép. Thầy Whitehead đã lí luận rằng trong cuộc sống có một số việc đáng làm, ngay cả khi ta không phải tuyệt đối ở cương vị đầu đàn, vì tính xứng đáng nội tại của chúng và tôi nhớ lại thầy nhắc đến nhạc, toán và việc đóng giày tốt. Thầy Whitehead nói : "Thà làm một người hạng hai trong một nghề nghiệp hàng đầu còn hơn làm một người hạng nhất ở một nghề nghiệp hạng hai". cũng nên thêm rằng Whitehead là người đứng đầu ở một nghề nghiệp hàng đầu nên không phải đương đầu với tình trạng khó xử oái oăm như thế).

Tuy nhiên, như tôi đã nói, sự quan trọng mà các nhà cầm quyền, cha mẹ, thầy giáo ngày nay gán cho toán học không phải thuộc loại nội tại như trên mà là nói đến vai trò của nó trong việc bảo đảm tính nổi bật và hạnh phúc của xã hội của họ. Do đó nó đề cập gián tiếp đến vai trò thích đáng của toán học trong khoa học và công nghệ ; nhưng đó chính là điều phần lớn người ta quan niệm về vai trò của toán học trong một xã hội văn minh theo mọi khía cạnh của nó.

Tôi nhắc lại, sự quan trọng của toán học thường được hiểu trong nghĩa xã hội của từ này ; theo nghĩa đó, nó giải thích tại sao chúng ta được cấp tiền để làm toán, nhưng không giải thích vì sao chúng ta làm toán và rõ ràng không giải thích vì sao chúng ta hay ít ra, một số trong chúng ta, có lúc lại làm toán tốt thế. Muốn giải thích điều đó, chúng ta phải đi sâu hơn vào bản chất của chính toán học.

Toán học là một suy nghĩ có hệ thống, nương nhờ một ngôn ngữ và kí hiệu thích hợp một cách đẹp đẽ. Nó được đặc trưng bởi sự phát hiện và sáng tạo những mô hình và sự thiết lập những mối liên hệ tinh tế giữa các bộ phận bề ngoài rất khác nhau của nó. Nó không phải là một tập hợp những bộ môn con khác nhau mà là một thể thống nhất có chứa chấp một kho tàng những khái niệm và kĩ thuật khác nhau nhưng liên quan với nhau. Nó không phải là một tập hợp những hiện tượng ; và sự hiểu biết toán học không phải được kiểm tra bởi kiểm tra tri thức và kí ức.

Mallory nói : "Tôi cố gắng leo lên đỉnh núi Everest bởi vì có nó ở đấy". Các nhà toán học cũng cố gắng làm toán vì đúng như thế. Toán học tồn tại vì kinh nghiệm của thế giới bên ngoài dẫn ta đến đặt ra những câu hỏi mà chỉ có thể được hỏi và trả lời một cách xác đáng trong khuôn khổ toán học. Nhà vật lí học Richard Feynman, phụ họa suy nghĩ của Galileo, nói rằng "thiên nhiên nói với chúng ta bằng ngôn ngữ của toán học". Nhưng toán học cũng tồn tại vì nó là phương thức tự nhiên của tiến bộ, toán học là các câu hỏi được đặt ra do những tiến bộ đó và tạo nên sự kích thích cho những tiến bộ mới. Vậy, như tôi thường nói, toán học ứng dụng và thuần túy là giống nhau trong nghĩa vận động của chúng cũng như giống nhau trong thực hành riêng của chúng.

Chúng ta, những nhà toán học, thèm muốn niềm vui mà toán học đem đến cho chúng ta. Niềm vui đó đến với chúng ta qua sự nhận thức về khả năng lớn lao của một ý tưởng toán học phong phú và qua sự cảm nhận rằng một ý tưởng như thế được diễn đạt dưới một dạng có thể đạt được hoàn thiện. Thường khi đọc một đoạn kịch của Shakespeare, chúng ta có cảm giác rằng ý tưởng trong đó không thể được diễn đạt tốt hơn. "Những ý nghĩ của tôi bay lên, những từ của tôi vẫn ở lại bên dưới, từ không có nghĩa không thể bay lên trời", và ít xảy ra hơn, nhưng chắc chắn có lúc ta có cảm giác một khái niệm toán học đã đạt đến hoàn thiện và một suy luận toán học đã đạt được một sự tao nhã và vẻ đẹp siêu phàm.

Cho phép tôi nêu ra ba ví dụ về sự đẹp đẽ trong toán học. Ví dụ đầu tiên là định lí nổi tiếng của Euclid nói rằng có vô số số nguyên tố. Để chứng minh điều đó, ta hãy giả sử trái lại rằng ta có thể đếm được các số nguyên tố là $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Đặt $N = p_1 p_2 \cdots p_n + 1$ thì N lớn hơn bất kì số $p_1, p_2, \ldots, p_n$ nào và như vậy không phải là số nguyên tố, do đó phải chia hết cho một số nguyên tố nào đó. Tuy nhiên, khi chia nó cho số nguyên tố p_i tùy ý thì số dư là 1 nên chúng ta đi đến một mâu thuẫn và như thế là ta thiết lập được định lí của Euclid.

Ví dụ thứ hai là khẳng định rằng không có số hữu tỉ nào có bình phương bằng 2. Chúng ta lại giả sử điều trái lại để đi đến một mâu thuẫn. Giả sử a/b là một số hữu tỉ mà bình phương là 2. Ta có thể giả sử a/b là phân số tối giản tức ước số chung lớn nhất của a và b là *1*. Có $a^2/b^2 = 2$ hay $a^2 = 2b^2$ nên a^2 chẵn. Vì bình phương của một số lẻ là một số lẻ nên a là một số chẵn, *viết* $a = 2c$. Khi đó, $2b^2 = 4c^2$ nên $b^2 = 2c^2$. Và như trước, ta kết luận được b chẵn. Nhưng cả a và b là chẵn thì a/b không phải là phân số tối giản và chúng ta đạt được một mâu thuẫn.

Về ví dụ thứ ba, chúng ta hãy xét câu chuyện nổi tiếng về Gauss thuở trẻ. Hình như thầy giáo đặt ra cho lớp học bài toán buồn chán đáng sợ là cộng tất cả các số từ 1 đến 100. Gauss lí luận rằng tổng đó có thể trình bày dưới dạng :

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 48 + 49 + 50 +$$
$$+ 100 + 99 + 98 + \ldots + 53 + 52 + 51$$

Khi đó có 50 tổng đứng và mỗi tổng đứng bằng 101. Vậy tổng cần tìm là $50 \times 101 = 5050$.

Trong tất cả các ví dụ đó, suy luận phát hiện ra một điều hiểu biết vượt quá điều buộc ta tin vào kết luận ; nó chứng tỏ cho ta vì sao mệnh đề đang xét là đúng. Lập luận cũng khá đẹp và ngắn gọn– người ta không thể nghĩ được rằng còn có thể rút ngắn đáng kể được nữa. Nó cực kì tiết kiệm, không mang một điều gì thừa. Rõ ràng hai ví dụ cuối cùng mang lại niềm tin rằng có điều lớn hơn điều đã phát biểu cũng đúng, tức là phương pháp suy luận có thể sẵn sàng đem áp dụng để chứng minh những khẳng định liên quan khác. Thực vậy, suy luận của Gauss, thay đổi đi đôi chút, nay là phương thức mẫu mực để tính tổng một cấp số cộng tùy ý.

Như chúng tôi đã nói, tất cả các suy luận trên cho ta thấu hiểu cấu trúc thực của hệ thống toán học của chúng ta ; và tôi giữ ý kiến rằng động cơ mạnh mẽ nhất của chúng ta khi làm toán là ước muốn vươn tới những thấu hiểu như thế. Đó thường là một cuộc đấu tranh căng thẳng, đòi hỏi phải làm như vậy ; thường ta tưởng thất bại nhưng rồi trong một chớp cao hứng chói lòa sau nhiều giờ và có thể nhiều ngày cố gắng–mà bề ngoài đường như không hiệu quả, thực chất của bài toán phơi bầy ra rõ ràng và tất cả trở nên sáng sủa một cách thần kì.

Ở đây tôi muốn nói đến một điều về những thấu hiểu thực chất như thế trong toán học, một điều tuy về bản chất có tính thực nghiệm và thuần túy kinh nghiệm nhưng theo tôi có tầm quan trọng cơ bản và là một lí do chính yếu để chọn việc nghiên cứu toán học làm hoạt động chính của đời mình. Tôi giữ ý kiến rằng sự háo hức ta có được từ các tia sáng thấu đáo hiếm hoi như thế không phụ thuộc vào việc ta có phải là nguồn gốc của ý tưởng đó hay không– tái phát minh là một sự từng trải có thể sánh với sự háo hức trong phát minh đầu tiên, kinh nghiệm phát minh của người ta trong các khoa học khác, chấp nhận phát minh của người khác và tiến hành lại, làm cho ta thấy rằng về khía cạnh này, các nhà toán học là rất đặc biệt. Báo cáo trung thực của Giêm Oátsơn (James Watson) trong cuốn "xoắn kép" về việc phát hiện bản chất của DNA của ông cùng Franxi Crich (Francis Crick) làm người ta nghĩ rằng động cơ mạnh mẽ nhất để những nhà khoa học ganh đua nhau giải bài toán đố này chính là việc "tìm thấy đầu tiên". Thực vậy, Oátsơn kể lại rằng việc biết Linux Paulinh (linus Pauling) đang tấn công mạnh mẽ vấn đề này đã kích thích Crich và ông ta đến thế nào. Tôi cũng nhớ lại buổi trao đổi với nhà sinh vật học xuất sắc Pête Mêđaoa (Peter Medawar), người được giải thưởng Noben, ông ta đã nói rằng theo kinh nghiệm của ông ta, sự háo hức của phát minh đầu tiên trong khoa học là không thể truyền cảm được và việc thấu hiểu công trình của người khác không thể so sánh với điều kích thích thực hiện một tiến bộ có ý nghĩa trong nghiên cứu của mình. Theo kinh nghiệm của tôi, trong toán học, sự háo hức thấu hiểu, hiểu một cách thực sự, có thể sánh với sự háo hức của phát minh đầu tiên ; và cũng theo kinh nghiệm của tôi, các nhà toán học có niềm vui chính đáng trong thắng lợi của những người khác và, theo một nghĩa nào đấy, trong việc thực hiện lại phát minh, việc làm chủ các điều rối ren trong công trình của người khác. Thực vậy, ta có thể nói rằng sự hiểu thực sự trong toán học là việc biến ý kiến và kĩ thuật thành của chính mình, tất nhiên không phải với nghĩa thô thiển là chiếm đoạt các ý tưởng đó mà với ý nghĩa sâu sắc hơn là khả năng dùng chúng để làm sáng tỏ và đẩy mạnh suy tưởng của chính mình.

Hãy cho phép tôi đưa ra một ví dụ về một ý tưởng toán học thật là đẹp đẽ của nhà toán học Pháp Đêdirê Anđrê (Désiré André) trong công trình đã công bố cách đây khoảng 100 năm. Thời bấy giờ đang lưu truyền cái gọi là bài toán bầu cử mà có thể mô tả như sau. Trong một cuộc bầu cử có hai ứng cử viên X và Y, giả sử rằng X thắng và thu được a phiếu, Y thu được b phiếu. Ta muốn biết xác suất của sự kiện là suốt trong quá trình kiểm phiếu, X luôn thắng Y. Thực ra, khi Anđrê công bố công trình của mình với nhan đề "Lời giải trực tiếp một bài toán đã được M.Bectrăng (Becrtrand) giải" thì người ta hiểu rằng Bectrăng đã giải bài toán này rồi nhưng điều tôi muốn nhấn mạnh là sự đẹp đẽ của lời giải của Anđrê và sự thấu hiểu thực chất mà lời giải đó đã phơi bầy cho ta thấy.

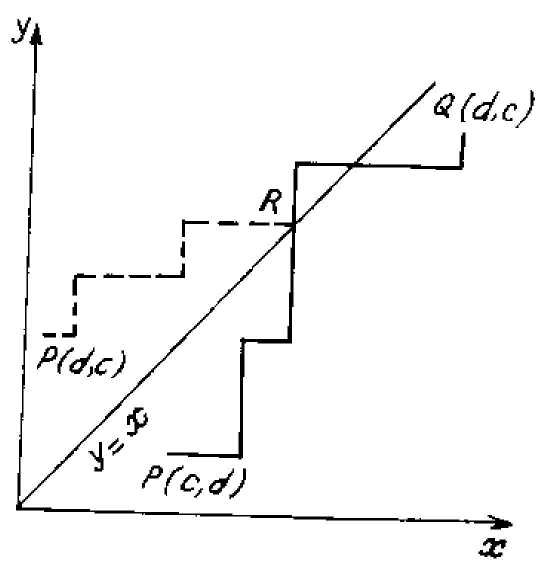
Anđrê diễn dịch bài toán trên thành một bài toán về lưới nguyên trong mặt phẳng tọa độ. Nếu P và Q là hai điểm có tọa độ nguyên thì một con đường từ P đến Q là một dãy điểm P_o, P_1,... P_n sao cho $P_o = P$, $P_n = Q$ và P_{i+1} có được từ P_i bằng cách bước lên phía trên hay sang bên phải một đơn vị. Dễ thấy rằng số các con đường từ (c, d) đến (a, b) bằng hệ số nhị thức $\binom{a+b-c-d}{a-c}^*$ (tất nhiên là để có con đường từ (c, d) đến (a,b) thì phải có $c \leq a$ và $d \leq b$).

Khi đó bài toán bầu cử nêu trên có thể diễn dịch thành bài toán đếm các con đường từ $(0,0)$ đến (a,b) mà luôn nằm dưới đường thẳng $y = x$ trừ ở điểm xuất phát. Vậy ta xét bài toán tổng quát hơn như sau : giả sử rằng (c, d) và (a, b) nằm dưới đường thẳng $y = x$ tức là $c > d$, $a > b$ và ta muốn đếm số các con đường từ (c, d) đến $(a, b)^*$ nằm dưới đường thẳng $y = x$. Ta hãy gọi con đường như thế là con đường "tốt" và con đường nối (c, d) với (a, b) mà gặp đường thẳng $y = x$ là một con đường "xấu". Gọi các điểm đầu mút là P và Q.

(*) $\binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-m)!m!}$ – chú thích của tòa soạn.

Ta muốn, như tôi đã nói, đếm số các con đường tốt. Cách tiếp cận đẹp đầu tiên của Andrê là thay cho việc đếm các con đường tốt là đếm số các con đường xấu. Bây giờ một con đường xấu ắt phải gặp đường thẳng $y = x$ lần đầu tiên tại điểm R nào đó. Nếu ta lấy đối xứng của phần PR của con đường xấu của ta qua đường thẳng $y = x$ thì ta được con đường $\overline{P}R$, $\overline{P}$ là điểm (d, c). Kết hợp $\overline{P}R$ với phần RQ của con đường xấu ban đầu của ta thì được con đường $\overline{P}Q$ từ (d, c) đến (a, b). Khi đó dễ thấy rằng phép lấy đối xứng như thế thiết lập một sự tương ứng 1 : 1 giữa các con đường xấu từ (c, d) đến (a, b) với các con đường từ (d, c) đến (a, b) miễn là mỗi con đường từ (d, c) đến (a, b) phải cắt đường thẳng $y = x$. Như vậy số các con đường xấu từ (c, d) đến (a, b) bằng hệ số nhị thức $\binom{a+b-c-d}{a-d}$ nên số các con đường tốt từ (c, d) đến (a, b) là

$$\binom{a+b-c-d}{a-c} - \binom{a+b-c-d}{a-d}$$



PHƯƠNG PHÁP ĐỐI XỨNG CỦA ANDRÊ

Trở lại bài toán bầu cử của ta, bây giờ chỉ cần đếm số con đường tốt từ $(1, 0)$ đến (a, b) mà theo công thức trên của chúng ta, nó bằng $\frac{(a+b-1)!}{a!\,b!}(a-b)$ nên chia số đó cho $\binom{a+b}{a}$ ta được xác suất cần tìm là $\frac{a-b}{a+b}$.

Trước khi tiếp tục, ta hãy chú ý đến một yếu tố quan trọng trong lời giải bài toán bầu cử, nó đã góp phần to lớn cho nguồn vui của toán học, đó là yếu tố bất ngờ xét về mặt tài tình của suy luận thì công thức cho xác suất $\frac{a-b}{a+b}$, là cực kì đơn giản ; hơn thế, nó chứng tỏ xác suất để X luôn thắng Y trong suốt cuộc kiểm phiếu chỉ phụ thuộc vào tỉ số phiếu bầu cho họ chứ không phụ thuộc vào chính các số đó. Dầu sao đối với tôi, xét một cách trực giác điều đó không hiển nhiên. Tôi nghĩ rằng điều bất ngờ đó cũng có trong phương pháp khôn khéo cộng các số từ 1 đến 100 của Gauxơ một bài tập khủng khiếp được đưa một cách bất ngờ về một phép nhân đơn giản 50 × 101. Một trong nhiều ưu điểm của việc giảng dạy đúng đắn hình học là cung cấp yếu tố phát hiện đột ngột đó để người ta cảm thấy thấu hiểu thực chất một cách bất ngờ. Tiếc thay, hình học ngày nay thường không giữ được vai trò chính đáng của nó trong chương trình ; nó hoặc bị lãng quên thảm hại hoặc chỉ được coi như một chiếc xe để chuyên chở ý tưởng của một chứng minh lôgic với mệnh đề cần chứng minh hoặc quá chán, hoặc quá rõ ràng, hoặc cả hai ! Nhưng đó là một câu chuyện khác, mặc dầu có thể là một câu chuyện quan trọng sống động, và tôi phải trở lại đề tài của tôi.

Chúng ta bảo rằng lập luận tiếp sau thủ thuật lấy đối xứng là dễ, là đúng. Nhưng sự thấu hiểu thực chất, trước hết, chính là chuyển bài toán thành một bài toán tổ hợp về các con đường trên lưới tọa độ nguyên và rồi giải bài toán này bằng cách dựa vào phương pháp đối xứng. Thực đáng tiếc là chúng ta không có thời gian để trình bày, phương pháp dài, khó mà lúc đầu người ta đã dùng để giải bài toán nhằm làm sáng tỏ hơn các ưu điểm đáng kinh ngạc của phương pháp tốt hơn đã thay thế cho phương pháp ban đầu ! Lúc đó tôi tin rằng các bạn học sinh sẽ đánh giá, so sánh chúng không khó khăn gì.

Tôi hi vọng rằng bốn ví dụ mà tôi đã nêu ra về lập luận toán học tuyệt vời cung cấp cho thính giả niềm vui thích, thật ra là một thỏa mãn mĩ cảm ; tôi mong rằng bất kì học sinh giỏi toán nào, với vốn toán học cần thiết, có thể đánh giá được, ít nhất ở mức độ trực giác cái đẹp và chất lượng của chúng ! Thực vậy, chúng có thể dùng để phân biệt những học sinh nên tiếp tục học toán với những học sinh nên được khuyên chuyển sang những mục tiêu có lợi hơn nhưng ít được phần thưởng hơn. Những người Hi Lạp thuở xưa đã hiểu cả sự quan trọng lẫn sự đẹp đẽ của toán học, nhưng ít người cầm quyền, quan chức, làm chính trị ngày nay hiểu được sự hoàn hảo đó trong bản chất toán học. Dù sao, chúng ta hãy vui mừng nếu những nhân vật lỗi lạc, những kĩ nghệ gia lớn khuyến khích chúng ta làm toán ; nhưng chúng ta hãy đừng nhận từ họ việc chọn lựa bài toán không chính xác và bài toán hầu như chắc chắn không giải được, cũng như không nhận từ họ sự biện hộ để chúng ta làm toán. Do suy nghĩ đến những thu hoạch vật chất, họ không hiểu tí gì về niềm vui của toán học. Và tôi xin kết thúc bằng cách thêm rằng : Hãy để cho những người có ý định rời bỏ toán học vì những mục tiêu khác tự vấn mình xem họ còn tìm thấy ở đâu một nguồn vui tương xứng.

MỘT KIỂU ĐỀ TOÁN MỚI

NGUYỄN CẢNH TOÀN

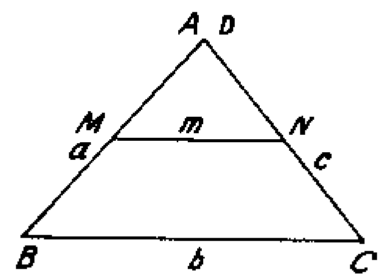
Các bạn thân mến !

Từ trước đến nay, các bạn đã quá quen với những đề toán trong đó bạn phải chứng minh tính chất này hay tính chất nọ. Những đề toán khó là những đề mà ở đó mối liên hệ lôgic giữa giả thiết và kết luận rất khó thấy. Làm được một bài toán khó rất hứng thú, nhưng dù sao bạn vẫn chưa phải là người phát minh ra cái mới (dù chỉ là mới đối với bạn thôi) vì tính chất mà bạn phải chứng minh lại do tác giả đề toán nêu ra còn bạn thì hoàn toàn không biết người ta đã làm cách gì mà phát hiện ra tính chất đó. Vì vậy, dù có làm đến hàng trăm, hàng nghìn đề toán cực khó theo kiểu trên, bạn cũng chỉ mới được rèn luyện khả năng "giải quyết vấn đề" (do người khác nêu ra), chưa được rèn luyện khả năng "phát hiện vấn đề". Muốn trở thành nhà khoa học nói chung, nhà toán học nói riêng, phải giỏi cả "phát hiện vấn đề" và "giải quyết vấn đề". Sau đây tôi sẽ nêu ra một số ví dụ cụ thể về một kiểu đề toán mới trong đó bạn phải tìm tòi mới biết được phải chứng minh cái gì. Những đề toán kiểu này sẽ rèn cho các bạn khả năng "phát hiện vấn đề".

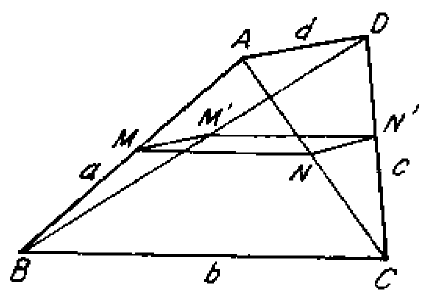
Sau vài ví dụ chúng ta sẽ cùng nhau tổng kết về quy luật "phát minh toán học".

Đề toán 1 :

Hãy coi tam giác là một tứ giác đặc biệt, có một cạnh triệt tiêu rồi dùng suy luận lôgic chặt chẽ để từ tính chất sau đây của tam giác : "đoạn thẳng nối trung điểm của hai cạnh bằng một nửa cạnh thứ ba", dự đoán sự mở rộng của tính chất đó ra cho tứ giác. Sau khi dự đoán xong hãy chứng minh xem tứ giác có tính chất đó không.



Hình 1



Hình 2

Lời giải :

Ta coi tam giác ABC ở h.1 là giới hạn của tứ giác $ABCD$ ở h.2 khi D đến trùng với A (làm cho d triệt tiêu). Ở hình 1.ta có :

$$m = b/2 \qquad (1)$$

ta có dự đoán hệ thức mở rộng của (1) khi D khác A, tức $d \neq 0$.

Khi D đến trùng với A thì M' đến trùng với M và N' với N (M, N, M', N' theo thứ tự là trung điểm của AB, AC, DB, DC). Vậy đoạn MN trong h.1 có thể là giới hạn của MN, của $M'N$ của MN' của $M'N'$ ở h.2. Nhưng rõ ràng là $MN = M'N' = b/2$ (h.2) và có thể coi đây là sự mở rộng hệ thức (1) ; tuy vậy, sự mở rộng này chà có gì thú vị. Bởi vậy ta sẽ chú ý đến $MN' = m_1$ và $M'N = m_2$.

Vì ở h.1, $d = 0$, nên ta cố gắng làm xuất hiện d ở hệ thức (1) như sau :

$$m = (b \pm 0)/2 = (b \pm d)/2$$

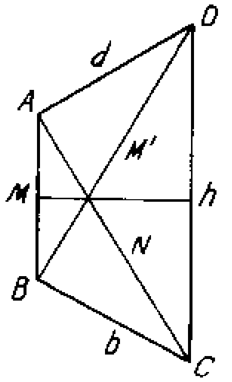
Ở h.2, nếu $ABCD$ là hình thang với đáy là AD, BC thì quả là :

$m_1 = (b + d)/2,$

$m_2 = (b - d)/2$

nhưng ta thấy ngay rằng nếu $ABCD$ là một hình thang cân có đáy là AB, CD thì :

$m_1 = MN' \neq (b + d)/2$ ($= b = d$) và $m_2 = M'N \neq (b-d)/2$ ($i = 0$) .



Hình 3

Vậy $m = (b \pm d)/2$ không thể là sự mở rộng của (1) .

Có người có thể nghĩ rằng ; biết đâu d chẳng tham gia vào công thức mở rộng với một hệ số K nào đó, nghĩa là :

$$m = (b + Kd)/2 \qquad (2)$$

nhưng nếu hệ thức (2) này quả là đúng, thì khi đem áp dụng nó vào cho hình thang mà đáy là AD và BC ta sẽ thấy rằng K bắt buộc phải là $\pm$ 1.

Như vậy công thức mở rộng của (1) không thể có dạng (2). Ta đi tìm theo hướng khác. Ở (1) và (2), các đoạn thẳng m, b, d đều tham gia ở bậc nhất. Ta nghĩ tới bậc hai vì trong các hệ thức lượng quen thuộc, phần lớn các đoạn thẳng đều tham gia vào những số hạng bậc 2.

Bởi vậy, ta sẽ viết (1) dưới dạng bậc hai :

$$m^2 = b^2/4$$

Vì ở h.1, $d = 0$, nên ta dễ có khuynh hướng nghĩ rằng sẽ có hệ thức :

$$m^2 = (b^2 \pm d^2)/4$$

Nhưng $m^2 = (b^2 - d^2)/4$ sẽ dẫn đến $m = (b \pm d)/2$, điều mà ta đã thấy là không được, còn nếu $m^2 = (b^2 + d^2)/4$ thì đem áp dụng vào hình vuông (ở đó $m = b = d$) thì thấy không đúng.

Vậy hướng mở rộng thứ hai này cũng hế tắc, còn hướng nào nữa ? Khi $d = 0$ thì $DB = AB$, $DC = AC$, bốn đoạn thẳng này khó lòng mà không tham gia vào hệ thức tổng quát vì, trừ những trường hợp đặc biệt, khó mà có một hệ thức chỉ giữa m và b, d.. Dĩ nhiên, do tính thuần nhất của các hệ thức lượng, bốn đoạn trên sẽ tham gia ở bậc 2. Vì vậy, ta nghĩ đến các hiệu $\overline{DB}^2 - \overline{AB}^2$ $\overline{DC}^2 - \overline{AC}^2$ là những biểu thức cũng sẽ triệt tiêu khi $d = 0$. Bởi vậy, ta nghĩ đến hai hệ thức theo thứ tự có dạng :

$$m_1^2 = (b^2 + K_1d^2)/4 + l_1(\overline{DB}^2 - \overline{AB}^2) + l'_1(\overline{DC}^2 - \overline{AC}^2) \qquad (3)$$

$$m_2^2 = (b^2 + K_2d^2)/4 + l_2(\overline{DB}^2 - \overline{AB}^2) + l'_2(\overline{DC}^2 - \overline{AC}^2) \qquad (4)$$

cả hai đều trở thành $m^2 = b^2/4$ khi D trùng với A.

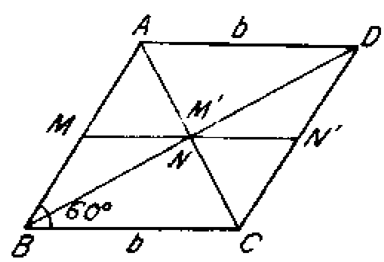
Ta thử áp dụng (3) và (4) vào hình vuông ($b = d = m_1 = AB = DC$, $m_2 = 0$; $DB = AC = b\sqrt{2}$) ta được :

$$b^2 = (b^2 + K_1b^2)/4 + l_1(2b^2 - b^2) + l'_1(b^2 - 2b^2)$$

$$= b^2((1 + K_1)/4 + l_1 - l'_1)$$

và $\quad 0 = b^2((1 + K_2)/4 + l_2 - l'_2)$

Lại thử áp dụng vào hình thoi có cạnh là b và có một góc 60° (h.4)



Hình 4

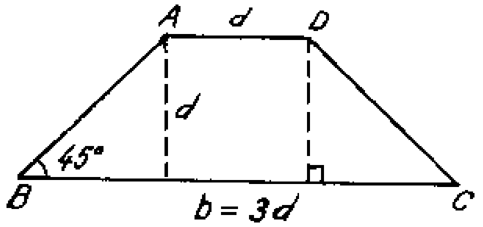
$$b^2 = (b^2 - K_1b^2)/4 + l_1(3b^2 - b^2) + l'_1(b^2 - b^2) ;$$

và $0 = b^2 + K_2b^2)/4 + l_2(3b^2 - b^2) + l'_2(b^2 - b^2)$

Cuối cùng ta thử áp dụng vào một hình thang cân có góc ở đáy bằng 45° và chiều cao hằng đáy trên (h.5). ta được ($m_1 = 2d$, $m_2 = d$) :

$$4d^2 = (9d^2 + K_1d^2)/4 + l_1(5d^2 - 2d^2) + + l'_1(2d^2 - 5d^2)$$

và $d^2 = (9d^2 + K_2d^2)/4 + l_2(5d^2 - 2d^2) + + l'_2(2d^2 - 5d^2)$



Hình 5

Từ trên, chúng ta rút ra hai hệ phương trình để tính K_1, l_1, l'_2 và K_2, l_2, l'_2 :

$$\begin{cases} 1 = (1 + K_1)/4 + l_1 - l'_1 \\ 1 = (1 + K_1)/4 + 2l_1 \\ 4 = (9 + K_1)/4 + 3l_1 - 3l'_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = (1 + K_2)/4 + l_2 - l'_2 \\ 0 = (1 + K_2)/4 + 2l_2 \\ 1 = (9 + K_2)/4 + 3l_2 - 3l'_2 \end{cases}$$

Giải hai hệ phương trình này, ta được :

$l_1 = 1/4$, $\quad l_1 = -1/4$, $\quad K_1 = 1$

$l_2 = 4/4,$ $\quad l'_2 = 1/4$, $\quad K_2 = 1$

Như vậy ta dự đoán có hai hệ thức, mở rộng hệ thức (1)

$$4m_1^2 = (b^2 + d^{2)} - (a^2 + c^2) + (e^2 + f^2) \qquad (5)$$

$$4m_2^2 = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2) - (e^2 + f^2) \qquad (6)$$

Ta có thể phát biểu hai hệ thức đó như sau :

– Trong một tứ giác lồi, bốn lần bình phương đoạn thẳng nối trung điểm của hai cạnh đối diện nào đó bằng tổng bình phương hai đường chéo và hai cạnh đối diện còn lại, trừ đi tổng bình phương hai cạnh đối diện đã cho.

– Trong một tứ giác lồi, bốn lần bình phương đoạn thẳng nối trung điểm của hai đường chéo bằng tổng bình phương bốn cạnh trừ đi tổng bình phương hai đường chéo.

Chứng minh : $MM'N'N$ là một hình bình hành vì $MM'//NN'$ (cùng // AD) và $MN//M'N'$/ (cùng // BC. Trong hình bình hành đó $MM' = NN' = d/2$, $MN = M'N' = b/2$ $MN' = m_1$; $M'N = m_2$.

Áp dụng định lí :"Trong một hình bình hành, tổng bình phương bốn cạnh bằng tổng bình phương hai đường chéo, ta có :

$$m_1^2 + m_2^2 = (b^2 + d^{2)}/2 \qquad (7)$$

Nếu lại xét thêm hai trung điểm P, Q của AD và BC (hình 2) và đặt $PQ = n$, thì xét thêm hai hình bình hành $PMQN$ và $PM'QN$, ta lại có :

$$n^2 + m_1^2 = (e^2 + f^2)/2$$

$$n^2 + m_2^2 = (a^2 + c^2)/2$$

Trừ vế với vế, ta được :

$$m_1^2 - m_2^2 = [(e^2 + f^2) - (a^2 + c^2)]/2 \qquad (8)$$

cộng vế với vế (7) và (8) ta được (5) và trừ vế với vế ta được (6). Vậy quả (5) và (6) là sự mở rộng của (1) như ta đã dự đoán.

Chú ý : Nếu ta xét tứ giác chéo $ADBC$ với hai đường chéo là AB và CD (h.2) thì (5) cũng có thể phát biểu : trong một tứ giác chéo, bốn lần bình phương đoạn thẳng nối trung điểm hai đường chéo bằng tổng bình phương bốn cạnh trừ đi tổng bình phương hai đường chéo. Cũng dễ thấy rằng : nếu là tứ giác lõm hay tứ giác ghềnh thì định lí sau đây đều đúng : Trong một tứ giác (lồi, lõm, chéo, ghềnh) 4 lần tổng bình phương đoạn thẳng nối trung điểm hai đường chéo bằng tổng bình phương bốn cạnh trừ đi tổng bình phương hai đường chéo.

Đề toán 2 :

Hãy mở rộng định lí : "Trong một tam giác ba trung tuyến đồng quy".

Lời giải :

Ở đây có ba khái niệm "tam giác", "trung tuyến" và "đồng quy" đều có thể mở rộng.

Tam giác có thể mở rộng ở trong mặt phẳng thành tứ giác (tam giác là một tứ giác đặc biệt có một cạnh bằng không), ngũ giác (tam giác là một ngũ giác có hai cạnh bằng không), lục giác.. tam giác cũng có thể mở rộng ra trong không gian thành tứ diện, tam diện.

Trung tuyến có thể mở rộng ra theo nhiều cách tùy theo ta hiểu "trung điểm của một cạnh là thế nào". Một cạnh BC với trung điểm O có thể hiểu theo nhiều cạnh, ví dụ : O là tâm của quỹ tích những điểm cách đều O một đoạn bằng $BC/2$ (trên đường thẳng BC, quỹ tích đó gồm hai điểm B và C), hoặc : O là trọng tâm của đoạn thẳng BC, hoặc O là trọng tâm của tập hợp hai điểm B, C hoặc O liên hợp điều hòa của điểm ở vô tận (trên đường thẳng BC) đối với hai điểm B, C.

Còn đồng quy thì có thể mở rộng như thế nào ?, "không đồng quy" là trái ngược với "đồng quy" nhưng đồng thời cũng là sự mở rộng của "đồng quy". Sao vậy ? vì ba đường thẳng không đồng quy trong mặt phẳng thì tạo nên một tam giác có diện tích S (ta coi là S trở nên vô tận khi hai trong ba đường song song với nhau). Khi S triệt tiêu thì ba đường đồng quy. Vậy "đồng quy" là trường hợp đặc biệt của "không đồng quy" khi $S = 0$.

Kết hợp các kiểu mở rộng khác nhau của ba khái niệm trên, ta thấy rằng định lí về ba trung tuyến đồng quy trong một tam giác có rất nhiều hướng để mở rộng. Sau đây cũng không thể nêu hết các hướng mở rộng đó vì quá dài, nếu bạn nào say sưa tìm tòi thì cứ cố nêu cho hết. Vì mục đích loại đề toán này là để rèn luyện khả năng "phát hiện vấn đề" là chính, đặt xuống hàng dưới việc rèn luyện khả năng "giải quyết vấn đề". Nên sau đây cũng chỉ hạn chế ở việc nêu lên các nghi vấn khoa học mà không chứng minh xem các nghi vấn đó đúng hay sai. Bạn nào say sưa tìm tòi sẽ tự mình làm việc đó.

Mở rộng tam giác thành đa giác : vì chỉ trong các đa giác có số cạnh lẻ mới có khái niệm "đỉnh và cạnh đối diện" và do đó mới có sự mở rộng khái niệm "trung tuyến" (đường nối một đỉnh với trung điểm của cạnh đối diện), nên ta có nghi vấn khoa học sau đây :

Trong một đa giác có số cạnh lẻ, các trung tuyến có đồng quy hay không ? Nếu không phải trong trường hợp nào cũng đồng quy hãy xét xem trong những trường hợp đặc biệt nào thì có sự đồng quy.

Mở rộng tam giác thành tam diện ở trong không gian, rồi từ đó mở rộng ra các đa diện có số mặt lẻ ở đây ta có các nghi vấn khoa học sau đây :

Trong một tam diện, ba mặt phẳng nối ba cạnh với phân giác của mặt đối diện có đồng quy hay không ? Mở rộng ra để xem xét vấn đề với các đa diện có số mặt lẻ.

Mở rộng tam giác thành tứ diện : theo ba cách đầu để hiểu trung điểm 0 của đoạn BC (đã nói ở trên), thì có thể có các nghi vấn khoa học sau đây :

a) Trong một tứ diện, các đường thẳng nối các đỉnh với tâm vòng tròn ngoại tiếp mặt đối diện có đồng quy hay không ?

b) Trong một tứ diện, các đường thẳng nối các đỉnh với trọng tâm các mặt đối diện có đồng quy hay không ?

c) Trong một tứ diện, các đường thẳng nối các đỉnh với trọng tâm của chu vi các mặt đối diện có đồng quy hay không ?

Xem các trung điểm của các cạnh là điểm liên hợp điều hòa của các điểm ở vô tận đối với hai đầu cạnh. Trong trường hợp này, trước hết hãy xét ba điểm ở vô tận trên ba đường thẳng chứa ba cạnh. Vì chúng đều ở vô tận nên chúng đều nằm trên bất cứ mặt phẳng nào song song với mặt phẳng tam giác. Cũng có thể coi chúng là cùng nằm trên giao tuyến của mặt phẳng tam giác với một mặt phẳng song song ; Cách nhìn này dẫn ta đến ý nghĩ rằng ba điểm đó là thẳng hàng... từ đó ta đi đến nghi vấn khoa học sau đây :

Cho một tam giác ABC với các cặp điểm D, D', E, E' và F, F' theo thứ tự trên ba đường thẳng BC, CA, AB và chia điều hòa các cặp điểm B, C ; C, A và A, B. Phải chăng hễ D', E', F' thẳng hàng thì AD, BE, CF đồng quy. Phải chăng điều ngược lại cũng đúng ; nghĩa là nêu AD, BE, CF đồng quy thì D', E', F' thẳng hàng :

Mở rộng khái niệm đồng quy. Trong một tam giác ABC với ba trung tuyến AD, BE, CF thì ta có :

$$\overline{DB}/\overline{DC} = \overline{EC}/\overline{EA} = \overline{FA}/\overline{FB} = -1$$

và ba trung tuyến tạo nên một tam giác có diện tích bằng không.

Từ đó ta có thể mở rộng định lí về ba trung tuyến đồng quy theo hai bước như sau :

Bước thứ nhất : mở rộng hạn chế

Cho ba điểm D, E, F theo thứ tự trên ba đường thẳng BC, CA, AB , chứa ba cạnh của một tam giác ABC, sao cho :

$\dfrac{\overline{DB}}{\overline{DC}} = \dfrac{\overline{EC}}{\overline{EA}} = \dfrac{\overline{FA}}{\overline{FB}} = K$ (K là một số đại số cho trước).

Hãy tính diện tích $S(K)$ của tam giác tạo nên bởi ba đường thẳng AD, BE, CF theo K và theo diện tích của tam giác ABC, thử nghiệm rằng $S(-1) + 0$.

Bước thứ hai : mở rộng như trên nhưng với $\dfrac{\overline{DB}}{\overline{DC}} = k_1$; $\dfrac{\overline{EC}}{\overline{EA}} = k_2$

$\dfrac{\overline{FA}}{\overline{FB}} = k_3$; k_1, k_2, k_3 là ba số đại số cho trước. Sau khi tìm được hàm $S(k_1, k_2, k_3)$ hãy tính cụ thể k_1, k_2, k_3 trong trường hợp D, E, F là chân ba đường cao hay chân ba đường phân giác và thử nghiệm rằng trong các trường hợp đó thì $S(k_1, k_2, k_3) = 0$. Rõ ràng là từ một định lí rất quen thuộc ta đã lôi ra được hàng loạt nghi vấn khoa học, phát hiện ra hàng loạt vấn đề để nghiên cứu.

Đề toán III. Giả thiết rằng chưa biết biểu thức nghiệm của phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$. Hãy mày mò, dự đoán ra biểu thức đó bằng cách khái quát từ các trường hợp đặc biệt khi $a = 0$, khi $b = 0$ và khi $c = 0$.

Lời giải : Khi $a = 0$, phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có một nghiệm là $x = -c/b$

Khi $b = 0$, ta có hai nghiệm là $x_1 = \sqrt{-c/a}$, $x_2 = -\sqrt{-c/a}$ (nếu $-c/a < 0$ thì ta nói rằng ta có hai nghiệm ảo).

Khi $c = 0$, ta có hai nghiệm là $x_1 = 0$, $x_2 = -b/a$. Từ những biểu thức của nghiệm trong ba trường hợp đặc biệt ở trên, ta hãy thử mấy mò, dự đoán ra biểu thức của nghiệm trong trường hợp tổng quát.

Trước hết, căn cứ vào trường hợp $b = 0$, ta thấy rằng biểu thức tổng quát phải chứa căn bậc hai của một biểu thức hữu tỉ $f(a, b, c)$ nào đó của a, b, c và hai nghiệm khác nhau của phương trình sẽ ứng với hai dấu +, − đặt trước dấu căn ; ngoài căn bậc hai đó, biểu thức tổng quát còn phải chứa một biểu thức hữu tỉ thứ hai $g(a, b, c)$ vì, nếu không phương trình sẽ luôn luôn có hai nghiệm đối dấu. Vậy biểu thức tổng quát của các nghiệm có dạng :

$$x_1 = g(a, b, c) + \sqrt{f(a, b, c)} \ ;$$
$$x_2 = g(a, b, c) - \sqrt{(f(a, b, c)}$$

trong đó f và g là hai biểu thức hữu tỉ của a, b, c. Để xác định f và g, ta hãy vận dụng các biểu thức trên vào cho trường hợp $b = 0$; ta có ngay

$$g(a, 0, c) = 0 \qquad (1)$$
$$f(a, 0, c) = -c/a \qquad (2)$$

Sau đó ta lại áp dụng vào trường hợp $c = 0$; ta được hoặc :

$$g(a, b, 0) - \sqrt{f(a, b, 0)} = 0 \qquad (3)$$
$$g(a, b, 0) + \sqrt{f(a, b, 0)} = -b/a \qquad (4)$$

hoặc :

$$g(a, b, 0) - \sqrt{f(a, b, 0)} = -b/a \qquad (3')$$
$$g(a, b, 0) + \sqrt{f(a, b, 0)} = 0 \qquad (4')$$

Từ đó :

$$g(a, b, 0) = -b/2a \qquad (5)$$
$$f(a, b, 0) = [g(a, b, 0]^2 = b^2/4a^2 \qquad (6)$$

Tóm lại, ta có hệ :

$$g(a, 0, c) = 0 \qquad (1)$$
$$f(a, 0, c) = -c/a \qquad (2)$$
$$g(a, b, 0) = -b/2a \qquad (5)$$
$$f(a, b, 0) = b^2/4a^2 \qquad (6)$$

ta hãy xét biểu thức :

$$f(a, b, c) - f(a, 0, c) + f(a, b, 0) =$$
$$= -c/a + b^2/4a^2 = (b^2 - 4ac/4a^2$$

Thay b bằng 0, ta được :

$$f(a, 0, c) = f(a, 0, c) + f(a, 0, 0) =$$
$$= -c/a + 0 = -c/a.$$

Thay c bằng 0, ta được :

$$f(a, b, 0) = f(a, 0, 0) + f(a, b, 0) = 0 + b^2/4a^2$$

Vậy hàm $f(a, b, c)$ này thỏa mãn cả (2) và (6).

Cũng vậy hàm

$$g(a, b, c) = g(a, 0, c) + g(a, b, 0) = 0 - b/2a =$$
$$= -b/2a$$ thỏa mãn cả (1) và (5).

Vậy, có hi vọng rằng biểu thức

$$-b/2a \pm \sqrt{b_2 - 4ac}/2a$$

hay $(- \pm b\sqrt{b^2 - 4ac})/2a$

là biểu thức của nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$. Đến đây, ta có thể thử để thấy rằng đúng đó là hai nghiệm (một nghiệm ứng với dấu +, nghiệm kia ứng với dấu −) của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$. Ngoài ra cũng không còn biểu thức nào khác vì phương trình chỉ có hai nghiệm.

Cần chú ý thêm là ta đã không cần vận dụng đến trường hợp đặc biệt $a = 0$. Tuy nhiên, có thể thử nghiệm để thấy ngay rằng nếu $a = 0$ thì một trong hai nghiệm trên trở nên vô tận còn nghiệm thứ hai đúng là trở thành c/b.

Với ba đề toán như thế cũng đủ tạm kết luận rồi. Tôi nói "tạm" vì dù sao kết luận mà tôi sắp đưa ra cũng còn mang tính áp đặt, chưa hẳn bạn nào cũng đồng tình. Dù cho có mời các bạn đến một hội thảo khoa học để tranh luận thì cũng không hơn gì bao nhiêu vì ở các bạn còn cần thêm thực tiễn phát minh toán học làm cơ sở cho sự đồng tình. Hiện nay chắc bạn chưa có hoặc có rất ít thực tiễn và bởi vậy tôi cũng bị hạn chế, chưa thể nói nhiều hơn, sâu hơn, "tạm" là vì vậy.

Có bạn tưởng rằng phát minh toán học phải là cái gì ghê gớm lắm, phải tìm ra được cái gì thật mới toanh, còn những điều đề cập đến trong bài báo trước và ở đây thì quá xoàng về hai phương diện ; một mặt thì đó chỉ là những sự mở rộng, đâu có phải là phát minh, phát minh mới oai, chứ mở rộng thì xoàng, đã có cái gì đó rồi, nghĩ thêm chút ít thôi ; mặt khác, sự mở rộng đã đưa đến những điều có mới đối với một số người, nhưng là cũ kĩ đối với toán học.

Trước hết, xin nói ngay với các bạn rằng, không làm gì có cái "mới" tuyệt đối, cái mới không dính gì với cái cũ. Mọi phát minh khoa học, dù cho có độc đáo đến đâu, vĩ đại đến đâu, cũng đều bắt nguồn từ cái cũ, có kế thừa phần nào đó cái cũ, và bao giờ cũng là sự mở rộng cái cũ. Trong toán học đã từng có những phát minh rất độc đáo, rất cách mạng như sự phát minh ra số ảo, số phức, sự phát minh ra hình học phi Ơclit mà lúc mới đầu, nhiều người cho là quái đản, thì cuối cùng cũng đều là những sự mở rộng : số phức mở rộng số thực, hình học phi Ơclit mở rộng hình học Ơclit. Có thể nói một cách chắc chắn rằng mọi phát minh toán học đều là một sự mở rộng. Tập dượt mở rộng chính là tập dượt phát minh. Học sinh thì tập dượt còn nhà toán học thì mở rộng, phát minh thật sự. Mục đích có khác nhau, kết quả đưa đến, xét về mức độ mới mẻ và tầm quan trọng có khác nhau, nhưng những quy luật về phát minh, mở rộng thì vẫn là một. Ta hãy sơ bộ nêu lên những quy luật đó qua sự phân tích các đề toán I, II, III.

1) Cái mới (tức cái mở rộng) mà ta tìm kiếm bao giờ cũng có mặt trái ngược với cái cũ (tức cái đặc biệt) và có mặt thống nhất với cái cũ. Có cách nhìn cái cũ làm nổi lên mặt trái ngược, có cách nhìn cái cũ làm nổi lên mặt thống nhất. Như ở bài 1, cái cũ $m = b/2$ đã được lần lượt nhìn dưới góc độ $m = (b \pm 0)/2$ để hi vọng đi đến cái mới là $m = (b \pm d)/2$ nhưng thất bại, sau đó lại được nhìn dưới góc độ $m^2 = (b^2 \pm 0)/4$ để hi vọng đi đến cái mới là $m^2 = (b^2 \pm d^2)/4$ nhưng cũng thất bại nốt. Hai cách nhìn đó làm nổi lên mặt trái ngược giữa tam giác và tứ giác. Sau đó, ta lại phải tìm một cách nhìn mới bằng cách đưa vào các hiệu $\overline{DB}^2 - \overline{AB}^2$, $\overline{DC}^2 - \overline{AC}^2$ thì mới thành công và phát hiện ra cái mới, cũng chính là cái mở rộng, là hai hệ thức (5), (6)).

2) Một cái cũ có thể có nhiều cái mới tương ứng, nghĩa là có nhiều cách mở rộng, tìm được bao nhiêu cách nhìn cái cũ đưa đến sự thành công trong sự mở rộng thì sẽ tìm ra bấy nhiêu cách mở rộng, nghĩa là bấy nhiêu cái mới. Điều này đặc biệt rõ trong đề toán II, ở đó ta đã có nhiều cách nhìn về "tam giác", về "trung tuyến" về "đồng quy", đưa đến nhiều hướng mở rộng. Trong bài đó, ta không có thì giờ để xét xem hướng mở rộng nào sẽ đưa đến thành công nhưng nếu các bạn chịu khó xem xét thì sẽ thấy trong số các hướng đó có nhiều hướng thành công cho nên định lí nêu ra có nhiều định lí mở rộng.

3) Phải tập dượt nhìn một khái niệm toán học dưới nhiều góc độ khác nhau và nên cố gắng có những cách nhìn độc đáo. Ví dụ, nếu ta nhìn "đồng quy" là "một đường đi qua giao điểm của hai đường kia" hay "giao điểm của hai đường nào đó nằm trên đường thứ ba", thì quả là khó mà mở rộng định lí đã cho theo hướng mở rộng khái niệm "đồng quy". Nhưng ta đã có một cách nhìn độc đáo về "đồng quy" là tạo nên một tam giác có diện tích bằng không, và ta đã tìm ra con đường để mở rộng, con đường để đi đến cái mới. Trong toán học có nhiều phát minh khá quan trọng đã ra đời từ những cái "cũ rích" chỉ vì tác giả đã có một cách nhìn rất độc đáo về cái cũ rích đó. Ví dụ, cho p là một số nguyên tố thì $p + 1$ là gì ? Theo cách nhìn cổ điển thì $p + 1$ là số nguyên đứng liền sau p. Nhưng có người đã nhìn $p + 1$ là tổng các ước số của p và nhờ đó đã phát minh ra một định lí khá quen biết trong lí thuyết số.

4) Từ một trường hợp đặc biệt thường có nhiều hướng suy nghĩ để khái quát. Hướng nào là đúng, hướng nào là sai, làm sao để sớm biết. Qua các đề toán trên, ta thấy rõ cách làm là sau khi có một dự đoán nào đó về sự "mở rộng", hay áp dụng điều dự đoán đó vào một số trường hợp đặc biệt. Nếu dự đoán của ta là sai thì cái sai đó thường bộc lộ ra ngay, vì như ở đề toán 1, khi ta dự đoán sự mở rộng của $m = b/2$ là $m = (b \pm d)/2$ hay $m = (b^2 \pm d^2)/4$ thì ta đã thấy ngay cái sai khi thử vận dụng vào một số trường hợp đặc biệt. Nhờ phát hiện sớm cái sai mà ta khỏi mất thì giờ đeo đuổi điều dự đoán. Nếu dự đoán của chúng ta là đúng hướng thì nói chung trong dự đoán vẫn còn một số điều chưa rõ, chẳng hạn như có một vài hệ số nào đó chưa xác định. Trong trường hợp này, việc vận dụng điều dự đoán vào một số trường hợp đặc biệt giúp ta sớm xác định những cái gì chưa rõ. Trong đề toán I, chính nhờ cách này mà ta xác định được các hệ số K_1, l_1, l'_1, K_2, l_2, l'_2. Tuy nhiên dù đã xác định được những cái chưa rõ thì kết quả vẫn chỉ là một dự đoán và sau đó cần phải chứng minh rằng điều dự đoán đó quả là đúng.

Tuy là "tạm", nhưng chắc các bạn cũng thấy được rằng phát minh toán học không phải là một cái gì bí hiểm, chỉ những người may mắn có một năng khiếu đặc biệt mới làm được việc đó, mà là một việc tuy không dễ dàng, đơn giản, nhưng cũng có quy luật của nó, nhờ đó có thể có bài bản và có thể rèn luyện được.

SỐ VÀ LỆNH

NGUYỄN CẢNH TOÀN

Các số thông thường (số thực) còn có gì đáng suy nghĩ nữa nhỉ ? Nhưng chỉ việc đổi cách nhìn thì lại lắm điều mới xuất hiện, ít ra cũng là mới đối với những người chỉ có kiến thức toán học phổ thông. Ta hãy lấy một phép nhân hai số thực, chẳng hạn 3.4. Ta có thể coi "3" là một lệnh và "4" là vật chịu lệnh : lệnh "3" tác dụng lên vật "4" làm cho vật này trở thành vật "12". "Lệnh" và "Vật" ở đây đều là số thực.

Nếu ta thực hiện liên tiếp lệnh "3" rồi lệnh "5" lên vật "4", cụ thể là : 5.(3.4), thì ta được vật "60". Ta cũng được kết quả đó, nếu ta chỉ thực hiện có một lệnh duy nhất là "15" lên vật "4". Như thế người ta nói rằng lệnh "15" là tích của hai lệnh "3" và "5" xét theo thứ tự đó (ở đây thứ tự không quan trọng nhưng sau đây, khi mở rộng khái niệm "lệnh", chúng ta sẽ thấy rằng thứ tự này là quan trọng). Một cách tổng quát, ta nói rằng tích của hai "lệnh" (lấy theo một thứ tự nào đó) là một "lệnh" duy nhất có tác dụng lên trên mỗi "vật" giống như tác dụng của việc thực hiện liên tiếp hai "lệnh" đã cho, (theo thứ tự đã cho) lên cùng "vật" đó.

Rõ ràng cách nhìn mới này cho phép ta mở rộng các "lệnh" và các "vật" ra ngoài phạm vi các số thực. Nói chính xác hơn thì ở đây có "lệnh" L, "vật chịu lệnh" V và "Kết quả sau khi lệnh đã thi hành" Q, tất cả đều là số thực. Sau đây, khi mở rộng, có cái không còn là số thực nữa. Ta hãy đi từng bước :

Bước thứ nhất : V và Q là những cặp số thực sắp thứ tự còn L vẫn là số thực. Ta quy ước rằng, "lệnh" c tác động lên "vật" (a, b) với a, b, c là những số thực thì cho ta "vật" (ca, cb) là cặp số thực ca và cb.

Bước thứ hai : L và V đều là cặp số thực sắp thứ tự, còn Q là số thực.

Ta quy ước rằng "lệnh" (p, q) tác động lên "vật" (a, b) thì cho kết quả là số thực $pa + qb$.

Bước thứ ba : L, V, Q đều là cặp số thực.

Ta quy ước rằng "lệnh" (p, q) tác động lên "vật" (a, b) thì cho kết quả là cặp số thực (pa, qb).

Bước thứ tư : L là hai cặp số thực sắp thành một bảng gồm một cặp ở trên và một cặp ở dưới, V là một cặp số thực và Q cũng là một cặp số thực.

Ta quy ước rằng "lệnh" $\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ tác động lên "vật" (a,b) thì cho kết quả là cặp số thực $(pa + pb,\ ra + sb)$.

Ta sẽ viết lại bốn quy ước ở bốn bước nói trên như sau :

$$c.\ (a,b) = (ca,\ cb) \tag{1}$$

$$(p,q)\ .\ (a,b) = pa + qb \tag{2}$$

$$(p,q)\ .\ (a,b) = (pa,\ qb) \tag{3}$$

$$\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} . (a\ ,b) = (pa + qb\ ; ra + sb) \tag{4}$$

Đến đây, chắc bạn đã háo hức muốn mở rộng đi xa hơn nữa. Nhưng thôi, ta hãy tạm dừng ở bước thứ tư để đi sâu cái đã. Ta chú ý rằng (4) thực chất là áp dụng hai lần (2), lần thứ nhất áp dụng "lệnh" (p,q) vào "vật" (a,b) để có $pa + qb$, lần thứ hai áp dụng "lệnh" $(r,\ s)$ vào "vật" $(a,\ b)$ để có $ra+sb$.

Ta lại chú ý rằng, nếu trong (4), "lệnh" $\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ có dạng $\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$ thì kết quả ở vế sau của (4) sẽ giống y như kết quả ở vế sau của (1) : $\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} . (a\ ,b) = (ca\ ,cb)$.

Vậy hai "lệnh" c và $\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$ có thể coi như là một. Đặc biệt hai "lệnh" 1 và $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ đều là lệnh "để nguyên" và "hai lệnh" 0 và $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ đều là lệnh "triệt tiêu" vì $1.(a,b) =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . (a\ ,b) = (a\ ,b)$$

$$0\ .\ (a\ ,b) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} . (a\ ,b) = (0\ ,0)$$

Ta cũng chú ý rằng, nếu trong (4) "lệnh" $\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ có dạng $\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}$ thì kết quả ở vế sau của (4) sẽ giống như kết quả ở vế sau của (3).

Tóm lại, mở rộng như ở (4) là đã bao trùm các mở rộng ở (1) và (3) và là việc thực hiện hai lần mở rộng ở (2). Cho nên ta tập trung nghiên cứu mở rộng (4) và ta thấy ngay nhiều điều mới, có vẻ kì lạ nữa, xuất hiện

Lũy linh : Ta thử xét lệnh $\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Đem α tác động vào một cặp (a, b) nào đó, theo (4) ta có cặp $(b,0)$: tiếp theo đó ta lại cho α tác động lần nữa vào cặp $(b, 0)$; cuối cùng ta được cặp (0,0). Như vậy α^2 tác động vào cặp (a, b) giống y như lệnh "0". Vậy ta có thể viết :

$\alpha^2 = 0$ (nhưng $\alpha \neq 0$, vì tác động của lệnh α khác tác động của lệnh 0).

Từ đó suy ra : $\alpha^3 = \alpha^2.\alpha = 0\ \alpha = 0$ rồi dần dần suy ra :

$\alpha^n = 0$ với mọi số tự nhiên n.

Ta gặp một sự kiện mới lạ : một phần tử $\alpha \neq 0$ nhưng mọi lũy thừa của nó đều bằng không. Một phần tử như vậy gọi là một phần tử "lũy linh".

Lũy đẳng. Ta thử xét lệnh $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Đem β tác động vào một cặp (a,b) nào đó, theo (4) ta có cặp $(a,0)$; tiếp tục tác động β vào cặp $(a,0)$ ta vẫn được cặp $(a,0)$. Vậy β^2 cũng tác động lên cặp (a,b) giống như β, tức là : $\beta^2 = \beta$

Từ đó $\beta^3 = \beta^2.\beta = \beta.\beta = \beta$

rồi suy ra $\beta^n = \beta$ với mọi số tự nhiên n

Ta gặp một sự kiện mới lạ khác : một phần tử β khác 1 và khác 0 mà mọi lũy thừa của nó đều bằng nó. Một phần tử như vậy gọi là một phần tử "*lũy đẳng*".

Căn bậc hai của −1. Ta thử xét lệnh $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Đem i tác động vào một cặp (a, b) nào đó, theo (4), ta có cặp $(-b,a)$; tiếp tục tác động i vào cặp $(-b,a)$, ta được cặp $(-a, -b)$. Vậy tác động của i^2 giống y hệt như tác động của lệnh "−1". Vậy $i^2 = -1$. Dĩ nhiên $-i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ cũng có bình phương bằng −1. Dễ hiểu làm sao. Thế mà ngày xưa người ta không hiểu nổi và gọi i là số ngu ngốc đấy !

THẬT VÀ GIẢ ƠCLIT

NGUYỄN CẢNH TOÀN

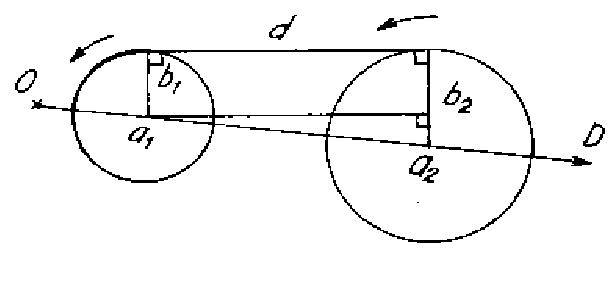
Tiếp theo câu chuyện bắt đầu ở báo Toán học và Tuổi trẻ số 130 (tháng 2/1983), tôi nhớ lại rằng, hồi học phổ thông, khi tôi nêu thắc mắc : "tại sao lại là $a^2 = b^2 + c^2$ (định lí Pitago) mà không là $a^2 = b^2 - c^2$? thì có bạn cùng lớp đã cho tôi là "điên" : "Cậu điên hay sao đấy". Thì cạnh huyền a lớn hơn từng cạnh góc vuông nên phải là + chứ − sao được. Hồi đó tôi không đủ lí lẽ để cãi lại bạn tôi nhưng vẫn mơ hồ cảm thấy rằng thắc mắc của mình không phải là hoàn toàn vô căn cứ. Nhưng trình độ phổ thông của tôi lúc đó không cho phép tôi đi xa hơn được chút nào theo hướng này, khác với điều đã xảy ra khi tôi thắc mắc tại sao lại là số mũ 2 ở a, b, c. Mãi đến về sau, khi đã có trình độ khá cao, tôi mới vỡ lẽ ra rằng ở đời này vẫn có thứ hình học trong đó định lí Pitago được diễn tả bằng công thức $a^2 = b^2 - c^2$, trong đó a là cạnh huyền. Và hôm nay, tôi muốn giới thiệu với các bạn thứ hình học đó chỉ với kiến thức phổ thông thôi. Dùng một hệ tọa độ Đêcac vuông góc ta thiết lập được một song ánh (tức là một sự tương ứng một đối một) giữa tập hợp các điểm trong mặt phẳng và tập hợp các cặp số thực sắp thứ tự : ứng với mỗi điểm ta có cặp số thực duy nhất trong đó số đầu là hoành độ và số thứ hai là tung độ của điểm đã cho : ngược lại, ứng với mỗi cặp số thực sắp thứ tự (a, b) thì có một điểm duy nhất có hoành độ bằng a và tung độ bằng b. Ta cũng thiết lập được một song ánh như vậy giữa tập hợp tất cả các vòng tròn định hướng có tâm trên một đường thẳng cho trước D và tập hợp các cặp số thực sắp thứ tự : ứng với mỗi vòng tròn ta có cặp số thực sắp thứ tự trong đó số đầu là hoành độ tâm vòng tròn (sau khi đã biến đường thẳng D thành một trục tọa độ) và số thứ hai là một số đại số có giá trị tuyệt đối bằng bán kính vòng tròn, có dấu là + hay − tùy theo vòng tròn đó được định hướng ngược hay thuận chiều kim đồng hồ ; ngược lại, ứng với mỗi cặp số thực sắp xếp thứ tự (a, b) ta có vòng tròn mà tâm ở trên D có hoành độ a, bán kính bằng $|b|$, và được định hướng ngược hay thuận chiều kim đồng hồ tùy theo b dương hay âm. Điều đó gợi cho ta ý sau đây : gọi mỗi vòng tròn có định hướng nói trên là một "điểm", hoành độ tâm vòng tròn là "hoành độ" của "điểm" và bán kính đại số của vòng tròn là "tung độ" của "điểm".

Giữa hai điểm thông thường $A_1(a_1, b_1)$ và $A_2(a_2, b_2)$ có khoảng cách d được diễn tả theo các tọa độ a_1, b_1 và a_2, b_2 như sau :

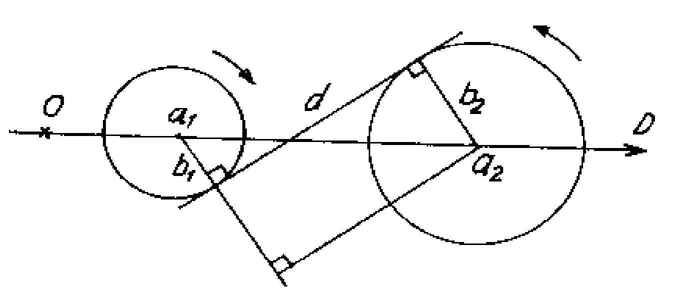
$$d^2 = (a_2 - a_1)^2 + (b^2 - b_1)^2 \qquad (1)$$

Ta có được công thức (1) là nhờ định lí Pitago.

Trong thế giới vòng tròn định hướng nói trên ta cũng thử đưa vào một khái niệm về "khoảng cách" giữa hai "điểm" : ta sẽ gọi chiều dài của một tiếp tuyến chung là khoảng cách giữa hai vòng tròn, tiếp tuyến chung đó là tiếp tuyến chung ngoài hay tiếp tuyến chung trong tùy theo hai vòng tròn là cùng hướng hay ngược hướng (h.1 và h.2).



Hình 1



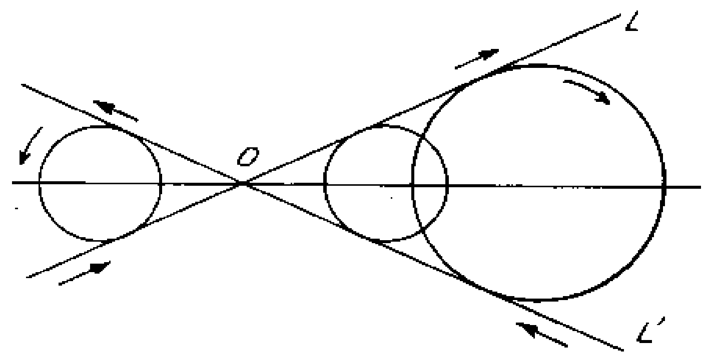
Hình 2

Như thế thì, trong mọi trường hợp, bạn đọc dễ thấy rằng "khoảng cách" d giữa hai "điểm" theo thứ tự có tọa độ (a_1, b_1) và $a_2, b_2)$ (h.1 và h.2) sẽ được diễn tả bởi công thức :

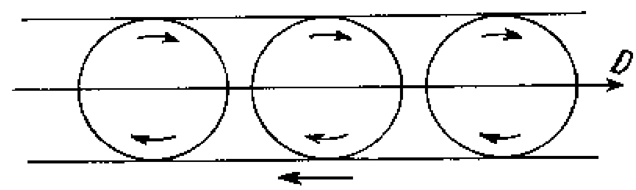
$$d^2 = (a^2 - a_1)^2 - (b_2 - b_1)^2 \qquad (2)$$

Công thức này chỉ khác công thức (1) ở một dấu tại vế thứ hai.

Trong thế giới vòng tròn định hướng này thì "đường thẳng" là cái gì ?



Hình 3



Hình 4

Vì mỗi vòng tròn định hướng có tâm trên D là một "điểm" nên "đường thẳng" phải là một tập hợp vòng tròn định hướng có tâm trên D. Cũng dễ cảm thấy rằng tập hợp vòng tròn đó phải có chung một tiếp tuyến định hướng L sao cho hướng trên tiếp tuyến trùng với hướng trên mỗi vòng tròn tại tiếp điểm. Dĩ nhiên tập hợp đó còn có một tiếp tuyến chung thứ hai L' đối xứng với tiếp tuyến L và qua D nhưng hướng ngược lại với hướng đối xứng (h.3 và h4). Nhưng chưa phải là hết chuyện với các "đường thẳng" như ở h.3 và h.4. Thực tế phức tạp hơn nhiều vì với những cặp vòng tròn không có tiếp tuyến chung, chẳng hạn như một cặp hai vòng tròn đồng tâm thì chắc chắn rằng "đường thẳng" do chúng xác định sẽ không có dạng như ở h.3 hay h.4. Để bao quát được mọi tình huống ta chú ý rằng ở h.3, các vòng tròn định hướng xét từng đôi đều là vị tự của nhau (tâm vị tự là O) còn ở h.4, các vòng tròn định hướng xét từng đôi là tịnh tiến của nhau dọc theo D. Bởi vậy, ta sẽ nói rằng một "đường thẳng" là một tập hợp những vòng tròn định hướng (tâm trên D) đôi một vị tự (hay tịnh tiến) của nhau trong những phép vị tự cùng tâm (tâm này ở trên D hay những phép tịnh tiến dọc theo D.

Ta sẽ có ba loại "đường thẳng". Loại thứ nhất gồm những "đường" mà bất cứ hai "điểm" nào trên một "đường" như vậy đều có khoảng cách thực ($d^2 > 0$ tính theo (2)) (h.3 và h.4 cho ta những "đường thẳng" như vậy). Loại thứ hai gồm những "đường" mà bất cứ hai "điểm" nào trên một "đường" như vậy đều có khoảng cách ảo ($d^2 < 0$ tính theo (2)). (Ví dụ "đường thẳng" gồm tất cả những vòng tròn định hướng đồng tâm). Loại thứ ba gồm những "đường thẳng" mà trên mỗi "đường" như vậy bất cứ hai "điểm" nào cũng có khoảng cách bằng không, $d^2 = 0$ tính theo (2)) ; đó là những "đường thẳng" ôm những vòng tròn định hướng tiếp xúc với nhau tại một điểm trên D (hai vòng cùng hướng thì tiếp trong với nhau, hai vòng khác hướng thì tiếp ngoài với nhau).

Hình học trong đó khoảng cách được tính bằng công thức (1) là hình học thông thường hay hình học Ơclit. Hình học trong đó khoảng cách được tính bằng công thức (2) gọi là hình học giả – Ơclit. Nó có ứng dụng rất quan trọng trong lý thuyết tương đối hẹp, một lý thuyết rất quan trọng của vật lý hiện đại. Có dịp tôi sẽ nói chuyện với các bạn về vấn đề này. Còn bây giờ, xin các bạn hãy làm một vài công trình nghiên cứu nho nhỏ sau đây :

1) Nghiên cứu xem trong hình học này tiên đề Ơclit có nghiệm hay không (từ đó giải thích tại sao người ta gọi hình học này là giả – Ơclit).

2) Nghiên cứu xem tất cả các đường thẳng cùng đi qua một điểm được chia cụ thể ra ba loại như thế nào ? Hai đường thẳng song song có cùng một loại không ?

3) Nghiên cứu xem trong hình học này, định lý về ba đường trung tuyến (của một tam giác) đồng quy có đúng hay không ?

THỬ ĐỨNG Ở TẦM CAO HƠN MỘT CHÚT MÀ NHÌN

NGUYỄN CẢNH TOÀN

Khi đọc bài "Phát triển một bài toán" của Phạm Đăng Long(1). Chắc các bạn rất hứng thú với việc từ một bài toán lôi ra được chín bài toán khác và có thể nhiều hơn nữa. Tôi muốn nhân đây giúp các bạn đứng ở tầm cao hơn một chút mà nhìn vấn đề để thấy cái cốt lõi bên trong và thấy cái lợi hại của tầm nhìn cao hơn. Nói "một chút", vì, khi bạn có kiến thức phổ thông vững chắc thì chỉ cần chuẩn bị cho bạn vài dòng là bạn đã có thể đứng ở tầm cao hơn rồi, không phải chờ bạn phải công phu học thêm.

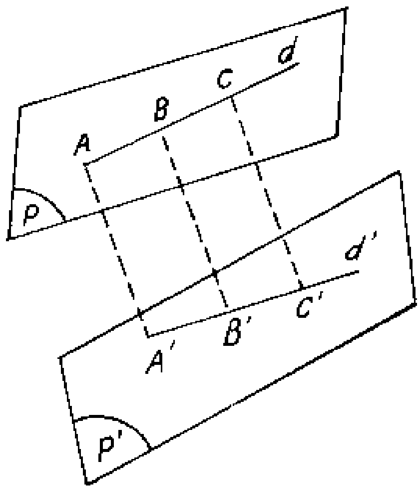
Sau đây, ta sẽ gọi những khái niệm và tính chất gì của các hình được giữ nguyên qua các phép chiếu song song (từ một mặt phẳng này qua mặt phẳng khác) là những khái niệm và tính chất afin. Ví dụ tính chất "thẳng hàng" của ba điểm là một tính chất afin vì 3 điểm A, B, C "thẳng hàng" trong mặt phẳng P, được chiếu song song thành ba điểm A', B', C' cũng "thẳng hàng" trong mặt phẳng P' (h.1). Do đó một đường thẳng của P (ví dụ d) lại biến thành một đường thẳng của P' (d biến thành d' ở hình 1). Vậy khái niệm "đường thẳng" là một khái niệm afin. Nhưng "chiều dài" của một đoạn thẳng thì không phải là khái niệm afin (vì nói chung, chiều dài của đoạn $A'B'$ khác chiều dài của đoạn AB) ; trái lại :

$\overline{AB}/\overline{AC} = \overline{A'B'}/\overline{A'C'}$ nên tỉ số $\overline{AB}/\overline{AC}$ (mà ta sẽ gọi là *tỉ số đơn* của ba điểm thẳng hàng A, B, C) được giữ nguyên qua bất cứ phép chiếu song song nào. Vậy : "tỉ số đơn" của ba điểm thẳng hàng là một khái niệm afin.

Chỉ cần chuẩn bị cho các bạn mấy dòng như vậy thôi là đủ. Bây giờ các bạn hãy viết

(1) *Báo Toán học và tuổi trẻ số 165 (1–1989)*

phương trình $y = ax + b$ của một đường thẳng cắt hai trục tọa độ Ox Oy, ở M và N và đặt $\overline{OM} = m$, $\overline{ON} = n$. Ta có : $0 = am + b$, do đó $m = -b/a$ và rõ ràng $n = b$.



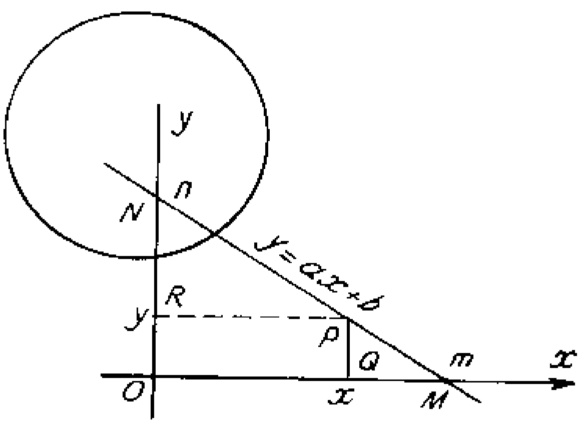
Hình 1

Phương trình $y = ax + b$ có thể viết là :

$$\frac{y}{b} - \frac{a}{b}x = 1$$

hay $$x/m + y/n = 1 \quad (1)$$

$0 = am + b$, do đó $m = -b/a$ và rõ ràng $n = b$.

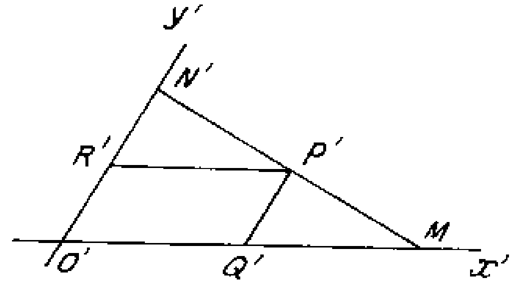


Hình 2

Ta hãy chiếu song song hình 2 xuống một mặt phẳng nào đó. Góc vuông xOy cho ta một góc $x'Oy'$ nào đấy (vì "vuông" không phải là một tính chất afin còn $x/m = \overline{OQ}/\overline{OM}$ và $y/n = \overline{OR}/\overline{ON}$ là những tỉ số nên được giữ nguyên. Vì vậy ở h.3, ta được

$$\overline{O'Q'}/\overline{O'M'} + \overline{O'R'}/\overline{O'N'} = 1 \quad (2)$$

Đó chính là nội dung bài toán 2 trong [1], chỉ khác ở các chữ dùng để chỉ các điểm. Bài toán này có thể phát biểu lại ở đây như



Hình 3

sau : *Cho một điểm P' trong góc $x'O'y'$ một cát tuyến thay đổi qua P' cắt $O'x'$ ở M' và cắt $O'y'$ ở N'. Chứng minh rằng tồn tại hai số α, β để cho :*

$$\alpha/\overline{O'M'} + \beta/O'N' = \text{hằng số}.$$

Ta thấy rằng cái cốt lõi trong bài toán 2 chính là phương trình đường thẳng.

Muốn trở lại bài toán 1 trong [1] thì cũng dễ. Chỉ cần làm sao cho $\overline{O'Q'} = \overline{O'R'}$ = một số K nào đó thì sẽ có : $1/\overline{O'M'} + 1/\overline{O'N'} = 1/K$. Vì $O'Q'P'R'$ là một hình bình hành nên muốn cho $O'Q' = O'R'$ thì nó phải là một hình thoi ; muốn vậy $O'P'$ phải là phân giác của góc $R'O'Q'$ và ta có bài toán 1 phát biểu dưới dạng sau đây :

Cho một điểm P' trên đường phân giác trong của một góc $x'O'y'$, một cát tuyến thay đổi đi qua P', cắt $O'x'$, $O'y'$ tại M', N'. Chứng minh rằng $1/\overline{O'M'} + 1/\overline{O'N'}$ = hằng số.

Để đi đến bài toán 3 trong [1] thì phải làm sao $O'P' = O'Q' = O'R' = K$. Rõ ràng lúc đó hình thoi $O'Q'P'R'$ phải có góc ở O' bằng 120^o và ta có bài toán 3 dưới dạng như sau : "*Cho $x'O'y' = \alpha$ và P là một điểm trên phân giác trong của góc, một cát tuyến qua P' cắt $O'x'$, $O'y'$ ở M' và N'. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để $1/O'M' + 1/O'N' + 1/O'P'$* là $\alpha = 120^o$.

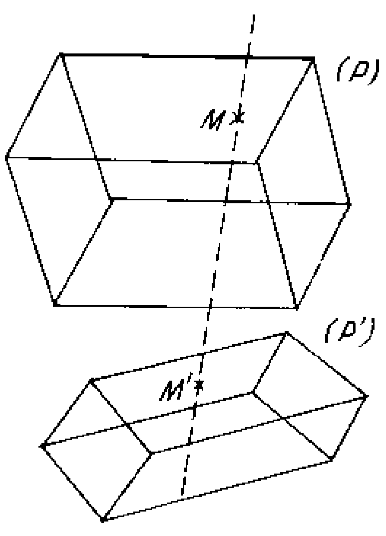
Ta cũng thấy ngay rằng nếu thay đổi góc α, thì tùy theo giá trị của α mà ta có :

$1/O'M' + 1/O'N' = 1/\delta O'P$ với δ là một số thực nào đó

Ta cũng có thể chọn phép chiếu song song để sao cho hình bình hành $O'Q'P'R'$ có dạng mong muốn làm sao cho giữa α và β có một mối liên hệ nào đó. Như vậy ta còn có thể đề ra nhiều bài toán khác.

Bây giờ ta chuyển qua "không gian". Muốn bắt chước trường hợp "phẳng" để định nghĩa các khái niệm và các tính chất afin, ta phải hình dung ra các phép chiếu song song từ một không gian ba chiều này (P) sang một không gian ba chiều khác (P'), coi cả P và P' như cùng nằm trong một không gian bốn chiều (h.4). Chúng ta sống trong một không gian ba chiều nên cũng khó hình dung điều đó ; hình 4 cũng vẽ chơi thôi (cho bớt trừu tượng) nhưng vẽ đúng thế nào được. Nhưng các bạn cũng nên cố tưởng tượng cho quen, để chuẩn bị đi xa hơn nữa, đến với các không gian nhiều chiều.

Tuy nhiên bước đầu yêu cầu như vậy có nhẽ cao quá chăng. Ta hãy tìm con đường khác : ta trở lại trường hợp "phẳng". Ta có thể hình dung ra hai mặt phẳng P và P', ta dùng một phép chiếu song song nào đó từ P sang P' rồi lại dùng một phép chiếu song song thứ hai để từ P' trở về P. Như vậy, ba điểm A', B', C' thẳng hàng trong P' và A', B', C', lại biến thành ba điểm A'', B'', C'' thẳng hàng trong P : ngoài ra $\overline{AB}/\overline{AC} = \overline{A'B'}/\overline{A'C'}$ và $\overline{A'B'}/\overline{A'C'} = \overline{A''B''}/\overline{A''C''}$.



Hình 4

Vậy ngay trong bản thân mặt phẳng P, ta có một phép biến hình giữ nguyên sự thẳng hàng của ba điểm và tỉ số đơn của ba điểm thẳng hàng.

Trong mặt phẳng, ta sẽ gọi một phép biến hình một đối một (một song ánh) giữ nguyên sự thẳng hàng của ba điểm và tỉ số đơn của ba điểm thẳng hàng là một phép biến đổi afin. Nếu trong một mặt phẳng có một hệ tọa độ thì mối liên hệ giữa tọa độ (x, y) của một điểm M với các tọa độ (x', y') của ảnh M' trong một phép biến đổi afin sẽ có dạng (a, b, c, d, e, f) là các hệ số :

$$\begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = dx + ey + f \end{cases}$$

Ta sẽ không chứng minh nhưng bạn đọc có thể kiểm tra dễ dàng rằng nó biến một đường thẳng thành một đường thẳng. Trong không gian những phép biến đổi có dạng :

$$\begin{cases} x' = ax + by + cz + d \\ y' = ex + fy + yz + h \\ z' = kx + ly + mz + n \end{cases}$$

sẽ gọi là những phép biến đổi afin. Sự mở rộng ở đây là tự nhiên, không cần viện đến không gian bốn chiều. Bạn đọc có thể kiểm tra để thấy một phép biến đổi như vậy biến một mặt phẳng thành một mặt phẳng (phương trình dạng $\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$) do đó biến đường thẳng (coi như tương giao của hai mặt phẳng) thành đường thẳng. Tỉ số đơn của ba điểm thẳng hàng cũng được giữ nguyên qua một phép biến đổi afin.

Bây giờ ta hãy xét một mặt phẳng cắt ba trục tọa độ Ox, Oy, Oz ở M, N, P (h.5). Nếu R là một điểm của mặt phẳng có tọa độ là x, y, z thì cũng giống như trường hợp "phẳng", ta sẽ có $x/\overline{OM} + y/\overline{ON} + z/\overline{OP} = 1$ (phương trình mặt phẳng). Nếu ta biến đổi toàn bộ hình vẽ bằng một phép biến đổi afin thì tam diện $Oxyz$ biến thành một tam diện $O'x'y'z'$ (nói chung không có góc vuông vì "vuông" không phải là khái niệm afin) còn các tỉ số đơn được giữ nguyên :

$$x/\overline{OM} = \overline{OS}/\overline{OM} = \overline{O'S'}/\overline{O'M'}$$

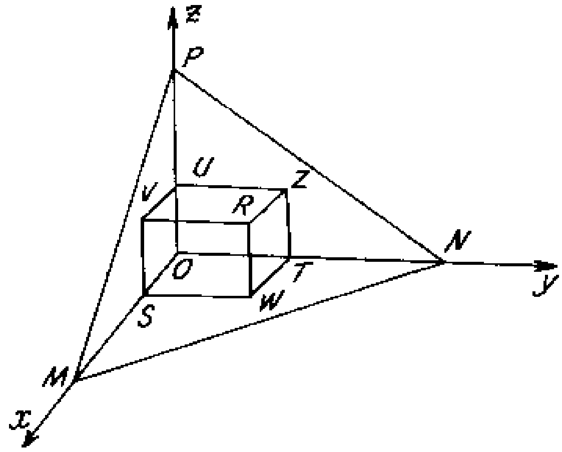
$$y/\overline{ON} = \overline{OT}/\overline{ON} = \overline{O'T'}/\overline{O'N'}$$

$$z/\overline{OP} = \overline{OU}/\overline{OP} = \overline{O'U'}/\overline{O'P'}$$

Vậy ta có : *Cho một tam diện bất kỳ $O'x'y'z'$ và một điểm R', qua R' có một mặt phẳng biến thiên cắt $O'x'$, $O'y'$, $O'z'$ theo thứ tự ở M', N', P'. Thế thì có các số* $\alpha = \overline{O'S'}$, $\beta = \overline{O'T'}$ và $\gamma = \overline{O'U'}$, sao cho :

$$\alpha/\overline{O'M'} + \beta/\overline{O'N'} + \gamma/\overline{O'P'} = 1$$

Muốn $\alpha = \beta = \gamma$ thì hình hộp $O'S'T'U'V'W'Z'$ phải có các cạnh bằng nhau, nghĩa là cả sáu mặt đều là hình thoi.



Hình 5

Đến đây xin mời các bạn tiếp tục để đi đến các bài toán khác trong [1]. Tôi xin tạm dừng bằng những nhấn mạnh sau đây :

1) Lõi cốt của nội dung 10 bài toán trong [1] là phương trình đường thẳng và phương trình mặt phẳng. Như vậy là cùng một bản chất mà hình thức biểu hiện ra ngoài thật là phong phú.

2) Trong các phép biến đổi, có những cái được giữ nguyên như qua các phép biến đổi afin thì "thẳng hàng", "đường thẳng", "tỉ số đơn", "hình bình hành" được giữ nguyên, trong lúc những cái khác như "vuông", "hình vuông", "chiều dài" thì thay đổi. Cái thông minh của loài người là khi nghiên cứu một bộ phận tính chất nào đó ẩn trong một hình thì đi tìm cho được những phép biến hình biết chắc là giữ nguyên bộ phận các tính chất muốn nghiên cứu nhưng thay đổi các tính chất khác. Khéo tìm thì ở hình mới (qua phép biến hình) các tính chất muốn nghiên cứu sẽ hiện ra rõ rệt. Ví dụ ở hình 3, thoạt nhìn khó ai mà thấy được hệ thức (2), nhưng qua một phép biến đổi afin để trở về hình 2, thì hệ thức (1) lại là một kiến thức cơ bản có trong sách giáo khoa. Đây là một tư tưởng "lớn" trong toán học hiện đại.

B – PHƯƠNG PHÁP SUY LUẬN

CHUNG QUANH CÂU CHUYỆN GIẢI MỘT PHƯƠNG TRÌNH ĐẠI SỐ

HOÀNG XUÂN SÍNH

Trước khi vào câu chuyện, tôi xin nhân ngày 8-3 chúc các em gái một năm học tiến bộ, tích cực tham gia các hoạt động của báo *Toán học và Tuổi trẻ* hơn nữa. Năm vừa qua các em tham gia còn ít quá. Tôi vẫn biết các em gái thường hay khiêm tốn, và thường cũng khá tự ti (nếu tôi không lầm). Các em đã đọc tiểu sử của nhà nữ toán học Xôphya Côvalepxcaia đăng ở báo Toán học và tuổi trẻ số 4 chưa ? Nếu chưa thì cần phải đọc. Sau khi đọc xong rồi thì quyết tâm tham gia tích cực vào các hoạt động của báo. Các em hẳn đồng ý với tôi.

Bây giờ tôi xin đi vào câu chuyện. Các em ở trường đã biết giải thành thạo các phương trình bậc một và bậc hai rồi, bài "Số ảo ngu ngốc hay thông minh" đăng ở số 1 và số 2, báo Toán học và Tuổi trẻ đã cho các em biết phương hướng giải một phương trình bậc ba. Tin tưởng rằng các bài báo trong mục "Nói chuyện với các bạn trẻ yêu toán" đã phần nào tác dụng tới việc học toán suy nghĩ về toán của các em, tôi xin phép hỏi các em điều này : sau khi đã biết phương hướng giải một phương trình bậc ba, có em nào đã lấy một phương trình bậc ba ra giải thử và đặt vấn đề tìm hiểu (hoặc đọc sách, hoặc hỏi thầy) xem người ta giải một phương trình bậc bốn hoặc cao hơn bốn như thế nào không ? Nếu có em nào đã làm rồi, thì tôi xin bắt tay hoan nghênh em, đã có tính tò mò cần thiết về khoa học để trở thành một người giỏi toán. Trong khi giải một phương trình bậc hai, hẳn các em phải chú ý điều này : các em trước hết phải tính biệt số khai căn của biệt số sau đó thực hiện các phép toán : cộng, trừ, nhân, chia, lũy thừa, khai căn là đủ để giải một phương trình bậc hai. Đối với một phương trình bậc ba hay bậc bốn cũng như vậy. Nhưng với các phương trình bậc cao hơn bốn thì sao ? Các nhà toán học đã đặt ra câu hỏi : có thể giải bằng căn thức phương trình bậc năm trở lên không ? Tới đây, tôi xin ngừng lại một chút để hỏi các em điều này : có khi nào các em nghĩ rằng toán học với các định lí hắc búa và các bài toán làm các em đau đầu là sản phẩm thuần túy nảy sinh từ trí tuệ các nhà bác học mà hình ảnh là những ông cụ già râu dài, đeo kính trắng suốt ngày đóng cửa làm việc không liên hệ với thế giới bên ngoài ? – Không phải thế đâu. Toán học cũng như các khoa học khác phát sinh từ thực tiễn và quay lại thực tiễn phục vụ chúng ta một cách đắc lực. Trong bài "Số ảo ngu ngốc hay thông minh", các em đã biết : số phức phát sinh từ thực tiễn giải phương trình, và sau đó công trạng của nó thật là hiển hách. Vấn đề, giải bằng căn thức phương trình bậc năm cũng vậy. Hồi đó các môn thiên văn và cơ học phát triển đòi hỏi giải quyết vấn đề tích phân một hàm số hữu tỉ và để giải quyết vấn đề này thì phải biết tính nghiệm của một phương trình đại số. Như vậy, thực tiễn đã đòi hỏi phải giải quyết việc tìm nghiệm của một phương trình đại số. Mặt khác, sau khi đã biết giải bằng căn thức các phương trình bậc ba và bốn rồi, con người đứng trước kết quả đó cũng như đứng trước bao kết quả khác đã không tự thỏa mãn, luôn luôn với đầu óc sáng tạo của mình thúc đẩy khoa học tiến lên. Lớp người đi trước chúng ta đã mất không biết bao nhiêu công sức để tìm xem có thể giải bằng căn thức phương trình bậc năm trở lên. Cuối cùng nhà toán học Aben (Na uy) và Galoa (Pháp) đã giải đáp được vấn đề : không thể giải được bằng căn thức các phương trình tổng quát bậc năm trở lên. Công trình của Galoa có ảnh hưởng lớn lao đến sự phát triển về sau này của đại số, đặc biệt đến sự phát sinh ra lí thuyết nhóm.

Sơ lược câu chuyện giải bằng căn thức phương trình đại số là như vậy. Bây giờ chúng ta hãy quay về các bài toán trong nhà trường của chúng ta ; trên tinh thần dám nghĩ dám làm chúng ta thử xem rằng, với các kiến thức phổ thông, chúng ta có thể giải quyết được những vấn đề vượt ra ngoài khuôn khổ các bài toán hàng ngày của chúng ta không ? Các em có chú ý rằng các phương trình bậc hai mà các thầy ra cho các em thường được dụng ý chọn với các hệ số nguyên hay hữu tỉ và với các nghiệm cũng nguyên hay hữu tỉ ? Đối với các phương trình bậc ba, mà các em thường giải bằng cách phân tích ra thành thừa số cũng vậy. Nói chung các phương trình ra cho các em thường là với hệ số hữu tỉ và có nghiệm hữu tỉ (các em thử nghĩ xem một số nguyên có phải là một số hữu tỉ không ?). Do đó chúng ta có thể đặt vấn đề là tìm nghiệm hữu tỉ của một phương trình với hệ số hữu tỉ. Nếu vấn đề được giải quyết thì nó sẽ phần nào giúp cho các em trong lúc làm bài. Và lại, trong thực tế cũng có nhiều bài toán chỉ đòi hỏi ta tìm nghiệm hữu tỉ.

Ta xét bài toán tổng quát sau đây : tìm nghiệm hữu tỉ của phương trình :

$$\alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_o = 0,$$

α_i hữu tỉ.

Một số hữu tỉ là một số thế nào ? Bảo các α_i hữu tỉ, nghĩa là có thể viết các α_i dưới dạng $\dfrac{a_i}{d}$ trong đó các số a_i, d là nguyên và d là mẫu số chung của các phân số $\dfrac{a_i}{d}$.

Thông thường khi các hệ số cùng chung một mẫu số các em làm thế nào ? Nhân hai vế của phương trình với d.

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_o = 0 \qquad (2)$$

(2) là một phương trình với hệ số nguyên. Thế là ta được một phương trình với hệ số đơn giản hơn, dễ nghiên cứu hơn. Muốn tìm các nghiệm hữu tỉ của (2) thì việc đầu tiên phải làm là nghiên cứu các tính chất của nghiệm, để trên cơ sở đó ta hướng về các số hữu tỉ có các tính chất đó mà thử xem có phải là nghiệm không. Giả sử $\dfrac{p}{q}$ là một nghiệm của (2), hơn nữa $\dfrac{p}{q}$ là một phân số tối giản với $q > 0$. Ta có :

$$a_n \left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1} \left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \dots + a_o = 0.$$

Việc đầu tiên ta thử quy đồng mẫu số

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \dots + a_1 p q^{n-1} + a_o q^n = 0 \ (3)$$

Bây giờ ta thử vận dụng tất cả những hiểu biết của ta để nghiên cứu biểu thức ở vế trái của (3) xem sao. Ta thấy n số hạng đầu tiên chứa p. Hãy thử đặt p làm thừa số chung.

$$p(a_n p^{n-1} + \dots + a_1 q^{n-1}) + a_o q^n = 0$$

hay $\quad p(a_n p^{n-1} + \dots + a_1 q^{n-1}) = -a_o q^n.$

kết quả là gì ? p phải chia hết $a_o q^n$. Nhưng p đã nguyên tố với q rồi, do đó cũng nguyên tố với q^n, nên p phải chia hết cho a_o, hay p là một ước của a_o. Còn q thì thế nào ? Cũng bằng nhận xét tương tự, ta đi tới kết luận q là một ước của a_n. Trong trường hợp đặc biệt $a_n = 1$, thì $q = 1$, nghĩa là mọi nghiệm hữu tỉ đều nguyên.

Như vậy, muốn tìm tất cả các nghiệm hữu tỉ của (2) ta chỉ việc tìm tất cả các ước p của a_o, tất cả các ước q của a_n, và tổ hợp các ước đó lại thành các phân số $\dfrac{p}{q}$ rồi thử xem các số đó có nghiệm phương trình không. Đến đây có thể nói bài toán giải quyết xong. Nhưng không hài lòng với kết quả tìm ra, ta thử nghiên cứu thêm nữa, xem vấn đề có đơn giản hơn không. Như đã nhận xét ở trên nếu $a_n = 1$ thì mọi nghiệm hữu tỉ đều nguyên và như vậy ta chỉ cần thử với các ước của a_o. Làm thế nào để có một phương trình với hệ số cao nhất bằng 1 ? có em có thể trả lời ngay : ta chia phắt hai vế của phương trình với c_n. Nhưng như thế lại gặp một phương trình với hệ số không nguyên. Chia không được ta thử nhân xem sao. Nhân hai vế của (2) với a_n^{n-1} ta được :

$$(a_nx)^n + a_{n-1}(a_nx)^{n-1} + ... +$$
$$+ a_1a_n^{n-2}(a_nx) + a_oa_n^{n-2} = 0.$$

Nếu ta đặt $a_nx = y$ ta sẽ được phương trình

$$y^n + a_{n-1}y^{n-1} + ... + a_1a_n^{n-2}y + a_oa_n^{n-1} = 0 \quad (4).$$

(4) là một phương trình với hệ số nguyên và hệ số cao nhất bằng 1, do đó nếu (4) có nghiệm hữu tỉ thì nghiệm hữu tỉ ắt phải nguyên. Các nghiệm hữu tỉ của (2) sẽ ứng với các nghiệm của (4) chia cho a_n. Kết quả thật là lạc quan. Ta không phải khai căn phiền phức, với phương trình bậc nào cũng áp dụng phương pháp được. Các em có hài lòng với kết quả tìm thấy không ? Khi người ta bảo các em ngồi thử tất cả các ước của a_o và bảo phải kiên nhẫn ngồi thử, các em có "an phận" như thế không, hay có phản ứng ? Nếu phản ứng của các em là sốt ruột thì không tốt, nhưng nếu phản ứng là tìm cách cải tiến rút bớt số lần thử đi thì hoan hô các em. Thật vậy, nếu ta không tìm cách cải tiến phương pháp đi thì trong nhiều trường hợp sẽ gay go vô cùng, chẳng hạn với $a_o = 36$ số ước đã lên tới 18. Chúng ta thử xem có thể rút bớt được số lần thử hay không. Với bất cứ số nguyên nào thì ta cũng có ± 1 là ước do đó việc đầu tiên là phải xét xem ± 1 có phải là nghiệm không. Việc làm này thì dễ dàng. Nếu ít nhất một trong các giá trị đó nghiệm phương trình, ta hãy chia đa thức của phương trình (ta kí hiệu là $f(x)$) cho $x - 1$ hoặc $x + 1$, như thế hạ được bậc của phương trình. Giả sử bây giờ $f(1)$ và $f(-1)$ khác không, tức ± 1 không phải là nghiệm của phương trình. Đối với các ước khác, ta có thử ngay xem có nghiệm phương trình như ± 1 không ? Nếu thử ngay thì chưa được cải tiến nào cả. Đối với ± 1 ta thử ngay vì việc tính toán dễ dàng, còn đối với các ước khác thì việc thử khá cồng kềnh. Cho nên, đối với các ước này ta phải cho chúng qua một lần thử thách, xem khả năng làm nghiệm của chúng có tăng thêm lên không, rồi mới thử. Ta căn cứ vào nhận xét sau đây :

Nếu một số nguyên α là nghiệm của (2) thì $f(x) = (x - \alpha)\, q(x)$ ($q(x)$ là một đa thức với hệ số nguyên). Do đó các thương

$$\frac{f(1)}{1-\alpha} = q(1) \quad \frac{f(-1)}{-1-\alpha} = q(-1)$$

hoặc

$$-\frac{f(1)}{\alpha - 1} = -q(1) \quad \frac{f(-1)}{\alpha + 1} = -q(-1)$$

phải là những số nguyên.

Do đó ước số nào của a_o mà không làm cho một trong hai tỉ số $\frac{f(1)}{\alpha - 1}, \frac{f(-1)}{\alpha + 1}$ là nguyên thì ước số ấy không thể là nghiệm được. Sau lần chọn lọc này, số thử của chúng ta rút xuống.

Các em thấy không ? chỉ cần với số kiến thức của các em, chúng ta đã giải quyết được một vấn đề khá thú vị. Từ giờ với một phương trình có hệ số hữu tỉ và bậc thế nào chăng nữa, các em cũng có khả năng tìm được tất cả các nghiệm hữu tỉ của nó.

TỪ CÔNG THỨC VIET

VŨ THANH NGA

(Trường Phổ thông cấp III A Hà Nội)

Trong phong trào thi đua phát huy sáng kiến, các bạn chắc biết nhiều công nhân tuổi nghề chưa là bao, tuổi đời còn ít, nhưng do suy nghĩ tìm tòi đã có những sáng kiến tiết kiệm cho Nhà nước hàng vạn đồng. Tuổi trẻ nói chung có nhiều sáng tạo. Học toán cũng vậy các bạn ạ, chúng ta không phải chỉ học y như trong sách, hoặc chỉ làm những bài tập các thầy, cô ra hay lấy ở một quyển sách nào. Như thế chưa đủ, khi học đến một vấn đề nào đó, các bạn hãy suy nghĩ, tìm tòi, suy rộng ra xem vấn đề này có liên quan gì đến các vấn đề khác và trên cơ sở liên quan đó ta có thể rút ra được những điều bổ ích gì v.v...

Cứ tập suy nghĩ như thế đi, các bạn sẽ thấy nhiều điều mới lạ, tăng thêm trí suy luận, nâng cao nhận thức về tư duy trừu tượng, rèn luyện tốt kĩ năng kĩ xảo. Đó cũng là những bước đầu mà các bạn tập làm quen với sự tìm tòi nghiên cứu sau này.

Tôi lấy thí dụ nhỏ :

1. Các bạn học công thức Viét rồi nhỉ :

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$P = x_1x_2 = \frac{c}{a}$$

Từ đó các bạn đã khảo sát dấu các nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ theo dấu của a, b, c. Trong vấn đề này, nếu cố gắng suy nghĩ, hệ thống hóa vấn đề lại, các bạn sẽ rút ra được một quy tắc rất hay : "*phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ nếu có 2 nghiệm và nếu lần lượt đi từ các hệ số a, b, c ta nhận thấy có bao nhiêu lần đổi dấu trong các hệ số đó thì có bấy nhiêu nghiệm số dương*" (Quy tắc Đề-các đấy các bạn ạ). Các bạn biết quy tắc này, khi gặp một phương trình trùng phương như : $x^4 + 17x^2 + 8 = 0$ chẳng hạn, các bạn sẽ kết luận ngay được vô nghiệm (vì phương trình phụ $y^2 + 17y + 8 = 0$ nếu có nghiệm sẽ không có nghiệm dương). Hoặc trong một bài toán đố nào đó mà điều kiện của ẩn x phải dương, sau khi lập phương trình, giả sử ta được : $x^2 - 16x + 39 = 0$ các bạn có thể kết luận bài toán có 2 lời giải sau khi thấy $\Delta' = 25$, v.v...

2. Vẫn từ công thức Viét : trong sách giáo khoa có các loại bài tập như : x_1 và x_2 là nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$. Hãy tính các biểu thức :

$$S_2 = x_1^2 + x_2^2 \text{ và } S_3 = x_1^3 + x_2^3$$

theo a, b, c".

Dùng hằng đẳng thức đáng nhớ các bạn sẽ tính được :

$$\begin{aligned} S_2 &= x_1^2 + x_2^2 \\ &= (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 \end{aligned}$$

$$S_2 = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}.$$

$$\begin{aligned} S_3 &= x_1^3 + x_2^3 \\ &= (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) \\ &= \frac{-b^3 + 3abc}{a^3}. \end{aligned}$$

Một vấn đề mới đặt ra là đối với các biểu thức :

$$S_4 = x_1^4 + x_2^4$$

$$S_5 = x_1^5 + x_2^5$$

$$\dots$$

$$S_n = x_1^n + x_2^n$$

thì tính như thế nào ? vẫn dùng hằng đẳng thức ư ? hay tính bằng cách nào ? suy nghĩ tìm tòi các bạn sẽ thấy công thức :

$$aS_n + bS_{n-1} + cS_{n-2} = 0 \qquad (1)$$

và nhờ công thức này các bạn sẽ lần lượt tính được S_4 rồi $S_5, S_6, \dots, S_n$.

Tò mò hơn các bạn còn tính được :

$$S_{-1} = x_1^{-1} + x_2^{-1} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -\frac{b}{c},$$

$$S_{-2} = x_1^{-2} + x_2^{-2} = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{b^2 - 2ac}{c^2},$$

$$S_{-3} = x_1^{-3} + x_2^{-3} = \frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3} = \frac{-b^3 + 3abc}{c^3}, \dots$$

và thấy công thức (1) vẫn đúng khi n là số nguyên âm.

3. Vẫn từ công thức viét :

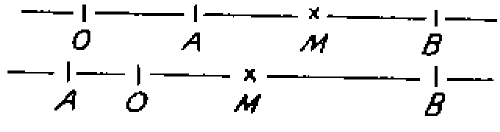
$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$P = x_1x_2 = \frac{c}{a}$$

Nếu các bạn liên hệ giữa đại và hình các bạn sẽ thấy một vấn đề đặt ra là : Khi biết tổng và tích độ dài đại số của hai đoạn thẳng thì có thể dựng được các đoạn đó không ? Nếu dựng được, ta có thể giải phương trình bậc 2 bằng phương pháp hình học. Trong hình học hệ thức :

$$\overline{OA} + \overline{OB} = 2\overline{OM}$$

(M là trung điểm của AB)



Cho ta tổng độ dài của hai đoạn thẳng :

Công thức về phương tích của một điểm đối với một đường tròn (hoặc hệ thức lượng trong tam giác vuông...) cho ta tích của 2 đoạn thẳng.

Dựa trên 2 điều nhận xét này các bạn sẽ dựng các đoạn đó. Bằng phương pháp hình học các bạn còn có thể biện luận phương trình bậc hai và dẫn tới :

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta > 0$ phương trình có hai nghiệm,

$\Delta = 0$ phương trình có 1 nghiệm kép,

$\Delta < 0$ phương trình vô nghiệm.

và cũng rút ra được quy tắc về dấu của nghiệm số phụ thuộc vào dấu của a, b, c như điều đã học trong sách giao khoa. Dĩ nhiên bằng phương pháp hình học ta cũng có công thức Viét vì trên cơ sở của công thức đó mà ta suy ra cách giải phương trình bậc 2 bằng hình học.

Đấy, từ một công thức Viét nếu chịu khó đào sâu cũng thấy thêm được nhiều vấn đề mới, mà trên đây chỉ là một vài gợi ý nhỏ. Các bạn hãy dựa vào những hiểu biết của mình, suy nghĩ, tìm tòi trong các bài đã học, đang học chắc chắn sẽ rút ra được nhiều điều bổ ích.

MỘT PHƯƠNG PHÁP SUY NGHĨ SÁNG TẠO

NGUYỄN CẢNH TOÀN

Nhiều người thường cho rằng phải có kiến thức rộng mới sáng tạo được. Đành rằng có kiến thức rộng là một thuận lợi lớn cho việc suy nghĩ sáng tạo nhưng đó chưa phải là cái quyết định. Cái quyết định là nhiệt tình đối với cái mới, sự luôn luôn không bằng lòng với hiểu biết hiện có, óc tò mò khoa học, sự chú ý rèn luyện những phương pháp suy nghĩ đúng đắn. Có những cái đó thì ở trình độ kiến thức nào cũng đã có thể suy nghĩ sáng tạo được. Trong bài báo ngắn ngủi này, tôi không đề cập toàn diện đến vấn đề mà chỉ giới hạn lại trong việc giới thiệu với các bạn, một phương pháp suy nghĩ sáng tạo. Phương pháp này có lẽ chẳng mới mẻ gì đối với nhiều bạn nhưng có điều là các bạn đó ít chú ý vận dụng, rèn luyện luôn cho thành nề nếp.

Ta hãy lấy một tam giác vuông. Theo định lí Pitago, ta có $a^2 = b^2 + c^2$ (a là cạnh huyền). Giả sử kiến thức của bạn chỉ mới có thế, bạn chưa biết gì về các hệ thức lượng trong một tam giác bất kì. Thế thì bạn có thể suy nghĩ gì về hệ thức $a^2 = b^2 + c^2$? Bạn sẽ nghĩ ; chắc là đối với tam giác bất kì phải có một hệ thức tổng quát hơn hệ thức đó. Nó như thế nào, ta chưa biết nhưng ta biết chắc rằng nó phải trở thành hệ thức $a^2 = b^2 + c^2$, khi góc A trở thành góc vuông. Từ đó bạn có thể phỏng đoán rằng hệ thức tổng quát cũng có chứa a^2 ở một vế, $b^2 + c^2$ ở một vế kia và còn chứa thêm ở một vế nào đó một số hạng tuy chưa biết nhưng biết chắc rằng nó triệt tiêu khi $\widehat{A} = 90^o$. Cái gì triệu tiêu khi A bằng 90° nhỉ ? Đến đây chắc bạn sẽ nghĩ như vậy và chắc bạn sẽ nghĩ trước hết đến $\cos A$*. Như vậy bạn đã có thể phỏng đoán rằng số hạng chưa biết chắc phải chứa $\cos A$ làm thừa số. Rồi bạn lại nghĩ thêm : hệ thức tổng quát nhất định phải đẳng cấp. Nó chứa a^2, $b^2 + c^2$. Vậy số hạng chưa biết cũng phải bậc hai tức nó phải là một bội số của tích hai chiều dài nào đó với $\cos A$.

Nếu bạn thường xuyên hay chú ý rằng trong các công thức toán học thường có một sự nhịp nhàng, đối xứng giữa các phần tử đóng một vai trò như nhau. Ở đây b và c đóng vai trò như nhau còn a đóng một vai trò khác. Vậy hệ thức tổng quát phải đối xứng với b và c (nghĩa là khi hoán vị b và c

* Nếu thử với $\cos A$ mà thất bại thì bạn sẽ nghĩ đến $\mathrm{ctg}A$, $\sin 2A$ v.v...

lẫn nhau, hệ thức vẫn không đổi). Từ đó bạn có thể phỏng đoán thêm rằng, để giữ cho hệ thức được đối xứng đối với b và c thì số hạng chưa biết phải là một bội số của :

hoặc a^2 CosA

hoặc $b c$CosA

hoặc $b'c'$CosA,

trong đó b', c' là hai đoạn thẳng cũng sẽ hoán vị lẫn nhau khi ta hoán vị b và c.

Vậy, hệ thức tổng quát chắc phải có một trong ba dạng sau đây :

$$a^2 = b^2 + c^2 + Ka^2\cos A \quad (1)$$

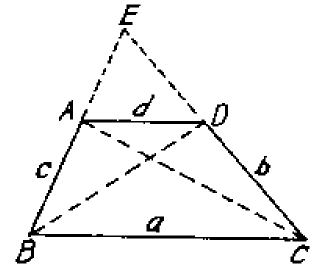
$$a^2 = b^2 + c^2 + Kbc\cos A \quad (2)$$

$$a^2 = b^2 + c^2 + Kb'c'\cos A \quad (3)$$

Để xem dạng nào có thể đúng, ta thử áp dụng cả ba dạng vào một tam giác đặc biệt trong đó $a = 0$, $A = 0$ và $b = c$ (tức là tam giác trong đó hai đỉnh B, C trùng nhau).

Dạng (1) cho ta : $0 = 2b^2$; mà $b \neq 0$ vậy ta biết ngay dạng (1) là sai. Dạng (2) cho ta $0 = 2b^2 + Kb^2$. Vậy dạng (2) có thể dùng nếu ta lấy $K = -2$. Đến đây, bạn đã chắc chắn được một phần rằng hệ thức tổng quát là $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$. Để chắc chắn hơn, bạn hãy áp dụng nó vào một tam giác đặc biệt khác, chẳng hạn vào một tam giác đều ($a = b = c$ và $\widehat{A} = 60^o$). Bạn có : $a^2 = a^2 + a^2 - 2a^2 \cdot \frac{1}{2}$. Bạn thấy rằng hệ thức vẫn đúng. Bạn càng tin tưởng thêm và để cho chắc chắn, bạn bắt tay vào chứng minh hệ thức $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ mà bạn vừa phát hiện. Nếu được thì thế là bạn hoàn thành việc phát minh. Nếu trong khi chứng minh bạn thấy nó sai thì lúc đó bạn sẽ xét đến dạng (3). Trong ví dụ cụ thể này thì hệ thức $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ là đúng.

Biết được hệ thức $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ rồi, ta hãy tiến lên một bước nữa. Chắc bạn sẽ nghĩ : còn có loại tam giác nào tổng quát hơn "tam giác bất kì" nữa không ; Rõ ràng là không có. Vậy hướng mở rộng không phải là mở rộng vào tam giác. Ta nghĩ đến một cái gì tổng quát hơn tam giác. Đó là tứ giác và ta coi tam giác như một tứ giác đặc biệt có một cạnh bằng không. Vấn đề đặt ra là tìm một hệ thức lượng trong tứ giác mà hệ thức $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ là một trường hợp đặc biệt khi một cạnh của tứ giác bằng không.



Hình 1

Cho tứ giác $ABCD$ (hình 1). Ta đặt $BC = a$, $CD = b$, $AB = c$, $AD = d$. Ta chưa biết hệ thức tổng quát nhưng biết rằng khi $d = 0$ thì hệ thức đó trở thành :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos E$$
$$= b^2 + c^2 - 2bc\cos G$$

(vì lúc $d = 0$, $\widehat{E} = \widehat{G}$).

Ta chú ý rằng khi $d = 0$ thì $CA = CD = b$, $BD = BE = c$. Vậy ta phỏng đoán rằng hệ thức tổng quát phải có một trong hai dạng sau đây :

$$a^2 + Kd^2 = b^2 + c^2 - 2BE \cdot CE\cos E \quad (4)$$

$$a^2 + Kd^2 = b^2 + c^2 - 2BD \cdot CA\cos G \quad (5)$$

Sở dĩ ở đây ta thêm vào Kd^2 (một bội số của d^2) để bảo đảm tính chất đẳng cấp (bậc hai) của hệ thức và để bảo đảm rằng khi $d = 0$ thì số hạng Kd^2 mất đi. Ngoài ra, theo trực giác ta đoán rằng nếu là góc E thì hai chiều dài nhân với cos$E$ phải là BE, CE còn nếu là góc G thì hai chiều dài nhân với cos$G$ phải là BD, CA.

Để xem dạng nào có thể đúng, ta thử áp dụng cả hai dạng vào một tứ giác đặc biệt là hình vuông ($a = b = c = d$, $\widehat{E} = \infty$, $\widehat{G} = 90^o$). Dạng (1) cho ta :

$$a^2 + Ka^2 = a^2 + a^2 - \infty.$$

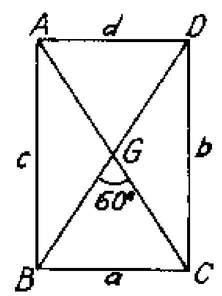
Vậy ta thấy ngay dạng (1) là sai.

Dạng (2) cho ta :

$$a^2 + Ka^2 = a^2 + a^2.$$

Vậy dạng (2) có thể đúng nếu ta thay $K = 1$.

Để chắc chắn hơn, ta hãy áp dụng nó vào một tứ giác đặc biệt khác, ví dụ vào một hình chữ nhật trong đó góc $\widehat{G}$ đối diện với cạnh BC bằng 60^o (hình 2). Ta có : $a = d$, $b = c = a\sqrt{3}$, $BD = AC = 2a$. Đem áp dụng hệ thức mà ta phỏng đoán, ta được :



Hình 2

$$a^2 + a^2 = 3a^2 + 3a^2 - 2 \cdot 4a^2 \cdot \frac{1}{2}$$

Ta thấy đúng. Vậy ta càng thêm tin tưởng rằng hệ thức tổng quát phải là :

$$a^2 + d^2 = b^2 + c^2 - 2BD \, . \, CA\cos G$$

trong đó G là góc đối diện với cạnh a. Để cho chắc chắn, ta phải chứng minh hệ thức đó. Bạn đọc thử tự chứng minh lấy.

Phương pháp suy nghĩ mà tôi vận dụng trên đây là sự tổng hợp của hai phương pháp : "*đi từ cái riêng đến cái chung*" và "*đi từ cái chung đến cái riêng*" kết hợp thêm với một số nhận xét về tính đẳng cấp, tính đối xứng v.v... của các hệ thức lượng :

Ta đã xuất phát từ một hệ thức đặc biệt. Ta nghĩ rằng nó phải là một trường hợp đặc biệt của một hệ thức tổng quát hơn (mà ta chưa biết). Ta có thể phỏng đoán ra hệ thức tổng quát này bằng cách suy luận rằng hệ thức tổng quát đó phải trở thành hệ thức đặc biệt khi một yếu tố nào đó lấy một giá trị đặc biệt xác định (ví dụ một góc nào đó lấy giá trị 90°). Ngoài ra ta vận dụng thêm một số tiêu chuẩn khác (Ví dụ tính đẳng cấp v.v...). Để bớt mò mẫm trong quá trình phỏng đoán, giữa đường ta lại áp dụng những hệ thức đã phỏng đoán vào một số trường hợp đặc biệt để có thể loại ngay những hệ thức phỏng đoán sai và để làm cho chính xác thêm những hệ thức phỏng đoán đúng (trong ví dụ trên, ta đã dùng cách này hai lần, mỗi lần như vậy ta đều loại ngay được một hệ thức phỏng đoán sai và đều xác định ngay được hệ số K). Phương pháp "*đi từ cái riêng đến cái chung*" còn gọi là phương pháp "*khái quát hóa*" và phương pháp "*đi từ cái chung đến cái riêng*" còn gọi là phương pháp "*đặc biệt hóa*". Qua ví dụ trên, ta thấy rằng chịu khó vận dụng các phương pháp đó thì có thể học "một" biết "mười" (từ hệ thức $a^2 = b^2 + c^2$ chúng ta có thể tự mình nghĩ ra hai hệ thức tổng quát hơn là $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$, $a^2 + d^2 = b^2 + c^2 - 2BD \, . \, CA\cos G$, nếu kể về số lượng thì là học "một" biết "mười" cũng không ngoa vì một công thức tổng quát có giá trị rất lớn so với một công thức đặc biệt).

Để kết thúc, tôi xin đề ra để các bạn đọc tìm một hệ thức tổng quát hơn hệ thức sau đây : "*trong một hình bình hành, tổng bình phương của bốn cạnh bằng tổng bình phương hai đường chéo*" (nếu không ai tìm ra, sẽ có giải đáp sau).

CÂU CHUYỆN RIÊNG CHUNG

NGÔ THÚC LANH

Câu chuyện "riêng chung" tôi muốn nói với các bạn trẻ yêu toán hôm nay tiếp tục câu chuyện nói với các bạn trong số báo trước(1). Nó xoay quanh một phương pháp suy luận thường gặp trong việc nghiên cứu toán học. Nội dung của nó là : *đi từ trường hợp riêng đến trường hợp chung, lấy trường hợp riêng soi sáng cho trường hợp chung và vận dụng trường hợp riêng để giải quyết trường hợp chung.*

Xin bắt đầu bằng một thí dụ cụ thể. Với các kiến thức về hình học lớp 6, có thể đề ra bài toán sau :

Chứng minh rằng tổng số các khoảng cách từ bất kì điểm nào của một tam giác đều tới các cạnh của nó là không đổi.

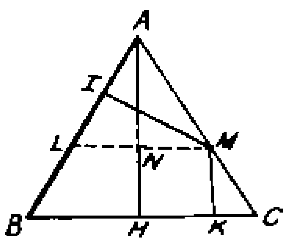
Bài toán này không phải là dễ. Cái khó khăn thứ nhất của nó là đầu bài không nói rõ tổng số các khoảng cách đó là gì. Để giải quyết khó khăn này, ta hãy lấy một *trường hợp riêng để soi sáng cho trường hợp chung*. Nếu như tổng số các khoảng cách từ bất kì điểm nào của tam giác đều tới các cạnh của nó là không đổi, thì nói riêng, khi điểm đã cho trùng với một đỉnh, tổng đó cũng không đổi. Vì một đỉnh là giao điểm của hai cạnh nên khoảng cách từ một đỉnh tới hai cạnh đi qua nó bằng không, và vì vậy tổng các khoảng cách nói trên, rút lại, bằng khoảng cách từ đỉnh xuống cạnh đối diện, tức là bằng đường

(1) Xem bài : "một phương pháp suy nghĩ sáng tạo" của Nguyễn Cảnh Toàn, THTT số 10 (7 – 1965).

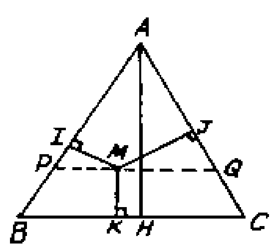
cao của tam giác đều. Như vậy là ta đã đoán được giá trị của tổng các khoảng cách từ một điểm bất kỳ của tam giác đều tới các cạnh của nó. Vấn đề đặt ra bây giờ lại là :

Chứng minh rằng tổng số các khoảng cách từ bất kì điểm nào của một tam giác đều tới các cạnh của nó bằng đường cao của tam giác ấy.

Cái khó khăn thứ hai lại xuất hiện : làm thế nào liên hệ được tổng số các khoảng cách tới ba cạnh với đường cao ? để giải quyết khó khăn này ta lại vận dụng một trường hợp riêng để soi sáng cho trường hợp chung. Nếu như trong trường hợp trên ta đã lấy điểm đã cho trùng với một đỉnh, thì bây giờ ta hãy lấy nó trên một cạnh. Điều này cũng là tự nhiên, vì nếu một điểm nằm trên một cạnh thì khoảng cách của nó tới cạnh ấy bằng không, vì do đó ta chỉ còn phải xử lý hai khoảng cách tới hai cạnh kia mà thôi. Trường hợp này có phức tạp hơn trường hợp trên nhưng cũng còn đơn giản hơn trường hợp tổng quát của bài toán. Ta hãy xét trường hợp này. Từ M ta kẻ $MI \perp AB$, $MK \perp BC$, rồi vạch đường cao AH. Mặt khác vạch từ M đường $ML \parallel BC$. Rõ ràng ta có $AN = MI$ (đường cao của một tam giác đều), và $NH = MK$ (đoạn thẳng song song chắn bởi hai đường song song), Từ đó $MI + MK = AN + NH = AH$ (hình 1). Bây giờ ta đã được chuẩn bị đầy đủ để bước vào chứng minh trường hợp tổng quát. Điều này xuất hiện một cách hiển nhiên trên hình vẽ (hình 2), nhờ một đường song song vạch từ M với cạnh BC. Ta có $MI + MJ = AN$ (trường hợp trên) và $MK = NH$.



Hình 1



Hình 2

Từ đó :

$$MI + MJ + MK = AN + NH = AH\ .$$

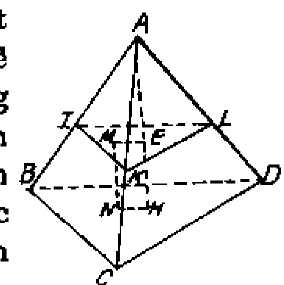
Như vậy là ta đã *vận dụng được một trường hợp riêng để giải quyết trường hợp chung.*

Bây giờ ta hãy đặt vấn đề giải một bài toán tương tự trong hình học không gian (lớp 9). Đây cũng từ một ví dụ về việc *đi từ riêng tới chung.*

Cái gì tương tự với "tam giác đều" trong không gian ? Ai cũng thấy ngay rằng đó là một tứ diện đều. Vậy ta hãy đặt vấn đề :

Chứng minh rằng tổng các khoảng cách từ một điểm của một tứ diện đều tới bốn mặt của nó bằng đường cao của tứ diện.

Bài toán này cũng không phải là dễ. Tuy nhiên, nếu ta phân tích kĩ cách giải của bài toán trên, thì ta sẽ có thể thấy được phương hướng để giải bài toán này. Thật vậy, để giải bài toán trên trong trường hợp tổng quát nhất, ta đã vạch từ điểm đã cho một đường song song với một cạnh để đưa trường hợp tổng quát về trường hợp riêng trong đó điểm đã cho nằm trên một cạnh của tam giác đều APQ. Điều này gợi ý cho ta trước hết đưa trường hợp tổng quát trong bài toán mới về trường hợp riêng trong đó điểm đã cho nằm trên một mặt của một tứ diện đều mà ta sẽ dựng được bằng cách vạch từ điểm đã cho một mặt phẳng song song với một mặt nào đó của tứ diện chẳng hạn mặt phẳng IKL song song với mặt BCD (hình 3).

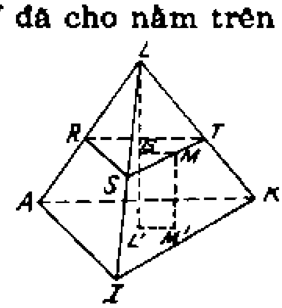


Hình 3

Vì $MN = EH$ nên rõ ràng vấn đề còn lại là :

Chứng minh rằng tổng các khoảng cách từ một điểm trên một mặt của một tứ diện đều tới ba mặt kia của tứ diện đó bằng đường cao của tứ diện ấy.

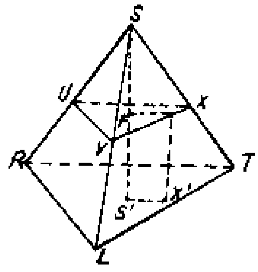
Lại khai thác điều gợi ý trên đây, để giải bài toán này ta sẽ tìm cách đưa về trường hợp riêng trong đó điểm M đã cho nằm trên một *cạnh* của một tứ diện đều mà ta sẽ dựng được bằng cách vạch từ điểm đã cho một mặt phẳng song song với một trong các mặt còn lại của tứ diện, chẳng hạn mặt phẳng RST song song với mặt AIK vì $MM' = GL'$ (hình 4).



Hình 4

Chứng minh rằng tổng các khoảng cách từ một điểm trên một cạnh của một tứ diện đều tới hai mặt của tứ diện không đi qua cạnh đó bằng đường cao của tứ diện.

Khai thác một lần nữa điều gợi ý trên kia, để giải bài toán mới này ta sẽ tìm cách đưa về trường hợp riêng trong đó điểm M đã cho nằm trên một đỉnh của một tứ diện đều mà ta sẽ dựng nên bằng cách vạch từ điểm đó một mặt phẳng song song với một trong hai mặt của tứ diện không đi qua cạnh chứa điểm đã cho, chẳng hạn mặt phẳng UVX song song với mặt RLT vì $XX' = FS'$ (hình 5) nên rõ ràng vấn đề còn lại là :



Hình 5

Nhận xét rằng khoảng cách từ một đỉnh của một tứ diện đều tới mặt đối diện bằng đường cao của tứ diện ấy.

Các bạn thấy không ? trong toàn bộ lí luận trên đây ta đã lần lượt đi từ chung tới riêng, từ một trường hợp tổng quát hơn đến một trường hợp đặc biệt hơn, đến khi xuất hiện một trường hợp hiển nhiên. Một lần nữa ta đã vận dụng được các trường hợp riêng để giải quyết trường hợp chung.

*

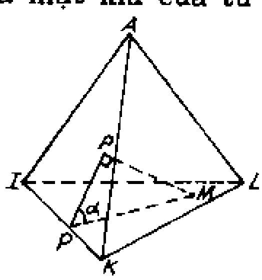
* *

Ngoài cách giải trên đây ta còn có thể áp dụng trực tiếp kết quả của bài toán phẳng để giải bài toán không gian. Điều này có thể tiến hành như sau :

Trước hết ta đưa trường hợp tổng quát về trường hợp điểm đã cho nằm trong một mặt của tứ diện.

Vấn đề còn lại là chứng minh rằng tổng các khoảng cách từ một điểm trên một mặt của một tứ diện đều tới ba mặt kia của tứ diện bằng đường cao của tứ diện ấy.

Giả sử đã cho tứ diện đều $AIKL$ và 1 điểm M trên mặt IKL (hình 6). gọi MP, MQ, MR là các khoảng cách của nó tới các mặt AIK, AKL và ALI.



Hình 6

Trong mặt phẳng AIK chẳng hạn, ta kẻ $PP' \perp IK$. Theo định lí ba đường vuông góc, ta nhận thấy rằng $MP' \perp IK$. Vậy góc $\widehat{PP'M}$ là một góc phẳng của một nhị diện của tứ diện đã cho. Gọi nó là α thì ta có :

$$MP = MP' \sin\alpha$$

$$MQ = MQ' \sin\alpha$$

$$MR = MR' \sin\alpha$$

Từ đó

$$MP + MQ + MR = (MP' + MQ' + MR') \sin\alpha$$

Nhưng vì MP', MQ' và MR' là các khoảng cách từ điểm M tới ba cạnh của tam giác đều IKL nên tổng của chúng bằng đường cao của tam giác đó. Mặt khác vì tứ diện là đều nên tất cả các mặt của nó là những tam giác đều bằng nhau. Do đó nếu ta xét tam giác vuông AHA' (AH đường cao của tứ diện đều, AA' đường cao của một mặt) trong đó rõ ràng $\widehat{AA'H} = \alpha$ thì ta có $AH = AA'\sin\alpha$

Và như vậy là :

$$MP + MQ + MR = (MP' + MQ' + MR') \sin\alpha$$

$$AH = AA' \sin\alpha$$

Ở đây một lần nữa ta lại vận dụng được các trường hợp riêng để giải quyết trường hợp chung.

Qua mấy ví dụ trên đây tôi muốn lưu ý các bạn trẻ yêu toán mấy điểm sau :

1) Đứng trước một vấn đề phải giải quyết, trước hết cần hình dung nội dung của vấn đề ấy càng rõ ràng cụ thể càng tốt. Muốn thế, một phương pháp thường dùng là xét vấn đề đó trong những trường hợp riêng của nó. Đó tức là *lấy cái riêng soi sáng cho cái chung.*

2) Để giải quyết vấn đề đã đặt ra, cần phân tích nội dung của vấn đề ấy, biến đổi nó thành những vấn đề khác đơn giản sao cho giải quyết các vấn đề này thì sẽ giải quyết được vấn đề tổng quát đã đặt ra. *Đó tức là vận dụng cái riêng để giải quyết cái chung.*

3) Cuối cùng xin nhắc lại một lời khuyên đã nhiều lần nói tới là không bao giờ được thỏa mãn với một lời giải đã tìm được. Cần có ý thức thường trực cải tiến lời giải đó. Và nếu sau khi suy nghĩ thấy khó có thể cải tiến thêm được nữa thì cũng chớ nên dừng lại ở đây. Cần tự đặt câu hỏi : có thể mở rộng lời giải đã tìm được hoặc đề xuất ra một bài toán nào tổng quát hơn không ? Mặt khác, khi đã tìm được lời giải tổng quát rồi, nên tự đặt ra các câu hỏi : có trường hợp riêng nào lí thú cần nghiên cứu sâu không ? Đó tức là *đi từ cái riêng đến cái chung và ngược lại.*

Để giúp các bạn suy nghĩ theo phương hướng ấy tôi xin giới thiệu một bài toán đã ra trong sách giáo khoa hình học lớp 9(*), mà nội dung là một sự mở rộng của bài toán đã trình bày trên : *chứng minh rằng tổng các khoảng cách từ một điểm của một đa diện đều tới các mặt của nó là không đổi.*

Tới đây xin tạm dừng câu chuyện "riêng chung" chúc các bạn đạt được nhiều thành công trong học tập.

(*) tương đương lớp 11 CCGD

DIỆN TÍCH CỦA CÁC MẶT TRÒN XOAY

(Một phương pháp tìm diện tích các mặt tròn xoay trong chương trình hình học phổ thông)

NGUYỄN ĐĂNG PHẤT

1. Khái niệm về diện tích các mặt

Để định nghĩa diện tích của mặt cho ở dưới đây được tự nhiên, trước hết ta hãy xét một bài toán thực tế. Chúng ta hãy hình dung một thùng phuy và một tấm sắt tây hình vuông, mỗi cạnh dài 1 mét. Mặt xung quanh của thùng phuy không phải có dạng đơn giản là mặt trụ tròn xoay mà có dạng một mặt ren trụ (mặt đinh ốc trụ tròn xoay). Cả thùng phuy và tấm sắt tây đều đã rỉ, mà người ta thì muốn dùng thùng phuy để chứa nước ăn, còn tấm sắt tây để đậy một bể hình hộp chữ nhật cũng chứa nước ăn có mặt bể (đáy trên) hình vuông kích thước 1m × 1m. Người ta đem sơn cả thùng phuy và tấm sắt tây đó ; giả sử người ta sơn một mặt của tấm sắt tây và sơn mặt trong của thùng phuy. Tất nhiên sau khi sơn xong và phơi khô, chúng đều trở thành những vật có ích như người ta mong muốn. Nếu sơn cái thùng phuy tốn v_1 lít sơn, sơn tấm sắt tây tốn v_2 lít sơn và giả sử quét sơn đều như nhau (có nghĩa là bề dày lớp sơn, phết trên tấm sắt tây cũng như lên mặt trong của thùng phuy là bằng nhau) thì, dễ hiểu, đương nhiên người ta nghĩ đến việc so sánh diện tích (bề mặt) của thùng phuy hình ren trụ và diện tích tấm sắt tây hình vuông : Một cách tự nhiên, người ta sẽ nghĩ rằng diện tích của thùng phuy gấp v_1/v_2 lần diện tích của tấm sắt tây. Đại lượng v_1/v_2 đặc trưng cho đại lượng diện tích của mặt xung quanh thùng phuy (mặt ren trụ tròn) so sánh với đơn vị diện tích phẳng là $1m^2$. Lượng sơn cần để sơn mặt tấm sắt tây, rõ ràng bằng thể tích của một hình hộp chữ nhật có đáy là một hình vuông 1m × 1m và chiều cao d bằng bề dày của lớp sơn phủ trên tấm sắt đó. Do đó để xác định diện tích cần sơn của mặt thùng phuy hình ren trụ đó, lẽ tất nhiên cũng dễ hiểu người ta sẽ nghĩ đến đại lượng v_1/d (vì diện tích của tấm sắt tây đã bằng v_2/d).

Trên cơ sở đó, bây giờ ta chuyển sang định nghĩa hình học của khái niệm diện tích các mặt cong.

a) Định nghĩa diện tích của mặt cong.

Định nghĩa A. Giả sử F là một mặt đã cho. Ta dựng một vật thể (hình học) là F_d, gồm tất cả các điểm không gian, sao cho mỗi điểm đó, ta có thể tìm được một điểm của mặt F cách nó một khoảng, không lớn hơn d. Gọi $V, (d, F, d)$ là thể tích của vật thể E_d. Ta gọi là *diện tích của mặt F, giới hạn của tỉ số V (d, F, d) / 2d khi* $d \to 0$, nghĩa là, nếu gọi S là diện tích của mặt F, thì :

$$S = \lim_{d \to 0} V(d, E, d)/2d \qquad (1)$$

– Ta có thể hình dung một cách trực quan vật thể F_d là một vật thể như sau : Mặt F là vỏ của một cái thùng (hộp hay chậu) không nào đó, làm bằng tôn hay sắt tây ; bây giờ người ta đem sơn cái thùng đó, quét đều sơn cả phía trong và phía ngoài của thùng một lớp sơn có bề dầy là d đơn vị dài ; ở đây, đóng vai trò vật thể F_d là lớp sơn dày $2d$ (đơn vị dài) phủ cả phía trong và phía ngoài của thùng.

– Định nghĩa diện tích của mặt cong nêu trên đây là định nghĩa theo Min–côp–ski.

– Trong trường hợp F là một mặt (lồi) kín, nghĩa là mặt của một vật thể hình học nào đó, để đơn giản cho việc tính toán, ta có thể thay định nghĩa A ở trên bằng định nghĩa B sau đây, tương đương với nó mà việc chứng minh sự tương đương giữa hai định nghĩa đó không có gì khó khăn lắm (2).

Định nghĩa B. Giả sử F là một mặt kín đã cho. Ta dựng vật thể F_d gồm tất cả các điểm của không gian ở về phía trong(*) (hoặc phía ngoài) của mặt đó, sao cho với mỗi điểm đó, ta có thể tìm được một điểm của mặt F, cách nó một khoảng không lớn hơn d. Gọi $V(d,F)$ (hoặc $V(F,d)$(**)) là thể tích của vật thể F_d. Ta gọi là *diện tích của mặt F, giới hạn của tỉ số V(d, F)/d (hoặc V(F,d)/d) khi* $d \to 0$ nghĩa là :

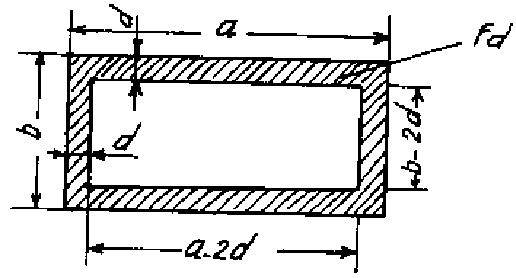
$$S = \lim_{d \to 0} V(d\,,E)\,/\,d$$

(hoặc $$S = \lim_{d \to 0} V(F\,,d)\,/\,d)\,. \qquad (2)$$

– Lẽ dương nhiên, định nghĩa B chỉ áp dụng đối với những mặt kín. Ngoài việc chứng minh hai định nghĩa trên về diện tích các mặt cong (kín) tương đương với nhau, ta cũng có thể chứng minh được các tính chất sau đây của diện tích các mặt cong : Hai mặt (không phân biệt kín hay hở) bằng nhau thì có diện tích bằng nhau ; nếu một mặt F được chia thành hai phần F_1 và F_2 thì diện tích của cả mặt bằng tổng các diện tích các phần của nó.

– Định nghĩa B của diện tích các mặt cong kín vừa nêu ở trên, cũng như cách tìm diện tích một số mặt tròn xoay gặp trong giáo trình hình học phổ thông sẽ trình bày sau đây là của tác giả bài báo này.

b) Có thể chứng minh rằng đối với những mặt lồi đơn giản, như mặt xung quanh (hay mặt toàn phần) của hình lăng trụ và hình chóp (một cách tổng quát là mặt của khối đa diện) cách định nghĩa A và B vừa cho đưa về đúng với nghĩa trước đây của diện tích xung quanh hay diện tích toàn phần (của mặt đa diện) của các hình đó mà ta đã định nghĩa là tổng diện tích các mặt bên hay tổng diện tích tất cả các mặt của nó. Lấy hình hộp chữ nhật làm thí dụ. Giả sử hình hộp chữ nhật có các kích thước là a, b và c. Ta hãy tìm diện tích toàn phần của hình hộp đó. Gọi F là mặt hình hộp đã cho, vật thể F_d nói trong định nghĩa B của diện tích mặt kín có hình khung kín là một lớp có bề dày d, gồm giữa mặt của hai hình hộp chữ nhật cùng tâm và cùng mặt phẳng đối xứng : hình hộp đã cho có các kích thước là a, b, c và hình hộp có các kích thước là $a - 2d$, $b - 2d$, $c - 2d$. Hình 1 biểu diễn một thiết diện song song với đáy $a \times b$ của nó. Thể tích của vật thể hình khung đó bằng hiệu các thể tích của hai hình hộp chữ nhật, nghĩa là :



Hình 1

$$V(d, F) = abc - (a - 2d)(b - 2d)(c - 2d) =$$
$$= 2(ab + bc + ca)d - (a + b + c)d^2 + 8d^3$$

và

$$V(d\,, F)\,/\,d = [2(ab + bc + ca)\,d -$$
$$-\ 4(a + b + c)\,d^2 + 8d^3]\,/\,d =$$
$$= 2(ab + bc + ca) - 4\,(a + b + c)\,d + 8d^2\,.$$

Khi $d \to 0$, tỉ số $V(d,F)/d$ tiến tới giới hạn $S = 2\,(ab + bc + ca)$, giới hạn này đúng bằng tổng diện tích tất cả sáu mặt của hình hộp chữ nhật.

2. Diện tích của mặt cầu và của các bộ phận của nó

Định lí 1. Diện tích chỏm cầu hay đới cầu bằng độ dài đường tròn lớn nhân với chiều cao của chỏm cầu hay đới cầu ấy, nghĩa là diện tích của chỏm cầu (hay đới cầu) bán kính R và chiều cao h bằng

$$S\,\binom{\text{chỏm cầu}}{\text{đới cầu}} = 2\pi Rh \qquad (3)$$

Chứng minh. Để có thể dùng định nghĩa B của diện tích mặt kín vào việc tính diện tích của chỏm cầu (hay đới cầu), trước hết ta hãy tìm diện tích toàn phần S của khối chỏm cầu bằng cách phụ thêm vào mặt chỏm cầu (một mặt cong không kín) mặt đáy của nó cho thành một mặt kín F (mặt chỏm cầu toàn phần). Vật thể F_d mà ta phải dựng, nói

---

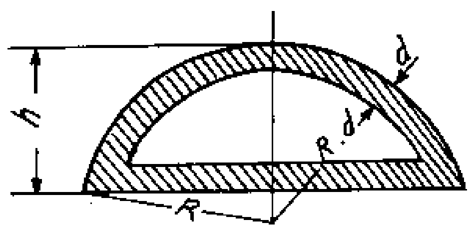
(1) Ta tưởng tượng (cố nhiên chỉ là giả thiết) bề dày của vỏ thùng không đáng kể.

(2) Bạn đọc có thể chứng minh được sự tương đương giữa hai định nghĩa A và B cùng hai tính chất nêu ở dưới của diện tích mặt cong ; vì khuôn khổ bài báo, ở đây ta tạm thừa nhận điều đó.

(*) Những điểm thuộc phía trong của mặt kín F là những điểm trong của vật thể nhận F làm biên của nó.

(**) Kí hiệu V(d, F) hoặc V(F, d) tùy theo ta dựng vật thể E_d ở trong hay ngoài mặt kín F.

trong định nghĩa B của diện tích mặt kín, có thể gọi là hình "vành khăn chỏm cầu" có bề dày d, gồm giữa hai mặt chỏm cầu toàn phần, đồng tâm : mặt chỏm cầu bán kính R, chiều cao h đã cho, và mặt chỏm cầu bán kính $R - d$, chiều cao $h = 2d$. Hình 2 biểu diễn một thiết diện qua tâm của hình "vành khăn chỏm cầu" F_d đó. Thể tích $V(d,F)$ của hình vành khăn chỏm cầu F_d bằng hiệu thể tích hai khối chỏm cầu, nghĩa là theo công thức thể tích chỏm cầu thì :



Hình 2

$$V(d\,,F) = \pi\, h^2 \left(R - \frac{h}{3} \right) - \pi\,(h - 2d)^2 \times$$

$$\times \left[(R - d) - \frac{h - 2d}{3} \right]$$

Sau khi tính toán và rút gọn ta được

$V(d,F) =$

$$= \pi \left[\frac{h^2}{3} + 4(h - d)\left(R - \frac{h + d}{3} \right) \right] d =$$

$$= \pi\, d \left[h(4R - h) - 4Rd + \frac{4}{3} d^2 \right]$$

Do đó :

$$V(d\,,F)\,/d = \pi h(4R - h) - 4\pi d(R - d/3)\ .$$

$$S_c = \lim_{d \to 0} V(d\,,F)/d = h\,(4R - h) =$$

$$= 2\,\pi\,Rh + \pi\,h\,(2R - h)\ .$$

Nhưng lại có : $\pi\,h\,(2R - h) = \pi\,r^2$ là diện tích đáy của khối chỏm cầu. Từ đó suy ra công thức (3) cần tìm của diện tích chỏm cầu :

$$S \text{ (chỏm cầu)} = S_o - \pi\,r^2 = 2\,\pi Rh\ .$$

Trường hợp đới cầu (hay là cầu phân hai đáy), muốn tìm diện tích của nó, ta lấy hiệu diện tích của hai chỏm cầu, cuối cùng cũng đi đến công thức (3).

Hệ quả 1. Diện tích chỏm cầu hay đới cầu bằng ba lần thể tích hình quạt cầu tương ứng chia cho bán kính hình cầu.

Thật vậy, ta có :

$$2\,\pi\,Rh = 3[(2/3)\,\pi\,R^2\,h]/R\ .$$

Hệ quả 2. Diện tích mặt cầu bằng độ dài đường tròn lớn của nó nhân với đường kính, hoặc bằng 4 lần diện tích của hình tròn lớn : S (cầu) $= 4\pi R^2$.

Hệ quả 3. Diện tích mặt cầu bằng ba lần thể tích hình cầu chia cho bán kính hình cầu.

Thật vậy, ta có $4\,\pi\,R^2 = 3\,[(4/3)\,R^3]/R$.

Chú thích : Để tìm diện tích mặt cầu, ta có thể tính trực tiếp bằng cách sử dụng định nghĩa A hoặc định nghĩa B. Chứng minh rất nhanh gọn và vô cùng đơn giản, đề nghị bạn đọc hãy thử nghiệm lại, tự mình tìm lại công thức diện tích mặt cầu.

3. Diện tích xung quanh của hình trụ, hình nón và hình nón cụt

Định lí 2. Diện tích xung quanh của hình nón cụt bằng nửa tổng các chu vi đáy nhân với đường sinh. Nếu các bán kính đáy là R, R' và đường sinh có độ dài là l thì diện tích xung quanh của hình nón cụt bằng

$$S = \pi\,(R + R')\,l \qquad (4)$$

Chứng minh. Trước hết ta hãy tìm diện tích toàn phần S_o của nó bằng cách phụ thêm vào mặt xung quanh các mặt đáy cho thành một mặt kín F (nghĩa là mặt toàn phần của hình nón cụt). Vật thể F_d mà ta phải dựng, nói trong định nghĩa B của diện tích mặt kín, có bề dày d, gồm giữa hai mặt nón cụt toàn phần, đồng trục : mặt toàn phần của hình nón cụt có bán kính đáy R, R', chiều cao h đã cho, và mặt toàn phần của hình nón cụt nhỏ dựng ở bên trong hình nón cụt đã cho, có khoảng cách đến mặt nón cụt đã cho là d, bán kính hai đáy là R_1, R'_1 và chiều cao là $h' = h - 2d$. Hình 3 biểu diễn một thiết diện qua trục của vật thể F_d đó. Nếu gọi φ là góc giữa các đường sinh với các mặt phẳng đáy của hình nón cụt, từ hình 3 dễ dàng tính được các bán kính đáy theo thứ tự lớn và nhỏ R_1 , R'_1 của hình nón cụt nhỏ mới dựng :

$$R_1 = R - dt'\ ,\ \text{và}\ R'_1 = R' - dt \qquad (5)$$

trong đó ta đã đặt : $\mathrm{tg}(\varphi/2) = t$ và $\mathrm{cotg}(\varphi/2) = t'$ $(= 1/t)$ $(0 < \varphi < 90^o)$. Sau khi tính toán và rút gọn, ta được

$$S_o = \lim_{d \to 0} V(d, F)/d =$$

$$= (1/3)\,\pi\, h\,[R\,(t + 2t') + R'(t' + 2t)] +$$

$$+ (2/3)\,\pi\,(R^2 + RR' + R'^2)$$

Nhưng : $h = (R - R')tg\varphi = [2t/(1-t^2)](R - R')$

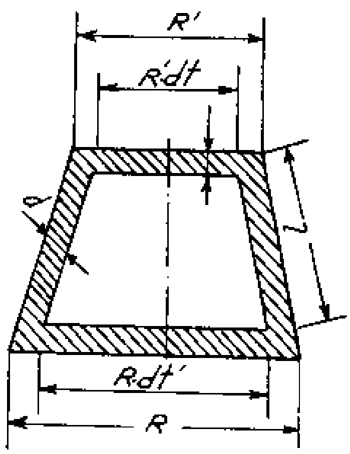
Cuối cùng, ta được kết quả :

$$S_o = (1/3)\,\pi R^2\,(1 + 3/\cos\varphi) +$$

$$+ (1/3)\pi R^2(1 - 3/\cos\varphi) + (2/3)\pi(R^2 + R'^2) =$$

$$= \pi\,(R^2 + R'^2) + \pi(R + R')(R - R')/\cos\varphi\,.$$

Nhưng $(R - R')/\cos = 1$, là độ dài đường sinh của hình nón cụt, và $\pi\,(R^2 + R'^2)$ là



Hình 3

diện tích hai đáy của nó, do đó ta được công thức (4) của diện tích xung quanh S của hình nón cụt có bán kính đáy R, R' và đường sinh l cần tìm.

Hệ quả 4. Diện tích xung quanh của hình nón bằng nửa chu vi đáy nhân với đường sinh, nghĩa là nếu gọi R là bán kính đáy và l là đường sinh của hình nón cụt.

$$S_{(nón)} = \pi R\, l \qquad (6)$$

Thật vậy, bằng cách đặt $R' = 0$ vào công thức (4) của diện tích xung quanh hình nón cụt, ta được ngay công thức (6) của diện tích xung quanh hình nón.

Hệ quả 5. Diện tích xung quanh của hình trụ bằng chu vi đáy nhân với chiều cao nghĩa là nếu gọi R là bán kính đáy và h là chiều cao của hình trụ thì

$$S_{(trụ)} = 2\,\pi\, Rh \qquad (7)$$

Thật vậy, ta có nhận xét rằng cho R' dần tới R thì hình nón cụt dần trở thành hình trụ. Nói khác đi, ta có thể xem hình trụ như là một trường hợp giới hạn của hình nón cụt. Do đó đến giới hạn, nghĩa là nếu cho $R' = R$, và khi đó $l = h$ và đặt vào (4) ta được công thức (7).

Chú thích. Tuy nhiên, ta có thể trực tiếp suy ra công thức (7) trên đây của diện tích xung quanh hình trụ một cách hết sức đơn giản bằng cách dùng định nghĩa B của diện tích mặt kín. Đề nghị bạn đọc thử nghiệm lại điều đó, tự mình tìm lại công thức (7) trên đây.

DÙNG TRẬT TỰ ĐỂ GIẢI CÁC BÀI TOÁN CÓ CÁC YẾU TỐ BÌNH ĐẲNG

VŨ QUANG SỬU

Khi làm toán, chắc các bạn gặp không ít những bài toán mà các yếu tố tham gia trong đó bình đẳng với nhau, nghĩa là nếu ta trao đổi các yếu tố đó cho nhau thì không làm thay đổi bài toán. Chẳng hạn các bài toán : "Tìm tất cả các số nguyên tố a, b, c sao cho $abc < ab + bc + ca$", hay là "Tìm các số nguyên dương x, y, z sao cho $xyz = 9 + x + y + z$"... là những bài toán có tính chất vừa nêu.

Để giải những bài toán dạng như thế có thể có nhiều cách khác nhau, tùy thuộc vào từng bài cụ thể. Trong bài báo nhỏ này tôi muốn giới thiệu với các bạn một phương pháp giải các bài toán trên.

Ta biết rằng, nếu cho n số thực $a_1, a_2, \ldots, a_n$, thì bao giờ ta cũng có thể sắp chúng theo thứ tự tăng dần hoặc giảm dần. Cho nên nếu $a_1, a_2, \dots, a_n$ tham gia vào một bài toán bình đẳng với nhau, thì bao giờ ta cũng có thể giải bài toán với giả thiết $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \dots \leqslant a_n$ hoặc $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \dots \geqslant a_n$.

Trước hết ta giải hai bài toán vừa nêu ở trên.

Bài toán 1. *Tìm tất cả các số nguyên tố a, b, c sao cho $abc < ab + bc + ca$.*

Giải : Vì các số a, b, c bình đẳng với nhau nên không mất tính tổng quát ta giả thiết $a \leqslant b \leqslant c$.

Suy ra $ab + bc + ca \leqslant 3bc$.

Nếu $a \geqslant 3 \Rightarrow 3bc \leqslant abc \Rightarrow ab + bc + ca \leqslant abc$, mâu thuẫn với bài ra. Vậy $a = 2$ (vì a nguyên tố). Do đó :

$2bc < 2b + bc + 2c \Rightarrow 1/c + 1/b > 1/2 \Rightarrow b < 5$

* $b = 2 \Rightarrow c$ nguyên tố bất kì.

* $b = 3 \Rightarrow c = 3$ hoặc $c = 5$.

Tóm lại nghiệm của bài toán là :

$a = 2, b = 2, c = p$ nguyên tố và các hoán vị, hoặc $a = 2, b = 3, c = 3$ và các hoán vị.

Bài toán 2. *Tìm tất cả các số nguyên dương x, y, z sao cho $xyz = 9 + x + y + z$.*

Giải : Do x, y, z tham gia vào bài toán bình đẳng với nhau nên, không mất tính tổng quát ta giả thiết $x \geqslant y \geqslant z \geqslant 1$. Ta có các khả năng sau :

1. Cả ba số bằng 1 : không thỏa mãn phương trình.

2. $x > 1, y = z = 1 \Rightarrow x = 11 + x$: vô lí.

3. $x \geqslant y > 1, z = 1 \Rightarrow xy = 10 + x + y$ hay $11 = (x-1)(y-1)$, vì $x - 1 \geqslant y - 1$ nên $x - 1 = 11, y - 1 = 1$ và $x = 12, y = 2, z = 1$.

4. $x \geqslant y \geqslant z > 1$.

Đặt $u = x - 2$, $v = y - 2$, $w = z - 2$

$\Rightarrow u \geqslant v \geqslant w \geqslant 0$ và ta có :

$15 + u + v + w = (u+2)(v+2)(w+2) =$
$= uvw + 2(uv + wv + wu) + 4(u + v + w) + 8$

Suy ra :

$7 = uvw + 2(uv + vw + wu) + 3(u + v + w) (*)$

$v = 0 \Rightarrow 7 = 3u$ không thể xẩy ra.

$v > 0 \Rightarrow u \geqslant v \geqslant 1 \Rightarrow 2uv + 3(u+v) \geqslant 8$: vô lí

Tóm lại nghiệm của phương trình là :

$x = 12, y = 2, z = 1$ và các hoán vị.

Bài toán 3. *Tìm 12 số nguyên dương, sao cho tổng của chúng bằng tích của chúng.*

Giải : Gọi các số phải tìm là $x_1, x_2, \dots x_{12}$. Rõ ràng $x_1, x_2, \dots x_{12}$ bình đẳng với nhau nên ta giả thiết $x_1 \geqslant x_2 \dots \geqslant x_{12} \geqslant 1$ (1)

Ta giải phương trình

$$x_1x_2 \dots x_{12} = x_1 + x_2 + \dots + x_{12} \qquad (2)$$

Từ (1) $\Rightarrow x_1x_2 \dots x_{12} \leqslant 12x_1$

hay $x_2 \dots x_{12} \leqslant 12$ (3)

Vì $2^4 = 16 > 12$ nên từ (3) ta thấy trong 11 số $x_2x_3 \dots x_{12}$ không thể có hơn 3 số lớn hơn 1. Vậy trong 12 số $x_1, x_2 \dots x_{12}$ không thể có hơn 4 số lớn hơn 1. Do đó chỉ có thể xảy ra 5 trường hợp :

1. $x_1 = x_2 = \dots = x_{12} = 1$, không thỏa mãn phương trình (2).

2. $x_1 > x_2 = x_3 \dots = x_{12} = 1$, từ (2) suy ra : $x_1 = 11 + x_1 \Rightarrow 11 = 0$ nên chúng không thể thỏa mãn (2).

3. $x_1 \geqslant x_2 \geqslant x_3 = x_4 = \dots = x_{12} = 1$, suy ra : $x_1x_2 = 10 + x_1 + x_2 \Rightarrow$
$(x_1 - 1)(x_2 - 1) = 11 = 11 . 1$
vì $x_1 - 1 \geqslant x_2 - 1 \Rightarrow x_1 - 1 = 11, x_2 - 1 = 1$.

Từ đó suy ra

$x_1 = 12, x_2 = 2$ và $x_3 = x_4 = \dots = x_{12} = 1$.

4. $x_1 \geqslant x_2 \geqslant x_3 > x_4 = \dots = x_{12} = 1$, từ (2) suy ra $x_1x_2x_3 = 9 + x_1 + x_2 + x_3$.

Theo bài toán 2, ta có $x_1 = 12$ $x_2 = 2$, $x_3 = 1$: không thỏa mãn vì $x_3 > 1$.

5. $x_1 \geqslant x_2 \geqslant x_3 \geqslant x_4 > x_5 = \dots = x_{12} = 1$. Từ (2) suy ra $x_1x_2x_3x_4 = 8 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ (4) Đặt $y_1 = x_1 - 2$, $y_2 = x_2 - 2$, $y_3 = x_3 - 2$, $y_4 = x_4 - 2$, suy ra $y_i \geqslant 0$ $\forall i = 1, 2, 3, 4$ và ta có (4) tương đương với

$16 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 =$

$= (y_1 + 2)(y_2 + 2)(y_3 + 2)(y_4 + 2)$

$= 16 + 8(y_1 + y_2 + y_3 + y_4) + \dots$

hay $\quad 0 = 7(y_1 + y_2 + y_3 + y_4) + \dots$

suy ra $\quad y_1 = y_2 = y_3 = y_4 = 0 \Rightarrow$

$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 2$

Tóm lại các số cần tìm là

$x_1 = 12, x_2 = 2$, $x_3 = x_4 = x_5 = ... = x_{12} = 1$

hoặc

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 2 \ ;$$

$$x_5 = x_6 = ... = x_{12} = 1 \ .$$

Bài toán 4. *Cho a_1, a_2, a_3, a_4 là 4 số thực đôi một khác nhau. Giải hệ phương trình sau :*

$$\begin{cases} |a_1 - a_2|\,x_2 + |a_1 - a_3|\,x_3 + |a_1 - a_4|\,x_4 = 1 \\ |a_2 - a_1|\,x_1 + |a_2 - a_3|x_3 + |a_2 - a_4|\,x_4 = 1 \\ |a_3 - a_1|x_1 + |a_3 - a_2|x_2 + |a_3 - a_4|x_4 = 1 \\ |a_4 - a_1|x_1 + |a_4 - a_2|x_2 + |a_4 - a_3|x_3 = 1 \end{cases} \quad (1)$$

Giải : Ta thấy rằng 4 số đôi một khác nhau a_1, a_2, a_3, a_4 tham gia vào bài toán bình đẳng với nhau, nên không mất tính tổng quát, ta giả thiết

$$a_1 > a_2 > a_3 > a_4$$

Khi đó hệ (1) tương đương với :

$$\begin{cases} (a_1 - a_2)x_2 + (a_1 - a_3)x_3 + (a_1 - a_4)x_4 = 1 \ (a) \\ (a_1 - a_2)x_1 + (a_2 - a_3)x_3 + (a_2 - a_4)x_4 = 1 (b) \\ (a_1 - a_3)x_1 + (a_2 - a_3)x_2 + (a_3 - a_4)x_4 = 1 (c) \\ (a_1 - a_4)x_1 + (a_2 - a_4)x_2 + (a_3 - a_4)x_3 = 1 (d) \end{cases} \quad (2)$$

Từ hệ (2), thực hiện các phép tính *(a) − (b) ; (b) − (c) ; (c) − (d)* ta được hệ tương đương :

$$\begin{cases} (a_1 - a_2)\,(-x_1 + x_2 + x_3 + x_4) = 0 \\ (a_2 - a_3)\,(-x_1 - x_2 + x_3 + x_4) = 0 \\ (a_3 - a_4)\,(-x_1 - x_2 - x_3 + x_4) = 0 \\ (a_1 - a_4)x_1 + (a_2 - a_4)x_2 + (a_3 - a_4)x_3 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \ (a') \\ -x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \ (b') \\ -x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \ (c') \\ (a_1 - a_4)x_1 + (a_2 - a_4)x_2 + (a_3 - a_4)x_3 = 1 (d') \end{cases}$$

Lấy $(a') + (c')$ được $x_1 = x_4$; $(a') + (b')$ được $x_1 = x_3 + x_4$ suy ra $x_3 = 0$ $(b') + (c')$ được $x_1 + x_2 = x_4$ suy ra $x_2 = 0$

Thay $x_2 = x_3 = 0$ vào phương trình (d') suy ra

$$x_1 = x_4 = 1/(a_1 - a_4)$$

Vậy với $a_1 > a_2 > a_3 > a_4$ thì nghiệm của hệ là :

$$x_2 = x_3 = 0 \ , \ x_1 = x_4 = 1/(a_1 - a_4)$$

Chú ý rằng nếu, a_1 , a_2 , a_3 , a_4 có một thứ tự khác thì nghiệm cũng có một thứ tự tương ứng. Chẳng hạn nếu $a_2 > a_4 > a_1 > a_3$

thì : $x_1 = x_4 = 0$ và $x_2 = x_3 = 1/(a_2 - a_3)$

Trên đây, ta đã xét một số bài toán về giải phương trình. Bây giờ ta xét một số bài toán loại khác.

Bài toán 5. *Các số dương a, b, c thỏa mãn điều kiện gì để với mọi số tự nhiên a, các số a^n , b^n , c^n là độ dài các cạnh của một tam giác ?*

Giải : Không mất tính chất tổng quát, ta giả thiết rằng $a \geq c \geq 0$

1) Nếu $a > b \geq c > 0$ thì $1 > b/a \geq c/a$. Vì các số b/a, c/a đều nhỏ hơn 1 nên tồn tại số tự nhiên n đủ lớn sao cho $(b/a)^n + (c/a)^n < 1$ khi đó $b^n + c^n < a^n$ nên với n đó, a^n , b^n , c^n không phải là 3 cạnh của một tam giác.

2) Nếu $a = b > c > 0$ thì $a^n = b^n \geq c^n > 0$ với mọi n số tự nhiên và rõ ràng chúng là độ dài 3 cạnh của một tam giác.

Vì vậy điều kiện cần tìm của a, b, c là hai số lớn nhất phải bằng nhau.

Bài toán 6. *Chứng minh rằng trong 7 đoạn thẳng, mỗi đoạn có độ dài l tùy ý, với $1 \leq l \leq 13$, có thể chọn ra 3 đoạn để làm 3 cạnh của một tam giác. Chứng tỏ rằng bài toán không đúng nếu chỉ dùng 6 đoạn thẳng.*

Giải : Dễ chứng minh tính chất sau đây : nếu các số dương a, b, c thỏa mãn $a \geq b \geq c$ thì chúng là độ dài ba cạnh của tam giác khi và chỉ khi $a < b + c$.

Ta áp dụng tính chất trên để giải bài toán 6. Giả sử 7 đoạn đã cho có độ dài tương ứng là $l_1, l_2, ... l_7$. Không mất tính chất tổng quát ta giả thiết

$$1 \leq l_1 \leq l_2 \leq ... \leq l_7 < 13$$

Nếu không chọn ra được 3 đoạn nào làm 3 cạnh của một tam giác thì :

$l_3 \geqslant l_1 + l_3 \geqslant 1 + 1 = 2$,

$l_4 \geqslant l_2 + l_3 \geqslant 1 + 2 = 3$,

$l_5 \geqslant l_3 + l_4 \geqslant 2 + 3 = 5$,

$l_6 \geqslant l_4 + l_5 \geqslant 3 + 5 = 8$,

$l_7 \geqslant l_5 + l_6 \geqslant 5 + 8 = 13$.

Điều này mâu thuẫn với giả thiết $l_7 < 13$.

Nếu chỉ dùng 6 đoạn thẳng thì bài toán không đúng, ví dụ lấy 6 đoạn có độ dài tương ứng là $l_1 = 1$, $l_2 = 1$, $l_3 = 2$, $l_4 = 3$, $l_5 = 5$, $l_6 = 8$,

Bài toán 7. *Biết rằng*

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 = 1$$

Chứng minh rằng, giá trị nhỏ nhất của $(a_i - a_j)^2 (1 \leqslant i \neq j \leqslant 5)$ *không thể vượt quá 1/10.*

Giải : Không mất tính tổng quát, ta giả thiết rằng $a_1 \leqslant a_2 < \ldots \leqslant a_5$.

Ta kí hiệu $|a_i - a_j| = x$, rõ ràng khi đó

$$\min_{1 \leqslant i \neq j \leqslant 5} (a_i - a_j)^2 = x^2$$

Ta suy ra $a_i + 1 - a_i \geqslant x > 0$ (vì nếu $x = 0$ thì bài toán hiển nhiên đúng) với $i = 1, 2, 3, 4$.

Ta có $(a_j - a_i) = (a_j - a_{j-1}) +$
$+ (a_{j-1} - a_{j-2}) + \ldots + (a_{i+1} - a_i) \geqslant (j - i)x$
với $j > 1$, từ đó suy ra

$$(a_j - a_i)^2 \geqslant (j - i)^2 x^2$$

Lấy tổng cả hai vế theo i, j ta có :

$$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 5} (j - i)^2 x^2 \leqslant \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 5} (a_j - a_i)^2$$

Nhưng

$$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 5} (j - i)^2 x^2 = x^2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 5} (j - 1)^2 = 50 x^2$$

và $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 5} (a_j - a_i)^2 = 5 \sum_{i=1}^{5} a_i^2 - (\sum_{i=1}^{5} a_i)^2 =$

$$= 5 - (\sum_{i=1}^{5} a_i)^2 \leqslant 5$$

Vậy $50x^2 \leqslant 5$. suy ra $x^2 \leqslant 1/10$ (đpcm)

Bài toán 8. *cho 4 số thực khác nhau a, b, c, d. Biểu thức* $n(x, y, z, t) =$
$= (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - t)^2 + (t - x)^2$ *có thể nhận bao nhiêu giá trị khác nhau, nếu các biến số x, y, z, t biến thiên và là hoán vị của các số a, b, c, d ? Với giá trị nào của x, y, z, t thì n nhận giá trị lớn nhất, nhỏ nhất ?*

Giải : Các số a, b, c, d ở đây có vai trò bình đẳng nên ta giả thiết $a < b < c < d$.

Xét $n(x, y, z, t) + (x - z)^2 + (y - t)^2 =$
$= (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - t)^2 + (t - x)^2 +$
$+ (x - z)^2 + (y - t)^2$ biểu thức này bình đẳng đối với x, y, z, t nên nó là hằng số và bằng tổng bình phương tất cả các hiệu trong 4 số a, b, c, d : Cho nên $n(x, y, z, t) + (x - z)^2 + (y - t)^2 = k$ (không đổi)

hay $n(x, y, z, t) +$
$+ (x^2 + y^2 + z^2 + t^2) - 2(xz + yt) = k$

Mà $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ nên giá trị của $n(x, y, z, t)$ phụ thuộc vào giá trị của $xz + yt$. Giá trị $v = xz + yt$ phụ thuộc vào sự phân chia thành các cặp của 4 số : a, b, c, d. Rõ ràng chỉ có 3 cách sau :
$V_1 = ab + cd$, $V_2 = ac + bd$, $V_3 = ad + bc$.

Ta có $V_1 - V_2 = ab + cd - ac - bd =$

$= (b - c)(a - d) > 0$

$V_2 - V_3 = ac + bd - ad - bc =$

$= (a - b)(c - d) > 0$

Vậy $V_1 > V_2 > V_3$.

Cho nên $n(x, y, z, t)$ chỉ nhận 3 giá trị khác nhau.

$n(x, y, z, t)$ nhận giá trị lớn nhất khi $V = xz + yt$ nhận giá trị lớn nhất, mà V lớn nhất là $V_1 = ab + cd$.

Khi đó : $x = a$, $z = b$, $y = c$, $t = d$;
hoặc $x = c$, $z = d$, $y = a$, $t = b$;
hoặc $x = a$, $z = b$, $y = d$, $t = c$;
hoặc $x = d$, $z = t$, $y = a$, $t = b$;
hoặc $x = b$, $z = a$, $y = c$, $t = d$;
hoặc $x = c$, $z = d$, $y = b$, $t = a$;
hoặc $x = b$, $z = a$, $y = d$, $t = c$;
hoặc $x = d$, $z = c$, $y = b$, $t = a$;

Tóm lại có 8 hoán vị khác nhau làm cho $n(x, y, z, t)$ đạt giá trị lớn nhất. Với giá trị nhỏ nhất xét tương tự.

Cuối cùng xin gửi tới các bạn một số bài toán sau đây :

9. a) Tìm các số nguyên dương x, y, z sao cho

$$x + y + z = xyz$$

b) Tìm các số nguyên dương x, y, z, t sao cho $x + y + z + t = xyzt$.

10. Ba số dương x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1x_2x_3 > 1$ và $x_1 + x_2 + x_3 < 1/x_1 + 1/x_2 + 1/x_3$

Chứng minh rằng :

a) $x_i \neq 1$ với mọi $i = 1, 2, 3$.

b) Trong 3 số x_1, x_2, x_3 có đúng 1 số bé hơn 1.

11. a) Với giá trị nguyên nào của k thì tồn tại các số nguyên dương x, y, z thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = kxyz$.

b) Tìm trong 1000 số đầu tiên tất cả các bộ ba số sao cho tổng các bình phương của chúng chia hết cho tích của chúng.

12. Chứng minh rằng, từ 25 số dương khác nhau có thể chọn ra hai số, sao cho các số còn lại không thể bằng tổng hoặc hiệu của hai số vừa chọn.

13. Chứng minh bất đẳng thức sau :

$$(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)\dots(a_1 - a_5) + \\ + (a_2 - a_1)(a_2 - a_3)\dots(a_2 - a_5) + \\ + \dots + (a_5 - a_1)(a_5 - a_2)\dots(a_5 - a_4) \geqslant 0$$

Trong đó $a_1, a_2, \dots, a_5$ là các số thực bất kì

ĐIỀU GÌ TIẾP THEO VIỆC GIẢI CÁC ĐỀ TOÁN TRÊN BÁO

LÊ QUỐC HÁN

Cách đây 23 năm về trước, báo Toán học và tuổi trẻ (Số tháng 10, năm 1965) có ra một toán khá thú vị : "*Chứng minh rằng với mọi số nguyên n ta có $n^3 - n$ chia hết cho 3 ; $n^5 - n$ chia hết cho 5. Tổng quát hóa*". Vì vội vàng, nên đa số chúng tôi đã tổng quát hóa như sau : "*$n^k - n$ chia hết cho k, với k là số lẻ*", nhưng đã kịp thời phát hiện ra dự đoán ấy là sai ($2^9 - 2 = 510$ không chia hết cho 9). Ngày nay, hầu hết các bạn đều biết nội dung của định lí nhỏ Fecma và vận dụng thành thạo nhị thức Niutơn, nhưng đối với chúng tôi ngày đó, khi báo đăng lời giải của bài toán trên : "*$n^p - n$ chia hết cho p và p là số nguyên tố*", chúng tôi đã vô cùng ngạc nhiên về giả thiết của định lí và nhất là cách chứng minh độc đáo của nó. Tôi bèn lật lại những tờ báo *Toán học và tuổi trẻ* trước đó, thử tìm xem có bài toán nào mở rộng được theo hướng đó không ? May mắn thay, tôi đã tìm được đề toán sau ở số báo đầu tiên : "Chứng minh rằng tổng các lập phương của ba số nguyên liên tiếp chia hết cho 9". Tất nhiên, tôi nghĩ đến một dự đoán tổng quát hơn : "Chứng minh rằng tổng các lũy thừa bậc p của p số nguyên liên tiếp chia hết cho p^2". Trường hợp $p = 2$ đã bác bỏ ngay dự đoán đó ; nhưng tôi không nản chí. Liên hệ đến bài toán trên tôi nghĩ : p phải là số nguyên tố lẻ (?)

Xét tổng :

$$\sum_{i=0}^{p-1}(n + l)^p = pn^p + \sum_{k=1}^{p-2} C_p^k n^{p-k} \cdot \sum_{i=1}^{p-1} l^k + \\ + pn\sum_{i=1}^{p-1} i^{p-1} + \sum_{i=1}^{p-1} l^p$$

Ta có :

$$pn^p + pn\sum_{i=1}^{p-1} i^{p-1} = \\ = p[(n^p - n) + n\sum_{i=1}^{p-1}(l^{p-1} - 1)] + np^2 \equiv 0 (mod\, p^2).$$

Để xuất hiện phân thức có tử không chứa x ta viết như sau : $y = (ax - ab + ab - c)/(x - b) = = a + (ab - c)/(x - b)$. Vậy $x - b$ phải là ước số nguyên của $ab - c$.

Thí dụ : tìm nghiệm nguyên của phương trình vô định $4x + 3y = xy - 20$ (5).

Giải : $3y = x(y - 4) - 20$

$\rightarrow x = (3y + 20)/(y - 4) =$

$(3y - 12 + 12 + 20)/(y - 4) = 3 + 32/(y - 4)$.

Muốn x nguyên thì $y - 4$ phải là ước số nguyên của 32, tức là $y - 4 = \pm32, \pm16, \pm8, \pm4, \pm2, \pm1$. Để đơn giản, các nghiệm của (5) được tính theo bảng sau :

y - 4	32	16	8	4	2	1	−1	−2	−4	−8	−16	−32
y	36	20	12	8	6	5	3	2	0	−4	−12	−28
32 / (y − 4)	1	2	4	8	16	32	−32	−16	−8	−4	−2	−1
x	4	5	7	11	19	35	−29	−13	−5	−1	1	2

Vậy, phương trình (5) có 12 nghiệm theo bảng trên.

Phương pháp giải cũng đã khẳng định rằng phương trình (4) với a, b, c nguyên bao giờ cũng có số nghiệm nguyên là hữu hạn và chẵn (vì một số nguyên bất kì luôn có một số chẵn các ước số nguyên).

Và bây giờ chúng ta lại tự hỏi : con đường hợp lôgic tiếp theo là gì ? Tiến công vào phương trình $ax + by = c + dxy$ (6) chăng ?

Hãy thử xem ! Ta có $ax = c + dxy - by = c + y(dx - b)$. Tách riêng y : $y = (ax - c)/(dx - b)$. Nếu a chia hết cho d thì dễ dàng tìm được số thích hợp để cộng trừ thêm vào $ax - c$ như đã biết. Nhưng nếu a không chia hết cho d ? Chẳng lẽ bó tay.

Bạn cảm thấy thế nào nếu ta đặt dấu chấm hết ở đây ? Được chăng ? Cũng được, nhưng không thoải mái. Không lẽ ta lại bất lực trước những phương trình chẳng có vẻ gì phức tạp như $2x - 3y = -5xy + 39$ (7).

Các hệ số trong (7) được lấy hú họa. Bạn nghĩ xem khi chưa giải được bài toán tổng quát, ta đành xét một trường hợp cụ thể biết đâu nó chẳng gợi lên một điều gì đó.

Từ (7) suy ra

$2x = y(3 - 5x) + 39 \rightarrow$

$y = (2x - 39)/(3 - 5x)$. Để y nguyên thì điều kiện cần mà chưa đủ) là

$|2x - 39| > |3 - 5x| \leftrightarrow$

$(2x - 39)^2 \geqslant (3 - 5x)^2 \leftrightarrow$

$(2x - 39)^2$? $(3 - 5x)^2 \geqslant 0 \leftrightarrow$

$(-3x - 36)(7x - 42) \geqslant 0 \leftrightarrow -12 \leqslant x \leqslant 6$. Thật sung sướng. Từ đây ta dễ dàng tìm được các nghiệm nguyên (x, y) của (7).

Như vậy, điều kiện cần để $y = (ax - c)/(dx - b)$ nguyên là $|ax - c) \geqslant |dx - b|$ (8).

Liệu đây có phải là phương pháp tổng quát để tìm nghiệm nguyên của (6) hay không ?

Thử xét nghiệm nguyên của một phương trình nữa : $5x$? ? ? $3y = 2xy$? ? ? ? 1 (9)

Từ (9) có $5x = y(2x + 3) - 11 \rightarrow$

$$y = (5x + 11)/(2x + 3) \qquad (10)$$

Để y nguyên cần có $|5x + 11| \geqslant |2x + 5| \leftrightarrow (5x + 11)^2 \geqslant (2x + 3)^2 \leftrightarrow (7x + 14)(3x + 8) \geqslant 0 \leftrightarrow x \leqslant -8/3$; $x \geqslant -2$.

Đáng buồn thay, x có thể nhận tất cả các giá trị nguyên trên trục số. Chịu chăng ? Không ! Ta biến đổi (10) như sau :

$y = 2 + (x + 5)/(2x + 3)$. Rõ ràng y nguyên khi $x = -5$. Vậy ($x = -5$; $y = 2$) là một nghiệm của (9). Để tìm các nghiệm còn lại ta nhận thấy điều kiện cần để y nguyên là

$|x + 5| \geqslant |2x + 3| \leftrightarrow (x + 5)^2$ $(2x + 3)^2 \geqslant 0 \leftrightarrow\leftrightarrow (3x + 8)(-x - 2) \geqslant 0 \leftrightarrow 8/3 \leqslant x \leqslant 2 \rightarrow$ (9) có thêm các nghiệm (x, y) là $(-2$; $-1)$, $(2$; $3)$ $(-1$; $6)$.

Chỉ còn một chút nữa thôi, chúng ta sẽ khẳng định được : ta đã có trong tay phương pháp tổng quát để tìm nghiệm nguyên của phương trình vô định $ax + by = c + dxy$. Đó là việc chứng minh rằng : luôn luôn giới hạn được x trong một khoảng nào đó ; $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$. Bước đi cuối cùng tới thắng lợi ấy xin dành cho các bạn. Và chắc các bạn cũng hiểu rằng : Đó không phải là phương pháp duy nhất ! Cũng như phương pháp cộng trừ thêm một số thích hợp để tìm nghiệm nguyên của phương trình $ax + by = c$ trong số báo 154 không phải là phương pháp duy nhất hay !

Những phương pháp hay, những lời giải đẹp đang vẫy gọi các bạn !

NGUYÊN LÍ "KHỞI ĐẦU CỰC TRỊ"

ĐỖ BÁ KHANG

Trong khi giải toán ở nhà trường cũng như ở các kì thi học sinh giỏi, chúng ta thường phải vận dụng 3 nguyên lí chứng minh : đó là nguyên lí phản chứng, nguyên lí quy nạp và nguyên lí Dirichlêt (Về nguyên lí Dirichlêt có thể xem thêm bài "Nguyên tắc Đi-rich-lê những chiếc lồng và các chú thỏ" (đăng trong báo TH và TT số 71). Bài báo này muốn giới thiệu với các bạn 1 nguyên lí chứng minh thứ tư có thể sử dụng khá tốt cho rất nhiều bài toán thuộc các dạng hoàn toàn khác nhau, đó là nguyên lí "Khởi đầu cực trị".

Nội dung của nguyên lí phát biểu như sau :

Trong một tập hợp hữu hạn (khác rỗng) các số thực luôn có thể chọn được số bé nhất và số lớn nhất.

Vì cách chứng minh rất đơn giản nên nhường cho bạn đọc tự thực hiện lấy. Tác giả chỉ xin phép minh họa việc áp dụng nguyên lí này bằng các ví dụ cụ thể :

Ví dụ 1. n bạn học sinh thi đấu bóng bàn theo nguyên tắc đấu vòng tròn. Chứng minh rằng luôn có thể xếp cả n bạn theo hàng dọc sao cho người đứng trước thắng người đứng kế sau.

Giải : Xét tất cả các cách xếp 1 số bạn thành hàng dọc sao cho người đứng trước thắng người đứng kế sau. Vì cách xếp như vậy bao giờ cũng tồn tại và số cách xếp chỉ là hữu hạn nên theo nguyên lí khởi đầu cực trị ta có thể chọn cách xếp có nhiều bạn nhất. Ta sẽ chứng minh rằng cách xếp đó phải có cả n bạn học sinh.

Thật vậy, giả sử cách xếp đó chỉ gồm có $k < n$ bạn, theo thứ tự là $A_1, A_2, ..., A_k$. Khi đó xét bạn B không xếp trong hàng. Theo nguyên tắc đấu vòng tròn, B phải đấu với cả $A_1, A_2, ..., A_k$. Ta thấy B không thể thắng A_1 vì nếu thắng thì ta đã có được 1 cách xếp nhiều hơn k người là $B, A_1, A_2, ..., A_k$ trái với cách chọn $A_1, A_2, ..., A_k$. Do đó B thua A_2. Lập luận tương tự ta suy ra B thua A_k. Nhưng khi đó ta lại cũng có cách xếp đông hơn : $A_1, A_2, ..., A_k, B$. Trong mọi trường hợp ta đều thấy vô lí. Vậy k phải bằng n *(dpcm).*

Ví dụ 2. Trên mặt phẳng cho $2n$ điểm không có 3 điểm nào thẳng hàng, trong đó có n điểm màu đỏ và n điểm màu xanh. Chứng minh rằng tồn tại cách nối tất cả các điểm đỏ với các điểm xanh bởi n đoạn thẳng không có điểm chung.

Giải : Xét tất cả các cách nối n cặp điểm đỏ – xanh bởi n đoạn thẳng. Vì cách nối là tồn tại và số các cách nối là hữu hạn ta chọn cách nối có tổng độ dài các đoạn thẳng là ngắn nhất. Ta sẽ chứng minh đó là cách nối phải tìm. Thật vậy nếu có 2 đoạn AX và BY cắt nhau tại điểm O (A, B màu đỏ còn X, Y màu xanh). Khi đó nếu ta thay 2 đoạn AX và BY bởi 2 đoạn AY và BX và giữ nguyên các đoạn kia thì do

$$AY + BX < (AO + OY) + (BO + OX) =$$
$$= AX + BY$$

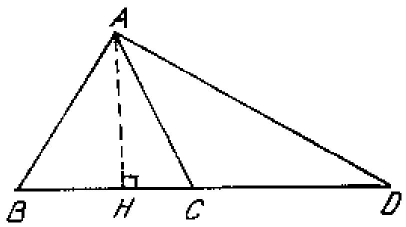
ta được 1 cách nối mới có tổng độ dài các đoạn bé hơn. Điều này trái với cách chọn ban đầu của chúng ta, vậy suy ra *dpcm.*

Ví dụ 3. (Bài toán Xin-vex-te).

Trên mặt phẳng cho n điểm ($n \geq 3$). Biết rằng mỗi đường thẳng đi qua 2 điểm bất kì đều đi qua một điểm thứ ba. Chứng minh rằng cả n điểm thẳng hàng.

Giải : Giả sử n điểm không thẳng hàng. Ứng với mỗi điểm ta xét các khoảng cách dương từ điểm đó tới tất cả các đường thẳng đi qua 2 trong số các đỉnh còn lại. Vì số khoảng cách đó là hữu hạn mà số điểm cũng hữu hạn nên ta có thể chọn khoảng cách bé nhất trong tất cả các khoảng cách được xét. Gọi đó là khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng BC. Hạ $AH \perp BC$. Theo điều kiện đầu bài, đường thẳng BC còn đi qua điểm thứ ba

D. Ta thấy hai trong số ba điểm B, C, D phải nằm về một phía của điểm H. Giả sử C và D nằm về 1 phía của H. Xét tam giác ACD có $\widehat{C}$ tù nên khoảng cách từ C đến AD bé hơn khoảng cách từ A đến CD trái với cách chọn A, B, C. Tương tự nếu A và D hay B và C ở về cùng một phía của H, ta cũng suy ra khoảng cách từ A đến BC không phải bé nhất. Mâu thuẫn chứng tỏ tất cả các điểm, đều cùng nằm trên một đường thẳng.



Ví dụ 4: Chứng minh rằng với mọi số n nguyên > 1, $2^n - 1$ không chia hết cho n.

Giải : Giả sử có số $n > 1$ sao cho $2^n - 1 \vdots\ n$. Khi đó n lẻ. Gọi p là ước số nguyên tố bé nhất của n. Do p cũng lẻ nên $(2, p) = 1$ và theo định lí Phéc–ma ta có $2^{p-1} - 1 \vdots\ p$.

Gọi k là số tự nhiên bé nhất có tính chất là $2^k - 1 \vdots\ p$. Rõ ràng $k \leqslant p - 1 < p$. Ta chứng minh khi đó $n \vdots\ k$. Thật vậy, nếu

$n = kq + r$ với $0 < r < k$ thì

$$2^n - 1 = (2^k)^q \cdot 2^r = (m \cdot p + 1)^q \cdot 2^r$$
$$= (m'p + 1)2^r.$$

Mà $2^n - 1 \vdots\ p$ vì p là ước của n nên ta suy ra

$2^r \vdots\ p$ với $0 < r < k$ trái với cách chọn k. Vậy $n \vdots\ k$. Nhưng $k < p$ nên ta suy ra n có ước số nguyên tố $< p$ trái với cách chọn p. Mâu thuẫn chứng tỏ không có n nguyên $>$ 1 để cho $2^n - 1 \vdots\ n$.

Bạn đọc thân mến, trên đây các bạn đã làm quen với nguyên lí "Khởi đầu cực trị" qua 1 số bài toán cụ thể. Ta có thể nhận thấy rằng cũng giống như nguyên lí Dirichlê hay nguyên lí quy nạp toán học, nội dung của nguyên lí "Khởi đầu cực trị" rất đơn giản, nhưng cách vận dụng vào để giải các bài toán lại rất phong phú và đa dạng. Trong 1 số trường hợp, ta có thể thay phương pháp này bởi phép quy nạp hay phản chứng thông thường nhưng việc áp dụng nguyên lí "Khởi đầu cực trị" thường cho các lời giải ngắn và độc đáo hơn nhiều. Còn bây giờ mời các bạn thử sức với 1 số bài tập nhỏ sau đây :

Bài tập 1 : Trên mặt phẳng cho n điểm không cùng nằm trên 1 đường thẳng. Chứng minh rằng tồn tại một đường tròn đi qua 3 điểm mà không chứa điểm nào bên trong.

Bài tập 2 : Sau một trận đấu vòng bóng bàn, mỗi đấu thủ được gọi tên những người thua mình và những người thua những người thua mình. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất một đấu thủ được gọi tên tất cả mọi người còn lại.

Bài tập 3 : Trong một phòng họp, biết rằng mỗi người đều quen với ít nhất 2 người. Chứng minh rằng có thể chọn ra 1 số người để xếp ngồi quanh một bàn tròn sao cho mỗi người đều ngồi giữa hai người mình quen.

Bài tập 4 : Trên mặt phẳng cho n điểm không có 3 điểm nào thẳng hàng. Trong đó có 1 số điểm tô màu đỏ, các điểm còn lại tô màu xanh. Mỗi điểm xanh được nối với ít nhất 1 điểm đỏ bởi một đoạn thẳng. Biết rằng không có điểm đỏ nào được nối với tất cả các điểm xanh. Chứng minh rằng luôn tồn tại 2 điểm xanh A và B và 2 điểm đỏ X, Y sao cho A được nối với X, B được nối với Y nhưng A không được nối với Y và B không được nối với X.

Bài tập 5 : Có 2^n kị sĩ được nhà vua mời đến dự tiệc. Biết rằng mỗi kị sĩ đều quen với $\geqslant n$ người khác. Chứng minh rằng có thể xếp cả $2n$ kị sĩ quanh 1 bàn tròn sao cho mỗi người đều ngồi giữa 2 người mình quen.

HÀM SỐ CHUYỂN TIẾP CÁC ĐẠI LƯỢNG TRUNG BÌNH

NGUYỄN VĂN MẬU

LTS. Bạn đọc đã quen nhiều với việc giải các phương trình và bất phương trình, trong đó đại lượng phải tìm là các biến số. Bây giờ mời các bạn làm quen với việc giải các phương trình mà cái phải tìm lại là các hàm số. Nói cách khác là chúng ta làm quen với việc giải các "phương trình hàm".

Đối với cặp số dương a, b ta có thể thành lập được rất nhiều các đại lượng trung bình. Đặc điểm chung, là chúng đều thuộc đoạn $[\min(a, b), \max(a, b)]$. Các dạng đơn giản hơn cả là các giá trị trung bình cộng, trung bình nhân, trung bình điều hòa, trung bình bậc hai... mà ta thường gặp trong chương trình toán phổ thông trung học. Ta có thể sắp xếp chúng theo một trật tự nhất định :

$$\min(a, b) \leq \frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \leq \max(a, b) \qquad (1)$$

(bạn đọc có thể tự kiểm tra dễ dàng các bất đẳng thức này).

Hãy lấy hai đại lượng trung bình nhân và cộng làm ví dụ. Từ (1) ta nhận thấy ngay rằng bất phương trình hàm

$$f(\sqrt{xy}) \leq f\left(\frac{x+y}{2}\right) ; x, y \geq 0 \qquad (2)$$

sẽ nhận mọi hàm $f(x)$ đồng biến trong khoảng $[0, \infty)$ làm nghiệm của nó ; trong khi đó, phương trình hàm tương tự

$$f(\sqrt{xy}) = f\left(\frac{x+y}{2}\right) ; x, y \geq 0 \qquad (3)$$

chỉ có một nghiệm $f(x)$ là một hằng số tùy ý. Bởi lẽ đó, các dạng bất phương trình hàm và phương trình hàm (2) – (3) được xem là các bài toán "quá dễ" và rất ít người chú ý tới. Tuy vậy, vấn đề sẽ không đơn giản nếu ta thấy các bài toán (2) – (3) bằng bài toán sau đây : Những lớp hàm số nào sẽ thực hiện phép chuyển tiếp một đại lượng trung bình của đối số sang một đại lượng trung bình của hàm số. Ví dụ, xác định hàm số $f(x)$ thỏa mãn điều kiện

$$f(\sqrt{xy}) = \frac{f(x)+f(y)}{2} ; x, y \geq 0. \qquad (4)$$

Các bài toán tương tự như bài toán (4) đã được nhiều người chú ý từ lâu, bởi lẽ chúng liên quan chặt chẽ đến việc chuyển tiếp các cấp số và các dãy số. Thật vậy, nếu hàm số $f(x)$ thỏa mãn (4) thì $f(x)$ sẽ chuyển cấp số nhân

$$a_1, a_2, \dots a_j > 0$$

thành một cấp số cộng

$$f(a_1), f(a_2), \dots$$

Đối với các bài toán khác, ta cũng có các "tình trạng" tương tự.

Ta có thể chia các bài toán về chuyển tiếp các đại lượng trung bình thành hai nhóm. Một nhóm gồm tất cả các bài toán chuyển tiếp của một dạng trung bình. Nhóm còn lại, gồm các bài toán chuyển tiếp của hai dạng trung bình khác nhau.

Nhóm I

Bài toán 1 : Xác định các hàm số $f(x)$ liên tục với mọi x, sao cho :

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2} \text{ với mọi } x, y$$

Bài toán 2 : Xác định các hàm số $f(x)$ liên tục với $x \geq 0$, sao cho

$$f(\sqrt{xy}) = \sqrt{f(x)f(y)} ; x, y \geq 0.$$

Bài toán 3 : Xác định các hàm số $f(x)$ liên tục với $x \neq 0$, sao cho

$$f\left(\frac{2xy}{x+y}\right) = \frac{2f(x)f(y)}{f(x)+f(y)} ; x, y \neq 0.$$

Nhóm II

Bài toán 4 : Xác định các hàm số $f(x)$ liên tục với mọi x, sao cho

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{2f(x)f(y)}{f(x)+f(y)}.$$

Bài toán 5 : Xác định $f(x)$ liên tục với mọi x, sao cho $f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \sqrt{f(x)f(y)}$.

Bài toán 6 : Xác định $f(x)$ liên tục với $x \neq 0$, sao cho $f\left(\frac{2xy}{x+y}\right) = \sqrt{f(x)f(y)}$

Danh mục các bài toán trong các nhóm I. và II còn nhiều nữa. Bạn đọc dễ dàng tự đặt và giải đối với các dạng chuyển tiếp khác (xem phần bài tập ứng dụng). Nhận xét rằng, các bài toán 1 – 6 có lời giải rất ngắn gọn nếu ta đòi hỏi các hàm số $f(x)$ là những hàm số có đạo hàm (hàm khả vi). Ở đây, sẽ trình bày vài vắn tắt một phương pháp sơ cấp chỉ dựa trên tính chất liên tục của nghiệm $f(x)$.

Cách giải bài toán 1 : Đặt $f(0) = a; f(1)=b$.

Khi đó, cho $x = 0$, $y = 2$

ta được $\quad f(2) = 2f(1) - f(0) = 2b - a$.

cho $x = 1$; $y = 3$ thì được $f(3) = 2f(2) - f(1) = 3b - 2a$.

Bằng phương pháp quy nạp toán học, ta thu được

$$f(n) = nb - (n-1)a = n(b-a) + a.$$

Tiếp theo, cho $x = 0$ ta được

$$f\left(\frac{y}{2}\right) = \frac{f(y)+f(0)}{2} = \frac{f(y)+a}{2}$$

Với $y = 1$

$$y = 1/2\ f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{b+a}{2}$$

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{b-a}{4} + a.$$

Bằng phương pháp quy nạp toán học, ta thu được

$$f\left(\frac{1}{2^m}\right) = \frac{b-a}{2^m} + a. \qquad (6)$$

Kết hợp (5) và (6) ta có

$$f\left(\frac{m}{2^n}\right) = (b-a)\frac{m}{2^n} + a. \qquad (7)$$

Sử dụng tính liên tục của $f(x)$, từ (7) ta nhận được

$f(x) = (b-a)x + a$; trong đó b, a tùy ý

Vậy nghiệm của bài toán 1 là

$$f(x) = cx + a\ ;\ c,\ a \text{ tùy ý}.$$

Giải bài toán 4 :

Giả sử tồn tại x_o sao cho $f(x_o) = 0$. Khi đó

$$f\left(\frac{x_o+y}{2}\right) = \frac{2f(x_o)f(y)}{f(x_o)+f(y)} = 0 \text{ với mọi } y$$

Vậy $f(x) \equiv 0$, hàm số này không thỏa mãn. Suy ra $f(x) \neq 0$ với mọi x.

Đặt $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ thì bài toán 4 có dạng

$$g\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{g(x)+g(y)}{2}.$$

Theo kết quả của bài toán 1 thì $g(x) = cx + a$; c và a tùy ý.

Vậy

$$f(x) = \frac{1}{(cx+a)}$$

Để hàm số $f(x)$ liên tục với mọi x ta phải có $c = 0$; $a \neq 0$. Vậy $f(x) = d : d = \frac{1}{a} \neq 0$.

Giải bài toán 5 : Từ điều kiện bài toán, suy ra $f(x) \geq 0\ \forall x$.

1) Nếu $f(x_o) = 0$ tại $x = x_o$ nào đó thì

$f\left(\frac{x_o+y}{2}\right) = \sqrt{f(x_o)f(y)} = 0,$ suy ra $f(x) \equiv 0$ là nghiệm duy nhất.

2) Giả thiết $f(x) > 0\ \forall x$.

Đặt $\quad f(0) = a > 0 ; f(1) = ab, b > 0$;

$$f(x) = a\,.\,b^x g(x).$$

Ta có : $g(0) = g(1) = 1$ và :

$$ab^{\frac{x+y}{2}} g\left(\frac{x+y}{2}\right) = \sqrt{ab^x g(x) ab^y g(y)}$$

$$\Leftrightarrow g\left(\frac{x+y}{2}\right) = \sqrt{g(x)g(y)}$$

chọn $y = 0$ ta được

$$g\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{g(x)}$$

cho $\ x = 1$ thì $g\left(\frac{1}{2}\right) = 1$

Cho $x = 1/2$ thì $g\left(\frac{1}{4}\right) = 1$. Từ đó suy ra

$$g\left(\frac{1}{2^m}\right) = 1\ ,\ m \in N.$$

Mặt khác

$$g(x) = [g(x/2)]^2,$$

$$g\left(\frac{x+y}{2}\right) = \sqrt{g(x)g(y)}$$

Suy ra với $x = 2$, $g(2) = 1$.

Với $x = 1$, $y = 3$ thì

$$1 = \sqrt{g(1)g(3)},\ \text{vậy } g(3) = 1.$$

Với $x = 2$, $y = 4$ thì

$$1 = \sqrt{g(2)\,g(4)}, \text{ vậy } g(4) = 1.$$

Suy ra $g(n) = 1$ với mọi n tự nhiên.

Do $g(0) = \sqrt{g(x)\,g(-x)}$ suy ra $g(-n) = 1$. Vậy

$g(n) = 1$ với mọi n nguyên (8)

Kết hợp (7) và (8) ta thu được $g(n/2^m) = 1$. Sử dụng tính chất liên tục của hàm số $g(x)$ ta suy ra $g(x) = 1$

Vậy $f(x) = a \,.\, b^x$; $a,b > 0$ tùy ý.

Giải bài toán 2 : Cho $y = 0$ ta được $f(0) \times [f(x) - f(0)] = 0$.

Vậy nếu $f(x) \neq 0$ thì $f(x) = f(0) > 0$ là nghiệm duy nhất. Ta chỉ xét $f(0) = 0$. Nếu tồn tại giá trị $x_o > 0$ sao cho $f(x_o) = 0$ thì $f(x) \equiv 0$ là nghiệm duy nhất. Do đó, có thể giả thiết $f(x) > 0$, $\forall x > 0$.

Dặt $x = e^u$, $y = e^v$ $-\infty < u, v < +\infty$ và $g(u) = f(e^u)$ thì bài toán 2 có dạng $g\left(\dfrac{u+v}{2}\right) = \sqrt{g(u)\,g(v)}$

Vậy ta nhận được bài toán 5 với $g(x) = a \,.\, b^x$. Suy ra $f(x) = \ln(a \,.\, b^x)$.

Tương tự, các bài toán 3 và 6 dễ dàng chuyển về các bài toán đã xét. Thật vậy, trong bài toán 6 ta đặt $u = 1/x$, $v = 1/y$ và $g(u) = f(1/u)$, ta sẽ chuyển về bài toán 5 đối với $g(u)$. Trong bài toán 3 đặt $u = 1/x$, $v = 1/y$ và $g(u) = 1/f(1/u)$ ta sẽ dẫn về bài toán 1.

Bài tập áp dụng

1) Tìm hàm $f(x)$ xác định và liên tục với mọi x, thỏa mãn điều kiện

$$f\left(\sqrt{\frac{u^2+v^2}{2}}\right) = \sqrt{\frac{(f(u))^2 + (f(v))^2}{2}}$$

với mọi u, v.

2) Tìm hàm $f(x)$ xác định và liên tục với $x \geqslant 0$, thỏa mãn điều kiện

$$f(\sqrt{xy}) = \frac{f(x) + f(y)}{2}$$

với x, $y \geqslant 0$.

3) Tìm hàm $f(x)$ xác định và liên tục với $x \geqslant 0$, thỏa mãn điều kiện

$$f(\sqrt{xy}) = \frac{2f(x)\,f(y)}{f(x) + f(y)}$$

với x, $y > 0$.

4) Tìm hàm $f(x)$ xác định và liên tục với $x \neq 0$, thỏa mãn điều kiện

$$f\left(\frac{2xy}{x+y}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}$$

Tích ngoài của hai vectơ *TRONG MẶT PHẲNG*

NGUYỄN THÚC HÀO

1. Trong nhiều số của báo Toán học và Tuổi trẻ, các bạn đọc đã được giới thiệu về tích vô hướng của hai vectơ. Đó là một hàm số thực của hai vectơ, tuyến tính và đối xứng, còn gọi là một dạng song tuyến tính đối xứng. Cụ thể là với hai vectơ tùy ý $\vec{x}, \vec{y}$, người ta cho tương ứng một số thực, kí hiệu là $(\vec{x}, \vec{y})$ và được gọi là *tích vô hướng*, với các tính chất sau đây, được thỏa mãn với mọi vectơ $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ và mọi số thực α :

$$\left.\begin{aligned} &(\vec{x}, \vec{y} + \vec{z}) = (\vec{x}, \vec{y}) + (\vec{x}, \vec{z}) \\ &(\vec{x} + \vec{z}, \vec{y}) = (\vec{x}, \vec{y}) + (\vec{z}, \vec{y}) \\ &(\alpha\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x}, \alpha\vec{y}) = \alpha(\vec{x}, \vec{y}) \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

$$(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{y}, \vec{x}) \quad (2)$$

$$\vec{x}^2 = (\vec{x}, \vec{x}) > 0, \ \forall \vec{x} \neq 0 \quad (3)$$

Với tính vô hướng và với giả thiết (3), người ta định nghĩa *độ dài, góc* và xây dựng hình học ơclit hoàn toàn chỉ bằng phép toán đại số véctơ.

2. Về phương diện thuần túy đại số, thì một dạng song tuyến đối xứng được xác định nếu ta cho trước giá trị của nó với hai vectơ khác không và không đồng phương $\vec{u}, \vec{v}$. Cụ thể là nếu ta cho trước các giá trị :

$$\vec{u}^2 = (\vec{u}, \vec{u}) = a > 0,\ (\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{v}, \vec{u}) = b,$$
$$\vec{v}^2 = (\vec{v} . \vec{v}) = c > 0$$

Quả vậy, mọi cặp vectơ khác $\vec{x}, \vec{y}$ có thể phân tích theo $\vec{u} . \vec{v}$:

$$\vec{x} = x_1\vec{u} + x_2\vec{v}$$
$$\vec{y} = y_1\vec{u} + y_2\vec{v}$$

và khi đó :

$$(\vec{x}, \vec{y}) = (x_1\vec{u} + x_2\vec{v} . y_1\vec{u} + y_2\vec{v})$$
$$(\vec{x}, \vec{y}) = x_1y_1 (\vec{u}\,\vec{u}) + (x_1y_2 + x_2y_1) (\vec{u}, \vec{v}) +$$
$$+ x_2y_2(\vec{v} . \vec{v})$$

tức :

$$(\vec{x}, \vec{y}) = x_1y_1a + (x_1y_1 + x_2y_1)b + x_2y_2c \qquad (4)$$

Như vậy là muốn xác định tích vô hướng, phải cho 3 số thực là $a > 0$, $c > 0$ và b.

Do điều kiện (3) và biểu thức sau đây suy ra từ (4) :

$$\vec{x}^2 = (\vec{x}, \vec{x}) = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2 > 0 \qquad (5)$$

Cho nên ta phải có điều kiện

$$ac - b^2 > 0 \qquad (6)$$

3. Để có được ý nghĩa hình học của tích vô hướng, ta hãy quy ước rằng nếu $\vec{u}, \vec{v}$ là hai vectơ đơn vị (tức $|\vec{u}| = |\vec{v}| = 1$) và *vuông góc với nhau* thì :

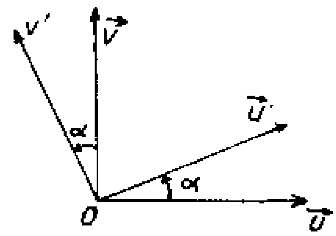
$$\vec{u}^2 = (\vec{u}, \vec{u}) = 1,\ (\vec{u}, \vec{v}) = 0,\ \vec{v}^2 = (\vec{v}, \vec{v}) = 1$$

Để chứng minh rằng quy ước như trên có hiệu lực với mọi cặp vectơ đơn vị vuông góc, ta hãy lấy thêm cặp $\vec{u'}, \vec{v'}$ đơn vị và vuông góc với nhau. Ta dễ dàng thấy rằng (hình 1) :

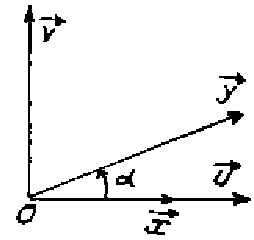
$$\left.\begin{aligned} \vec{u'} &= \cos\alpha . \vec{u} + \sin\alpha . \vec{v} \\ \vec{v'} &= -\sin\alpha . \vec{u} + \cos\alpha . \vec{v} \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

trong đó α là góc của hai vectơ $\vec{u}, \vec{u'}$. Ta tính dễ dàng và thấy rằng nếu $\vec{u}^2 = 1, \vec{v}^2 = 1, (\vec{u}, \vec{v}) = 0$, thì ta cũng có :

$$\vec{u'}^2 = 1, \vec{v'}^2 = 1, (\vec{u'}, \vec{v'}) = 0$$



Hình 1



Hình 2

Bây giờ ta hãy lấy hai vectơ tùy ý $\vec{x}, \vec{y}$. Ta chọn vectơ đơn vị $\vec{u}$, cùng hướng với $\vec{x}$, có vectơ đơn vị $\vec{v}$ thì vuông góc với $\vec{u}$, sao cho góc của hai vectơ $\vec{u}, \vec{v}$ bằng $+\pi/2$.

Ta có :

$$\vec{x} = |\vec{x}| . \vec{u}$$
$$\vec{y} = |\vec{y}| \cos\alpha . \vec{u} + |\vec{y}| \sin\alpha . \vec{v}$$

Do đó

$$(\vec{x}, \vec{y}) = |\vec{x}| . |\vec{y}| \cos\alpha$$

Đẳng thức trên cho ta ý nghĩa hình học của tích vô hướng. Và cũng chính đẳng thức ấy, ngược lại, có thể lấy làm định nghĩa cho góc hình học α của hai vectơ (tức của hai tia).

Cũng theo (7), điều kiện cần và đủ cho hai vectơ khác không $\vec{x}, \vec{y}$ vuông góc với nhau là :

$$(\vec{x}, \vec{y}) = 0$$

4. Bây giờ xin giới thiệu với bạn đọc một hàm số tuyến tính khác của 2 vectơ tùy ý, không đối xứng như tích vô hướng, mà lại *phản xứng*, tức là giá trị của nó đổi dấu (không đổi giá trị tuyệt đối) khi ta hoán vị hai vectơ. Hàm số này được gọi là một *dạng ngoài* của hai vectơ. Ta sẽ gọi nó là *tích ngoài* của hai vectơ, kí hiệu $|\vec{x}, \vec{y}|$, với $\vec{x}, \vec{y}$ là những vectơ tùy ý. Với mọi vectơ $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ và với mọi số thực α, ta sẽ có như với tích vô hướng :

$$\left.\begin{aligned} [\vec{x}, \vec{y} + \vec{z}] &= [\vec{x}, \vec{y}] + [\vec{x}, \vec{z}] \\ [\vec{x} + \vec{z}, \vec{y}] &= [\vec{x}, \vec{y}] + [\vec{z}, \vec{y}] \\ [\alpha\vec{x}, \vec{y}] &= [\vec{x}, \alpha\vec{y}] = \alpha [\vec{x}, \vec{y}] \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Nhưng, khác với tích vô hướng :

$$[\vec{x}, \vec{y}] = [\vec{y}, \vec{x}] \qquad (10)$$

và tất nhiên là

$$[\vec{x}, \vec{x}] = 0 \qquad (11)$$

Tích ngoài, định nghĩa như trên, còn gọi là *tích lệch*, hoặc *tích thay dấu*.

5. Cũng như với tích vô hướng, ta hãy chọn hai vectơ $\vec{u}, \vec{v}$ nào đó, khác không và không đồng phương. Tất nhiên :

$$[\vec{u}, \vec{u}] = 0, \; [\vec{v}, \vec{v}] = 0$$

Còn $[\vec{u}, \vec{v}]$, ta đặt

$$[\vec{u}, \vec{v}] = \delta \neq 0$$

δ là một số thực *khác không*, chọn tùy ý, ứng với cặp $\{\vec{u}, \vec{v}\}$. Khi đó, hàm $[\vec{x}, \vec{y}]$ là hoàn toàn xác định. Quả vậy, từ :

$$\vec{x} = x_1\vec{u} + x_2\vec{v}$$

$$\vec{y} = y_1\vec{u} + y_2\vec{v}$$

và (9), (10), (11) ta suy ra :

$$[\vec{x}, \vec{y}] = [x_1\vec{u} + x_2\vec{v}, y_1\vec{u} + y_2\vec{v}]$$

$$[\vec{x}, \vec{y}] = (x_1y_2 - x_2y_1)\,[\vec{u}, \vec{v}]$$

$$[\vec{x}, \vec{y}] = (x_1y_2 - x_2ysu1)\delta \qquad (12)$$

Thế là đối với tích ngoài của hai vectơ trong mặt phẳng, chỉ cần cho giá trị $\delta \neq 0$ của nó với hai vectơ chọn tùy ý, khác không và không đồng phương, là đủ để xác định nó.

Một tính chất cơ bản của tích ngoài là :

Điều kiện cần và đủ cho hai vectơ $\vec{x} \neq 0, y \neq 0$ đồng phương với nhau là :

$$[\vec{x}, \vec{y}] = 0$$

Mệnh đề trên suy ra dễ dàng từ (12).

6. Bây giờ để có được ý nghĩa hình học, ta quy ước rằng $\delta = +1$ khi hai vectơ $\vec{u}, \vec{v}$ là đơn vị và tạo thành một góc vuông theo chiều thuận, tức góc của $\vec{u}$ và $v = +\pi/2$. Quy ước này có hiệu lực với mọi cặp vectơ như vậy.

Thực thế, mọi cặp vectơ $\vec{u'}, \vec{v'}$ đơn vị và vuông góc thuận có thể phân tích theo cặp $\vec{u}, \vec{v}$ như đã làm ở trên (7). Và ta thấy rằng

$$[\vec{u}, \vec{v}] = +1 \Leftrightarrow [\vec{u'}, \vec{v'}] = +1$$

Với hai vectơ bất kì $\vec{x}, \vec{y}$, ta chọn $\vec{u}$ cùng hướng với $\vec{x}$ (xem hình 2), thì ta có

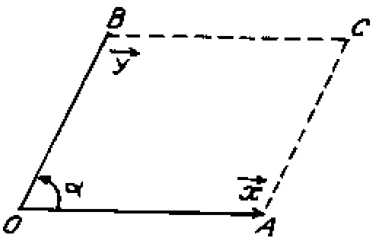
$$\vec{x} = |\vec{x}|\,\vec{u}$$

$$\vec{y} = |\vec{y}| \cos\alpha \,.\, \vec{u} + |\vec{y}| \sin\alpha \,.\, \vec{v}$$

Vậy :

$$[\vec{x}, \vec{y}] = |\vec{x}|\,|\vec{y}| \sin\alpha$$

Đó là ý nghĩa hình học của $[\vec{x}, \vec{y}]$. Nếu chỉ lấy giá trị tuyệt đối, thì $[\vec{x}, \vec{y}]$ bằng diện tích của hình bình hành vẽ với 2 vectơ $\vec{x}, \vec{y}$ làm cạnh.



Hình 3

Nếu ta quy ước rằng diện tích mang dấu + nếu góc $\alpha = (\widehat{\vec{x}, \vec{y}}) > 0$ và mang dấu − nếu $\alpha < 0$ thì khi đó $[\vec{x}, \vec{y}]$ là *diện tích có hướng* của hình hình hành.

7. Tóm lại, trong hình học phẳng, với hai vectơ tùy ý $\vec{x}, \vec{y}$, ta xác định tích vô hướng và tích ngoài là :

$$\left.\begin{aligned} (\vec{x}, \vec{y}) &= |\vec{x}|\,|\vec{y}| \cos\alpha \\ |\vec{x}, \vec{y}| &= |\vec{x}|\,|\vec{y}| \sin\alpha \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

và từ hai biểu thức trên, ta suy ra :

$$(\vec{x}, \vec{y})^2 + [\vec{x}, \vec{y}]^2 = \vec{x}^2 \,.\, \vec{y}^2 \qquad (15)$$

Đẳng thức này cho thấy quan hệ giữa tích ngoài và tích vô hướng.

Hai tích vô hướng và tích ngoài đều có ứng dụng rộng rãi trong hình học vectơ phẳng. Nói chung, khi người ta chỉ xét đến những tính chất như điểm thẳng hàng, đường thẳng đồng quy, đường thẳng song song, đoạn thẳng chia theo tỉ lệ, tỉ số diện tích, tức là những tính chất gọi là tính chất afin, thì người ta chỉ cần dùng đến tích ngoài mà thôi. Còn khi người ta xét cả đến những tính chất có liên quan đến *độ dài* và *góc* thì người ta cần dùng đến tích vô hướng, mà đôi khi cũng nên dùng cả tích ngoài nữa.

CÂU CHUYỆN VỀ HỌC CÁC CON SỐ

ĐỖ NGỌC DIỆP

Cứ nói đến toán học là người ta nói ngay đến việc sáng tạo : mà quả thực làm toán, học toán, áp dụng toán, cứ máy móc là hỏng liền ; Học toán, vận dụng toán luôn luôn đòi hỏi ta phải sáng tạo.

Vậy thì ta phải sáng tạo toán như thế nào ? Có bạn cho rằng ta không thể sáng tạo toán học được với vốn kiến thức phổ thông ít ỏi. Đó chỉ là những bạn quá bi quan về mình. Lịch sử toán học đã chỉ ra rằng rất nhiều nhà toán học nổi tiếng đã làm ra các phát minh toán học đúng bằng vốn ít ỏi các kiến thức ở trường phổ thông. Nhà toán học Pháp Fermat đã phát hiện ra giả thuyết nổi tiếng rằng phương trình $x^n + y^n = z^n, n > 2$ không có nghiệm nguyên. Từ chỗ đào sâu suy nghĩ về việc giải phương trình bậc năm trở lên bằng căn thức (một dự đoán mà Abel trước đó cũng đã nghĩ tới) E. Galois đã đề xuất cả một lí thuyết toán học mà ngày nay mang tên ông. Bí quyết là ở chỗ họ chịu khó đào sâu suy nghĩ, có phương pháp tư duy đúng, phương pháp sáng tạo đúng.

Ở nước ta, trong những năm gần đây có một trào lưu luyện toán phổ thông khá rầm rộ. Không ít thầy đã nổi tiếng, không ít trò đã trở thành điêu luyện với nghệ thuật giải các bài toán khó. Một số bạn đã thực sự thành đạt : đã giành được những giải thưởng cao nhất, đã trở thành những nhà toán học thực sự, đã thành công trong việc đưa toán học vào phục vụ những việc ích nước lợi nhà... Tuy nhiên một số các bạn khác lại trở thành "thợ" làm bài tập rồi sau đó chẳng được gì hơn nữa, chỉ còn ngậm ngùi luyến tiếc cái "thời vàng son" đã trôi qua. Theo tôi nghĩ, cái chính là các bạn đó chưa có một phương pháp học toán và rèn luyện tư duy toán học một cách thật đúng đắn. Làm toán không hẳn chỉ là giải các bài toán khó. Giải được bài toán khó bạn chỉ có được khoảng 50% sáng tạo. Bởi vì, ít nhất là 50% đã thuộc về người đặt ra bài toán. Cho nên cái điều quan trọng mà chúng ta muốn thảo luận là làm sao để có được nốt cái 50% kia ; tức là vấn đề sáng tạo toán học là thế nào.

Cũng như các ngành khoa học khác toán học đòi hỏi sự sáng tạo trên từng bước đi nho nhỏ. Toán học lại mang đặc thù của sự tư duy trừu tượng. Bởi vậy trước hết ta phải nắm bắt được tư tưởng trừu tượng đó. Sau đó ta vận dụng sáng tạo nó để đi đến những ý tưởng mới lạ ở trong bản thân toán học. Một nét đặc thù nữa của toán học là tính lôgic chặt chẽ. Mỗi điều nói, viết ra sau phải là hệ quả của những điều đã nói, viết và đã được chứng minh tính đúng đắn của nó. Bởi vậy hằng ngày ta phải rèn luyện cách tư duy chặt chẽ, đồng thời rèn luyện một tư duy phóng khoáng sáng tạo. Điều quan trọng hơn cả là chúng ta phải rèn luyện một sự mạnh dạn thực sự.

Chúng ta hãy mở sách giáo khoa đại số lớp 10/12 ra. Chương trình xem ra thật giản đơn. Có lẽ cũng vì quan niệm như vậy nên không ít bạn đã coi thường học lí thuyết và chỉ lao đi sưu tầm, thách đố nhau những bài toán "búa bổ". Thế nhưng nếu bạn học thật kĩ, ví dụ chương I và II thì cũng sẽ thấy ra nhiều điều đáng suy nghĩ.

Phần 3 của chương I nói về số vô tỉ. Chúng ta biết những số đơn giản nhất là những số tự nhiên 0, 1, 2, 3 ... Với các số này ta có thể cộng, nhân một cách khá tự nhiên. Tuy nhiên cũng phải lưu ý các bạn rằng để quan niệm được rằng số 0 cũng quan trọng như, thậm chí còn có vai trò đặc biệt hơn các số 1, 2, 3... loài người đã phải trải qua rất nhiều năm trong lịch sử phát triển văn minh. Do nhu cầu đời sống loài người phải trừ, phải nợ (ghi nhớ) mà người ta đã sáng tạo thêm các con số −1, −2, −3... tức là các số nguyên, âm. Cũng do nhu cầu đời sống phải chia lẻ, mà người ta đã sáng tạo thêm các số mới là các số phân, hay nói cách khác là các số hữu tỉ. Cũng trong phần đầu sách lớp 10/12 về Hình học bạn được biết một cách chứng minh đơn giản rằng số đo đường chéo của hình vuông, đơn vị không thể là số hữu tỉ. Vậy là nếu chỉ xét tỉ số giữa các số nguyên ta không thể biểu diễn độ dài của đường chéo hình vuông đơn vị.

Công việc tìm kiếm các số mới được đặt ra một cách rõ ràng. Người ta đã viết các số hữu tỉ dưới dạng phân số tối giản. Sau đó thực hiện phép chia có dư, chia mãi... ta được một số thập phân hữu hạn hoặc vô hạn nhưng tuần hoàn. Ngược lại, nếu ta có số thập phân hữu hạn thì dĩ nhiên có thể viết nó dưới dạng phân số. Nếu ta có số thập phân vô hạn tuần hoàn $a_n a_{n-1} \dots a_1 a_o, (b_1 b_2 \dots b_k) \dots$ thì giá trị của nó được tính là

$$a_n 10^n + \dots + a_1 . 10 + a_o +$$

$$+ (b_1 . 10^{-1} + \dots + b_k . 10^{-k})(1 + 10^{-k} + 10^{-2k} + \dots)$$

$$= a_n . 10^n + \dots + a_1 . 10 + a_o +$$

$$+ (b_1 . 10^{-1} + \dots + b_k . 10^{-k}) . S$$

$$\text{với } S = 1 + 10^{-k} + 10^{-2k} + \dots = 1 + 10^{-k} . S$$

Tức là $S = \overbrace{0,99 \dots 9}^{k}$, nói cách khác mọi số thập phân vô hạn tuần hoàn là những số phân. Bởi thế các số hữu tỉ được xem như là các số thập phân hữu hạn hoặc vô hạn nhưng tuần hoàn. Một cách tự nhiên ta sẽ hỏi phải chăng các số thập phân vô hạn không tuần hoàn cũng có vai trò quan trọng như các số hữu tỉ. Trong gia đình của các con số được đưa thêm vào các số thập phân vô hạn không tuần hoàn bất kì. Chúng được gọi là các số vô tỉ, nghĩa là không thể viết thành tỉ số các số nguyên. Với khái niệm số mở rộng ta có thể khai căn bậc tùy ý các số dương tùy ý.

Nếu xem xét kĩ lại tất cả ta thấy rằng trong biểu diễn số thập phân, tất cả các chữ số đều là các số không quá 9, tức là số dư của các phép chia cho 10 thực hiện nhiều lần. Có một điều chưa thật hay lắm là nếu ta lấy một số chia cho 10 dư 2 nhân với một số chia cho 10 dư 5 ta được số chia hết cho 10, tức là dư 0. Tình trạng này đã gây ra cho ta một số ngoại lệ khi thực hiện các phép tính nhân, chia cho các số loại nói trên. Ta muốn khắc phục tình trạng này thì chỉ có cách là ta thay số 10 bằng một số nguyên tố bất kì p. Khi đó các chữ số $a_o, a_1, \dots b_1, b_2, \dots$ chỉ nhận các giá trị 0, 1, 2, ... , $p - 1$. Mọi điều nói ở trên vẫn có ý nghĩa với p^k thay cho 10^k, $S = 0, c_1 c_2 \dots c_k$ với $c_i = p - 1$ thay cho $S = 0\ 99 \dots 9$ ở trên. Vậy là bạn đã đi đến lí thuyết các số p – phân, một chương quan trọng của lí thuyết số hiện đại. Người ta đã dùng các số p – phân để chỉ ra rằng phương trình Fermat không thể giải được bằng phương pháp sơ cấp.

Chúng ta trở về với phép khai căn. Vì ta định nghĩa căn bậc k của một số là một số mà lũy thừa bậc k thì bằng số ban đầu, cho nên căn bậc 2 của một số âm không có nghĩa. Nói cách khác là phương trình $x^2 + a = 0$ với a dương không có nghiệm. Ta biến đổi phương trình đi đôi chút sẽ có dạng tương đương

$$x^2 - (-1(\sqrt{a})^2 = 0$$

Ta tạm chấp nhận một điều "phi lí" là tồn tại một "số", sau này sẽ gọi là đơn vị ảo i sao cho $i^2 = -1$, ta có phương trình là :

$$x^2 - (i\sqrt{a})^2 = (x - i\sqrt{a})(x + i\sqrt{a}) = 0$$

Vậy thì phương trình $x^2 + a = 0$ với $a > 0$ không phải là vô nghiệm, mà là có đủ hai nghiệm phân biệt. Thật là một điều lí thú. Một điều lí thú bất ngờ nữa là mỗi phương trình bậc hai bất kì đều có đủ hai nghiệm nếu trong gia đình các số ta thêm một "số kì lạ" i, $i^2 = -1$, bất kể biệt số Δ âm hay dương hay bằng không. Nếu $\Delta < 0$ thì phương trình bậc hai có hai nghiệm phân biệt là

$$x_{1,2} = -b/2a \pm i\sqrt{-\Delta}/2a.$$

Như vậy trong họ mới của các số có các số dạng $A + iB$ với A, B là các số thực tùy ý. Chúng được gọi là các số *phức*. Dễ thấy ngay là các định lí Viet, phân tích tam thức ra thừa số vẫn còn đúng ngay cả khi $\Delta < 0$. Số phức đóng vai trò cực kì quan trọng trong toán học hiện đại. Muốn cộng, trừ, nhân, chia số phức ta thực hiện như các biểu thức đại số rồi rút gọn lại bởi điều kiện $i^2 = -1$.

Trong các số phức ta có thể xây dựng một phép tương ứng là thay đổi dấu ở phần ảo. Quan hệ đó biến nghiệm thứ nhất thành nghiệm thứ hai và ngược lại. Những số phức không hề thay đổi trong biến đổi nói trên chính là các số thực. Đối với tam thức bậc hai đủ, nó lập thành nhóm Galois hai phần tử của mở rộng các số thực thành các số phức. Tương tự như vậy với các đa thức bậc cao hơn chúng ta đi đến lí thuyết Galois tổng quát, một chương khó của lí thuyết số đại số hiện đại. Như vậy, trường số phức là mở rộng của trường số thực bởi nhóm Galois có hai phần tử ; nói chính xác hơn, là mở rộng của trường số thực bởi một biểu diễn bậc hai của nhóm Galois sinh ra bởi phép liên hợp phức. Câu hỏi tự nhiên sẽ nẩy ra là tồn tại bao nhiêu các trường số mà là mở rộng bậc n tùy ý của trường số hữu tỉ. Cho đến ngày nay câu hỏi này vẫn chưa được giải đáp trọn vẹn. Langlands R. đã đưa ra giả thuyết cho tương ứng các trường số như vậy với các biểu diễn vô hạn chiều của những nhóm Lie tương ứng. Vậy là bạn đã đến với cái gọi là Chương trình Langlands, một vấn đề trung tâm của lí thuyết số hiện đại, lí thuyết biểu diễn nhóm Lie và hình học đại số, mà câu trả lời còn đòi hỏi hàng trăm năm làm việc tích cực của thế hệ các nhà toán học của tương lai.

Thế đấy các bạn ạ, nếu chịu khó đào sâu suy nghĩ thì từ các nội dung đơn giản nhất bạn có thể đi thẳng tới những vấn đề gay cấn nhất của toán học hiện đại, mà ở đó cánh cửa luôn rộng mở chờ đón những tư duy sáng tạo trong các bạn.

LÚC CÒN LÀ HỌC SINH, TÔI ĐÃ HỌC TOÁN NHƯ THẾ NÀO ?

NGUYỄN CẢNH TOÀN

Lúc học cấp một, tôi là một học sinh vào loại trên trung bình một ít, không tỏ ra có năng khiếu đặc biệt gì về toán. Năm đầu tiên ở cấp hai, tôi vẫn chỉ là một học sinh hơi khá về toán thôi, chưa có gì đáng cho thầy giáo, bạn bè chú ý. Từ giữa năm thứ hai cấp hai trở đi, tôi mới bắt đầu có những biểu hiện giỏi toán, dần dần được thầy giáo và các bạn công nhận là một "học sinh giỏi toán" và giữ được danh hiệu đó mãi. Nhiều việc làm của tôi trước đây chỉ là vô ý thức thôi nhưng nay, suy nghĩ lại, tôi thấy cũng có thể rút ra một vài kinh nghiệm nhỏ để các bạn trẻ yêu toán ngày nay tham khảo, may ra có giúp các bạn được tí gì chăng :

1. Say mê môn toán. Lúc chưa giỏi toán thì khoa học tự nhiên nói chung và đặc biệt môn toán nói riêng, đã có một sức hấp dẫn đối với tôi và tôi càng cố gắng học toán giỏi hơn thì sức hấp dẫn đó cũng càng tăng. Ví dụ, lúc chưa học đại số, nghe các bạn lớp trên học : "cộng nhân với cộng thành cộng, cộng nhân với trừ thành trừ v.v..." thì óc tò mò của tôi đã bị kích thích đặc biệt. Hoặc như khi chưa học phương trình bậc hai, mở sách ra thấy công thức :

$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, tôi rất lấy làm lạ về dấu $\pm$ vì từ trước tôi chỉ mới thấy hoặc là + hoặc là − dứt khoát, chứ chưa hề thấy cả +, cả − vào một chỗ.

2. Từ say mê đi đến chủ động, tự giác và độc lập học tập, phát huy triệt để tinh thần tự lực cánh sinh chống ỷ lại. Tôi nhớ lúc còn học cấp một, được một người anh họ bày cho phép lấy căn bậc hai (không có trong chương trình) tôi rất lấy làm hứng thú, bỏ ra cả một buổi trưa để loay hoay ngồi khai căn hết số này đến số khác, số nguyên rồi số thập phân, phải giục đến mấy lần mới chịu đi ăn cơm. Hoặc như do óc tò mò khoa học bị kích thích, tôi thường hay tìm tự học lấy những kiến thức của lớp trên, nhiều khi phải học dấu lén, sợ các bạn biết chế diễu, cho là làm bộ "ta đây". Không có sách, phải đi mượn rồi chép. Nhưng tôi không chép máy móc. Tôi đọc hiểu rồi ghi lại vắn tắt theo cách hiểu của mình. Ví dụ, có định lí tôi không ghi chứng minh khi thấy rằng tự mình suy diễn lôgic có thể tìm lại chứng minh đó dễ dàng. Hoặc nếu thấy rằng điểm then chốt trong chứng minh là biết dựng thêm một đường phụ nào đó (hình học), thực hiện một mẹo tính nào đó (đại số, lượng giác) thì tôi chỉ ghi điểm then chốt đó thôi. Như vậy là ghi chép trên cơ sở bộ óc đã tích cực làm việc chứ không phải chỉ là lao động của bàn tay cầm bút. Và thế là một cách vô tình, tôi đã thực hiện được điều mà ngày nay các bạn gọi là *tái hiện* bài (tức là hiểu bài rồi chưa cho là đủ, phải đạt yêu cầu là gấp sách lại, tự mình có thể xây dựng lại bài từ đầu đến cuối). Tôi cũng đã từng say mê giải những bài toán khó, đeo đuổi ngày này qua tháng khác, kì cho giải được mới thôi. Nhưng tôi không làm nhiều toán lắm và không hề dùng đến các sách cho bài giải mẫu. Lúc đó, tôi không tán thành lắm một số bạn để mất nhiều thì giờ sao chép sách cho đẹp đẽ và đầy đủ và óc thì ít suy nghĩ hoặc những bạn mở sách có "bài giải mẫu" ra làm hết bài này đến bài khác nhưng khi làm bài nào mà gặp khó khăn thì dã vội mở bài giải mẫu ra xem.

3. Học đi đôi với hành, tranh thủ mọi lúc, mọi nơi để học. Ngoài việc học ở lớp, ở nhà, trong sách, tôi thường hay quan tâm đến các sự việc xảy ra chung quanh mình, trong thiên nhiên và trong xã hội. Lúc đó chưa làm gì có ý thức phục vụ sản xuất chỉ có óc tò mò khoa học thúc đẩy tìm cách giải thích sự kiện này, hiện tượng kia. Ví dụ tôi đã tò mò muốn hiểu xem các số ghi trên cột dây thép dọc hai bên đường sắt là những số gì. Không hỏi ai được, tôi tự tìm hiểu lấy. Chẳng hạn tôi theo dõi sự biến thiên của một số từ cột này qua cột khác và thấy rằng nó giữ nguyên một giá trị trong khoảng hai mươi cột rồi mới tăng thêm (hay giảm đi) một đơn vị. Từ đó, tôi suy ra rằng số đó chỉ số cây số. Hoặc như thấy bóng nắng mái nhà bao giờ cũng song song với thềm nhà, tôi nghĩ xem tại sao lại như vậy, căn cứ vào định lí nào của hình học không gian ? Hay như thấy vành trăng lưỡi liềm, tôi cố hình dung ra trong không gian vị trí tương đối của mặt trời, quả đất, mặt trăng phải như thế nào để có được hình trăng lưỡi liềm như vậy v.v... Tranh thủ suy nghĩ về một bài toán khó thì không phải bao giờ cũng có điều kiện ngồi vào bàn, có tờ giấy nháp trước mặt, quản bút cầm tay. Chính hoàn cảnh đó đã thúc đẩy tôi đến chỗ có khi phải cố hình dung ra trong óc những phép toán, những hình v.v... mà không viết, vẽ ra giấy (ví dụ lúc đã lên giường nằm). Nay suy nghĩ lại thì thấy có lẽ chính điều đó đã giúp mình phát triển "trí tưởng tượng về không gian", khả năng "tập trung tư tưởng cao".

Tất cả những điều vừa nói ở trên tạo dần nên một khả năng, một thói quen là tranh thủ được nhiều lúc, nhiều nơi để học tập, rèn luyện tư duy toán học, không nhất thiết phải ngồi vào bàn học và do đó không mất thêm thì giờ.

Các bạn trẻ yêu toán ngày nay ở trong những điều kiện thuận lợi hơn chúng tôi trước đây nhiều. Động cơ duy nhất thúc đẩy chúng tôi trước đây là óc tò mò khoa học, sự say mê môn toán. Ngoài động cơ đó ra, ngày nay, trong chế độ xã hội chủ nghĩa, các bạn còn có lòng yêu nước, yêu chế độ thúc đẩy các bạn học giỏi để phục vụ tốt. Mọi việc làm tốt của các bạn đều được cổ vũ, khuyến khích, nâng đỡ. Trước đây, trong chế độ thực dân, chúng tôi làm gì có được điều đó. Bởi vậy, chúng tôi mong và tin rằng các bạn sẽ vượt rất xa chúng tôi. Chỉ cần các bạn cố gắng, bền bỉ, kiên nhẫn. Có thể có bạn hiện nay chưa giỏi toán nhưng rồi bạn sẽ giỏi, vì tài năng chủ yếu do rèn luyện mà có.

NGAY TỪ BÂY GIỜ CÁC BẠN HÃY TẬP DƯỢT SÁNG TẠO TRONG TOÁN HỌC

NGUYỄN CẢNH TOÀN

Các bạn trẻ yêu toán thân mến ! Với lòng nhiệt tình yêu mến Tổ quốc xã hội chủ nghĩa tươi đẹp của chúng ta, với lòng say sưa yêu thích bộ môn toán, chắc hẳn các bạn đều mong muốn cho đất nước ta sớm có một đội ngũ rất đông các nhà toán học vững về chính trị, giỏi về chuyên môn, và bản mọi người trong các bạn đều có hoài bão, ước mơ mình sẽ được đứng trong đội ngũ đó. Để cho hoài bão, ước mơ đó trở thành sự thật, ngay từ bây giờ các bạn hãy cố tập dượt sáng tạo trong toán học đi. Chắc các bạn sẽ hỏi : "Tập dượt như thế nào ? Trình độ còn thấp kém mà đã tập đòi làm những việc cao xa như thế à ?". Sáng tạo, phát minh trong toán học cố nhiên không phải là một việc dễ, ai cũng làm được, nhưng cũng không phải là một việc quá khó, chỉ dành riêng cho một số ít người có tài năng đặc biệt, cũng không phải là một việc quá cao xa đối với các bạn vì ngay trong phạm vi kiến thức của các bạn đã có thể có những suy nghĩ sáng tạo rồi.

Các bạn đã sẵn có một lòng yêu toán, chỉ cần các bạn biết cách tập dượt suy nghĩ sáng tạo và bền bỉ, kiên nhẫn tập dượt theo cách đó thì rồi nay mai, bạn sẽ thấy rằng phát minh toán học không phải là một điều gì thần bí cao xa.

Vậy thì phương pháp tập dượt đó như thế nào ? Có thể là mọi người tùy theo điều kiện, hoàn cảnh của mình có một phương pháp riêng thích hợp nhưng theo ý tôi, nếu bỏ qua những khác nhau về chi tiết thì cũng có thể nêu ra một phương pháp chung đại khái như sau :

1. Khi học một kiến thức toán học mới, ngoài việc hiểu và vận dụng được kiến thức đó, thử tự đặt mình vào vị trí người đã phát minh ra kiến thức đó, cố hình dung xem người đó đã suy nghĩ như thế nào. Điều này không phải bao giờ cũng làm được và khi làm được thì quá trình suy nghĩ của mình chưa chắc đã trùng với quá trình suy nghĩ của người phát minh vì người ta có thể có nhiều con đường để đi tới một chân lí. Nhưng điều đó không hề gì vì mục đích của chúng ta không phải là tìm cho ra xem người phát minh đã suy nghĩ như thế nào mà chỉ tập dượt suy nghĩ sáng tạo thôi. Dù cho suy nghĩ không ra gì thì vẫn cứ tốt vì trong quá trình suy nghĩ đó, kiến thức và năng lực trí tuệ của chúng ta đã được vận dụng.

Ví dụ : Học về hệ thức lượng trong vòng tròn :

$MA.MB = MC.MD$ thì ngoài việc hiểu hệ thức đó, ta nên tự đặt câu hỏi : "Người ta suy nghĩ như thế nào mà khám phá ra được hệ thứ đó nhỉ ?"

Có thể là bạn sẽ suy nghĩ như sau : "Chắc là người ta cho cát tuyến quay quanh điểm M và nhận xét thấy rằng trong hai đoạn MA và MB, kẻ đoạn này dài ra thì đoạn kia ngắn đi. Từ đó người ta đưa ra phỏng đoán đầu tiên là hai đoạn thẳng đó tỉ lệ nghịch với nhau rồi kiểm tra phỏng đoán đó bằng cách thử cố chứng minh phỏng đoán đó. Khi chứng minh thấy là đúng, người ta mới xướng lên định lí đó". Thật ra thì chẳng biết có phải người đầu tiên phát minh ra định lí này suy nghĩ như thế không nhưng nếu chúng ta biết tập dượt suy nghĩ như thế thì có cái tốt là xây dựng thành thói quen hay chú ý nhận xét, phỏng đoán kết quả, kiểm tra, để đi đến chỗ tự mình tìm ra chân lí.

2. Khi học được một kiến thức toán học mới nên tự đặt câu hỏi sau đây và cố gắng trả lời : "Kiến thức này có thể mở rộng ra được không ? Đối với những vấn đề tương tự, có những kiến thức tương tự không ?". Việc làm này có phần dễ hơn việc làm trên nhưng cũng đòi hỏi chúng ta phải có một trí tưởng tượng dồi dào ví dụ như : Tưởng tượng rằng một tam giác là một hình thang có đáy nhỏ bằng không, là một tứ giác có một cạnh bằng không, là một hình tương tự với tứ diện ở trong không gian v.v... Hoặc như khi ta có một đoạn thẳng với trung điểm của nó thì phải nhìn thấy trong hình vẽ có "hai điểm đối xứng" "hai điểm vị tự" "hai điểm chia điều hòa một đoạn thẳng" "một hình tương tự với vòng tròn và tâm của nó trong mặt phẳng" "một hình tương tự với tam giác và trọng tâm của nó trong mặt phẳng".*. Trong các bài "Nói chuyện với các bạn trẻ yêu Toán" ở báo "Toán học tuổi Trẻ". Các số : 10 (7–1965) 21 (6–1966), tôi đã nêu rõ lợi ích của việc xem một tam giác như một tứ giác có một cạnh bằng không. Đây xin nêu thêm ví dụ về lợi ích của việc xem một đoạn thẳng với trung điểm của nó là hình tương tự với tam giác và trọng tâm của nó và xem tam giác như là hình tương tự với tứ diện.

Biết cách xem như trên thì định lí "Ba trung tuyến của một tam giác đồng quy" sẽ đưa ta ngay tới ý nghĩ rằng có lẽ trong không gian sẽ có định lí sau đây : "Bốn đường thẳng nối bốn đỉnh của một tứ diện theo thứ tự với trọng tâm của bốn mặt đối diện thì đồng quy". Tất nhiên là còn phải chứng minh xem điều phỏng đoán trên đây có đúng không.

Không những trong các bài học mà trong các bài tập cũng vậy, luôn nêu suy nghĩ tìm cách mở rộng các câu hỏi đặt ra.

3) Gặp bất cứ sự việc gì xung quanh, thử cố nghĩ xem có vấn đề gì dính đến toán học ở đây không, có thể đem hiểu biết toán học ra mà giải thích, mà cải tiến không và khi

* Vì nếu ta chỉ xét các điểm trên một đường thẳng thì quỹ tích các điểm cách đều một điểm cho trước một khoảng R sẽ gồm hai đầu mút của một đoạn thẳng dài $2R$ và nhận điểm cho trước làm trung điểm.

đã giải thích, cải tiến được rồi thì cũng không thỏa mãn, thử cố đi sâu hơn, mở rộng thêm xem sao.

Ví dụ : một bạn học sinh nọ nhân buổi tối ra đứng gần cửa số nhìn sang tường nhà trước mặt chợt chú ý đến một hiện tượng mà lâu nay bạn đó đã bỏ qua : Bóng các chấn song cửa sổ nhà bạn đó in trên tường nhà trước mặt thành những đường song song. Bạn đó nghĩ : "Tại sao lại như vậy ? " và tìm cách giải thích. Thế là trong óc bạn đó cái đèn nhà mình trở thành một điểm, mỗi chấn song là một đường thẳng và bóng của nó trên tường nhà trước mặt là tương giao của mặt tường này với mặt phẳng xác định bởi cái đèn và chấn song. Một bài toán về hình học không gian được đặt ra và các định lí về tương giao của các đường thẳng và mặt phẳng được huy động. Cuối cùng bạn đó giải thích được tại sao các bóng chấn song cửa sổ lại //. Nhưng đến đây bạn đó cũng chưa thỏa mãn và nghĩ tiếp "Nếu như bức tường trước mặt và bức tường nhà mình (tức là bức tường có cửa sổ) không // với nhau thì liệu bóng các chấn song cửa sổ có còn // với nhau nữa không ?" Và rồi bạn đó cũng giải được bài toán này. Nhưng vẫn chưa hết. Bạn đó lại tiếp tục nghĩ : "Bóng các chấn song mà in xuống sân thì sao nhỉ ?" và tất nhiên cũng cố suy nghĩ để trả lời.

Tuy trong thí dụ này chưa có cái gì là sáng tạo cho lắm, nhưng nếu bạn đó tiếp tục rèn luyện như vậy thì chắc chắn là sẽ trở nên nhạy cảm trong việc liên hệ Toán học với thực tế và sau này trước yêu cầu của công tác, của sản xuất chắc sẽ có những sáng tạo, cải tiến có tác dụng phục vụ thiết thực.

Các bạn trẻ yêu toán thân mến ! Những điều tôi nói ở trên chắc không phải là quá khó, phải không các bạn ? Nó cũng chẳng đòi hỏi một óc thông minh gì đặc biệt. Chỉ cần có ý thức và quyết tâm rèn luyện. Khi đã quen với nếp làm việc, suy nghĩ như trên bạn sẽ càng thấy yêu mến toán hơn và cụ thể chắc chắn bạn sẽ đạt được ước mơ, hoài bão của mình.

CẦN PHẢI GIẢI TOÁN MỘT CÁCH SÂU SẮC

NGUYỄN QUANG KÍNH
(Vĩnh Phúc)

Khi tôi còn đi học, các thầy thường nhắc nhở chúng tôi : phải đào sâu suy nghĩ trong khi làm toán. Như thế nào là đào sâu suy nghĩ trong khi làm toán ? Có phải chỉ là giải bài toán bằng nhiều phương pháp và cố gắng tìm ra những phương pháp độc đáo hay không ? Tôi băn khoăn mãi. Sau này mới hiểu : thế thì tốt nhưng chưa đủ. Một điều quan trọng là sau khi giải xong một bài toán còn phải biết đề ra những bài toán mới bằng cách tổng quát hóa, bằng cách liên hệ đến những trường hợp tương tự, hay nói một cách đơn giản, phải biết đề ra những câu hỏi, những thắc mắc xoay quanh bài toán đó, tự giải quyết và rút ra những kết luận cần thiết. Làm như vậy chúng ta sẽ không bị trói chặt vào những bài toán đã có sẵn, những bài toán đó chỉ là câu hỏi gợi ý cho chúng ta nghĩ đến những bài toán tổng quát hơn, sâu sắc hơn và khi giải những bài toán mới này chúng ta có thể tìm ra những kết quả mà do điều kiện giới hạn về chương trình và thời gian các thầy không thể nói đến. Hôm nay các bạn hãy cùng tôi xét thí dụ bài toán sau đây trong cuốn "Dạy và học toán ở cấp 3" (Nhà xuất bản Giáo dục) :

Hãy chứng minh rằng :

1) Các số $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$ lập thành 1 cấp số cộng (1)

2) Các giá trị của hàm số $\sin^2 x$ của các góc $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$ lập thành một cấp số cộng tiến.

3) Các giá trị của hàm số $\cos^2 x$ của các góc $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$ lập thành một cấp số cộng lùi.

4) Các giá trị của hàm số tg$x$ của các góc $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$ lập thành một cấp số nhân tiến.

5) Các giá trị của hàm số cotg$x$ của các góc $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$ lập thành một cấp số nhân lùi.

Đây không phải là một bài toán khó. Các bạn có thể giải bài toán này một cách dễ dàng. Nhưng không phải vì thế mà bài toán này không dem đến cho chúng ta những điều bổ ích, nó có thể làm điểm xuất phát cho sự suy nghĩ của chúng ta.

Trong bài toán này, điều đáng chú ý trước hết là chẳng những số đo của các góc lập thành một cấp số mà cả các giá trị $\sin^2\alpha$ (và sau đó là $\cos^2\alpha$, tgα, cotgα) cũng lập thành một cấp số. Điều đó có phải bao giờ cũng xảy ra đâu ? Chẳng hạn $0, \frac{\pi}{2}, \pi$, lập thành một cấp số cộng nhưng $\sin^2 0 . \sin^2\frac{\pi}{2}, \sin^2\pi$ lại không lập thành một cấp số cộng. Nhưng đây có phải là trường hợp duy nhất không ? Rõ ràng là không : do tính chất tuần hoàn của hàm số $\sin\alpha$ (và do đó của $\sin^2\alpha$) chúng ta chỉ việc cộng thêm vào các số hạng của cấp số (1) cùng một lượng $2k\pi$ là chúng ta sẽ được một cấp số mới cũng có những tính chất đó. Ví dụ nếu ta cộng vào cấp số (1) cùng một lượng 2π thì ta được cấp số :

$$\frac{13\pi}{6}, \frac{9\pi}{4}, \frac{7\pi}{3}$$

Rõ ràng khi đó $\sin^2\frac{13\pi}{6}, \sin^2\frac{9\pi}{4}, \sin^2\frac{7\pi}{3}$ cũng lập thành một cấp số cộng (lại chính là cấp số cộng $\sin^2\frac{\pi}{6}; \sin^2\frac{\pi}{4}; \frac{\sin^{\pi}}{3}$). Nhưng các bạn có thể thắc mắc : ngoài cấp số có được bằng cách cộng thêm cùng một lượng $2k\pi$ vào các số hạng của cấp số (1) thì còn có cấp số nào khác mà $\sin^2\alpha$ của chúng cũng lập thành một cấp số cộng hay không ? Thế là các bạn đã có một bài toán mới để đi sâu giải quyết rồi đấy ! Bài toán đó có thể phát biểu như sau : "Tìm các góc α, β, γ sao cho chúng có số đo lập thành một cấp số cộng và $\sin^2\alpha, \sin^2\beta, \sin^2\gamma$ cũng lập thành một cấp số cộng". Chúng ta hãy cùng giải bài toán này :

Để α, β, γ lập thành một cấp số cộng thì ta phải có :

$$\beta - \alpha = \gamma - \beta = d$$

hay là :

$$\beta = \alpha + d$$

$$\gamma = \alpha + 2d$$

Để $\sin^2\alpha, \sin^2\beta, \sin^2\gamma$ lập thành một cấp số cộng thì ta phải có :

$$\sin^2\beta - \sin^2\alpha = \sin^2\gamma - \sin^2\beta$$

hay là :

$$\sin^2(\alpha + d) - \sin^2\alpha = \sin^2(\alpha + 2d) - \sin^2(\alpha + d) \quad (2)$$

Coi α là ẩn số, d là thông số chúng ta hãy giải phương trình này. Ta biến đổi (2) như sau :

$$[\sin(\alpha + d) - \sin\alpha]\,[\sin(\alpha + d) + \sin\alpha] =$$

$$= [\sin(\alpha + 2d) - \sin(\alpha + d]\,[\sin(\alpha + 2d) + + \sin(\alpha + d)]$$

hay là :

$$2\cos\frac{2\alpha + d}{2}\sin\frac{d}{2} . 2\sin\frac{2\alpha + d}{2}\cos\frac{d}{2} =$$

$$= 2\cos\frac{2\alpha + 3d}{2}\sin\frac{d}{2}\,2\sin\frac{2\alpha + 3d}{2}\cos\frac{d}{2}$$

hay là :

$$\sin(2\alpha + d)\sin d = \sin(2\alpha + 3d)\sin d$$

hay là :

$$\sin d[\sin(2\alpha + d) - \sin(2\alpha + 3d)] = 0 \quad (3)$$

Nếu :

$$\sin d = 0$$

nghĩa là :

$$d = k\pi$$

thì phương trình (3) nhận mọi giá trị bất kì của α làm nghiệm. Khi đó với giá trị α tùy ý ta được cấp số cộng :

$$\alpha,\ \alpha + k\pi,\ \alpha + (k + 1)\pi$$

mà bình phương sin của chúng cũng lập thành một cấp số cộng. Cấp số cộng này có các số hạng bằng nhau.

Nếu $\qquad \sin d \neq 0$

tức là :

$$d \neq k\pi$$

thì ta có :

$$\sin(2\alpha + d) - \sin(2\alpha + 3d) = 0$$

Giải phương trình này ta sẽ được :

$$\alpha = -d + (2k + 1)\frac{\pi}{4}\ (k = 0, 1, 2, 3...) \quad (4)$$

Bây giờ các bạn chỉ việc cho d một giá trị bất kì nào đó và với k là một số nguyên nào đó thế là bạn đã có được số hạng đầu α và công sai của cấp số phải tìm.

Chẳng hạn nếu lấy $k = 0$, $d = \frac{\pi}{12}$ thì bạn sẽ được cấp số (1) nêu ra ở bài tập trên.

Để kết thúc bài toán này chúng ta có thể rút ra kết luận : Điều kiện để cho cấp số cộng α, β, γ có tính chất bình phương sin của chúng ($\sin^2\alpha$, $\sin^2\beta$, $\sin^2\gamma$) cũng lập thành một cấp số cộng là giữa số hạng đầu α và công sai d của cấp số α, β, γ liên hệ với nhau bởi đẳng thức (4).

Hoàn toàn tương tự như vậy bạn có thể tìm một cấp số cộng α, β, γ để $\cos^2\alpha$, $\cos^2\beta$, $\cos^2\gamma$ lập thành một cấp số cộng hoặc để $\mathrm{tg}\alpha$, $\mathrm{tg}\beta$, $\mathrm{tg}\gamma$, lập thành cấp số nhân, hoặc để $\sin\alpha$, $\sin\beta$, $\sin\gamma$ lập thành cấp số cộng, hoặc thay tất cả những chữ "cấp số nhân" bằng những chữ "cấp số cộng" và ngược lại trong các bài tập trên. Như người ta thường nói, thế là các bạn đã có những "đề tài nghiên cứu" rồi đấy (tất nhiên là những đề tài của riêng chúng ta, học sinh cấp 3).

Nhưng có phải chỉ có thế không nhỉ ? Các bạn có thể tự đặt một câu hỏi : có phải hễ cứ $\sin^2\alpha$, $\sin^2\beta$, $\sin^2\gamma$ lập thành một cấp số cộng thì $\cos^2\alpha$, $\cos^2\beta$, $\cos^2\gamma$ cũng lập thành một cấp số cộng hay không ? Đúng là thế đấy. Các bạn có thể áp dụng công thức :

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

để chứng minh rằng nếu :

$$\sin^2\beta - \sin^2\alpha = \sin^2\gamma - \sin^2\beta$$

thì : $\cos^2\beta - \cos^2\alpha = \cos^2\gamma - \cos^2\beta$

hoặc các bạn có thể xem $\cos^2\alpha$, $\cos^2\beta$, $\cos^2\gamma$ là hiệu của hai cấp số cộng 1, 1, 1 và $\sin^2\alpha$, $\sin^2\beta$, $\sin^2\gamma$ (hiệu của hai cấp số cộng cũng là một cấp số cộng).

Ở bài tập nêu ra trên kia khi $\sin^2\frac{\pi}{6}, \sin^2\frac{\pi}{4}, \sin^2\frac{\pi}{3}$ lập thành một cấp số cộng thì $\mathrm{tg}\frac{\pi}{6}, \mathrm{tg}\frac{\pi}{4}, \mathrm{tg}\frac{\pi}{3}$ lại lập thành một cấp số nhân. Điều đó có đúng cho các góc α, β, γ bất kì hay không ? Chúng ta thử xét xem :

Giả sử α, β, γ khác $k\frac{\pi}{2}$ (để cho tang của chúng xác định) và giả sử $\sin^2\alpha$, $\sin^2\beta$, $\sin^2\gamma$ lập thành một cấp số cộng trong đó :

$$\sin\alpha \sin\beta \sin\gamma \neq 0$$

Khi đó theo lí luận ở ngay trên ta cũng sẽ có :

$$\cos^2\beta - \cos^2\alpha = \cos^2\gamma - \cos^2\beta$$

hay là : $\dfrac{1}{1+\mathrm{tg}^2\beta} - \dfrac{1}{1+\mathrm{tg}^2\alpha} =$

$$= \frac{1}{1+tg^2\gamma} - \frac{1}{1+tg^2\beta}$$

hay là : $\dfrac{2}{1+\mathrm{tg}^2\beta} = \dfrac{1}{1+\mathrm{tg}^2\alpha} + \dfrac{1}{1+\mathrm{tg}^2\gamma}$

hay là : $\dfrac{2}{1+\mathrm{tg}^2\beta} =$

$$= \frac{2 + tg^2\alpha + tg^2\gamma}{1 + tg^2\alpha + tg^2\gamma + tg^2\alpha tg^2\gamma}$$

hay là $\mathrm{tg}^2\beta = 2.\dfrac{1+\mathrm{tg}^2\alpha+\mathrm{tg}^2\gamma+\mathrm{tg}^2\alpha\mathrm{tg}^2\gamma}{2+\mathrm{tg}^2\gamma+\mathrm{tg}^2\alpha} - 1$

hay là :

$$\mathrm{tg}^2\beta = 2.\frac{(2+\mathrm{tg}^2\alpha+\mathrm{tg}^2\gamma)+(\mathrm{tg}^2\alpha\mathrm{tg}^2\gamma-1)}{2+\mathrm{tg}^2\alpha+\mathrm{tg}^2\gamma} - 1$$

hay là : $\mathrm{tg}^2\beta = 1 + 2\dfrac{\mathrm{tg}^2\alpha\mathrm{tg}^2\gamma - 1}{2+\mathrm{tg}^2\alpha+\mathrm{tg}^2\gamma}$ (5)

Nhìn vào đẳng thức (5) chúng ta nhận thấy nếu :

$$\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\gamma = 1$$

thì ta sẽ được :

$$\mathrm{tg}^2\beta = \mathrm{tg}\alpha.\mathrm{tg}\gamma \qquad (6)$$

và đây chính là điều kiện để $\mathrm{tg}\alpha$, $\mathrm{tg}\beta$, $\mathrm{tg}\gamma$ lập thành một cấp số nhân. Vậy ta có thể kết luận :

Nếu $\sin^2\alpha$, $\sin^2\beta$, $\sin^2\gamma$ lập thành một cấp số cộng trong đó $\sin\beta \neq 0$ và nếu : $\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\gamma = 1$ thì $\mathrm{tg}\alpha$, $\mathrm{tg}\beta$, $\mathrm{tg}\gamma$ cũng lập thành một cấp số nhân.

Trong kết luận này chúng ta phải thêm điều kiện : $\sin\beta \neq 0$ để đẳng thức (6) có nghĩa. Các bạn nên lưu ý một điều là chính cấp số nêu ra ở bài toán đầu tiên cũng chỉ là một trường hợp đặc biệt của những cấp số nêu ra ở kết luận này của chúng ta.

Đến đây chưa phải là đã kết thúc rồi đâu. Chúng ta đang xét vấn đề : với các góc α, β, γ như thế nào thì chẳng những số đo của chúng lập thành một cấp số mà cả các giá trị hàm số lượng giác của chúng cũng lập thành một cấp số. Nhưng cũng không gì ngăn trở chúng ta nghĩ tới một vấn đề tương tự : tìm một cấp số cộng mà logarit của chúng cũng lập thành một cấp số cộng. Các bạn hãy cùng tôi giải thêm bài toán mới này :

Gọi số hạng đầu của cấp số phải tìm là x ($x > 0$), công sai là d. ($d > 0$). Để logarit của chúng cũng lập thành một cấp số cộng thì ta có :

$$\log(x + d) - \log x = \log(x + 2d) - \log(x + d)$$

$$\frac{x + d}{x} = \frac{x + 2d}{x + d}$$

$$(x + d)^2 = x(x + 2d) \qquad (7)$$

Đẳng thức này chỉ ra rằng cấp số cộng đang tìm còn phải là cấp số nhân nữa. Điều đó chỉ xảy ra khi các số hạng của cấp số này bằng nhau nghĩa là $d = 0$.

Nếu các bạn không tin các bạn thử biến đổi đẳng thức (7) mà xem. Chúng ta có thể nói : "Điều kiện để logarit của một cấp số cộng $u_1.u_2.u_3$ cũng lập thành một cấp số cộng là :

$$u_1 = u_3 = u_3$$

nó cũng là một cấp số nhân".

Còn logarit của một cấp số nhân thì sao ? Logarit của một cấp số nhân (số hạng dương) là một cấp số cộng. Thế logarit của một cấp số nhân có thể là một cấp số nhân hay không ? Điều đó chỉ có khi cấp số nhân này có các số hạng như nhau. Các bạn thử suy nghĩ mà xem.

Đây mới chỉ là một bài toán bình thường, toán học còn có nhiều điều tuyệt diệu khác và mỗi bài toán đều để nấp dàng sau nó biết bao nhiêu điều lí thú. Đến đây chắc chúng ta có thể thống nhất ý kiến với nhau : khi làm toán cần phải suy nghĩ sâu sắc và sáng tạo, sáng tạo để khám phá những điều mà chưa ai bảo cho ta. Tất nhiên không phải khi nào chúng ta cũng tìm ra những điều lí thú cả. Nhưng điều quan trọng là chúng ta cần luyện tập để có một thói quen suy nghĩ sâu sắc, thói quen tò mò, thích khám phá ra những cái mới trong khoa học (ban đầu thì là mới đối với riêng ta). Cái đó cần thiết để chúng ta chẳng những trở thành một học sinh giỏi toán mà còn để học giỏi bất kì một môn học nào khác.

TÔI BẮT ĐẦU THÍCH TOÁN NHƯ THẾ NÀO ?

LÊ LÊ
(10D Duy Tiên, Hà Nam)

Tôi vốn là một học sinh bình thường về toán ; Thầy dạy toán chưa bao giờ khen tôi về toán, tôi đối với toán cũng không lấy gì làm mặn mà lắm ; vậy mà bây giờ tôi lại thấy toán thật là thú vị. Xin kể lại câu chuyện sau đây, nó nói lên một cách học tập đã làm cho tôi thích toán.

Để vẽ chính xác đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tôi phải tìm giao điểm của đường cong với trục hoành tức là tìm nghiệm của phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$. Công việc này tốn khá nhiều thời gian vì lúc đầu chúng tôi không biết tính nghiệm (hay nghiệm gần đúng) của phương trình này, do đó lần đầu tiên tôi mạo hiểm đề ra cho mình bài toán sau :

Tìm nghiệm của phương trình

$$F(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \qquad (1)$$

Nếu tìm không được – chắc là không được vì có lẽ khó quá (dễ thì trong sách giáo khoa đã giới thiệu và tôi đã chẳng phải đi mò !) thì tìm nghiệm gần đúng vậy, sao cho nó đủ chính xác để vẽ đường cong.

Học tập cách giải $ax^2 + bx + c = 0$ tôi cũng thêm bớt vào $F(x)$ những lượng thích hợp để đưa phương trình về dạng $(x + \alpha)^3 + \beta = 0$. Biến đổi như sau : $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ chia cho a (vì $a \neq 0$ nên chia được).

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0$$

$$x^3 + 3\frac{b}{3a}x^2 + 3x\left(\frac{b}{3a}\right)^2 + \left(\frac{b}{3a}\right)^3 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} =$$

$$= 3x\left(\frac{b}{3a}\right)^2 + \left(\frac{b}{3a}\right)^3\left(x + \frac{b}{3a}\right)^3 +$$

$$+ \left[\frac{c}{a} - 3\left(\frac{b}{3a}\right)^2\right]x + \frac{d}{a} - \left(\frac{b}{3a}\right)^3 = 0$$

Vậy nếu $\frac{c}{a} \neq 3\left(\frac{b}{3a}\right)^2$ thì không thể đưa phương trình về dạng mong muốn được, nhưng vì vế trái đã có $\left(x + \frac{b}{3a}\right)^3$ nên để có thể dùng ẩn phụ tôi tiếp tục biến đổi.

$$\left(x + \frac{b}{3a}\right)^3 + \left(x + \frac{b}{3a}\right) \times$$

$$\times \left[\frac{c}{a} - 3\left(\frac{b}{3a}\right)^2\right] - \frac{b}{3a} \times$$

$$\times \left[\frac{c}{a} - 3\left(\frac{b}{3a}\right)^2\right] + \frac{d}{a} - \left(\frac{b}{3a}\right)^3 = 0$$

Tóm lại có thể đưa phương trình về dạng

$$X^3 + pX + q = 0 \ (2) \ \left(X = x + \frac{b}{3a}\right)$$

Để khảo sát hình dạng đường cong của hàm số $y = F(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ta chỉ cần khảo sát hàm số $y = x^3 + px + q$. Thật vậy đường cong $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ chính là đường cong $y = x^3 + px + q$ tịnh tiến dọc theo trục hoành đi $-3a$ đơn vị rồi co trục tung theo hệ số a. Dối trục tọa độ một lần nữa

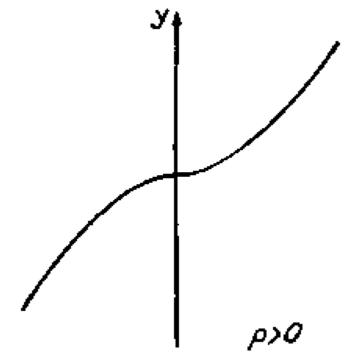
$$\begin{cases} x = X \\ y = Y + q \end{cases}$$

ta có phương trình đường cong trong hệ trục tọa độ mới là $Y = X^3 + pX$. Dây là hàm số lẻ nên nhận gốc tọa độ làm tâm đối xứng. Gốc tọa độ cũng chính là điểm uốn. Như vậy bước đầu tôi đã tự mình giải thích được một điều nói trong sách giáo khoa mà không chứng minh :

Điểm uốn của đồ thị chính là tâm đối xứng của đồ thị.

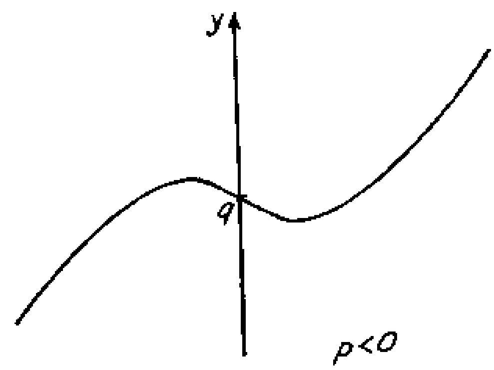
2 – Ta khảo sát hàm số $y = x^3 + px + q$.

Đạo hàm $y' = 3x^2 + p$ có thể dương với mọi giá trị của x (khi $p > 0$). Hàm số đồng biến từ $-\infty$ đến $+\infty$. Giá trị của hàm cũng biến thiên từ $-\infty$ đến $+\infty$. Trong trường hợp $p < 0$, đạo hàm triệt tiêu và đổi dấu tại $x = \pm\sqrt{\frac{-p}{3}}$. Hàm đạt cực đại tại $-\sqrt{\frac{-p}{3}}$ và đạt cực tiểu tại $\sqrt{\frac{-p}{3}}$. Hàm số đồng biến rồi nghịch biến và cuối cùng là đồng biến. Vì vậy hình dạng của đường cong phải là (h.1).



Hình 1

Nhìn vào đồ thị ta thấy đường cong bao giờ cũng cắt trục hoành vì hàm tăng từ $-\infty$ đến $+\infty$. Nghĩa là phương trình bậc ba bao giờ cũng có nghiệm. Điều này thật là mới mẻ đối với tôi. Phương trình bậc hai hay phương trình trùng phương có thể vô nghiệm chứ phương trình bậc ba bao giờ cũng có nghiệm ! Mãi đến khi học về đường tiệm cận tôi mới giải thích được hiện tượng đó.



Hình 2

Tổng quát hóa lên tôi thấy :

Phương trình bậc lẻ bao giờ cũng có ít nhất một nghiệm (vì $x^{2\pi + 1}$ biến thiên từ $-\infty$ đến $+\infty$).

3 – Suy nghĩ kĩ hơn tôi thấy không cần hàm phải tăng từ $-\infty$ đến $+\infty$ phương trình tương ứng mới có nghiệm mà chỉ cần hàm đổi dấu và liên tục là được. Đi từ dương sang âm hay từ âm sang dương một cách liên tục thì nhất định phải qua số không ! Nhận xét này hiển nhiên quá thế mà trước đây tôi không nghĩ ra ! Vậy :

Nếu $F(x)$ liên tục trong khoảng (a, b) và $F(a).F(b) < 0$ thì có α ở giữa (a, b) để cho $F(\alpha) = 0$.

Nhận xét này đã giúp tôi rất nhiều để hoàn thành nhiệm vụ học tập.

4 – Xét lại trường hợp $p > 0$ và $p < 0$ tôi thấy :

a) $p > 0$ phương trình chỉ có 1 nghiệm vì hàm luôn luôn đồng biến. Đường cong không thể quay trở lại cắt trục hoành một lần nữa.

b) $p < 0$ đường cong có cực đại, cực tiểu, khi quay trở lại có thể cắt trục hoành nên trong trường hợp này có thể có một nghiệm, 2 nghiệm (trong đó có một nghiệm kép) 3 nghiệp tùy theo vị trí của trục hoành với đường cong.

Đến đây tôi vẫn tiếp tục đi sâu thêm và cứ sáng dần ra về nhiều vấn đề nhưng tôi xin miễn trình bày tiếp sợ mất thì giờ của các bạn. Tôi chỉ xin kết luận như sau :

"Vạn sự khởi đầu nan", chịu khó suy nghĩ tôi thấy đã hiểu được bài một cách sâu sắc và toàn diện hơn, và thật là vui sướng khi tự mình khám phá ra được những bí mật bổ ích. (Tuy rằng những điều đó thì chả có gì là quan trọng và người ta đã biết từ lâu), cứ tiếp tục học tập theo cách trên đây, đến bây giờ tôi rất thích toán.

TÔI ĐỌC CUỐN "GỬI CÁC BẠN TRẺ YÊU TOÁN" CỦA HOA LA CANH

LẠI ĐỨC THỊNH

Đầu năm 1965, tình cờ một người bạn cho tôi mượn cuốn "Gửi các bạn trẻ yêu toán" của Hoa La Canh. Lúc đầu tôi cũng xem bình thường như mọi quyển sách khác, nhưng dần dần đọc một vài trang sau, tôi càng ngày càng bị lôi cuốn, và cuối cùng hôm đó tôi đã đọc quyển sách này một mạch bỏ cả buổi trưa. Sau đó tôi đã cố gắng tìm mua bằng được cuốn sách, và thường cho đến nay thỉnh thoảng vẫn xem đi xem lại đoạn này hay đoạn khác, và nhiều lúc trong công tác của mình tôi cũng đã cầu cứu đến cuốn sách này như một người bạn, một người hướng dẫn chân tình.

Hoa La Canh là một nhà toán học lớn hiện nay của Trung Quốc và thế giới. Ông xuất thân từ một gia đình nghèo, chỉ được theo học ở nhà trường cho đến hết cấp II, rồi phải bỏ học. Mặc dầu vậy và mặc dầu lúc đó Trung Quốc chưa được giải phóng, điều kiện tự học của thanh thiếu niên rất là khó khăn, ông đã tự học mà trưởng thành lên, đã trở thành một nhà toán học lỗi lạc, có nhiều đóng góp cho nhiều bộ môn toán học, đặc biệt là cho bộ môn "lí thuyết số". Sau khi cách mạng Trung Quốc thành công ông đã và đang đem hết sức mình cống hiến cho sự nghiệp xây dựng chủ nghĩa xã hội. Đặc biệt ông rất quan tâm đến việc học tập của thanh niên, của cán bộ khi đang còn ngồi trên ghế nhà trường cũng như khi đã thôi học. Trong nhiều bài báo của mình ông đã đem hết nhiệt tình để truyền đạt lại những kinh nghiệm quý báu cho thanh niên. Nhiều bài báo đã được thu thập lại trong cuốn "Gửi các bạn trẻ yêu toán", mà bạn Trần Hùng Thao đã trích dịch mười hai bài, được Nhà xuất bản Khoa học xuất bản năm 1964.

Qua hơn tám chục trang sách trên đây, điểm nổi bật đầu tiên thu hút chúng ta là lòng yêu nước, yêu chủ nghĩa xã hội của Hoa La Canh. Người thanh niên Hoa La Canh, khi mới mười bốn mười lăm tuổi, đang còn sống trong chế độ cũ, tuy chưa có nhận thức đầy đủ về tổ quốc, chưa "biết yêu nước", nhưng đã cảm thấy rõ cái bất công của xã hội cũ, cái "hoàn cảnh sống chết mặc bay ấy..." (trang 18) nên đã tự xác định lấy cho mình một hướng đi là học toán, học cho thật giỏi, đã kiên trì đến cùng và đã thành công. Đến khi đã có một trình độ về chuyên môn, thì do có cơ sở lòng yêu nước nên đã phân biệt được là "nhà khoa học phải có lập trường rõ ràng" (trang 20) và do đó mà sau này đi theo cách mạng một cách tự giác và tích cực, cùng với cơ sở lòng yêu nước như vậy mà trong bài "nhận thức của tôi đối với toán học" (trang 17) (*) ông đã nêu cho ta rõ ý thức và tinh thần tìm cách vận dụng khả năng của mình để phục vụ cho tổ quốc ; phục vụ dân tộc, cũng đồng thời qua đó mà lên án chế độ cũ và nêu lên những đòi hỏi lớn lao của tổ quốc đối với các nhà khoa học nói chung, và toán học nói riêng. Hoa La Canh đã quyết tâm đem hết sức mình phục vụ Tổ quốc trong lĩnh vực toán học : "chúng ta muốn xây dựng Tổ quốc, bảo vệ Tổ quốc, phải có kiến thức toán học" (trang 23) Hoa La Canh không chỉ nghĩ mình sẽ toàn tâm toàn ý phục vụ Tổ quốc, mà còn muốn hô hào vận động thế hệ trẻ nỗ lực phục vụ Tổ quốc bằng phương tiện là toán học ; ông "rất nóng lòng muốn làm sao có thể truyền thụ được cho các bạn tất cả những hiểu biết của mình trong chốc lát" (trang 3) để cho anh chị em thanh niên có đủ khả năng phục vụ. Hoa La Canh lại rất tin tưởng ở thanh niên, tin tưởng rằng thanh niên sẽ tiến bộ nhanh và chính thanh niên mới là người chủ đất nước tương lai, ông viết : "Tôi mong các bạn sẽ vượt tôi, vì tôi biết rằng các bạn là những sức sống mới đang tiếp lấy những vũ khí từ tay chúng tôi để tiến quân vào khoa học" (trang 3). Một thể hiện nữa của lòng yêu nước của Hoa La Canh là lòng tự hào dân tộc, điều đó thể hiện đầy đủ và sâu sắc trong bài "toán học là một môn mà nhân dân ta rất tinh thông" (trang 9). Chúng ta hãy học tập Hoa La Canh về tinh thần yêu nước, yêu chủ nghĩa xã hội, yêu một cách sâu sắc và thiết thực, thể hiện cụ thể là hãy tấn công vào khoa học, chiếm lấy đỉnh cao của khoa học, đặc biệt là toán học, để đem nó phục vụ cho việc xây dựng tổ quốc, xây dựng chủ nghĩa xã hội của chúng ta. Tôi muốn nhấn mạnh thêm là chúng ta cần chú ý để học tập được lòng tự hào dân tộc của Hoa La Canh. Ở nước ta trước đây, không phải là có ít người hâm mộ khâm phục phương Tây, khâm phục Pháp, Mĩ đến nỗi quên mất dân tộc, cho mình là cái gì cũng quá nhỏ bé. Tư tưởng này không phải là không ảnh hưởng đến chúng ta ngày nay. Nếu chúng ta chịu tìm tòi suy nghĩ thì chắc rằng chúng ta có thể đánh đổ được tính tự ti dân tộc này không khó khăn lắm. Tôi chỉ xin đơn cử một hai ví dụ. Trước đây có lẽ ở nước ta chỉ có được dăm ba người có trình độ đại học, nhưng ngày nay chỉ mới sau hai mươi năm thành lập nước Việt Nam độc lập, mặc dầu đang còn bị đế quốc tiến hành chiến tranh xâm lược, mà chúng ta đã có hàng vạn cán bộ, tốt nghiệp đại học và có nhiều cán bộ có trình độ trên đại học, trong đó cán bộ về toán học chiếm một tỉ số không phải là ít. Điều đó cũng đã chứng tỏ rằng nếu cả nước ta độc lập và thống nhất thì chắc chắn rằng nền khoa học kĩ thuật của chúng ta còn phát triển nhanh hơn nữa, và điều đó nó nói lên rằng chúng ta có khả năng về mọi mặt, kể cả khả năng về toán học. Mặt khác nữa nếu các bạn đi sâu nghiên cứu tìm hiểu về lịch sử toán học Việt Nam thì chắc chắn rằng các bạn sẽ chứng minh được khả năng của dân tộc ta phong phú biết chừng nào.

Trên đây tôi đã trình bày thu hoạch của tôi về tinh thần yêu nước, yêu chủ nghĩa xã hội của Hoa La Canh. Qua cuốn sách nhỏ của Hoa La Canh chúng ta còn thấy ông giới thiệu rõ nét cho chúng ta về nội dung của toán học. Về toán học thì có thể nói : thực chất của phương pháp toán học là vấn đề rèn luyện tư duy và thực chất của mục đích toán học là phục vụ cho sản xuất. Hoa La Canh đã dẫn chứng lời của Kalinin "toán học là một môn thể thao rèn luyện tư duy" (trang 23). Cái thể hiện cụ thể của thể thao tư duy đó đã được Hoa La Canh nêu lên "từ một số ít những giả thiết đơn giản có thể rút ra nhiều kết luận khác". Chúng ta ai cũng thấy rõ rèn luyện tư duy là rất cần thiết cho mỗi người trong xã hội mà rèn luyện tư duy bằng toán học thì có hiệu lực rõ rệt. "Các nhà toán học Liên Xô cho rằng : những người có một trình độ nhất định về toán học thì tư duy của họ cũng rất lôgích và có nhiều thuận lợi trong công tác nghiên cứu". Hoa La Canh đã lấy đó để giải thích hiện tượng là có nhiều nhà toán học đã thành công trong việc nghiên cứu các ngành khoa học khác như cơ học, vật lí, khí tượng... và vì thế Hoa La Canh đã khẳng định : "mặc dù sau này bạn ra làm công tác gì chăng nữa, toán học cũng sẽ giúp đỡ cho bạn rất nhiều" (trang 23).

---

* Những chú thích (trang ...) trong bài này là chỉ dẫn trong cuốn "Gửi các bạn trẻ yêu toán" Nhà XB Khoa học, 1964.

Đứng về mục đích mà nói thì rõ ràng là mục đích của toán học gián tiếp hay trực tiếp phục vụ sản xuất. Cho nên toán học phát triển chủ yếu là do yêu cầu sản xuất. Hoa La Canh đã chứng minh cụ thể rằng có một giai đoạn dài toán học ở Trung Quốc không phát triển được vì sản xuất không phát triển. Song ở đây một điều quan trọng mà Hoa La Canh luôn luôn nhấn mạnh là người làm toán phải biết toán học của mình phục vụ cho nền sản xuất nào. Toán học ở chế độ tư bản chủ nghĩa cũng phát triển, nhưng nó phục vụ cho sản xuất tư bản chủ nghĩa, cho sản xuất vũ khí để gây chiến tranh. Cho nên mục đích của toán học ở đây, mặc dầu cũng vẫn là phục vụ sản xuất – song không có chính nghĩa và cũng phải nói vì thế mà không phải bao giờ cũng phát triển đều và mạnh được. Toán học ở chế độ ta, chế độ xã hội chủ nghĩa là phục vụ cho việc kiến thiết đất nước, cho việc xây dựng chủ nghĩa xã hội phục vụ cho chiến tranh bảo vệ Tổ quốc chống chiến tranh xâm lược, cho nên triển vọng của toán học rất lớn và yêu cầu

khẳng định rằng mặc dầu toán học là khó, nhưng không phải là khó lắm, và mọi người bình thường đều có thể học giỏi được. Toán học là "thể thao" của tư duy, mà thể thao thì luyện tập thường xuyên là có thể đạt được một tiêu chuẩn nhất định "Toán học cũng thế, chỉ cần rèn luyện thường xuyên là có thể đạt được tới một tiêu chuẩn nhất định, không cần tới một thiên tài nào cả" (trang 29).

Tiêu chuẩn nhất định ở đây theo tôi là trình độ đại học hay trên đại học. Nhận định này của Hoa La Canh là có cơ sở thực tế chúng ta sẽ thấy đầy đủ nhận định này qua bài : "Thông minh do học tập mà có, thiên tài do tích lũy mà nên" (trang 61). Ở ta những ví dụ để chứng minh nhận định này cũng không phải là ít. Nhận định này cho chúng ta có căn cứ để tin tưởng ở bản thân, để quyết tâm dũng cảm tiến quân vào khoa học, vấn đề còn lại chỉ là phải học như thế nào để chóng đạt kết quả tốt mà thôi. Hoa La Canh đã giải đáp đầy đủ cho chúng ta là trước hết phải xác định động cơ và thái độ học tập cho đúng, cụ thể là trước hết phải sự nô dịch của nền văn hóa thực dân ; Hoa La Canh rất yêu mến tin tưởng ở thanh niên, biết vận động phát huy những ưu điểm của thanh niên, nhưng đồng thời cũng đã chỉ ra những nhược điểm, thiếu sót mà thanh niên hay mắc phải. Đặc biệt trong bài "Bài toán chia ba một góc" (trang 72) ngoài nội dung của bài toán ra trong phần I (mở đầu) và phần III "một lời buộc tội không công bằng" bằng lí luận sắc bén và rất "toán học" ông đã vạch ra một cách sâu sắc một loại nhược điểm của thanh niên ta trong bước đầu đi vào khoa học. Và còn rất nhiều vấn đề khác nữa có thể đề cập đến được.

Ở đây cuối cùng tôi chỉ xin nói đến một vấn đề nữa là đức tính của người làm khoa học sau khi lo rèn luyện tư tưởng lập trường cho mình, sau khi lo luôn luôn bồi dưỡng cho mình lòng yêu nước, yêu chủ nghĩa xã hội, thì còn cần phải có các đức tính tối thiểu là : khiêm tốn và dũng cảm. Khiêm tốn trong quan hệ với thầy với bạn để học hỏi, và khiêm tốn ngay cả với các vấn đề khoa học, khiêm tốn như Hoa La Canh đã khiêm tốn với những câu : "tôi mong các bạn sẽ vượt tôi" (trang 3) khi nói với thanh niên "hiểu biết của tôi còn rất ít ỏi" (trang 3) "trong nghiên cứu khoa học, tôi mới chỉ là một chú học trò nhỏ..." (trang 52) ; "Bạn bên cạnh tôi học một giờ thì tôi phải học mất hai giờ" (trang 24 và 64) "Tôi không xem nhẹ các bài toán dễ" (trang 24). Khiêm tốn xong lại phải dũng cảm, và có khiêm tốn mới có thể dũng cảm được. Dũng cảm để không sợ khó, dũng cảm để có đủ nghị lực vượt khó, tiến công vào khoa học để chiếm lĩnh lấy được những đỉnh cao của khoa học. Phải dũng cảm thường xuyên như Hoa La Canh đã dũng cảm "luôn luôn khắc khổ dùi mài không sợ khó khăn". Cũng như Hoa La Canh đã dũng cảm trước những bài toán khó "rồi không sợ những bài toán khó" (trang 25). Các bạn độc giả thân mến, có tinh thần khiêm tốn và có lòng dũng cảm các bạn sẽ dẫn đến tạo cho mình được lòng say mê với khoa học, với bộ môn nghiên cứu của mình, chắc chắn các bạn sẽ học tập được Hoa La Canh "thông minh do học tập mà có, thiên tài do tích lũy mà nên". Trong một tương lai gần đây, chắc chắn rằng sẽ có nhiều bạn có nhiều đóng góp cho Tổ quốc ta trong lĩnh vực khoa học kĩ thuật, trong toán học.

KHÔNG NÊN THỎA MÃN TRONG HỌC TẬP

NGUYỄN TRỌNG TÔN *và* NGUYỄN NHUNG
(Hà Bắc cũ)

Đa số học sinh chúng ta hay thỏa mãn trong học tập. Cho rằng những kiến thức trình bày trong sách giáo khoa là kết tinh sự suy nghĩ của các nhà bác học đã mấy ngàn năm ; những kiến thức đó là tuyệt diệu nhất rồi, đầy đủ nhất rồi, học chỉ là tiếp thu cho được, vận dụng cho được những kiến thức đó đã là rất khó và giỏi rồi !. Các bạn ạ, nếu ai cũng suy nghĩ như thế thì toán học không thể phát triển được. Vì nếu các nhà toán học cũng nghĩ như chúng ta thì làm sao có những phát minh mới. Các bạn chắc biết rằng các nhà toán học hay thắc mắc, hoài nghi, không thỏa mãn ở những điều đã biết và từ đó tìm tòi suy nghĩ nẩy sinh biết bao công trình mới. Chúng ta, ai cũng thừa nhận rằng những kiến thức được học ngày nay là kết tinh sự suy nghĩ mấy ngàn năm, là hay nhưng không phải vì thế mà chúng ta tiếp thu kiến thức máy móc, thụ động. Học toán phải là một quá trình sáng tạo, sáng tạo trong tiếp thu kiến thức và sáng tạo trong việc vận dụng những kiến thức đó mà kẻ thù nguy hiểm nhất là tư tưởng thỏa mãn ở những cái gì đã có, thiếu suy nghĩ tìm tòi. Dĩ nhiên các nhà bác học có những công trình lớn còn chúng ta chỉ sáng tạo nho nhỏ, nhưng chính những sáng tạo nho nhỏ ấy là rất quý, nó sẽ là mầm mống của sáng tạo lớn sau này. Tôi xin nêu ở đây một ví dụ :

Chúng ta học định lí Viét đều cảm thấy hay và rất thú vị ! Cái hay cái đẹp của định lí Viét là ở chỗ nó hết sức đơn giản và có nhiều ứng dụng quan trọng. Một trong những ứng dụng của định lí Viét là tính một biểu thức của các nghiệm phương trình bậc hai mà không cần giải phương trình bậc hai đó.

Ví dụ : Không giải phương trình

$2x^2 - 6x - 1 = 0$ hãy tính

$$S = \frac{x_1^3x_2 + x_2^3x_1 - 2x_1x_2}{x + x_2^2}$$

trong đó x_1, x_2 là nghiệm của phương trình.

Lời giải : Theo định lí Viét :

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 3 \ ;$$

$$x_1x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-1}{2}$$

Vậy :

$$S = \frac{x_1x_2(x_1^2 + x) - 2x_1x_2}{x_1^2 + x_2^2} =$$

$$= \frac{x_1x_2[(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2] - 2x_1x_2}{[(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2]} =$$

$$= \frac{-\frac{1}{2}[(3)^2 + 1] + 1}{3^2 + 1} =$$

$$= -\frac{4}{10} = -\frac{2}{5}$$

Qua ví dụ chúng ta có thể rút ra phương pháp giải loại toán này là biến đổi biểu thức đã cho thành biểu thức của tổng và tích hai nghiệm số, sau đó thay giá trị của tổng vá tích (theo định lí Viét) vào ta được giá trị cần tìm.

Nếu chúng ta hay thỏa mãn, đại khái qua loa thì đến đây có thể dừng lại rồi. Vì đã biết phương pháp. Nhưng có phải chỉ đến đây là kết thúc cả loại toán của chúng ta không ? Với óc hay thắc mắc và không thỏa mãn ấy các bạn hãy tính một vài biểu thức nữa (tự "hịa" ra càng tốt) các bạn sẽ thấy rằng không phải biểu thức nào cũng tính được vì có những biểu thức không đưa được về dạng biểu thức của tổng và tích 2 nghiệm.

Như vậy này ra vấn đề là những biểu thức nào đưa được về dạng tổng và tích hai nghiệm ?

Ta biết rằng tổng và tích có tính chất giao hoán, vì thế biểu thức của tổng và tích 2 nghiệm $x_1 + x_2$, x_1x_2 là biểu thức có thể hoán vị giữa x_1 và x_2 mà biểu thức không đổi. Nghĩa là biểu thức là đối xứng đối với x_1 và x_2. Như vậy một biểu thức của hai nghiệm muốn tính được mà không cần giải phương trình thì điều kiện cần là phải đối xứng đối với 2 nghiệm. Nhưng đó có phải là điều kiện đủ không ? Suy nghĩ sâu một chút các bạn sẽ thấy rằng trong biểu thức đối xứng nếu có số hạng $Ax_1^\alpha x_2^\beta$. $\beta \geqslant \alpha \geqslant 0$ thì nó cũng phải có số hạng $Ax_1^\beta x_2^\alpha$ nghĩa là trong biểu thức gồm những tổng :

$$Ax_1^\alpha x_2^\beta + Ax_1^\beta x_2^\alpha = A(x_1x_2)^\alpha(x_1^k + x_2^k) \ ; k = \beta - \alpha.$$

Ở đây A là hệ số ; $(x_1x_2)^\alpha$ là biểu thức của tích cho nên muốn xét biểu thức đối xứng có đưa được về biểu thức của tổng $x_1 + x_2$ và tích x_1x_2 không ta chỉ cần xét đưa $T_k = x_1^k + x_2^k$ về dạng biểu thức của tổng và tích 2 nghiệm. Nói một cách khác là ta khai triển T_k thành đa thức của 2 đối số $x_1 + x_2$ và x_1x_2.

Ta thấy :

$$T_k = x_1^k + x_2^k = (x_1^{k-1} + x_2^{k-2})(x_1 + x_2) - \\ - (x_1^{k-2} + x_2^{k-2})x_1x_2$$

$$T_k = (x_1 + x_2)T_{k-1} - (x_1x_2)T_{k-2} \qquad (1)$$

Cho nên nếu T_{k-1} và T_{k-2} khai triển được thành đa thức của hai ẩn $(x_1 + x_2)$ và x_1x_2 thì T_k cũng khai triển được.

Ta biết $T_1 = x_1 + x_2$ và $T_2 = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$ khai triển được theo tổng và tích 2 nghiệm vậy theo lí luận quy nạp T_k khai triển được thành đa thức của tổng $x_1 + x_2$ và tích x_1x_2 với mọi k. (k = 1, 2, 3, ...)

Như vậy là ta đã giải quyết được thắc mắc trên và có thể kết luận :

Điều kiện cần và đủ để một biểu thức đại số của 2 nghiệm x_1, x_2 của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ tính được mà không cần *giải phương trình là biểu thức đó đối xứng đối với x_1, x_2.*

Với óc tò mò, không thỏa mãn chúng ta đã tìm ra một kết quả mới (dĩ nhiên là đối với chúng ta) nhưng chưa cho phép chúng ta dừng lại vì đây mới chỉ là kết luận có tính chất lí thuyết (khẳng định là tính được) nhưng tính như thế nào ? chúng ta lại cùng nhau suy nghĩ thêm.

Như trên đã biết biểu thức đối xứng gồm những số hạng dạng $A(x_1x_2)^{\alpha}T_k$, nên muốn tính giá trị biểu thức khó khăn còn lại là tính các T_k vì A là hệ số, $x_1x_2 = \frac{c}{a}$ đã biết.

Nhưng theo (1)

$T_k = -\frac{b}{a}T_{k-1} - \frac{c}{a}T_{k-2}$ nên cũng chỉ ra cho ta một phương pháp tính T_k bằng quy nạp. Nghĩa là ta tính T_1, T_2 từ đó suy ra T_3 rồi từ T_2, T_3 ta suy ra $T_4 \dots, T_{k-2}, T_{k-1}$ suy ra T_k với mọi k.

Các bạn thân mến ! Thật phấn khởi vì công lao chúng ta không uổng, chúng ta đã giải quyết khá trọn vẹn bài toán nêu ra. Nhưng các bạn có còn băn khoăn gì nữa không ? Còn đấy ! Vì nếu trong biểu thức cần tính T_{100} chẳng hạn thì theo phương pháp trên chúng ta phải ngồi tính từ T_2 đến T_{99}. Phương pháp thì rõ ràng rồi nhưng thật tính toán không phải đơn giản ! Một câu hỏi mới lại đặt ra : Liệu có cách nào tính được T_k nhanh chóng không ?

Ta hãy nghiên cứu vài trường hợp cụ thể :

$$T_1 = x_1^1 + x_2^1 = (x_1 + x_2)^1$$

$$T_2 = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$$

$$T_3 = x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2)$$

$$T_4 = x_1^4 + x_2^4 = (x_1 + x_2)^4 - 4x_1x_2 \times (x_1 + x_2)^2 + 2(x_1x_2)$$

$$T_5 = x_1^5 + x_2^5 = (x_1 + x_2)^5 - 5x_1x_2 \times (x_1 + x_2)^3 + 5(x_1x_2)^2(x_1 + x_2)$$

$$T_6 = x_1^6 + x_2^6 = (x_1 + x_2)^6 - 6x_1x_2 \times (x_1 + x_2)^4 + 9(x_1x_2)^2(x_1 + x_2)^2 - 2(x_1x_2)^3$$

$$T_7 = x_1^7 + x_2^7 = (x_1 + x_2)^7 - 7x_1x_2 \times (x_1 + x_2)^5 + 14(x_1x_2)^2(x_1 + x_2)^3 - 7(x_1x_2)^3 \cdot (x_1 + x_2)$$

Từ những ví dụ này ta thấy trong khai triển các T_k nếu sắp xếp theo lũy thừa giảm dần của $x_1 + x_2$ thì :

– Số mũ của $x_1 + x_2$ giảm dần đều 2 đơn vị từ k xuống tới 0 hoặc 1 tùy theo k chẵn hay lẻ.

– Số mũ của x_1x_2 tăng dần đều 1 đơn vị từ 0 đến $\left[\frac{k}{2}\right]$ (phần nguyên của $\frac{k}{2}$)

– Các hệ số trong T_k đan dấu (hệ số thứ 1, 3, 5,..., dương còn thứ 2, 4, 6,... âm). Như vậy là chúng ta đã biết khá nhiều về khai triển T_k nhưng vấn đề cơ bản là các hệ số của khai triển T_k có tuân theo quy luật không ? Nếu có thì quy luật đó như thế nào ? Ta ghi các hệ số của T_k (theo giá trị tuyệt đối) thành bảng sau (bảng 1)

1			
1	2		
1	3		
1	4	2	
1	5	5	
1	6	9	2
1	7	14	7

Bảng 1

Trong đó dòng thứ k là hệ số của T_k cột thứ l là hệ số của số hạng chứa $(x_1x_2)l$. Nhìn vào bảng này ta sẽ thấy mối quan hệ của các số trong bảng.

a) Cột 1 gồm toàn số 1.

b) Cột 2 gồm các số tự nhiên kể từ 2.

Số k trong cột 2 là số ở dòng thứ k : dòng hệ số trong khai triển T_k.

c) Kể từ dòng thứ 3 mỗi số ở dòng i cột j kí hiệu là t_{ij} bằng số ở dòng $i - 1$ cột j : t_{i-1j} cộng với số ở dòng $i - 2$ cột $j - 1$: t_{i-2j-1} nghĩa là ta có công thức :

$$t_{ij} = t_{i-1j} + t_{i-2j-1}.$$

Ví dụ : Số 7 ở dòng 7 cột 2 là do số 6 ở dòng 6 cột 2 cộng với số 1 ở dòng 5 cột 1.

Số 9 ở dòng 6 cột 3 là do số 5 ở dòng 5 cột 3 cộng với số 4 ở dòng 4 cột 2.

Từ những trường hợp riêng bằng suy luận quy nạp không hoàn toàn (hay tổng quát hóa) ta đã đi tới những nhận xét rất quan trọng trong việc khai triển T_k. Nhưng nhận xét này đến đây mới chỉ là dự đoán nhưng cũng không khó khăn lắm bằng suy luận chặt chẽ các bạn cũng có thể chứng minh được toàn bộ những nhận xét trên đây là hoàn toàn đúng. Các bạn tự chứng minh nhé.

Với những kết luận trên đây chúng ta có thể viết một bảng hệ số trong khai triển T_k rất nhanh chóng. Ví dụ từ bảng (1) ta có thể viết tiếp các dòng hệ số T_8, T_9, T_{10}, T_{11}... như sau :

1	8	20	16	2	
1	9	27	30	9	
1	10	35	50	25	2
1	11	44	77	55	11

Từ bảng của các hệ số này kết hợp với các nhận xét trên chúng ta có thể khai triển các T_k rất nhanh chóng :

Ví dụ :

Từ dòng 9 có :

$$T_9 = (x_1^9 + x_2^9) = (x_1 = x_2)^9 -$$
$$- 9x_1x_2(x_1 + x_2)^7 + 27(x_1x_2)^2(x_1 + x_2)^5 -$$
$$- 30(x_1x_2)^3(x_1 + x_2)^3 + 9(x_1x_2)^4(x_1 + x_2)$$

Từ dòng 11 có :

$$T_{11} = (x_1^{11} + x_2^{11}) = (x_1 + x_2)^{11} -$$
$$- 11x_1x_2(x_1 + x_2)^9 +$$
$$+ 44(x_1x_2)^2(x_1 + x_2)^7 - 77(x_1x_2)^3(x_1 + x_2)^5 +$$
$$+ 55(x_1x_2)^4(x_1 + x_2)^3 - 11(x_1x_2)^5(x_1 + x_2)$$

Chúng ta nhận xét thêm rằng dãy hệ số và các kết luận trên đây thực chất là trong khai triển $x_k + y_k$ theo tổng $x + y$ và tích xy nên có thể dùng không chỉ trong các bài toán về phương trình bậc 2 mà còn trong nhiều loại toán khác nữa. Ví dụ : cho tổng $x + y$ nguyên và tích xy nguyên chứng minh mọi đa thức bổ sung thêm với hệ số nguyên đối xứng của x và y đều có giá trị nguyên ? Thật vậy mọi đa thức đối xứng của x và y đều khai triển thành đa thức của tổng và tích $(x + y \; ; \; xy)$ mà các hệ số của đa thức này đều nguyên (vì hệ số đa thức cho và hệ số trong sự khai triển đều nguyên) do đó dễ dàng suy ra giá trị của đa thức là nguyên...

Các bạn thân mến ! Vẫn chỉ từ một bài toán, chúng ta rèn luyện được cho mình óc chịu khó tìm tòi không chịu thỏa mãn ở những cái gì đã biết, quyết tâm tìm cái mới ; bằng phương pháp suy luận đúng chúng ta có thể tìm thấy nhiều điều mới lạ và hết sức bổ ích. Các bạn đi theo con đường đó chắc chắn sẽ thấy phấn khởi và tự hào khi thấy mình còn rất nghèo nàn về kiến thức, ít ỏi về kinh nghiệm và non trẻ về tuổi đời mà cũng tìm thấy những điều mới lạ (tất nhiên đối với bản thân) về toán học. Không những thế còn rèn luyện cho chúng ta óc suy nghĩ sáng tạo trong học tập, công tác, cầu tiến bộ, quyết tâm trong rèn luyện tu dưỡng đạo đức tự tin ở khả năng mình, đó là những phẩm chất hết sức quý báu của học sinh trong thời đại hiện nay.

RÈN LUYỆN SỰ LINH HOẠT TRONG SUY NGHĨ

PHAN ĐỨC CHÍNH

(Trường Đại học Tổng hợp)

Một điều rất nguy hiểm trong việc học toán – cũng như học các môn khác – là học thuộc bài một cách cứng nhắc, không chịu suy nghĩ để các kiến thức tiếp thu được trở thành kiến thức sống, linh hoạt, sẵn sàng vận dụng được trong bất cứ trường hợp nào. Có thể nói rằng sự linh hoạt trong suy nghĩ là một điều kiện cần thiết để đạt được những kết quả tốt trong việc học toán.

Rèn luyện để suy nghĩ linh hoạt trong việc học toán là một quá trình phải thường xuyên phấn đấu, nó phải kết hợp với việc đào sâu suy nghĩ, phân tích và tổng hợp vấn đề, tiếp thu kiến thức mới có phê phán, liên hệ với kiến thức cũ, v.v... mà mọi học sinh ở mọi trình độ đều có thể và phải làm được, nhất là ở cấp 3.

Có lần chúng tôi đã ra cho một số bạn lớp 8 bài toán sau

Ví dụ 1 – Chứng minh rằng $a^2 + a + 1 > 0$ *với mọi giá trị của* a.

Nhiều bạn đã biến đổi như sau :

$$a^2 + a + 1 = a^2 + 2a + 1 - a =$$

$$= (a + 1)^2 - a$$

sau đó vì thời gian hạn chế, các bạn ấy mất bình tĩnh nên luẩn quẩn không biết làm thế nào để rút ra kết luận đòi hỏi. Kể ra, nếu bình tĩnh hơn để khảo sát chi tiết về dấu của a thì với phép biến đổi trên, cuối cùng cũng có thể đi đến kết quả, nhưng phải nói rằng phép biến đổi ấy không tốt đối với bài toán đã ra.

Phân tích nguyên nhân thất bại của các bạn ấy, chúng tôi nghĩ rằng có lẽ vì các bạn bị một ấn tượng rất mạnh bởi công thức

$$a^2 + 2a + 1 = (a + 1)^2,$$

và nhớ công thức ấy một cách máy móc, không linh hoạt. Ở trình độ lớp 8, bài toán đã ra có thể giải quyết dễ dàng nếu các bạn sử dụng phép biến đổi

$$a^2 + a + 1 = a^2 + 2a\frac{1}{2} + 1 =$$

$$= \left(a + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 =$$

$$= \left(a + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}.$$

Nói cách khác, khi nói đến số a, ta không nên quan niệm đơn thuần "*a là a*", mà phải nghĩ rằng số a là đồng thời

$$-(-a), (a + b) - b, c\frac{a}{c}\ (c \neq 0),$$

$$\sqrt[3]{a^3}, \frac{a^{n+1}}{a^n}, \ldots$$

Trong một kì thi ở trình độ lớp 8, nhiều bạn bị bế tắc bởi bài toán hình học khá đơn giản sau đây

Ví dụ 2 – Cho tam giác ABC. Trên cạnh AB người ta lấy một điểm M. Hãy xác định điểm N trên cạnh AC sao cho

$$\frac{\text{diện tích}\,AMN}{\text{diện tích}\,ABC} = k.$$

trong đó k là một số dương cho trước.

Nhiều bạn đã biết kẻ đường thẳng MC, nhưng không tiếp tục hơn được nữa. Rõ ràng ở đây ta có

$$\frac{\text{diện tích}\,AMN}{\text{diện tích}\,ABC} = \frac{\text{diện tích}\,AMN}{\text{diện tích}\,AMC} \times$$

$$\times \frac{\text{diện tích}\,AMC}{\text{diện tích}\,\text{ABC}} = \frac{AN}{AC} \cdot \frac{AM}{AB}$$

thành thử điểm N phải tìm là điểm trên AC sao cho

$$\frac{AN}{AC} = k\,\frac{AB}{AM}$$

với điều kiện vế phải có giá trị nhỏ hơn hay bằng 1.

Sở dĩ có bạn không làm được bài này, theo ý chúng tôi, là vì khi vẽ một tam giác ABC thì các bạn chỉ quan niệm rằng đáy của tam giác ABC là cạnh BC nằm ngang trước mắt, và quên mất rằng cạnh AB cũng như cạnh AC đều có thể coi là đáy của tam giác ấy được.

Ở lớp 9 chúng tôi đã ra bài toán sau

Ví dụ 3 – Cho α và β là hai góc nào đó. Chứng minh rằng nếu

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\alpha\,\cos\beta \geqslant 0 \qquad (6)$$

thì $$\cos\alpha + \cos\beta \geqslant 0 \qquad (7)$$

Bài toán này xem ra có vẻ là một bài toán lượng giác, và ở lớp 9 đã học khá nhiều về lượng giác, nên nhiều bạn đem ra cả một kho vũ khí các công thức biến đổi lượng giác để giải bài toán.

Thật ra, đây là một bài toán đại số, vì khi gặp một biểu thức có dạng $A + B + AB$, chúng ta có thể nghĩ rằng

$$A + B + AB = 1 + A + B + AB - 1 =$$

$$= (1 + A)(1 + B) - 1$$

do đó bất đẳng thức (6) là tương đương với bất đẳng thức $(1 + \cos\alpha)(1 + \cos\beta) \geqslant 1$

Mặt khác vì $1 + \cos\alpha \geqslant 0$, $1 + \cos\beta \geqslant 0$, và ở lớp 9 tất cả các bạn đều biết rằng : nếu $a \geqslant 0$ và $b \geqslant 0$ thì

$$\frac{a + b}{2} \geqslant \sqrt{ab},$$

do đó $\dfrac{(1 + \cos\alpha) + (1 + \cos\beta)}{2} \geqslant$

$$\geqslant \sqrt{(1 + \cos\alpha)(1 + \cos\beta)} \geqslant 1$$

và từ đây suy ra bất đẳng thức (7).

Chúng ta hãy xét một thí dụ khác ở lớp 10 :

Ví dụ 4 - Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = \frac{x^2 + 3x + 3}{x^2 + x + 1} \qquad (8)$$

Bài toán này có thể giải bằng phương pháp đạo hàm, nhưng... rất tiếc rằng nó lại ra trước khi các bạn học đạo hàm. Trong hoàn cảnh ấy, tức là không dùng đạo hàm, thì làm thế nào để giải ?

Ở đây cần phải có một sự suy nghĩ linh hoạt và phân tích sâu sắc bài toán, cụ thể là nhận xét như sau :

a) Mẫu số của vế phải trong hệ thức (8) luôn luôn dương với mọi giá trị của x, vậy miền xác định của hàm số y là toàn bộ trục số : x có thể lấy bất cứ giá trị nào cũng được. Đồng thời mỗi giá trị của x quyết định giá trị của y, tức là y không thể lấy giá trị tùy ý mà y chỉ có thể có giá trị trong một phạm vi nhất định nào đó ;

b) Ngay từ lớp 9, chúng ta đã học về hàm số ngược ; miền xác định của hàm số ngược là miền giá trị của hàm số xuất phát !

Vì vậy chúng ta hãy thử đi tìm hàm số ngược của hàm số đã cho, tức là từ hệ thức (8) rút ra x theo y. Ta có

$$yx^2 + yx + y = x^3 + 3x + 3$$

vậy x là nghiệm của phương trình.

$$(y - 1)x^2 + (y - 3)x + (y - 3) = 0$$

Phương trình này có nghiệm nếu y nằm trong miền giá trị của nó, nói cách khác y phải lấy giá trị sao cho biệt số Δ của phương trình là lớn hơn hay bằng 0. Vì

$$\Delta = (y - 3)^2 - 4(y - 3)(y - 1) =$$
$$= (y - 3)(1 - 3y)$$

nên ta thấy rằng $\frac{1}{3} \leqslant y \leqslant 3$

từ đó kết luận rằng giá trị nhỏ nhất của y là $\frac{1}{3}$ và giá trị lớn nhất của y là 3.

Nếu các bạn đã học đạo hàm, các bạn có thể thử lại kết quả, và thấy rằng cách giải trên đây gọn hơn rất nhiều so với cách giải bằng đạo hàm.

Cần nói thêm rằng để giải một bài toán về cực đại và cực tiểu của một hàm số, phương pháp dùng đạo hàm là một phương pháp khá "vạn năng", nhưng không phải bất cứ lúc nào phương pháp ấy cũng là phương pháp thuận tiện nhất, đặc biệt khi ta gặp những hàm số hơi phức tạp.

Trên đây chúng tôi đã trao đổi với các bạn vài kinh nghiệm suy nghĩ khi học toán và làm toán cũng như việc rèn luyện sự linh hoạt trong suy nghĩ. Vấn đề này hết sức phong phú, bao gồm nhiều mặt, và có lẽ nói không khi nào hết. Mong các bạn suy nghĩ về phong cách học tập của mình, đúc rút kinh nghiệm, tìm ra phương pháp học tập thích hợp tốt nhất để đạt được nhiều kết quả nhất.

PHƯƠNG PHÁP TRỪU TƯỢNG CÓ ÍCH GÌ ?

HOÀNG TỤY

Trong vòng một thế kỉ nay, toán học ngày càng trở nên *trừu tượng*, nhưng cũng ngày càng trở nên *có ích* hơn. Tại sao như vậy ? Điều đó có thể giải thích bằng nhiều lí do, nhưng tốt hơn là nên lấy một ví dụ.

Trong hình học sơ cấp, chúng ta đều hiểu khoảng cách giữa hai điểm là độ dài của đoạn thẳng nối hai điểm đó. Nhưng trong đời sống hàng ngày, có khi ta nói : khoảng cách từ chợ đến trường, chẳng hạn, bằng 2km, trong câu nói ấy khoảng cách không có nghĩa độ dài đoạn thẳng hình học mà là độ dài con đường thực tế (rất có thể ngòng ngoèo, chứ không thẳng) đi từ chợ đến trường. Thế là ta đã hiểu khoảng cách theo một nghĩa rộng hơn trong hình học sơ cấp rồi đấy.

Vậy ta thử xem cái gì là cốt yếu nhất trong khái niệm khoảng cách ? Nghĩ cho kĩ ta sẽ thấy rằng nếu kí hiệu $d(A, B)$ là khoảng cách giữa A và B thì các tính chất sau đây nói lên thực chất của khái niệm ấy :

1) $d(A, B) \geq 0$, và $d(A, B) = 0$ khi và chỉ khi $A = B$ (A và B trùng nhau) ;

2) $d(A, B) = d(B, A)$;

3) Bất kì A, B, C như thế nào : $d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$ (tức là : trong tam giác ABC cạnh AB không dài hơn tổng số hai cạnh kia).

Cho nên ta có thể mở rộng khái niệm khoảng cách như sau : cho A, B, C... là những phần tử tùy ý của một tập hợp T nào đó ; nếu với mỗi cặp phần tử A, B ta xác định được một số $d(A, B)$ thỏa mãn cả ba điều kiện 1) 2) 3) thì khi ấy số $d(A, B)$ sẽ gọi là *khoảng cách* giữa A và B, bất kể A, B là những đối tượng như thế nào (điểm, đường cong, hàm số, trâu, bò, bàn, ghế, v.v...).

Xây dựng khái niệm khoảng cách trừu tượng như thế có ích lợi gì ? – Ít ra có hai điều lợi đáng kể : một là làm lộ thực chất khái niệm khoảng cách, giúp ta khi suy luận trên những vấn đề về khoảng cách khỏi bị vướng víu bởi những chi tiết không căn bản, nhờ đó có thể nhìn rõ phạm vi ứng dụng rộng rãi nhất của những suy luận ấy ; hai là với khái niệm khoảng cách được mở rộng cho những đối tượng bất kì, ta có thể dựa vào trực quan hình học và trí tưởng tượng không gian mà hình dung cụ thể nhiều sự việc trừu tượng về các đối tượng ấy, giúp ta dễ nắm được thực chất các sự việc và gợi ý cho ta phương hướng giải quyết đối với nhiều bài toán khó.

Chẳng hạn ta hãy xét vấn đề truyền tin rất quan trọng trong đời sống hiện đại. Khi có một bản tin viết bằng các chữ cái nào đó (ví dụ chữ cái latinh) thì muốn truyền bản tin đi xa (bằng vô tuyến điện, điện báo, hoặc bằng những phương tiện khác) ta phải đổi các chữ cái thành tín hiệu có thể phát đi. Thông thường người ta dùng hai tín hiệu cơ bản, như trong điện báo thì một tín hiệu là "gạch" tín hiệu kia là "chấm". Ta hãy chỉ tín hiệu thứ nhất bằng con số 1, tín hiệu thứ hai bằng con số 0. Mỗi chữ cái được biểu diễn, theo một quy tắc nhất định, bởi một tổ hợp tín hiệu cơ bản, gọi là *mã hiệu* của chữ ấy... Ví dụ chữ *a* có thể biểu diễn bởi 10000, chữ *b* bởi 00110, v.v... Như vậy toàn văn bản tin sẽ ghi thành một dãy tín hiệu cơ bản liên tiếp (việc ghi đó gọi là *mã hóa* bản tin). Khi những tín hiệu này được phát đi thì ở nơi nhận người ta sẽ căn cứ theo những tín hiệu nhận được và cách lập mã đã quy ước mà tái lập bản tin đã phát (việc tái lập này gọi là *giải mã*).

Khó khăn trong việc truyền tin là tín hiệu phát đi có thể bị "tiếng ồn" dọc đường làm sai lạc, khiến cho nơi thu sẽ nhận được tín hiệu khác với tín hiệu thật đã phát. Cho nên vấn đề rất quan trọng là nghĩ ra cách lập mã như thế nào để khắc phục được sự xuyên tạc của tiếng ồn và bảo đảm cho người nhận, mặc dù sự xuyên tạc ấy, vẫn có thể phát hiện và đính chính lấy những chỗ sai lạc để đoán được đúng bản tin đã phát (mã như thế gọi là *mã tự sửa sai*).

Ta hãy ứng dụng khái niệm khoảng cách vào vấn đề này. Cho n là một số tự nhiên cố định. Gọi một dãy n tín hiệu liên tiếp là một từ (hay rõ hơn, một từ n-ngôi). Nói cách khác, một từ (n-ngôi) gồm n tín hiệu ở n ngôi (vị trí) kế tiếp : 1, 2, ... n. Hai từ khác nhau thì có tín hiệu khác nhau ít nhất ở một ngôi nào đó. Gọi khoảng cách $d(A, B)$ giữa hai từ A, B là số ngôi tại đấy hai từ có tín hiệu khác nhau. Chẳng hạn với $n = 6$ khoảng cách giữa hai từ $A = 010110$ và $B = 100100$ là $d(A, B) = 3$ (tín hiệu khác nhau ở 3 ngôi : 1, 2, 5). Có thể thấy ngay rằng số $d(A, B)$ xác định như thế thỏa mãn đúng ba điều kiện 1) 2) 3) của khoảng cách. Thật vậy, các điều kiện 1) 2) hiển nhiên còn điều kiện 3) thì có thể chứng minh dễ dàng như sau. Xét ba từ A, B, C. Nếu ở một ngôi nào đó hai từ A, B có tín hiệu khác nhau, thì ở ngôi ấy : hoặc các tín hiệu của A và C, hoặc các tín hiệu của C và B, phải khác nhau. Do đó số ngôi mà ở đó hai từ A và B có tín hiệu khác nhau phải bé hơn hoặc bằng tổng số các ngôi mà ở đó các tín hiệu của A và C hoặc của C và B khác nhau. Nghĩa là $d(A, B) \leqslant d(A, C) + d(C, B)$.

Bây giờ giả sử ta biết chắc rằng trong một dãy liên tiếp n tín hiệu phát đi chỉ có thể có nhiều nhất là k tín hiệu bị sai lạc, nghĩa là mỗi từ phát đi sẽ được nhận với không quá k lỗi. Ta hãy chọn một tập hợp gồm những từ n-ngôi, từng đôi một cách nhau một khoảng cách lớn hơn hoặc bằng $2k + 1$ (giả thiết $n \geqslant 2k + 1$). Các từ này sẽ gọi là *từ được phép*. Khi ấy :

Nếu chỉ phát đi toàn những từ được phép thì người nhận bao giờ cũng có thể tự đính chính những chỗ sai lạc và hiểu được đúng từ đã phát.

Thật vậy, cho A là từ đã phát (được phép), A' là từ nhận được. Vì A' có không quá k lỗi nên $d(A, A') \leqslant k$. Còn đối với mọi từ được phép B khác ta có $d(A, A') + d(A', B) \geqslant d(A, B) \geqslant 2k + 1$ hay $d(B, A') \geqslant 2k + 1 - d(A, A') \geqslant 2k + 1 - k > k$. Vậy chỉ có A là từ được phép duy nhất cách A' không quá k. Cho nên khi nhận được A' thì người nhận chỉ cần tìm từ được phép nào cách A' không quá k là sẽ có được đúng từ đã phát.

Chẳng hạn, xét trường hợp $n = 7$, $k = 1$ (trong mỗi dãy 7 tín hiệu liên tiếp phát đi chỉ có nhiều lắm là một tín hiệu bị sai lạc). Ta hãy quy định từ được phép là mọi dãy 7 tín hiệu : $\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3\,\alpha_4\,\alpha_5\,\alpha_6\,\alpha_7$ (mỗi α_i là 1 hoặc 0), sao cho các tổng số sau đây đều là số chẵn :

$$\left.\begin{aligned} S_1 &= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \quad + \alpha_5 \\ S_2 &= \alpha_1 + \alpha_2 \quad + \alpha_4 \quad + \alpha_6 \\ S_3 &= \alpha_1 \quad + \alpha_3 + \alpha_4 \quad + \alpha_7 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Ta sẽ gọi 4 tín hiệu đầu : $\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3\,\alpha_4$ là các tín hiệu thông tin, còn 3 tín hiệu cuối : $\alpha_5\,\alpha_6\,\alpha_7$ là các tín hiệu kiểm tra. Rõ ràng nếu hai từ được phép $\alpha = (\alpha_1\,\alpha_2\,...\,\alpha_7)$ và $\beta = (\beta_1\,\beta_2\,...\,\beta_7)$ có các tín hiệu thông tin trùng nhau : $\alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2, \alpha_3 = \beta_3, \alpha_4 = \beta_4$, thì các tín hiệu kiểm tra cũng trùng nhau : $\alpha_5 = \beta_5, \alpha_6 = \beta_6, \alpha_7 = \beta_7$. Vậy hai từ được phép α, β khác nhau thì phải khác nhau ít nhất ở một tín hiệu thông tin. Nếu chúng chỉ khác nhau ở một tín hiệu thông tin thôi thì do các tổng (1) chẵn nên chúng phải khác nhau ít nhất ở hai tín hiệu kiểm tra nữa. Còn nếu chúng khác nhau ở vừa đúng hai tín hiệu thông tin thì cũng dễ thấy rằng chúng phải khác nhau ít nhất ở một tín hiệu kiểm tra nữa. Thành thử khoảng cách giữa α và β bao giờ cũng lớn hơn hay bằng 3. Vậy các từ quy định đúng là từ được phép theo định nghĩa ở trên (ở đây $k = 1$). Việc tái lập từ được phép đã phát, dựa theo kết quả tín hiệu nhận được, không có gì khó khăn. Ví dụ : nếu kết quả tín hiệu nhận được là 0100101 thì S_2 và S_3 lẻ nên lỗi ở trong S_2 và S_3, nhưng không thể ở α_1, α_2 hay α_3 vì S_1 chẵn, vậy phải ở α_4, tức là α_4 thật ra bằng 1 chứ không phải 0 và từ đã phát là 0101101.

Với các từ được phép đã quy định rồi, mã tự sửa sai có thể xây dựng như sau. Trước hết mã hóa bản tin cần phát theo một mã nào đó (mã này chưa chú ý sửa sai), để viết nó thành một dãy tín hiệu 0 và 1. Sau đó ngắt dãy này thành từng đoạn, cứ 4 tín hiệu liên tiếp là một đoạn, và sau mỗi đoạn xen thêm 3 tín hiệu kiểm tra làm thành với đoạn ấy một từ được phép. Thế là cả bản tin được viết thành một dãy từ được phép mà khi phát đi thì chắc chắn sẽ được người nhận hiểu chính xác, mặc dù tín hiệu có thể bị xuyên tạc dọc đường.

Như các bạn đã thấy, vấn đề đặt ra được giải quyết khá đẹp, nhờ khái niệm khoảng cách trừu tượng. Cần nói thêm rằng thế giới ngày nay tràn ngập thông tin được truyền đi dưới nhiều hình thức khác nhau : sách báo, thư từ, đĩa hát, phim ảnh, vô tuyến truyền thanh, truyền hình, v.v..., và cả các phân tử *ADN* truyền thông tin di truyền từ bố mẹ đến con cái nữa. Với tự động hóa, vấn đề truyền tin càng trở nên quan trọng. Ở trên chỉ mới nói một ứng dụng của toán học trừu tượng vào mã sửa sai. Thật ra toán học là công cụ chính của toàn bộ lí thuyết thông tin và mã. Kì diệu thay, sức mạnh của khoa học đáng yêu này !

MỘT GIỜ VỚI BÁC

HOÀNG TỤY

Giữa những ngày cả nước tiếc thương vĩnh biệt Bác Hồ kính yêu, mỗi người chúng ta, ở mọi lứa tuổi, mọi giới, mọi ngành, vô cùng xúc động ôn lại trong tâm trí mình biết bao hình ảnh tươi đẹp, trong sáng, thân thiết về Bác !

Dưới đây tôi xin kể lại các bạn nghe một mẩu chuyện nói lên một phần sự chăm sóc ân cần của Bác đối với công tác khoa học, và đặc biệt, đối với ngành toán học của chúng ta. Mong rằng câu chuyện này sẽ giúp các bạn tăng thêm quyết tâm học toán để một ngày kia tiến lên giải quyết thiết thực các vấn đề do cách mạng nước ta đề ra và đạt tới những đỉnh cao của khoa học và kĩ thuật, như Bác đã từng dạy bảo trong thư Bác gửi chúng ta nhân dịp khai giảng năm học 1968 – 1969.

*

* *

Vào khoảng giữa tháng 7 vừa qua, tôi được chỉ thị chuẩn bị lên báo cáo với Bác về vận trù học và khả năng áp dụng ngành toán học đó trong việc tổ chức phân phối hàng tiêu dùng. Tôi vừa phấn khởi, vừa lo. Phấn khởi vì đây là một vinh dự hiếm có, nhưng lo không biết có đáp lại xứng đáng sự quan tâm của Bác không.

Vấn đề đặt ra là : gần đây ở một số cửa hàng của ta ở Hà Nội, vì tổ chức chưa tốt, nên nhân dân đến mua hàng phải xếp hàng dài, mất nhiều thì giờ chờ đợi. Bác không hài lòng, và muốn biết vận trù học có thể áp dụng như thế nào để giúp tìm ra biện pháp cải tiến tình hình đó ?

Chắc các bạn cũng hiểu, đây là một vấn đề khá phức tạp, liên quan đến "lí thuyết xếp hàng" – một ngành toán học dựa trên các quy luật xác suất, đi sâu nghiên cứu về mặt số lượng các hiện tượng xếp hàng (bất cứ là người xếp hàng mua hàng, mua vé tàu, khám bệnh, hay xe hơi xếp hàng qua phà, máy móc xếp hàng đợi lượt được sửa chữa, v.v...), và đề ra một số nguyên tắc, phương pháp tính toán, để tổ chức việc phục vụ được tốt nhất. Ngoài ra, cũng còn một số yếu tố khác có thể áp dụng toán học để phân tích. Song bên cạnh đó đương nhiên có nhiều yếu tố vượt ra ngoài phạm vi nghiên cứu và giải quyết của toán học (ít nhất là với trình độ hiện nay của khoa học này).

Tôi biết vấn đề không đơn giản, nhưng nghĩ bụng : Bác còn trăm công nghìn việc mà vẫn theo dõi sát công tác khoa học kĩ thuật, vẫn để ý tới vận trù học, thật còn có sự khích lệ nào hơn đối với chúng ta !

Đến chiều ngày 30 tháng 7 tôi được Thủ tướng gọi lên. Không may vì một trở ngại tôi đến chậm mấy phút so với giờ hẹn. Sau khi báo cáo với Thủ tướng lí do đi muộn rồi ngồi xuống ghế bên cạnh, tôi mới kịp nhìn xem cuộc họp hôm đó có những ai. Thì ra Bác đang ngồi trước mặt tôi, trong bộ quần áo cán bộ màu tro rất bình thường. Nhận ra Bác, tôi vội đứng dậy chào, vẻ lúng túng vì bất ngờ, tự thấy mình có lỗi đã không nhìn thấy Bác ngay khi bước vào phòng. Bác mỉm cười gật đầu, tỏ ý thông cảm. Trong giây lát tôi chưa kịp nhận thức hết vinh dự và hạnh phúc to lớn này : Bác Hồ ! Bác đang ngồi cách tôi vài bước ! Đúng rồi, Bác đó, vẫn nét mặt hiền từ đầy trìu mến, vẫn đôi mắt rất sáng, tuy dáng người gầy hơn so với lần tôi được thấy Bác khi Bác đến thăm Hội nghị trí thức chống Mĩ cứu nước cách đây ba năm. Trông Bác không được khỏe như hồi trước. Bác nói khẽ, có lúc phải lắng tai mới nghe được hết, song vẫn giọng nói rất quen thuộc và xiết bao thân thiết đối với mỗi người chúng ta. Một tia băn khoăn dau huồn thoáng qua trí tôi : độ này sức khỏe Bác kém trước, không hiểu Bác có làm sao không ? Nhưng rồi niềm vui sướng được nghe tiếng Bác, được ngồi gần Bác, vẫn lấn át tất cả. Nhìn Bác tôi nghĩ thầm : tất cả thông minh tài trí, tất cả sức sáng tạo vĩ đại, tất cả đạo đức tinh hoa của dân tộc ta kết tinh ở Bác, mà sao Bác giản dị thế ! Cử chỉ và lời nói của Bác có sức gì động viên ấm áp, làm cho mọi người xung quanh, ngay phút tiếp xúc đầu tiên, đã cảm thấy Bác rất gần gũi, thân mật, như người cha hết sức kính yêu trong gia đình.

Thủ tướng bảo tôi trình bày cho Bác nghe về vận trù học. Tôi nói được mấy câu thì Bác ngắt lời, ôn tồn bảo :

– Chú nên tìm chữ gì dễ hiểu hơn, chứ chữ vận trù thì Chủ tịch nước cũng không hiểu nổi !

Từ lâu chúng tôi đoán biết thế nào có dịp Bác cũng sẽ phê bình chữ này, nên anh em đã cố gắng tìm một chữ khác, nhưng vì đây là khoa học mới, danh từ phương Tây rất đặc biệt, khó dịch quá, nên chúng tôi phải tạm mượn chữ Trung Quốc. Tôi đành báo cáo lại với Bác, đại ý như vậy.

Bác và Thủ tướng rất chăm chú theo dõi những điều tôi trình bày. Không phải vì trong đó có ý kiến gì đặc sắc, mà tôi hiểu rằng vì Bác và các đồng chí lãnh đạo rất quan tâm đến khoa học, kĩ thuật, và tha thiết mong muốn cho khoa học, kĩ thuật được áp dụng để đẩy mạnh sản xuất và nâng cao đời sống của nhân dân ta.

Giờ đây tôi nhớ lại rất rõ từng câu nói của Bác hôm đó, mỗi câu nói là một bài học thấm thía mà mỗi lần nhắc tới tôi không khỏi bồi hồi xúc động.

Trước hết là thái độ phụ trách của Bác đối với các vấn đề về đời sống của quần chúng. Trong khi trình bày về vận trù học, có lúc tôi phải nói cụ thể một vài thể thức bán hàng và phục vụ phiền phức ở một số cửa hàng Hà Nội hiện nay. Nghe tới đó, nét mặt Bác thay đổi hẳn. Bác hỏi dồn tôi : "những chuyện đó có thực không ?" và khi biết đó là chuyện có thực, Bác rất không vui. Quay sang Thủ tướng và hai đồng chí lãnh đạo Bộ Nội thương và Thành ủy Hà Nội cùng có mặt hôm đó, Bác nói tiếp :

– Dân chủ mà thành ra quan chủ ! Hà Nội mà còn nhiều quan như vậy sao ?

Tôi suy nghĩ : tuổi Bác đã cao, sức Bác đã yếu, nhưng sự phản ứng của Bác trước các hiện tượng quan liêu, làm phiền phức cho dân, lúc nào cũng rất nhạy.

Bác lại nêu ra việc bán bia (lúc hấy giờ đang giữa mùa hè nóng bức, các cửa hàng bia Hà Nội rất đông người, và có một số nơi trật tự chưa được tốt), Bác bảo :

– Chú hãy áp dụng lí thuyết của chú vào việc này.

Bác nhắc cả đến chuyện mất trật tự nghiêm trọng xảy ra vài tuần trước đó ở một cửa hàng bia trong thành phố. Bác tỏ ý không đồng tình phương thức bán làm cho nhân dân ngại uống bia, và chỉ thị phải nghiên cứu cải tiến.

Đồng chí Thủ tướng căn dặn thêm và nhắc lại một câu nói của Bác mấy năm trước : "không sợ thiếu, chỉ sợ không công bằng ; không sợ khổ, chỉ sợ lòng dân không yên". Qua buổi làm việc trong hơn một giờ, tôi thấy thể hiện tất cả nỗi lo lắng của Bác làm sao cho sự phân phối được công bằng, hợp lí, dân chủ và thuận tiện. Tôi nghĩ rằng hằng ngày có biết bao nhiêu việc trọng đại Bác phải giải quyết, thế mà Bác vẫn còn dành thì giờ nghĩ tới từng việc cụ thể trong sinh hoạt của nhân dân thành phố, ngay cả việc để cho nhân dân xếp hàng dài mua bia, Bác cũng không yên tâm. Trước đó Bác còn nhắn các đồng chí có trách nhiệm ở Hà Nội : "Các chú không bán được thì để Bác xuống bán cho !". Tinh thần trách nhiệm đối với dân, tinh thần phục vụ nhân dân của Bác, thật là cao cả biết chừng nào ; cho đến những ngày cuối đời, khi Bác đã cảm thấy không còn thọ được lâu nữa, Bác vẫn lo cho dân từ cái lớn đến cái nhỏ, với một tấm lòng thương yêu không bờ bến và một tác phong rất cụ thể, tỉ mỉ ! Trong lòng tôi tràn ngập niềm thương, kính, và biết ơn Bác vô hạn.

Cũng trong buổi làm việc đó, tôi còn được Bác phê bình một lần nữa về cách dùng chữ cầu kì. Nhân tôi nói đến đề nghị làm cho bàn tính gảy được dùng phổ biến trong các cửa hàng của ta, để tính toán nhanh và bảo đảm hơn, Bác hỏi : "tại sao gọi là bàn tính gảy ?" Đồng chí Bộ trưởng Bộ Nội thương trả lời giúp :

"– Thưa Bác, vì khi tính phải gảy qua gảy lại". Bác nói : "Các chú lôi thôi quá, gọi bàn tính là đủ rồi, cần gì phải thêm chữ gảy !" Đúng như vậy. Tôi nghĩ mình làm toán bao nhiêu năm vẫn chưa tìm ra một tiếng gọn để gọi cái công cụ thô sơ ấy, có lẽ vì chưa quán triệt được quan điểm quần chúng sâu sắc của Bác ngay trong cách nói, cách viết.

Kết thúc buổi làm việc, Bác và Thủ tướng giao nhiệm vụ cho chúng tôi tham gia cùng các cơ quan có trách nhiệm nghiên cứu những vấn đề đã nêu ra, và hẹn đến tháng

11 phải có một số kết quả cụ thể. Tôi rất phấn khởi thay mặt anh em vận trù nhận nhiệm vụ đó, nhiệm vụ cụ thể đầu tiên – ngờ đâu cũng là cuối cùng ! – mà Bác đã trực tiếp giao cho.

Khi bắt tay ra về, Bác còn dặn lại tôi một lần nữa hãy cố gắng áp dụng lí thuyết đã trình bày, và Bác ân cần hỏi thêm tôi có biết gốc tích chữ vận trù như thế nào không. Tôi thưa là không biết rõ, thì Bác đọc luôn một câu chữ Hán mà tôi không nghe được hết và Bác giải thích : vận trù trong phòng giấy, chỉ đạo tác chiến ngoài mặt trận ; vận trù cũng là tham mưu. Bác lại nói tiếp :

– Bộ đội ta có nhiều người không học tính toán gì nhiều, mà cũng làm vận trù khá, là nhờ cái này (và Bác chỉ vào ngực).

Tôi hiểu ý Bác : phải có tinh thần, có nhiệt tình, có đạo đức, mới làm vận trù tốt và nói chung, mới làm khoa học tốt.

Ra về, trong đầu óc tôi lộn xộn nhiều ý nghĩ và cảm xúc khó tả. Một giờ với Bác, thật phong phú biết bao ! Tôi vui mừng khôn xiết được gặp Bác và được Bác tin cậy giao cho việc làm cụ thể. Tôi sung sướng và cảm động trước sự chăm sóc của Bác đối với công tác vận trù. Hình ảnh của Bác, giọng nói, cử chỉ của Bác trong buổi hôm đó mãi mãi in sâu vào tâm trí tôi và sẽ là nguồn động viên thúc giục tôi những lúc gặp khó khăn sau này.

Thế mà nay Bác đã không còn nữa !

Tôi bùi ngùi nghĩ đến thời hạn tháng 11 mà Bác đã hẹn, tiếc thương nhớ lại tất cả những lời dạy bảo của Bác còn văng vẳng bên tai – những lời dạy bảo thiêng liêng mà trọn đời tôi sẽ không bao giờ quên được.

Các bạn thân mến ! Kể lại câu chuyện gặp Bác, gợi lại một vài hình ảnh về con người vĩ đại của Bác, khi còn sống đã dành cho tất cả chúng ta tấm lòng hiền từ ấm áp của Người, khi mất đi còn gửi lại cho toàn dân, toàn Đảng, muôn vàn tình thân yêu – tôi muốn cùng các bạn xây dựng một quyết tâm : chúng ta hãy ghi lòng tạc dạ ơn sâu trời biển của Bác, mãi mãi làm theo lời dạy của Bác, ra sức rèn luyện đạo đức, phẩm chất cách mạng, tích cực học tập tiến lên làm chủ khoa học, kĩ thuật, đưa toán học và các khoa học khác phục vụ thiết thực sản xuất, chiến đấu và đời sống, phấn đấu trở thành những chiến sĩ kế tục xứng đáng sự nghiệp quang vinh của Bác !

TRƯỚC HẾT HÃY NẮM THẬT VỮNG CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN, CÁC ĐỊNH NGHĨA CƠ BẢN

NGUYỄN ĐÌNH TRÍ
(Đại học Bách khoa, Hà Nội)

Hè năm nay, bộ Đại học và Trung học chuyên nghiệp vừa tổ chức năm đợt kiểm tra văn hóa cho học sinh được chọn đi học ở nước ngoài. Mỗi đề kiểm tra gồm 9 bài tập độc lập với nhau, nhằm kiểm tra kiến thức của học sinh thuộc những phần cơ bản khác nhau của chương trình lớp 10 ; riêng bài tập 9 của mỗi đề kiểm tra đều nhằm tìm những học sinh có năng khiếu về toán. Đây không phải là đề toán kiểm tra cho trình độ chung của lớp 10 hiện nay, mà là những đề kiểm tra cho trình độ từ A_3 trở lên. Điều rất đáng phấn khởi là trong cả ba đợt kiểm tra đầu đều có những bạn làm đầy đủ cả 9 bài của đề kiểm tra, làm khá tốt đề số 9. Phần đông các bạn từ A_3 trở lên đều làm bài tốt, tính toán đúng, tuy khối lượng tính toán không ít. Song một nhược điểm khá phổ biến bộc lộ trên các bài kiểm tra của các bạn là : các bạn suy luận còn máy móc, thiếu linh hoạt, chỉ quen giải những bài tập ra trong sách giáo khoa, trong lớp, các bạn khá lúng túng trước những bài tập chưa gặp ở lớp.

Ở lớp các bạn đã quen khảo sát một số hàm số bằng đạo hàm. Đến khi gặp bài toán "xét sự đồng biến hay nghịch biến của hàm số

$$y = x - \sqrt{x^2 - 1} \text{ với } x > 3$$

mà không dùng đạo hàm" thì các bạn rất bối rối. Chỉ có vài bạn biết biến đổi

$$y = (x - \sqrt{x^2 - 1})(x + \sqrt{x^2 - 1}) / (x + \sqrt{x^2 - 1}) =$$
$$= 1 / (x + \sqrt{x^2 - 1})$$

từ đó các bạn ấy nhận xét rằng khi $x > 3$ thì $x + \sqrt{x^2 - 1}$ đồng biến, vậy hàm số y luôn luôn nghịch biến với $x > 3$.

Ngoài ra, nếu không biết biến đổi như vậy, cũng có thể trở về định nghĩa của hàm số đồng biến, nghịch biến, trực tiếp dùng định nghĩa ấy mà giải bài toán này. Nhưng cũng chỉ có ít bạn biết làm như vậy. Các bạn đó đã chứng minh được rằng với $x > 3$ và với Δx khá bé ta có :

$$x + \Delta x - \sqrt{(x + \Delta x)^2 - 1} < x - \sqrt{x^2 - 1}$$

khi $\Delta x > 0$

$$x + \Delta x - \sqrt{(x + \Delta x)^2 - 1} > x - \sqrt{x^2 - 1}$$

khi $\Delta x < 0$

Vậy hàm số nghịch biến với $x > 3$.

Ở lớp các bạn đã học về đạo hàm của một hàm số, đã chứng minh công thức tính đạo hàm của $\sqrt{u(x)}$, trong đó $u(x)$ là một hàm số có đạo hàm nào đó. Nhưng đến khi phải tính đạo hàm của hàm số $y = \sqrt[3]{x^5}$ thì nhiều bạn lúng túng, không biết tính toán thế nào. Một số không ít bạn đã luống cuống rồi áp dụng một cách máy móc công thức đạo hàm của $\sqrt{u(x)}$ để làm bài này như sau :

$$y' = 5x^4/2\ \sqrt[3]{x^5}$$

Mắc sai lầm như vậy thật là đáng tiếc. Nếu nắm vững định nghĩa của đạo hàm thì các bạn có thể chứng minh công thức đạo hàm của hàm số $y = \sqrt[3]{u(x)}$ một cách không khó khăn gì. Thực vậy, cho x một số gia Δx, $u(x)$ có số gia tương ứng là Δu, còn số gia tương ứng của y là $\Delta y = \sqrt[3]{u + \Delta u} - \sqrt[3]{u}$. Lập tỉ số $\Delta y // \Delta x$, rồi nhân tử số và mẫu số với lượng liên hiệp của

$(\sqrt[3]{u + \Delta u} - \sqrt[3]{u})$ ta được

$$\Delta y/\Delta x = \Delta u/[\Delta x\ \sqrt[3]{(u + \Delta u)^2} +$$
$$+ \sqrt[3]{(u + \Delta u)u} + \sqrt[3]{u^2})]$$

Khi $\Delta x \to 0$ thì Δu cũng dần đến không, vậy.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y/\Delta x = \lim_{\Delta x \to 0} [\Delta u/\Delta x \times 1/3\ \sqrt[3]{u^2}]$$

tức là $y' = u'(x)/3\ \sqrt[3]{u^2}$, trong đó $u'(x)$ là đạo hàm của hàm số u theo x. Từ đó ta được ngay : nếu $y = \sqrt[3]{x^5}$ thì $y' = 5x^4/3\ \sqrt[3]{x^{10}}$

Tất cả các bạn đều đã thành thạo trong việc vẽ đồ thị của các hàm số bậc nhất $y = ax + b$ và đã hiểu thế nào là giá trị tuyệt đối của một số đại số A (người ta thường kí hiệu giá trị tuyệt đối của A là $|A|$). Nhưng các bạn khá lúng túng khi phải vẽ đồ thị của hàm số.

$$y = |x + 1| + |x| + |x - 1|.$$

Điều mấu chốt ở đây là biết suy ra từ định nghĩa của giá trị tuyệt đối.

$$|x| \begin{cases} x \text{ nếu } x \geq 0 \\ -x \text{ nếu } x \leq 0 \end{cases}$$

Cũng vậy

$$|x + 1| \begin{cases} x + 1 \text{ nếu } x \geq -1 \\ -x - 1 \text{ nếu } x \leq -1 \end{cases}$$

$$|x - 1| \begin{cases} x - 1 \text{ nếu } x \geq 1 \\ -x + 1 \text{ nếu } x \leq 1 \end{cases}$$

Ta có bảng sau đây

x		-1		0		$+1$	
$\lvert x + 1\rvert$	$-1-x$	0	$1 + x$		$1 + x$		$1 + x$
$\lvert x\rvert$	$-x$		$-x$	0	x		x
$\lvert x - 1\rvert$	$-x + 1$		$-x + 1$		$-x + 1$	0	$1 - x$
y	$-3x$		$-x + 2$		$x + 2$		$3x$

Vậy y có những biểu thức khác nhau trong những khoảng khác nhau. Đến đây việc vẽ đồ thị của hàm số y không có gì là khó !

Các bạn trẻ yêu toán thân mến ! Qua các ví dụ trên đây chúng ta đã thấy rõ ràng : sở dĩ nhiều bạn rất lúng túng khi gặp những bài toán không quen thuộc, trước hết là vì các bạn đó chưa nắm thật vững các khái niệm cơ bản của toán học, các định nghĩa cơ bản, do đó chưa vận dụng được linh hoạt các định nghĩa ấy. Trên tờ báo này chúng ta đã nhiều lần trao đổi với nhau về các vấn đề, làm thế nào để phát huy óc độc lập suy nghĩ, óc sáng tạo, rèn luyện sự linh hoạt trong suy nghĩ, rèn luyện tinh thần tiến công trong học tập...

Song để làm được những việc trên trước hết ta phải nắm thật vững, thật chính xác các khái niệm cơ bản, các định nghĩa cơ bản. Không nắm vững các khái niệm, các định nghĩa cơ bản, làm thế nào chúng ta có thể linh hoạt trong suy nghĩ khi vận dụng các khái niệm ấy, làm thế nào chúng ta có thể chủ động, có tinh thần tiến công trong học tập được. Nếu học đạo hàm mà các bạn chỉ thuộc các công thức tính đạo hàm, tính được thành thạo đạo hàm của một số hàm số quen thuộc và học khái niệm đạo hàm một cách hời hợt thì thật là không đúng. Trước hết các bạn cần đào sâu suy nghĩ để nắm vững và chính xác khái niệm đạo hàm. Dĩ nhiên việc rèn luyện kĩ năng tính toán để tính được nhanh, gọn, chính xác cũng rất quan trọng. Có như vậy chúng ta mới có thể linh hoạt, chủ động sáng tạo được khi tính đạo hàm hay giải những bài toán có liên quan đến đạo hàm. Trên cơ sở nắm vững khái niệm đạo hàm, các bạn cũng nên tìm hiểu ý nghĩa thực tiễn, ý nghĩa cơ học của đạo hàm. Như vậy khi gặp những bài toán thực tế đưa đến khái niệm đạo hàm, các bạn cũng có thể chủ động giải quyết được mà không bị bối rối.

Cũng vì chưa nắm vững và vận dụng linh hoạt các định nghĩa cho nên nhiều bạn đã không có những cách giải gọn. Chẳng hạn khi tìm đường tiệm cận xiên của đường cong $y = 1 - 7x - 1/(x - 4)$, nhiều bạn đã phải dùng các công thức tính hệ số góc và tung độ gốc của đường tiệm cận xiên.

$$a = \lim_{x \to \infty} y/x\,,\ b = \lim_{x \to \infty} [y - ax].$$

Thực ra từ định nghĩa của đường tiệm cận và từ dạng cho trên của hàm số y, có thể thấy ngay rằng đường tiệm cận xiên của đường cong cho trên chính là đường $y = 1 - 7x$.

Thật vậy gọi y và Y theo thứ tự là tung độ của các điểm trên đường cong đã cho và đường thẳng $y = 1 - 7x$ có hoành độ điều bằng x, và kí hiệu các điểm có tọa độ (x, y) và (x, Y) là M và N thì ta luôn luôn có $\overline{MN} = y - Y = -1/(x - 4)$.

Vậy khi $x \to \infty$ thì $\overline{MN} \to 0$. Do đó khoảng cách MP từ một điểm bất kì M trên đường cong tới đường thẳng $y = 1 - 7x$ cũng dần tới không khi $x \to \infty$. Vậy theo định nghĩa $y = 1 - 7x$ chính là đường tiệm cận xiên phải tìm.

Để kết thúc bài này xin nhắc lại ở đây lời khuyên của nhà toán học lớn của nước Pháp Hadamard :

"Hãy luôn luôn thay cái bị định nghĩa bởi cái định nghĩa".

TÔI ĐÃ SỬ DỤNG BÁO TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ NHƯ THẾ NÀO ?

LÊ QUỐC HÁN

(Lớp 10 + 1B trường Sư phạm Trung cấp Tự nhiên Hà Tĩnh)

Báo *Toán học và tuổi trẻ* không những đã cung cấp cho tôi nhiều kiến thức mới mẻ và phong phú, mà cái chính là đã giáo dục cho tôi nhiều đức tính quý báu, như đức tính cần cù và kiên nhẫn, sáng tạo và say mê toán học, đã tập cho tôi phương pháp suy nghĩ đúng đắn. Nhờ vậy, tôi đã đạt được một vài kết quả nhỏ trong học tập nói chung, trong học toán nói riêng.

Sau đây, tôi xin trao đổi với các bạn một vài kinh nghiệm trong việc sử dụng tờ báo Toán học và tuổi trẻ :

Khi giải các bài tập trên báo Toán học tuổi trẻ, tôi đã đóng một quyển sổ tay ghi hết các cách giải của mình. Rồi khi tòa soạn đăng lời giải các bài toán đó, tôi đem so sánh với cách giải của tôi và rút ra nhiều kết luận hay, tôi thường thấy lời giải của mình dài dòng và quanh quẩn, thiếu sâu sắc và độc đáo lại hay bỏ quên các trường hợp đặc biệt và quên không đề xuất các bài toán tương tự hay tổng quát hơn như báo đã đăng. Có khi làm sai, tôi tự mình không xem báo để làm lại, mà vẫn phải vượt qua bao khó khăn mới đi tới kết quả. Những điều đó làm cho tôi băn khoăn suy nghĩ nhiều, tôi quyết tâm khắc phục kịp thời. Dưới sự hướng dẫn của báo (nhất là mục "Nói chuyện với các bạn trẻ yêu toán") tôi đã kiên nhẫn tìm tòi, suy nghĩ và tập dượt cho mình thói quen khi làm toán không bao giờ thỏa mãn với cách giải đã tìm được, mà cố gắng tìm cách giải hay hơn, độc đáo hơn. Và luôn luôn tự đặt câu hỏi : bài toán trên có thể có lời giải không ? có lời giải trong điều kiện, giới hạn nào ? vì sao ? có thể đề xuất bài toán nào tương tự không, tổng quát hơn không. Dần dần tự xây dựng cho mình thói quen đề xuất các ý kiến, ví dụ ý kiến từ việc chứng minh bất đẳng thức cos 36° > tg 36° (Toán học tuổi trẻ số 48 bài "Suy nghĩ quanh một bài toán nhỏ").

Tôi rất thích các bạn đã có cố gắng tìm tòi và đề ra nhiều cách giải ngắn gọn và hay hơn cách giải báo đã đăng (chẳng hạn bài "về lời giải của một bài thi vô địch") Toán học tuổi trẻ số 47, hoặc tìm ra nhiều vấn đề mới mẻ và thú vị. Những điều đó làm cho tôi tự nhủ : mình còn phải rèn luyện phương pháp học tập hơn nữa !

Khi đọc các bài đăng trên báo Toán học tuổi trẻ, tôi thường tìm hiểu đến nơi đến chốn, như khi đọc "Một bài toán của Phibônaxi" Toán học tuổi trẻ số 48 có đoạn : "Phibônaxi đã chứng minh được số có dạng $4mm\,(m^2 - n^2)$ chia hết cho 24 mà không nói rõ cách chứng minh cụ thể của ông ta, tôi tự nhủ : dụng ý của tác giả bài này là gì ? phải chăng vì cách giải đơn giản quá để bạn đọc tự tìm lấy, hay là để thử thách các bạn trẻ có chú ý tìm cách giải chăng ? Dù sao, tôi cũng cố tìm ra cách giải bài toán đó, sau đây là một cách : ta đã biết với mọi số nguyên k thì $k^3 - k \vdots 6$, từ đó :

$$mn\,(m^2 - n^2) = m^3n - mn^3 =$$

$$= m^3n - mn + mn - mn^3 =$$

$$= n(m^3 - m) - m(n^3 - n) \vdots\ 6, \text{đpcm}$$

Không biết đó có phải là cách giải của ông Phibônaxi không, nhưng tôi thú vị vô cùng.

Cách suy nghĩ và làm việc như vậy đã giúp tôi hiểu được sâu hơn các vấn đề đã đăng trong báo Toán học tuổi trẻ.

Tôi cũng thường so sánh các đề ra trên báo với nhau, và sắp các bài tương tự vào cùng một loại. Ví dụ loại có liên hệ đến các đường phân giác của tam giác mà tôi sắp xếp sau đây, có nhiều điểm thú vị :

Khi giải bài "Nếu một tam giác có hai đường phân giác trong bằng nhau thì tam giác ấy cân" (bài 17/1964) báo Toán học tuổi trẻ đã đăng nhiều cách giải khá ngắn gọn và độc đáo, rồi không rõ do tình cờ hay hữu ý mà sau báo lại đăng bài 5/35 "Chứng minh rằng trong một tam giác ứng với cạnh lớn hơn thì có đường phân giác bé hơn". Đó là bài toán tổng quát hơn bài 17/1964, vì chỉ cần giải được bài 5/35 thì dễ dàng suy ra bài 17/1964. Trong số báo Toán học tuổi trẻ số 40 đã đăng 3 cách giải bài 5/35. Rất hoan nghênh một bạn đọc nào (không rõ tên) đã không thỏa mãn với cả ba cách giải trên, mà tìm ra cách giải ngắn gọn hơn, độc đáo hơn (Toán học tuổi trẻ số 42 trang 12).

Trong khi giải hai bài toán trên, người ta đã tìm cách tính đường phân giác của tam giác biết 3 cạnh

$$(d_a^2 = bc\,[1 - a/(b + c)]^2 \qquad (1)$$

và đến bài 5/42, bài toán tìm độ dài đường phân giác lại đề cập tới, và báo đã đăng hai cách giải bài toán này. Ngoài ra, bài 2/33 còn tìm thêm một hệ thức đáng chú ý nữa :

$$d_a = (2bc \cos A/2) / (b + c)$$

Hệ thức này có thể chứng minh nhờ (1) nếu chú ý :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

Nhờ cách biểu thị độ dài đường phân giác biết 3 cạnh mà bài 14/1965 (Toán học tuổi trẻ số 10) lại có thêm một cách giải nữa.

Vấn đề vẫn chưa hết. Ta lại gặp bài 6/42 : "Chứng minh rằng nếu α và β thỏa mãn đẳng thức :

$$\sin\alpha \sin(\beta + \alpha/2) = \sin\beta \sin(\alpha + \beta/2)$$

trong đó $\alpha, \beta > 0$ và $0 < \alpha + \beta < \pi$ thì $\alpha = \beta$

Từ đó suy ra định lí : "Nếu một tam giác có 2 đường phân giác trong bằng nhau thì tam giác ấy cân". Như vậy ta có thêm một cách chứng minh mới về bài 17/1964.

Sau khi giải bài toán 6/42 đó (Toán học tuổi trẻ số 46) tòa soạn đã có nhận xét đáng chú ý : "Có bạn đã đề ra, nhưng chưa giải được bài toán tương tự :

Nếu

$\cos\alpha\cos(\beta + \alpha/2) = \cos\beta\cos(\alpha + \beta/2)$ thì $\alpha = \beta$.

và tòa soạn kết luận là điều đó không đúng trong trường hợp tổng quát. Bài báo dừng lại ở đây, nhưng không phải ta cũng dừng lại ở đây. Nếu chú ý thêm rằng các bài toán 17/1964 và 5/35 cũng đúng nếu ta thay phân giác trong bởi phân giác ngoài ta sẽ đi đến một bài toán tương tự bài 6/42.

Chứng minh rằng nếu α và β thỏa mãn đẳng thức

$$\sin\alpha\cos(\beta + \alpha/2) = \sin\beta\cos(\alpha + \beta/2)$$

và $\alpha, \beta > 0 \; ; \; 0 < \alpha + \beta < \pi$

thì $\alpha = \beta$

Từ đó suy ra "Nếu một tam giác có 2 đường phân giác ngoài bằng nhau thì tam giác đó cân".

Bài toán này có thể giải được dễ dàng tương tự cách giải bài 6/42.

... Trên đây là một vài kinh nghiệm nhỏ của tôi trong việc sử dụng báo Toán học tuổi trẻ. Tôi rất mong các bạn trao đổi thêm vì vấn đề này nhằm góp phần làm cho tờ báo có tác dụng sâu sắc hơn nữa đến việc học toán của tất cả chúng ta.

NHỮNG CON SỐ VÀ NHỮNG CON NGƯỜI

V. LIÔP–SIN

(ĐỖ LONG VÂN *dịch*)

LIÔP–SIN là tác giả quen thuộc và rất được ưa thích đối với các bạn đọc trẻ tuổi Liên Xô qua các tác phẩm trước đây của ông : "Chiến hạm của đại úy Một". "Ba ngày ở Kalikani"... Và cuốn sách mới đây "Tiến sĩ các khoa học đãng trí".

Từ những năm 30 của thế kỉ này Liôp–Sin đã tham gia giảng dạy cơ học, toán học, lí thuyết đàn hồi và sức bền vật liệu ở trường đại học tổng hợp Lômônôxốp và nhiều trường cao đẳng ở Matxcơva.

Đối với Liôp–Sin, toán học không chỉ là đối tượng giảng dạy mà còn là đề tài cho những cuộc nói chuyện hấp dẫn của ông với các bạn trẻ.

Trong những năm đi học và công tác, ông đã có nhiều dịp gặp gỡ lí thú với những con số và những con người.

Dưới đây chúng ta sẽ nghe Liôp–Sin kể về một số cuộc gặp gỡ lí thú đó.

*

* *

Matxcơva, mùa đông tuyết phủ 1923. Trên thềm một ngôi nhà nhỏ trong một ngõ hẻm ở ngoại ô Matxcơva, có một chàng trai trẻ đang đứng phân vân : Có nên gõ cửa không nhỉ ? chàng trai trẻ đó chính là tôi.

Trong một ngôi nhà gỗ cũ kĩ đó có một ông thánh – giáo sư toán học có nhiều công lao A.V. Vaxiliep. Con người ấy đã viết những cuốn sách tuyệt diệu biết bao ! Và đây, công trình mới nhất của ông, "số nguyên", lại vừa mới ra đời. Có thể đọc cuốn sách này liền một mạch từ đầu đến cuối, quên hết mọi sự trên đời, dường như đó không phải là môn toán học khô khan nữa mà là tiểu thuyết "Ba người ngự lâm pháo thủ".

Bạn thử nghĩ xem, các con số mà bạn luôn luôn quên và nhầm lẫn, vì bộ mặt của chúng chẳng khác gì nhau, thì chính chúng lại có những đặc tính, những quan hệ và những điệu bộ khác nhau nhất, thậm chí những tên gọi của chúng cũng chẳng bình thường chút nào cả : số hoàn thiện, số bạn bè, số ảo, số siêu việt..., còn đây, các số được

(1) Nghĩa thường của chữ простое *trong tiếng Nga là đơn giản, còn trong toán nghĩa là nguyên tố, ở đây tác giả có ý chơi chữ (N.D.).*

gọi là số đơn giản[1] thì thực ra lại chẳng giản đơn chút nào ! Mặc dù Ơclít đã chứng minh rằng có vô số số nguyên tố, nhưng cho tới nay vẫn chưa có ai khám phá ra quy luật phân phối của chúng trong dãy số tự nhiên.

Những con số quả là một vương quốc bí ẩn. Thế mà Vaxiliep lại hiểu chúng rất kĩ. Chính nhờ một cuốn sách của ông mà lần đầu tiên tôi được biết định lí lớn của Fecma. Được biết nó, tôi sôi lên và muốn lao ngay vào cuộc tấn công thành trì kiên cố này mà không hề biết đến những khó khăn và tổn thất nào đang đợi tôi phía trước.

Tôi còn nhớ điều làm tôi sửng sốt hơn cả là Fecma - niềm tự hào và vinh quang của nền khoa học Pháp - lại không phải là một nhà toán học chuyên nghiệp. Ông là một luật gia. Toán học - gọi theo ngôn ngữ hiện đại - đối với ông chỉ là trò giải trí. Nhưng về thiên tài toán học và những thành tựu của "nhà nghiệp dư" này thì ngay cả những nhà toán học chuyên nghiệp nổi tiếng nhất cũng phải ghen tị. Fecma là người mở đường cho hầu hết các phát minh toán học của thế kỉ thứ 17 - 18, có thể mạnh dạn liệt ông vào số những người sáng lập ra hình học giải tích, phép tính vi phân và tích phân, lí thuyết xác suất và cuối cùng là lí thuyết số. Nhưng tự ông đã không công bố các kết quả của mình - các công trình này chỉ được biết đến sau khi ông chết. Người ta biết đến các công trình của Fecma là nhờ những thư từ trao đổi của ông với nhiều nhà bác học khác trong đó có Patscan.

Bây giờ chúng ta trở lại định lí lớn của Fecma. Thoạt nhiên thì tưởng rằng nó rất đơn giản. Thế mà cho tới nay nó vẫn chưa được chứng minh, dẫu rằng rất nhiều nhà toán học lỗi lạc của ba thế kỉ nay đã cất công tìm kiếm.

Vậy định lí bất trị này là gì ? Ta biết rằng luôn luôn có thể chọn được 3 số nguyên sao cho tổng bình phương của 2 số trong chúng bằng bình phương của số thứ 3. Chẳng hạn : $3^2 + 4^2 = 5^2$, $5^2 + 12^2 = 13^2$... Có vô số các bộ ba như vậy. (Đẳng thức $a^2 + b^2 = c^2$ thường liên quan tới định lí Pitago về tam giác vuông. Còn về bộ ba số 3, 4, 5 thì đã được biết ngay từ thời cổ Ai Cập, hơn 4000 năm về trước ; vì thế tam giác với các cạnh có độ dài tương ứng gọi là tam giác Ai Cập)

Vậy mà không thể nào chọn được 3 số nguyên sao cho tổng lập phương của 2 số trong chúng bằng lập phương của số thứ 3. Cũng không thể chọn được như vậy với các lũy thừa bậc 4, bậc 5 và nói chung bậc cao hơn nữa. Nói cách khác, đẳng thức $a^n + b^n = c^n$ là không thể có nếu $n > 2$. Đó chính là định lí mà Fecma đã ghi lại trên lề cuốn "số học" của Điôphăng - nhà toán học thời cổ ở Alecxandri trước Fecma 1000 năm.

Fecma khẳng định rằng ông đã tìm được chứng minh tổng quát, lí thú tuyệt vời của định lí này. Tuy nhiên không còn lại một dấu vết nào của chứng minh đó, ít ra là không có trên lề cuốn sách của Điôphăng. Hoặc là vì, theo chính lời Fecma, trên lề cuốn sách không đủ chỗ để lí luận tỉ mỉ, hoặc là vì sau đó chính Fecma đã nghi ngờ sự đúng đắn của chứng minh đó nên đã thủ tiêu đi. Dù thế này hay thế khác thì định lí Fecma vẫn chưa được chứng minh. Nhưng cũng chưa ai thành công trong việc bác bỏ nó. Và chắc gì đã bác bỏ được. Dù sao cũng nên xem định lí là đúng.

Nhưng vấn đề không phải là ở chỗ đó, mà là ở chỗ sự đơn giản giả tạo của định lí Fecma đã lôi kéo rất nhiều người chú ý đến nó. Các chứng minh tuôn ra như thác đổ. Số người xông vào đó càng tăng lên dữ dội sau khi nhà toán học Vôn-Fơ-Sken[1] trước khi chết đã để lại 100.000 mac[2] cho hội khoa học Ghéttin-gơn[3] để tặng cho người nào may mắn chứng minh được định lí đó. Những kẻ may mắn thì chưa thấy mà những chuyện khôi hài thì lại nhiều vô kể.

Chẳng hạn, trong một tạp chí in nhầm điều kiện định lí như sau $a^n + b^n = c^n$ $(n + 2)$, tức là trong ngoặc đã in nhầm dấu > thành dấu +. Và thế là đã xuất hiện một nhân vật kì quặc, dựa vào chỗ in sai đó để "bác bỏ" định lí và đòi trao giải thưởng ngay lập tức.

Nhưng như tôi đã nói, rất nhiều nhà bác học nổi tiếng cũng cố gắng chứng minh định lí này. Mặc dù chưa chứng minh được hoàn toàn, một số trong họ đã có những đóng góp đáng kể. Trước tiên chính Fecma đã chứng

(1) Nhà toán học Đức.

(2) Đơn vị tiền tệ Đức.

(3) Một thành phố của Đức.

minh được trường hợp riêng với $n = 4$. Sau đó, vào giữa thế kỉ 18, Ole đã chứng minh cho trường hợp $n = 3$. Đấy chính là Ole vĩ đại, người mà khi mới 13 tuổi đã là sinh viên trường đại học Baden, năm 16 tuổi đã đọc báo cáo bằng tiếng La tinh phân tích so sánh triết học của Đề-các và Niutơn. Chính nhờ công trình này ông đã được tặng học vị tiến sĩ. Còn đến năm 19 tuổi ông đã được bằng khen danh dự của Viện hàn lâm khoa học Pari vì công trình gửi dự thi về đề tài phân phối hợp lí nhất các cột buồm trên tầu (ông đã thực hiện công trình này mà không rời khỏi Baden nghĩa là không hề trông thấy những con tầu thật). Ole thần thoại – bạn chiến đấu của Lômônôxôp thần thoại – đã dời đất nước Thụy Sĩ thân yêu để sang Nga, rồi từ Nga sang Pruxia(1) từ Pruxia trở về Nga để rồi ở lại đó đến ngày cuối cùng của đời mình. Ole đã để lại hơn 850 công trình thuộc nhiều lĩnh vực khác nhau : vật lí, thiên văn, lí thuyết đàn hồi, đạn đạo học... Ole là một nhà "bách khoa" nhưng trước tiên và hơn cả, ông là một trong những người sáng lập lỗi lạc và không mệt mỏi của vương quốc toán học hùng mạnh, nơi mà trên mỗi bước đi, các định lí, các công thức, các định luật, các lí thuyết và thậm chí trọn vẹn từng ngành do ông lập nên đều nhắc nhở đến ông.

Thật đáng ngạc nhiên về sự cần cù, lòng dũng cảm và nghị lực của ông, của một con người mà phần lớn cuộc đời đã bị mù và phải đọc cho những người gần gũi chép lại những tác phẩm thiên tài của mình.

Thế mà ngay cả con người vĩ đại ấy cũng chỉ chứng minh được định lí Fecma trong một trường hợp riêng biệt mà thôi.

Mãi một thế kỉ sau việc chứng minh định lí này mới tiến thêm được một bước nữa. Vào giữa thế kỉ 19 nhà toán học Đức Dirichlê sau một loạt phát minh lớn về lí thuyết số đã tìm được chứng minh của định lí Fecma với $n = 5$.

Rồi lại gián đoạn trong hàng chục năm, mãi cho đến khi nhà toán học Đức Cume chứng minh được cho trường hợp tất cả các số nguyên tố nhỏ hơn 100. Thật ra, để làm điều đó ông đã buộc phải (không hơn không kém !) đề xướng ra một phương pháp nghiên cứu mới mang tên là lí thuyết đại số của các số.

Cũng có một số cố gắng khác nữa đưa đến kết quả trong những trường hợp riêng biệt. Nhưng định lí Fecma cho đến nay vẫn đang chờ đợi một lời giải trọn vẹn.

Bây giờ thì các bạn hiểu tôi đã quá tự tin như thế nào khi tìm gặp giáo sư Vaxiliep với một "chứng minh" thô thiển của mình về định lí Fecma. Nhưng dù sao tôi cũng đã gõ cửa nhà.

Một căn phòng làm việc không lớn, thấp, tranh tối tranh sáng, ngổn ngang đồ đạc và sách vở. Trong góc có một lò sưởi Hà Lan bằng gạch tráng men sáng bóng. Một ông già tóc bạc, vạm vỡ, có chòm râu oai vệ và đôi mắt hiền từ hiếm có đang ngồi bên một cái bàn làm việc to tướng. Tôi nhớ ràng điều làm tôi ngạc nhiên hơn cả là ông không có một chút nào vẻ đạo mạo của một giáo sư. Mặc dù tôi còn trẻ ông đã đối xử với tôi một cách bình đẳng.

Vaxiliep cầm lấy bài viết của tôi và bắt đầu xem rất nhanh. Thỉnh thoảng ông dừng lại, trề môi và khẽ lắc đầu. Sau đó ông nói rất nhẹ nhàng, gần như mình là người có lỗi, rằng tôi đã phạm sai lầm về lôgich trong chứng minh. Sai lầm hoàn toàn không đáng kể, nhưng... nếu sửa nó thì sẽ chẳng còn gì là chứng minh nữa !

Dĩ nhiên là tôi cụt hứng, còn giáo sư thì bắt đầu an ủi tôi và nói rằng tôi không nên buồn, rằng hướng suy nghĩ của tôi rất lí thú, và tôi cần phải tiếp tục nghiên cứu, – ông nhìn xuống và nói thêm – "chỉ có điều là không phải nghiên cứu định lí Fecma mà là các số nói chung".

Khi từ biệt tôi, ông nắm tay tôi hồi lâu, nhìn tôi âu yếm dường như muốn nói : "Đừng thất vọng ! trong đời còn nhiều điều không may to lớn hơn".

Đó là lần gặp gỡ đầu tiên và tiếc rằng cũng là lần cuối cùng của tôi với Vaxiliep. Cuộc gặp gỡ này càng làm cho tôi say mê các con số hơn nữa. Nhưng trái với lời khuyên của giáo sư, tôi không chịu từ bỏ việc chứng minh định lí Fecma mà tiếp tục đi tìm "con chim xanh" của mình.

Sau 3 năm tôi lại tìm được một chứng minh nữa của định lí Fecma mà tôi cho là hoàn toàn đúng. Tôi đến gặp giáo sư trường đại học Matxcova A.I. Khinsin.

(1) *Một thành phố trước kia thuộc nước Đức.*

Mặc dù còn trẻ, Khinsin đã được coi là một chuyên gia lớn về lí thuyết số. Ông còn là một tác giả của cuốn sách tuyệt diệu về định lí Fecma. Nhưng cuộc gặp gỡ của tôi với ông hoàn toàn khác cuộc gặp gỡ với Vaxiliep.

Ông Khinsin trẻ tuổi này đúng là một giáo sư nghiêm nghị, mày râu nhẵn nhụi, mẫu mực đến lạnh lùng, ông sống trong một ngôi nhà lịch sự ở Matxcova, và trong những căn phòng đầy đủ tiện nghi. Trong căn phòng làm việc rộng rãi và sáng sủa của ông không có một cái gì thừa, chỉ có một trật tự nghiêm ngặt và sự yên tĩnh ngự trị ở đó.

Khinsin mời tôi ngồi và lướt qua bài viết của tôi rất nhanh (thậm chí tôi đã nghĩ rằng nhanh hơn cả sự cần thiết). Ngay trong cái nhanh ấy cũng biểu hiện một cái gì sang trọng đặc biệt. Có lẽ cũng giống như một nhạc trưởng nhìn bản nhạc giao hưởng : mặc dù nó được viết cho nhiều nhạc cụ khác nhau, nhưng ông ta chỉ cần liếc qua cũng hiểu.

Một phút sau Khinsin để bản viết sang một bên nhìn tôi và nói :

– Chứng minh của anh hoàn toàn đúng.

Xuýt nữa thì tôi hét lên "Ura"(2) nhưng may mắn thay tôi đã kịp thời kìm lại.

Chứng minh đúng, – Khinsin nhắc lại, – Nhưng anh đã chứng minh không phải định lí Fecma mà một điều hoàn toàn khác, đã được biết từ lâu. Anh đã chứng minh rằng nếu có đẳng thức $a^n + b^n = c^n$, thì không thể có đẳng thức $a^m + b^m = c^m$ với $m \neq n$.

Niềm vui của tôi như tan ra mây khói. Tôi bối rối và chán nản hơn nhiều so với lần gặp Vaxiliep. Nhưng Khinsin liền nói thêm :

– Dầu sao thì trong công trình của anh cũng có một điều gì đúng. Theo tôi anh đã chọn đúng đường. Có cơ sở để giả định rằng chính Fecma đã sử dụng phương pháp hạ bậc. Trong công trình của anh cũng có một điều gì đó tương tự. Ông đứng dậy để tỏ ra là giờ tiếp đã hết và thêm : anh cứ tiếp tục đi, chúc anh may mắn.

Tôi không biết nên cười hay nên khóc. Tôi thôi đâm đầu vào định lí Fecma nhưng vẫn tiếp tục nghiên cứu các con số, hơn thế còn say mê chúng hơn. Khi đó tôi không có một mục đích nào cả. Tôi chỉ đơn thuần chơi với các con số và phát hiện các quan hệ kì lạ giữa chúng. Nhưng đôi khi một trò chơi có thể trở thành những sự tìm tòi nghiêm túc. Nhiều phát minh nổi tiếng trong những lĩnh vực khác nhau cũng chỉ bắt đầu từ một trò chơi.

Sau lần gặp Khinsin không lâu, nhờ suy nghĩ về phương pháp hạ bậc tôi đã tìm ra một điều lí thú. Hóa ra là, có thể biểu diễn lũy thừa bất kì của một số nguyên dưới dạng tổng của những số lẻ liên tiếp. Và khi đó số số hạng bằng cơ số của lũy thừa. Chẳng hạn : 5^4 có thể biểu diễn thành tổng của năm số lẻ liên tiếp $5^4 = 121 + 123 + 125 + 127 + 129 = 625$. Một ví dụ khác : $4^5 = 253 + 255 + 257 + 259 = 1024$.

Đối với lũy thừa bậc n bất kì của số a, số hạng đầu tiên của khai triển bằng $a_1 = a^{n-1} - a + 1$, và số hạng cuối cùng $a_a = a^{n-1} + a - 1$

Rõ ràng với $n = 2$ ta nhận được công thức quen thuộc trong toán học sơ cấp :

$$a^2 = 1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2a - 1)$$

Đáng quan tâm là trường hợp khi $n = 3$. Ta có

$1^3 = 1.$

$2^3 = 3 + 5.$

$3^3 = 7 + 9 + 11.$

$4^3 = 13 + 15 + 17 + 19.$

. . . .

Từ đó dễ dàng nhận được định lí đã có từ thời cổ phương đông. Dạng tổng quát của nó là

$$\sum_{i=1}^{n} a_1^3 = (\sum_{i=1}^{n} a_i)^2$$

Người ta chứng minh định lí này bằng phương pháp quy nạp toán học, nhưng cũng có thể chứng minh như sau :

$$1^o + 2^o + 3^o + 4^o + ... =$$

$$= 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + ... =$$

$$= (1 + 2 + 3 + 4 + ...)^2$$

Còn có thể tìm nhiều mối quan hệ kì lạ khác, miễn là quan sát một cách kĩ lưỡng

(2) *Hoan hô.*

hơn các đẳng thức bằng số và bằng chữ, chẳng hạn từ trên ta suy ra

$$\alpha_1 + \alpha_a = 2a^{n-1}$$

hay $$(\alpha_1 + \alpha_a)/2 = a^{n-1}$$

Đẳng thức đó nói lên cái gì ? Nó nói lên rằng trong một dãy bất kì các số lẻ liên tiếp nhận được khi khai triển một lũy thừa của số a, giữa các số hạng đầu và cuối của dãy có ít nhất một lũy thừa của số với số mũ nhỏ hơn số mũ của lũy thừa được khai triển một đơn vị.

Từ kết quả trên còn có thể suy ra nhiều điều khác nữa, nhưng tôi sẽ không trình bày ở đây, và xin dành cho các bạn đọc tự suy nghĩ.

Trong những năm 20 của thế kỉ này tôi rất tự hào về những tìm tòi của mình. Vài năm sau tôi đã trình bày định lí của mình cho viện sĩ Ludin – một nhà bác học và một con người lí thú nhất, toàn diện nhất. Những bài giảng hấp dẫn về những vấn đề rất khác nhau của toán học mà ông đã đọc ở trường đại học Matxcơva thu hút rất nhiều người nghe ; không những chỉ sinh viên mà cả giáo viên, giáo sư, và những người yêu thích toán cũng đến nghe.

Những bài giảng sắc sảo, dễ tiếp thu của Ludin không những sâu sắc về nội dung mà còn tuyệt vời về hình thức. Không phải là ngẫu nhiên mà các học trò của ông (ông đã đào tạo một thế hệ các nhà toán học lỗi lạc) đều là những giảng viên xuất sắc.

Tôi tìm gặp Ludin sau một trong các bài giảng tuyệt vời như vậy mà tôi đã phải vứt bỏ mọi việc khác để đến nghe. Tôi hỏi ông một câu gì đó để bắt chuyện, và làm ra vẻ vô tình xoay sang vấn đề mà tôi quan tâm. Tôi hỏi xem ông có biết định lí về khai triển lũy thừa của các số tự nhiên không. Ludin bảo rằng ông không biết định lí đó và hẹn tôi đến nhà, – Trời, ông ta có cả một cẩm nang toán học của Klen bằng tiếng Anh.

Tôi không thể chờ đợi lâu và đã tìm đến nhà ông ngay ngày hôm sau ! Người ta đã báo là có tôi đến, còn tôi thì ngoan ngoãn chờ trong phòng làm việc. Chủ nhân mặc áo choàng ngắn cũn và đi dép bước ra. Ông xin lỗi, rồi sau đó đến tủ và rút ra một tập dày cộp "Bách khoa toán học" của Cơ–lanh.

– Trong tập này, – ông mỉm cười và nói : – có tất cả những gì liên quan đến các số, từ Romul đến ngày nay. Nếu anh không tìm thấy định lí của anh ở đây thì có nghĩa định lí đó đúng là của anh. Anh hãy cầm lấy quyển sách này, chỉ có điều là đừng giữ lâu.

Không dấu nổi vẻ ngạc nhiên, tôi tạm biệt Ludin và ra về với một kho báu vật nặng trĩu bên mình. Tại sao ông ta lại có thể trao cả một kho tàng quý báu cho một người chỉ mới gặp lần đầu ? Thật là không thể hiểu được ! Về sau này tôi mới hiểu rằng trong đầu của con người vĩ đại ấy không thể có ý nghĩ rằng một người nào đó lại có thể lừa dối ông. Đối với ông, khoa học và tội ác không thể song song tồn tại được.

Tôi liền dở cuốn bách khoa toàn thư nhiều đêm liền, và luôn luôn sợ rằng sẽ tìm thấy định lí của mình... May mắn là đã không thấy ! Có nghĩa rằng định lí là của tôi, tôi nghĩ như vậy và đã nghĩ như vậy khá lâu... Nhưng rồi mới đây tôi đã tìm thấy định lí "của mình" trong cuốn sách bài tập chọn lọc giành cho học sinh lớp 8 – những người tham gia cuộc thi vô địch toán học.

Tôi buồn ư ? Không hề. Nhìn cuốn sách, tôi vui mừng nhận thấy phạm vi các vấn đề toán học giành cho học sinh phổ thông được mở rộng và phức tạp thêm biết bao, và nghĩa là trình độ toán học ở phổ thông đã được nâng cao thêm biết bao. Tôi nghĩ đến những nhà sư phạm mà tài năng sáng tạo về phương pháp và công lao của họ đã đóng một vai trò không nhỏ trong sự nghiệp quan trọng này. Tôi hồi tưởng lại và thầm cám ơn những người thầy của tôi...

VỀ MỘT BẤT ĐẲNG THỨC

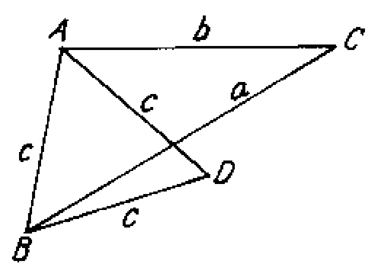
TRẦN VÕ CƯỜNG

Các bạn trẻ yêu toán thân mến !

Trong bài viết này tôi sẽ trao đổi với các bạn một vài suy nghĩ về một bài toán nhỏ mà tôi đã gặp phải khi đi học. Đầu bài toán như sau : "Cho tam giác ABC có các cạnh là a, b, c và diện tích S. Hãy chứng minh rằng :

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 4S\sqrt{3}".$$

Hồi ấy, để giải bài toán trên tôi đã vận dụng nhiều phép biến đổi đại số vào hầu hết các bất đẳng thức về các cạnh trong tam giác mà tôi biết, nhưng vô hiệu, đáp số vẫn không tìm ra. Tôi nảy ra ý nghĩ giải quyết một bài toán dễ hơn nhiều như sau : Khi nào thì trong tam giác ABC xảy ra đẳng thức $a^2 + b^2 + c^2 = 4S\sqrt{3}$? Và thấy ngay đẳng thức trên xảy ra khi và chỉ khi ΔABC là tam giác đều (vì $a = b = c$ do đó vế trái đẳng thức là $3c^2$, còn vế phải $4S\sqrt{3} = 4(c^2\sqrt{3}/4)\sqrt{3} = 3c^2$). Từ đấy tôi có ý định đưa vào thêm 1 tam giác đều nào đó để chứng minh bất đẳng thức trên. Song tam giác đều đưa thêm vào như thế nào ? Lẽ tất nhiên là nó phải có một sự ràng buộc như thế nào đó đối với ΔABC cho trước. Tam giác ABC cho trước không phải là tam giác đều nên bao giờ cũng có một góc nhỏ hơn 60^o, giả sử rằng góc $ABC < 60^o$. Tôi dựng tam giác đều ABD sao cho D ở cùng phía với C đối với AB. Như thế nếu áp dụng định lí hàm số côsin vào ΔBDC thì :



Hình 1

$$CD^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(60^o - \widehat{B})$$
$$= a^2 + c^2 - 2ac[\cos 60^o \cos\widehat{B} + \sin 60^o \sin\widehat{B})]$$
$$= a^2 + c^2 - ac(\cos\widehat{B} + \sqrt{3}\sin\widehat{B})$$
$$= a^2 + c^2 - ac\cos\widehat{B} - ac\sqrt{3}\sin\widehat{B}.$$

Nhưng $ac\sin\widehat{B} = 2S$ (S là diện tích ΔABC theo giả thiết).

Còn nếu áp dụng định lí hàm số côsin vào ΔABC thì $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$.

Suy ra

$$\cos\widehat{B} = (a^2 + c^2 - b^2) / 2ac$$

Do đó

$$CD^2 = a^2 + c^2 - ac.(a^2 + c^2 - b^2)/2ac - 2S\sqrt{3} =$$
$$= (a^2 + c^2 + b^2 - 4S\sqrt{3}) / 2$$

Vì ΔABC không phải là tam giác đều nên C không thể trùng với D, do đó CD^2 luôn luôn dương, vậy thì $a^2 + b^2 + c^2 > 4S\sqrt{3}$. Như vậy kể cả trường hợp ΔABC là tam giác đều ta đã chứng minh được

$$a^2 + b^2 + c^2 > 4S\sqrt{3} \quad (1)$$

Bài toán được giải xong. Chúng ta sẽ không dừng lại ở đây. Vì $ac\sin B = 2S$, do đó $2ac\sin B = 4S$.

Mặt khác

$$2ac\cos\widehat{B} = 2ac\sin\widehat{B}.\cos\widehat{B} / \sin\widehat{B} = 4S\text{cotg}\widehat{B}.$$

Nên :

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\widehat{B}$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 4S\text{cotg}\widehat{B} \quad (2)$$

Do tính bình đẳng của các cạnh trong tam giác ABC nên ta có thể suy ra

$$a^2 = b^2 + c^2 - 4S\text{cotg}\widehat{A} \quad (3)$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 4S\text{cotg}\widehat{C} \quad (4)$$

Cộng từng vế các đẳng thức (2) (3) (4) ta được

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2)$$
$$- 4S(\text{cotg}\widehat{A} + \text{cotg}\widehat{B} + \text{cotg}\widehat{C}) \quad (5)$$

Từ (1) và (5) suy ra một bất đẳng thức khác

$$\text{cotg}\widehat{A} + \text{cotg}\widehat{B} + \text{cotg}\widehat{C} \geqslant \sqrt{3} \quad (6)$$

Như thế từ bài toán ban đầu, chúng ta lại giải được 1 bài toán khác như sau :

"Chứng minh rằng nếu 3 góc α, β, γ có tổng bằng 180^o thì :

$$\text{cotg}\alpha + \text{cotg}\beta + \text{cotg}\gamma \geqslant \sqrt{3}".$$

Sau này nhân đọc một bài trong báo Toán học ở nhà trường Liên Xô tôi được biết hai nhà toán học Phin-sler và Kha-đvi-gher đã đưa ra một bất đẳng thức tổng quát và khó hơn nhiều là

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 4S\sqrt{3} + Q \quad (7)$$

trong đó :

$$Q = (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2$$

Vấn đề trở nên rắc rối. Sau khi áp dụng nhiều lần các phép biến đổi và một vài thủ thuật trong đại số đều thất bại, tôi này ra ý định chứng minh nó bằng phương pháp hình học ; nhưng rõ ràng không thể chỉ trông chờ vào vẻn vẹn có ΔABC và tam giác đều ABD mà ta đã dựng ở trên. "Phải dựng thêm 1 vài hình nữa !".

Một sự suy nghĩ nhỏ, đã dẫn ta tới quyết định ấy. Tất nhiên một người làm toán hơi khá một chút thôi cũng có thể nghĩ ngay đến các điểm, các đường đặc biệt trong ΔABC mà ta đã biết !

Sau khi kẻ các đường phân giác, trung tuyến, trung trực, đường cao và cùng với nó, các điểm đặc biệt xuất hiện : tâm vòng nội tiếp, trọng tâm, tâm vòng ngoại tiếp, trực tâm, việc nối các điểm đặc biệt với nhau hoặc với các đỉnh của tam giác ban đầu đều "không dẫn đến" một "hi vọng". Phần vì quá phức tạp, phần vì không thấy sự liên hệ của hình tạo thành với hình ban đầu... Nhưng rồi một "ý hay" xuất hiện khi vẽ các đường tròn bàng tiếp (I_a), (I_b), (I_c) của ΔABC ; ta thấy các đỉnh của ΔABC đều nằm trên các cạnh của $\Delta I_a I_b I_c$ tạo thành do nối tâm các vòng tròn bàng tiếp. Tuy chỉ là một nhận xét rất bình thường, nhưng ở đây điều này có thể đưa đến 1 kết quả "lớn" - kết quả mong muốn. Vẻ sáng sủa của hình vẽ giúp ta thêm tin tưởng vào hi vọng đó !

Gọi S' là diện tích $\Delta I_a I_b I_c$ và r_a, r_b, r_c, r và R là bán kính các vòng tròn bàng tiếp, vòng tròn nội tiếp và ngoại tiếp của ΔABC.

Ta hãy áp dụng bất đẳng thức (1) vào tam giác $I_a I_b I_c$, ta có :

$$I_a I_b^2 + I_b I_c^2 + I_c I_a^2 > 4S'\sqrt{3} \qquad (1')$$

Tính các cạnh của $\Delta I_a I_b I_c$ và diện tích S' của nó theo a, b, c và $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$, r và R ta được

$$\begin{aligned} I_b I_c &= 4R\cos(\hat{A}/2) \\ I_b I_a &= 4R\cos(\hat{C}/2) \\ I_a I_c &= 4R\cos(\hat{B}/2) \end{aligned} \qquad (8)$$

và $S' = 2SR/r$

Nhưng từ

$$r_a = p\text{tg}(\hat{A}/2)$$
$$r_b = p\text{tg}(\hat{B}/2)$$
$$r_c = p\text{tg}(\hat{C}/2)$$

ta rút ra được

$$\begin{aligned} r_a + r_b &= 4R\cos^2(\hat{C}/2) \\ r_b + r_c &= 4R\cos^2(\hat{A}/2) \\ r_c + r_a &= 4R\cos^2(\hat{B}/2) \end{aligned} \qquad (9)$$

Từ (8) và (9) ta có

$$I_b I_c^2 + I_c I_a^2 + I_a I_b^2 = 8R(r_a + r_b + r_c)$$

Vậy (1') sẽ thành

$$8R(r_a + r_b + r_c) \geqslant 8SR\sqrt{3/r}$$

hay

$$r(r_a + r_b + r_c) \geqslant S\sqrt{3} \qquad (10)$$

Bất đẳng thức (7) tuy chưa được chứng minh nhưng ta lại chứng minh được 1 bất đẳng thức khác (10). Tất nhiên một câu hỏi sẽ được đặt ra là từ bất đẳng thức (10) có thể suy ra (7) được không ? và nếu được thì suy ra như thế nào ? Ta nhận thấy rằng vì vế phải của bất đẳng thức (10) đã gần giống số hạng đầu trong vế phải của (7), chỉ thiếu hệ số 4. Do đó ta đem nhân cả 2 vế của bất đẳng thức (10) với 4, ta có :

$$4r(r_a + r_b + r_c) \geqslant 4S\sqrt{3}$$

Dùng các công thức $S = pr$

$S = (p - a)r_a = (p - b)r_b = (p - c)r_c$

và công thức Hê-rông

$$S^2 = p(p - a)(p - b)(p - c)$$

ta tính được

$$4r(r_a + r_b + r_c) = (a^2 + b^2 + c^2) - [(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2]$$

Vậy rõ ràng là :

$$a^2 + b^2 + c^2 \gg 4s\sqrt{3} + [(a + b)^2 + (b + c)^2 + (c - a)^2] \qquad (7)$$

Bất đẳng thức (7) mang tên 2 nhà toán học Phin-sler và Kha-dvi-gher và được họ công bố năm 1938 dưới hình thức một định lí.

CẦN THÊM MỘT CHỮ "NẾU"

ĐẶNG VIỄN

Trong báo THTT số 107 (tr.1) có nêu bài toán (bài toán 1) cùng với lời giải sau đây :

Bài toán 1. *Hãy tìm giá trị lớn nhất và giá trị bé nhất của biểu thức $x^2 + y^2$ với điều kiện :*

$$(x^2 - y^2 + 1)^2 + 4x^2y^2 - x^2 - y^2 = 0 \quad (1)$$

Lời giải. Điều kiện (1) biến đổi được về dạng :

$$(x^2 + y^2)^2 - 3(x^2 + y^2) + 1 + 4x^2 = 0 \quad (2)$$

hay $(x^2 + y^2)^2 - 3(x^2 + y^2) + 1 = -4x^2$. (3)

Đặt $u = x^2 + y^2$. Khi đó, từ (3), ta có :

$$u^2 - 3u + 1 \leqslant 0 \quad (4)$$

hay $(3 - \sqrt{5})/2 \leqslant u \leqslant (3 + \sqrt{5})/2$

Giá trị lớn nhất của biểu thức $x^2 + y^2$ là :

$$(3 + \sqrt{5})/2.$$

Giá trị bé nhất của biểu thức $x^2 + y^2$ là :

$$(3 - \sqrt{5})/2.$$

Thực ra, lời giải mới chỉ kết luận được rằng $\max(x^2 + y^2) = (3 + \sqrt{5})/2$ và $\min(x^2 + y^2) = (3 - \sqrt{5})/2$ nếu $x^2 + y^2$ đạt được các giá trị này. Dù là dễ dàng thấy rằng điều đó xảy ra khi $x = 0$, song không nêu điều đó ra vẫn là một thiếu sót.

Bây giờ, ta hãy thử xét khả năng áp dụng của cách giải đó nếu thay đổi đôi chút điều kiện (1), chẳng hạn thay bằng điều kiện (1') sau đây :

$$(x^2 - y^2 + 1)^2 = 4x^2y^2 - 4x^2 - y^2 - 2 = 0 \quad (1')$$

Bằng cách biến đổi tương tự như trên, ta sẽ có :

$$u^2 - 3u - 1 \leqslant 0.$$

Nếu tiếp tục giải như trên thì không thích hợp vì ta sẽ thu được một giá trị âm ứng với giá trị nhỏ nhất của u. Muốn cho tương ứng với mỗi giá trị của u đều có một giá trị của $x^2 + y^2$ cần thỏa mãn điều kiện $u \geqslant x^2$. Vì vậy, bằng cách đặt $X = x^2$, ta có hệ mà các bạn có thể giải bằng kiến thức ở lớp 10 (8 cũ) sau đây :

$$\begin{cases} X = -u^2 + 3u + 1 \\ 0 \leqslant X \leqslant u \end{cases}$$

Để tránh suy luận nhầm rằng từ $u \geqslant X$ ta có u đạt giá trị nhỏ nhất khi $u = X$, các bạn có thể xét thêm bài toán trên với sự thay thế điều kiện (1) bằng điều kiện (1'') sau đây :

$$(x^2 - y^2 + 1)^2 + 4x^2y^2 - 6x^2 - y^2 + 2 = 0 \quad (1'')$$

Bài toán 2. *Cho hình thang ABCD với đáy AB và DC. Chứng minh rằng : $AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2 + 2AB \cdot CD$*

(9/82 THTT).

Trong lời giải đó bài báo chỉ nêu trường hợp các hình chiếu H và H' của A và B xuống CD đều ở trong đoạn CD. Trong khi đó, có cả thảy 6 trường hợp khác nhau (các trường hợp H hoặc H' trùng vào C hoặc D đều được coi là nằm trong đoạn CD), nghĩa là lời giải chỉ đúng **nếu** xảy ra trường hợp tương ứng với hình đã vẽ. Bây giờ, làm thế nào để giải trọn vẹn bài toán cho cả 5 trường hợp còn lại nữa ? Chắc các bạn đều thấy ngại nếu phải vẽ thêm cho đủ 5 trường hợp hình vẽ còn lại và tiến hành giải tiếp từng trường hợp một vì đấy quả là một công việc đáng chán. Nhưng, thế thì phải làm thế nào ? Bạn đã từng gặp một hệ thức nào đó bao quát mọi trường hợp hình vẽ chưa ? Bạn sắp nhớ ra rồi đấy... chính là hệ thức Sa-lơ. Bây giờ, bạn hãy chứng minh hệ thức tổng quát sau đây về bình phương cạnh AB trong tam giác ABC (không cứ ứng với góc C nhọn, tù hay vuông) :

$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 + 2\overline{BC} \cdot \overline{CH}$ (trong đó H là hình chiếu của đỉnh A xuống cạnh BC), rồi áp dụng nó vào việc giải bài toán này.

Ta có

$$\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2 + 2\overline{CD} \cdot \overline{DH}$$

$$\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{DC}^2 + 2\overline{DC} \cdot \overline{CH'}$$

$$\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BC}^2 + 2\overline{DC}(\overline{DC} + \overline{HD} + \overline{CH'})$$

$= \overline{AD}^2 + \overline{BC}^2 + 2\overline{DC} \cdot \overline{HH'}$ (Áp dụng hệ thức Sa-lơ vào biểu thức trong ngoặc đơn.)

hay $\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BC}^2 + 2 \cdot \overline{DC} \cdot \overline{AB}$ (vì $ABH'H$ là một hình chữ nhật). Suy ra :

$$AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2 + 2AB.CD$$

(vì $\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{AB}$ là hai vectơ song song cùng chiều).

Bài toán 3. *Có một miếng bìa hình chữ nhật cỡ 18cm × 48cm. Hỏi phải cắt đi ở 4 góc 4 hình vuông bằng nhau với cạnh bằng bao nhiêu để có thể làm thành một cái hộp (không nắp) với thể tích lớn nhất có thể được.*

Lời giải 1. Gọi x là cạnh các hình vuông phải cắt đi, ta có thể tích V của cái hộp là :

$V = x(18 - 2x)(48 - 2x)$ với $0 < x < 9$ hay $V = 8/5. 5x/2.(18 - 2x)(12 - x/2)$. Vì các thừa số biến đổi $5x/2, 18 - 2x$ và $12 - x/2$ đều dương và có tổng bằng 30 không đổi và chúng lại bằng nhau khi $x = 4$ nên V đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $x = 4$ (cm) theo định lí 1 (hệ quả của định lí Cô–si) sau đây :

Định lí 1. Nếu n số không âm $a_1, a_2, a_3, \dots a_n$ mà có tổng không đổi thì tích của chúng đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi chúng bằng nhau.

Chắc các bạn đều cho rằng đây là một lời giải hay vì nó ngắn, gọn. Thế mà, vẫn thiếu chặt chẽ đấy ! Để làm sáng tỏ điều đó, ta hãy lấy một lời giải khác làm phản ví dụ :

Lời giải 2. Ta có $V = x(18 - 2x)(48 - 2x)$ $= \frac{1}{4}.4x.(18 - 2x)(48 - 2x)$ với $0 < x < 9$.

Vì các thừa số biến đổi $4x$, $18 - 2x$ và $48 - 2x$ đều dương và có tổng bằng 66 không đổi, hơn nữa, hai thừa số $18 - 2x$ và $48 - 2x$ luôn luôn không bằng nhau nên theo định lí 1 theo V không bao giờ đạt giá trị lớn nhất (!).

Vì vậy, cần phải thêm một chữ "nếu" vào định lí 1 (thiếu chặt chẽ) thành định lí 1' sau đây :

Định lí 1' : Nếu n số không âm $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ mà có tổng không đổi và nếu có thể xẩy ra trường hợp chúng bằng nhau thì tích của chúng đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi chúng bằng nhau.

Bài toán 4. *Cho trước một đường tròn. Chứng minh rằng trong số các tam giác nội tiếp đường tròn đó, tam giác đều có diện tích lớn nhất.*

Lời giải. Xét các tam giác nội tiếp đường tròn đó. Vì các tam giác đều đều bằng nhau nên chúng có một diện tích xác định duy nhất. Do đó, muốn chứng minh "tam giác đều là tam giác có diện tích lớn nhất", ta chỉ việc chứng minh "tam giác có diện tích lớn nhất là tam giác đều". Ta sẽ chứng minh mệnh đề này bằng cách chứng minh mệnh đề phản đảo của nó (tức cũng đẳng giá với nó) sau đây : "mọi tam giác không đều đều không có diện tích lớn nhất". Quả vậy, xét tam giác ABC không đều. Thế thì, nó có ít nhất một cặp cạnh không bằng nhau, chẳng hạn $AB > BC$. Dễ dàng chứng minh rằng diện tích ΔABC bé hơn diện tích một trong hai tam giác cân có đáy là AC. Bài toán chứng minh xong.

Nhiều bạn rất thích lời giải này vì trong đó đã vận dụng liên tiếp hai cách chứng minh gián tiếp. Thế nhưng, nó vẫn không được chấp nhận vì chưng còn thiếu một chữ **nếu**. Bạn hãy thử nghĩ xem tại sao vậy ?

Thường ta vẫn quen xét tập hợp hữu hạn số thực trong đó bao giờ cũng tồn tại ít nhất một số lớn nhất đồng thời ít nhất một số bé nhất. Nhưng điều đó không còn đúng nữa đối với tập hợp vô hạn số thực, chẳng hạn, tập hợp số thực trong nửa đoạn (0 ; 3) không có số lớn nhất. Ở đây, tập hợp diện tích các tam giác nội tiếp hình tròn đã cho là một tập hợp vô hạn nên cũng chưa khẳng định được rằng nó có số lớn nhất hay không (dựa vào các định lí về tồn tại giới hạn ở lớp 11, bạn dễ dàng chứng minh rằng có). Cho nên cần phải thêm một chữ **nếu** vào điều đã được chứng minh trong lời giải trên như sau : "Nếu tồn tại ít nhất một tam giác nội tiếp đường tròn đó, với diện tích lớn nhất thì tam giác đều chính là tam giác đó".

Qua các ví dụ trên, các bạn có thể rút ra một vài điều đơn giản sau đây :

1) Cần luôn luôn có ý thức cảnh giác về tính tồn tại của khái niệm toán học mà ta đang sử dụng.

2) Thường các sai lầm về lôgic được xét theo các loại sau đây : sai về luận đề (lời giải bài toán 4), sai về luận cứ (lời giải 1), và sai về luận chứng (các lời giải bài toán 1 và bài toán 2).

Các bạn đi trước hầu như đều có một nhận xét thống nhất như sau "Ở phổ thông, điều cần thiết nhất là được rèn luyện cũng như tự rèn luyện về tư duy toán học". Mong rằng các bạn nhận thấy ở đây một lời khuyên quý báu.

XA LẠ MÀ GẦN GŨI

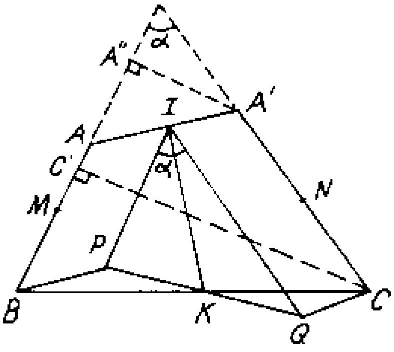
NGUYỄN CẢNH TOÀN

Bạn đọc hãy thử xem hai định lí quen thuộc sau đây :

Định lí 1. *Trong một tam giác, đường trung bình bằng nửa cạnh đáy.*

Định lí 2. *Trong một tam giác, tổng bình phương hai cạnh bằng nửa bình phương cạnh thứ ba cộng với hai lần bình phương trung tuyến tương ứng.*

Quan hệ giữa đường trung bình và các cạnh thật đơn giản (định lí 1) còn quan hệ giữa trung tuyến với các cạnh khá phức tạp (định lí 2). Xem ra nội dung hai định lí chẳng "bà con chi". Nếu có xem xét các chứng minh hai định lí trên, cũng sẽ không thấy rằng khi chứng minh định lí này chẳng hề dùng đến định lí kia. Nhưng sự xa lạ giữa hai định lí chỉ là bề ngoài. Chỉ cần đổi cách nhìn đi một chút đã cảm thấy có sự gần gũi. Quả vậy hãy xem tam giác ABC như một tứ giác có bốn cạnh BA, $AA = 0$, AC, CB thì đã thấy ngay sự "bình đẳng" giữa đường trung bình (nối trung điểm của hai cạnh đối diện BA, AC) và trung tuyến (nối trung điểm của hai cạnh đối diện AA, BC). Vậy thì tại sao quan hệ giữa chúng với các cạnh lại khác xa nhau đến thế ? Óc tò mò khoa học thúc giục ta nghiên cứu các quan hệ (trong một tứ giác $BAA'C$) giữa các cạnh và một đường trung bình (đoạn nối trung điểm hai cạnh đối diện) (h.1).



Hình 1

Gọi I, K lần lượt là trung điểm hai cạnh đối diện AA', BC và M, N lần lượt là trung điểm hai cạnh đối diện $ABA'C$. Định lí 2 gợi ý ta tịnh tiến cạnh AB đến vị trí IP và cạnh $A'C$ đến vị trí IQ. Hai tam giác KBP và KCQ bằng nhau vì có $BP = QC$ ($AA'/2$). $KB = KC$ và $\widehat{PBK} = \widehat{QCK}$. Từ đó suy ra $\widehat{PKB} = \widehat{QKC}$ nên P, Q, K thẳng hàng. Ngoài ra : $KP = KQ$ nên IK là trung tuyến của tam giác IPQ. Theo định lí 2 thì :

$4\overline{IK}^2 = 2(\overline{IP}^2 + \overline{IQ}^2) - \overline{PQ}^2 = 2(\overline{IP}^2 + \overline{IQ}^2) -$

$- (\overline{IP}^2 + \overline{IQ}^2 - 2IP \,.\, IQ \cos\alpha)$ hay

$4\overline{IK}^2 = \overline{IP}^2 + \overline{IQ}^2 + 2IP \,.\, IQ\cos\alpha =$

$= \overline{AB}^2 + \overline{A'C}^2 + 2\overline{AB} \,.\, \overline{A''C'}$ ($A''C'$ là hình chiếu vuông góc của $A'C$ xuống đường thẳng AB) nếu ta chú ý rằng $\cos\alpha$ và $\overline{AB} \,.\, \overline{A''C'}$ luôn luôn cùng dấu.

Nhưng :

$2\overline{AB} \,.\, \overline{A''C'} = 2\overline{AB}(\overline{MC'} - \overline{MA''})$

$= 2\overline{AB} \,.\, \overline{MC'} - 2\overline{AB} \,.\, \overline{MA}$

$= (\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2) - (\overline{AA'}^2 - \overline{BA'}^2)$

Vậy :

$$4\overline{IK}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{A'C}^2 + \overline{BA'}^2 + \overline{AC}^2 - \overline{AA'}^2 - \overline{BC}^2 \quad (1)$$

Hoán vị vai trò của các cặp cạnh đối diện (AA', BC) và (AB, $A'C$) ta được :

$$4\overline{MN}^2 = \overline{AA'}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{BA'}^2 + \overline{AC}^2 - \overline{AB}^2 - \overline{A'C}^2 \quad (2)$$

Nếu A' trùng với A thì $AA' = 0$, $AB = A'B$, $AC = A'C$ nên (1) cho ta : $4\overline{IK}^2 = 2(\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2) - \overline{BC}^2$; đó là nội dung của định lí 2.

Còn (2) thì cho ta :

$4\overline{MN}^2 = \overline{BC}^2$ hay $MN = BC/2$, đó là nội dung của định lí 1.

Như vậy, hai định lí 1 và 2 chỉ là xa lạ với nhau bề ngoài thôi, thực chất thì chúng đều do một mẹ sinh ra. Hai hệ thức (1) và (2) đều nói lên :

Định lí 3. *Trong một tứ giác, bốn lần bình phương của một đường trung bình (đoạn thẳng nối trung điểm hai cạnh đối diện cho trước) bằng tổng bình phương hai cạnh còn lại và hai đường chéo trừ đi tổng bình phương hai cạnh cho trước.*

Hai định lí 1 và 2 là kết quả của việc áp dụng định lí 3 vào hai đường trung bình của một tứ giác $BCAA'$ khi A' đến trùng với A. Đến đây, ta hiểu thêm hai chữ "đào sâu" là thế nào. Ý xuất phát cũng thật là đơn giản : Coi đường trung tuyến cũng là một đường trung bình nối trung điểm của cạnh AA với trung điểm của cạnh BC. Đơn giản nhưng lại ít ai nghĩ đến chỉ vì không quen nghĩ rằng tam giác là một trường hợp đặc biệt của tứ giác (khi có một cạnh bằng không) và "đào sâu" đi liền với "mở rộng". Ở đây, có mở rộng ra tứ giác mới thấy được một mối quan hệ sâu xa trong tam giác.

Nếu tinh ý một chút sẽ thấy rằng trong khi chứng minh định lí 3, không hề dùng đến giả thiết "lồi" hay "phẳng" của tứ giác. Vậy định lí đúng cho một tứ giác bất kì (lồi, lõm, chéo, ghềnh). Hơn nữa vì độ dài trung bình là một hàm liên tục của các cạnh và đường chéo nên định lí 3 vẫn đúng khi có một đỉnh nào đó liên tục di chuyển đến nằm trên một cạnh nào đó, thậm chí cả khi bốn đỉnh thẳng hàng.

Sau đây ta sẽ gọi một hình gồm bốn điểm bất kì và sáu đoạn thẳng nối bốn điểm đó, từng đôi một, là một "tứ điểm". Bốn điểm và sáu đoạn nói trên theo thứ tự sẽ gọi là các "*đỉnh*" và các "*cạnh*" của tứ điểm. Một cạnh nối hai đỉnh nào đó và cạnh nối hai đỉnh còn lại sẽ gọi là hai cạnh đối diện của tứ điểm. Đoạn thẳng nối trung điểm hai cạnh đối diện sẽ gọi là một đường trung bình của tứ điểm.

Bây giờ ta có thể phát biểu định lí 3 như sau :

Định lí 3'. Trong một tứ điểm có sáu cạnh bằng a_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6,$) bốn lần bình phương của một đường trung bình nào đó bằng $\sum_{i=1}^{6} \varepsilon_i a_i^2$, $\varepsilon_i = -1$ đối với hai cạnh chứa hai đầu mút của đường trung bình và $\varepsilon_i = +1$ đối với các cạnh khác.

Nếu viết biểu thức cả ba đường trung bình theo định lí 3' rồi cộng vế với vế ta được :

Định lí 3''. *Trong một tứ điểm tổng bình phương sáu cạnh bằng bốn lần tổng bình phương ba đường trung bình.*

Vận dụng định lí 3'' vào một tứ điểm có bốn đỉnh A, B, C, D thẳng hàng trên một trục số với các hoành độ là a, b, c, d ta có ngay :

Định lí 4. Với bốn số thực a, b, c, d bất kì, ta luôn luôn có $(a-b)^2 + (a-c)^2 +$
$$+ (a-d)^2 + (b-c)^2 + (b-d)^2 + (c-d)^2 =$$
$$= 4\left[\left(\frac{a+b}{2} - \frac{c+d}{2}\right)^2 + \left(\frac{a+c}{2} + \frac{b+d}{2}\right)^2 + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{a+d}{2} - \frac{b+c}{2}\right)^2\right].$$

Định lí 4 cũng là anh em ruột thịt với các định lí 1 và 2. Dĩ nhiên anh em nhà này còn nhiều, các bạn tha hồ tìm.

Các bạn thấy không, học một biết mười là vậy. Bằng lòng với việc hiểu hai định lí 1 và 2 thì học một chỉ biết một. Thắc mắc tại sao chúng có vẻ xa lạ với nhau rồi đào sâu, mở rộng, ta đã tự mình phát hiện thêm nhiều kiến thức mới (ít ra là đối với ta), những kiến thức mà nhìn riêng lẻ, tưởng như chả "bà con chi".

A – CÁC KHÁI NIỆM TOÁN HỌC

NÓI CHUYỆN VỀ CÁI "ĐIỂM" TRONG HÌNH HỌC

LÊ KHẮC BẢO

Học sinh chúng ta học hình học, làm bài tập hình học, thường gặp luôn chữ "điểm". Có lẽ không có bài học, bài tập nào về hình học mà không có chữ "điểm". Như vậy chắc chúng ta đã hiểu rõ cái "điểm" lắm rồi.

Nhưng nếu bây giờ có người hỏi "điểm" là cái gì thì nhiều học sinh còn lúng túng. Điều đó cũng không có gì lạ, vì nhiều nhà toán học nổi tiếng đời xưa cũng như đời nay trả lời câu hỏi đó cũng không ổn. Sau đây xin giới thiệu một số định nghĩa về "điểm" của một số nhà toán học có tên tuổi.

1) Điểm là cái gì không thể chia được theo mọi chiều, nhưng nó có một vị trí (Aristốt (Aristote) thế kỉ thứ tư trước công nguyên).

2) Điểm là cái gì không có thành phần. Những đầu mút của một đường là những điểm (Ơcơlit (Euclide) thế kỉ thứ ba trước công nguyên).

3) Điểm biểu thị cái gì chiếm chỗ bé nhất, chỉ có vị trí đơn thuần. Mọi điểm đều có thể chồng khít lên nhau. (Lepnitdơ (Leibnitz) 1679.)

4) Những đầu mút của một đường gọi là điểm (Lơgiăng (Legendre) 1794).

5) Sự tồn tại của một nguyên tử đủ để tưởng tượng một điểm toán học (Côsi (Cauchy) 1832.)

6) Điểm toán học là một dạng không có độ lớn. Điểm là cái gì được xác định bởi chính nó (Đenbơp (Delboeuf) 1860.)

7) Điểm là giới hạn hay đầu mút của một đường là giao của những đường (Rusê (Rouché) và Đơ Combơrutxơ (De Comberousse) 1866 – 1891.)

8) Một điểm ứng với ý thức trừu tượng mà chúng ta có đối với một vật thể cực kì bé mà chúng ta chỉ để ý đến vị trí trong không gian, đối với một miền không lớn nhưng do chính một vật thể nào đó giới hạn (Mêrây (Méray) 1903).

Ta thấy ngay các định nghĩa trên đều không ổn, vì người ta đã dựa vào những cái chưa định nghĩa, ví dụ : *chiều, vị trí, thành phần, đường, độ lớn, dạng*, v.v.. Nếu người ta tiếp tục hỏi : chiều là cái gì ? vị trí là cái gì ? v.v.. thì những nhà toán học trên sẽ lúng túng. Trong 8 định nghĩa trên có những cái không phải là định nghĩa, ví dụ 5, 8 ; ngoài ra có định nghĩa lại quá mơ hồ, ví dụ "điểm" là cái gì được xác định bởi chính nó.

Ngày nay, người ta định nghĩa "điểm" như thế nào ? : Trong toán học, muốn định nghĩa một khái niệm người ta phải dựa vào những khái niệm đã định nghĩa trước. Do đó không thể định nghĩa tất cả các khái niệm, mà phải có những khái niệm đầu tiên không định nghĩa gọi là *khái niệm cơ bản*. Trong hình học người ta lấy "điểm" làm khái niệm cơ bản (ngoài ra còn có những khái niệm cơ bản khác, ví dụ đường thẳng, mặt phẳng).

Người ta cũng không chứng minh được mọi mệnh đề toán học (mệnh đề chứng minh được gọi là định lí). Muốn chứng minh một mệnh đề thì người ta phải dựa vào những mệnh đề đã được chứng minh trước. Đi ngược mãi lên thế nào cũng phải có những mệnh đề đầu tiên không chứng minh mà người ta gọi là *tiên đề*. Các tính chất của các khái niệm cơ bản được nêu lên trong các *tiên đề*. Đây là phương pháp xây dựng toán học hiện đại mà người ta gọi là *phương pháp tiên đề*.

Bây giờ ta trở lại câu chuyện cái "điểm". Không phải ngẫu nhiên mà người ta thấy cần thiết có những khái niệm cơ bản không định nghĩa như "điểm". Từ khi hình học Lôbasepski (nhà toán học người nga, 1793 – 1856), được công nhận, các nhà toán học mới đặt vấn đề xây dựng cơ sở cho hình học. Họ đã dùng *phương pháp tiên đề* và lấy "điểm" làm khái niệm cơ bản, từ đó người ta thôi không định nghĩa "điểm" nữa.

Như vậy "điểm" là một *khái niệm cơ bản* không định nghĩa. Ta có thể nêu lên một hình ảnh của "điểm" là một hạt bụi rất bé. Nhớ rằng đó chỉ là một hình ảnh chứ không phải một định nghĩa.

Hai bài toán nổi tiếng : *BÀI TOÁN GÔNBÁC VÀ BÀI TOÁN ƠLE*

NGÔ THÚC LANH
(Đại học sư phạm Hà Nội

Vào khoảng giữa thế kỉ thứ 17, *Gônbác* (1690 – 1764) viện sĩ Viện hàm lâm Pêtecbua (Nga), trong một bức thư gửi cho *Ơle* (1707 – 1873), cũng là viện sĩ Hàn lâm Pêtecbua, đã phát hiểu một mệnh đề, về sau mang tên là "bài toán Gônbác". Bài toán đó như sau : *chứng minh rằng mỗi số lẻ, lớn hơn năm, đều có thể viết dưới dạng một tổng của ba số nguyên tố*".

Bức thư của *Gônbác* viết : "Bài toán của tôi như sau : ta hãy lấy một cách hú họa một số lẻ nào đó, 77 chẳng hạn. Ta có thể phân tích nó thành ba số hạng : $77 = 53 + 17 + 7$, cả ba số hạng đều là những số nguyên tố. Ta lại lấy một số khác, một cách hoàn toàn hú họa, 461 chẳng hạn, ở đây $461 = 449 + 7 + 5$, và ba số hạng lại là nguyên tố. Ta có thể phân tích cũng số ấy theo một cách khác, thành ba số hạng nguyên tố : $267 + 199 + 5$, v.v.. Bây giờ tôi thấy hoàn toàn rõ ràng rằng : mỗi số lẻ, lớn hơn năm, đều có thể phân tích thành một tổng của ba số hạng là những số nguyên tố. Nhưng chứng minh điều đó như thế nào. Phép thử nào cũng cho cùng một kết quả như thế, nhưng cả đời người cũng chả đủ để thử lần lượt tất cả các số lẻ. Cần phải có một phép chứng minh tổng quát nào đó, chứ không phải là những phép thử".

Ơle trả lời rằng mệnh đề đó là hoàn toàn đúng đắn, nhưng ông cũng không thể đưa ra một phép chứng minh chặt chẽ của mệnh đề đó được. Mặt khác *Ơle* lại đề ra một mệnh đề mới, về sau gọi là "bài toán Ơle" : "*mỗi số chẵn, từ bốn trở đi, đều có thể phân tích thành một tổng của hai số nguyên tố*". Mệnh đề này ông cũng không chứng minh được.

Chú ý rằng, nếu giải được *bài toán Ơle* thì rõ ràng từ đó suy ra được lời giải của *bài toán Gônbác*. Thật vậy, mọi số lẻ, lớn hơn năm, đều có thể viết dưới dạng $2n + 1 = 3 + 2(n - 1)$, trong đó $2(n - 1) \geqslant 4$. Nếu mệnh đề Ơle là đúng, thì số chẵn $2(n - 1$ sẽ phân tích được thành một tổng của hai số nguyên tố, lúc đó số lẻ $2n + 1$ sẽ phân tích được thành một tổng của ba số nguyên tố, và mệnh đề Gônbác sẽ đúng với mọi số lẻ từ 7 trở đi.

Nhưng đảo lại thì không đúng, tức là nếu mệnh đề *Gônbác* là đúng thì từ đó không thể suy ra được rằng mệnh đề *Ơle* cũng đúng. Như vậy, *bài toán Ơle* khó hơn *bài toán Gônbác* nhiều .

Gần hai trăm năm sau khi được đặt ra, *bài toán Gônbác* vẫn chưa tìm được lời giải, mặc dù nhiều nhà toán học lỗi lạc trên thế giới đã đề cập đến. Mãi đến năm 1930, nhà toán học Xô viết trẻ tuổi L.G. Sniarenman, (1905 – 1938) mới tìm ra được con đường đúng đắn để tiến tới lời giải của bài toán Gônbác. Ông đã chứng minh được rằng : *tồn tại một hằng số k, sao cho mỗi số tự nhiên lớn hơn 1 đều có thể viết dưới dạng một tổng của không quá k số nguyên tố, tức là với mọi số tự nhiên N (N > 1).*

$$N = p_1 + p_2 + \dots + p_k$$

trong đó p hoặc là một số nguyên tố, hoặc là bằng không.

Nếu ta chứng minh được rằng $k = 3$ thì *bài toán Gônbác* được giải xong. Nhờ sự nỗ lực tìm kiếm của nhiều nhà toán học, số đó được xác định là 67, và bây giờ đã hạ xuống 20. Nhưng từ đó hạ được xuống số 3 thì đường vẫn còn dài.

Năm 1937 một sự kiện quan trọng đã xảy ra làm chấn động dư luận của giới toán học trên toàn thế giới. Nhà bác học Xô viết viện sĩ J.M. *Vinôgradốp* (sinh năm 1891) chứng minh được mệnh đề *Gônbác* với những số lẻ đủ lớn : *mọi số lẻ, kể từ một số đủ lớn nào đó, đều là tổng của ba số nguyên tố.*

Nói cách khác, trong các số tự nhiên, tồn tại một số N_0 đủ lớn, sao cho sau số đó mọi số lẻ đều là tổng của ba số nguyên tố.

Vinôgradốp đã chứng minh được định lí trên đây bằng một đường lối rất phức tạp, đòi hỏi vận dụng những công cụ rất tinh vi của toán học hiện đại.

Vấn đề đặt ra là : số N_0 là bao nhiêu ? Nhà toán học Xô viết *K.G. Bôrôdokin* đã chứng minh rằng

$$N_0 \geqslant e^{e^{16,038}}$$

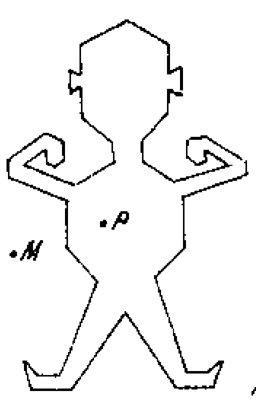
trong đó e số cơ số logarit tự nhiên, $e = 2,7182...$

Muốn chứng minh được mệnh đề *Gônbác* một cách hoàn toàn, cần hạ số N_0 xuống nhiều hơn nữa, rồi thử nghiệm với tất cả các số nhỏ hơn. Nhiều nhà toán học đã thử nghiệm trực tiếp, và đã đi đến kết luận là với tất cả các số tự nhiên tới 9.000.000 mệnh đề Gônbác là đúng.

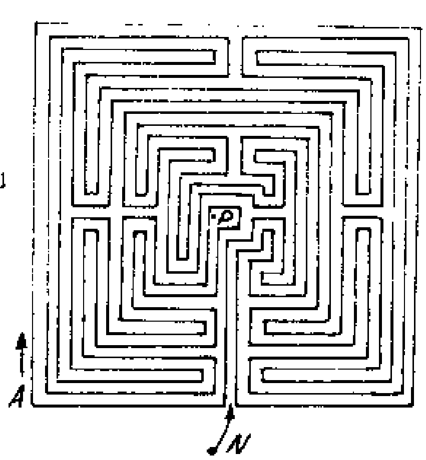
Phương pháp của *Vinôgradốp* chưa đủ để giải bài toán *Ole*. Cho đến nay bài toán này vẫn chưa tìm được lời giải. *Bài toán Gônbác* với các số chẵn, mà bản thân *Gônbác* không đề ra, cho đến nay cũng chưa giải được, mặc dù, từ định lí *Vinôgradốp* suy ra rằng mỗi số chẵn đủ lớn là tổng của bốn số nguyên tố.

MIỀN TRONG, MIỀN NGOÀI CỦA ĐA GIÁC

1) Bạn đã làm quen với các hình đa giác từ lớp 5, lớp 6. Nhưng xin hỏi bạn : hình 1 và hình 2 có phải là hình đa giác không ?



Hình 1



Hình 2

Chắc các bạn trả lời ngay được rằng hình 1 là hình đa giác, tuy có vẻ "lạ" một chút. Còn về hình 2, thì chắc nhiều bạn còn do dự. Để trả lời câu hỏi, bạn phải trở lại định nghĩa của hình đa giác, tức là xem xét hình 2 có phải là *một đường gấp khúc kín* không. Muốn vậy, bạn hãy cho một chú kiến bò từ một điểm nào đó trên hình 2, điểm A chẳng hạn, bò theo các đường nét đã kẻ (theo chiều mũi tên chẳng hạn) và *không bao giờ được quay lại đường cũ*. Bạn sẽ thấy rằng chú kiến sẽ bò qua *tất cả* các đường nét đã kẻ và cuối cùng sẽ trở về lại điểm A, nghĩa là hình 2 là một *đường kín*, còn đó là *một đường gấp khúc* thì quá rõ ràng. Vậy hình 2 là một *hình đa giác* !

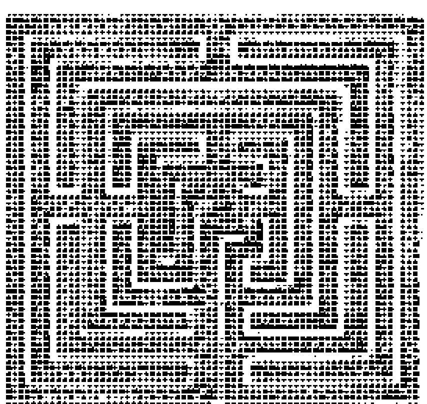
2) Đối với các hình đa giác quen thuộc, hoặc đối với hình đa giác như hình 1, bạn có thể trả lời ngay được rằng điểm *M* là điểm *ở ngoài* đa giác, còn điểm P là điểm *ở trong* đa giác. Nhưng bạn khó có thể trả lời ngay được câu hỏi : trên hình 2, điểm P là điểm ở trong hay ở ngoài đa giác ? Để trả lời câu hỏi này, bạn có thể cho một chú kiến bò từ một điểm rõ ràng là ở ngoài hình đa giác (như điểm *N*) để đi đến *P*. Có hai trường hợp có thể xảy ra :

1) Chú kiến tìm được một đường đi đến *P* mà không phải vượt qua "đường biên giới" cạnh của đa giác). Trong trường hợp này, *P* là một điểm ở ngoài đa giác.

2) Chú kiến nhất thiết phải vượt qua đường biên giới một lần mới đến được *P*. Trong trường hợp này, *P* là một điểm ở trong đa giác.

Ở đây ; bạn hãy cho chú kiến đi từ *N* theo mũi tên (hình 2) và bạn sẽ thấy rằng chú kiến có thể đến được *P* trong trường hợp thứ nhất, nghĩa là *P* là một điểm *ở ngoài đa giác* (xem hình 3).

Cách cho kiến bò như trên đây khá phức tạp tuy rằng nó cho bạn thấy con đường đi từ ngoài vào đến điểm *P* (mà không vượt qua "biên giới" lần nào). Bạn có thể xác định *P* là điểm ở trong hay ở ngoài đa giác một cách đơn giản hơn dựa vào nhận xét sau đây : nếu chú kiến bò từ một điểm ở ngoài đa giác mà vượt qua biên giới một lần thì chú đi vào trong đa giác, nếu chú vượt qua biên giới lần thứ hai thì chú lại ra ngoài đa giác, nếu vượt qua biên giới lần thứ ba thì vào trong đa giác v.v.. nghĩa là nếu từ một điểm ở ngoài đa giác mà chú kiến vượt qua biên giới *một số chẵn lần* thì chú vẫn ở ngoài đa giác, còn nếu vượt qua biên giới *một số lẻ lần* thì chú đã đi vào trong đa giác. Nhận xét này giúp bạn xác định được *P* là điểm ở ngoài đa giác một cách nhanh chóng : bạn cho chú kiến đi từ N, theo mũi tên, đi thẳng "vào trong" và chỉ cần vượt qua biên giới *hai lần* là chú kiến đến được *P*.



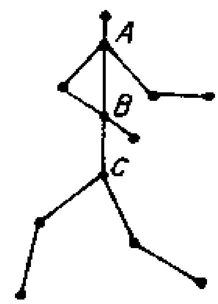
Hình 3

Do đó, ta có một cách đơn giản để xác định một điểm *P* nào đó là ở trong hay ở ngoài đa giác cho trước : chỉ cần *từ P kẻ một nửa đường thẳng không đi qua một đỉnh nào của đa giác ; ta đếm số giao điểm của nửa đường thẳng này với các cạnh của đa giác : nếu số giao điểm là chẵn thì P là điểm ở ngoài đa giác, nếu số giao điểm là lẻ thì P là điểm ở trong*.

3) Bạn đọc tinh ý có thể thấy rằng những điều vừa nói trên đây là dựa vào *trực giác*. Những dòng in nghiêng ở trên (về cách xác định *P* ở ngoài hay ở trong đa giác) là một định lí cần *phải chứng minh*. Ta không nêu chứng minh đó ra ở đây.

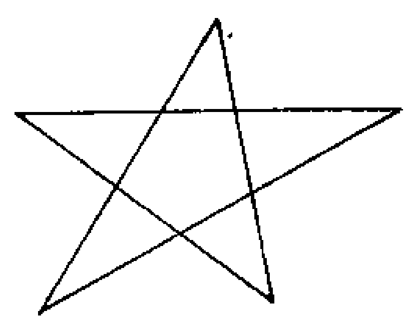
Hơn thế nữa, ngay cả khái niệm "điểm ở trong, ở ngoài đa giác" cũng phải nói chính xác hơn.

Các hình đa giác lồi, các hình 1 và 2 đều là các *hình đa giác đơn*. Hình đa giác đơn là hình tạo nên bởi một *đường gấp khúc đơn* kín. Đường gấp khúc đơn là đường gấp khúc trong đó mỗi điểm của nó thuộc *nhiều nhất là hai cạnh*. Hình 4 là một đường gấp khúc *không đơn*, hay là *tự cắt* (trong đó các điểm *C, B, A* thuộc *ba, bốn* cạnh). Một đường gấp khúc tự cắt *kín* tạo nên một *đa giác hình sao* (hình 5 chẳng hạn).

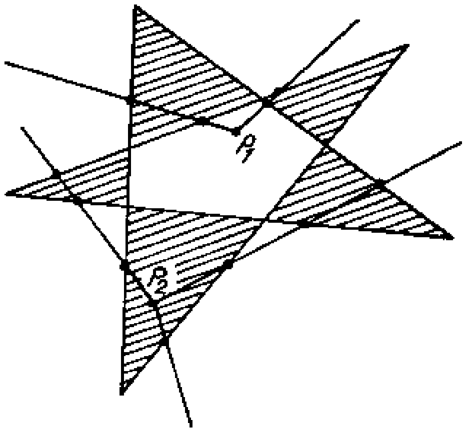


Hình 4

Người ta chứng minh được định lí sau đây (gọi là *định lí Giooc–đăng) : Mọi hình đa giác đơn chia mặt phẳng ra làm hai miền : một miền chứa hoàn toàn những đường thẳng* (gọi là miền ngoài của đa giác), *miền kia không có tính chất đó* (gọi là miền trong của đa giác). Nhờ định lí này mà ta nói đến điểm ở ngoài (thuộc miền ngoài) và điểm ở trong (thuộc miền trong) các đa giác ở hình 1 và 2.



Hình 5



Hình 6

Một đa giác hình sao chia mặt phẳng ra nhiều miền. Dựa vào cách xác định miền trong và miền ngoài của đa giác đơn (nói ở điểm 2), người ta định nghĩa miền trong và miền ngoài của đa giác hình sao như sau :

Lấy một điểm tùy ý trong miền. Từ điểm đó, vạch nửa đường thẳng tùy ý, *không đi qua điểm chung của các cạnh khác nhau của đa giác* ; đếm số giao điểm của nửa đường thẳng với các cạnh của đa giác ; nếu số đó là số chẵn thì điểm thuộc miền ngoài, nếu số đó là số lẻ thì điểm thuộc miền trong của đa giác. Trong hình 6, P_1 điểm ở ngoài, P_2 là điểm ở trong đa giác. Như vậy, miền trong của đa giác là miền gạch gạch. (Tất nhiên, phải chứng minh rằng tính chẵn lẻ của số giao điểm của nửa đường thẳng với các cạnh của đa giác chỉ phụ thuộc vào điểm đã chọn, mà không phụ thuộc vào nửa đường thẳng ta kẻ từ điểm đó. Ta không nêu chứng minh đó ở đây).

H.C (sưu tầm)

CÁC MÔ HÌNH KHÔNG GIAN VEC-TƠ TRONG TOÁN HỌC Ở TRƯỜNG PHỔ THÔNG

TRẦN THÚC TRÌNH

Trên báo Toán học và tuổi trẻ đã giới thiệu về "cấu trúc đại số" (số 5/1967), "lí thuyết nhóm (số 8/1967) và cấu trúc trường qua bài "Ám hiệu giải trí" (số 2/1964). Bài này sẽ giới thiệu cấu trúc không gian vec-tơ, một cấu trúc đóng vai trò "trung tâm" trong toán học hiện đại.

Một tập hợp V gồm các phần tử x , y, z... sẽ gọi là một *không gian vec-tơ* trên trường số S nếu :

a) Trong V có xác định một phép toán trong, mà ta gọi là phép cộng, kí hiệu là o, và tập hợp V là một nhóm đối với phép cộng đó, tức là 4 tính chất sau đây được thỏa mãn

1. Phép cộng có tính chất kết hợp, nghĩa là xo $(y \text{ o } z) = (x \text{ o } y) \text{ o } z$ với mọi $x, y, z \in V$;

2. Trong V có phần tử trung hòa e, nghĩa là có e sao cho $e \text{ o } x = x \text{ o } e = x$ với mọi $x \in V$;

3. Với mọi $x \in V$ đều có phần tử đối xứng $x' \in V$ sao cho $x \text{ o } x' = x' \text{ o } x = e$;

4. Phép cộng có tính chất giao hoán, nghĩa là $x \text{ o } y = y \text{ o } x$ với mọi $x, y \in V$.

b) Trong V có xác định một phép toán ngoài mà ta gọi là phép nhân một phần tử thuộc V với một số thuộc S, (kết quả của phép nhân đó là một phần tử thuộc V). kí hiệu là . Phép nhân thỏa mãn 4 tính chất sau đây :

5. Phép nhân phân phối được đối với phép cộng trong V, tức là $k * (x \text{ o } y) = k * x \text{ o } k * y$, trong đó $k \in S$; $x, y \in V$;

6. Phép nhân phân phối được đối với phép cộng trong S, tức là $(k \text{ o } l) * x = k * x \text{ o } l * x$. với $k, l \in S$;

7. Phép nhân kết hợp được đối với phép nhân số, tức là $l * (k * x) = (l * k) * x$, với $k, l \in S$; $x \in V$;

8. $1 * x = x$ (1 là phần tử đơn vị của S).

Tám tính chất vừa liệt kê là tám tiên đề của cấu trúc không gian vec-tơ ; các phần tử x, y, z ... gọi là các "vec-tơ". Các bạn nên chú ý rằng từ "vec-tơ" ở đây có nội dung trừu tượng chứ không phải chỉ mang nội dung "đoạn thẳng định hướng" như trong sách toán ở trường phổ thông. Bất kì một tập hợp V nào với các phần tử $x, y, z...$, phép tính trong, phép tính ngoài cùng trường số S được hiểu một cách cụ thể như thế nào đấy mà thỏa mãn 8 tiên đề nói trên sẽ được gọi là *mô hình* của không gian vec-tơ trên trường số S.

Ta hãy xét một số ví dụ lấy trong sách toán trường phổ thông.

1) Hãy xem V là tập hợp các số thực R, S là trường số hữu tỉ Q, các phép cộng và nhân trong V như trong R, các bạn sẽ thấy rằng với cách hiểu như vậy thì tám tiên đề đã nêu đều được nghiệm đúng, tức *trường số thực R là không gian vec-tơ trên trường số hữu tỉ Q.*

Nếu lấy $V = S = R$, với phép cộng và phép nhân hiểu như trong R (phép toán ngoài trở thành phép toán trong), thì tám tiên đề đã nêu cũng được nghiệm đúng, *tức trường số thực R là không gian vec-tơ trên chính nó.*

Trong hai ví dụ này, số thực là "vec-tơ".

2) Hãy để ý đến tập hợp P các đa thức bậc hai chứa biến x $p_i = a_ix^2 + b_ix + c_i$, với $a_i, b_i, c_i \in R$.

Phép cộng các đa thức thuộc P và phép nhân đa thức với số thực được xác định như sau :

$$p_i \circ p_j\ (a_ix^2 + b_ix + c_i) + (a_j x^2 + b_jx + c_j) =$$
$$= (a_i + a_j)\ x^2 + (b_i + b_j)x + (c_i + c_j)\ ;$$
$$k * p_i = k\ (a_ix^2 + b_ix + c_i) =$$
$$= (ka_i)x^2 + (kb_i)x + (kc_i).$$

Các bạn hãy lần lượt thử nghiệm từng tiên đề một. Kết quả là tám tiên đề kể trên đều được nghiệm đúng, tức là *tập hợp P các đa thức dạng $a_ix^2 + b_ix + c_i$ là một không gian vec-tơ trên trường số R* ($a_i, b_i, c_i \in R$).

3) Hãy xét tập hợp H các hàm số vòng dạng $h_i = (a_i \sin t + b_i \cos t$, với $a_i, b_i \in$ R. Phép cộng và phép nhân được xác định như sau :

$$h_i \circ h_j = (a_i\sin t + b_i\cos t) + (a_j\sin t + b_j\cos t) =$$
$$= (a_i + a_j)\ \sin t + (b_i + b_j)\ \cos t\ ;$$
$$k * h_i = k\ (a_i\ \sin t + b_i\ \cos t) =$$
$$= (ka_i)\ \sin t + (kb_i)\cos t,\ \text{với}\ k \in R.$$

Dễ dàng thấy rằng *tập hợp H các hàm số vòng dạng $a_i \sin t + b_i\cos t$ là một không gian vec-tơ trên trường số thực R.*

Ở đây hàm số $a_i \sin t + b_i\cos t$ là "vec-tơ".

4) *Tập hợp V các vec-tơ* theo nghĩa thông thường của vec-tơ (đoạn thẳng định hướng) với phép cộng các vec-tơ và phép nhân vec-tơ với số thực *là không gian vec-tơ trên trường số thực R* (hoặc trên đường thẳng, hoặc trong mặt phẳng, hoặc trong không gian).

5) Chiều dài, diện tích, thể tích là các đại lượng vô hướng mà các bạn đã từng gặp trong giáo trình hình học. Nói chung cấu trúc những đại lượng vô hướng (kể cả chiều dương hoặc âm) là tập hợp L [o, *, >] gồm những phần tử $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}...$, trong đó có xác định phép toán trong, gọi là phép cộng kí hiệu là o và phép toán ngoài, gọi là phép nhân một phần tử thuộc L với số thực thuộc R, kí hiệu là *, đồng thời có quan hệ lớn hơn, lấy kí hiệu là >, thỏa mãn 5 tính chất sau đây.

α) Trong L có đại lượng $\bar{o}$ sao cho luôn luôn có $x * \bar{o} = \bar{o}$;

β) Ứng với mỗi $\bar{e} > \bar{o}$ có ánh xạ một-một f giữa $x \in R$ và $\bar{a} \in L$, sao cho $\bar{a} = x * \bar{e}$;

γ) Luôn luôn có $x * \bar{e} \circ y * \bar{e} = (x o y) * \bar{e}$

δ) Luôn luôn có $x*(y * \bar{e}) = (x * y) * \bar{e}$.

ε) $x, * \bar{e} > y * \bar{e}$ tương ứng với $x > y$ ($\bar{o}, \bar{e}$, a $\in L$; $x, y \in R$).

Ánh xạ f là phép đo các đại lượng vô hướng ; số x gọi là độ đo các đại lượng vô hướng (x có thể dương, âm hoặc bằng 0).

Từ 5 tính chất này có thể suy ra đầy đủ 8 tính chất của cấu trúc không gian vec-tơ (đề nghị các bạn tự chứng minh) tức là *tập hợp L các đại lượng vô hướng là một không gian vec-tơ trên trường số thực R.*

Trong trường phổ thông hiện nay chúng ta không để ý đến chiều của các đại lượng, nên lấy $|x|$ làm độ đo hoặc của chiều dài, hoặc của diện tích, hoặc của thể tích.

6) Nếu lấy tập hợp V gồm các "vec-tơ" $x, y, z,...$ và các điểm $A, B, C,...$, trong đó các vec-tơ, với phép toán cộng và phép nhân với số thực, thỏa mãn 8 tiên đề của cấu trúc không gian vec-tơ, đồng thời thỏa mãn thêm 6 tiên đề sau đây nữa thì ta có *không gian Oclit*. Sáu tiên đề đó là :

Với hai vec-tơ x, y bất kì thuộc V cho tương ứng với một số thực không âm, gọi là tích vô hướng giữa x và y, kí hiệu là xy sao cho :

9. $xy = yx$ với mọi $x, y \in V$;

10. $(x \circ y)z = xz + yz$ với mọi $x, y, z \in V$;

11. $(k * x)y = k(xy)$ với mọi $x, y \in V$; $k \in R$;

12. $xx \geq 0$ với mọi $x \in V$; $xx = 0$ khi và chỉ khi x là vec–tơ "không" ;

13. Với mọi điểm A và mọi vec–tơ x tồn tại một điểm B duy nhất sao cho $\overrightarrow{AB} = x$;

14. Luôn luôn có $\overrightarrow{AB} + BC = \overrightarrow{AC}$ mọi điểm $A, B, C, \in V$.

Xuất phát từ 14 tiên đề này có thể xây dựng toàn bộ hình học Oclit hiện đang học ở trường phổ thông. "Thực chất của truyền thống hình học Oclit là sự kế thừa khái niệm không gian vec–tơ có tích vô hướng mà Oclit đã để lại cho ta".

PHƯƠNG TRÌNH SAI PHÂN

LÊ ĐÌNH THỊNH

Phương trình sai phân là một loại phương trình có rất nhiều ứng dụng trong khoa học cơ bản và đặc biệt là trong khoa học thực hành. Nó là công cụ đắc lực để giải các bài toán phương trình vi phân, phương trình đạo hàm riêng trên máy tính điện tử và giải các phương trình đại số cấp cao, cùng nhiều ứng dụng trong các lĩnh vực khác nhau. Nội dung của bài này là giới thiệu sơ lược về phương trình sai phân và ứng dụng của nó trong lĩnh vực toán phổ thông như đoán nhận quy luật biểu diễn các dãy số, tính tổng các dãy số v.v..

Để có thể giới thiệu phương trình sai phân, trước hết ta cần biết sai phân là gì ? Thực ra mà nói thì có hai loại sai phân : sai phân hữu hạn và tỉ sai phân. Trong bài này ta dùng khái niệm sai phân hữu hạn và chữ sai phân trong bài này xin hiểu theo nghĩa sai phân hữu hạn.

Định nghĩa : Giả sử ta có hàm số $y = f(x)$. Giả sử rằng các giá trị của $f(x)$ tại các điểm x_0, $x_0 + h$, $x_0 + 2h$... $x_0 + nh$, ... (h = const) tương ứng là $y_0, y_1, ... y_n, ...$ ta gọi $\Delta y_i = y_i - y_i - 1$ là sai phân cấp 1 của hàm f, $V_i = 1, 2, ..., n, ...$ $\Delta^2 y_i = \Delta y_i - \Delta y_{i-1} = y_i - 2y_{i-1} + y_{i-2}$ là sai phân cấp 2 của hàm f với $i = 2, ..., n - 1$... Tương tự như thế ta định nghĩa sai phân các cấp cao hơn.

Sai phân có một số tính chất cơ bản rất thuận tiện trong việc giải các bài toán phổ thông. Các tính chất đó là :

1) Mọi sai phân đều có thể biểu diễn theo các giá trị của hàm số.

Thật vậy $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$; $\Delta^2 y_i = \Delta y_i - \Delta y_{i-1} = y_i - 2y_{i-1} + y_{i-2}$ v.v... tiếp theo có thể chứng minh bằng quy nạp.

2) Sai phân mọi cấp có tính chất tuyến tính tức là $\Delta^k(f \pm g) = \Delta^k f \pm \Delta^k g$. (Suy ra từ 1)

3) Sai phân cấp k của một đa thức bậc n

– bằng 0 khi $k > n$,

– bằng hằng số khi $k = n$,

– là đa thức bậc $n - k$ khi $k < n$.

Tính chất này chứng minh bằng quy nạp.

4) $$\sum_{i=1}^{n} \Delta y_i = y_1 - y_0 + y_2 - y_1 + ... + y_n - y_{n-1} =$$

$$= y_n - + y_0$$

Dựa vào các tính chất đó ta giải hàng loạt các bài toán quen thuộc.

Thí dụ 1 : Cho dãy số 3, 5, 10,... viết tiếp vào dãy số đó để hiệu các số kề nhau tăng lên một số như nhau. Giả thiết trong đầu bài có nghĩa là sai phân cấp 2 không đổi. Bởi vậy theo tính chất 3) dãy số này là các giá trị của một đa thức bậc 2 theo đối số là số thứ tự của các số trong dãy số. Mọi đa thức bậc 2 có dạng $ax^2 - bx + c$, trong đó x là đối số. Cho x các giá trị 0, 1, 2 (ta đánh số thứ tự từ 0), ta có hệ phương trình.

$$c = 3$$
$$a + b + 3 = 5$$
$$4a + 2b + 3 = 10.$$

Từ đó suy ra $a = \frac{3}{2}$, $b = \frac{1}{2}$, $c = 3$. Vậy những số viết tiếp phải tuân theo quy luật $\frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 3$. Chẳng hạn cho $x = 3, 4, 5$, ta sẽ được các số tiếp theo là 18, 29, 43,...

Thí dụ 2 : Cho dãy số 1, - 1, -1, 1, 5, 11, 19, 29, 41, 55. Tìm quy luật biểu diễn dãy số đó.

Để tìm quy luật biểu diễn ta lập bảng sai phân :

$y = f(x)$	1	−1	−1	1	5	11	19	29	41	55
Δy		−2	0	2	4	6	8	10	12	14
$\Delta^2 y$			2	2	2	2	2	2	2	2

Ta thấy sai phân cấp hai không đổi, vậy dãy số là dãy các giá trị của đa thức bậc hai $ax^2 + bx + c$, trong đó x là số thứ tự của các số trong dãy số. Cho $x = 0, 1, 2$ (đánh số thứ tự từ 0), ta nhận được hệ phương trình.

$$\begin{cases} c = 1 \\ a + b + 1 = -1 \\ 4a + 2b + 1 = -1 \end{cases}$$

Từ đó ta có $a = 1$, $b = -3$. Vậy dãy số đã cho tuân theo quy luật $x^2 - 3x + 1$, trong đó x là số thứ tự của các số, bắt đầu từ 0.

Thí dụ 3 : Tính tổng n số hạng của cấp số nhân

$$a_o, a_oq, a_oq^2, \ldots, a_oq^{n-1}$$

Tổng n số hạng trên có dạng $a_o(1 + q + \ldots + q^{n-1})$. Bởi vậy ta tính tổng trong ngoặc đơn là đủ.

Ta có

$\Delta q^k = q^k - q^{k-1} = q^k\left(1 - \frac{1}{q}\right)$. Từ đó

$$q^k = \frac{\Delta q^k}{1 - 1/q} = \frac{q}{q-1}\Delta q^k$$

Bởi vậy $\sum_{k=1}^{n-1} q^k = \sum_{k=1}^{n-1} \Delta q^k$

$$= \frac{q}{q-1}(q^{n-1} - q^o) = \frac{q}{q-1}(q^{n-1} - 1) =$$

$$= \frac{q^n - q}{q-1} \text{ (theo 4)}$$

Bởi vậy

$$\sum_{k=0}^{n-1} q^k = \sum_{k=1}^{n-1} q^k + 1 =$$

$$= \frac{q^n - q}{q-1} + 1 = \frac{q^n - 1}{q-1}.$$

Vậy tổng n số hạng của cấp số nhân đã cho là

$$S_n = a_o \frac{q^n - 1}{q-1}.$$

Thí dụ 4 : Tính $\sum_{x=1}^{n} x$, $\sum_{x=1}^{n} x^2$ ...

Ta có $\Delta x^2 = x^2 - (x-1)^2 = 2x - 1$. Bởi vậy

$$\sum_{x=1}^{n}(2x-1) = \sum_{x=1}^{n}\Delta x^2 = n^2 - 0^2 = n^2$$

(theo 4)

$$\sum_{x=1}^{n} 2x - \sum_{x=1}^{n} 1 = 2\sum_{x=1}^{n} x - n = n^2$$

Từ đó

$$\sum_{x=1}^{n} x = \frac{n^2 + n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

(Tổng n số nguyên đầu tiên).

Để tính tổng $\sum_{x=1}^{n} x^2$ ta xuất phát từ

$$\Delta x^3 = x^3 - (x-1)^3 = 3x^2 - 3x + 1$$

Do đó

$$\sum_{x=1}^{n}(3x^2 - 3x + 1) = \sum_{x=1}^{n}\Delta x^3 = n^3$$

$$\sum_{x=1}^{n}(3x^2 - 3x + 1) =$$

$$= 3\sum_{x=1}^{n} x^2 - 3\sum_{x=1}^{n} x + \sum_{x=1}^{n} 1 =$$

$$= 3\sum_{x=1}^{n} x^2 - 3\frac{n(n+1)}{2} + n = n^3$$

Từ đó

$$\sum_{x=1}^{n} x^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

(Tổng bình phương n số nguyên đầu tiên)

Bài tập : Theo mẫu của thí dụ 4, hãy tính

$$\sum_{x=1}^{n} x^k \qquad k = 3, 4, 5...$$

Thí dụ 5 : Tính tổng sinx + sin2x + ... + + sin*n*x.

Ta có

$$\Delta\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)x =$$

$$= \cos\left(k+\frac{1}{2}\right)x - \cos\left(k-\frac{1}{2}\right)x =$$

$$= -2\sin kx \sin\frac{x}{2}$$

Từ đó $\sin kx = -\dfrac{\Delta\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}$, và theo 4) ta có :

$$\sum_{k=1}^{n}\sin kx = -\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\sum_{k=1}^{n}\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)x =$$

$$= -\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left[\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x - \cos\frac{x}{2}\right] =$$

$$= -\frac{-2\sin\frac{n+1}{2}x\sin\frac{n}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}} =$$

$$= \frac{\sin\frac{n+1}{2}x\sin\frac{n}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}$$

Bài tập : Tính tổng cosx + cos2x + ... + cosnx.

Trên đây ta đã nghiên cứu các tính chất của sai phân và nhân tiện áp dụng chúng để giải một số bài toán quen thuộc. Bây giờ ta chuyển sang làm quen với phương trình sai phân. Vậy thì phương trình sai phân là gì ? Phương trình sai phân là một hệ thức giữa sai phân các cấp :

$$F(y, \Delta y, \Delta^2 y, ..., \Delta^k y, ...,) = 0 \qquad (1)$$

(y xem như sai phân cấp 0).

Vì sai phân các cấp đều có thể hiểu diễn theo các giá trị của hàm số (tính chất 1) nên (1) tương đương với

$$a_n y_{n+i} + a_{n-1} y_{n-1+i} + ... + a_1 y_{1+i} + a_o y_i = f \quad (2)$$

Nếu các hệ số $a_o, a_1, ..., a_n$ là các hằng số thì (2) gọi là phương trình sai phân tuyến tính cấp *n*.

Nếu f = 0 thì ta gọi (2) là phương trình sai phân thuần nhất. Nếu cả $a_o, a_1, ..., a_n$ là hằng số và $f = 0$ thì ta gọi (2) là phương trình sai phân tuyến tính thuần nhất cấp *n*. Để giải (2) ta cần cho trước *n* giá trị ban đầu $y_o, y_1, ..., y_{n-1}$, rồi theo công thức truy toán ta tính tất cả các giá trị $y_n, y_{n+1}...$ Bởi vậy (2) gọi là phương trình sai phân cấp *n*.

Để tìm nghiệm tổng quát của phương trình sai phân tuyến tính cấp *n* ta dựa vào các định lí sau :

Định lí 1 : Nếu $\bar{y}_i, \bar{y}_{i+1}, ..., \bar{y}_{i+n}$ là nghiệm của phương trình sai phân tuyến tính thuần nhất, $\tilde{y}_i, \tilde{y}_{i+1} ... \tilde{y}_{i+n}$ cũng là nghiệm của phương trình đó thì

$\bar{y}_i \pm \tilde{y}_i, \bar{y}_i \pm \tilde{y}_{i+1}, ..., \bar{y}_{i+n} \pm \tilde{y}_{i+n}$ cũng là nghiệm của phương trình thuần nhất.

Chứng minh : Do $\bar{y}_i, \bar{y}_{i+1}, ..., \bar{y}_{i+n}$ và $\tilde{y}_i, \tilde{y}_{i+1} ... \tilde{y}_{i+n}$ là nghiệm nên ta có :

$$a_n\bar{y}_{i+n} + ... + a_o\bar{y}_i = 0$$

$$a_n\tilde{y}_{i+n} + ... + a_o\tilde{y}_i = 0$$

$$a_n(\bar{y}_{i+n} \pm \tilde{y}_{1+n} + ... + a_o(\bar{y}_i \pm (\bar{y}_i \pm \tilde{y}_i) = 0$$

Từ đó suy ra $\bar{y}_i$ +− $\tilde{y}_i$, ..., $\bar{y}_{i+n} \pm \tilde{y}_{i+n}$ là nghiệm của phương trình .

Định lí 2 : Nghiệm tổng quát của phương trình sai phân tuyến tính thuần nhất có dạng

$$y_i = c_1\lambda_1^i + c_1\lambda_2^i + c_n\lambda_n^i$$

trong đó $c_1, c_2, ..., c_n$ là các hằng số tùy ý, còn $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ là *n* nghiệm phân biệt của phương trình

$$a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + a_1\lambda + a_o = 0 \quad (3)$$

Phương trình này gọi là phương trình đặc trưng của (2). (Ta không xét trường hợp nghiệm phức vì trong các ứng dụng giới thiệu ở dưới ta chỉ dùng trường hợp nghiệm thực) Nếu (3) có nghiệm λ_1 bội s chẳng hạn thì

$$y_i = c_1 \lambda_1^i + c_2 i\lambda_1^i + c_3 i^2 \lambda_1^i + \ldots + c_s i^{s-1} \lambda_1^i + c_{s+1}\lambda_{s+1}^i + \ldots c_n \lambda_n^i$$

Chứng minh : Thay y_i vào phương trình (2) và chú ý (3).

Định lí 3 : Nếu $\tilde{y}_i$ là nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất và Y là nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất thì nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất có dạng

$$y_i = c\tilde{y}_i + Y$$

Chứng minh. Thay y_i vào (2) và chú ý Y là nghiệm riêng còn y_i là nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất.

Thí dụ 6 : Tìm công thức số hạng tổng quát a_n của cấp số nhân với công bội là q.

Theo định nghĩa $a_n = a_{n-1} + q$. Đặt $a_n = y_n$ ta có phương trình sai phân $y_n - qy_{n-1} = 0$. Phương trình đặc trưng của nó có dạng

$\lambda - q = 0 \Rightarrow \lambda = q$. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình sai phân có dạng $y_n = c.q^n$. Do $y_1 = a_1$ nên $cq = a_1$. Từ đó $c = a_1/q$ và $y_n = a_1 q^{n-1}$. Vậy số hạng tổng quát của cấp số nhân công bội q có dạng

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

Thí dụ 7 : Tìm công thức của số hạng tổng quát a_n của cấp số cộng với công sai d.

Theo định nghĩa $a_n = a_{n-1} + d$. Gọi $a_n = y_n$ ta có phương trình sai phân $y_n = y_{n-1} + d$. Phương trình đặc trưng của phương trình sai phân thuần nhất có dạng $\lambda - 1 = 0$ hay $\lambda = 1$.

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là $y_n = c$. Ta tìm nghiệm riêng dưới dạng $Y_n = kn$. Thay vào phương trình sai phân ta có

$$kn = k(n-1) + d, \text{ suy ra } k = d$$

Bởi vậy nghiệm tổng quát của phương trình sai phân không thuần nhất là $y_n = c + dn$. Do $y_1 = a_1$ nên $c + d = a_1 \Rightarrow c = a_1 - d$. Vậy số hạng tổng quát của cấp số cộng là $a_n = y_n = a_1 - d + dn = a_1 + (n-1)d$.

Xem vậy thì cấp số cộng và cấp số nhân chỉ là trường hợp đặc biệt của phương trình sai phân mà thôi.

Thí dụ 8 : Trong THTT số 9 - 10 năm 1973 có bài toán như sau : Biết rằng các số đầu tiên của dãy số $u_o, u_1, \ldots, u_n, \ldots$ là $u_o = 0$, $u_1 = 1$ và với $n > 1$ thì $u_n = \alpha u_{n-1} + \beta u_{n-2}$, α, β là các số thực tùy ý và $\beta > 0$. Tìm dạng tổng quát của u_n.

Xem $u_n = \alpha u_{n-1} + \beta u_{n-2}$ là phương trình sai phân.

Phương trình đặc trưng tương ứng có dạng

$$\lambda^2 - \alpha\lambda - \beta = 0 \Rightarrow \lambda = (\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 4\beta})/2.$$

Do $\beta > 0$ nên phương trình có 2 nghiệm phân biệt. Vậy

$$u_n = c_1((\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4\beta})/2)^n + c_2((\alpha - \sqrt{\alpha^2 + 4\beta})/2)^n.$$

Khi $n = 0$ và $n = 1$ ta có

$$c_1 + c_2 = 0$$

$$((\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4\beta})/2)c_1 + ((\alpha - \sqrt{\alpha^2 + 4\beta})/2)c_2 = 1.$$

Từ đó ta có

$$c_1 = -c_2 = 1/(\sqrt{\alpha^2 + 4\beta}).$$

Vậy

$$u_n = [\,1/\sqrt{\alpha^2 + 4\beta})\times$$
$$[((\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4\beta})/2)^n - ((\alpha - \sqrt{\alpha^2 + 4\beta})/2)^n$$

Thí dụ 9 : Trong số báo THTT 11 - 12 năm 1973 có bài toán : Tìm dãy số biết

$$u_n = 7u_{n-1} - 11u_{n-2} + 5u_{n-3}$$
$$u_o = 0,\ u_1 = 1,\ u_2 = 3.$$

Phương trình đặc trưng tương ứng có dạng

$$\lambda^3 - 7\lambda^2 + 11\lambda - 5 = 0$$

hay $(\lambda - 1)^2(\lambda - 5) = 0$. Từ đó $\lambda_1 = 1$ bội 2 và $\lambda_3 = 5$.

Bởi vậy $u_n = c_1 + c_2 n + c_3 5^n$. Khi $n = 0, 1, 2$, ta có

$$\left.\begin{array}{r} c_1 + c_3 = 0 \\ c_1 + c_2 + 5c_3 = 1 \\ c_1 + 2c_2 + 25c_3 = 3 \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow c_1 = -1/16$, c_2 3/4.

$c_3 = 1/16$

Vậy $u_n - (5^n - 1)/16 + 3n/4$.

Trên đây là một số ứng dụng của sai phân và phương trình sai phân vào các bài toán chúng ta quen biết. Tất nhiên ta cũng có thể dùng để giải nhiều bài toán quen thuộc khác và cũng có thể đi xa hơn nữa. Để kết thúc mời các bạn giải thử các bài toán sau đây bằng phương pháp sai phân :

1. Tìm dãy số u_n, biết $u_n = 4u_{n-1} - 5u_{n-2} + 2u_{n-3}$ và $u_o = u_1 = 0$, $u_2 = 1$.

2. Viết biểu thức các đa thức Trêbưsep $T_n(x)$ với $n = 4, 5, 6\ldots$ biết rằng

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x),$$
$$T_o(x) = 1,\ T_1(x) = x.$$

3. Công thức sau đây gọi là công thức lấy tổng từng phần :

$$\sum_{x=1}^{n} u\Delta v = u(n)v(n) - u(o)v(o)$$
$$- \sum_{x=1}^{n} v(x-1)\Delta u(x).$$

Áp dụng công thức đó :

a) Tính $\sum_{x=1}^{n} xa^x$

b) Chứng minh rằng

$$\sum_{x=1}^{n} (1/2^k sin \quad =$$
$$= \frac{2sinx - 2^{-n}|2\sin(n+1)x - sinnx|}{1 + 8sin^2(x/2)}$$

PHƯƠNG TRÌNH PELL

PHAN ĐỨC CHÍNH

1. Bài toán mở đầu

Năm 1974, trong kì thi tuyển vào lớp bồi dưỡng của Bộ Giáo dục tổ chức để chuẩn bị thi toán quốc tế lần thứ 16 có bài toán sau đây :

Tìm tất cả các nghiệm nguyên dương (x, y) của phương trình

$$x^2 - 2y^2 = 1 \qquad (1)$$

thỏa mãn điều kiện $80 < x < 120$.

Do điều kiện hạn chế : $80 < x < 120$, ta có thể mường tượng một cách giải thô thiển như sau. Tính x^2 với $x = 81, 82, 83\ldots 119$, sau đó kiểm nghiệm trong 39 số chính phương đã tính được, xem số nào có dạng $1 + 2y^2$ (y nguyên dương), thì tìm ra lời giải. Cách giải này đòi hỏi cả thảy 39 phép thử, hoặc nếu tinh ý hơn, có thể rút xuống 20 phép thử (cho các số $x = 81, 83, \ldots, 117, 119$). Như vậy cách giải ấy hoàn toàn có thể thực hiện được, miễn là có thời gian rộng rãi, nhất là có trong tay một bảng bình phương của các số từ 1 đến 120.

Nhưng trong phòng thi, đâu có điều kiện thuận lợi ấy. Thành thử đã có nhiều học sinh phải bỏ bài toán trên.

Sau đây là một cách giải khá gọn. Trước hết, ta hãy để ý rằng nếu cặp số nguyên dương (x, y) là một nghiệm của phương trình (1), thì x phải là một *số lẻ* và (1) tương đương với

$$(x - 1)(x + 1) = 2y^2 \qquad (2)$$

Xét các số $x - 1$ và $x + 1$. Đây là hai số chẵn liên tiếp vì vậy ước chung lớn nhất của chúng bằng 2, nếu $x - 1 > 0$.

Ta hãy xét chẳng hạn $x - 1$, với giả thiết $x - 1 > 0$. Gọi p là một ước nguyên tố lẻ của $x - 1$, thì từ (2) suy ra rằng p là một ước của y^2, mà p nguyên tố, vậy p là một ước của y, do đó y^2 chia hết cho p^2. Lại từ (2) suy ra rằng $(x - 1)(x + 1)$ phải chia hết cho p^2, nhưng p đã là ước của $x - 1$ rồi nên p không thể là ước của $x + 1$, thành thử $x - 1$ phải chia hết cho p^2.

Dĩ nhiên lập luận trên cũng áp dụng được cho $x + 1$.

Từ đó ta thấy rằng nếu (x, y) là một nghiệm nguyên dương của phương trình (1), hay (2), và nếu $x > 1$, thì $x - 1$ và $x + 1$ là hai số chẵn liên tiếp, có cùng tính chất sau : nếu một số ấy chia hết cho một số nguyên tố lẻ p, thì nó phải chia hết cho p^2.

Trong các số chẵn từ 80 đến 120, chỉ có 3 số chẵn có tính chất đã nêu : 98, 100, 108. Số 90 không có tính chất ấy vì 90 chia hết cho 5 nhưng không chia hết 25. Ta lại cần

2 số chẵn liên tiếp với tính chất đã kể ; vì vậy chỉ có một giá trị $x = 99$ (để có $x - 1 = 98$, $x + 1 = 100$) may ra mới có thể chấp nhận được. Thử lại ta thấy rằng với $x = 99$ ta có

$$(x - 1)(x + 1) = 98.100 = 2(70)^2$$

Thành thử bài toán đã cho có một *nghiệm duy nhất* là $x = 99$, $y = 70$.

Cách giải trên là một ví dụ minh họa cho nhiều bài toán (không những chỉ trong toán học mà còn trong nhiều lĩnh vực khác) giải được bằng phép thử : cần biết sử dụng suy luận để đưa những phép thử phức tạp về những phép thử đơn giản hơn, cũng như để giảm bớt một cách đáng kể số các phép thử cần thiết.

Đến đây bạn đọc có thể đồng tình thống nhất với chúng tôi rằng có thể áp dụng cách giải ở trên để giải bài toán :

(A) *Tìm tất cả các nghiệm nguyên dương (x, y) của phương trình (1) thỏa mãn điều kiện* $1 < x < 1.000.000.000$. Nhưng thật ra ở đây khả năng thực hiện chỉ là về mặt... nguyên tắc, bởi vì số phép thử cần thiết vẫn nhiều quá ! Cũng như đối với trường hợp bài toán : tìm tất cả các số nguyên tố $p < 1.000.000.000$! Và mặc dù có máy tính điện tử, các nhà toán học vẫn không thích giải bằng phép thử bài toán (A), cũng như bài toán tìm các số nguyên tố.

Nhà toán học Vander Corput đã có lần nói đùa rằng : khi không giải được một bài toán dễ và cụ thể, thì người làm toán lại hi vọng tìm được lời giải cho một bài toán khó hơn và trừu tượng hơn !

Ít ra câu nói đó có thể ứng dụng vào trường hợp bài toán (A) đang xét. Vậy thì ta hãy đề cập đến bài toán khó hơn : *Tìm tất cả các nghiệm nguyên dương (x, y) của phương trình* (1).

Nhưng để giải được bài toán khó này, ta cần phải lập luận theo kiểu khác.

2. Phương trình Pell

Phương trình (1) là một trường hợp riêng của phương trình số học tổng quát.

$$x^2 - Dy^2 = 1 \qquad (3)$$

trong đó D là một số nguyên dương cho trước. Giải phương trình số học (3) là tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn phương trình ấy. Vì x và y có mặt ở vế trái của (3) dưới dạng bình phương, nên ta có thể hạn chế ở việc tìm các nghiệm (x, y) nguyên và không âm.

Hiển nhiên rằng $x = 1$, $y = 0$ là một nghiệm, gọi là nghiệm tầm thường của phương trình (3). Vì vậy, ta chỉ còn phải tìm tất cả các nghiệm không tầm thường (tức là với x, y nguyên dương) của phương trình ấy.

Nếu trong phương trình (3) D là một số chính phương $D = k^2$ với k nguyên dương, thì (3) chỉ có nghiệm tầm thường. Quả vậy khi đó phương trình (3) có dạng.

$$x^2 - (ky)^2 = 1$$

mà hiệu của hai số chính phương chỉ có thể bằng 1 khi hai số chính phương ấy là 1 và 0, bởi vậy ta có

$$x^2 = 1,\ (ky)^2 = 0 \qquad x = 1,\ y = 0.$$

Như vậy ta có thể kết luận rằng *điều kiện cần để phương trình số học (3) có nghiệm không tầm thường, là D không phải là một số chính phương.*

Phương trình số học (3) với D không phải là một số chính phương, được gọi là phương trình Pell.

Người ta chứng minh rằng *phương trình Pell (3) (với D không phải là một số chính phương) luôn luôn có nghiệm không tầm thường.* Có nhiều cách chứng minh kết quả này, một trong các cách ấy là sử dụng lí thuyết liên phân số có lần đã được trình bày trên Báo Toán học và Tuổi trẻ(*). Vì vậy trong khuôn khổ bài báo này, đề nghị với bạn đọc chấp nhận sự tồn tại của ít nhất một nghiệm không tầm thường của phương trình Pell (3) với D không phải là một số chính phương.

Dựa trên sự tồn tại ấy, bằng những lí luận hoàn toàn sơ cấp, ta có thể xác định được cấu trúc của tất cả các nghiệm của phương trình Pell (3), ứng với một số D cố định (D nguyên dương và không phải là số chính phương).

Để kết thúc đoạn này và cũng để các bạn đọc yên tâm chấp nhận sự tồn tại của nghiệm không tầm thường của phương trình

(*) Bài "Liên phân số" của Lại Đức Thịnh và Nguyễn Tiến Tài, TH và TT số 45, tháng 11 – 12 năm 1968

Pell (3) chúng tôi xin chỉ ra một nghiệm không tầm thường của (3) ứng với các giá trị nhỏ của D (cụ thể là $D \leq 12$).

Bảng 1

D	Phương trình	x_1	y_1
2	$x^2 - 2y^2 = 1$	3	2
3	$x^2 - 3y^2 = 1$	2	1
5	$x^2 - 5y^2 = 1$	9	4
6	$x^2 - 6y^2 = 1$	5	2
7	$x^2 - 7y^2 = 1$	4	3
8	$x^2 - 8y^2 = 1$	3	1
10	$x^2 - 10y^2 = 1$	19	6
11	$x^2 - 11y^2 = 1$	10	3
12	$x^2 - 12y^2 = 1$	7	2

Đây là các nghiệm *nhất nhỏ* (theo nghĩa sẽ nêu trong hệ quả 2 mệnh đề 3, mục 3) của phương trình Pell tương ứng. Việc tìm các nghiệm này, với các giá trị nhỏ của D không có gì khó khăn : nếu (x, y) là một nghiệm nguyên dương của phương trình (3), thì ta có

$$1 + Dy^2 = x^2$$

nên ta có thể thử dần với các giá trị $y = 1, 2, \ldots$

3. Cấu trúc của các nghiệm

Giả thiết rằng (x, y) là một nghiệm của phương trình Pell (3), tức là ta có

$$1 = x^2 - Dy^2 = (x + y\sqrt{D})(x - y\sqrt{D}) \quad (4)$$

Vì D không phải là số chính phương, nên $\sqrt{D}$ là một số vô tỉ, do đó số

$$\alpha = x + y\sqrt{D}$$

là một số vô tỉ. Gọi α' là số vô tỉ liên hợp (toàn phương) của α, tức là $\alpha = x - y\sqrt{D}$, thì theo (4), ta có

$$\alpha\alpha' = 1.$$

Ngược lại, giả thử rằng α là một số vô tỉ có dạng $\alpha = x + y\sqrt{D}$ với x, y nguyên dương và sao cho $\alpha\alpha' = 1$, thì rõ ràng (x, y) là một nghiệm nguyên dương của phương trình (3).

Nhờ sự tương ứng này, ta thấy rằng thay cho việc tìm tất cả các nghiệm nguyên dương (x, y) của phương trình (3) ta chỉ việc tìm tất cả các phần tử của tập hợp.

P = $\{\alpha = x + y\sqrt{D}$, với x nguyên dương và sao cho $\alpha\alpha' = 1\}$

Cần nhớ lại ta đã chấp nhận rằng **P** có ít nhất một phần tử, tức là **P** không rỗng.

Mệnh đề 1.

Giả thử $\alpha = x + y\sqrt{D} \in \mathbf{P}$ và $\beta = u + v\sqrt{D} \in \mathbf{P}$. Thế thì $\alpha = \beta$ khi và chỉ khi $x = u$.

Chứng minh.

Vì $x^2 - Dy^2 = 1 = u^2 - Dv^2$,

nên ta có

$$x^2 - u^2 = D(y^2 - v^2) \quad (5)$$

Nếu $x = u$, thì từ (5) suy ra $y^2 = v^2$, hay $y = v$. Vì vậy $\alpha = x + y\sqrt{D} = u + v\sqrt{D} = \beta$. Ngược lại, nếu $\alpha = \beta$, tức là nếu

$$x + y\sqrt{D} = u + v\sqrt{D}$$

với $\sqrt{D}$ vô tỉ và x, y, u, v nguyên dương, thì $\alpha' = \beta'$, vậy $x = \frac{1}{2}(\alpha + \alpha') = 0$

$$= \frac{1}{2}(\beta + \beta') = u.$$

Mệnh đề 2. Giả sử $\alpha = x + y\sqrt{D} \in \mathbf{P}$ và $\beta = u + v\sqrt{D} \in \mathbf{P}$. Thế thì $\alpha\beta \in \mathbf{P}$.

Chứng minh. Ta có

$$\alpha\beta = (x + y\sqrt{D})(u + v\sqrt{D}) =$$
$$= (xu + Dyv) + (xv + yu)\sqrt{D}$$

với $xu + Dyv$ và $xv + yu$ nguyên dương. Đồng thời

$$(\alpha\beta)' = (xu + Dyv) - (xv + yu)\sqrt{D}$$
$$= (x - y\sqrt{D})(u - v\sqrt{D}) = \alpha'\beta',$$

vì vậy

$$(\alpha\beta)\,(\alpha\beta)' = \alpha\beta\,\alpha'\beta' = (\alpha\alpha')\,(\beta\beta') = 1$$

Điều đó chứng tỏ rằng $\alpha\beta \in \mathbf{P}$.

Hệ quả 1. Tập hợp **P** có vô số phần tử, nói cách khác, phương trình Pell (3) có vô số nghiệm nguyên dương,.

Chứng minh. Vì **P** không rỗng, nên **P** phải chứa ít nhất một phần tử $\alpha = x + y\sqrt{D}$. Vì x, y nguyên dương nên $\alpha > 1$. Khi đó

$$\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \ldots \alpha^n, \ldots$$

là những số khác nhau, và theo mệnh đề 2, tất cả các số ấy đều thuộc **P**.

Mệnh đề 3. Giả thử $\alpha = x + y\sqrt{D} \in \mathbf{P}$ và $\beta = u + v\sqrt{D} \in \mathbf{P}$. Khi đó các mệnh đề sau đây là tương đương :

(a) $x < u$;

(b) $\alpha < \beta$;

(c) $\gamma = \alpha/\beta \in \mathbf{P}$.

Chứng minh.

(a) ⇒ (b). Từ (5) suy ra rằng nếu $x < u$ thì $y < v$, do đó $\alpha = x + y\sqrt{D} < u + v\sqrt{D} = \beta$.

(b) ⇒ (c). Giả thử $\alpha < \beta$. Thế thì vì $\alpha\alpha' = 1$, nên

$$\gamma = \beta/\alpha = \beta\alpha' = (u + v\sqrt{D})(x - y\sqrt{D})$$
$$= (ux - vyD) + (vx - uy)\sqrt{D},$$

với $ux - vyD$ và $vx - uy$ là những số nguyên. Hơn nữa, rõ ràng

$$u > v\sqrt{D} \text{ và } x > y\sqrt{D}.$$

Vì vậy $ux > vyD$, hay $ux - vyD$ là một số nguyên dương.

Mặt khác

$$\gamma' = (ux - vyD) - (vx - uy)\sqrt{D}$$
$$= (u - v\sqrt{D})(x + y\sqrt{D}) = \beta'\alpha',$$

bởi vậy

$$\gamma\gamma' = \beta\alpha' \,.\, \beta'\alpha = (\alpha\alpha')(\beta\beta') = 1.$$

Vì $\beta > \alpha$, nên $\gamma > 1$, từ đó suy ra $\gamma' < 1$. Nếu $vx - uy \leqslant 0$, thì từ các biểu thức của γ và γ', ta suy ra $\gamma \leqslant \gamma'$, điều này vô lí. Thành thử $vx - uy$ là một số nguyên dương, và $\gamma \in \mathbf{P}$.

(c) ⇒ (a). Giả thử $\beta = \alpha\gamma$, với $\gamma = p + q\sqrt{D} \in \mathbf{P}$. Thế thì

$$u + v\sqrt{D} = (x + y\sqrt{D})(p + q\sqrt{D}) =$$
$$= (xp + Dyq) + (xq + yp)\sqrt{D},$$

từ đó suy ra $u = xp + Dyq$, vậy $u > x$.

Hệ quả 2. Tập hợp **P** có số nhỏ nhất.

Chứng minh. Do sự tương đương giữa (a) và (b) đã nêu lên trong mệnh đề 3, để so sánh hai số $\alpha = x + y\sqrt{D} \in \mathbf{P}$ và $\beta = u + v\sqrt{D} \in \mathbf{P}$, ta chỉ cần so sánh các số nguyên dương x và u mà ta gọi là "phần đầu" của các số ấy. Xem các phần đầu của tất cả các số thuộc **P** : Ta được một tập hợp những số nguyên dương. Tập hợp này có số nhỏ nhất x_1. Khi đó số $\alpha_1 = x_1 + y_1\sqrt{D} \in \mathbf{P}$ tương ứng với x_1, là số nhỏ nhất của **P**.

Khi đó ta cũng có thể nói rằng (x_1, y_1) là nghiệm nguyên dương nhỏ nhất của phương trình Pell (3).

Mệnh đề 4. Mọi số $\alpha \in \mathbf{P}$ đều là một lũy thừa nào đó của số nhỏ nhất $\alpha_1 \in \mathbf{P}$.

Chứng minh. Vì $\alpha_1 > 1$ nên dãy

$$\alpha_1, \alpha_1^2, \alpha_1^3, \ldots, \alpha_1^n, \ldots$$

tăng vô hạn. Bởi vậy, nếu α là một số tùy ý của **P**, thì tồn tại một số nguyên dương n sao cho

$$\alpha_1^n \leqslant \alpha < \alpha_1^{n+1}$$

Nếu $\alpha_1^n < \alpha < \alpha_1^{n+1}$, thì theo mệnh đề 3, $\alpha/\alpha_1^n \in \mathbf{P}$, nhưng $\alpha/\alpha_1^n < \alpha_1$, điều này trái với giả thiết α_1 là số nhỏ nhất của **P**

Vì vậy ta phải có $\alpha = \alpha_1^n$.

Mệnh đề 4 cho ta thấy cấu trúc của các nghiệm của phương trình Pell (3). Quả vậy, gọi (x_1, y_1) là các nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình ấy. Ta có thể sắp xếp tất cả các nghiệm của phương trình này theo thứ tự phần đầu của chúng

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n), \ldots$$

Thế thì

$$x_n + y_n\sqrt{D} = (x_1 + y_1\sqrt{D})^n \ (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

Ví dụ. Trở lại phương trình (1)

$$x^2 - 2y^2 = 1,$$

ta thấy rằng theo bảng 1, nghiệm nhỏ nhất của phương trình là $(x_1, y_1) = (3, 2)$. Các nghiệm đi sau của phương trình là

$$x_2 + y_2\sqrt{2} = (3 + 2\sqrt{2})^2 = 17 + 12\sqrt{2},$$
$$x_3 + y_3\sqrt{2} = (3 + 2\sqrt{2})^3 = 99 + 70\sqrt{2},$$
$$x_4 + y_4\sqrt{2} = (3 + 2\sqrt{2})^4 = 577 + 408\sqrt{2},$$
$$x_5 + y_5\sqrt{2} = (3 + 2\sqrt{2})^5 = 3363 + 2378\sqrt{2},$$
$$\ldots$$

Thành thử với $0 < x < 120$, ta có nghiệm $(x, y) = (99, 70)$.

KHÁI NIỆM TRỌNG TÂM VÀ ỨNG DỤNG TRONG HÌNH HỌC

TẠ VĂN TỰ

Chúng ta đã biết cách chứng minh hệ thức Ole : $d^2 = R^2 - 2Rr$, trong đó R, r là bán kính các đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp và $d = OI$ là khoảng cách giữa các tâm O và I của các đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp một tam giác bằng khái niệm phương tích của một điểm đối với một đường tròn. Trong bài này sẽ đưa ra một cách chứng minh khác khá ngắn gọn, đồng thời nêu lên một số ứng dụng khác quan trọng bằng cách sử dụng khái niệm trọng tâm của một hệ chất điểm

Cho một hệ m chất điểm $A_1, ..., A_m$ với các khối lượng tương ứng là $a_1, ..., a_m$. Điểm O được xác định bởi :

$$\overrightarrow{MO} = \frac{a_1\overrightarrow{MA}_1 + \ldots + a_m\overrightarrow{MA}_m}{a_1 + a_2 + \ldots + a_m} \qquad (1)$$

trong đó M là một điểm tùy ý được gọi là *trọng tâm* của hệ chất điểm này. Hệ thức (1) có thể viết gọn là :

$$\overrightarrow{MO} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i\overrightarrow{MA}_i \text{ với}$$

$$\alpha_i = a_i/(a_1 + a_2 + \ldots + a_m) \qquad (2)$$

Với cách đặt như vậy, ta có $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1$ (3)

Từ (1) lấy $M \equiv O$ ta có

$$a_1\overrightarrow{OA}_1 + \ldots + a_m\overrightarrow{OA}_m = \vec{0}. \qquad (4)$$

Ngược lại với M tùy ý, từ (4) ta có

$$a_1(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MA}_1) + \ldots + a_m(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MA}_m) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow (a_1 + \ldots + a_m)\overrightarrow{OM} + a_1\overrightarrow{MA}_1 + \ldots + a_m\overrightarrow{MA}_m = \vec{0}.$$

Vậy (1) và (4) tương đương với nhau.

Rõ ràng định nghĩa trọng tâm như trên là duy nhất. Thực vậy giả sử còn có trọng tâm $O' \neq O$ nữa. Từ (1), lấy $M \equiv O'$ ta có : $\overrightarrow{O'O} = \sum_{i=1}^{m} a_i\overrightarrow{O'A}_1 / \sum_{i=1}^{m} a_i$. Vế trái hệ thức này khác $\vec{0}$ còn vế phải bằng $\vec{0}$ do $\sum_{i=1}^{m} a_i\overrightarrow{O'A} = \vec{0}$ vì theo (4) mà O' là trọng tâm. Vậy vô lí.

Tính chất sau đây cho ta cách thực hành xác định trọng tâm của một hệ chất điểm bất kì.

Gọi O_1 là trọng tâm của m chất điểm $A_1, \ldots A_m$ với khối lượng tương ứng $a_1, \ldots, a_m$. Gọi O_2 là trọng tâm của n chất điểm $B_1, \ldots, B_n$ với các khối lượng tương ứng $b_1, \ldots, b_n$. Khi đó trọng tâm O của m + n chất điểm A_i, B_j (với $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots n$) thẳng hàng với O_1, O_2 và chia đoạn O_1O_2 theo tỉ số

$$OO_1 : OO_2 = \sum_{j=1}^{n} b_j / \sum_{i=1}^{m} a_j \qquad (5)$$

Thực vậy, theo (4) ta có :

$$\sum_{i=1}^{m} a_i\overrightarrow{OA}_i + \sum_{j=1}^{n} b_jOB_j = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{m} a_i(\overrightarrow{OO}_1 + \overrightarrow{O_1A}_i) + \sum_{j=1}^{n} b_j(\overrightarrow{OO}_2 + \overrightarrow{O_2B}_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} a_1\overrightarrow{OO}_1 + \sum_{i=1}^{m} a_i\overrightarrow{O_1A}_i +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} b_j\overrightarrow{OO}_2 + \sum_{j=1}^{n} b_jO_2B_j = \vec{0}.$$

Với chú ý giả thiết về O_1, O_2, theo (1) ta có

$$\sum_{i=1}^{m} a_i\overrightarrow{O_1A}_i = \vec{0}, \sum_{j=1}^{n} b_j\overrightarrow{O_2B}_j = \vec{0}, \text{ nên ta có :}$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_i\overrightarrow{OO}_1 + \sum_{j=1}^{n} b_j\overrightarrow{OO}_2 = \vec{0}$$

Vậy O, O_1, O_2 thẳng hàng và về độ dài hình học ta có $OO_1 : OO_2 = \sum_{j=1}^{n} b_j / \sum_{i=1}^{m} a_i$ (*đpcm*).

Từ (2) có

$$(\vec{MO})^2 = \Big(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \vec{MA_i}\Big)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^2 MA_i^2 + 2\sum_{1 \le i < j \le m} \alpha_i\alpha_j \vec{MA_i}\vec{MA_j}$$

Vì $2\vec{MA_i}.\vec{MA_j} =$

$$= MA_i^2 + MA_j^2 - (\vec{MA_j} - \vec{MA_i})^2$$

$= MA_i^2 + MA_j^2 - A_iA_j^2$ nên

$$MO^2 = \sum_{i=1}^{m} \alpha_1^2 MA_1^2 + \sum_{1 \le i < j \le m} \alpha_i\alpha_j \, MA_i^2 +$$

$$+ \sum_{1 \le i < j \le m} \alpha_i\alpha_j \, MA_j - \sum_{1 \le i < j \le n} \alpha_i\alpha_j \, A_iA_j^2$$

Do có thể viết

$$\sum_{1 \le i < j \le m} \alpha_i\alpha_j \, MA \quad = \sum_{1 \le i < j \le m} \alpha_i\alpha_j \, MA_i^2 \quad \text{nên :}$$

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i^2 MA_i^2 + \sum_{1 \le i < j \le m} \alpha_i\alpha_j MA_i + \sum_{1 \le i < j \le m} MA_j^2$$

$$= \sum_{1 \le i < j \le m} \alpha_i\alpha_j MA_i + \sum_{1 \le i < j \le m} \alpha_i\alpha_j MA_i^2 + \sum_{1 \le i < j \le m} \alpha_i\alpha_j MA_i^2$$

$$= \sum_{1 \le i, j \le m} \alpha_i\alpha_j \, MA_i \quad = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m} \alpha_i\alpha_j \, MA_i^2$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \sum_{i=1}^{m} \alpha_i MA_i^2 = \sum_{i=1}^{m} \alpha_1 MA_i^2 \text{ (theo (3)).}$$

Vậy có :

$$MO^2 = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \, MA_i^2 - \sum_{1 \le i < j \le m} \alpha_i\alpha_j \, A_iA_j^2 \quad (6)$$

Bây giờ ta xét vài ví dụ ứng dụng các kết quả trên.

Ví dụ 1. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC với các cạnh a, b, c. Hãy tính độ dài đường phân giác trong AA_1 và tỉ số IA/IA_1.

Giải : Tại các điểm A, B, C ta đặt các khối lượng tương ứng a, b, c. Vì AA_1 là đường phân giác nên

$$A_1B/A_1C = c/b \Rightarrow cA_1C = bA_1B$$

$$\Rightarrow b\vec{A_1B} + c\vec{A_1C} = \vec{0} (b\vec{A_1B} + c\vec{A_1C} = \vec{0}).$$

Vậy theo (4), A_1 là trọng tâm của hệ hai chất điểm B, C. Theo (6) với $m = 2$, $M \equiv A$ và theo định nghĩa α_1, α_2 ta có :

$$AA_1^2 = \frac{b}{b+c}AB^2 + \frac{c}{b+c}AC^2 - \frac{bc}{(b+c)^2}BC^2$$

$$= \frac{bc^2}{b+c} + \frac{cb^2}{b+c} - \frac{bca^2}{(b+c)^2}$$

$$= bc\left[1 - \frac{a^2}{(b+c)^2}\right].$$

Với chú ý A là trọng tâm của hệ 1 chất điểm A, nên theo tính chất (5) ta có trọng tâm của hệ A, B, C nằm trên đường phân giác AA_1. Tương tự trọng tâm của hệ A, B, C cùng nằm trên đường phân giác BB_1. Vậy I chính là trọng tâm của hệ A, B, C. Do đó theo (5) ta có :

$$IA/IA_1 = (b + c)/a.$$

Nhận xét : Nếu tại A, B, C cùng đặt một khối lượng là 1 thì theo cách xác định trọng tâm ở ví dụ 1 ta dễ dàng thấy trọng tâm của hệ 3 chất điểm A, B, C chính là trọng tâm (giao điểm của 3 đường trung tuyến) của ΔABC.

Ví dụ 2. Gọi H, I, O, G là trực tâm, tâm đường tròn nội tiếp, tâm đường tròn ngoại tiếp và trọng tâm của ΔABC có các cạnh a, b, c ; và bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp R, r. Hãy xác định OI^2, OH^2, OG^2, IH^2, IG^2, HG^2.

Giải : Đặt tại các điểm A, B, C các khối lượng tương ứng a, b, c, theo ví dụ 1 ta có I là trọng tâm của hệ 3 chất điểm A, B, C. Theo (6) ta có :

$$1)\ OI^2 = \frac{a}{a+b+c}OA^2 + \frac{b}{a+b+c}OB^2 +$$

$$+ \frac{c}{a+b+c}OC^2 - \frac{ab}{(a+b+c)^2}AB^2 -$$

$$\frac{ac}{(a+b+c)^2}AC^2 - \frac{bc}{(a+b+c)^2}BC^2$$

Có

$$\frac{ab}{(a+b+c)^2}AB^2 + \frac{ac}{(a+b+c)^2}AC^2 +$$

$$+ \frac{bc}{(a+b+c)^2}BC^2$$

$$= \frac{(abc^2 + acb^2 + bca^2)}{(a+b+c)^2} = \frac{abc}{a+b+c} (7)$$

và

$$S_{\Delta ABC} = abc/4R, \ S_{\Delta ABC} = r(a+b+c)/2$$

$\Rightarrow abc/(a + b + c) = 2Rr$

Vậy :

$$OI^2 = \frac{a}{a+b+c}R^2 + \frac{b}{a+b+c}R^2 + \frac{c}{a+b+c}R^2 - 2Rr$$

(theo (7) và (8), hay $OI^2 = R^2 - 2Rr$ (hệ thức Ơle).

2) Lại theo (6) ta có :

$$GI^2 = \frac{a}{a+b+c}GA^2 + \frac{b}{a+b+c}GB^2 + \frac{c}{a+b+c}GC^2 - \frac{ab}{(a+b+c)^2} \times AB^2 - \frac{ac}{(a+b+c)^2}AC^2 - \frac{bc}{(a+b+c)}BC^2$$

$$= \frac{a}{a+b+c}GA^2 + \frac{b}{a+b+c}GB^2 + \frac{c}{a+b+c}GC^2 - 2Rr$$

(theo (7) và (8). Gọi A_2 là trung điểm của BC, theo công thức đường trung tuyến ta có

$$GA^2 = \frac{4}{9}AA_2^2 = \frac{2}{9}\left(c^2 + b^2 - \frac{a^2}{2}\right).$$

Tương tự

$$GB^2 = \frac{2}{9}\left(a^2 + c^2 - \frac{b^2}{2}\right)$$

$$GC^2 = \frac{2}{9}\left(b^2 + a^2 - \frac{c^2}{2}\right) \text{ nên :}$$

$$S_1 = \frac{a}{a+b+c}GA^2 + \frac{b}{a+b+c}GB^2 + \frac{c}{a+b+c}GC^2 = \frac{1}{9(a+b+c)}[2ab(a+b+c) + 2ac(a+b+c) + 2bc(a+b+c) - 6abc - (a^3 + b^3 + c^3)].$$

Nhưng dễ thấy

$$a^3 + b^3 + c^3 = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc) + 3abc \qquad (9)$$

nên $S_1 = (ab + ac + bc)/9 - (a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)/9 - abc/(a+b+c) =$

$= (1/9)(3ab+3ac+3bc-a^2-b^2-c^2) - 2Rr$ (theo (8)). Vậy :

(8) $GI^2 = (1/9)(3ab+3ac+3bc-a^2-b^2-c^2)-4Rr$ (10)

3) Theo (6) có :

$$HI^2 = \frac{a}{a+b+c}HA^2 + \frac{b}{a+b+c}HB^2 + \frac{c}{a+b+c}HC^2 - \frac{bc}{(a+b+c)^2}AB^2 - \frac{ac}{(a+b+c)^2}AC^2 - \frac{ab}{(a+b+c)^2}BC^2.$$

Ta cần xác định HA^2, HB^2, HC^2. Dựng $\Delta A'B'C'$ có các cạnh song song với các cạnh tương ứng và đi qua các đỉnh của ΔABC.

Do các tứ giác $ABCC'$, $ABCB'$ là các hình bình hành nên $AC' = AB' = BC$ và $HA \perp B'C'$.

Vì vậy dễ dàng thấy H là tâm đường tròn ngoại tiếp $\Delta A'B'C'$, với bán kính R'. Có $\Delta A'B'C' \backsim \Delta ABC \Rightarrow R'/R = B'C'/BC \Rightarrow R' = 2R$.

Từ đó $HA^2 = R'^2 - C'A^2 = 4R^2 - a^2$.

Tương tự

$HB^2 = 4R^2 - b^2$; $HC^2 = 4R^2 - c^2$

Vậy theo (7) và (8) ta có

$$HI^2 = \frac{a}{a+b+c}(4R^2 - c^2) + \frac{b}{a+b+c}(4R^2 - b^2) + \frac{c}{a+b+c}(4R^2 - c^2) =$$

$$= 4R^2 - 2Rr - \frac{a^3 + b^3 + c^3}{a+b+c}$$

$= 4R^2 - 2Rr - (a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc) - 3abc/(a+b+c)$ (theo (9)).

Vậy theo (8) ta có :

$HI^2 = 4R^2 - 8Rr - (a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$ (11)

4) Để xác định OG^2, ta đặt ở A, B, C cùng một khối lượng 1, theo nhận xét trên thì trọng tâm G của ΔABC chính là trọng tâm của hệ 3 chất điểm A, B, C. Từ đó theo (6) ta có : $OG^2 = OA^2/3 + OB^2/3 + OC^2/3 - AB^2/9 - AC^2/9 - BC^2/9$. Vậy

$OG^2 = R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)/9$. Theo đường thẳng Ơle, ta có $GH = 2OG$;

$OH = 3OG$. Vậy :

$GH^2 = 4R^2 - 4(a^2 + b^2 + c^2)/9$

$OH^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$ (12)

Hệ quả : Trong tam giác ABC ta có :

1) $9R^2 \geqslant a^2 + b^2 + c^2 \geqslant$

$\geqslant ab + ac + bc \geqslant 18Rr$ (13)

Chứng minh :

Từ (12) $\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 \leqslant 9R^2$. Từ $(a - b)^2 + (a - c)^2 + (b - c)^2 \geqslant 0 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + ac + bc$.

Lại theo (10)

$3ba + 3bc + 3ac - a^2 - b^2 - c^2 \geqslant 36Rr$. Nhưng do $ab + ac + bc - a^2 - b^2 - c^2 \leqslant 0$ nên $2ab + 2ac + 2bc \geqslant$

$3ba + 3bc + 3ac - a^2 - b^2 - c^2 \geqslant 36Rr$ $\Rightarrow ab + ac + bc \geqslant 18Rr$.

Tóm lại ta có (14)

2) a) $2.IO \geqslant HI$ d) $IO \geqslant OG$

b) $\sqrt{2}.IO \geqslant GI$ e) $3.IO \geqslant OH$

c) $2.IO \geqslant GH$

f) $3GH^2 - 2IH^2 + 6IG^2 - 4IO^2 = 0$.

Giải : Theo các công thức tính GH^2, IH^2, IG^2, IO^2 ta có :

$\alpha GH^2 + \beta IH^2 + \gamma IG^2 + \omega IO^2 =$
$= (4\alpha + 4\beta + \omega)R - 2Rr(4\beta + 2\gamma + \omega) +$
$+ (\beta + \gamma/3)(ab + ac + bc) -$
$- (a^2 + b^2 + c^2)(4\alpha/9 + \beta + \gamma/9)$.

a) Cho $\alpha = 0, \gamma = 0, \beta = -1, \omega = 4$, từ (14) $4IO^2 - IH^2 = a^2+b^2+c^2+b^2+c^2 - ab - bc - ac$ (theo (13)).

b) Cho $\alpha = \beta = 0, \gamma = -1, \omega = 2$, từ (14) ta có $2IO^2 - GI^2 =$
$2R_2 - (ab + ac + bc)/3 + (a^2 + b^2 + c^2)/9 =$
$= [(18R^2 - 2ab - 2ac - 2bc) +$
$+ (a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)]/9 \geqslant 0$
(theo (13)).

c) Cho $\alpha = -1, \beta = \gamma = 0, \omega = 4$, từ (14) ta có

$4IO^2 - GH^2 = -8Rr + (4/9)(a^2 + b^2 + c^2)$ (theo (13)).

d) và e). Theo đường thẳng Ơle có $GH = GO$, $GH = (2/3)\ OH$. Vậy từ c) ta có $OI \geqslant OG$, $3IO \geqslant OH$.

f) Thay $\alpha = 3, \beta = -2, \gamma = 6$; $\omega = -4$ (14) ta có ngay kết luận.

Các bạn có thể suy diễn tiếp các tính chất lí thú khác từ các kết quả ở trên. Để giải ví dụ 2, các phương pháp khác đều gặp nhiều khó khăn hoặc bị bế tắc. Phương pháp dùng khái niệm trọng tâm có ưu điểm trong nhiều bài toán. Ưu điểm cơ bản của phương pháp này là việc xác định các khối lượng thích hợp sẽ cho lời giải ngắn gọn và mở rộng phạm vi ứng dụng linh hoạt cho nhiều bài toán

MỘT CÔNG THỨC DÙNG ĐỂ TÍNH TỔNG $\sum_{k=0}^{n} k^r$

PHAN ĐỨC THÀNH

Xin giới thiệu một công thức, từ đó có thể tính tổng

$$S_r = \sum_{k=0}^{n} k^r$$

(trong đó r là số nguyên $\geqslant 1$) một cách khá dễ dàng.

Bằng cách đặt $u^{[r]} = u(u - 1)\ldots(u - r + 1)$ ta có công thức thuận tiện sau đây :

$$S_{[r,n]} = \sum_{k=0}^{n} k^{[r]} = n^{[n]}(n + 1)/(r + 1). \quad (1)$$

Bây giờ ta chứng minh tính đúng đắn của công thức (1) bằng phương pháp quy nạp theo n.

Dễ dàng nhận thấy rằng mệnh đề đúng với $n = 1$, $n = 2$.

Giả sử mệnh đề đúng với $n = m$, tức là

$$S_{[r,m]} = m^{[r]}(m+1)/(r+1).$$

Ta có

$$S_{[r,m+1]} = S_{[r,m]} + (m+1)^{[r]}.$$

Chú ý rằng

$$(m+1)m^{[r]} = (m+1)^{[r]}(m-r+1)$$

Vậy

$$S_{[r,m+1]} = (m+1)^{[r]}(m+2)/(r+1),$$

tức mệnh đề cũng đúng với $n = m + 1$. Suy ra mệnh đề luôn luôn đúng.

Từ công thức (1)

Với $r = 1 \Rightarrow S_1 = n(n+1)/2$

Với $r = 2 \Rightarrow S_{[2,n]} = S_2 - S_1 =$

$= n(n-1)(n+1)/3 \Rightarrow$

$S_2 = n(n+1)(2n+1)/6.$

Với $r = 3 \Rightarrow S_{[3,n]} = S_3 - 3S_2 + 2S_1 =$

$= n(n-1)(n-2)(n+1)/4$

$\Rightarrow S_3 = n(n+1)/2$

Với $r = 4 \Rightarrow$

$S_{[4,n]} = S_4 - 6S_3 + 11S_2 - 6S_1 =$

$= n(n-1)(n-2)(n-3)(n+1)/5$

$\Rightarrow S_4 = n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)/30$ v.v...

Mở rộng của công thức (1) là công thức sau

$$S_{[r_1,\ldots,r_m]} = \sum_{k_1+\ldots+k_m \leq n} k_1^{[r_1]}\ldots k_m^{[r_m]}$$

$= [n^{[r]}r_1!\ldots r_m!/(m+1)\ldots(m+r)][(n+1)\ldots(n+m)/m!]$ trong đó $k_1, \ldots, k_m \geq 0$

và $r = r_1 + \ldots + r_m$.

Chẳng hạn : Với $m = 2$, $r_1 = 1$, $r_2 = 1$

$$\Rightarrow S_{[1,1]} = \sum_{k_1+k_2 \leq n} k_1k_2 =$$

$= n(n-1)(n+1)(n+2)/24.$

Với $m = 2$, $r_1 = 2$, $r_2 = 1$

$$\Rightarrow S_{[2,1]} = \sum_{k_1+k_2 \leq n} k_1^2k_2 - \sum_{k_1+k_2 \leq n} k_1k_2$$

$= n(n-1)(n-2)(n+1)(n+2)/60$

$$\sum_{k_1+k_2 \leq n} k_1^2k_2 = n(n-1)(n+1)(n+2)(2n+1)/120$$

v.v...

MẶT CẦU GIẢ NỘI TIẾP ĐA DIỆN

LÊ QUỐC HÁN

Trong các kì thi vào đại học hoặc các kì thi học sinh giỏi, các bạn thường gặp ba loại mặt cầu : mặt cầu ngoại tiếp đa diện, mặt cầu nội tiếp đa diện và mặt cầu giả nội tiếp đa diện. Hai loại mặt cầu đầu đã được các tác giả nghiên cứu khá sâu sắc (xem, chẳng hạn : "Một số phương pháp giải toán sơ cấp", Đ.H.T.H Hà Nội, riêng loại mặt cầu thứ ba thì rất ít tài liệu đề cập, có chăng thì cũng đề cập một cách sơ sài. Trong bài báo này, tôi xin trình bày một cách hệ thống loại mặt cầu đó, nhằm giúp các bạn làm tốt các đề toán liên quan đến mặt cầu này. Trước hết, xin nêu một khái niệm rất quen thuộc trong hình học sơ cấp, nhưng chưa được trình bày trong sách giáo khoa hình học phổ thông.

1. Trục đường tròn :

a) Định nghĩa 1 : Trục đường tròn là đường thẳng vuông góc với mặt phẳng chứa đường tròn và đi qua tâm của đường tròn ấy.

Các bạn dễ dàng chứng minh :

b) Tính chất : Nếu M là một điểm trên trục đường tròn thì M cách đều các điểm trên đường tròn.

c) Định lí 1 : Trong không gian, quỹ tích những điểm cách đều các cạnh của một đa giác ngoại tiếp là trục của đường tròn nội tiếp đa giác ấy.

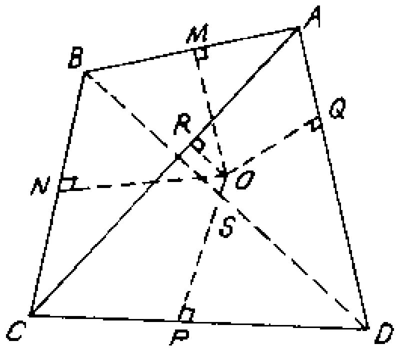
2. Mặt cầu giả nội tiếp đa diện :

a) Định nghĩa 2 : Mặt cầu giả nội tiếp đa diện là mặt cầu tiếp xúc với tất cả các cạnh (Không kể phần kéo dài) của đa diện.

b) Nhận xét : Nếu O là tâm mặt cầu giả nội tiếp đa diện thì O cách đều các cạnh của đa diện nên O nằm trên các trục vòng tròn nội tiếp các mặt của đa diện.

c) Định lí 2 : (Điều kiện cần và đủ để tồn tại mặt cầu giả nội tiếp tứ diện $ABCD$ là

$$AB + CD = AC + BD = AD + BC \quad (1)$$



Hình 1

Chứng minh : Điều kiện cần : Giả sử tồn tại mặt cầu tâm O, tiếp xúc với AB, BC, CD, DA, AC, BD tại M, N, P, Q, R, S. Khi đó,

$\Delta OAM = \Delta OAR = \Delta OAQ$

$AM = AR = AQ$. Tương tự

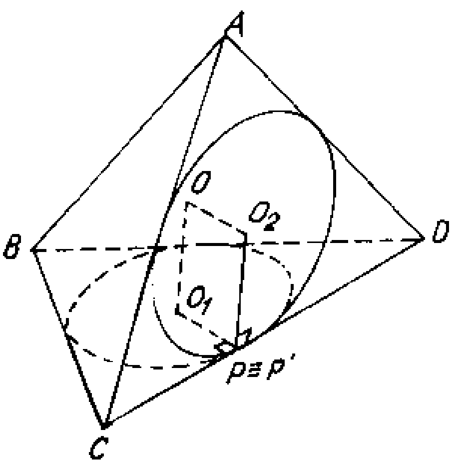
$BM = BS = BN$

$CP = CR = CN$

$DP = DS = DQ$

Cộng từng vế các đẳng thức trên, ta có (1).

Điều kiện đủ : Giả sử đã có (1). Gọi (O_1, r_1) và (O_2, r_2) là các đường tròn nội tiếp ΔBCD và ΔACD, và các tiếp điểm trên CD tương ứng là P' và P. Khi đó, dễ chứng minh :



Hình 2

$CP = (1/2).(AC + CD - AD)$ và

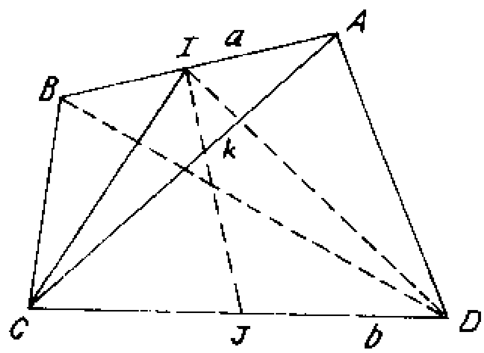
$CP' = (1/2).(BC + CD - BD)$

mà $AC + BD = AD + BC$, nên $AC - AD = BC - BD$. Do đó $CP = CP' \Rightarrow P \equiv P'$. Gọi PO là đường kính của đường tròn ngoại tiếp O_1PO_2. Khi đó $\widehat{OO_1P} = 90^o$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $OO_1 \perp O_1P$ mà $CD \perp [O_1PO_2]$; $CD \perp O_1O \Rightarrow O_1O \perp [BCD] \Rightarrow OO_1$ là trục của đường tròn nội tiếp ΔBCD. Tương tự, OO_2 là trục của đường tròn nội tiếp ΔACD. Hai trục này cắt nhau tại O. Tương tự, ta chứng minh được các trục của các đường tròn nội tiếp các mặt của tứ diện đôi một cắt nhau. Vì không có ba trong bốn trục nào đồng phẳng nên chúng phải đồng quy (tại O). Khi đó O cách đều các cạnh của tứ diện nên O là tâm mặt cầu giả nội tiếp tứ diện.

Thí dụ 1 : Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = a$, $CD = b$, $AC = AD = BC = BD$. Gọi I và J là trung điểm của AB và CD ; $IJ = k$. Tìm hệ thức liên hệ giữa a, b, k để tồn tại mặt cầu giả nội tiếp $ABCD$ (Đề thi tuyển sinh khối A, 1978) :

Giải :

Vì $AC = BC$ (gt), $AI = IB$ (gt) nên $CI \perp AB$. Ta có : tồn tại mặt cầu giả nội tiếp $ABCD$



Hình 3

$$AB + CD = AC + BD = AD + BC$$

$$AB + CD = 2AC \Leftrightarrow (AB + CD)^2 = 4AC^2$$
$$\Leftrightarrow (a + b)^2 = 4(a^2/4 + k^2 + b^2/4) \Leftrightarrow ab = 2k^2.$$

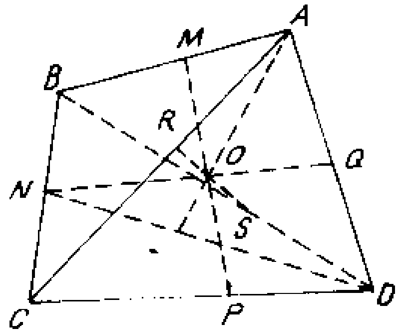
d) Các phương pháp xác định tâm mặt cầu giả nội tiếp đa diện.

Phương pháp 1 : Chỉ ra một điểm cách đều các cạnh đa diện.

Thí dụ 2 : Cho tứ diện đều $ABCD$. Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu giả nội tiếp tứ diện đó (Đề số 141 – Bộ đề thi do Bộ ĐH, TH và DN ban hành).

Giải : Gọi M, N, P, Q, R, S là trung điểm của AB, BC, DA, AC, BD, CD. Khi đó : MP, NQ, RS đồng quy tại O, trung điểm mỗi đường (xem sách giáo khoa hình học không gian lớp 11).

Mặt khác $AP = BP = a\sqrt{3/2}$ nên ΔAPB cân tại $P \Rightarrow$ trung tuyến $MP \perp AB$. Tương



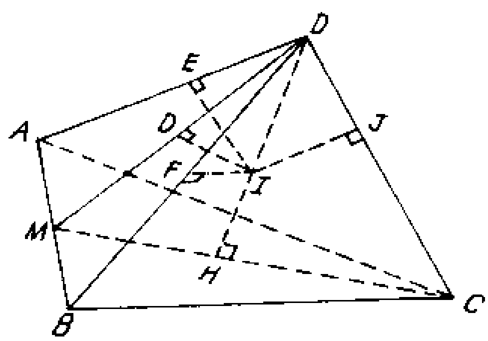
Hình 4

tự $ON \perp BC$... Từ đó $\Delta OAM = \Delta OBN = \Delta OCD = \Delta ODQ = \Delta OAR = \Delta OBS \Rightarrow OM = ON = OP = OQ = OS$. O là tâm mặt cầu giả nội tiếp $ABCD$. Khi đó :

$OM^2 = (1/4)MP^2 = (1/4)(AP^2 - AM^2) = $
$= (1/4)(3a^2/4 - a^2/4) = 2a^2/16 \Rightarrow OM = a\sqrt{2/4}$.

Phương pháp 2 : Dựng hai trục của hai đường tròn nội tiếp hai mặt của đa diện. Chứng minh hai trục ấy cắt nhau (tại O). Chứng minh O cách đều các cạnh của đa diện.

Thí dụ 3 : Cho tứ diện $OABC$: góc tam diện đỉnh O ba mặt vuông. $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$. Tìm điều kiện giữa a, b, c để tồn tại mặt cầu giả nội tiếp $OABC$. Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu đó (Đề thi khối A, ĐHSP Vinh, 1988).



Hình 5

Giải : Tồn tại mặt cầu giả nội tiếp $OABC$ $\Leftrightarrow OA + BC = OB + AC = OC + AB \Leftrightarrow$
$a + \sqrt{b^2 + c^2} = b + \sqrt{a^2 + c^2} = c + \sqrt{a^2 + b^2} \Leftrightarrow$
$a = b = c$ (Vì chẳng hạn :

$a + \sqrt{b^2 + c^2} = b + \sqrt{a^2 + c^2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2a\sqrt{b^2 + c^2} =$

$= b^2 + a^2 + c^2 + 2b\sqrt{a^2 + c^2} \Leftrightarrow$
$(a\sqrt{b^2 + c^2})^2 = (b\sqrt{a^2 + c^2})^2 \Leftrightarrow$
$a^2b^2 + a^2c^2 = a^2b^2 + b^2c^2 \Leftrightarrow a = b$.

Khi đó $O.ABC$ là hình chóp đều. Kẻ đường cao OH của hình chóp thì OH là trục của vòng tròn nội tiếp (và ngoại tiếp) tam giác ABC. Gọi D là tâm của đường tròn nội tiếp ΔOAB, OD cắt AB tại M. Vì $OA = OB$ nên $AM = MB$ và $AB \perp OM \Rightarrow OM$ đi qua H và $OM \perp AB$. Gọi MI là đường kính của đường tròn ngoại tiếp ΔMDH thì $\widehat{IDM} = 90^\circ$ nên $ID \perp OM$ mà $AB \perp [OMC]$ nên $AB \perp ID$ $\Rightarrow D$ là trục của đường tròn nội tiếp ΔOAB. Kẻ $IE \perp OA$; $IF \perp OB$, $IJ \perp OC$. Vì I nằm trên trục của các đường tròn nội tiếp tam giác ABC và OAD nên I cách đều BC, CA, AB, OA, OB. Mặt khác $\Delta OIE = \Delta OIJ \Rightarrow IE = IJ \Rightarrow I$ cách đều OA và OC. Vậy I là tâm mặt cầu giả nội tiếp $OABC$.

Ta có : $\Delta IOE \backsim \Delta AOH \Rightarrow IE/AH = OE/OH \Rightarrow IE = OE.AH/OH$, trong đó $OE = OA - AE = OA - AM$ (vì AE và AM là hai tiếp tuyến của mặt cầu (I, IE) xuất phát từ A) =

$= a - a\sqrt{2}/2 = [a(2 - \sqrt{2})]/2$;

$AH = (2/3).(a\sqrt{2}).\sqrt{3}/2 = a\sqrt{2}/3$;

$OH^2 = OA^2 - AH^2 = a^2 - 2a^2/3 = a^2/3$
$\Rightarrow OH = a/\sqrt{3}$.

Thay vào, ta có $IE = a(\sqrt{2} - 1)$.

Bây giờ, đề nghị các bạn làm một số bài tập sau đây để rèn luyện các kiến thức đã học :

1) Một hình cầu tiếp xúc với tất cả các cạnh của tứ diện đều. Tìm thể tích của phần hình cầu nằm phía ngoài của khối tứ diện đều, biết cạnh tứ diện đều là a (Đề số 137, bộ đề thi do Bộ ĐH, TH và DN ban hành).

2) Giả sử tâm O của mặt cầu giả nội tiếp hình chóp $S.ABC$ nằm trên đường cao của hình chóp. a) Chứng minh $S.ABC$ là hình chóp đều. b) Biết bán kính mặt cầu là R và $OS = R\sqrt{3}$. Tính thể tích hình chóp (Đề thi tuyển sinh khối A, ĐHBK Hà Nội, 1988).

ỨNG DỤNG CỦA TÍCH NGOÀI 3 VÉCTƠ TRONG KHÔNG GIAN

NGUYỄN THÚC HÀO

1. Thể tích hình tứ diện

Chúng ta biết rằng thể tích của tứ diện *ABCD* là 1/6 của thể tích hình hộp vẽ trên chẳng hạn 3 cạnh *DA, DB, DC*. Vậy thể tích *V* của tứ diện cho bởi :

$$6V = [\overrightarrow{DA} . \overrightarrow{DB} . \overrightarrow{DC}]$$

Với giả thiết tam diện $\{\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}\}$ là thuận. Với điểm gốc *O* tùy ý, ta đặt

$\overrightarrow{OA} = A, \overrightarrow{OB} = B, \overrightarrow{OC} = C, \overrightarrow{OD} = D$

Ta có

$$6V = [A - D, B - D, C - D]$$

$$V = \frac{1}{6}[A, B, C] - [B, C, D] +$$

$$+ [C, D, A] - [D, A, B] \qquad (10)$$

Chú ý :

1) Ta lấy *O* tại *D* thì

$V = 1/6[A, B, C]$

2) Ta lấy *O* tại trọng tâm *G* của tứ diện thì $A + B + C + D = 0 \Rightarrow D = -A - B - C$

Do đó

$$-[B, C, D] = [B, C, A] = [A, B, C]$$

$$[C, D, A] = -[C, B, A] = [A, B, C]$$

$$-[D, A, B] = [C, A, B] = [A, B, C]$$

Kết quả trên cho thấy rằng nếu góc *O* nằm trong tứ diện *ABCD*, như trọng tâm *G* chẳng hạn, thì các tích ngoài sau đây :

$[A, B, C], [C, B, D], [C, D, A]\ [A, D, B]$

cùng dấu như nhau.

Nó cũng cho thấy rằng các tứ diện *GABC, GCBD, GCDA, GADB* là tương đương.

2. Điều kiện đồng phẳng cho 4 điểm

Phương trình của mặt phẳng : Bốn điểm *A, B, C, D* là đồng phẳng nếu và chỉ nếu

$$[\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}] =$$

$$= [A - D, B - D, C - D] = 0 \qquad (11)$$

hay là

$$[A, B, C]\ [B, C, D] +$$

$$+ [C, D, A] - [D, A, B] = 0 \qquad (12)$$

Ta biết là nói chung ta có thể đặt :

$$D = \alpha A + \beta B + \gamma C$$

với gốc *O* chọn ngoài mặt phẳng (*A, B, C*). Thay *D* vào (12), sẽ được

$$\alpha + \beta + \gamma = 1 \qquad (13)$$

Điều kiện này tương đương với (12).

Phương trình mặt phẳng. Điểm *m* thuộc mặt phẳng (*A, B, C*) nếu và chỉ nếu

$$[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = 0$$

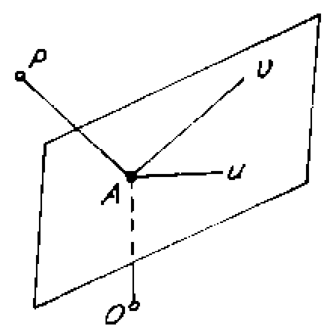
Với một gốc *O* nào đó, ta đặt

$\overrightarrow{OA} = A, \overrightarrow{OM} = X, \overrightarrow{AB} = u, \overrightarrow{AC} = v$

Phương trình trên cho ta :

$$[X - A, u, v] = 0 \qquad (14)$$

Đó là phương trình của mặt phẳng đi qua *A* và theo phương phẳng $\{u, v\}$. *X* là điểm vạch ra mặt phẳng.



Khai triển (14) ta có :

$$[X, u, v] = [A, u, v].$$

dạng $[X, u, v] = \alpha \qquad (15)$

α là một hằng số thực.

Ngược lại, nếu cho phương trình (15) ta có thể xác định (bằng vô số cách) véctơ $\overrightarrow{OA} = A$ sao cho

$$[A, u, v] = \alpha$$

và ta sẽ có phương trình (14). Như vậy, (15) biểu diễn một mặt phẳng có phương phẳng $\{u, v\}$.

Khoảng cách từ một điểm P đến mặt phẳng (14). Nếu *u, v* là 2 véctơ đơn vị, vuông góc với nhau, đồng thời tam diện $\{\overrightarrow{AP}, u, v\}$

là thuận thì khoảng cách từ P đến mặt phẳng (14) là

$$\delta = [\vec{AP}, u, v]$$

tức $\delta = [P - A, u, v]$ (16)

vì rằng δ là chiều cao của hình hộp chữ nhật vẽ trên $\{\vec{AP}, u, v\}$ mà đáy là hình vuông đơn vị $\{u, v\}$ và P là một đỉnh thuộc mặt đối diện đáy.

Tất nhiên, nếu tích ngoài không chắc là dương thì ta viết

$$\delta = \pm [p - A, u, v] \quad (16')$$

dấu + hoặc − phải chọn sao cho $\delta > 0$.

Nếu 2 véctơ u, v là bất kì thì

$$\delta = \pm [P - A, u, v]/|u|.|v|.\sin\alpha \quad (17)$$

trong đó α là góc giữa u, v.

3. Định lí Thales không gian

Cho 3 mặt phẳng P, Q, R lần lượt cắt hai cát tuyến tại A, A', B, B', C, C' và trong 3 mặt phẳng có hai mặt song song với nhau (P // Q). Thế thì

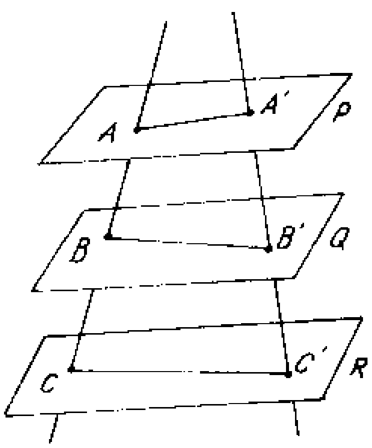
$$(A, B, C) = (A', B', C') \quad (18)$$

là điều kiện cần và đủ để cho mặt phẳng thứ ba R song song với hai mặt P, Q.

Chứng minh : Nếu đặt $\vec{AC} = \rho\vec{AB}$, $\vec{A'C'} = \rho'\vec{A'B}$ thì điều kiện (18) là tương đương với

$$\rho = \rho' \quad (19)$$

Mặt khác, P // Q có nghĩa là tồn tại u, v không đồng phương sao cho



$$[\vec{AA'}, u, v] = 0, [\vec{BB'}, u, v] = 0 \quad (20)$$

Ta sẽ chứng minh rằng (19) tương đương với

$$[\vec{CC'}, u, v] = 0 \quad (21)$$

Có thể viết

$$\vec{CC'} = \vec{CA} + \vec{AA'} + \vec{A'C'}$$
$$= -\rho\vec{AB} + \vec{AA'} + \rho'\vec{A'B'}$$

Mặt khác $\vec{A'B'} = \vec{A'A} + \vec{AB} + \vec{BB'}$ thay vào trên ta có :

$$\vec{CC'} = (\rho' - \rho)\vec{AB} + (1 - \rho')\vec{AA'} + \rho\vec{BB'}$$

Dựa vào (20) ta thấy

$$[\vec{CC'}, u, v] = (\rho' - \rho)[\vec{AB}, u, v]$$

Nhưng $[\vec{AB}, u, v] \neq 0$ cho nên

$$[\vec{CC'}, u, v] = 0 \Leftrightarrow \rho' - \rho = 0$$

Mời các bạn ứng dụng tích ngoài của 3 véctơ trong không gian để giải các bài toán sau :

1. Trong hình tứ diện $ABCD$, trên các cạnh AB, DC, AC, BD lần lượt lấy các điểm M, N, P, Q sao cho M chia AB và N chia CD theo tỉ số λ, P chia AC và Q chia BC theo tỉ số μ.

Với điều kiện nào thì MN và PQ giao nhau ?

2. (Bài 9/143 báo THTT số 6/85).

Cho tứ diện $ABCD$ có thể tích V, một điểm P trong tứ diện. Trên AP, BP, CP, DP kéo dài về phía P ra ngoài tứ diện, lấy các điểm tùy ý A_1, B_1, C_1, D_1. Bốn mặt phẳng lần lượt qua A_1, B_1, C_1, D_1 song song tương ứng với các mặt BCD, CDA, DAB, ABC cắt nhau tạo thành một tứ diện mới $A'B'C'D'$ có thể tích V'. Lần lượt nối các điểm A_1, B_1, C_1, D_1 với các đỉnh các tam giác BCD, CDA, DAB, ABC tương ứng để được một thập nhị diện (các mặt đều là tam giác) có thể tích là V_1.

Chứng minh rằng $V_1^3 = V^2 . V'$

3. (Bài 11/153, THTT số 4/87)

Cho hai đường thẳng a, b không đồng phẳng, vuông góc với nhau nhận AB là đường vuông góc chung. Một điểm M thay đổi sao cho khi hạ $MA_1 \perp a$, $MB_1 \perp b$ thì

$$AA_1 + BB_1 = AB \quad (*)$$

a) Tìm quỹ tích của M thỏa mãn điều kiện (*)

b) Cho thêm điều kiện

$$MA_1 = MB_1 \quad (**)$$

Tìm quỹ tích của M thỏa mãn cả hai điều kiện (*) và (**).

TÍCH NGOÀI CỦA 3 VÉCTƠ TRONG HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

NGUYỄN THÚC HÀO

1. Trong một số bài viết trước (THTT số 2 và 6–1985, số 6–1986) tôi đã giới thiệu với bạn đọc tích ngoài của 2 véctơ trong mặt phẳng, như là một hàm số thực, tuyến tính và phản xứng của 2 véctơ. Giờ đây, tôi xin giới thiệu *tích ngoài của 3 véctơ* x, y, z (ta quy ước bỏ dấu mũi tên) trong không gian. Đó là một hàm số thực của x, y, z, *tuyến tính* và *phản xứng*, kí hiệu là $[x, y, z]$. Nó là *tuyến tính đối với mỗi véctơ*, nghĩa là, đối với x chẳng hạn, ta có :

$$\left.\begin{array}{l}[x_1 + x_2, y, z] = [x_1, y, z] + [x_2, y, z] \\ [\alpha x, y, z] = \alpha[x, y, z]\end{array}\right\} \quad (1)$$

Với mọi véctơ x, x_1, x_2, y, z và với mọi số thực α.

Nó là phản xứng, nghĩa là nếu hoán vị hai véctơ nào đó cho nhau, thì giá trị của tích ngoài đổi thành số đối xứng. Chẳng hạn, ta có :

$$[x, y, z] = -[y, x, z] \quad (2)$$

hoặc

$$[x, y, z] = -[z, y, x] \quad (2)$$

Đặc biệt

$$[x, x, z] = 0 \quad (3)$$

Ta suy ra nếu trong 3 véctơ x, y, z có 2 véctơ đồng phương thì tích ngoài của chúng bằng 0. Chẳng hạn nếu $y = \alpha x$, thì

$$[x, \alpha x, z] = \alpha[x, x, z] = 0 \quad (4)$$

2. Cho 3 véctơ a, b, c. Ta biểu diễn chúng bằng các đoạn thẳng định hướng có chung một gốc O

$$\overrightarrow{OA} = a, \overrightarrow{OB} = b, \overrightarrow{OC} = c.$$

Nếu các đoạn ấy cùng thuộc một mặt phẳng thì các véctơ a, b, c gọi là *đồng phẳng* hoặc *cộng diện*.

Bây giờ để xác định tích ngoài của 3 véctơ bất kì, ta hãy chọn một bộ ba véctơ tùy ý *không đồng phẳng*, $\{u, v, w]$ và quy ước cho $[u, v, w]$ một giá trị $\delta \neq 0$ cho trước :

$$[u, v, w] = \delta \qquad (\delta \neq 0)$$

Khi đó, mọi bộ ba véctơ $\{x, y, z\}$ có thể phân tích theo u, v, w như sau :

$$\left.\begin{array}{l} x = x_1u + x_2v + x_3w \\ y = y_1u + y_2v + y_3w \\ z = z_1u + z_2v + z_3w \end{array}\right\} \quad (5)$$

và ta sẽ có

$$[x, y, z] = [x_1u + x_2v + x_3w, y_1u + y_2v + y_3w, z_1u + z_2v + z_3w]$$

Ta khai triển vế thứ hai, dựa vào hai tính chất tuyến tính và phản xứng, cuối cùng sẽ được

$$[x, y, z] = (x_1y_2z_3 + x_2y_3z_1 + x_3y_1z_2 - x_3y_2z_1 - x_2y_1z_3 - x_1y_3z_2) \times [u, v, w] \quad (6)$$

Đẳng thức này cho ta giá trị của $[x, y, z]$ từ giá trị δ của $[u, v, w]$. Ta quy ước viết gọn biểu thức trong ngoặc của vế bên phải của (6) bằng cách đặt

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = x_1y_2z_3 + x_2y_3z_1 + x_3y_1z_2 - x_3y_2z_1 - x_2y_1z_3 - x_1y_3z_2 \quad (7)$$

tức dưới dạng một bảng số hình vuông có 3 hàng, 3 cột, gọi là định thức. Như vậy, hệ thức (6) viết gọn là :

$$[x, y, z] = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} [u, v, w] \quad (8)$$

Giá trị của định thức, ta tính theo biểu thức trong vế thứ hai của đẳng thức (7). Để nhớ cách tính, người ta đặt ra quy tắc sau (quy tắc Sarrus). Ta viết định thức như trong vế đầu của (7) rồi viết hai cột nhất nhì vào làm cột thứ tư và thứ năm :

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_1 & z_2 \end{array}\right.$$

Ta lập các tích số của 3 phần tử theo các đường chấm chấm. Nếu từ trên đi xuống sang bên phải thì đặt dấu + trước tích số, còn nếu từ trên đi xuống sang bên trái thì đặt dấu − trước tích số.

Ta chú ý rằng định thức có thể viết dưới dạng

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$

$$= z_1(x_2y_3 - x_3y_2) + z_2(x_3y_1 - x_1y_3) + $$
$$+ z_3(x_1y_2 - x_2y_1)$$

tức dưới dạng $\Delta = Az_1 + Bz_2 + Cz_3$

Nếu chọn hai véctơ x, y ***không đồng phương*** thì A, B, C không triệt tiêu đồng thời và ta có thể chọn z_1, z_2, z_3 (bằng vô số cách) tức chọn véctơ z sao cho $\Delta \neq 0$ và do đó

$$[x, y, z] \neq 0$$

Thế là ta có vô số cách chọn x, y, z để cho tích ngoài của chúng khác không.

3. Điều kiện đồng phẳng cho 3 véctơ (khác không).

Ta sẽ chứng minh rằng 3 véctơ khác không, x, y, z là đồng phẳng nếu và chỉ nếu tích ngoài của chúng bằng 0

$$[x, y, z] = 0 \qquad (9)$$

a) Điều kiện cần : Giả sử x, y, z đồng phẳng. Khi đó ta có

$$z = \alpha x + \beta y$$

và

$$[x, y, z] = [x, y, \alpha x + \beta y]$$
$$= \alpha[x, y, x] + \beta[x, y, y] = 0$$

b) Điều kiện đủ : Giả sử ta có $[x, y, z] = 0$.

Nếu x, y đồng phương thì rõ ràng là chúng đồng phẳng với mọi véctơ z.

Nếu x, y không đồng phương, ta chọn véctơ t sao cho

$$[x, y, t] \neq 0$$

Các véctơ $\{x, y, t\}$ sẽ không đồng phẳng (theo phần a) và ta có thể phân tích z theo x, y, t

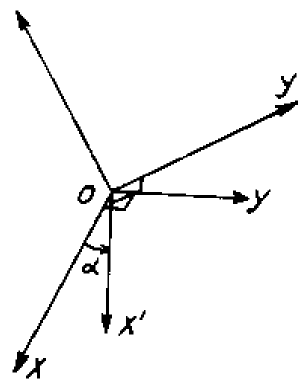
$$z = \alpha x + \beta y + \gamma t$$

và

$$[x, y, z] = [x, y, \alpha x + \beta y + \gamma t] = \gamma[x, y, t]$$

Ta thấy rằng $[x, y, z] = 0$ kéo theo $\gamma = 0$ tức là z đồng phẳng với x, y.

4. Bây giờ ta xác định giá trị cho tích ngoài trong *hình học ơ-cơ-lít* với quy ước là $[x, y, z] = 1$ nếu x, y, z là véctơ đơn vị và tạo thành một *tam diện thuận*. Khi đó bộ ba $[x, y, z]$ gọi là một *cơ sở trực chuẩn*.



Hình 1

Điều quan trọng cần nêu là quy ước trên chỉ có nghĩa, nếu một khi tích ngoài bằng 1 với một cơ sở trực chuẩn nào đó rồi thì nó sẽ bằng 1 với mọi cơ sở trực chuẩn khác. Ta phải chứng minh điều đó. Trước hết ta lấy một cơ sở trực chuẩn thứ hai là $\{x', y', z\}$ có chung véctơ z với cơ sở trực chuẩn $\{x, y, z\}$.

Ta phải chứng minh $[x, y, z] = 1$ $\Rightarrow [x', y', z] = 1$

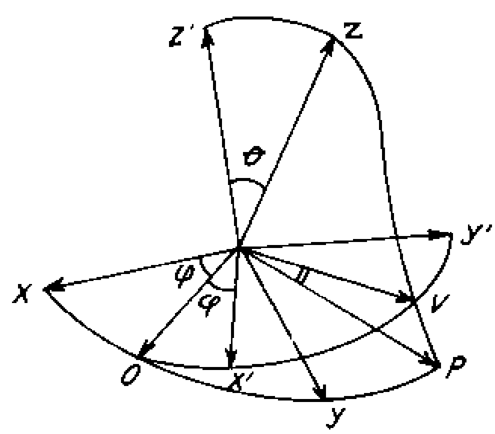
Gọi α − góc $\widehat{xox'}$ (xem hình vẽ 1) ta sẽ có

$$x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha$$
$$y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha$$
$$z' = z$$

và

$$[x', y', z'] = \begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

Trong trường hợp tổng quát, vị trí của $\{x', y', z'\}$ là bất kì so với vị trí của $\{x, y, z\}$. Ta gọi OU − giao tuyến của mặt phẳng (XOY) với mặt phẳng vuông góc với OZ' qua O, tức là mặt phẳng chứa OX', OY'. Ta chọn trục OV sao cho $\{u, v, z'\}$ là trực chuẩn và trục OR sao cho $\{u, r, z\}$ là trực chuẩn (xem hình 2).



Hình 2

Ta lần lượt biến đổi cơ sở $\{x, y, z\}$ theo 3 bước :

1) $\{x, y, z\} \to \{u, r, z\}$ với phép quay trục Z, góc Ψ.

2) $\{u, r, z\} \to \{u, v, z\}$ với phép quay trục U, góc θ.

3) $\{u, v, z\} \to \{x', y', z'\}$ với phép quay trục Z' góc φ.

Trong mỗi bước, cơ sở sau có chung một trục với cơ sở trước, cho nên nếu tích ngoài của cơ sở trước bằng một thì tích ngoài của cơ sở sau cũng bằng 1 :

$$[x', y', z'] = [u, v, z'] =$$

$$= [u, r, z] = [x, y, z] = 1$$

Các góc Ψ, θ, φ gọi là các góc Euler (Động học).

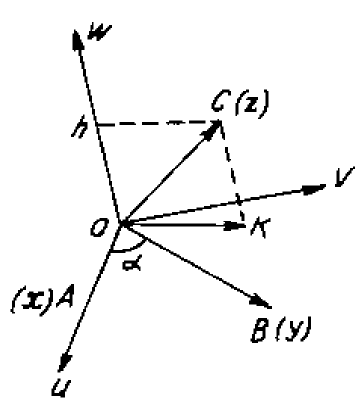
5. Thể tích hình hộp :

Cho 3 véctơ bất kì, không đồng phẳng, x, y, z mà ta biểu diễn bằng các đoạn OA, OB, OC :

$$x = \overrightarrow{OA}, y = \overrightarrow{OB}, z = \overrightarrow{OC}.$$

Hình hộp vẽ trên 3 cạnh OA, OB, OC cũng sẽ gọi là hình hộp vẽ trên 3 véctơ x, y, z. Ta chọn một cơ sở trực chuẩn $\{u, v, w\}$ sao cho u cùng phương với x, v và đồng phẳng với x, y.

Như vậy, ta có thể viết (xem hình 3).



Hình 3

$$x = |x|.u$$

$$y = |y|.\cos\alpha.u + |y|\sin\alpha.v$$

trong đó ta gọi α là góc $\widehat{xOy}$.

Mặt khác, ta phân tích z

$$z = k + h$$

trong đó k đồng phẳng với x, y và v, còn h theo phương w (vuông góc với mặt phẳng (u, v)). Khi đó :

$$[x, y, z] = [x, y, k + h] = [x, y, h]$$

vì ta có $[x, y, k] = 0$

Vậy

$$[x, y, z] = [x, y, h]$$

$$= [|x|u, |y|\cos\alpha.u + |y|\sin\alpha.v, h]$$

$$= |x|.|y|\sin\alpha[u, v, h]$$

nhưng $h = \pm |h|w$, cho nên

$$[x, y, z] = \pm |x|.|y|\sin\alpha.|h|.[u, v, w]$$

$$= \pm |x|.|y|.\sin\alpha.|h|$$

Ta thấy $|x|.|y|.\sin\alpha = S$, nếu gọi S là diện tích hình bình hành vẽ trên x, y. Còn $|h|$ là chiều cao của hình hộp mà đáy là hình hình hành ấy và dáy trên có một đỉnh là C ($z = \overrightarrow{OC}$). Thế là :

$$[x, y, z] = \pm |h|.S = \pm V \qquad (10)$$

V là thể tích hình hộp có cạnh OA, OB, OC.

Nếu h cùng hướng với w, tức tam diện $\{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\}$ là thuận thì ta có

$$[x, y, z] = V$$

Như vậy, thể tích hình hộp có cạnh $\overrightarrow{OA} = x$, $\overrightarrow{OB} = y$, $\overrightarrow{OC} = z$ bằng $[x, y, z]$ nếu tam diện $\{x, y, z\}$ là thuận. Nếu tam diện ấy là nghịch, ta có tích ngoài âm, nên phải lấy giá trị tuyệt đối.

Tóm lại, tích ngoài $[x, y, z]$ là thể tích của hình hộp vẽ trên 3 véctơ x, y, z với dấu + nếu $\{x, y, z\}$ là một tam diện thuận, với dấu − nếu ngược lại. Đó là ý nghĩa hình học của tích ngoài của 3 véct. Theo ý nghĩa đó, rõ ràng là tích ngoài $[x, y, z]$ bằng 0 khi và chỉ khi 3 véc tơ x, y, z đồng phẳng.

ỨNG DỤNG CỦA TÍCH NGOÀI HAI VÉCTƠ TRONG HÌNH HỌC PHẲNG

NGUYỄN THÚC HÀO

Trong bài này, xin tiếp tục giới thiệu thêm với bạn đọc về ứng dụng của tích ngoài (có thể kết hợp với tích vô hướng) vào hình học phẳng.

1. Hệ thức giữa 3 véctơ bất kì

Từ nay, chúng ta sẽ quy ước bỏ cả dấu mũi tên trên các chữ dùng để chỉ vectơ. Chẳng hạn, $\vec{a}$ sẽ được thay bằng a, sau khi đã nói trước a là một vectơ.

Bây giờ, trong mặt phẳng, xét 3 vectơ bất kì a, b, c. Nếu chúng đồng phương với nhau thì

$$[a, b] = [b, c] = [c, a] = 0$$

và không có gì đáng nói. Nếu có ít nhất một cặp vectơ không đồng phương, chẳng hạn a và b, thì :

$$[a, b] \neq 0$$

và vectơ còn lại là c biểu diễn được bằng một tổ hợp tuyến tính của a, b (phân tích c theo hai phương a và b), tức có α, β là số thực sao cho

$$c = \alpha a + \beta b \qquad (1)$$

Lần lượt lấy *tích ngoài* của hai vế với a và b, ta sẽ được :

$$[c, a] = \beta[b, a],\ [c, b] = \alpha[a, b]$$

tức $$\alpha = -\frac{[b, c]}{[a, b]};\ \beta = \frac{-[c, a]}{[a, b]} \qquad (2)$$

Hệ thức (1) trở nên

$$c = \frac{-[b, c]a - [c, a]b}{[a, b]}$$

hay là

$$[a, b]c + [b, c]a + [c, a]b = 0 \qquad (3)$$

Đó là hệ thức giữa 3 vectơ bất kì trong mặt phẳng. Ta chú ý rằng, trường hợp a, b, c đồng phương với nhau thì hệ thức (3) vẫn đúng.

2. Công thức cộng cung trong lượng giác :

Ta hãy xét 3 vectơ a, b, c là những vectơ đơn vị :

$$|a| = |b| = |c| = 1.$$

Định lí Chasles về góc cho ta hệ thức :

$$\widehat{a.c} = \widehat{a.b} + \widehat{b.c} + 2k\pi$$

k là một số nguyên, còn $\widehat{a.c}, \widehat{a.b}, \widehat{b.c}$ là những góc lượng giác (góc có định hướng nghĩa rộng, của hai tia). Ta hãy đặt :

$$\widehat{a.b} = \alpha,\ \widehat{b.c} = \beta$$

thì

$$\widehat{a.c} = \alpha + \beta\ (+\ 2k\pi)$$

Từ (3) ta rút ra :

$$[a.c]b = [a, b]c + [b, c]a$$

Nhân *vô hướng* với b, ta có :

$$[a, c](b^2) = [a, b](c, b) + [b, c](a, b)$$

Do a, b, c là vectơ đơn vị, ta được công thức

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha.\cos\beta + \cos\alpha.\sin\beta \quad (4)$$

Từ đó suy ra $\sin(\alpha - \beta)$, $\cos(\alpha + \beta)$, $\cos(\alpha - \beta)$, v.v.

3. Đường thẳng, giao điểm của hai đường thẳng

a) Đường thẳng. Ta hãy xác định một đường thẳng bằng cách cho điểm A và phương u (vectơ) của nó. Đường thẳng đi qua A, theo phương u, là quỹ tích điểm M sao cho $\overrightarrow{AM}$ đồng phương với u, tức là

$$[\overrightarrow{AM}, u] = 0$$

hay là

$$[M - A, u] = 0 \qquad (5)$$

Bạn đọc nhớ rằng ta kí hiệu $\overrightarrow{OM}$ và $\overrightarrow{OA}$ lần lượt bằng M, A (với O là gốc đã chọn cho các vectơ bán kính của các điểm). Có thể nói (5) là *phương trình* của đường thẳng, trong đó M là *điểm chạy* trên đường thẳng.

b) Giao của hai đường thẳng

Cho thêm một đường thẳng thứ hai, đi qua B, theo phương v (khác u), mà phương trình là

$$[B - M, v] = 0,\ [u, v] \neq 0 \qquad (6)$$

Ta hãy đặt $M = \alpha u + \beta v \qquad (7)$

và buộc M thỏa mãn cả (5) và (6), sẽ được

$$\left.\begin{array}{l}[A - \alpha u - \beta v, u] = 0\\ [B - \alpha u - \beta v, v] = 0\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases}[A, u] + \beta[u, v] = 0\\ [B, v] - \alpha[u, v] = 0\end{cases}$$

Từ đó, ta rút ra α, β rồi thay vào (7), được giao điểm của hai đường thẳng (5) và (6) là :

$$M = \frac{[B, v]u - [A,u]v}{[u, v]} \qquad (8)$$

4. Điều kiện đồng quy của ba đường thẳng

Lại cho thêm đường thẳng thứ ba với phương trình là :

$$[C - M, W] = 0 \qquad (9)$$

Ba đường thẳng (5), (6) và (9) là đồng quy nếu và chỉ nếu giao của hai đường (5) và (6), cho bởi (8), thỏa mãn phương trình (9). Điều kiện đó là :

$$[[u, v]C - [B, v]u + [A, u]v, W] = 0$$

hay là

$$[u, v][C, W] + [v, W][A, u] + + [W, u][B, v] = 0 \qquad (10)$$

Ấy là điều kiện đồng quy cho 3 đường thẳng (5), (6) và (9).

Chú ý. 1) Có thể lấy điểm C làm gốc các vectơ buộc. Khi ấy $C = 0$. Điều kiện (10) trở nên

$$[v, W][A, u] + [W, u][B, v] = 0 \qquad (11)$$
$$(C = 0)$$

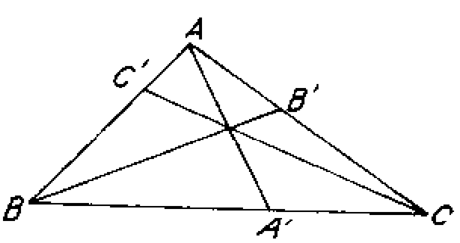
2) Nếu mỗi đường thẳng được xác định bằng 2 điểm, tức nếu cho 3 đường thẳng AA', BB', CC', thì ta lấy các vectơ chỉ phương là :

$u = AA' = A' - A$, $v = \overrightarrow{BB'} = B' - B$,

$W = \overrightarrow{CC'} = C' - C$ rồi áp dụng điều kiện (10) hoặc (11).

5. Định lí Céva

Cho tam giác ABC. Trên các cạnh (có thể kéo dài) BC, CA, AB, lần lượt cho các điểm A', B', C'. Hãy tìm điều kiện đồng quy cho 3 đường thẳng AA', BB', CC'.



Hình

Như trong bài trước ở mục nói về định lí Menelaus (THVTT số 2–1985), ta hãy đặt :

$$\alpha = \left(\frac{\overrightarrow{A'B}}{\overrightarrow{A'C}}\right), \beta = \left(\frac{\overrightarrow{B'C}}{\overrightarrow{B'A}}\right), \gamma = \left(\frac{\overrightarrow{C'A}}{\overrightarrow{C'B}}\right).$$

Từ đó, ta suy ra :

$$A' = \frac{B - \alpha C}{1 - \alpha}, B' = \frac{C - \beta A}{1 - \beta}, C = \frac{A - \gamma B}{1 - \gamma}$$

Chọn $C = 0$, ta có :

$$A' = \frac{B}{1 - \alpha}, B' = \frac{-\beta}{1 - \beta}, C' = \frac{A - \gamma B}{1 - \gamma}$$

Ta lại có :

$$u = A' - A = \frac{B - (1 - \alpha)A}{1 - \alpha}$$

$$v = B' - B = \frac{-\beta A - (1 - \beta)B}{1 - \beta}$$

$$w = C' - C = C' = \frac{A - \gamma B}{1 - \gamma}$$

Áp dụng điều kiện (11), ta sẽ được

$$(1 + \alpha\beta\gamma)[A, B]^2 = 0$$

Nhưng $[A, B] \neq 0$, cho nên

$$\alpha\beta\gamma = -1 \qquad (12)$$

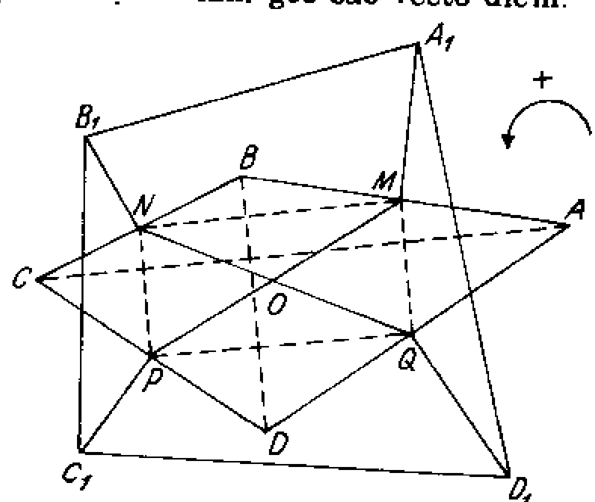
6. Bài toán 7/142 của báo THVTT số 5–1985

Đề bài : – Trên các cạnh của tứ giác lồi có diện tích S, về phía ngoài, dựng các hình vuông. Tâm các hình vuông đó tạo thành một tứ giác có diện tích S_1. Chứng minh :

a) $S_1 > 2S$

b) $S_1 = 2S$ khi và chỉ khi các đường chéo của tứ giác ban đầu bằng nhau và vuông góc với nhau.

Giải. Cho tứ giác lồi $ABCD$. Ta gọi M, N, P, Q lần lượt là các trung điểm của AB, BC, CD, DA. Hai đoạn MP và NQ có giao điểm O mà ta biết là trung điểm của mỗi đoạn. Ta gọi A_1, B_1, C_1, D_1 lần lượt là tâm các hình vuông dựng trên AB, BC, CD, DA về phía ngoài. Chọn O làm gốc các vectơ điểm.



Hình

a) Ta hãy tính S.

Ta có :

$$2S = [\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}] + [\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}]$$
$$= [\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DB}]$$
$$= [\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{DB}]$$
$$= [2\overrightarrow{NM}, 2\overrightarrow{PN}]$$
$$= 4[M - N, N - P]$$
$$= 4[M - N, N + M]$$
$$2S = 8[M, N] \quad (1)$$

Ở đây, ta nhớ rằng $P = -M$, $Q = -N$.

b) Bây giờ tính S_1

Ta hãy đặt :

$\overrightarrow{AB} = 2u$, $\overrightarrow{BC} = 2v$, $\overrightarrow{CD} = 2w$, $\overrightarrow{DA} = 2r$.

Ta gọi u', v', w', r' lần lượt là ảnh của các vectơ u, v, w, r trong phép quay một góc vuông theo chiều âm tức $-\pi/2$. Ta thấy rằng :

$$A_1 = M + u',\ B_1 = N + v',\ C_1 = -M + w',\ D_1 = -N + r' \quad (2)$$

Ta có :

$$2S_1 = [A_1, B_1] + [B_1, C_1] + [C_1, D_1] + [D_1, A_1] \text{ hay là}$$
$$2S_1 = [M + u', N + v'] + [N + v', -M + w'] + [-M + w', -N + r'] + [-N + r', M + u']$$
$$2S_1 = 4[M, N] + 2[M, v' - r'] + 2[N, w', u'] + [u', v'] + [v', w'] + [w', r'] + [r', u'] \quad (3)$$

Do phép quay bảo toàn tích ngoài, cho nên :

$$[u', v'] = [u, v] = \frac{1}{4}[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}] = \frac{1}{2}S_{ABC}$$

Cũng vậy ta có :

$$[v', w'] = [v, w] = \frac{1}{2}S_{BCD}$$
$$[w', r'] = [w, r] = \frac{1}{2}S_{CDA}$$
$$[r', u'] = [r, u] = \frac{1}{2}S_{ABD}$$

Cộng lại, được :

$$[u', v'] + [v', w'] + [w', r'] + [r', u'] = S = 4[M, N] \quad (4)$$

Mặt khác nếu gọi A', B', C', D' là các vectơ ảnh của A, B, C, D trong phép quay góc $-\pi/2$, thì :

$$\left.\begin{array}{l} 2(v' - r') = C' - B' + D' - A' = -4M' \\ 2(w' - u') = D' - C' + A' - B' = -4N' \end{array}\right\} \quad (5)$$

trong đó M', N' là các vectơ M, N đã quay góc $-\pi/2$ tức $M' = \frac{1}{2}(A' + B') = -\frac{1}{2}(C' + D')$

$$N' = \frac{1}{2}(B' + C') = -\frac{1}{2}(D' + A')$$

Từ kết quả (5) ta có :

$$2[M, v' - r'] + 2[N, w' - u'] = -4[M, M'] - 4[N, N'] = 4(m^2 + n^2) \quad (6)$$

Vì nếu đặt $[M] = m$ và $[N] = n$ thì :

$-[M, M'] = [M]^2 = m^2$, $-[N, N'] = [N]^2 = n^2$

Vậy hệ thức (3) cho ta :

$$2S_1 = 8[M, N] + 4(m^2 + n^2)$$

hoặc

$$S_1 = 4[M, N] + 2(m^2 + n^2)$$

hoặc

$$S_1 = 8[M, N] + 2(m^2 + n^2) - 4[M, N]$$
$$= 2S + 2(m^2 + n^2 - 2mn\sin\theta)$$

trong đó θ là góc hai vectơ M, N.

Cuối cùng ta có thể viết :

$$S_1 = 2S + 2[(m - n)^2 + 2mn(1 - \sin\theta)] \quad (7)$$

Từ kết quả trên, ta suy ra ngay kết luận của bài toán.

Nhận xét thêm. Ta hãy để ý hai đường chéo của tứ giác $A_1B_1C_1D_1$. Ta có (theo (2) và (5)) :

$$p = \overrightarrow{A_1C_1} = C_1 - A_1 = -2M + w' - u' = -2M - 2N = -2(M + N)$$
$$q = \overrightarrow{B_1D_1} = D_1 - B_1 = -2N + r' - v' = -2N + 2M' = 2(M' - N)$$

Cho quay $-\pi/2$, sẽ được

$$p' = -2(M' - N) = -q.q' = 2(-M - N') = p$$

Vậy ta có :

$$[p, p'] = [q, q'] = [-p, q]$$

tức là :

$$[p]^2 = [q]^2 = [p, q]$$

Kết luận là : hai đường chéo A_1C_1 và B_1D_1 bằng nhau và vuông góc với nhau.

7. Bài toán 1 thi quốc tế 1985

Đề bài : Cho một đường tròn tâm ở trên cạnh AB của một tứ giác lồi $ABCD$ và tiếp xúc với 3 cạnh còn lại. Chứng minh rằng nếu tứ giác nội tiếp, ta có $AD + BC = AB$.

Giải. Ta gọi O là tâm của vòng tròn đã cho, nằm trên AB, và lấy nó làm gốc các vectơ bán kính cho các điểm. Ta đặt :

$AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$.

$\overrightarrow{OB} = \lambda\overrightarrow{OA}$ tức $B = \lambda A (\lambda \neq 1)$.

Điều ta phải chứng minh là :

$$a = b + d \qquad (1)$$

Điểm O phải cách đều các cạnh BC, CD, DA bằng r, cho nên

$$\frac{[B, C]}{b} = \frac{[C, D]}{c} = \frac{[D, A]}{d} = 2r \qquad (2)$$

Mặt khác điều kiện

$$\widehat{A} + \widehat{C} = \widehat{B} + \widehat{D} = \pi$$

kéo theo

$$\begin{cases} \sin\widehat{A} = \sin\widehat{C} \\ \sin\widehat{B} = \sin\widehat{D} \end{cases}$$

hay là

$$\begin{cases} \dfrac{[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}]}{a.d} = \dfrac{[\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CB}]}{b.c} \\ \dfrac{[\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}]}{a.b} = \dfrac{[\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}]}{c.d} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{[B - A, D - A]}{a.d} = \dfrac{[D - C, B - C]}{b.c} \\ \dfrac{[C - B, A - B]}{a.b} = \dfrac{[A - D, C - D]}{c.d} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{[B, D] + [D, A]}{a.d} = \dfrac{[D, B] + [B, C] + [C, D]}{b.c} \\ \dfrac{[C, A] + [B, C]}{a.b} = \dfrac{[A, C] + [D, A] + [C, D]}{c.d} \end{cases}$$

Căn cứ vào (2) và chú ý rằng $B = \lambda$, $[A, B] = 0$, ta đi đến :

$$\begin{cases} \dfrac{1 - \lambda}{a} = \dfrac{b + c + \lambda d}{b.c} \\ \dfrac{\lambda - 1}{a} = \dfrac{b + \lambda c + \lambda d}{c.d} \end{cases}$$

hay là :

$$\frac{1 - \lambda}{a} = \frac{b + c + \lambda d}{b.c} = \frac{- b - \lambda c - \lambda d}{c.d} =$$

$$= \frac{(1 - \lambda)c}{bc + cd} = \frac{1 - \lambda}{b + d}.$$

So sánh hai tỉ số đầu và cuối $(\lambda \neq 1)$, ta có

$$a = b + d$$

Đó là điều phải chứng minh.

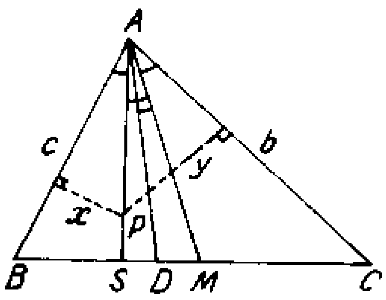
CHUNG QUANH ĐƯỜNG TRUNG TUYẾN

NGUYỄN TƯỜNG

Về đường trung tuyến thì còn có vấn đề gì nữa để nói với các bạn ? Đường trung tuyến chia tam giác ra làm hai phần có diện tích bằng nhau, đường trung tuyến là quỹ tích của những điểm có tỉ số khoảng cách đến hai cạnh kề của tam giác thì tỉ lệ nghịch với độ dài của hai cạnh, quỹ tích này còn có thêm một đường thẳng nữa đi qua đỉnh và song song với cạnh đối diện của tam giác, ba đường trung tuyến của tam giác thì đồng quy tại một điểm gọi là trọng tâm của tam giác v.v... Quả là các bạn đã biết hết mọi chuyện về đường trung tuyến, thế thì còn có vấn đề gì để nói nữa ? Ấy thế mà vẫn còn có vấn đề để nói nữa đây. Đó là những vấn đề có liên quan đến đường trung tuyến.

Trong hình tam giác thường ABC, xuất phát từ đỉnh A, ta vẽ đường trung tuyến AM và đường thẳng AS đối xứng với đường trung tuyến AM qua đường phân giác AD (S là giao điểm của AS với cạnh BC của tam giác). Ta sẽ gọi tên đường AS là đường *đối trung* của tam giác ABC, xuất phát từ đỉnh A (dĩ nhiên trong tam giác có ba đường đối trung tương ứng với ba đường trung tuyến). Câu chuyện "Chung quanh đường trung tuyến" mà tôi muốn ngỏ cùng với các bạn là những vấn đề thuộc về đường đối trung này.

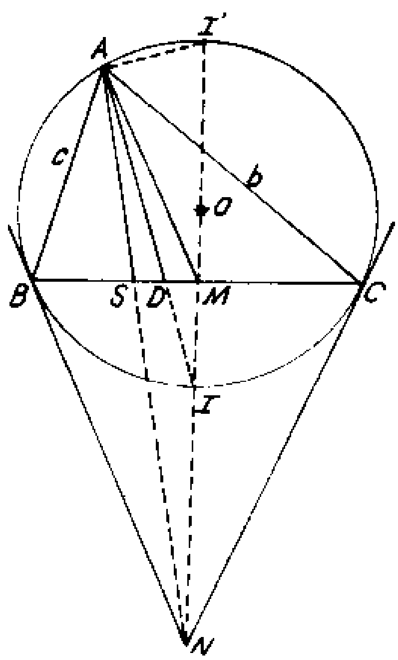
1. Đường đối trung xuất phát từ một đỉnh của tam giác là quỹ tích của những điểm có tỉ số khoảng cách đến hai cạnh kề của tam giác tỉ lệ thuận với độ dài của hai cạnh, tức là $p \in AS \Leftrightarrow x/c = y/b$ (xem hình 1). Ta cũng dễ dàng nhận thấy quỹ tích này còn có thêm một đường thẳng nữa là đường tiếp tuyến



Hình 1

với đường tròn ngoại tiếp của tam giác tại đỉnh xuất phát của đường đối trung.

2. Đường đối trung xuất phát từ một đỉnh của tam giác đi qua giao điểm của hai đường tiếp tuyến với đường tròn ngoại tiếp của tam giác tại hai đỉnh kia (xem hình 2).



Hình 2.

Chứng minh.

Gọi N là giao điểm của hai đường tiếp tuyến với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại B và C, I là giao điểm của đường phân giác AD với đường tròn ngoại tiếp. II' là đường kính.

Ta phải chứng minh AN là đường đối trung, tức là đường thẳng AN đối xứng với đường trung tuyến AM qua đường phân giác AD. Rõ ràng hàng điểm $(MNII')$ là hàng điểm điều hòa (vì $OI^2 = OM.ON$), góc $\widehat{IAI'} = 1$ vuông, suy ra AI là đường phân giác của góc $\widehat{MAN}$. Vậy AN đối xứng với AM qua phân giác AD hay AN là đường đối trung của tam giác ABC xuất phát từ đỉnh A.

3. Đường đối trung chia cạnh của tam giác thành hai đoạn thẳng tỉ lệ với bình phương độ dài của hai cạnh kề, tức là $SB/SC = c^2/b^2$. Chứng minh tính chất này dựa trên nhận xét :

$$\frac{SB}{SC} = \frac{\text{diện tích } ABS}{\text{diện tích } ASC}.$$

4. Ta có $\dfrac{AS}{AM} = \dfrac{2bc}{b^2 + c^2}$. Chứng minh dành cho bạn.

5. Tổng bình phương các khoảng cách từ một điểm bất kì nằm trên một cạnh của tam giác đến hai cạnh kia sẽ đạt cực tiểu khi điểm đó trùng với chân đường đối trung tương ứng với cạnh đó.

Chứng minh. Gọi P là một điểm bất kì nằm trên cạnh BC của tam giác ABC. x và y là khoảng cách từ P đến cạnh AB và AC, rõ ràng ta có $cx + by = 2s$ (s là diện tích tam giác ABC). Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacốpxki ta được :

$$(cx + by)^2 = 4s^2 \leqslant (c^2 + b^2)(x^2 + y^2)$$

Từ đây suy ra $\min\limits_{x,y}(x^2 + y^2) = \dfrac{4s^2}{c^2 + b^2}$ đạt tại điểm P có tính chất $x/c = y/b$, tức là $P \equiv S$ (chân đường đối trung AS).

6. Ba đường đối trung của một tam giác đồng quy tại một điểm. Dễ dàng chứng minh tính chất này bằng cách sử dụng một trong các tính chất kể trên của đường đối trung.

7. Tổng bình phương các khoảng cách từ một điểm bất kì trong mặt phẳng tam giác đến ba cạnh của nó sẽ đạt cực tiểu khi điểm đó trùng với giao điểm của ba đường đối trung.

Chứng minh tính chất này tương tự như chứng minh tính chất 5.

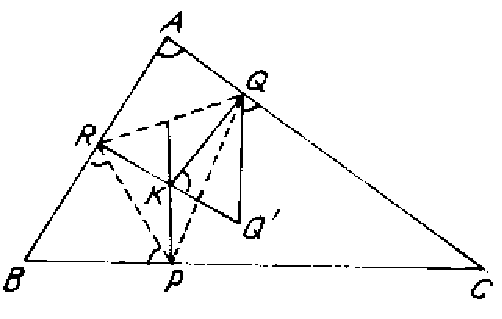
8. Gọi giao điểm của ba đường đối trung của tam giác ABC là K. Từ K hạ ba đường vuông góc KP, KQ, KR xuống ba cạnh của tam giác ABC. Điểm K chính là trọng tâm của tam giác PQR.

Chứng minh. (xem hình 3)

Kéo dài RK ra đoạn $KQ' = RK$.

Do tính chất 1 : $KR/AB = KQ/AC$

hay $KQ'/AB = KQ/AC$ và $\widehat{QKQ'} = \widehat{A}$, suy ra hai tam giác $KQ'Q$ và ABC đồng dạng với nhau. Do đó góc $\widehat{KQQ'} = \widehat{C}$ hay $KP // QQ'$, như vậy KP đi qua điểm giữa của RQ hay KP nằm trên đường trung tuyến xuất phát từ đỉnh P của tam giác PQR. Tương tự



Hình 3

chứng minh đối với KQ và KR. Vậy K là trọng tâm của tam giác PQR.

9. Tam giác PQR có diện tích bằng $\dfrac{12S^3}{(a^2+b^2+c^2)c^2}$ trong đó s là diện tích của tam giác ABC ; a, b, c là độ dài các cạnh.

10. Trong tất cả các hình tam giác nội tiếp trong tam giác ABC thì tam giác PQR là tam giác có tổng bình phương các cạnh là bé nhất.

Chứng minh tính chất này dựa trên nhận xét : Tổng bình phương các khoảng cách từ một điểm bất kì trên một đường thẳng cho trước đến hai điểm cố định cho trước sẽ đạt cực tiểu khi điểm đó trùng với chân đường vuông góc hạ từ điểm giữa của hai điểm cố định xuống đường thẳng cho trước.

Sơ bộ qua 10 điểm thú vị mà tôi đã ngỏ cùng các bạn trong câu chuyện "Chung quanh đường trung tuyến", câu chuyện sẽ còn dài, đề nghị các bạn hãy chứng minh tỉ mỉ các tính chất 1, 3, 4, 6, 7, 9, 10 xem đó là những bài tập phải hoàn thành ở nhà. Chúc các bạn học giỏi môn Toán.

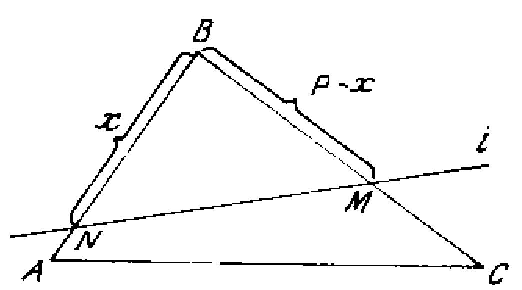
VỀ MỘT TÍNH CHẤT CỦA TAM GIÁC VÀ TỨ DIỆN

HOÀNG ĐỨC TÂN

Các bạn thân mến !

Việc tìm kiếm các tính chất của tam giác (và tương tự cho tứ diện) là một việc làm rất thú vị, song cũng không phải là một việc làm dễ dàng mà nó đòi hỏi ta phải suy luận liên tục. Chẳng hạn, các bạn có thể dễ dàng thấy rằng có vô số đường thẳng chia chu vi của tam giác thành hai phần bằng nhau, và cũng có vô số đường thẳng chia diện tích của tam giác thành hai phần bằng nhau (việc chứng minh là dễ dàng). Tuy nhiên từ đây xuất hiện vấn đề.

Bài toán 1. Có tồn tại hay không một đường thẳng đồng thời chia đôi chu vi và chia đôi diện tích của một tam giác ABC cho trước hay không ?



Câu trả lời là : có ! Và sau đây là cách chứng minh.

Giả sử ΔABC có các cạnh a, b, c (tương ứng với các đỉnh A, B, C và chu vi $2p$. Một cách tổng quát, ta có thể giả thiết $a \geqslant b \geqslant c$. Mục đích của ta là phải tìm điểm N trên cạnh BA (tức là phải tìm $x = BN > 0$) sao cho trên cạnh BC có điểm M thỏa mãn hệ thức $MB = p - x$ và đoạn MN chia đôi diện tích ΔABC. Rõ ràng x cần tìm phải thỏa mãn điều kiện.

$$0 \leqslant x \leqslant c \qquad (1)$$

và

$$0 \leqslant p - x \leqslant a \qquad (2)$$

Mặt khác, ta phải có

$$\frac{1}{2} = \frac{dt\,(BMN)}{dt(ABC)} = \frac{BN\,.\,BM}{BC\,.\,BA} = \frac{x(p-x)}{ac}$$

Tức là :

$$2x^2 - 2px + ac = 0 \qquad (3)$$

Do vậy ta phải tìm nghiệm x của phương trình (3) thỏa mãn các điều kiện (1) và (2).

Xét (3) ta có : $\Delta' = p^2 - 2ac$.

Do $b \geqslant c$ nên :

$$p^2 - 2ac = (a + b + c)^2/4 - 2ac = = (1/4)[(a + b + c)^2 - 8ac] \geqslant \geqslant (1/4)[(a + 2c)^2 - 8ac] = (1/4)(a - 2c)^2 \geqslant 0.$$

Tức $\Delta' \geqslant 0$. Vậy (3) có nghiệm là :

$$x_1 = (1/2)(p + \sqrt{p^2 - 2ac}) \text{ và}$$

$$x_2 = (1/2)(p - \sqrt{p^2 - 2ac}).$$

Hiển nhiên là $x_1 \geqslant 0$ và $x_2 \geqslant 0$.

a) Giả sử $x = x_1$.

Rõ ràng (1) $\Leftrightarrow (1/2)(p + \sqrt{p^2 - 2ca}) \leqslant c$

$$\Leftrightarrow \sqrt{p^2 - 2ac} \leqslant 2c - p.$$

Vậy ta phải có $2c - p \geqslant 0$. (Nếu $c < 1/2$ thì xét $x = x_2$).

Giả thiết $c \geqslant p/2$. Khi đó

$$(1) \Leftrightarrow p^2 - 2ac \leqslant (2c - p)^2 = 4c^2 - 4cp + p^2$$

$$\Leftrightarrow -a \leqslant 2c - 2p = 2c - a - b - c$$

$$\Leftrightarrow c \geqslant b.$$

Do giả thiết $a \geqslant b \geqslant c$, nên ta suy ra : $a \geqslant b = c \geqslant p/2$. (*) Nên trong trường hợp tam giác ABC cân, đỉnh A thỏa mãn điều kiện (*) thì bài toán đã được giải, lúc đó $x = x_1$.

b) Giả sử $x = x_2$. Ta có

$$(1) \Leftrightarrow (1/2)(p - \sqrt{p^2 - 2ac}) \leqslant c$$

$$\Leftrightarrow p - 2c \leqslant \sqrt{p^2 - 2ac}.$$

+ Tập hợp $p - 2c \leqslant 0$ thì (1) là hiển nhiên đúng với $x = x_2$.

+ Tập hợp $p - 2c > 0$ thì

$$(1) \Leftrightarrow p^2 - 2ac \geqslant (p - 2c)^2 = p^2 - 4cp + 4c^2$$

$$\Leftrightarrow -a \geqslant -2p + 2c = 2c - a - b - c$$

$\Leftrightarrow b \geqslant c$ (đúng do giả thiết $a \geqslant b \geqslant c$).

Vậy với $x = x_2$ thì (1) thỏa mãn.

Mặt khác

$$(2) \Leftrightarrow p - x = (1/2)(p + \sqrt{p^2 - 2ac}) \leqslant a$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{p^2 - 2ac} \leqslant 2a - p.$$

Vì $a \geqslant b \geqslant c$ nên rõ ràng là $a \geqslant p/2$, hay $2a - p \geqslant 0$. Vậy

$$(2) \Leftrightarrow p^2 - 2ac \leqslant (2a - p)^2 = 4a^2 - 4ap + p^2$$

$$\Leftrightarrow -c \leqslant 2a - a - b - c$$

$\Leftrightarrow a \geqslant b$ (đúng do giả thiết $a \geqslant b \geqslant c$).

Vậy với $x = x_2$ thì các trường hợp (1) và (2) đều được thỏa mãn cả.

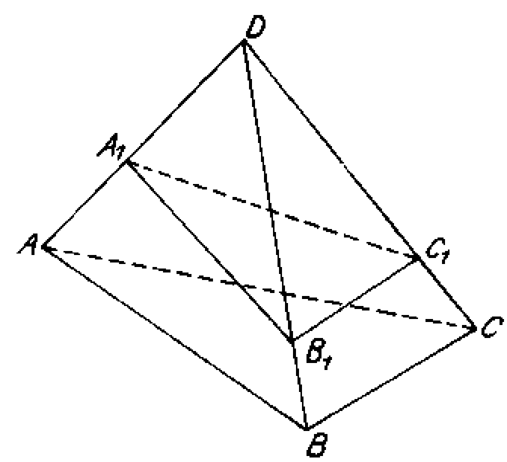
Tóm lại, tồn tại (ít nhất) là $x = x_2$ đối với một tam giác cho trước bất kì để cho bài toán 1 là có lời giải (đpcm).

Bạn đọc có thể dễ dàng chứng minh được rằng đường thẳng (đi qua M, N) phải tìm đó là luôn luôn đi qua tâm đường tròn nội tiếp của tam giác ABC (chứng minh bằng phản chứng).

Bài toán 1 đã được giải, song ta chưa dừng lại, bởi xuất hiện bài toán tương tự trong không gian.

Bài toán 2. Có hay không một mặt phẳng thiết diện cắt góc tam diện của một tứ diện $ABCD$ cho trước sao cho nó chia đôi diện tích toàn phần của tứ diện thành hai phần bằng nhau và chia đôi thể tích của tứ diện thành hai phần bằng nhau ?

Vì khuôn khổ bài báo có hạn nên ở đây tôi chỉ xin trình bày ý của cách chứng minh bài toán này.



Giả sử tứ diện $ABCD$ có diện tích các mặt là S_A, S_B, S_C, S_D(tương ứng với các đỉnh A, B, C, D). Một cách tổng quát ta có thể xem rằng :

$$S_A \leqslant S_B \leqslant S_C \leqslant S_D \qquad (*)$$

Giả thử rằng thiết diện phải tìm là $(A_1 B_1 C_1)$ (xem hình vẽ). Đặt : $DA_1/DA = 1/x$, $DB_1/DB = 1/y$, $DC_1/DC = 1/z$.

Do giả thiết bài ra ta có :

$$\frac{1}{2} \frac{V_{DA_1B_1C_1}}{V_{DABC}} = \frac{1}{xyz} \Leftrightarrow xyz = 2. \qquad (1)$$

và

$$S_{DA_1B_1} + S_{DB_1C_1} + S_{DC_1A_1} = (1/2)(S_A + S_B + S_C + S_D)$$

$\Leftrightarrow S_{A/yz} + S_{B/xz} + S_{C/xy}$
$= (1/2)(S_A + S_B + S_C + S_D)$
$\Leftrightarrow xS_A + yS_B + zS_C =$

$$(1/2)(S_A + S_B + S_C + S_D) \qquad (2)$$

Hơn thế nữa x, y, z thỏa mãn điều kiện

$$x \geq 1, y \geq 1, z \geq 1. \qquad (3)$$

Bài toán trở thành là có tồn tại x, y, z thỏa mãn (1), (2), (3) hay không ? Rõ ràng là các điều kiện (2) và (3) là tương đương với điều kiện sau (các bạn hãy chứng minh thử xem) :

$(xyz)_{max} = (S_A + S_B + S_C + S_D)^3$;
(27 SA SB SC),(a_1)

$(xyz)_{min} = 1 + S_D/\max\{S_A, S_B, S_C\}(a_2)$

(Đẳng thức (a_1) nhận được khi $xS_A = yS_B = zS_C$). Thay (2) vào (a_1) và (a_2) ta sẽ thấy ràng bài toán là giải được nếu :

$$S_AS_BS_C \leq (S_A + S_B + S_C + S_D)^3/54 \qquad (a'_1)$$

và :

$$\max\{S_A, S_B, S_C\} \geq S_D. \qquad (a'_2)$$

Ta chứng minh rằng từ (*) ta suy ra được các bất đẳng thức (a'_1) và (a'_2). Thật vậy, đặt $S_A + S_B + S_C + S_D = S$. ta có :

$S_AS_BS_C \leq (S_A + S_B)^2 S_C/4 \leq$
$\leq [(2/3)(S_A + S_B + S_B)]^2 S_C/4 =$
$= (S - S_C)^2 S_C/9 \leq (2S/3)^2(S/3)/9 =$
$= 4S^3/243/ < S^3/54$

Vậy (a'_1) được chứng minh xong (bởi vì hàm $(S - x)^2X$ đạt giá trị cực tiểu khi $x = S/3$)

Và (a'_2) cũng là thỏa mãn do điều kiện (*). Và thế là ta đã chứng minh được sự tồn tại của thiết diện phải tìm. Bạn đọc cũng sẽ dễ dàng thấy rằng thiết diện phải tìm nhất thiết phải đi qua tâm mặt cầu nội tiếp tứ diện $ABCD$.

Sau cùng xin mời các bạn cùng thử giải bài toán hay sau đây :

Bài toán 3. Giả sử a, b, c, là các cạnh của một tam giác bất kì. Đặt $S = a + b + c$ và $T = ab + bc + ca$. Chứng minh.

$$3T \leq S^2 \leq 4T.$$

Bài toán 4. Giả sử $a_1, a_2, ..., a_6$ là cạnh của tứ diện bất kì.

$$\text{Đặt } S = \sum_{i=1}^{6} a_i \quad \text{và } T = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{6} (a_i + j)$$

Khi đó ta cũng có

$$3T \leq S^2 < 4T.$$

Xin chúc các bạn thành công và đạt nhiều kết quả trong việc tìm kiếm thêm nhiều tính chất lí thú khác nữa của tam giác và tứ diện.

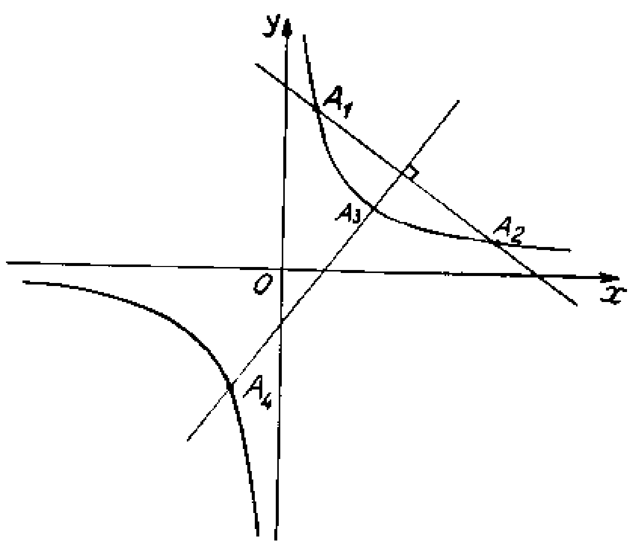
B – KHAI THÁC CÁC BÀI TOÁN, ĐỊNH LÍ

ĐƯỜNG HYPÉCBÔN VUÔNG

HOÀNG DOANH

Ta đã biết rằng đường biểu diễn phương trình bậc hai $xy = k$ ($k \neq 0$) là đường hypécbôn vuông. Để cho việc tính toán dưới đây được dễ dàng, ta giả thiết $k = 1$, tuy vậy vẫn không làm mất tính tổng quát, bởi vì muốn $k > 0$ ta chỉ việc thay đổi chiều của một trục tọa độ, và muốn hypécbôn đã cho có $k = 1$ thì ta thay đổi đoạn thẳng trên các trục tọa độ.

Nghiên cứu đường hypécbôn vuông ta tìm thấy nhiều tính chất đáng chú ý ; xin giới thiệu với các bạn một vài điều rất lí thú.



Hình 1

1. Tam giác nội tiếp và tiếp tuyến của hypécbôn

Nếu điểm $A_1(x_1, y_1)$ thuộc hypécbôn $xy = 1$ thì ta có

$(x_1 y_1 0 = 1$ hay $y_1 = 1/x_1$ (hình 1). Góc nghiêng φ do dây cung A_1A_2 của hypécbôn tạo với chiều dương của trục x được xác định bởi công thức :

$$k_{12} = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1) = \text{tg}\varphi \qquad (1)$$

ở đây x_2, y_2 là tọa độ điểm A_2, $y_2 = 1/x_2$, k_{12} là hệ số góc của dây cung A_1A_2. Từ công thức (1) ta suy ra :

$$k_{12} = (1/x_2 - 1/x_1)/(x_2 - x_1) = -1/x_1x_2 \qquad (2)$$

Nếu dây cung A_3A_4 vuông góc với dây cung A_1A_2 thì tương tự công thức (2), ta có :

$$k_{34} = \text{tg}\varphi' = -1/x_3x_4 \qquad (2')$$

với $|\varphi' - \varphi| = 90^\circ$, hoặc $\text{tg}\varphi = -\text{ctg}\varphi'$. Điều đó có nghĩa là

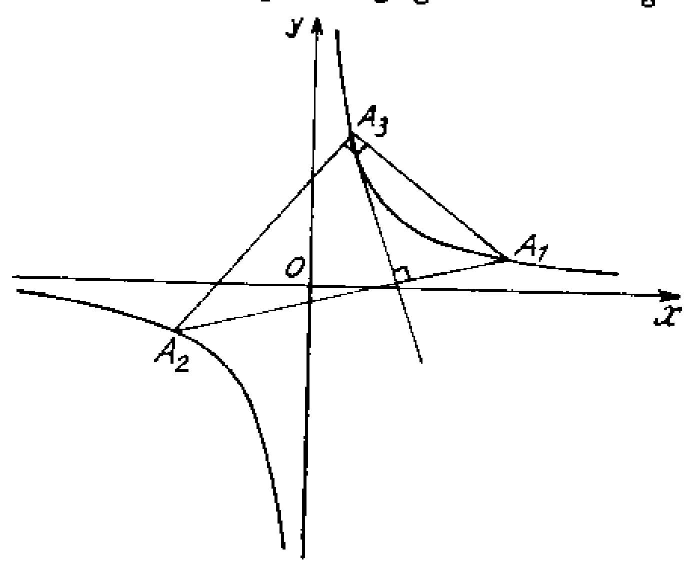
$$k_{12} = -1/k_{34}$$

hoặc là $k_{12}.k_{34} = -1 \qquad (3)$

Thay các giá trị của k_{12} và k_{34} tìm được ở kết quả (2) và (2') đẳng thức (3), ta được :

$$x_1x_2x_3x_4 = -1 \qquad (4)$$

Hệ thức (4) là điều kiện cần và đủ để hai dây cung A_1A_2 và A_3A_4 vuông góc với nhau. Hơn nữa, từ (4) ta cũng suy được rằng dây cung A_1A_3 vuông góc với dây cung A_2A_4 và dây cung A_1A_4 vuông góc với dây cung A_2A_3. Như vậy, những đầu mút A_1, A_2, A_3 và A_4 của hai dây cung vuông góc của đường



Hình 2

hypécbôn vuông hợp thành "bốn điểm trực tâm" nghĩa là mỗi một trong bốn điểm đó là giao điểm của các đường cao của tam giác mà đỉnh là ba điểm còn lại, chẳng hạn điểm A_4 là điểm trực tâm của tam giác $A_1A_2A_3$. Đó là điều chứng minh cho định lí dưới đây :

Định lí : Nếu tam giác $(A_1A_2A_3)$ nội tiếp trong hypécbôn vuông thì trực tâm (A_4) của nó cũng thuộc hypécbôn đó.

Điều đáng chú ý nữa là trường hợp đặc biệt : tam giác $A_1A_2A_3$ vuông góc. Chẳng hạn góc A_3 vuông (hình 2), khi A_3A_1 vuông góc với A_3A_2, theo hệ thức (4) ta có : $x_1x_2x_3^2 = -1$. Nếu qua A_3 ta kẻ đường thẳng vuông góc với A_1A_2, nó cắt hypécbôn tại một điểm A_4, ta có : $x_1x_2x_3x_4 = -1$.

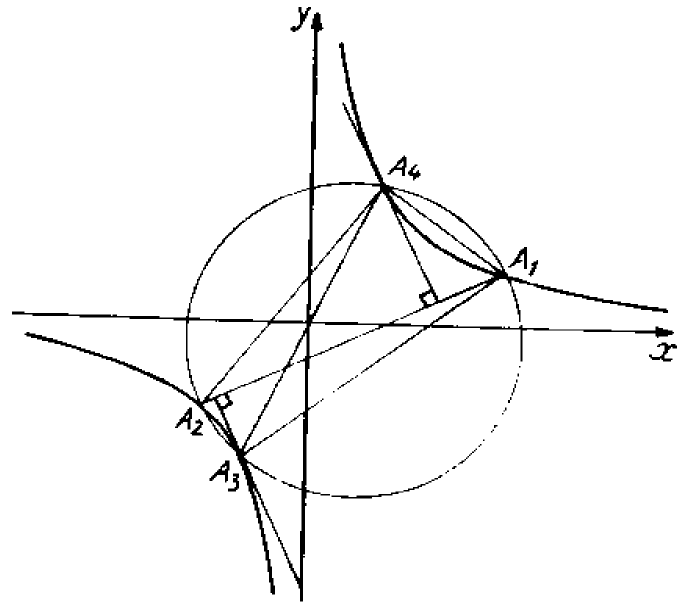
Nhưng bây giờ $x_3 = x_4$, do đó A_4 trùng với A_3 $(A \equiv A)$. Như vậy, đường thẳng vuông góc với dây cung A_1A_2 kẻ từ điểm A_3, là tiếp tuyến với hypécbôn tại điểm A_3. Do đó ta có phương pháp đơn giản để vẽ tiếp tuyến với hypécbôn tại một điểm đã cho trên hypécbôn : muốn vẽ tiếp tuyến tại điểm A_3 thì từ A_3 ta kẻ hai dây cung A_3A_1 và A_3A_2 nào đó vuông góc nhau ; rồi từ A_3 ta kẻ đường thẳng vuông góc với A_1A_2, đường thẳng vuông góc này chính là tiếp tuyến tại điểm A_3. Hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm A_3 bằng $-1/x_3^2$.

Các hệ quả :

1) Đỉnh các góc nhọn của tam giác vuông nội tiếp trong đường hypécbôn vuông, thuộc về các nhánh khác nhau của hypécbôn đó.

2) Nếu xét tập hợp các tam giác vuông có chung đỉnh góc vuông và cùng nội tiếp trong một đường hypécbôn vuông thì tất cả các đường huyền của chúng song song với nhau, hay là cùng vuông góc với một tiếp tuyến.

3) Hai tiếp tuyến của hypécbôn vuông không bao giờ vuông góc với nhau.



Hình 3

4) Hai tiếp tuyến song song của hypécbôn vuông có các tiếp điểm đối xứng với nhau đối với tâm của hypécbôn đó (tâm của hypécbôn $xy = k$ $(k \neq 0)$ là gốc 0 của hệ trục tọa độ).

2. Hypécbôn vuông và đường tròn :

Ta vẽ 1 đường tròn nào đó cắt đường hypécbôn tại 4 điểm sao cho hai điểm trong 4 điểm đó là các đầu đường kính của đường tròn. Giả sử đoạn thẳng A_1A_2 là đường kính đường tròn (hình 3). Thế thì tam giác $A_1A_2A_3$ và $A_1A_2A_4$ là tam giác vuông ; các tiếp tuyến với hypécbôn tại A_3 và A_4 cũng vuông góc với cạnh huyền chung A_1A_2 (theo kết quả ở mục 1) do đó các tiếp tuyến ấy song song với nhau. Hơn nữa các tiếp điểm của chúng đối xứng với nhau đối với tâm của hypécbôn (theo hệ quả 1 ở mục 1) tức là A_3A_4 là các đường kính của hypécbôn.

Định lí : Nếu đường tròn cắt hypécbôn vuông tại bốn điểm sao cho hai điểm trong bốn điểm đó là các đầu đường kính của đường tròn, thì hai điểm kia là các đầu đường kính của đường hypécbôn và ngược lại.

SUY NGHĨ VỀ MỘT BÀI TOÁN

LÊ THỐNG NHẤT

Trong các bài toán thi vào Đại học năm 1972 của khối *A* có một bài về chứng minh bất đẳng thức. Đó là bài số 4 :

"Cho bốn số thực u, v, x, y sao cho $u^2 + v^2 = 1$ và $y^2 + x^2 = 1$". Chứng minh rằng :

$$-\sqrt{2} \leq u(y-x) + v(x+y) \leq \sqrt{2}$$

Bắt đầu nhìn vào giả thiết ; "bốn số thực v, u, x, y" rồi lại "$u^2 + v^2 = 1$ và $y^2 + x^2 = 1$". Chúng ta liên tưởng rất nhanh đến cái đẳng thức lượng giác "lợi hại" : $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ và nảy ra ý định chuyển bài toán này qua lượng giác. Ta có *lời giải thứ nhất :*

Đặt $u = \cos\alpha$; $v = \sin\alpha$; $x = \cos\beta$; $y = \sin\beta$. Do đó :

$$P = u(y - x) + v(x + y) = \cos\alpha(\sin\beta - \cos\beta) +$$
$$+ \sin\alpha(\cos\beta + \sin\beta) = (\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)$$
$$- (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) =$$
$$= \sin(\alpha + \beta) - \cos(\alpha + \beta) =$$
$$= \sqrt{2}\sin(\alpha + \beta - \pi/4)$$

$$\text{vì } -1 \leqslant \sin(\alpha + \beta - \frac{\pi}{4}) \leqslant 1$$

Nên :

$$-\sqrt{2} \leqslant P \leqslant \sqrt{2} \text{(đpcm)}$$

Vẫn với cái ý nghĩ đưa về lượng giác. Nhưng ta tiến thêm một bước. Nhìn trong P ta thấy u và v đứng riêng lẻ, ta đặt chúng dưới dạng lượng giác một cách riêng lẻ. Còn x và y đứng với nhau, có sự "gắn bó" hơn bởi cái "dấu cộng", "dấu trừ". Ta nẩy ra ý nghĩ : cứ để sự "gắn bó" ấy mà chuyển qua lượng giác. Ta thử :

$$y - x = \sin\alpha \;;\; y + x = \cos\alpha$$

Vậy thì $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 2$.

Vô lí quá ! Nhưng không lo, nếu ta đặt khác đi một tí thì tránh được chuyện đó :

$(y - x)/\sqrt{2} = \sin\alpha$; $(y + x)/\sqrt{2} = \cos\alpha$

ta có $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

Thế là được rồi ! Ta giải *cách thứ 2* :

Đặt : $u = \cos\beta$; $v = \sin\beta$

$(y - x)/\sqrt{2} = \sin\alpha$, $(y + x)/\sqrt{2} = \cos\alpha$

Ta phải chứng minh

$$-\sqrt{2} \leqslant u(y - x) + v(y + x) \leqslant \sqrt{2}$$

Hay là : chia cả các vế cho $\sqrt{2}$:

$$-1 \leqslant u(y - x)/\sqrt{2} + v(y + x)/\sqrt{2} \leqslant 1$$

Chuyển qua lượng giác, ta phải chứng minh :

$$-1 \leqslant \cos\beta\sin\alpha + \sin\beta\cos\alpha \leqslant 1$$
$$\Leftrightarrow -1 \leqslant \sin(\alpha + \beta) \leqslant 1$$

Đây là điều đã biết ! (đpcm).

Nếu ta đã quen với việc chứng minh bất đẳng thức, thì ta lại có thể có ý nghĩ liên hệ khác. Ta lướt qua trong đầu các bất đẳng thức : Bất đẳng thức Cô-si à ? Bất đẳng thức Cô-si chỉ phát biểu cho các số dương thôi. Ở đây u, v, x, y là những số thực cơ mà !

Thế thì còn bất đẳng thức gì nhỉ ?...

À ! bất đẳng thức Bunhiacôpxki thì có lẽ được, bởi nó phát biểu cho các số thực ! Như thế nào nhỉ ?

Cho A, B, C, D là các số thực. Ta có :

$$(A^2 + B^2)(C^2 + D^2) \geqslant (AC + BD)^2$$

Hay là

$$\sqrt{(A^2 + B^2)(C^2 + D^2)} \geqslant AC + BD \geqslant$$
$$\geqslant -\sqrt{(A^2 + B^2)(C^2 + D^2)}$$

Đến đây ta nhìn nó giống giống cái bất đẳng thức của ta ? Và ta đặt thử $A = u$, $C = y - x$, $B = v$, $D = y + x$. Quả nhiên ta có *lời giải thứ ba :*

Đặt như ta vừa nói, theo bất đẳng thức Bunhiacôpxki ta có :

$$\sqrt{(u^2 + v^2)\,[(y - x)^2 + (y + x)^2]} \geqslant P \geqslant$$
$$\geqslant -\sqrt{(u^2 + v^2)\,[(y - x)^2 + (y + x)^2]}$$

hay $\quad \sqrt{1\,.\,(y^2 + x^2 + y^2 + x^2)} \geqslant P \geqslant$

$$\geqslant -\sqrt{1(y^2 + x^2 + y^2 + x^2)}$$

hay $\quad \sqrt{2} \geqslant P \geqslant -\sqrt{2}$ (đpcm)

Ta lại suy nghĩ về cái biểu thức P. Ta thử "phá ngoặc" ra xem sao :

$$P = uy - ux + vx + vy$$
$$= (uy + vx) + (vy - ux)$$

Nếu đặt $A = (uy + vx)$, $B = (vy - ux)$, ta có $P = A + B$.

Mà :

$$A^2 + B^2 = u^2y^2 + v^2x^2 + 2xyuv +$$
$$+ v^2y^2 + u^2x^2 - 2xyuv =$$
$$= y^2(u^2 + v^2) + x^2(u^2 + v^2)$$
$$= y^2 + x^2 = 1.$$

Vậy ta phải chứng minh

$$-\sqrt{2}\sqrt{A^2 + B^2} \leqslant A + B \leqslant \sqrt{2}\sqrt{A^2 + B^2}$$
$$\Leftrightarrow (A + B)^2 \leqslant (A^2 + B^2)^2$$
$$\Leftrightarrow (A.1 + B.1)^2 \leqslant (A^2 + B^2)(1^2 + 1^2)$$

Lại dạng Bunhiacôpxki ! Ta chứng minh xong. Như vậy cho tới đây ta *đã có 4 lời giải*.

Nhưng từ đầu đến giờ, ta chưa để ý đến một vấn đề rất dễ nhận thấy. Các số u, v rồi lại v, u... x, y rồi lại y, x. Nhìn kĩ các giả thiết ta thấy u, v có vai trò như nhau và x, y cũng không khác nhau về "địa vị" trong giả thiết. Tức là trong phần kết luận ta có thể thay x cho y và ngược lại ; u cho v và ngược lại, thậm chí thay cặp u, v cho cặp x, y cũng được. Từ cách nhìn ấy ta lại có thể có nhiều cách giải khác :

Cách giải thứ 5 :

Ta dùng phản chứng.

Giả sử

$$u(y - x) + v(x + y) > \sqrt{2}$$

Thế thì do vai trò x, y như nhau ta có :

$$u(x - y) + v(x + y) > \sqrt{2} \quad (2)$$

Cộng vế với vế của (1) và (2) :

$$2v(x + y) \geqslant 2\sqrt{2}$$

hay $\quad vx + vy > \sqrt{2} \quad (3)$

Nhưng theo bất đẳng thức Bunhiacôpxki

$$(vx + vy)^2 \leqslant (v^2 + v^2)(x^2 + y^2) =$$

$$= 2v^2 \leqslant 2$$

(vì $-1 \leqslant v < 1$)

Hay : $-\sqrt{2} \leqslant vx + vy \leqslant \sqrt{2} \quad (*)$

Vậy (3) mâu thuẫn với (*). Suy ra (1) không xảy ra, tức là :

$$P \leqslant \sqrt{2}$$

Giả sử $u(y - x) + v(x + y) < -\sqrt{2}$

Tương tự ta cũng có mâu thuẫn. Nên $P \geqslant -\sqrt{2}$

Kết hợp lại : $\sqrt{2} \geqslant P \geqslant -\sqrt{2}$ (đpcm)

Cách thứ 6 :

Vẫn dùng phản chứng. Nhưng đổi vai trò của u, v

Giả sử $u(y - x) + v(x + y) > \sqrt{2} \quad (1')$

Thế thì $v(y - x) + v(x + y) > \sqrt{2} \quad (2')$

Do đó $2(uy + vy) > 2\sqrt{2}$

$$yv + yu > \sqrt{2} \quad (3')$$

Tương tự cách giải 5 ta phải có $-\sqrt{2} \leqslant yv + yu \leqslant \sqrt{2}$ (**) (dùng Bunhiacôpxki). Vậy xảy ra mâu thuẫn giữa (3') và (**) $\Rightarrow P \leqslant \sqrt{2}$.

Vẫn đổi vai trò u, v ta cũng có $P \geqslant -\sqrt{2}$.

Vậy $\sqrt{2} \geqslant P \geqslant -\sqrt{2}$

Cách giải thứ 7 :

Vẫn dùng phản chứng. Nhưng đổi x cho y và ngược lại, đồng thời đổi vai trò của v, u.

Giả sử $u(y - x) + v(x + y) > \sqrt{2} \quad (1'')$

Thế thì $v(x - y) + u(x + y) > \sqrt{2} \quad (2'')$

Do đó $2uy + 2vx > 2\sqrt{2}$

$$uy + vx > \sqrt{2} \quad (3'')$$

Nhưng ta có :

$(uy + vx)^2 \leqslant (u^2 + v^2)(y^2 + x^2)$

$-\sqrt{2} \leqslant uy + vx \leqslant \sqrt{2} \quad (***)$

Vậy (3'') mâu thuẫn với (***). Suy ra $P \leqslant \sqrt{2}$.

Tương tự : $P \geqslant -\sqrt{2}$.

Vậy $\sqrt{2} \geqslant P \geqslant -\sqrt{2}$ (đpcm)

Qua ba cách sau cùng, ta rút ra một điều : khi giải toán cần chú ý đến vai trò của các phần tử. Ở bài toán này là vai trò giữa các số. Còn có một số bài toán hình học khác, đó là vai trò của điểm với nhau, của đường với nhau, của đường và điểm, v.v...

TRỞ LẠI MỘT BÀI TOÁN VỀ DÃY PHIBÔNAXI

L.T.S. – Trong bài "Vài mẩu chuyện về thi vô địch toán" (THTT số 30, trang 15) có kể chuyện Balatxơ được giải nhất về kì thi vô địch toán lần thứ 9 ở Matxcơva (năm 1946) vì đã có nhiều suy nghĩ sáng tạo khi giải bài toán sau đây : "cho dãy số

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, ...

trong đó mỗi số, kể từ số thứ ba, bằng tổng của hai số đứng trước nó (*). Hỏi trong số $10^8 + 1$ số hạng đầu tiên của dãy, có số nào tận cùng bằng bốn chữ số 0 không ?" Balatsơ đã tìm cách giải bài toán tổng quát hơn và khó hơn nhiều : đánh số tất cả các số hạng tận cùng bằng bốn chữ số 0.

Tòa soạn đã nhận được thư nhiều bạn đọc hỏi về lời giải bài toán mà Balatsơ đã đề ra. Tòa soạn rất hoan nghênh những bạn đã cố gắng giải bài toán ấy ; đó là biểu hiện rõ rệt của phong cách học tập tích cực, chủ động ; với cách đọc báo toán như vậy, với cách học như vậy, chắc chắn các bạn sẽ đạt được kết quả tốt.

Tòa soạn xin giới thiệu với bạn đọc lời giải của bài toán trên.

Ta kí hiệu các số hạng của dãy bằng a_i $(i = 0, 1, 2, \ldots n)$:

$$a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 2, a_4 = 3, \ldots$$

như vậy *a_i là số hạng thứ $i + 1$ của dãy.* Theo định nghĩa, ta có, với mọi $m \geqslant 2$:

$$a_m = a_{m-1} + a_{m-2} \quad (1)$$

1. Ta đi tìm công thức liên hệ a_m với các số hạng khác nữa đứng trước nó. Vì $a_1 = a_2 = = 1$, nên (1) có thể viết :

$$a_m = a_2\, a_{m-1} + a_1\, a_{m-2} \quad (2)$$

(*) Dãy số này được gọi là một "dãy Phibônaxi" (Phibônaxi là nhà toán học Ý ở thế kỉ 16)

Áp dụng công thức (1) cho a_{m-1} (giả sử $m \geq 3$) ta được :

$$a_m = a_2(a_{m-2} + a_{m-3}) + a_1 a_{m-2}$$
$$= (a_1 + a_2) a_{m-2} + a_2 a_{m-3}$$

$$a_m = a_3 a_{m-2} + a_2 a_{m-3} \qquad (3)$$

Tiếp tục áp dụng (1) cho a_{m-2} (giả sử $m \geq 4$), rồi thay vào (3) ta được

$$a_m = a_4 a_{m-3} + a_3 a_{m-4} \qquad (4)$$

So sánh (2), (3), (4), ta có thể *dự đoán* công thức tổng quát :

$$a_m = a_k a_{m+1-k} + a_{k-1} a_{m-k} \qquad (5)$$

trong đó m là số tự nhiên tùy ý $m \geq 2$ và k là số tự nhiên $\leq m (1 \leq k \leq m)$. Ta chứng minh (5) bằng *truy toán* theo k :

Với *bất kì số tự nhiên m nào* ($m \geq 2$), công thức (5) bao giờ cũng đúng với $k = 1$. Thực vậy, thay $k = 1$ vào (5), ta được

$$a_m = a_1 a_m + a_o a_{m-1},$$

đẳng thức này đúng vì $a_1 = 1$, $a_o = 0$.

Giả sử (5) đúng với k, $1 \leq k \leq m - 1$, tức là

$$a_m = a_k a_{m+1-k} + a_{k-1} a_{m-k}$$

là đúng. Ta chứng minh công thức đúng với $k + 1$. Thực vậy, vì $k \leq m - 1$, nên $m + 1 - k \geq 2$, nên ta có thể áp dụng công thức (1) cho a_{m+1-k} :

$$a_{m+1-k} = a_{m-k} + a_{m-(k+1)}$$

do đó

$$a_m = a_k (a_{m-k} + a_{m-(k+1)}) + a_{k-1} a_{m-k}$$
$$= a_{m-k} (a_k + a_{k-1}) + a_k a_{m-(k+1)}$$

Mà

$$a_k + a_{k-1} = a_{k+1}$$

nên

$$a_m = a_{k+1} a_{m-k} + a_k a_{m-(k+1)}$$

chứng tỏ (5) cũng đúng cho $k + 1$. Như vậy (5) đúng với mọi số tự nhiên $k \leq m$, dpcm.

Công thức (5) là công thức mà ta sẽ sử dụng nhiều. Chú ý rằng với $m = 2p + 1$ và lấy $k = p + 1$, công thức với (5) trở thành

$$a_{2p+1} = a_{p+1}^2 + a_p^2 \qquad (6)$$

2. Ta đã biết điều kiện cần và đủ để một số tận cùng bằng n chữ số 0 (chia hết cho 10^n) là nó đồng thời chia hết cho 2^n và 5^n.

Ta đi tìm những số hạng chia hết cho 2^n (và cho 5^n) bằng cách *mò mẫm* dựa trên một số *trường hợp đặc biệt*.

Trước hết, ta xét số dư trong phép chia a_i cho 2. Ta sẽ kí hiệu $R_2(a_i)$ là số dư đó. Ta có bảng sau đây :

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12 ...
$R_2(a_i)$	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0 ...

Để lập bảng này, không cần phải tính a_i theo i, mà tính đơn giản hơn : vì $a_o = 0$, $a_1 = a_2 = 1$, nên $R_2(a_o) = 0$, $R_2(a_1) = R_2(a_2) = 1$; sau đó vì $a_3 = a_2 + a_1$ nên để tính $R_2(a_3)$ ta lấy số dư trong phép chia tổng $R_2(a_2) + R_2(a_1) = 1 + 1 = 2$ cho 2, tức là $R_2(a_3) = 0$; tương tự như vậy, $R_2(a_4) = 1$ vì là số dư trong phép chia $R_2(a_3) + R_2(a_2) = 0 + 1$ cho 2, v.v.. Qua bảng, ta thấy $R_2(a_3) = R_2(a_6) = R_2(a_9) = ... = 0$, tức là a_3, a_6, a_9, ..., tổng quát là a_{3p} (p là số tự nhiên tùy ý) chia hết cho 2 (ta viết $a_{3p} \vdots 2$).

Để tìm những số hạng chia hết cho $2^2 = 4$, ta lập bảng $R_{2^2}(a_i)$, tức là bảng số dư trong phép chia a_i cho 2^2. Ta có

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12 ...
$R_{2^2}(a_i)$	0	1	1	2	3	1	0	1	1	2	3	1	0 ...

(lập tương tự như bảng trên : $R_{2^2}(a_5)$ chẳng hạn là số dư trong phép chia tổng $R_{2^2}(a_3) + R_{2^2}(a_4) = 2 + 3 = 5$ cho 2^2, tức $R_{2^2}(a_5) = 1$).

Ta thấy $R_{2^2}(a_6) = R_{2^2}(a_{12}) = ... = R_{2^2}(a_{6p}) = 0$, tức $a_{6p} \vdots 2^2$. Tiếp tục lập bảng và xét như trên, ta có $a_6 \vdots 2^3$, tổng quát là $a_{6p} \vdots 2^3$, $a_{12} \vdots 2^4$, tổng quát là $a_{12p} \vdots 2^4$.

Từ những kết quả đó, có thể dự đoán và chứng minh được.

Định lí I. Nếu $a_s \vdots r$ *thì* $a_{sp} \vdots r$ (p là số tự nhiên tùy ý).

Thực vậy, rõ ràng là định lí đúng với $p = 1$.

Giả sử định lí đúng với p, tức $a_{sp} \vdots r$, ta chứng minh $a_{s(p+1)} \vdots r$. Ta có, theo công thức (5) :

$$a_{s(p+1)} = a_{sp+1} a_s + a_{sp} a_{s-1}$$

mà

$a_s \vdots r$ và $a_{sp} \vdots r$, nên $a_{s(p+1)} \vdots r$ (dpcm).

Trở lại các kết quả ở trên. Ta có :

$a_3 \vdots\ 2,\ a_6 \vdots\ 2^2,\ a_6 \vdots\ 2^3,\ a_{12} \vdots\ 2^4$ hay

$a_{3.2^0} \vdots\ 2, a_{3.2^1} \vdots\ 2^2, a_{3.2^1} \vdots\ 2^3, a_{3.2^2} \vdots\ 2^4$

Quy luật là gì ? Chú ý rằng ta cũng có $a_{12} \vdots\ 2^3$, $a_{24} \vdots\ 2^4$, nên có thể viết :

$a_{3.2^0} \vdots\ 2, a_{3.2^1} \vdots\ 2^2, a_{3.2^2} \vdots\ 2^3, a_{3.2^3} \vdots\ 2^4,$

và từ đây có thể dự đoán :

$$a_{3.2^{n-1}} \vdots\ 2^n \text{ chăng ?}$$

Ta chứng minh bằng truy toán. Rõ ràng là kết quả đúng với $n = 1$. Giả sử kết quả đúng với n, ta chứng minh cũng đúng với $n + 1$. Theo (5),

$$a_{3.2^n} = a_{3.2^{n-1}} . a_{3.2^{n-1}+1} = a_{3.2^{n-1}-1} a_{3.2^{n-1}}$$

$$= a_{3.2^{n-1}}(a_{3.2^{n-1}+1} + a_{3.2^{n-1}-1})$$

Theo giả thiết truy toán thì $a_{3.2^{n-1}} \vdots\ 2^n$, còn $a_{3.2^{n-1}\pm 1}$ có dạng $a_{3p\pm 1}$, mà $R_2(a_{3p\pm 1}) = 1$ (theo bảng 1), cho nên tổng trong dấu ngoặc chia hết cho 2, từ đó suy ra $a_{3.2^n} \vdots\ 2^{n+1}$ (đpcm).

Vậy ta có

Định lí II : $a_{3.2^{n-1}} \vdots\ 2^n$ (n là số tự nhiên tùy ý)

Nếu chú ý rằng

$a_6 = a_{3.2^1} \vdots\ 2^3$; $a_{12} = a_{3.2^2} \vdots\ 2^4$.

ta có thể đề ra và chứng minh dễ dàng định lí sau :

Định lí II' :

$$a_{3.2^{n-2}} \vdots\ 2^n (n > 2)$$

Bây giờ ta chuyển sang việc tìm các số hạng chia hết cho 5^n. Các bạn hãy lập bảng $R_5(a_i)$, $R_{5^2}(a_i)$... và dễ dàng thấy rằng $a_5 \vdots\ 5$, $a_{5^2} \vdots\ 5^2$, từ đó có thể đoán là $a_{5^n} \vdots\ 5^n$. Để tìm cách chứng minh điều này bằng truy toán, ta dùng công thức (5) để biểu diễn $a_{5^{n+1}}$ theo a_{5^n}. Ta có

$$a_{5^{n+1}} = a_{5^n} . a_{4.5^n+1} + a_{5^n-1} . a_{4.5^n}$$

Ta lập bảng :

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23...
$R_5(a_i)$	0	1	1	2	3	0	3	3	1	4	0	4	4	3	2	0	2	2	4	1	0	1	1	2...

Mà theo (6) thì

$$a_{4.5^n+1} = a^2_{2.5^n} + a^2_{2.5^n+1} =$$

$$= a^2_{2.5^n} + (a^2_{5^n+1} + a^2_{5^n})^2$$

và $a_{2.5^n} = a_{5^n+1} . a_{5^n} + a_{5^n} . a_{5^n-1} =$

$$= a_{5^n}(a_{5^n+1} + a_{5^n-1})$$

nên $a_{4.5^n+1} = a^2_{5^n}(a_{5^n+1} + a_{5^n-1})^2 +$

$$+ (a^2_{5^n+1} + a^2_{5^n})^2$$

Còn

$a_{4.5^n+1} = a_{2.5^n} . a_{2.5^n+1} + a_{2.5^n-1} . a_{2.5^n} =$

$= a_{2.5^n}(a_{2.5^n+1} + a_{2.5^n-1}) =$

$= a_{5^n}(a_{5^n+1} + a_{5^n-1})(a^2_{5^n+1} + 2a^2_{5^n} + a^2_{5^n-1})$

Do đó

$a_{5^n+1} = a_{5^n}\,[a^2_{5^n}(a_{5^n+1} + a_{5^n-1})^2 +$

$+ (a^2_{5^n+1} + a^2_{5^n})^2 +$

$+ a_{5^n-1}(a_{5^n+1} + a_{5^n-1}) \times$

$\times (a^2_{5^n+1} + 2a^2_{5^n} + a^2_{5^n-1})]$

Gọi biểu thức trong dấu [] là

$P(a_{5^n}, a_{5^n\pm 1})$, ta có

$$a_{5^n+1} = a_{5^n}P(a_{5^n}, a_{5^n\pm 1}) \qquad (7)$$

Bây giờ ta chứng minh rằng $a_{5^n} \vdots\ 5^n$.

a) Kết quả đúng với $n = 1$ ($a_5 \vdots\ 5$)

b) Giả sử $a_{5^n} \vdots\ 5^n$, ta chứng minh

$$a_{5^{n+1}} \vdots\ 5^{n+1}$$

Theo biểu thức (7) vừa tìm được, để chứng minh điều này, ta phải chứng minh $P(a_{5^n}, a_{5^n\pm 1})$ chia hết cho 5. Muốn vậy ta phải đi tìm số dư trong phép chia $a_{5^n\pm 1}$ cho 5 tức là đi tìm $R_5(a_{5^n\pm 1}$. Rõ ràng là : $R_5(a_{5\pm 1}) = 3$.

Quan sát bảng, ta thấy dãy $R_5(a_i)$ là *tuần hoàn, chu kì là 20*, nghĩa là $R_5(a_{20+i}) = R_5(a_i)$, tổng quát là $R_5(a_{20p+i}) = R_5(a_i)$, trong đó p là số tự nhiên tùy ý. Thực vậy, ta có

$R_5(a_{20}) = R_5(a_o) = 0$

$R_5(a_{21}) = R_5(a_1) = 1,$

do đó

$$R_5(a_{22}) = R_5(a_{20}) + R_5(a_{21}) = R_5(a_o) + R_5(a_1) = R_5(a_2),$$

$$R_5(a_{23}) = R_5(a_{21}) + R_5(a_{22}) = R_5(a_1) + R_5(a_2) = R_5(a_3), \text{ v.v...}$$

Vì vậy, do

$$5^n = 5.5^{n-1} = 5.(4+1)^{n-1} = 5(4M+1) = 20M + 5,$$

nên $R_5(a_{5^n \pm 1}) = R_5(a_{20M + (5 \pm 1)}) = R_5(a_{5 \pm 1}) = 3.$

Và ta có

$$R_5[P(a_{5^n}, a_{5^n \pm 1})] = R_5[0^2(3+3)^2 + (3^2+0^2)^2 + 3(3+3)(3^2+2.0^2+3^2) = R_5[9^2+18^2] = R_5(4^2+3^2) = R_5(25) = 0.$$

tức P chia hết cho 5 (đpcm). Ta đã chứng minh được

Định lí III :

$a_{5^n} \vdots 5^n$ với số tự nhiên n tùy ý.

Từ các định lí I, II, II', III, suy ra rằng tất cả các số hạng có dạng

$a_{M.3.2^{n-1}.5^n}$, với M là số tự nhiên tùy ý, đều chia hết cho $2^n.5^n = 10^n$ (n : số tự nhiên tùy ý) ; tất cả các số hạng có dạng $a_{M.3.2^{n-2}.5^n}$ đều chia hết cho 10^n, *với $n > 2$.*

Nói riêng trong trường hợp $n = 4$, thì tất cả các số hạng dạng $a_{M.3.2^2.5^4}$ chia hết cho 10^4, tức là tận cùng bằng bốn chữ số 0 ; đó là các số hạng thứ

$$3.2^2.5^4M + 1 = 7500M + 1,$$

nghĩa là các số hạng thứ 7501 ($M = 1$), 15001 ($M = 2$),... tận cùng bằng bốn chữ số 0.

Chú ý. 1 – Trên đây, ta chỉ mới làm được cái việc chỉ ra *một lớp các số hạng* chia hết cho 10^4 chứ *chưa giải được bài toán tổng quát mà Ba-lat-sơ đã đề ra* (tức là chỉ ra *tất cả các số hạng* chia hết cho 10^4). Để giải bài toán tổng quát đó, còn phải chứng minh rằng *chỉ có* những số hạng $a_{3.2^{4-2}.p}$ mới chia hết cho 2^4 và *chỉ có* những số hạng $a_{5^4.p}$ mới chia hết cho 5^4 (ngoài ra không còn số hạng nào khác). Muốn vậy, điều đơn giản (nhưng đòi hỏi kiên nhẫn !) là lập bảng $R_{2^4}(a_i)$ và $R_{5^4}(a_i)$ và xét trong khoảng một chu kì của các dãy này. (Một cách tổng quát, có thể chứng minh được rằng $R_\alpha(a_i)$ bao giờ cũng tuần hoàn, và chu kì không lớn hơn α^2). Các bạn thử làm xem, và qua đó, các bạn thấy rằng bài toán mà Ba-lat-sơ tự đề ra là một bài toán khá phong phú.

2 – Trên đây, ta đã chứng minh rằng số hạng thứ 7501 tận cùng bằng bốn chữ số 0. Tất nhiên, bạn sẽ đặt câu hỏi : tại sao trong đề ra, lại hỏi : "trong số $10^8 + 1$ số hạng đầu tiên của dãy..." mà không lấy số 7500 + 1 hay 10000 ? Con số $10^8 + 1$ có quan hệ gì với bài toán đã ra ? Để trả lời câu hỏi này, các bạn có thể đọc lời giải bài toán số 16 (§6) trong sách "Rèn luyện khả năng sáng tạo toán học ở trường phổ thông" của Hoàng Chúng (Nhà xuất bản Giáo dục, 1967).

Đặng Viễn và H.C.

VỀ MỘT VÀI PHƯƠNG TRÌNH ĐIÔPHĂNG

Lí thuyết các phương trình Đi-ô-phăng (*còn gọi là giải tích Đi-ô-phăng*) nghiên cứu việc giải các phương trình và hệ phương trình (với hệ số nguyên, nếu là phương trình đại số), trong phạm vi các số có dạng xác định : số hữu tỉ, số nguyên, số tự nhiên, số nguyên tố. Trong các bài toán của giải tích Đi-ô-phăng, số ẩn số thường nhiều hơn số phương trình, nên các phương trình này thường được gọi là *phương trình vô định.*

Phương trình vô định gặp nhiều trong đời sống, trong nhiều vấn đề thực tế. Chúng ta đã biết giải một số phương trình vô định qua các bài toán như "trăm trâu, trăm bó cỏ", "Hàn Tín điểm binh", ... Việc giải bài toán 4/52 trong số báo này cũng đưa ta đến việc giải phương trình vô định.

Ngay từ thời thượng cổ, các nhà toán học đã quan tâm giải các phương trình vô định. Chẳng hạn từ khoảng thế kỉ thứ 17 trước công lịch, các nhà toán học Ba-bi-lon đã biết giải các phương trình $x^2 + y^2 = z^2$ (phương trình pi-ta-go) trong phạm vi các số nguyên.

Một phần lớn các thành tựu trong lí thuyết số có thể đưa về giải tích Đi-ô-phăng. Chẳng hạn định lí nổi tiếng của Vi-nô-gơ-ra-đốp : "mọi số lẻ dương đủ lớn đều có thể viết dưới dạng tổng của ba số nguyên tố" là thuộc về giải tích Đi-ô-phăng : phương trình $x + y + z = N$ trong đó N là số lẻ dương đủ lớn là giải được trong phạm vi *số nguyên tố*. Theo nhà toán học Sê-bư-sép thì lí thuyết số chính là khoa học về giải phương trình vô định trong phạm vi các số nguyên.

Người đầu tiên nghiên cứu có hệ thống về phương trình vô định là nhà toán học Hi lạp Đi-ô-phăng, sống ở thế kỉ thứ III. Đi-ô-phăng đã biết giải một số dạng phương trình vô định (kể cả một số phương trình bậc lớn) trong phạm vi các số hữu tỉ dương, và tập sách "Số học" của Đi-ô-phăng đã có ảnh hưởng rất lớn đến sự phát triển của lí thuyết số.

Sau Đi-ô-phăng, nhiều nhà toán học lớn đã nghiên cứu về phương trình vô định : Phéc-ma (với "định lí lớn Phéc-ma" nổi tiếng : phương trình $x^n + y^n = z^n$ (n là số tự nhiên > 2) không có nghiệm trong phạm vi số tự nhiên), Ơ-le, La-gơ-răng, Gao-xơ, Cô-si, Cu-me, v.v...

Trong lịch sử toán học, giải tích Đi-ô-phăng đã nêu lên nhiều bài toán lí thú, nhiều bài toán rất khó đến nay vẫn chưa ai giải được.

Sau đây là một vài bài toán, liên quan đến nhà toán học nổi tiếng Ơ-le :

1. Trong khi nghiên cứu để đi đến phát minh ra một định lí cơ bản của lí thuyết số, Ơ-le đã chú ý đến phương trình vô định

$$4xy - x - y = z^2 \qquad (1)$$

Trong một bức thư viết cho bạn là Gôn-bách, năm 1741, Ơ-le cho biết đã chứng minh được rằng phương trình (1) cũng như phương trình.

$$4xy - x - 1 = z^2 \qquad (2)$$

đều không có nghiệm trong các số tự nhiên x, y, z. Để chứng minh điều này phải dựa vào một định lí của Phéc-ma (mà Ơ-le cũng đã chứng minh được). Ơ-le và Gôn-bách đều thấy rằng chứng minh này quá phức tạp và nghĩ rằng có thể chứng minh đơn giản hơn và cả hai đều đi tìm cách chứng minh đơn giản đó. Sau nhiều lần chứng minh dài dòng, có khi tối nghĩa và sai lầm, cuối cùng Gôn-bách đã đi đến được một chứng minh rất đơn giản và rất đẹp của định lí Ơ-le về phương trình (2) không có nghiệm số tự nhiên. Chứng minh của Gôn-bách như sau :

Giả sử (2) có nghiệm số tự nhiên x, y, z và giả sử a là giá trị tự nhiên nhỏ nhất của z thỏa mãn (2), sao cho

$$4mn - m - 1 = a^2 \qquad (3)$$

với m và n là số tự nhiên. Cộng $4m^2 - 4ma$ vào hai vế của (3) ta được

$$4m(n - a + m) - m - 1 = (a - 2m)^2 \qquad (4)$$

Dễ dàng chứng minh được rằng

$$a < m \qquad (5)$$

Thực vậy, không thể có $a = m$, vì nếu $a = m$ thì vế phải của (3) chia hết cho m và vế trái thì không chia hết cho m. Còn nếu $a > m$ thì $n - a + m < n$, và do đó vế trái của (4) nhỏ hơn vế trái của (3), tức là $(a - 2m)^2 < a^2$, điều này trái với việc xác định số a là giá trị tự nhiên *nhỏ nhất* của z thỏa mãn (2). (Chú ý rằng từ (4) thì $|a - 2m|$ cũng là giá trị của z thỏa mãn (2), trong đó $x = m$, $y = n - a + m$).

Bây giờ ta chứng minh tiếp rằng

$$4n - 1 > 2a \qquad (6)$$

Thật vậy, cộng $(4n - 1)^2 - 2a(4n - 1)$ vào hai vế của (3), ta được $(4n - 1)(m - 2a + 4n - 1) - 1 = [a - (4n - 1)]^2$, hay là $4n(m - 2a + 4n - 1) - (m - 2a + 4n - 1) + 1 = [a - (4n - 1)]^2$ do đó $z = |a - (4n - 1)|$ thỏa mãn (2) (với $y = n$, $x = m - 2a + 4n - 1$).

Vì vậy, theo sự xác định của số a, ta có $a < |a - (4n - 1)|$, từ đây, dễ dàng suy ra (6).

Từ (3), (5), (6), ta có

$$a^2 + 1 = (4n - 1)m > 2a \cdot a = 2a^2,$$

do đó $a^2 < 1$. Điều vô lí này chứng minh định lí của Ơ-le.

Ơ-le rất thích thú với chứng minh đơn giản này. Trong thư gửi cho Gôn-bách đề ngày 15 tháng 10 năm 1743, Ơ-le viết : "Thú thật là tôi không ngờ rằng định lí đó có thể chứng minh một cách dễ dàng và đẹp đẽ đến như vậy. Từ đó tôi tin rằng phần lớn các định lí của Phéc–ma cũng có thể chứng minh bằng cách tương tự, và vì vậy tôi càng cảm ơn ông đã cho tôi biết cách chứng minh đẹp đẽ đó". Và cũng chính trong bức thư này, Ơ–le đã áp dụng phương pháp của Gôn–bách để chứng minh định lí : phương trình (1) không có nghiệm trong các số tự nhiên x, y, z.

Sau đây là chứng minh của Ơ–le :

Giả sử (1) có nghiệm trong các số tự nhiên x, y, z và giả sử a là giá trị tự nhiên nhỏ nhất của z thỏa mãn (1), sao cho ta có

$$4mn - m - n = a^2 \qquad (7)$$

trong đó m và n là các số tự nhiên. Nhân hai vế của (7) cho 4 và biến đổi, ta có

$$(4m - 1)(4n - 1) - 1 = 4a^2 \qquad (8)$$

Cộng $4(4n - 1)^2 - 8a(4n - 1)$ vào hai vế của (8), ta có $[4m - 1 - 8a + 4(4n - 1)] \times$

$\times (4n - 1) - 1 = 4(a - 4n + 1)^2 (9)$

Đẳng thức (9) giống đẳng thức (8), cho thấy rằng phương trình (1) có nghiệm là $z = |a - 4n + 1|$. Theo sự xác định số a, thì

$$a < |a - 4n + 1|$$

hay

$$a^2 < (a - 4n + 1)^2,$$

do đó, từ (8) và (9) ta có

$[4m - 1 - 8a + 4(4n - 1)](4n - 1) >$

$> (4n - 1)(4m - 1)$ vì vậy $4n - 1 > 2a$.

Vì (7) là đối xứng đối với m và n, nên cũng lí luận tương tự như trên, ta có $4m - 1 > 2a$.

Đặt $4m - 1 = 2a + p$

$4n - 1 = 2a + 1$

trong đó p và q là số tự nhiên. Như vậy

$(4m - 1)(4n - 1) = 4a^2 + 2a(p + q) + pq$.

do đó, từ (8) ta suy ra $2a(p + q) + pq = 1$, với các số tự nhiên a, p, q. Điều vô lí này chứng minh định lí đã cho.

2. Trong bức thư gửi cho Gôn–bách đề ngày 2 tháng 11 năm 1747, Ơ–le đã chứng minh rằng phương trình

$$2y^4 - 1 = z^2 \qquad (10)$$

có nghiệm *hữu tỉ* y, z, khi cho $y = 1$, $y = 13$, $y = 1525/1343$, $y = 2165017/2372159$. Nhưng Ơ–le cũng thú thật rằng ông không thể tìm được nghiệm số tự nhiên nào khác ngoài hai nghiệm : $y = z = 1$ và $y = 13$, $z = 239$. Về sau, Ơ–le nêu lên một cách để tìm được vô số nghiệm hữu tỉ của phương trình (10) nhưng chưa chứng minh được rằng đó là *tất cả* các nghiệm hữu tỉ của phương trình. Sau đó nhà toán học nổi tiếng La–gơ–răng đã tìm ra một công thức cho biết tất cả các nghiệm hữu tỉ của (10). Nhiều nhà toán học tiếp tục giải quyết vấn đề nghiệm trong các số tự nhiên của phương trình (10), nhưng mãi đến năm 1942 Li–un–gơ–ren mới chứng minh được rằng phương trình (10) chỉ có hai nghiệm tự nhiên mà Ơ–le đã tìm ra.

Phương trình (10) có một vai trò quan trọng trong việc nghiên cứu nhiều vấn đề của toán học.

3. Ơ–le đã tổng quát hóa "định lí lớn Phéc–ma" thành *giả thuyết* sau đây :

Với mọi số tự nhiên k và n sao cho $2 \leq k < n$, phương trình

$$x^n + x_2^n + ... + x_k^n = x_{k+1}^n$$

không có nghiệm trong các số tự nhiên. Định lí lớn Phéc–ma ứng với trường hợp $k = 2$. Năm 1914, Vê–rê–bơ–ri–u–xốp đã nêu lên chứng minh giả thuyết Ơ–le cho trường hợp $k = 3$, $n = 4$, tức là chứng minh rằng phương trình

$$x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = x_4^4 \qquad (11)$$

không có nghiệm trong các số tự nhiên. Đích–xơn, trong cuốn sách "Lịch sử của lí thuyết số" (1920) đã kể ra công trình này của Vê–rê–bơ–ri–u–xốp. Nhưng thực ra chứng minh của Vê–rê–bơ–ri–u–xốp là sai lầm ! Ra–đi (1935), và sau đó, Bel (1936) đã tìm ra sai lầm trong chứng minh đó. Cho đến 1945, U–ao–đơ mới chứng minh được rằng phương trình (11) không có nghiệm trong các số tự nhiên, với $x_4 < 10.000^6$!

4. Còn có thể kể ra rất nhiều vấn đề lí thú chung quanh việc giải các phương trình Đi–ô–phăng, và có thể đề ra vô số các phương trình Đi–ô–phăng phức tạp, không dễ giải hơn so với các phương trình đã nêu ở trên. Nhưng phải chăng mọi phương trình đó đều đáng nghiên cứu ? Sê–bư–sép đã trả lời cho câu hỏi đó : "Mọi phương trình chứa nhiều ẩn đều là đối tượng nghiên cứu của lí thuyết số. Nhưng không phải tất cả các phương trình đó đều có thể nghiên cứu được như nhau và không phải đều có tầm quan trọng như nhau trong ứng dụng. Cho đến nay, lí thuyết số chỉ xét những phương trình đơn giản nhất và đồng thời có những ứng dụng quan trọng nhất.

NGUYỄN VĂN
(Sưu tầm)

TÍNH MỘT VÀI THỂ TÍCH

NGUYỄN DŨNG

1. Lá mỏng và dây nhỏ

Ta biết rằng thể tích một hình trụ (đáy bất kì) bằng diện tích đáy nhân với chiều cao. Như vậy thể tích của một lá mỏng (kính, sắt tây, ni lông, bằng diện tích nhân với bề dày. Điều đáng chú ý là mặt xung quanh của một lá mỏng không cần thiết phải là một mặt hình trụ (có thể xén vạt), nếu lá rất mỏng.

Thể tích của một dây hình trụ (dây thép, đồng, ni lông) bằng tiết diện nhân với chiều dài. Điều đáng chú ý là dây có thể cong đôi chút (không phải hình trụ nữa), công thức đó vẫn đúng nếu như tiết diện của dây rất nhỏ. Chẳng hạn, dây có thể cuốn thành cuộn.

2. Hình chóp

Tỉ số giữa thể tích của hai hình đồng dạng bằng lập phương của tỉ số đồng dạng. Điều này tất nhiên đúng với hai hình hộp chữ nhật kích thước $a \times b \times c$ và $ka \times kb \times kc$, cũng đúng với hai hình đồng dạng bất kì vì ta có thể coi hai hình này như cấu tạo bằng những hình hộp (những viên gạch nhỏ), với số viên gạch bằng nhau.

Bây giờ ta coi một hình chóp đáy S, cao h và một hình chóp cùng đỉnh cao $h + a$ hình thứ nhất coi như cắt ra từ hình thứ hai bằng một mặt phẳng song song với đáy (hình 1). Giả sử a rất nhỏ, hiệu số giữa thể tích của hai hình là thể tích một lá mỏng diện tích S, dày a :

$$V' - V = S \,.\, a.$$

Mặt khác hai hình chóp đồng dạng phối cảnh với tỉ số đồng dạng $(h + a)/h$,

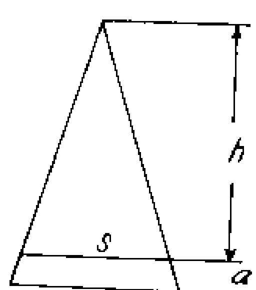
$$V'/V = [(h + a)/h]^3$$

Do đó

$$V' - V = V(V'/V - 1) =$$
$$= V[(h + a)^3 - h^3]/h^3$$
$$= V(3h^2a + 3ha^2 +$$
$$+ a^3)/h^3 = S \,.\, a$$

Từ đó ta có

$$V(3 + 3a/h + a^2/h^2) = $$
$$= S \,.\, h$$

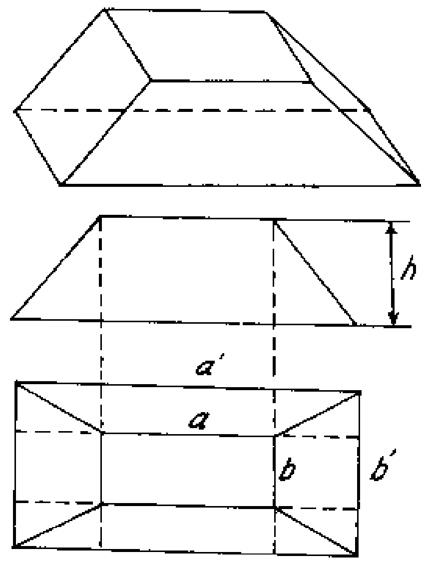


Hình 1

Trong ngoặc đơn $3\,a/h$ và a^2/h^2 rất nhỏ không đáng kể so với 3, vậy $V = S \,.\, h/3$

Đó là công thức tính thể tích hình chóp

3. Hình đống cát



Hình 2

Nếu ta cắt đống cát (hình 2) bằng các mặt phẳng thẳng đứng qua các cạnh của đáy trên thì ta đã chia đống cát thành một hình hộp ở giữa, thể tích $a.b.h$, 4 hình trụ đáy tam giác, thể tích tổng cộng

$$a(b' - b)\,h/2 + b(a' - a)\,h/2$$

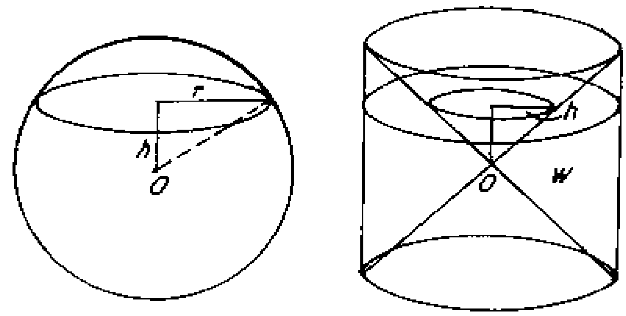
và 4 hình chóp ở bốn góc, thể tích $(a' - a)\,(b' - b)\,h/3$. Vậy thể tích đống cát bằng

$$V = (h/6)[6ab + 3a\,(b' - b) + 3b\,(a' - a) +$$
$$+ 2(a' - a)\,(b' - b)]$$

Biểu thức này có thể rút gọn thành

$$V = h\,[ab + (a + a')\,(b + b') + a'b']/6$$

4. Hình cầu



Hình 3

Coi một hình cầu bán kính R và một hình trụ bán kính R, cao $2R$, cùng đặt trên một mặt phẳng nằm ngang (hình 3). Trong hình trụ lại có hai hình nón có đỉnh ở tâm và cùng đáy với hình trụ. Mỗi hình nón này (cũng như mỗi hình nón đồng dạng với nó) có tính chất là bán kính đáy của nó bằng chiều cao của nó.

Cắt bằng một mặt phẳng nằm ngang thì tiết diện hình cầu là một vòng tròn bán kính r, diện tích $S = \pi r^2 = \pi (R^2 - h^2)$, đồng thời tiết diện hình nón là một vòng tròn có bán kính h, theo tính chất nói trên.

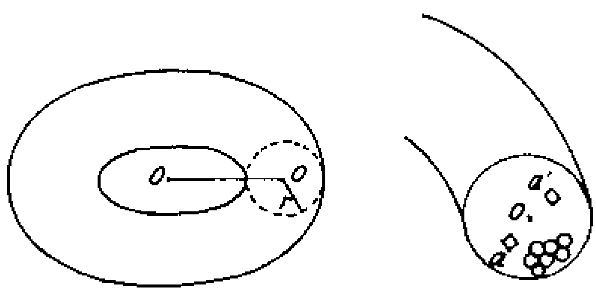
Coi khối W giới hạn giữa hình trụ và hai hình nón. Tiết diện của W là một hình khuyên, diện tích $\pi R^2 - \pi h^2 = \pi (R^2 - h^2)$, bằng diện tích tiết diện hình cầu.

Như vậy nếu chia hình cầu với hình W bằng những mặt phẳng song song nằm ngang thành những lá mỏng thì mỗi lá của hình cầu có thể tích bằng lá tương ứng của hình W do đó hình cầu có thể tích bằng hình W. Thể tích hình W bằng hiệu của thể tích hình trụ với thể tích hai hình nón, tức là bằng $\pi R^2 . 2R - (2/3) \pi R^2 . R = (4/3) \pi R^3$

Vậy thể tích hình cầu bằng

$$V = (4/3) \pi R^3$$

5. Hình xuyến (săm ô tô)

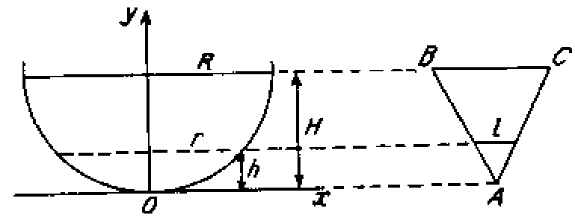


Hình 4

Chia hình xuyến thành những vòng dây (hình 4), mỗi dây đó, như nhận xét ở trên, có thể tích bằng tiết diện nhân với chiều dài. Nhưng chiều dài của một vòng dây tròn tỉ lệ với bán kính của nó, và bán kính của các vòng dây thì hơn bù kém bằng R (trong hình vẽ hai vòng dây a, a' có bán kính trung bình bằng R). Do đó thể tích hình xuyến bằng tổng tiết diện của các dây (tức πr^2) nhân với chiều dài trung bình $2\pi R$ của một vòng dây, tức là

$$V = 2\pi^2 R r^2$$

6. Hình chảo



Hình 5

Ta giả thử tiết diện bổ đôi của một hình chảo là một hình parabol, phương trình $y = \alpha x^2$ (hình 5), như vậy trong hình vẽ ta có $h = \alpha r^2$, $r^2 = (1/\alpha) h$

Tiết diện của chảo bằng mặt phẳng nằm ngang ở độ cao h có diện tích

$$S = \pi r^2 = (\pi/\alpha) h$$

như vậy tiết diện tỉ lệ với độ cao.

Trong mặt phẳng thẳng đứng coi một tam giác ABC cao h có đáy BC có số trị bằng diện tích tiết diện của chảo ở độ cao h (miệng chảo) tức là

$$\textit{số đo } BC = \textit{số đó } \pi R^2 \qquad (1)$$

Tiết diện của tam giác bằng mặt phẳng h là một đoạn thẳng có độ dài l tỉ lệ với h.

Do điều kiện (1) ta có

$$\textit{số đo } l = \textit{số đo } \pi r^2 = \textit{số đo } S$$

Ta hãy cắt cả hai hình bằng những mặt phẳng nằm ngang song song để chia hình chảo thành những lá mỏng, đồng thời chia tam giác ABC thành những băng hẹp. Diện tích của mỗi băng hẹp bằng độ dài l nhân với bề ngang, bề ngang này bằng bề dày của một lá mỏng (tương ứng) của hình chảo, như vậy số trị của diện tích mỗi băng hẹp bằng số trị của thể tích lá mỏng tương ứng. Kết quả là, về số trị, thể tích hình chảo bằng diện tích tam giác ABC. Diện tích này bằng

$$S = (1/2) BC . h$$

do đó thể tích hình chảo bằng

$$V = (1/2) \pi R^2 h$$

HAI TÍNH CHẤT ĐẶC TRƯNG CỦA TRỰC TÂM CỦA HÌNH TAM GIÁC

PHAN BÁ CẤP

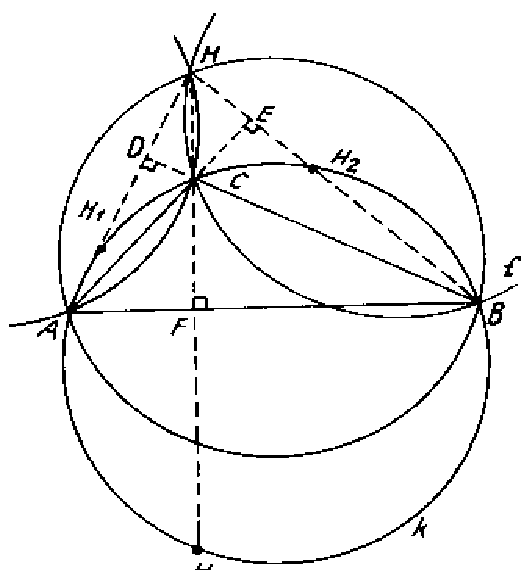
Chúng ta đã biết rằng ba đường trung tuyến của một tam giác ABC đồng quy tại một điểm G gọi là trọng tâm của tam giác đó. Một trong những tính chất đặc trưng của trọng tâm G là chia tất cả các trung tuyến theo tỉ số 2 : 1 tính từ đỉnh.

Đối với ba đường cao của tam giác ABC, ta cũng đã biết rằng chúng đồng quy tại một điểm H gọi là trực tâm của tam giác đó. Bây giờ ta hãy đi sâu phát hiện một vài tính chất đặc trưng của trực tâm H.

Gọi H_1, H_2, H_3 theo thứ tự là các điểm đối xứng của điểm H đối với các cạnh BC, CA, AB (hình 1). Dễ dàng nhận thấy rằng H_1 nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Thực vậy $\widehat{ABC} = \widehat{AHF}$ mà $\widehat{AHF} = \widehat{CH_1H}$ nên $\widehat{AH_1C} + \widehat{ABC} = \widehat{AH_1C} + \widehat{CH_1H} = 180^\circ$. Vậy H_1 thuộc đường tròn (ABC). Tương tự H_2, H_3 cũng thuộc đường tròn (ABC). Ta kí hiệu là k.

Ngược lại nếu ta gọi H'_1, H'_2, H'_3 lần lượt là các giao điểm của đường tròn k với các đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC thì cũng dễ dàng chứng minh được rằng H'_1, H'_2, H'_3 lần lượt là các điểm đối xứng của H qua BC, CA, AB. (Bạn đọc tự làm lấy).



Hình 1

Ta cũng nhận xét rằng :

Vì H_1 thuộc k mà H đối xứng với H_1 qua BC nên ta suy ra H thuộc đường tròn k_1 đối xứng với đường tròn k qua BC.

Suy luận tương tự ta có : H thuộc đường tròn k_2 đối xứng với k qua CA và H thuộc đường tròn k_3 đối xứng với k qua AB.

Tóm lại : $H = k_1 . k_2 . k_3$

Từ nhận xét trên ta suy ra tính duy nhất của điểm H. Nói cách khác nếu có 1 điểm H' đối xứng với các điểm thuộc đường tròn k qua các đường thẳng BC, CA, AB thì H' phải thuộc giao của cả ba đường tròn k_1, k_2, k_3 tức là $H' \equiv H$.

Vậy ta đi đến kết luận :

Định lí 1 :

"Các điểm đối xứng với trực tâm tam giác qua các cạnh nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác đó".

Bây giờ ta gọi : M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CA, AB của tam giác và : H_M, H_N, H_P lần lượt là các điểm đối xứng của H qua các điểm M, N, P (hình 2).

Ta có :

$\widehat{CH_MB} = \widehat{BHC}$ (đối xứng qua M)

$\widehat{BHC} = \widehat{BAC} = 90^\circ - \widehat{ABH}$

do đó

$\widehat{CH_MB} = \widehat{BAC}$

Tức H_M thuộc đường tròn k.

Tương tự H_N và H_P cũng thuộc đường tròn k.

Riêng đối với trường hợp H_P, ta cần chú ý ở đây H_P và C ở 2 phía khác nhau của AB nên ta cần chứng minh :

$\widehat{AH_PB} = \widehat{ACB} = 180^\circ$

Thực vậy $\widehat{AH_PB} = \widehat{BHA}$ (đối xứng qua P)

$\widehat{BHA} + \widehat{DCE} = 180^\circ$ ($\widehat{CDH} = \widehat{CEH} = 90^\circ$)

$\widehat{DCE} = \widehat{ACB}$ (đối đỉnh)

do đó : $\widehat{AH_PB} + \widehat{ACB} = 180^\circ$ tức H_P thuộc đường tròn k.

Vậy ta đi đến kết luận :

Định lí 2 :

"Các điểm đối xứng với trực tâm tam giác qua trung điểm các cạnh nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác đó".

Tóm tắt cả hai định lí ta có thể phát biểu :

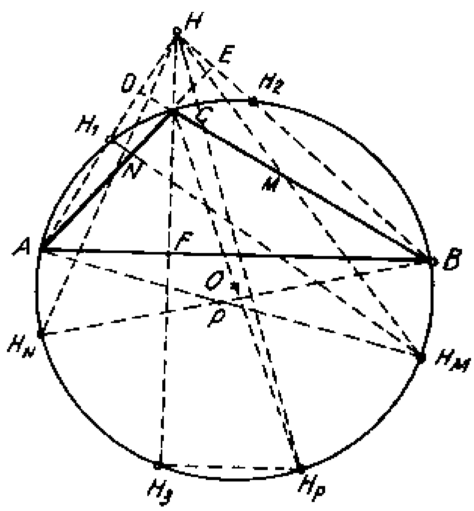
"Sáu điểm đối xứng với trực tâm qua các cạnh và trung điểm các cạnh của một tam giác cùng nằm trên một đường tròn ngoại tiếp tam giác đó".

Bây giờ ta hãy tìm hiểu thêm về đường tròn *k* xác định bởi 6 điểm đó :

+ Vẽ các điểm H_1, H_2, H_3 ta có :

$$\overset{\frown}{AH_2} = \overset{\frown}{AH_3} \ ; \ \overset{\frown}{BH_3} = \overset{\frown}{BH_1} \ ; \ \overset{\frown}{CH_1} = \overset{\frown}{CH_2}$$

(Bạn đọc tự chứng minh)



Hình 2

+ Vẽ các điểm H_M, H_N, H_P, ta có :

AH_M, BH_N, CH_P là các đường kính của đường tròn (*k*).

Thực vậy :

MD là đường trung bình của tam giác H_1HH_M mà $MD \perp AH$ do đó $\widehat{AH_1H_M} = 90^o$ suy ra AH_M là đường kính của (*k*)

Tương tự chứng minh đối với BH_N, CH_P

+ Ta lại có :

$\Delta H_MH_NH_P = \Delta ABC$ (do tính đối xứng qua tâm *O* của đường tròn *k*) và

$HA = 2 \,.\, OM \ ; HB = 2 \,.\, ON \ ; HC = 2 \,.\, OP$.

Gọi *R, S, T* lần lượt là trung điểm của *AH, BH, CH.*

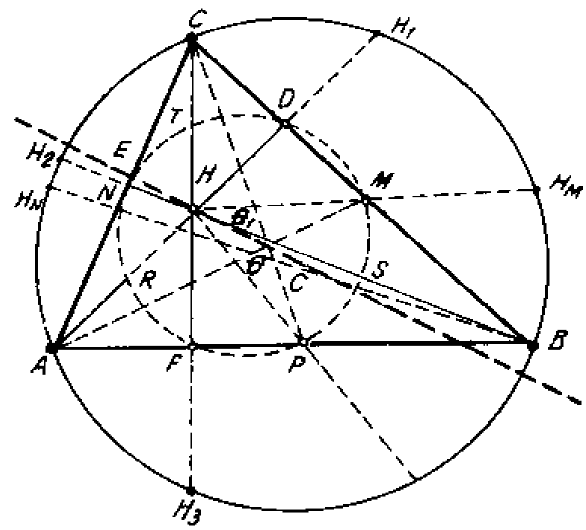
Rõ ràng phép vị tự tâm *H* tỉ số 1/2 sẽ biến các điểm $A, B, C, H_1, H_2 H_3 H_M, H_N, H_P$ thành các điểm tương ứng *R, S, T, D, E, F, M, N, P.*

Như ta đã biết 9 điểm : *R, S, T, D, E, F, M, N, P* nằm trên một đường tròn (đường tròn 9 điểm).

Kết quả trên chứng tỏ : đường tròn 9 điểm là ảnh của đường tròn *k* qua phép vị tự tâm *H* tỉ số 1/2.

Vậy đường tròn 9 điểm có bán kính bằng một nửa bán kính đường tròn *k*, và tâm O_1 thẳng hàng với *O* và *H*.

Bây giờ nếu ta lại thực hiện phép vị tự tâm *G* (trọng tâm tam giác *ABC*), tỉ số − 1/2 thì ba điểm *A, B, C* biến thành 3 điểm tương ứng :



Hình 3

M, N, P tức đường tròn *k* biến thành đường tròn 9 điểm.

$$O_1G : GO = 1 : 2$$

G thẳng hàng với O, O_1.

Từ hai kết quả trên ta suy ra :

Bốn điểm : Trực tâm *H*, trọng tâm *G*, tâm *O* của đường tròn ngoại tiếp, tâm O_1 của đường tròn 9 điểm của một tam giác cùng nằm trên một đường thẳng. Đường thẳng đó được gọi là đường thẳng ơle (hình 3).

Thế là từ việc nghiên cứu hai tính chất đặc trưng của trực tâm, chúng ta đã tìm lại được hai tính chất đã biết trong một tam giác (đường tròn 9 điểm) − và đường thẳng ơle − xem báo Toán học và tuổi trẻ số 1−1964).

Không những thế, hai tính chất vừa phát hiện ra nó còn cho phép chúng ta giải nhiều bài toán khác nhau.

Ví dụ :

1. Chứng minh rằng : Nếu các điểm đối xứng với điểm một điểm *H* thuộc đường cao

CF của một tam giác ABC qua các cạnh BC, CA (hoặc qua trung điểm các cạnh đó) nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC thì H là trực tâm tam giác đó.

2. Cho 3 điểm A, B, C trên một đường tròn. Tìm quỹ tích trực tâm của tam giác ABC khi A, B cố định, C thay đổi trên đường tròn.

3. Dựng tam giác ABC biết :

a) Trực tâm và các điểm đối xứng với trực tâm qua trung điểm các cạnh của tam giác.

b) Trực tâm và các điểm đối xứng với trực tâm qua các cạnh của tam giác.

4. Dựng tam giác ABC biết

a) Trực tâm và tâm đường tròn đi qua chân các đường cao.

b) Trực tâm và tâm đường tròn đi qua trung điểm các cạnh.

c) Trực tâm, đỉnh C và trung điểm cạnh AB.

d) Trực tâm, trung điểm cạnh BC và chân đường cao trên cạnh BA.

VỀ TAM GIÁC PITAGO

NGUYỄN ĐỨC DÂN

I. Các bạn đều biết định lí Pitago : Trong tam giác vuông bình phương cạnh huyền bằng tổng bình phương hai cạnh kia : $a^2 = b^2 + c^2$. Người ta thường gọi những tam giác vuông mà cạnh là các số nguyên là những *tam giác Pitago*. Chẳng hạn, vì $5^2 = 4^2 + 3^2$ nên ta có tam giác Pitago [5, 4, 3]. Bây giờ chúng ta thử tìm những tam giác đó.

Trước hết, nếu có tam giác [5, 4, 3] thì chúng ta dễ dàng tìm được các tam giác đồng dạng với nó : [10, 8, 6], [15, 12, 9], [20, 16, 12], ... Trong số các tam giác đồng dạng với nhau này, tam giác [5, 4, 3] có các cạnh nhỏ nhất ; chúng ta gọi nó là *tam giác Pitago gốc* hay là *tam giác Pitago nguyên thủy*. Trong tam giác gốc rõ ràng là các cạnh phải đôi một nguyên tố cùng nhau, nghĩa là hai cạnh bất kì của tam giác gốc đều không có ước số chung với nhau. Thật thế, nếu tam giác $[a, b, c]$ có a và b chia hết cho n thì ta suy ra c cũng phải chia hết cho n. Thật vậy, giả sử $a = n.a'$, $b = n.b'$ thế thì, từ $a^2 = b^2 + c^2$ ta suy ra : $n^2 . a'^2 = n^2 . b'^2 + c^2$, từ đây ta thấy ngay là c phải chia hết cho n và như thế, $[a, b, c]$ không phải là tam giác Pitago *gốc*. Cho nên để tìm các tam giác Pitago, ta chỉ cần *tìm các tam giác Pitago gốc là đủ*.

II. Một vài tam giác Pitago gốc đặc biệt.

1. Đầu tiên chúng ta xét các tam giác gốc mà cạnh nhỏ *nhất là các số lẻ*. Chúng ta tìm được một số tam giác sau đây :

[3, 4, 5], [5, 12, 3], [7, 24, 25], [9, 40, 41], ... Quy luật tìm các tam giác đó như thế nào ? Quan sát các tam giác này, chúng ta thấy một tính chất sau :

$$\begin{array}{ll} [3, 4, 5] & 3^2 = 9 = 4 + 5 \\ [5, 12, 13] & 5^2 = 25 = 12 + 13 \\ [7, 24, 25] & 7^2 = 49 = 24 + 25 \\ [9, 40, 41] & 9^2 = 81 = 40 + 41 \end{array} \qquad [1]$$

2. Gọi p, q là các số nguyên dương, ta có :

$$(p^2 + q^2)^2 = (p^2 - q^2)^2 + (2pq)^2$$

Từ hệ thức trên chúng ta được một hệ tam giác Pitago sau

$$[p^2 + q^2 , 2pq , p^2 - q^2] \qquad [2]$$

p, q như thế nào thì các tam giác [2] trở thành các tam giác [1] ?

Chúng ta có các khả năng sau :

a) Coi $p^2 - q^2$ là cạnh nhỏ nhất, thế thì :

$$(p^2 - q^2)^2 = (p - q)^2 (p + q)^2 =$$
$$= (p^2 + q^2) + 2pq = (p + q)^2$$

khi $p - q = 1$ hay là $p = q + 1$

b) Coi $2pq$ là cạnh nhỏ nhất, thế thì :

$$(2pq)^2 = (p^2 + q^2) + (p^2 - q^2) = 2p^2$$

khi $2q^2 = 1$. Diều này không thể xảy ra được vì q là số nguyên.

c) coi $p^2 + q^2$ là cạnh nhỏ nhất. Điều này không thể xảy ra được vì $p^2 + q^2 > p^2 - q^2$. Tóm lại, ta chỉ có một khả năng $p = q + 1$, lúc đó tam giác [2] trở thành

$$[2q^2 + 2q + 1, 2q\,(q + 1), 2q + 1] \qquad [3]$$

Đó là tam giác gốc có cạnh nhỏ nhất là số lẻ. Các cạnh đó nguyên tố cùng nhau. Trong tam giác [3] hai cạnh lớn hơn kém nhau một đơn vị, vậy ta rút ra một quy tắc để tìm các tam giác [3] như sau :

3. *Quy tắc :* Lấy một số lẻ bất kì làm cạnh của một tam giác vuông đem bình phương rồi trừ đi 1, một nửa của kết quả đó sẽ là một cạnh kề khác, một nửa kết quả đó cộng với 1 là cạnh huyền cần tìm.

$$11^2 \rightarrow 121 \rightarrow 60,\ 61$$

$$13^2 \rightarrow 160 \rightarrow 84,\ 85$$

4. Các tam giác đã nêu ở [1] đều có một cạnh là số *chẵn* (và chia hết cho 4). Rõ ràng là còn những tam giác vuông khác mà một cạnh là số chẵn. Ví dụ [8, 15, 17]. Có quy tắc nào để tìm những tam giác đó hay không ? Từ [2] ta sẽ suy ra được một quy tắc để tìm một số tam giác loại đó :

Ở [2] nếu đặt $q = 1$ chúng ta sẽ được

$$[p^2 + 1, 2p, p^2 - 1] \qquad [4]$$

Quan hệ giữa các cạnh trong tam giác [4] như sau :

$$(2p)^2 = 4p^2 = 2\,(p^2 + 1) + 2(p^2 - 1) \quad [5]$$

Bây giờ chúng ta lại lưu ý rằng, nếu trong [4] p là số lẻ thì nó lại trở về các tam giác đồng dạng với tam giác [3]. Thật thế, giả sử $p = 2n + 1$, tam giác [4] trở thành

$$|2(2n^2 + 2n + 1), 2.2n(n + 1), 2(2n + 1)| \quad (4')$$

Nhân đôi các cạnh của tam giác [3] ta sẽ được tam giác [4']. Như thế, để tạo các tam giác gốc, trong [4], p chỉ có thể là các *số chẵn*. Ta được

$$[4n^2 + 1, 4n, 4n^2 - 1] \qquad [4'']$$

Đó là tam giác gốc, có một cạnh là một số chia hết cho 4, các cạnh của chúng đều nguyên tố cùng nhau, cạnh huyền lớn hơn một cạnh kề hai đơn vị. Quan sát đẳng thức [5] chúng ta rút ra quy tắc tìm các tam giác [4''] như sau :

5. *Quy tắc :* Lấy một số chia hết cho 4 bất kì làm cạnh của một tam giác vuông. Một nửa bình phương của cạnh đó sẽ là tổng của cạnh huyền với cạnh góc vuông kia. Chia đôi nửa bình phương của cạnh đó, đem kết quả trừ đi 1 hoặc cộng thêm 1 ta sẽ lần lượt được cạnh kề và cạnh huyền của tam giác phải tìm.

$4^2 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 3, 5$ [5, 4, 3]

$8^2 \rightarrow 64 \rightarrow 32 \rightarrow 15, 17$ [17, 15, 8]

$12^2 \rightarrow 144 \rightarrow 72 \rightarrow 35, 37$ [37, 35, 12]

$16^2 \rightarrow 256 \rightarrow 128 \rightarrow 63, 65$ [65, 63, 16]

Ngoài [3] và [4''], chúng ta còn tìm được những tam giác gốc khác nữa.

DÙNG ĐƯỜNG TRÒN APÔLÔNIUT ĐỂ GIẢI MỘT SỐ BÀI TOÁN CỰC TRỊ

NGUYỄN CÔNG QUỲ

Chúng ta đều biết rằng : cho trước hai điểm A, B, quỹ tích những điểm M trong mặt phẳng sao cho tỉ số $MA : MB$ bằng một hằng số $k \neq 1$ là một đường tròn gọi là *đường tròn Apôlôniút*.

Cần chú ý rằng *đường tròn Apôlôniút ω chia mặt phẳng thành hai miền các điểm mà tỉ số khoảng cách đến A và B lớn hơn và nhỏ hơn k*, cụ thể là : *với $k < 1$, nếu điểm M' ở ngoài ω thì $M'A : M'B > k$, nếu điểm M' ở trong ω thì $M'A : M'B < k$; với $K > 1$ thì ngược lại.*

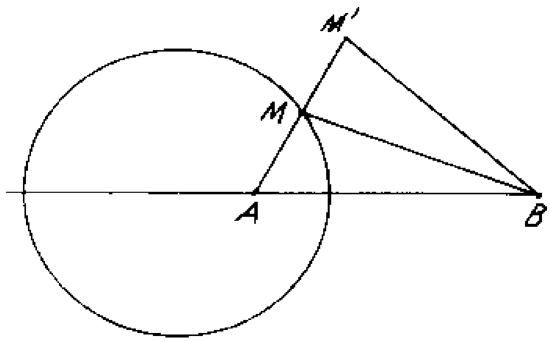
Chứng minh điều đó không có gì khó. Thật vậy, giả sử $k < 1$. Thế thì điểm A nằm trong đường tròn ω (hình 1). Nếu M' là một điểm ở ngoài ω thì đoạn thẳng $M'A$ phải cắt ω tại một điểm M nào đó (hình 1). Trong tam giác $MM'B$ ta có :

$M'B < MB + MM'$, do đó $M'A : M'B > M'A : (MB + MM') = (MA + MM') : (MB + MM')$. Vì $MA : MB = k < 1$ nên $(MA + MM') : (MB + MM') > MA : MB$ và do đó $M'A : M'B > M'A : MB$.

Các trường hợp khác (M' ở trong ω cũng như $k > 1$) cũng được chứng minh tương tự.

Tính chất đó giúp ta giải các bài toán cực trị sau đây :

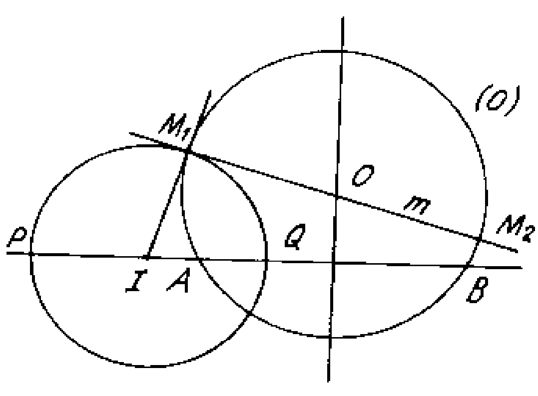
Bài toán 1. *Cho điểm M chạy trên một đường thẳng m và hai điểm A, B cố định ở ngoài m. Tìm những vị trí của điểm M ở đó tỉ số MA : MB đạt các giá trị nhỏ nhất và lớn nhất.*



Hình 1

Lời giải.

a) Trước hết xét trường hợp m không vuông góc với đường thẳng AB, ta hãy vẽ đường tròn (O) qua A, B và có tâm O trên đường thẳng m (O là giao điểm của m với trung trực đoạn AB) ; Ta sẽ chứng minh rằng các giao điểm M_1, M_2 của đường tròn này với m là những điểm cần tìm (hình 2).



Hình 2

Thật vậy, gọi I là giao điểm của tiếp tuyến tại M_1 của đường tròn (O) với đường thẳng AB. Nếu vẽ đường tròn ω tâm I bán kính $\overline{IM_1}$ cắt đường thẳng AB ở P, Q thì ta có $\overline{IM_1}^2 = \overline{IA}.\overline{IB}$ hay $\overline{IP}^2 = \overline{IA}.\overline{IB}$. Hệ thức này chứng tỏ rằng bốn điểm A, B, P, Q thành một hàng điểm điều hòa và do đó ω là đường tròn Apôlôniút của cặp điểm A, B ứng với tỉ số $M_1A : M_1B$. Vì M_1 và M_2 ở hai phía khác nhau đối với đường trung trực đoạn AB nên trong hai tỉ số $M_1A : M_1B$ và $M_2A : M_2B$ có một cái nhỏ hơn 1, một cái lớn hơn 1. Ta giả sử $M_1A : M_1B < 1$, $M_2A : M_2B > 1$. Với giả thiết đó và để ý rằng m là tiếp tuyến của ω, ta thấy mọi điểm $M \neq M_1$ trên đường thẳng m đều ở ngoài ω nên theo tính chất trên ta có : $MA : MB > M_1A : M_1B$, tức là tỉ số $MA : MB$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm M_1.

Nếu để ý rằng nếu $M_2B : M_2A < 1$ thì tương tự trên ta thấy với mọi điểm $M \neq M_2$ trên đường thẳng m ta đều có : $MB : MA > M_2B : M_2A$ hay $MA : MB < M_2A : M_2B$, tức là tỉ số $MA : MB$ đạt giá trị lớn nhất tại điểm M_2.

b) Bây giờ xét trường hợp đường thẳng m vuông góc với AB. Nếu m là trung trực của đoạn AB thì tỉ số $MA : MB$ luôn luôn bằng 1. Ngược lại, nếu m cắt đường thẳng AB tại điểm H và $HA < HB$ thì với mọi điểm M thuộc m ta có $MA : MB = \sqrt{(HA^2 + HM^2) : (HB^2 + HM^2)}$.

Để ý rằng $HA : HB < 1$ ta thấy biểu thức trong dấu căn càng nhỏ nếu HM càng nhỏ và đạt giá trị nhỏ nhất khi $HM = 0$. Như vậy nghĩa là tỉ số $MA : MB$ đạt giá trị nhỏ nhất tại H và không có điểm nào ứng với giá trị lớn nhất.

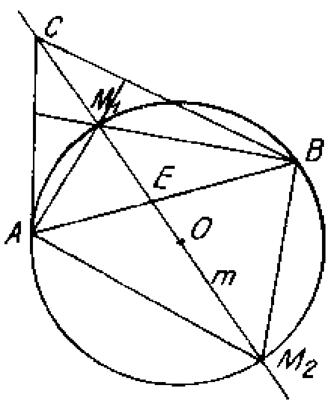
Còn nếu $HA > HB$ thì H ứng với giá trị lớn nhất của tỉ số $MA : MB$ và không có điểm nào ứng với giá trị nhỏ nhất.

Từ bài toán trên ta suy ra những hệ quả sau :

Hệ quả. 1. Nếu cố định đường thẳng m và cho cặp điểm A, B thay đổi tùy ý trên một đường tròn có tâm thuộc đường thẳng m thì cặp điểm tại đó tỉ số $MA : MB$ đạt các giá trị nhỏ nhất và lớn nhất vẫn cố định (nhưng có thể hai điểm ứng với các giá trị nhỏ nhất và lớn nhất hoán vị lẫn nhau).

2. Nếu cố định cặp điểm A, B và cho đường thẳng m quay xung quanh một điểm thuộc đường trung trực của đoạn AB thì quỹ tích những điểm tại đó tỉ số $MA : MB$ đạt các giá trị nhỏ nhất và lớn nhất là đường tròn tâm O đi qua A, B và đường trung trực đoạn AB.

Chú ý. 1. Ta hãy nghiên cứu thêm trường hợp đường thẳng m cắt đường thẳng AB tại một điểm E nằm *trong* đoạn AB và giả sử $EA < EB$. Sau khi đã dựng đường tròn *(O)* và có các điểm M_1, M_2 như trên, ta hãy vẽ qua A đường thẳng AC đối xứng của AB qua AM_1, cắt m ở C. Như vậy AM_1 là phân giác trong của góc BAC (hình 3) và do $AM_1 \perp AM_2$ nên AM_2 là phân giác ngoài của góc BAC, chùm AB, AC, AM_1, AM_2 là chùm điều hòa và do đó chùm BA, BC, BM_1, BM_2 cũng là chùm điều hòa. Vì $BM_1 \perp BM_2$ nên suy ra BM_1 và BM_2 là các phân giác trong và ngoài của góc ABC. Như vậy thì M_1 là giao điểm của đường phân giác trong của các góc ABC và BAC. Từ đó thấy rằng m là phân giác trong của góc ACB. Như vậy tức là M_1 và M_2 là tâm các đường tròn nội tiếp và bàng tiếp của tam giác ABC. Để ý rằng các điểm đó, như đã chứng minh trên, là những điểm tại đó tỉ số $MA : MB$ đạt các giá trị nhỏ nhất và lớn nhất, ta đi đến kết luận sau đây :

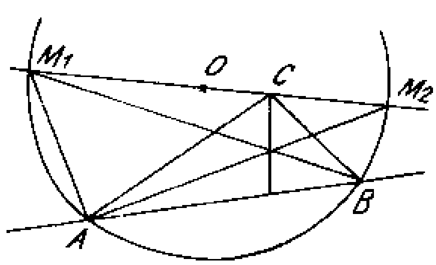


Hình 3

Cho tam giác ABC (CA < CB). Nếu điểm M chạy trên đường phân giác trong của góc ACB thì tỷ số MA : MB đạt giá trị nhỏ nhất tại tâm đường tròn nội tiếp và giá trị lớn nhất tại tâm đường tròn bàng tiếp.

2. Trong trường hợp đường thẳng m cắt *ngoài* đoạn AB, ta cũng lập luận tương tự trên, chỉ khác là hoán vị các từ "phân giác trong", "phân giác ngoài" một cách thích hợp và đổi từ "nội tiếp" thành "bàng tiếp". Ta sẽ đi đến kết luận :

Nếu điểm M chạy trên phân giác ngoài của góc ACB của tam giác ABC thì tỉ số MA : MB sẽ đạt các giá trị nhỏ nhất và lớn nhất tại tâm các đường tròn bàng tiếp trên phân giác đó.

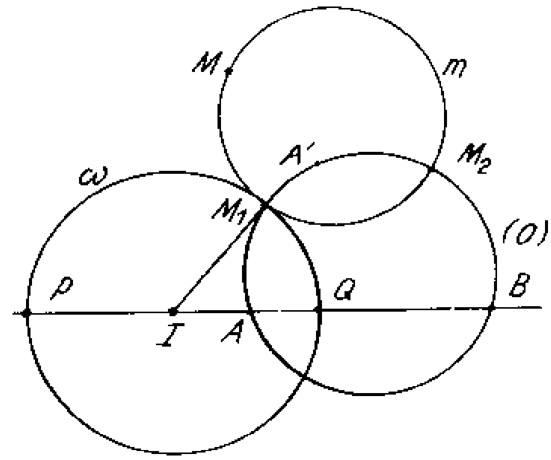


Hình 4

Như vậy ta lại thấy thêm một *tính chất đặc trưng của các tâm các đường tròn nội tiếp và bàng tiếp của một tam giác ABC : đó là những điểm mà tại đó tỉ số MA : MB đạt các giá trị nhỏ nhất và lớn nhất khi điểm M chạy trên phân giác trong hoặc ngoài của góc ACB.*

Bài toán 1 gợi ý cho ta bài toán sau đây.

Bài toán 2. *Cho điểm M chạy trên một đường tròn m và hai điểm cố định A, B không nằm trên đường tròn đó. Hãy xác định những vị trí của điểm M tại đó tỉ số MA : MB đạt các giá trị nhỏ nhất và lớn nhất.*



Hình 5

Lời giải. a) Trước hết xét trường hợp tâm của đường tròn m không thuộc đường thẳng AB. Ta hãy vẽ đường tròn *(O)* qua A, B và trực giao với m (đường tròn *(O)* qua điểm A' liên hợp của A đối với m), cắt đường tròn m ở M_1 và M_2 (Hình 5). Ta chứng minh rằng đó chính là các điểm cần tìm.

Thật vậy, gọi I là giao điểm của đường thẳng AB với tiếp tuyến tại M_1 của đường tròn *(O)*. Nếu vẽ đường tròn ω tâm I bán kính IM_1 cắt đường thẳng AB ở P, Q thì ta có $\overline{IM}_1^2 = \overline{IA} \cdot \overline{IB}$. Hệ thức này chứng tỏ rằng các điểm A, B, P, Q lập thành một hàng điểm điều hòa và do đó *(O)* là đường tròn Apôlôniút của cặp điểm A, B ứng với tỷ số $M_1A : M_1B$. Vì hai đường tròn ω và m đều trực giao với *(O)* tại M_1 nên chúng tiếp xúc nhau tại M_1. Như vậy thì đường tròn m nằm về một phía của đường tròn ω (trên hình vẽ m nằm ngoài ω nên với mọi điểm $M \neq M_1$ trên đường tròn ω ta đều có hoặc $MA : MB > M_1A : M_1B$ hoặc $MA : MB$

$< M_1A : M_1B$. Như vậy tức là tỉ số $MA : MB$ đạt giá trị nhỏ nhất hoặc lớn nhất tại M_1 và cũng tương tự như vậy đối với điểm M_2.

Nếu giả sử $M_1A : M_1B < M_2A : M_2B$ thì M_1 ứng với giá trị nhỏ nhất, M_2 ứng với giá trị lớn nhất.

b) Trong trường hợp đường tròn m có tâm trên đường thẳng AB, nếu đường tròn m chia điều hòa đoạn AB thì nó là một đường tròn Apôlôniút nên tỉ số $MA : MB$ không đổi. Còn nếu m không chia đều hòa đoạn AB thì dễ dàng thấy rằng các giao điểm của nó với đường thẳng AB là các điểm phải tìm.

Chú ý : Bài toán 1 có thể coi là một trường hợp giới hạn của bài toán 2 khi đường tròn m có bán kính vô cùng lớn.

Những vấn đề trên đây có thể mở rộng vào hình học không gian. Sau đây chỉ xin nêu lên một cách vắn tắt các kết quả và những bài toán có hướng dẫn và giải đáp.

Trước hết cần biết rằng quỹ tích những điểm M trong không gian mà tỉ số khoảng cách đến hai điểm cố định A, B bằng một hằng số $k \neq 1$ là một mặt cầu có tâm trên đường thẳng AB, gọi là *mặt cầu Apôlôniút. Mặt cầu này cũng chia không gian thành hai miền những điểm mà tỉ số khoảng cách đến A, B nhỏ hơn và lớn hơn k.*

Từ đó đi đến những bài toán tương tự như ở phần trên.

Bài toán 3. (Tương tự như bài toán 1 nhưng thay đường thẳng m bằng một mặt phẳng m).

Hướng dẫn : Nếu tỉ số $MA : MB$ đạt một cực trị nào đó tại điểm M_1 thì điểm đó phải là tiếp điểm của mặt phẳng m với một mặt cầu Apôlôniút của cặp điểm A, B. Vì tiếpdiện vuông góc với bán kính qua tiếp điểm nên suy ra M_1 nằm trong mặt phẳng P qua A, B và vuông góc với m. Do đó có thể đưa bài toán đã cho về bài toán 1 xét trên mặt phẳng P.

Bài toán 4. Tương tự bài toán 2 nhưng thay đường tròn m bởi một mặt cầu.

Hướng dẫn : Cũng phân tích như ở bài toán 3, ta sẽ đưa bài toán đã cho về bài toán 2 xét trên mặt phẳng qua A, B và tâm của mặt cầu đã cho.

Bài toán 5. (Như bài toán 1 nhưng xét trong không gian).

Đáp : a) Trường hợp m không vuông góc với AB, các giao điểm của đường thẳng m với mặt cầu qua A, B và có tâm trên m chính là các điểm phải tìm.

b) Trường hợp $m \perp AB$, nếu m thuộc mặt phẳng trung trực đoạn AB thì $MA : MB$ bằng hằng số. Ngược lại một cực trị sẽ đạt được tại chân của đường vuông góc chung của m và AB. Cực trị thứ hai không có.

Bài toán 6. (Như bài toán 2 nhưng xét trong không gian).

Đáp : Các điểm phải tìm nằm trên mặt cầu qua A, B và trực giao với đường tròn m (mặt cầu này có tâm trên mặt phẳng của đường tròn m và đi qua điểm liên hợp của A đối với mặt cầu nhận m làm đường tròn lớn).

MỘT PHƯƠNG PHÁP PHÂN TÍCH RA THỪA SỐ

BÙI QUANG TRƯỜNG

Trong quá trình giải toán có những lúc ta phải phân tích một đa thức nào đó ra thừa số. Chẳng hạn khi giải các phương trình đại số bậc 3, 4 hay 5, vấn đề biến đổi thành một tích là điều quan trọng. Hẳn bạn còn nhớ hàm số bậc 2 viết dưới dạng một tích :

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Trong đó $a \neq 0$, x_1 và x_2 là hai nghiệm thực của $f(x) = 0$. Bạn có suy nghĩ gì về các thừa số $(x - x_1)$, $(x - x_2)$? Phải chăng khi nó bằng 0 thì $f(x) = 0$! Ta có thể mở rộng tính chất này cho hàm nhiều biến không ? Đó là vấn đề sau đây sẽ được trình bày.

Nếu $\varphi(x, y, z, t...)$ là hàm đa thức bậc thấp hơn hàm đa thức $f(x, y, z, t...)$; $f(x, y, z, t...) = 0$

khi $\varphi(x, y, z, t...) = 0$ thì chắc chắn

$$f(x, y, z, t...) \vdots \varphi(x, y, z, t...).$$

Thật vậy, ta có thể viết :

$$f = \varphi . g + r$$

trong đó g là hàm của các biến $x, y, z, t...$ và r là số dư của phép chia f cho φ.

Do khi $\varphi = 0$ thì $f = 0$ nên $r = 0$, tức là $f = \varphi.g$.

Đây là cơ sở lí luận của lời giải các bài toán sau. Mời các bạn hãy bắt tay vào thử một công cụ mới trong việc phân tích ra thừa số.

Bài toán 1. Rút gọn phân thức

$$M = \frac{a(b+c-a)^2 + b(c+a-b)^2 + c(a+b-c)^2 + (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}{a^2(b+c-a) + b^2(c+a-b) + c^2(a+b-c) - (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}$$

Việc rút gọn cho ta phân tích ra thừa số. Có bạn đã khai triển các hằng đẳng thức, nhân rồi tìm các thừa số chung. Đó là một công việc hết sức gian khổ.

Trong phân thức M chúng ta hãy đặt tử là A và mẫu là B. Để ý rằng khi cho $a = 0$ thì $A = 0$. Thực vậy, lúc ấy

$$A = 0 + b(c-b)^2 + c(b-c)^2 + (b-c)(b+c)(c-b) =$$

$$= (b-c)^2(b+c) - (b-c)^2(b+c) = 0$$

Vì vai trò của a, b, c là như nhau trong A nên dễ dàng suy ra $A = 0$ khi $b = 0$ hoặc $c = 0$. Tóm lại, ta có thể viết

$$A = \alpha abc$$

Hãy để ý rằng tử A không có số hạng bậc cao hơn 3, vì vậy α không thể chứa a, hoặc b, hoặc c. Rõ ràng α là một hằng số không phụ thuộc a, b, c. Ta tìm α bằng cách cho a, b, c những giá trị cụ thể, chẳng hạn để tiện ta hãy cho $a = b = c = 1$. Có ngay $\alpha = 4$.

Hoàn toàn tương tự, ta xét mẫu B và có $B = \beta abc$ lại tìm được $\beta = 2$. Vậy phân thức đã cho

$$M = \frac{A}{B} = \frac{4abc}{2abc} = 2 \text{ (với } a, b, c \neq 0)$$

Bài toán 2. Với a, b, c khác 0 và đôi một khác nhau, chứng minh rằng

$$P = \left(\frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b} + \frac{a-b}{c}\right) \times \left(\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b}\right) = 9$$

Khi $a + b + c = 0$

Đặt $P_1 = \dfrac{b-c}{a} + \dfrac{c-a}{b} + \dfrac{a-b}{c} =$

$$= \frac{bc(b-c) + ca(c-a) + ab(a-b)}{abc}$$

$$P_2 = \frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b} =$$

$$= \frac{a(a-b)(c-a) + b(b-c)(a-b) + c(c-a)(b-c)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$

Xét P_1 : Khi $a - b = 0$, $b - c = 0$ và $c - a = 0$ thì tử T_1 của P_1 đều bằng 0 ta có :

$$T_1 = \gamma_1(a-b)(b-c)(c-a)$$

Cho $a = 1, b = 2, c = -3$, tìm được $\gamma_1 = -1$.

Xét P_2 : Cho a = 0, khi ấy từ $a + b + c = 0$ có $b = -c$, tử của P_2 là $T_2 = 0$. Với $b = 0$, $c = 0$ cũng có $T_2 = 0$ vậy $T_2 + \gamma_2 abc = -9abc$.

$$\text{Vậy } P = P_1P_2 = \frac{-(a-b)(b-c)(c-a)}{abc} \times$$

$$\times \frac{-9abc}{(a-b)(b-c)(c-a)} = 9 \text{ (đpcm)}$$

Bài toán 3. Với a, b, c đôi một khác nhau, chứng minh rằng

$$S = a^2\frac{(a+b)(a+c)}{(a-b)(a-c)} + b^2\frac{(b+c)(b+a)}{(b-c)(b-a)} + c^2\frac{(c+a)(c+b)}{(c-a)(c-b)} \geqslant 0$$

Bài này có thể cho dưới dạng khác, thay a, b, c bằng x, y, z và bắt tìm giá trị nhỏ nhất của $f(x, y, z)$.

Lấy mẫu chung là

$B = (a-b)(b-c)(c-a)$, tử A của S sẽ là

$$A = a^2(a+b)(a+c)(b-c) +$$

$$+ b^2(b+c)(b+a)(c-a) +$$

$$+ c^2(c+a)(c+b)(a-b).$$

Ta thử cho $a - b = 0$, tức $a = b$. Lúc ấy

$$A = 2a^3(a^3 - c^3) + 2a^3(c^3 - a^3) + 0 =$$

$$= 2a^3(a^3 - c^3) - 2a^3(a^3 - c^3) = 0$$

Vì trong A vai trò a, b, c như nhau nên suy ra.

$$A = (a-b)(b-c)(c-a) f(a, b, c).$$

A là hàm bậc 5 đối với a, b, c vì vậy ta dự đoán xem A còn các ước nào nữa. Chắc chắn trong ước này quan hệ giữa a, b, c là bình đẳng. Ta nghĩ trước hết tới $a + b + c$. Cho $a + b + c = 0$, khi đó

$$A = a^2bc(b-c) + b^2ca(c-a) + c^2ab(a-b) = \\ = a^2b^2c - a^2bc^2 + ab^2c^2 - a^2b^2c + \\ + a^2bc^2 - ab^2c^2 = 0.$$

Vậy $A = \lambda(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$

Biết A là hàm bậc 5 của a, b, c chắc chắn λ phải là hàm bậc nhất của a, b, c (Bài toán bắt ta chứng minh $S \geqslant 0$ vậy có thể S là lũy thừa bậc chẵn). Trong λ vai trò a, b, c phải như nhau. Những suy nghĩ đó giúp ta khẳng định rằng $\lambda = k(a+b+c)$ và

$$A = (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)^2k.$$

Hiển nhiên k là hằng số. Dễ dàng tìm được $k = 1$. Vậy

$S = \dfrac{A}{B} = (a+b+c)^2 \geqslant 0$. Đó là điều phải chứng minh.

Trên đây là một vài ví dụ đưa hàm về dạng một tích bằng phương pháp tìm những giá trị khiến hàm triệt tiêu. Để kết thúc, mời bạn hãy rút gọn phân thức.

$$Q = a\frac{(a+b)(a+c)}{(a-b)(a-c)} + \\ + b\frac{(b+c)(b+a)}{(b-c)(b-a)} + c\frac{(c+a)(c+b)}{(c-a)(c-b)}$$

Nếu kết quả gây cho bạn nhiều thú vị, bạn hãy thử xét phân thức

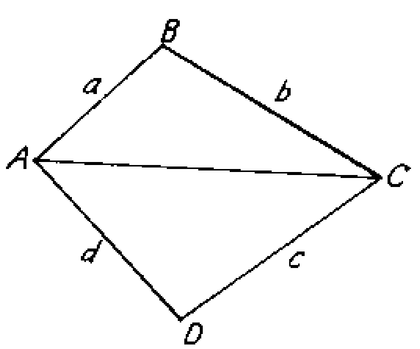
$$T = a^n\frac{(a+b)(a+c)}{(a-b)(a-c)} + \\ + b^n\frac{(b+c)(b-a)}{(b-c)(b-a)} + c^n\frac{(c+a)(c+b)}{(c-a)(c-b)}$$

Với n tự nhiên.

MỘT VÀI TÍNH CHẤT ĐÁNG CHÚ Ý CỦA TỨ GIÁC PHẲNG

NGUYỄN CÔNG QUỲ

Việc phát hiện và tổng kết một cách có hệ thống những tính chất đáng chú ý của tứ giác trong mặt phẳng giúp ta thấy được mối tương quan giữa những tứ giác, đặc biệt là các tứ giác nội tiếp và ngoại tiếp, từ đó giúp ta giải quyết được một số những bài toán hình học có liên quan. Chúng ta sẽ xuất phát từ những tứ giác bất kì, sau đó tìm ra những điều kiện để tứ giác đã cho nội tiếp được hoặc ngoại tiếp được.



Hình 1

Xét một tứ giác lồi $ABCD$ (hình 1) có các cạnh $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $AD = d$, có diện tích S. Ta có $2S = ab\sin B + cd\sin D$, từ đó

$$16S^2 = 4a^2b^2\sin^2B + 4c^2d^2\sin^2D + \\ + 8abcd\sin B\sin D \qquad (1)$$

Mặt khác $AC^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos B = \\ = c^2 + d^2 - 2cd\cos D$.

Từ đó suy ra

$$a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = 2ab\cos B - 2cd\cos D.$$

Bình phương hai vế ta thu được

$$(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 = \\ = 4a^2b^2\cos^2B + 4c^2d^2\cos^2D - 8abcd\cos B\cos D$$

Cộng vế với vế các hệ thức (1) và (2) ta được

$$16S^2 + (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 = \\ = 4(a^2b^2 + c^2d^2)^2 - 8abcd\cos(B + D) = \\ = 4(a^2b^2 + c^2d^2) - 8abcd\left(1 - 2\sin^2\frac{B+D}{2}\right) = \\ = 4(a^2b^2 + c^2d^2 - 2abcd) + 16abcd\sin^2\frac{B+D}{2}$$

$$= 4(ab - cd)^2 + 16abcd\sin^2\frac{B+D}{2}$$

hay $16\left(S^2 - abcd\sin^2\frac{B+D}{2}\right) =$

$$= 4(ab - cd)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2$$

Đây là một công thức đúng cho mọi tứ giác (lồi) bất kì.

Bây giờ ta hãy khai thác công thức (1) để ra những tính chất của tứ giác ngoại tiếp cũng như tứ giác nội tiếp.

Trước hết đối với tứ giác ngoại tiếp ta có $a - b = d - c$. Bình phương hai vế ta được

$$a^2 - 2ab + b^2 = d^2 - 2cd + c^2$$

hay $\quad a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = 2(ab - cd).$

Bình phương 2 vế rồi chuyển vế ta thu được

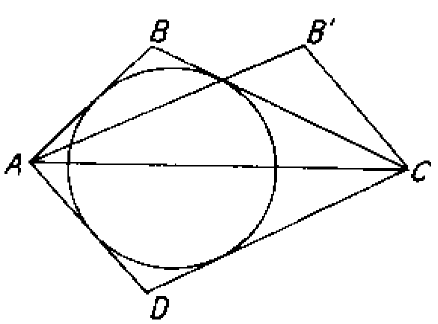
$$4(ab - cd)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 = 0.$$

Như vậy trong công thức (1) vế phải bằng 0 nên vế trái cũng bằng 0. Do đó ta suy ra : *Trong tứ giác ngoại tiếp ta có*

$$S = \sqrt{abcd}\sin\frac{B+D}{2}. \qquad \text{(II)}$$

Cần chú ý rằng công thức (II) không phản ánh một *tính chất đặc trưng* của tứ giác ngoại tiếp. Nói cách khác, trong tứ giác ngoại tiếp diện tích được tính theo công thức (II) nhưng ngược lại một tứ giác có diện tích được tính theo công thức (II) chưa chắc đã ngoại tiếp được. Thật vậy, ta hãy xét một tứ giác ngoại tiếp $ABCD$ nhận đường chéo AC của nó làm trục đối xứng (hình 2). Dễ dàng tạo được một tứ giác như vậy. Diện tích của nó được tính theo công thức (II). Nếu lấy điểm B' là đối xứng của B qua trung trực đoạn AC thì ta có

$$AB' = CB,\ B'C = BA,\ \widehat{AB'C} = \widehat{ABC},$$



Hình 2

vì vậy tứ giác $AB'CD$ có diện tích tính theo công thức (II). Nhưng dễ dàng chứng minh rằng tứ giác đó là một hình bình hành nên nói chung nó không ngoại tiếp được.

Trở lại công thức (I), ta có thể viết

$$16S^2 = 4(ab - cd)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 +$$
$$+ 16abcd\sin\frac{B+D}{2}$$

Dưới dạng này ta thấy một khi đã cho trước a, b, c, d thì diện tích S của tứ giác sẽ lớn nhất khi $\sin^2\frac{B+D}{2} = 1$ hay $\sin\frac{B+D}{2} = 1$ vì $\frac{B+D}{2} < 180^0$ nên $\sin\frac{B+D}{2}$ luôn luôn dương), tức là $\frac{B+D}{2} = 90^0$ hay $B + D = 180^0$. Ta suy ra kết quả quen thuộc sau đây :

Trong tất cả những tứ giác có các cạnh liên tiếp bằng a, b, c, d thì tứ giác nội tiếp có diện tích lớn nhất.

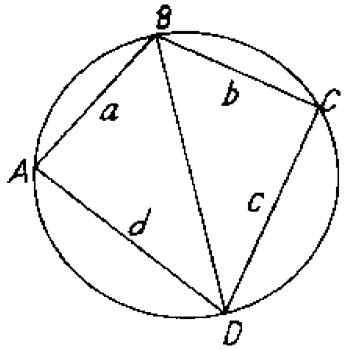
Bây giờ ta hãy khai thác công thức (I) trong trường hợp tứ giác nội tiếp. Vì $\sin^2\frac{B+D}{2} = 1$ nên ta có

$$16S^2 = 4(ab - cd)^2 +$$
$$+ 16abcd - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2$$
$$= 4a^2b^2 + 4c^2d^2 + 8abcd - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2$$
$$= (2ab + 2cd)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2$$
$$= (2ab + 2cd + a^2 + b^2 - c^2 - d^2) \times$$
$$\times (2ab + 2cd - a^2 - b^2 + c^2 + d^2) =$$
$$= [(a + b)^2 - (c - d)^2][(c + d)^2 - (a - b)^2]$$
$$= (a + b + c - d)(a + b - c + d) \times$$
$$\times (a - b + c + d)(-a + b + c + d)$$

$= 16(p - d)(p - c)(p - b)(p - a)$, trong đó $p = (a + b + c + d)/2$, tức là ta có

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)} \qquad \text{(III)}$$

Công thức này thường được gọi là "công thức Hê–rông mở rộng cho tứ giác nội tiếp" vì nó có dạng giống như công thức Hê–rông đối với tam giác. Hơn nữa nếu trong tứ giác nội tiếp ta cho một cạnh dần tới 0 thì ta lại tìm thấy công thức Hê–rông trong tam giác.



Hình 3

Trong tam giác ta có công thức

$$tg\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}. \quad (3)$$

(p là nửa chu vi)

Ta thử xét xem trong tứ giác nội tiếp có một công thức nào tương tự hay không. Ta có (hình 3)

$$BD^2 = a_2 + d^2 - 2ad\cos A = b^2 + c^2 - 2bc\cos C.$$

Nhưng vì $A + C = 180^0$ nên $\cos C = -\cos A$. Do đó ta có

$$a^2 + d^2 - 2ad\cos A = b^2 + c^2 + 2bc\cos A$$

$$tg^2\frac{A}{2} = \frac{\sin^2\frac{A}{2}}{\cos^2\frac{A}{2}} = \frac{1-\cos A}{1+\cos A}$$

$$\Rightarrow tg\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-d)}{(p-b)(p-c)}}$$

NỐI TIẾP CÁC BẤT ĐẲNG THỨC CỔ ĐIỂN

LÊ QUỐC HÁN

Các bất đẳng thức cổ điển (của Cô–si, Svác, Béc–nu–li, Trê–bư–sép,...) đã tỏ ra rất có hiệu lực trong việc giải quyết các vấn đề toán học. Nhưng tôi vẫn thường suy nghĩ : ngoài các bất đẳng thức đã biết, còn có bất đẳng thức nào có hiệu lực như vậy không ? Sau một thời gian loay hoay tìm tòi, tôi đã tìm ra bất đẳng thức sau và các trường hợp tổng quát của nó.

1. Bất đẳng thức thứ nhất

$$\sum_{(i=1)}^{n} \frac{m_i^2}{a_i} \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right)^2 / \sum_{i=1}^{n} a_i \quad (1)$$

với $a_i > 0$ ($i = 1, 2, ..., n$).

Ta hãy chứng minh (1) bằng quy nạp.

a) Với $n = 2$, xét hiệu

$$m_1^2/a_1 + m_2^2/a_2 - (m_1 + m_2)^2/(a_1 + a_2)$$

Vì mẫu số dương, nên ta chỉ cần chứng minh tử số không âm. Thật vậy, ta có :

$$a_2(a_1 + a_2)m_1^2 + a_1(a_1 + a_2)m_2^2 -$$

$$- a_1a_2(m_1 + m_2)^2 = (a_2m_1 - a_1m_2)^2 \geqslant 0.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$m_1/a_1 = m_2a_2 \text{ (vì } a_i \neq 0)$$

b) Giả sử bất đẳng thức (1) đúng đến n, ta chứng minh nó cũng đúng với $n + 1$. Thật vậy, ta có

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{m_i^2}{a_i} \geqslant \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{n} a_i} + \frac{m_1^2 + 1}{a_{n+1}}$$

$$\geqslant \left(\sum_{i=1}^{n+1} m_i\right)^2 / \sum_{i=1}^{n+1} a_i$$

(áp dụng với 2 phần tử).

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$m_i/a_i = m_j/a_j \text{ với } i \neq j.$$

Chú ý : Khi $a_1 = a_2 = ... = a_n$ thì (1) trở thành bất đẳng thức trung bình bình phương quen thuộc :

$$\sum_{i=1}^{n} m_i^2/n \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} m_i/n\right)^2$$

Như vật, bất dẳng thức trung bình bình phương chỉ là trường hợp đặc biệt của (1).

Để thấy rõ vai trò của bất đẳng thức (1), ta sẽ dùng nó để giải các bài toán sau : Cần

((1) Dấu xích ma dùng để ký hiệu một tổng :

$$\sum_{i=1}^{n} = x_1 + x_2 + ... + x_n \text{)}$$

lưu ý rằng trong những bài toán đó, nếu ta không dùng (1) thì hoặc sẽ không giải quyết được, hoặc lời giải sẽ phức tạp.

Bài toán 1. Nếu cho một hình hộp chữ nhật có kích thước là a, b, c ; đường chéo là d ; ba góc tạo bởi đường chéo với ba cạnh cùng xuất phát từ một đỉnh với đường chéo là α, β, γ ; thì ta có :

$$\cos^4\alpha/a + \cos^4\beta/b + \cos^4\gamma/c \geqslant 1/(a + b + c) ;$$

$$\cos^4\alpha/a^2 + \cos^4\beta/b^2 + \cos^4\gamma/c^2 \geqslant 1/d^2$$

Lời giải : Vì

$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = a^2/d^2 + b^2/d^2 + c^2/d^2 =$

$= (a^2 + b^2 + c^2)/d^2 = d^2/d^2 = 1$, nên

$\cos^4\alpha/a + \cos^4\beta/b + \cos^4\gamma/c \geqslant$

$\geqslant (\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma)^2/(a + b + c) =$

$= 1/(a + b + c)$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\cos^2\alpha/a = \cos^2\beta/b = \cos^2\gamma/c \Leftrightarrow a = b = c$ (vì $\cos^2\alpha = a^2/d^2 \Rightarrow \cos^2\alpha/a = a/d^2$, tương tự $\cos^2\beta/b = b/d^2$, $\cos^2\gamma/c = c/d^2$ tức là hình hộp chữ nhật trở thành hình lập phương.

Ta lại có :

$\cos^4\alpha/a^2 + \cos^4\beta/b^2 + \cos^4\gamma/c^2 \geqslant$

$\geqslant (\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma)^2/(a^2 + b^2 + c^2) = 1/d^2$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\cos^2\alpha/a^2 = \cos^2\beta/b^2 = \cos^2\gamma/c^2$$

Nhưng đẳng thức này bao giờ cũng đúng (đều bằng $1/d$), nên bất đẳng thức thực sự không xảy ra.

Bài toán 2. Chứng minh rằng nếu có :

$\sin^4\alpha/a + \cos^4\alpha/b = 1/(a + b)$ với a, $b > 0$, thì cũng có $\sin^3\alpha/a^3 + \cos^3\alpha/b^3 = \dfrac{1}{(a + b)^3}$ (bài số 2, báo Toán học và Tuổi trẻ, số 54).

Lời giải. Vì $\sin^4\alpha/a + \cos^4\alpha/a \geqslant$

$\geqslant (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^2/(a + b) = 1/(a + b)$,

nên từ đẳng thức đã cho suy ra : $\sin^2\alpha/a = \cos^2\alpha/b = (\sin^2\alpha + b) = 1/(a + b)$.

Do đó

$\sin^8\alpha/a^3 + \cos^8\alpha/b^3 =$

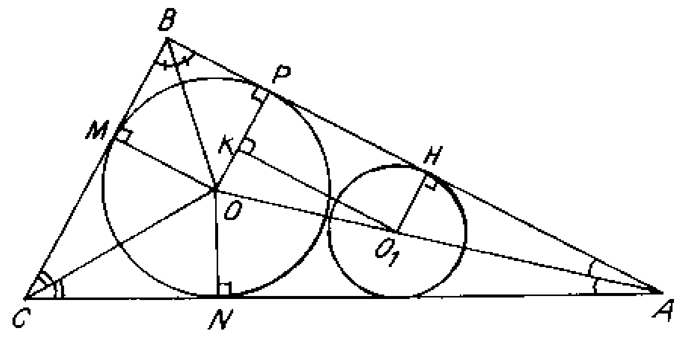
$= a/(a + b)^4 + b/(a + b)^4 + b/(a + b)^4 =$

$= 1/(a + b)^3\}$

Bài toán 3. Cho vòng tròn tâm O, bán kính r tiếp xúc với ba cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC tại M, N, P. Dựng các vòng tròn nội tiếp các tam giác cong lõm ANP, BPM và CMN và gọi các tiếp điểm trên các cạnh AP, BM và CN là H, I, K. Đặt $AH = x$, $BI = y$, $CK = z$. Chứng minh rằng

$$x + y + z \geqslant 2r.$$

Lời giải. Trước khi giải bài này, đề nghị các bạn chứng minh :



Hình 1

1) $\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta + \mathrm{tg}\beta\mathrm{tg}\gamma + \mathrm{tg}\gamma\mathrm{tg}\alpha = 1$ (với $\alpha = 45^o - A/4$; $\beta = 45^o - B/4$, $\gamma = 45^o - C/4$)

2) $\left(\sin\dfrac{A}{2} + \sin\dfrac{B}{2} + \sin\dfrac{C}{2}\right)^2 \leqslant 9/4$

Ta gọi r_a, r_b, r_c lần lượt là bán kính các tam giác cong nêu trong đầu bài. Kẻ $O_1Q \perp OP$. Ta có

$$OQ = OO_1\sin\widehat{OO_1Q}$$

$$\Rightarrow (r - r_a) = (r + r_a)\sin\frac{A}{2} \Rightarrow \frac{r_a}{r} =$$

$$= \frac{1 - \sin\frac{A}{2}}{1 + \sin\frac{A}{2}} = tg^2\left(45^o - \frac{A}{4}\right)$$

hay $\sqrt{r_a} = \sqrt{r}\,tg\alpha$, với $\alpha = 45^o - A/4$.

Tương tự

$$\sqrt{r_b} = \sqrt{r}\,tg\beta\,,\ \sqrt{r_c} = \sqrt{r}\,tg\gamma$$

với $\beta = 45^o - B/4$, $\gamma = 45^o - C/4$; do đó

$$\sqrt{r_ar_b} + \sqrt{r_br_c} + \sqrt{r_cr_a} =$$

$$= r(\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta + \mathrm{tg}\beta\mathrm{tg}\gamma + \mathrm{tg}\gamma\mathrm{tg}\alpha) = r$$

(áp dụng 1).

Từ đó :

$$xy + yz + zx = r_ar_b/\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} +$$

$$+ r_br_c/\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} + r_cr_a/\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2} \geqslant$$

$(\sqrt{r_a r_b} + \sqrt{r_b r_c} + \sqrt{r_c r_a})^2$:

$$:\left(\frac{\sin A}{2}\sin\frac{B}{2} + \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} + \sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\right) \geqslant$$

$$\geqslant r^2/(3/4) = \frac{4r^2}{3}$$

vì $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} + \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} + \sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2} \leqslant$

$$\leqslant \left(\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2}\right)^2/3 \leqslant 3/4.$$

(áp dụng 2). Do đó $(x+y+z)^2 \geqslant 3(xy+yz+zx) = 4r^2$, hay $x + y + z \geqslant 2r$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi ABC đều $(A = B = C)$.

Áp dụng bất đẳng thức (1), các bạn hãy giải các bài toán sau :

Bài toán 4. Chứng minh rằng các đường thẳng $x + y \pm \sqrt{a + b} = 0$ luôn luôn tiếp xúc với elíp $x^2/a + y^2/b = 1$ (với a, $b > 0$).

Bài toán 5. Chứng minh rằng phương trình $f^2(x)/a + g^2(x)/b = [f(x) + g(x)]^2/(a + b)$, với a, $b > 0$, tương đương với phương trình

$f(x)/a = g(x)/b$

Bài toán 6. Chứng minh rằng nếu dãy số a_i thỏa mãn điều kiện

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{a_1} \geqslant \sqrt{n\sum_{i=1}^{n} a_i},$$

thì bất đẳng thức Na-sơ-bít mở rộng :

$$a_1/(a_2 + a_3) + a_2/(a_3 + a_4) + \ldots +$$
$$+ a_{n-1}/(a_n + a_1) + a_n/(a_1 + a_2) \geqslant n/2$$

luôn luôn đúng.

Bây giờ ta mở rộng bất đẳng thức (1) theo hai hướng.

2. Bất đẳng thức thứ hai

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{m_i^k}{a_i^{k-1}} \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right)^k / \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^{k-1} \qquad (2)$$

Với $a_i > 0$, $m_1 > 0$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) và k tự nhiên ($k \geqslant 2$).

Ta chứng minh (2) bằng quy nạp.

1) Trước hết, ta chứng minh (2) đúng với $n = 2$. Thật vậy, khi $k = 2$ ta đã chứng minh (2) đúng (xem chứng minh (1). Giả sử (2) với $n = 2$ đúng với k, tức là :

$m_1^k/a_1^{k-1} + m_2^k/a_2^{k-1} \geqslant (m_1 + m_2)^k/(a_1 + a_2)^{k-1}$;

nhân hai vế với $(m_1 + m_2)/(a_1 + a_2)$, ta có.

$$(m_1^k/a_1^{k-1} + m_2^k/a_2^{k-1}).(m_1 + m_2)/(a_1 + a_2) \geqslant$$
$$\geqslant (m_1 + m_2)^{k+1}/(a_1 + a_2)^k$$

Mặt khác, ta có

$$m_1^{k+1}/a_1^k + m_2^k a_2^{k+1}/a_2^k - (m_1^k/a_1^{k-1} + m_2^k/a_2^{k-1}) \times$$
$$\times (m_1 + m_2)/(a_1 + a_2)$$

vì mẫu số chung dương và tử số là :

$$(a_1 + a_2)(a_2^k m_1^{k+1} + a_1^k m_2^{k+1}) -$$
$$- a_1 a_2(a_2^{k-1} m_1^k - a_1^{k-1} m_2^k)(m_1 + m_2)$$
$$= (a_2 m_1 - a_1 m_2)(a_2^k m_1^k - a_1^k m_2^k) =$$
$$= (a_2 m_1 - a_1 m_2)^2 \times [(a_2 m_1)^{k-1} +$$
$$+ (a_2 m_1)^{k-2}(a_1 m_2) + \ldots + (m_2 a_1)^{k-1}] \geqslant 0$$

vậy $$m_1^{k+1}/a_1^k + m_2^{k+1}/a_2^k \geqslant$$
$$\geqslant (m_1 + m_2)^{k+1}/(a_1 + a_2)^k$$

tức là bất đẳng thức cũng đúng với $k + 1$.

2) Bây giờ, ta chứng minh nếu bất đẳng thức (2) đúng với n, thì cũng đúng với $n + 1$. Thật vậy, ta có :

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{m_i^k}{a_i^{k-1}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i^k}{a_i^{k-1}} + \frac{m_{n+1}^k}{a_{n+1}^{k-1}} \geqslant$$

$$\geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} m_1\right)^k / \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^{k-1} + m_{a+1}^k / a_{n+1}^{k-1}$$

(giả thiết quy nạp)

$$\geqslant \left(\sum_{i=1}^{n+1} m_i\right)^k / \left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i\right)^{k-1}$$ (áp dụng với hai phần tử)

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $m_i/a_i = m_j/a_j$ với $i \neq j$; $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

Chú ý : Khi $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$ ta có bất đẳng thức trung bình hạc k quen thuộc

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^k/n \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i/n\right)^k$$

Bài toán 7. Vòng tròn (O) tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC tại M, N, P. Xác định các góc của tam giác đó biết rằng

$$AP^k/PB^{k-1} + BM^k/MC^{k-1} + CN^k/NA^{k-1} = p$$

(p là nửa chu vi tam giác ABC). Ta có :

$$AP^k/PB^{k-1} + BM^k/MC^{k-1} + CN^k/NA^{k-1} \geqslant$$

$\geqslant (AP+BM+CN)^k/(PB+MC+NA)^{k-1} =$

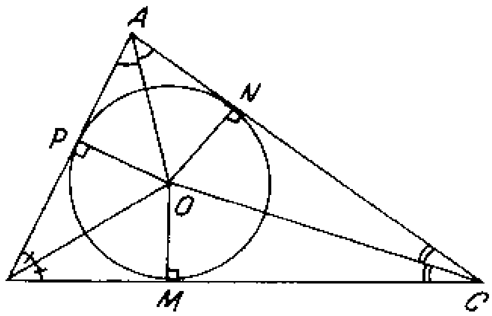
$\geqslant p^k/p^{k-1} = p.$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi :

$$AP/PB = BM/MC = CN/NA$$

hay $\mathrm{cotg}(A/2)\mathrm{cotg}(B/2) = \mathrm{cotg}(B/2)/\mathrm{cotg}(C/2) =$
$= \mathrm{cotg}(C/2)/\mathrm{cotg}(A/2) =$

$$= \frac{\mathrm{cotg}(A/2) + \mathrm{cotg}(B/2) + \mathrm{cotg}(C/2)}{\mathrm{cotg}(B/2) + \mathrm{cotg}(C/2) + \mathrm{cotg}(A/2)} = 1$$



Hình 2

Suy ra

$$\mathrm{cotg}(A/2) = \mathrm{cotg}(B/2) = \mathrm{cotg}(C/2)$$

hay $A = B = C = \pi/3$

Các bạn hãy áp dụng (2) để giải bài toán sau :

Bài toán 8. Chứng minh rằng với mọi n tự nhiên, ta đều có.

$$1^k/n^{k-1} + 2^k/(n-1)^{k-1} + \dots + n^k/1^{k-1} > n\sqrt{n}.$$

3. Bất đẳng thức thứ 3

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{m_i^k}{a_i} \geqslant \Big(\sum_{i=1}^{n} m_i\Big)^k / n^{k-2} \sum_{i=1}^{n} a_i \qquad (3)$$

với $m_i, a_i > 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

Để chứng minh bất đẳng thức này ta sử dụng bất đẳng thức (2) bằng cách viết

$$a_i = \left(\sqrt[k-1]{a_i}\right)^{k-1} \text{ và có}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{m_i^k}{a_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i^k}{(\sqrt[k-1]{a_i})^{k-1}} \geqslant$$

$$\geqslant \Big(\sum_{i=1}^{n} m_i\Big)^k / \sum_{i=1}^{n} (\sqrt[k-1]{a_i})^{k-1} \text{ (theo (2))}$$

$$\geqslant \Big(\sum_{i=1}^{n} m_i\Big)^k / n^{k-2} \sum_{i=1}^{n} a_i$$

vì theo bất đẳng thức trung bình bậc $k-1$ ta có

$$\sum_{i=1}^{n} a_i/n \geqslant \Big(\sum_{i=1}^{n} \sqrt[k-1]{a_i}/n\Big)^{k-1} \text{ do đó}$$

$$n^{k-2} \sum_{i=1}^{n} a_i \geqslant \Big(\sum_{i=1}^{n} \sqrt[k-1]{a_i}\Big)^{k-1}$$

Bài toán 9. Chứng minh rằng nếu α và β là các góc nhọn của một tam giác vuông thì ta có :

$\cos^6\alpha/\alpha + \cos^6\beta/\beta \geqslant 1/\pi$

(Báo Toán học và Tuổi trẻ, bài 6/86).

Ta có :

$$\cos^6\alpha/\alpha + \cos^6\beta/\beta \geqslant$$

$$\geqslant (\cos^2\alpha + \cos^2\beta)^3/2^{3-1}(\alpha + \beta) = 1/\pi$$

vì $\cos^2\alpha + \cos^2\beta = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$, $\alpha + \beta = \pi/2$.

Rõ ràng, vai trò của các bất đẳng thức (1), (2), (3) trong toán học không nhỏ. Chắc chắn rằng các bạn còn có thể áp dụng chúng để giải quyết nhiều vấn đề khác nữa.

VÀI ƯỚC LƯỢNG HÌNH HỌC

PHAN ĐỨC CHÍNH

Khi học môn Hình học, trong chứng minh và tính toán, ta thường dùng đến những kết quả chính xác (chẳng hạn định lý về sự đồng quy của ba đường cao của một tam giác, ...) và những công thức, tức là những hệ thức biểu diễn bằng đẳng thức (chẳng hạn, công thức tính diện tích một tam giác qua ba cạnh của nó...).

Tuy nhiên, như mọi môn Toán khác, môn Hình học không thể tránh được các bất đẳng thức, chẳng hạn : điều kiện để ba số dương là độ dài ba cạnh của một tam giác, hoặc tính chất quen biết : tổng các góc phẳng ở đỉnh một góc tam diện phải nhỏ hơn 360^o... Đặc biệt trong thực tiễn, khi áp dụng các kết quả hình học, người ta rất cần đến các bất đẳng thức để ước lượng.

Đã có rất nhiều sách viết về các ước lượng hình học. Và có nhiều bài toán về ước lượng trong Hình học sơ cấp, cho đến nay chưa có lời giải thỏa đáng.

Trong bài báo này, chúng tôi đề cập đến vài ước lượng, tuy đơn giản nhưng khá lí thú, liên quan đến hai đối tượng hình học đơn giản nhất : tam giác trong mặt phẳng và tứ diện trong không gian.

1. Vài ước lượng các yếu tố của một tam giác

Ta để ý rằng một tam giác đều với cạnh bằng 1, có ba đường cao bằng $\sqrt{3}/2$, diện tích bằng $\sqrt{3}/4$, và bán kính (hình tròn) nội tiếp bằng $1/2\sqrt{3}$. Nhận xét này là xuất phát điểm của bài toán sau đây về ước lượng.

Bài toán 1. *Cho một tam giác, độ dài mỗi cạnh của nó không vượt quá 1. Chứng minh rằng tam giác ấy có :*

a) Ít nhất hai đường cao với độ dài $\leqslant \sqrt{3}/2$,

b) Diện tích $\leqslant \sqrt{3}/4$,

c) Bán kính đường tròn nội tiếp $\leqslant 1/2\sqrt{3}$.

Giải. a) Trong một tam giác, đường cao có độ dài không vượt quá độ dài của trung tuyến xuất phát cùng đỉnh, nên để chứng minh a), ta chứng minh kết quả mạnh hơn : *một tam giác thỏa mãn điều kiện của bài toán, phải có ít nhất hai trung tuyến với độ dài* $\leqslant \sqrt{3}/2$.

Quả vậy, gọi các độ dài các cạnh của tam giác đã cho là a, b, c. Luôn luôn có thể coi rằng

$$0 < c \leqslant b \leqslant a \leqslant 1.$$

Gọi m_a, m_b, m_c, là các độ dài của các trung tuyến ứng với các cạnh ấy. Theo công thức tính trung tuyến, ta có :

$$2m_a^2 = b^2 + c^2 - a^2/2 \leqslant$$

$$\leqslant b^2 + c^2/2 \leqslant 1 + 1/2 = 3/2.$$

$$2m_b^2 = a^2 + c^2 - b^2/2 \leqslant a^2 + b^2/2 \leqslant$$

$$\leqslant 1 + 1/2 = 3/2.$$

từ đó suy ra $m_a \leqslant \sqrt{3}/2$ và $m_b \leqslant \sqrt{3}/2$.

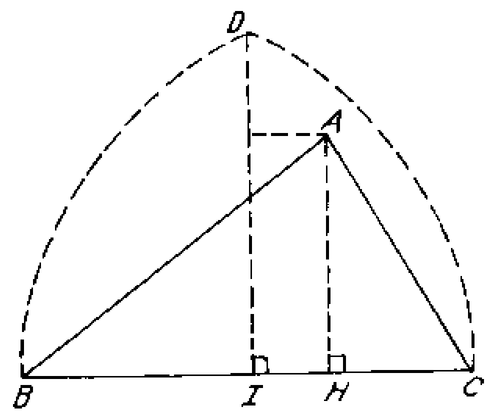
Nhận xét. Tam giác cân với độ dài ba cạnh bằng 1, 1, 2c có một đường cao (đồng thời là trung tuyến) có độ dài $\sqrt{1 - c^2} > \sqrt{3}/2$, khi c khá nhỏ. Điều đó chứng tỏ không thể cải tiến hơn kết quả đã phát biểu ở a).

b) $S = a.h_a/2 \leqslant \sqrt{3}/4$.

c) Để đơn giản phép chứng minh và hình vẽ, trước hết ta nhận xét rằng một tam giác được chứa trong một tam giác (lớn hơn) đồng dạng với nó, với tỉ số đồng dạng $k \geqslant 1$; hơn nữa, nếu một tam giác được chứa trong một tam giác khác (không cần đồng dạng), thì bán kính nội tiếp của tam giác thứ nhất không vượt quá bán kính nội tiếp của tam giác thứ hai, bởi vì hình tròn nội tiếp của một tam giác là hình tròn lớn nhất được chứa trong tam giác ấy (bạn đọc tự chứng minh điều đó, lưu ý không... ngụy biện !).

Như vậy ta hãy ước lượng bán kính nội tiếp r của một tam giác ABC thỏa mãn điều kiện của bài toán. Nếu cạnh lớn nhất $a = BC$ nhỏ hơn 1, thì ta sẽ xét tam giác đồng dạng với ABC theo tỉ số đồng dạng $k = 1/a > 1$. Thành thử ta có thể coi rằng $a = BC = 1$, $b = AC \leqslant 1$, $c = AB \leqslant 1$.

Khi đó (xem hình 1) tam giác ABC được chứa trong tam giác "cong" BCD chắn bởi đoạn BC và hai cung BD, CD của hai đường tròn tâm B, C và bán kính $BC = 1$.



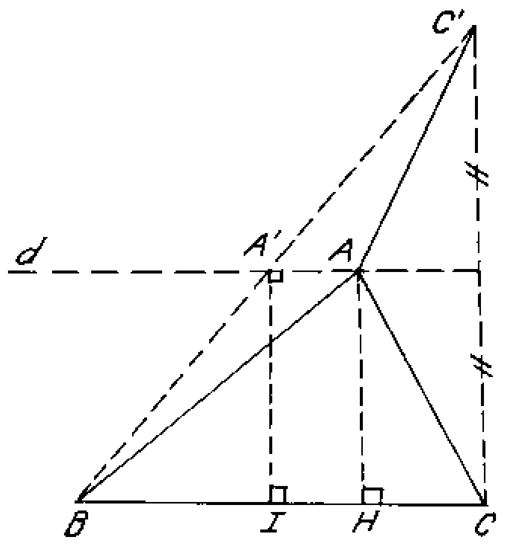
Hình 1

Gọi I là trung điểm đoạn BC, A' là hình chiếu vuông góc của A lên DI, r' là bán kính nội tiếp của tam giác $A'BC$. Tam giác $A'BC$ được chứa trong tam giác đều BCD (có bán kính nội tiếp bằng $1/2\sqrt{3}$), nên $r' \leqslant 1/2\sqrt{3}$. Vì vậy, để chứng minh c), ta chỉ việc chứng tỏ rằng $r \leqslant r'$.

Để ý rằng A'BC là tam giác cân có cùng đáy BC và cùng độ dài đường cao A'I = AH như tam giác ABC. Bất đẳng thức $r \leqslant r'$ là hệ quả của bài toán 2 sau đây :

Bài toán 2. *Chứng minh rằng trong tất cả các tam giác có cùng đáy a và chiều cao h_a tương ứng, thì tam giác cân có :*

- *Chu vi nhỏ nhất.*
- *Bán kính nội tiếp lớn nhất.*



Hình 2

Giải. Với các kí hiệu ở hình 1 và hình 2, ta phải chứng minh rằng :

$$A'B + A'C \leqslant AB + AC.$$

Lấy C' là điểm đối xứng của C qua đường thẳng d (đi qua A' và song song với BC), thì các điểm B, A', C' là thẳng hàng, và $AC = AC'$, $A'C = A'C'$, do đó $A'B + A'C = A'B + A'C' = BC' \leqslant AB + AC' = AB + AC$.

Gọi p, p' là nửa chu vi của các tam giác ABC và $A'BC$. Các tam giác này có cùng diện tích S, và ta đã chứng minh rằng $p' \leqslant p$. Vì

$$S = pr = p'r'.$$

nên với $p' \leqslant p$, ta suy ra $r \leqslant r'$.

Bài toán 1 được chứng minh xong.

Suy nghĩ về bài toán 1, ta thấy mục đích bài toán ấy có thể diễn tả dưới dạng sơ đồ :

ước lượng diện tích,
ước lượng cạnh → ước lượng đường cao,
ước lượng bán kính nội tiếp.

Ta có thể đặt những bài toán kiểu :

ước lượng cạnh ?
ước lượng diện tích → ước lượng đường cao ?
ước lượng bán kính nội tiếp ?

hoặc

ước lượng cạnh ?
ước lượng đường cao → ước lượng diện tích ?
ước lượng bán kính nội tiếp ?

vân, vân...

Đó là nội dung của các bài toán sau :

Bài toán 3. *Giả thử tam giác ABC có diện tích* $S \leqslant \sqrt{3}/4$. *Chứng minh rằng tam giác ấy có :*

a) Ít nhất một đường cao $\leqslant \sqrt{3}/2$

b) Bán kính nội tiếp $r \leqslant 1/2\sqrt{3}$.

Giải. a) Với các kí hiệu thường lệ, ta có

$$S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c) \leqslant$$

$$\leqslant p\left(\frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)}{3}\right)^3 = \frac{p^4}{27}$$

Mặt khác ta có

$$6S = ah_a + bh_b + ch_c \geqslant$$

$$\geqslant (a+b+c)\min(h_a, h_b, h_c) =$$

$$= 2p\min(h_a, h_b, h_c),$$

do đó

$$S^2 \geqslant \frac{1}{9}p^2\min^2(h_a, h_b, h_c)$$

$$\geqslant \frac{3\sqrt{3}}{9}S\min^2(h_a, h_b, h_c),$$

từ đây suy ra

$$\min^2(h_a, h_b, h_c) \leqslant \sqrt{3}S \leqslant \sqrt{3}.\sqrt{3}/4 = 3/4.$$

vậy

$$\min(h_a, h_b, h_c) \leqslant \sqrt{3}/2.$$

thành thử trong tam giác đã cho, đường cao nhỏ nhất có độ dài $\leqslant \sqrt{3}/2$.

Nhận xét. Tam giác vuông cân với cạnh góc vuông bằng 0,9 có diện tích bằng $0{,}405 < \sqrt{3}/4$, nhưng có hai đường cao là hai cạnh góc vuông bằng $0{,}9 > \sqrt{3}/2$, do đó không thể cải tiến hơn kết quả a).

b) Ta có :

$$S^2 = p^2r^2 \geqslant 3\sqrt{3}Sr^2,$$

do đó

$$r^2 \leqslant S/3\sqrt{3} \leqslant 1/3\sqrt{3}.\sqrt{3}/4 = 1/12.$$

hay

$$r \leqslant 1/\sqrt{12} = 1/2\sqrt{3}.$$

Bạn đọc lưu ý rằng xuất phát từ ước lượng diện tích, không thể ước lượng được các cạnh hay chu vi của tam giác ấy (lấy phản ví dụ).

Bài toán 4. *Chứng minh rằng nếu cả ba đường cao của một tam giác là* $\leqslant \sqrt{3}/2$, *thì tam giác ấy có bán kính nội tiếp* $\leqslant 1/2\sqrt{3}$.

Giải. Kết quả của bài toán là bệ quả của bất đẳng thức

$$r \leq \frac{1}{3}\max(h_a, h_b, h_c). \qquad (1)$$

Để chứng minh (1), ta để ý rằng

$6S = ah_a + bh_b + ch_c \leq$

$\leq (a + b + c)\max(h_a, h_b, h_c) =$

$= 2p \max(h_a, h_b, h_c),$

và do $S = pr$, ta suy ra bất đẳng thức (1).

Nhận xét. Bạn đọc hãy tìm ví dụ chứng tỏ rằng một tam giác có thể có cả ba đường cao rất nhỏ, nhưng có diện tích và các cạnh lớn tùy ý (đây là nội dung của một bài toán trong một kì thi toán ở Liên Xô). Bất đẳng thức (1) còn có thể coi là hệ quả của bất đẳng thức sau

$$r \leq \frac{1}{9}(h_a + h_b + h_c) \qquad (2)$$

Để chứng minh (2), ta có thể coi rằng $c \leq b \leq a$, khi đó $h_a \leq h_b \leq h_c$, khi đó theo bất đẳng thức Trê–bư–sép, ta có

$$6S = ah_a + bh_b + ch_c \leq \frac{1}{3} \times$$

$$\times (a + b + c)(h_a + h_b + h_c) =$$

$$= \frac{2}{3}p(h_a + h_b + h_c),$$

và do $S = pr$, từ đó suy ra (2).

Bên cạnh bất đẳng thức (2), bạn đọc hãy chứng minh bất đẳng thức

$$r < \frac{1}{2}\min(h_a, h_b, h_c).$$

Bài toán 5. *Chứng minh rằng nếu một tam giác có bán kính nội tiếp $r \leq 1/2\sqrt{3}$, thì nó có ít nhất một đường cao $h \leq \sqrt{3}/2$.*

Giải. Kết quả nêu trong bài toán 5 chỉ là hệ quả của bất đẳng thức

$$\frac{1}{3}\min(h_a, h_b, h_c) \leq r. \qquad (3)$$

Để chứng minh bất đẳng thức này, ta để ý rằng trong bài toán 3, ta đã gặp bất đẳng thức

$$3S \geq p.\min(h_a h_b h_c),$$

mà $S = pr$, từ đó suy ra bất đẳng thức (3).

Nhận xét. Tam giác vuông cân, với cạnh góc vuông bằng

$$a = \frac{2 + \sqrt{2}}{2\sqrt{3}}$$

có bán kính nội tiếp $r = 1/2\sqrt{3}$, có hai đường cao là hai cạnh góc vuông $a > \sqrt{3}/2$, vậy không thể cải tiến hơn kết quả bài toán 5.

Bạn đọc hãy suy nghĩ về những bài toán tương tự với các bài toán trên, nhưng với dấu bất đẳng thức ngược chiều.

2. Vài ước lượng các yếu tố của một tứ diện

Trong không gian, tứ diện đều với độ dài cạnh bằng 1, có bốn đường cao bằng $\sqrt{6}/3$, thể tích bằng $\sqrt{2}/12$ và bán kính (hình cầu) nội tiếp bằng $\sqrt{6}/12$. Từ nhận xét ấy, ta hãy đề ra bài toán sau đây.

Bài toán 6. *Cho một tứ diện với độ dài mỗi cạnh không vượt quá 1. Chứng minh rằng tứ diện ấy có :*

a) ít nhất hai đường cao $\leq \sqrt{6}/3$,

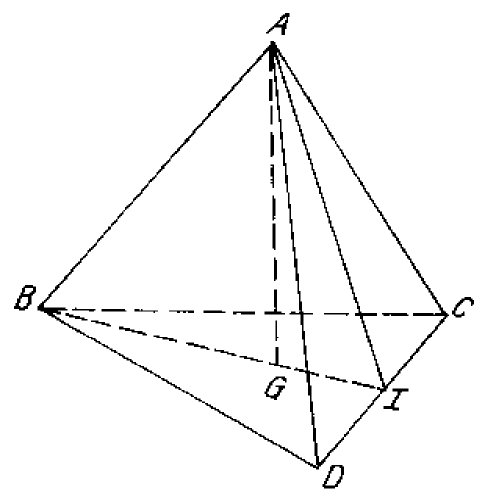
b) thể tích $\leq \sqrt{2}/12$.

c) bán kính nội tiếp $\leq \sqrt{6}/12$.

Giải. a) Ta gọi một trung tuyến của một tứ diện là đoạn thẳng nối một đỉnh với trọng tâm của mặt đối. Độ dài của một trung tuyến không nhỏ hơn độ dài của đường cao xuất phát từ cùng đỉnh, vì vậy để chứng minh a), ta chứng minh kết quả mạnh hơn :

Một tứ diện thỏa mãn điều kiện của bài toán, phải có ít nhất hai trung tuyến với độ dài $\leq \sqrt{6}/3$.

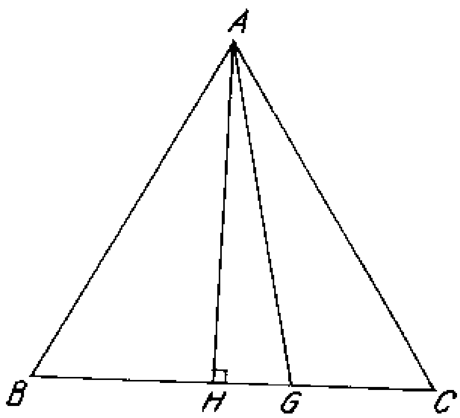
Phép chứng minh chia làm hai bước.



Hình 3

Bước 1. Tính độ dài trung tuyến AG của tứ diện $ABCD$, với G là trọng tâm tam giác BCD (hình 3).

Gọi I là trung điểm đoạn CD. Vấn đề quy về việc tính đoạn AG trong tam giác ABI, với $BG = 2GI$.



Hình 4

Theo hình 4, gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên đường thẳng BI. Vì H có thể nằm trong hay ngoài đoạn BI, nên ta sẽ dùng khoảng cách đại số. Một mặt ta có :

$$AH^2 = AB^2 - BH^2 = AB^2 - (\overline{BG} + \overline{GH})^2$$

$$= AB^2 - BG^2 - GH^2 - 2\overline{BG}\,.\,\overline{GH},$$

từ đó suy ra

$$AG^2 = AB^2 - (4/9)BI^2 - 2\overline{BG}\,.\,\overline{GH}. \qquad (4)$$

và mặt khác ta có

$$AH^2 = AI^2 - HI^2 = AI^2 - (\overline{HG} + \overline{GI})^2$$

$$= AI^2 - HG^2 - GI^2 - 2\overline{HG}\,.\,\overline{GI},$$

từ đó suy ra

$$AG^2 = AI^2 - (1/9)BI^2 - 2\overline{HB}\,.\,\overline{GI}. \qquad (5)$$

Vì $\overline{BG} = 2\overline{GI}$, $HG = -\overline{GH}$, nên từ (4) và (5) suy ra

$$3AG^2 = 2AI^2 + AB^2 - (2/3)BI^2 \qquad (6)$$

Vì AI là trung tuyến của tam giác ACD, BI là trung tuyến của tam giác ACD, nên ta có theo công thức tính trung tuyến của một tam giác

$$2AI^2 = AC^2 + AD^2 - (1/2)CD^2 \qquad (7)$$

$$2BI^2 = BC^2 + BD^2 - (1/2)CD^2 \qquad (8)$$

vậy cuối cùng, từ (6), (7), (8), ta suy ra

$$3AG^2 = (AB^2 + AC^2 + AD^2) -$$

$$- (1/3)(BC^2 + CD^2 + DB^2). \qquad (9)$$

Đó là công thức tính trung tuyến của một tứ diện theo các cạnh của tứ diện ấy (suy rộng công thức tính trung tuyến của một tam giác, bạn đọc hãy tự giải thích điều đó). Trong công thức này, để ý rằng

$$d(A) = AB^2 + AC^2 + AD^2$$

là tổng bình phương các cạnh xuất phát từ đỉnh A, còn

$$s(A) = BC^2 + CD^2 + DB^2$$

là tổng bình phương các cạnh của mặt đối đỉnh A.

Bước 2. Cũng như trên, ta kí hiệu $d(B)$, $d(C)$, $d(D)$ lần lượt là các tổng bình phương các cạnh xuất phát từ các đỉnh B, C, D và kí hiệu $s(B)$, $s(C)$, $s(D)$ lần lượt là các tổng bình phương các cạnh của các mặt đối các đỉnh B, C, D. Chẳng hạn

$$d(B) = BA^2 + BC^2 + BD^2\,.\; s(B) =$$

$$= AC^2 + CD^2 + DA^2 \ldots$$

Kí hiệu $2k$ là tổng bình phương của 6 cạnh của tứ diện, tức là

$$2k = AB^2 + AC^2 + AD^2 + BC^2 + CD^2 + DB^2$$

dĩ nhiên ta có

$$d(A) + s(A) = d(B) + s(B) =$$

$$= d(C) + s(C) = d(D) + s(D) = 2k,$$

và

$$d(A) + d(B) + d(C) + d(D) =$$

$$= s(A) + s(B) + s(C) + s(D) = 4k.$$

Đặt

$$d(A) = k + \alpha,\ d(B) = k + \beta,$$

$$d(C) = k + \gamma,\ d(D) = k + \delta,$$

thì ta có

$$s(A) = k - \alpha,\ s(B) = k - \beta,$$

$$s(C) = k - \gamma,\ s(D) = k - \delta,$$

và $\quad \alpha + \beta + \gamma + \delta = 0.$

Nếu cần, ta đổi tên các đỉnh của tứ diện đã cho, nên có thể coi rằng

$$d(A) \leqslant d(B) \leqslant d(C) \leqslant d(D).$$

tức là

$$\alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma \leqslant \delta.$$

Thế thì

$$4\alpha \leqslant \alpha + \beta + \gamma + \delta = 0. \qquad (10)$$

và

$$\alpha + 3\beta \leqslant \alpha + \beta + \gamma + \delta = 0$$

do đó

$$4\beta \leqslant \beta - \alpha. \qquad (11)$$

Gọi m_A và m_B là độ dài các trung tuyến của tứ diện, xuất phát từ các đỉnh A và B. Theo (9) và (10), ta có

$$3m_A^2 = d(A) - (1/3)s(A) =$$

$$= (k + \alpha) - (1/3)(k - \alpha) =$$

$= (2/3)k + (4/3)\alpha \leqslant (2/3)k \leqslant 2. \qquad (12)$

bởi vì theo giả thiết, độ dài của mỗi cạnh của tứ diện là $\leqslant 1$, vậy $2k \leqslant 6$. Từ (12) ta suy ra

$$m_A \leqslant \sqrt{6}/3$$

Ta lại có, theo (9) và (11)

$$3m_B^2 = d(B) - (1/3)s(B) = (k+\beta) - (1/3)(k-\beta)$$
$$= (2/3)k + (4/3)\beta \leqslant (2/3)k + (1/3)(\beta - \alpha)$$
$$= (1/3)(k+\beta) + (1/3)(k-\alpha)$$
$$= (1/3)d(B) + (1/3)s(A) \leqslant 2.$$

bởi vì do giả thiết của bài toán, ta có $d(B) \leqslant 3$ và $s(A) \leqslant 3$. Thành thử ta có

$$m_B \leqslant \sqrt{6}/3.$$

Tóm lại, ta đã chứng minh được rằng nếu mỗi cạnh của tứ diện là $\leqslant 1$, thì tứ diện ấy phải có ít nhất hai trung tuyến (và do đó có hai đường cao) với độ dài $\leqslant \sqrt{6}/3$.

Bạn đọc hãy kiểm nghiệm rằng tứ diện có 5 cạnh bằng 1, cạnh thứ sáu bằng a, với $a > 0$ khá nhỏ, có hai đường cao $> \sqrt{6}/3$; vậy không thể cải tiến hơn kết quả đã nêu ở phần a) của bài toán.

b) Theo bài toán 1, mỗi mặt của tứ diện có diện tích $\leqslant \sqrt{3}/4$, do đó nếu lấy mặt ứng với một đường cao $\leqslant \sqrt{6}/3$, thì ta ước lượng được thể tích của tứ diện đã cho

$$V \leqslant \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{12}.$$

c) Gọi S là diện tích toàn phần của tứ diện đã cho, thế thì

$$3V = rS,$$

với r là bán kính (hình cầu) nội tiếp của tứ diện ấy. Trong bài toán 9 dưới đây, ta sẽ chứng minh rằng với một tứ diện tùy ý, với thể tích V và diện tích toàn phần S, ta có bất đẳng thức

$$216\sqrt{3}V^2 \leqslant S^3 \qquad (13)$$

(mở rộng bất đẳng thức $3\sqrt{3}\, S \leqslant p^2$ liên hệ diện tích S và nửa chu vi p của một tam giác, bạn đọc hãy tự giải thích điều đó). Theo b), ta có $V \leqslant \sqrt{2}/12$, vì vậy

$$216\sqrt{3}V^2 \leqslant S^3 = 27V^3/r^3,$$

do đó

$$r^3 \leqslant V/8\sqrt{3} \leqslant 1/18\sqrt{6} = (1/3\sqrt{6})^3$$

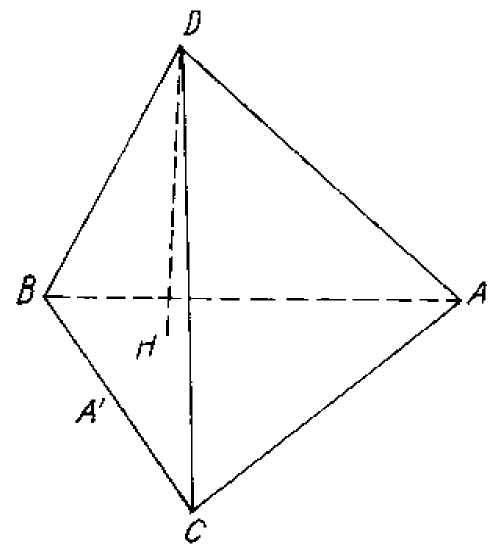
hay

$$r \leqslant \sqrt{6}/12.$$

Để đi đến bất đẳng thức (13), trước hết ta hãy giải quyết :

Bài toán 7. *Trong tất cả các tứ diện có cùng thể tích V và có cùng đáy ABC cho trước, hãy xác định tứ diện có diện tích toàn phần nhỏ nhất.*

Giải. Gọi O là đỉnh thứ tư của tứ diện, H là chân đường cao hạ từ O xuống đáy ABC, (hình 5). Vì H có thể nằm trong hay ngoài tam giác ABC, nên hãy xác định các khoảng cách "đại số" từ H đến các đường thẳng BC, CA, AB như sau :



Hình 5

$$|x| = HA', \ |y| = HB', \ |z| = HC'.$$

với A', B', C' là các hình chiếu vuông góc của H lên BC, CA, AB. Đối với dấu của x, ta coi rằng

$x > 0$ nếu H và A ở cùng về một phía đối với đường thẳng BC,

$x = 0$ nếu H' nằm trên đường thẳng BC,

$x < 0$ nếu H và A ở về hai phía đối với đường thẳng BC.

Dấu của y và của z được xác định theo cách tương tự.

Với quy ước ấy, và với

$$a = BC, \ b = CA, \ c = AB,$$

có thể thấy rằng trong mọi trường hợp, ta luôn luôn có

$$ax + by + cz = 2s \qquad (14)$$

với s là diện tích tam giác ABC.

Theo giả thiết của bài toán, $h = OH$ là không đổi ; hơn nữa

$$2\mathrm{dt}(OBC) = BC.OA' =$$
$$= a\sqrt{h^2 + x^2} = \sqrt{a^2h^2 + a^2x^2}$$

$$2dt(OCB) = CA.OB' =$$

$$= b\sqrt{h^2+y^2} = \sqrt{b^2h^2+b^2y^2},$$

$$2dt(OAB) = AB.OC' =$$

$$= c\sqrt{h^2+z^2} = \sqrt{c^2h^2+c^2z^2}.$$

Như vậy ta phải xác định x, y, z, thỏa mãn điều kiện (14), sao cho biểu thức

$$T = \sqrt{a^2h^2+a^2x^2}+\sqrt{b^2h^2+b^2y^2}+\sqrt{c^2h^2+c^2z^2}$$

đạt giá trị nhỏ nhất.

Trong mặt phẳng tọa độ Ouv, xem các điểm

$P\ (ah,\ ax)$
$Q\ (ah + bh,\ ax + by)$,
$R\ (ah + bh + ch,\ ax + by + cz)$,

do (14), ta thấy rằng R là một điểm cố định (không phụ thuộc x, y, z). và

$$T = OP + PQ + QR \geqslant OR$$

(bạn đọc tự vẽ hình), dấu đẳng thức chỉ xảy ra khi P, Q nằm trên đường thẳng OR, tức là khi

$$ax/ah = by/bh = cz/ch,$$

tức là khi $x = y = z$; khi đó T đạt giá trị nhỏ nhất

$$T_{\min} = \sqrt{(a+b+c)^2h^2+(ax+by+cz)^2}$$
$$= 2\sqrt{p^2h^2+s^2}$$

với p là nửa chu vi tam giác ABC.

Nhưng với $x = y = z$, ta thấy rằng H cách đều các cạnh của tam giác ABC, vậy H là tâm nội tiếp của tam giác ấy.

Tóm lại ta kết luận :

Trong tất cả các tứ diện $OABC$ có cùng thể tích V, và có cùng đáy ABC cho trước, tứ diện có diện tích toàn phần nhỏ nhất là tứ diện có chân H của đường cao OH trùng với tâm nội tiếp của tam giác ABC. Diện tích toàn phần nhỏ nhất ấy bằng

$$S_o = s + \sqrt{p^2h^2+s^2},$$

trong đó s, p là diện tích và nửa chu vi tam giác ABC, và

$$h = OH = 3V/s.$$

Từ bài toán 7, ta chuyển sang :

Bài toán 8. *Trong các tứ diện có cùng thể tích V, và có cùng diện tích đáy s cho trước, hãy xác định tứ diện có diện tích toàn phần nhỏ nhất.*

Giải. Bài toán 8 chỉ khác bài toán 7 ở chỗ : không đòi hỏi đáy ABC là cố định, mà chỉ đòi hỏi diện tích s của đáy ấy là cố định.

Với các ký hiệu ở bài toán 7, ta có, như đã biết

$$S \geqslant 3\sqrt{3}\,s,$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi đáy ABC là một tam giác đều, và tứ diện là một hình chóp tam giác đều.

VỀ MỘT BÀI TOÁN CỰC TRỊ HÌNH HỌC

NGUYỄN HẢI THANH

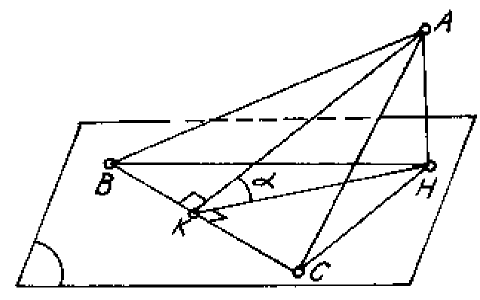
Chúng ta hãy xét bài toán sau : Cho một hình lập phương cạnh a, và một mặt phẳng tùy ý trong không gian. Hãy chiếu vuông góc hình lập phương lên mặt phẳng P, ta nhận được hình chiếu của hình lập phương trên P. Tìm vị trí của mặt phẳng P, sao cho diện tích hình chiếu là lớn nhất.

Lời giải : *Bài toán này chia thành 3 bài toán nhỏ, được xây dựng từ những hiểu biết mà chúng ta thu được lần lượt trong quá trình tìm hiểu hình học không gian lớp 12.*

Bài toán 1. Khi chiếu vuông góc một đa giác phẳng xuống một mặt phẳng tùy ý, thì ta có công thức sau :

$$S_{chiếu} = S\cos\alpha$$

trong đó S là diện tích của đa giác đã cho. $S_{chiếu}$ là diện tích hình chiếu của đa giác, α là góc phẳng của nhị diện tạo nên bởi mặt phẳng đa giác và mặt phẳng chiếu.



Chứng minh bài toán này không có gì khó khăn. Không làm mất tính tổng quát, chúng ta hãy xét trường hợp khi đa giác ban đầu là ΔABC, và mặt phẳng chiếu P nằm ở vị trí tương đối như hình vẽ trên. Hạ AH vuông góc với P, và AK vuông góc với BC. Theo định lí ba đường vuông góc ta có ngay KH cũng vuông góc với BC. Lúc này góc $\widehat{AKH}$ chính là góc phẳng α của nhị diện tạo bởi mặt phẳng ΔABC và P.

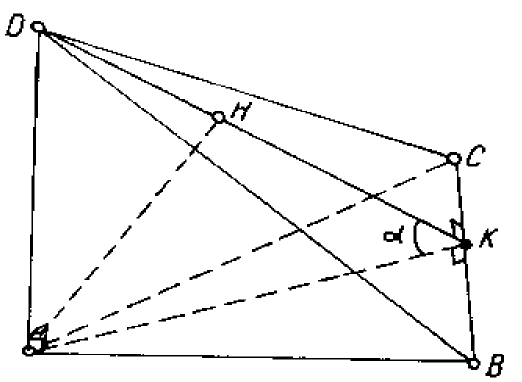
$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AK \,.\, BC$$

$$S_{\Delta HBC} = \frac{1}{2}HK \,.\, BC$$

vì $KH = AK\cos\alpha$, nên $S_{\Delta HBC} = S_{\Delta ABC}\cos\alpha$. Tức là $S_{chiếu} = S\cos\alpha$

Bài toán 2. Cho tứ diện vuông $ABCD$, vuông tại A (tức là các góc phẳng của tam diện đỉnh A đều là các góc vuông). Gọi α, β, γ lần lượt là các góc phẳng của các nhị diện tạo nên bởi mặt phẳng ΔBCD với các mặt bên còn lại của tứ diện. Hãy chứng minh rằng :

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$



Tứ diện $ABCD$ là tứ diện trực tâm, tức là tứ diện có các cặp cạnh đối vuông góc (chẳng hạn $AD \perp BC$ vì AD vuông góc với mặt phẳng ABC). Có thể chứng minh tính chất sau của tứ diện trực tâm : đường cao của tứ diện xuất phát từ 1 đỉnh bất kì đi qua trực tâm của tam giác mặt đối diện. Thật vậy hạ AH vuông góc với mặt phẳng BCD, ta hãy chứng minh chẳng hạn $DH \perp BC$. Vì $BC \perp AD$, $BC \perp AH$ nên BC vuông góc với mặt phẳng ADH, vậy $DH \perp BC$. Tượng tự ta có $CH \perp BD$. Vậy H là trực tâm của ΔBCD.

Kéo dài DH, cắt BC tại K. Vì $DK \perp BC$, nên theo định lí 3 đường vuông gdc $AK \perp BC$. Vậy góc $\alpha = \widehat{DKA}$ là góc phẳng của nhị diện cạnh BC tạo nên bởi 2 mặt phẳng BCD và ABC. Ta thấy ngay $\alpha = \widehat{DAH}$. Vậy $\cos\alpha = AH/AD$. Do đó $\cos^2\alpha = AH^2/AD^2$. Bằng cách làm tương tự, ta sẽ nhận được

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{AH^2}{AD^2} + \frac{AH^2}{AB^2} + \frac{AH^2}{AC^2}$$

lại dùng một phép chiếu song song thứ hai để từ P' trở về P. Như vậy, ba điểm A, B, C thẳng hàng trong P biến thành ba điểm A', B', C' cũng thẳng hàng trong P' và A', B', C' lại biến thành ba điểm A'', B'', C'' thẳng hàng trong P ; ngoài ra $\overline{AB}/\overline{AC} = \overline{A'B'}/\overline{A'C'}$ và $\overline{A'B'}/\overline{A'C'} = \overline{A''B''}/\overline{A''C''}$.

Vậy ngay trong bản thân mặt phẳng P, ta có một phép biến hình giữ nguyên sự thẳng hàng của ba điểm và tỉ số đơn của ba điểm thẳng hàng.

Trong mặt phẳng, ta sẽ gọi một phép biến hình một đối một (một song ánh) giữ nguyên sự thẳng hàng của ba điểm và tỉ số đơn của ba điểm thẳng hàng là một phép biến đổi afin. Nếu trong một mặt phẳng có một hệ tọa độ thì mối liên hệ giữa tọa độ (x, y) của một điểm M với các tọa độ (x', y') của ảnh M' trong một phép biến đổi afin sẽ có dạng (a, b, c, d, e, f là các hệ số) :

$$\begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = dx + ey + f \end{cases}$$

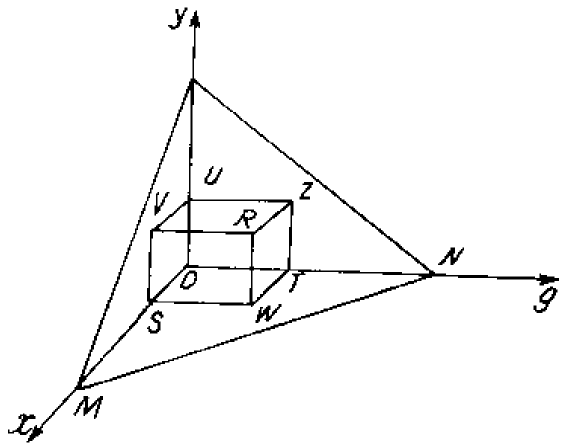
Ta sẽ không chứng minh nhưng bạn đọc có thể kiểm tra dễ dàng rằng nó biến một đường thẳng thành một đường thẳng. Trong không gian những phép biến đổi có dạng :

$$\begin{cases} x' = ax + by + cz + d \\ y' = ex + fy + gz + h \\ z' = kx + ly + mz + n \end{cases}$$

sẽ gọi là những phép biến đổi afin. Sự mở rộng ở đây là tự nhiên, không cần viện đến không gian bốn chiều. Bạn đọc có thể kiểm tra để thấy một phép biến đổi như vậy biến một mặt phẳng thành một mặt phẳng (phương trình dạng $\alpha x + \beta y + \gamma z + c = 0$) do đó biến đường thẳng coi như tương giao của hai mặt phẳng) thành đường thẳng. Tỉ số đơn của ba điểm thẳng hàng cũng được giữ nguyên qua một phép biến đổi afin.

Bây giờ ta hãy xét một mặt phẳng cắt ba trục tọa độ Ox, Oy, Oz ở M, N, P (h.5). Nếu R là một điểm của mặt phẳng có tọa độ là x, y, z thì cũng giống như trường hợp "phẳng", ta sẽ có $x/\overline{OM} + y/\overline{ON} + z/\overline{OP} = 1$ phương trình mặt phẳng. Nếu ta biến đổi toàn bộ hình vẽ bằng một phép biến đổi afin thì tam diện $Oxyz$ biến thành một tam diện $O'x'y'z'$ (nói chung không có góc vuông vì "vuông" không phải là khái niệm afin) còn các tỉ số đơn được giữ nguyên :

$$x/\overline{OM} = \overline{OS}/\overline{OM} = \overline{O'S'}/\overline{O'M'}$$
$$y/\overline{ON} = \overline{OT}/\overline{ON} = \overline{O'T'}/\overline{O'N'}$$
$$z/\overline{OP} = \overline{OU}/\overline{OP} = \overline{O'U'}/\overline{O'P'}$$



Hình 5

Vậy ta có : *Cho một tam diện bất kì $O'x'y'z'$ và một điểm R', qua R' có một mặt phẳng biến thiên cắt $O'x'$, $O'y'$, $O'z'$ theo thứ tự ở M', N', P'. Thế thì có các số $\alpha = \overline{O'S'}$, $\beta = \overline{O'T'}$ và $\gamma = \overline{O'U'}$, sao cho :*

$$\alpha/\overline{O'M'} + \beta/\overline{O'N'} + \gamma/\overline{O'P'} = 1$$

Muốn $\alpha = \beta = \gamma$ thì hình hộp $O'S'T'U'V'W'Z$ phải có các cạnh bằng nhau, nghĩa là cả sáu mặt đều là hình thoi.

Đến đây xin mời các bạn tiếp tục để đi đến các bài toán khác trong [1]. Tôi xin tạm dừng bằng những nhấn mạnh sau đây :

1) Lõi cốt của nội dung 10 bài toán trong [1] là phương trình đường thẳng và phương trình mặt phẳng. Như vậy là cùng một bản chất mà hình thức biểu hiện ra ngoài thật là phong phú.

2) Trong các phép biến đổi, có những cái được giữ nguyên như qua các phép biến đổi afin thì "thẳng hàng", "đường thẳng", "tỉ số đơn", "hình hình hành" được giữ nguyên, trong lúc những cái khác như "vuông", "hình vuông", "chiều dài" thì thay đổi. Cái thông minh của loài người là khi nghiên cứu một bộ phận tính chất nào đó ẩn trong một hình thì đi tìm cho được những phép biến hình biết chắc là giữ nguyên bộ phận các tính chất muốn nghiên cứu nhưng thay đổi các tính chất khác. Khéo tìm thì ở hình mới (qua phép biến hình) các tính chất muốn nghiên cứu sẽ hiện ra rõ rệt. Ví dụ ở hình 3, thoạt nhìn khó ai mà thấy được hệ thức (2), nhưng qua một phép biến đổi afin để trở về hình 2, thì hệ thức (1) lại là một kiến thức cơ bản có trong sách giáo khoa. Đây là một tư tưởng "lớn" trong toán học hiện đại.

Vì $1/AH^2 = 1/AD^2 + 1/AK^2$ (Hệ thức lượng trong Δ vuông DAK).

mà $1/AK^2 = 1/AB^2 + 1/AC^2$ (Hệ thức lượng trong Δ vuông CAB).

nên $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AD^2} + \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2}$

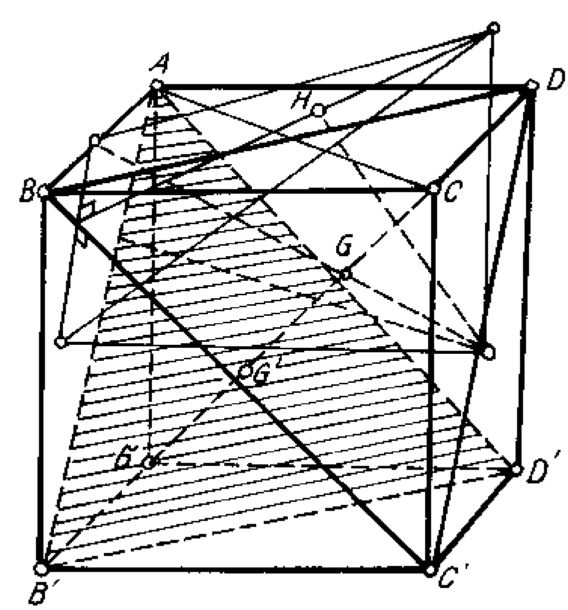
$$\Rightarrow \frac{AH^2}{AD^2} + \frac{AH^2}{AB^2} + \frac{AH^2}{AC^2} = 1$$

Cuối cùng ta có

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Bài toán 3 : Cho hình lập phương $ABCDA'B'C'D'$. Hãy tìm diện tích của hình chiếu nhận được khi chiếu vuông góc hình lập phương $ABCDA'B'C'D'$ lên mặt phẳng song song với mặt chéo tam giác BDC', biết cạnh của hình lập phương bằng a.

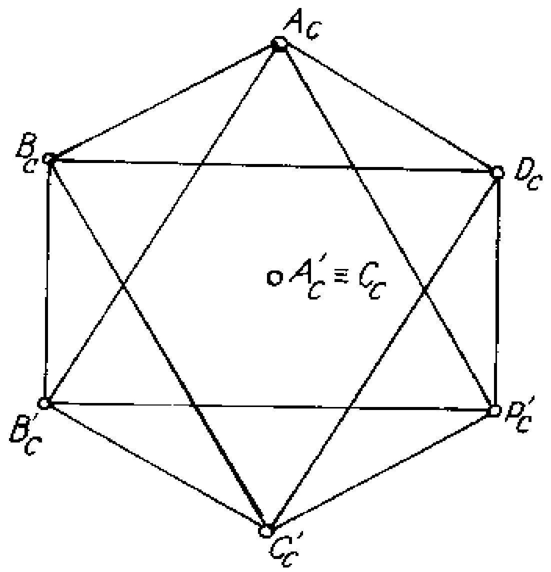
Đầu tiên ta hãy chứng minh $A'C'$ vuông góc với mặt phẳng BDC'. Ta thấy ngay $BD \perp AC$ và $BD \perp AA'$, nên BD vuông góc với mặt phẳng $AA'C$, vậy $BD \perp A'C$. Tương tự $BC' \perp A'C$. Do đó : $A'C$ vuông góc với mặt phẳng BDC'



Một cách tương tự, ta cũng chứng minh được $A'C$ vuông góc với mặt phẳng $AB'D'$. Vậy hình chiếu vuông góc của hình lập phương lên mặt phẳng P sẽ có dạng như hình vẽ dưới. Trong đó hình chiếu của A và C trùng vào tâm của lục giác đều $B_cB'_cC'_cD'_cD_cA_c$, B_c, B'_c, C'_c, D'_c, D_c và A_c theo thứ tự là hình chiếu của B, B', C', D', D và A. Dễ thấy diện tích của hai lục giác đều bằng 2 lần diện tích Δ đều $B_cD_cC'_c$,

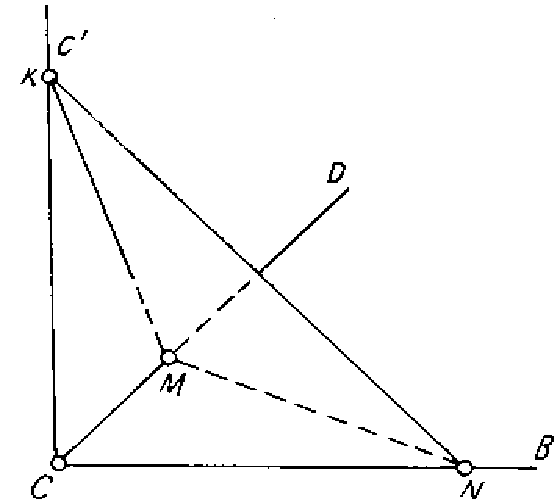
$$S_{\text{chiếu của hình lập phương}} =$$

$$= 2\,\frac{1}{2}a\sqrt{2}\,.\,a\sqrt{2}\,.\,\frac{\sqrt{3}}{2} = a^2\sqrt{3}$$



Bài toán 1 là bài toán quen thuộc, có trong sách giáo khoa còn các bài toán 2 và 3 khó hơn một chút, nhưng cũng quen thuộc đối với các học sinh thường tìm hiểu thêm về hình học không gian. Trong khi tìm cách giải bài toán đặt ra ban đầu, chúng ta suy nghĩ và tìm tòi trong các điều đã biết, những điều gì có thể vận dụng được và nhớ lại các bài toán 1, 2, 3 trên đây. Trước hết chúng ta xét :

Hệ quả của bài toán 1 và bài toán 2 : Ta xét bài toán sau. Cho mặt phẳng P cắt ba cạnh CB, CD, CC' tại các điểm nằm ở phía trong của 3 cạnh đó, hoặc nằm trên các cạnh đó kéo dài về phía B, D, C'. Hãy tìm vị trí của mặt phẳng P sao cho hình chiếu của 3 mặt của hình lập phương nằm kề nhau, và có đỉnh C chung có diện tích lớn nhất. Gọi các điểm mà P cắt các cạnh của hình lập phương là K, M, N, và gọi α, β, γ là các góc phẳng của các nhị diện, tạo nên bởi mặt phẳng KMN với các mặt còn lại của tứ diện



vuông $CKMN$ (vuông tại C). Theo kết quả của bài toán 2 thì $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$. Theo kết quả của bài toán 1 thì diện tích của hình chiếu của các mặt bên của hình lập phương có chung đỉnh C sẽ là

$$S_{chiếu} = a^2(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma)$$

trong đó a là cạnh của hình lập phương.

Vấn đề đặt ra là tìm giá trị lớn nhất của $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma$ với điều kiện $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$, trong đó $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ không âm (dễ dàng chứng minh được điều này). Theo bất đẳng thức Bunhiacôpxki, ta có :

$$(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma)(1 + 1 + 1)$$

$$\geqslant (\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma)^2$$

(Bất đẳng thức này cũng dễ dàng chứng minh được dựa vào bất đẳng thức Côsi cho 2 số $a + b \geqslant 2\sqrt{ab}, a \geqslant 0, b \geqslant 0$). Dấu bằng xảy ra khi $\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = 1/\sqrt{3}$, lúc này $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\alpha$ lớn nhất và bằng $3/\sqrt{3} = \sqrt{3}$ và $S_{chiếu}$ lớn nhất là $a^2\sqrt{3}$.

Vậy hình chiếu tạo nên bởi 7 đỉnh A, B, C, D, B', C', D' xuống mặt phẳng P sẽ có diện tích lớn nhất là $a^2\sqrt{3}$. Ta hãy chứng minh rằng khi chiếu vuông góc hình lập phương $ABCDA'B'C'D'$ xuống mặt phẳng P tùy ý thì hình chiếu có diện tích lớn nhất bằng $a^2\sqrt{3}$, lúc đó mặt phẳng P song song với một trong các mặt chéo tam giác.

Muốn vậy ta chỉ cần chứng minh khẳng định sau : "khi xét mặt phẳng P tùy ý trong không gian, và hình lập phương $ABCDA'B'C'D'$, thì ta luôn luôn tịnh tiến song song mặt phẳng P về được vị trí P' sao cho tồn tại một đỉnh nào đó của hình lập phương, chẳng hạn đỉnh C, mà mặt phẳng P' cắt 3 cạnh xuất phát từ C tại các điểm trên 3 cạnh ấy, hoặc trên phần kéo dài của 3 cạnh ấy về phía các đỉnh kề đỉnh C".

Chẳng hạn, nếu P' cắt CB, CD tại các điểm ở trong cạnh CB, CD, còn cắt cạnh CC' ở điểm nằm trên phần kéo dài của CC' về phía C, thì ta không xét đỉnh C nữa, mà sẽ xét đỉnh C' thay cho đỉnh C. Khẳng định trên được chứng minh tương tự. Nếu các điều kiện như trong khẳng định được thực hiện thì A' luôn có hình chiếu rơi vào trong hình chiếu tạo nên bởi 7 đỉnh A, B, C, D, B', C', D', và do đó ta đã giải xong bài toán đặt ra.

TỪ MỘT BẤT ĐẲNG THỨC TRONG TAM GIÁC

BÙI VIỆT HÀ

I. Một số kí hiệu

Cho ΔABC bất kì. M là 1 điểm bất kì nằm bên trong tam giác ABC. Gọi các khoảng cách MA, MB, MC tương ứng là Ra, Rb, Rc. Khoảng cách từ M đến các cạnh đối tương ứng BC, AC, AB là d_a, d_b, d_c.

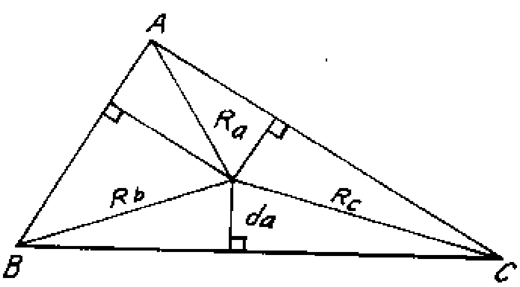
Đối với tam giác ABC ta giữ nguyên các kí hiệu như ở trường phổ thông đã học. Chẳng hạn :

+ a, b, c, – các cạnh đối diện với các đỉnh A, B, C.

+ S – diện tích tam giác ABC.

+ R, r, p kí hiệu lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp, bán kính đường tròn nội tiếp, nửa chu vi của tam giác ABC.

+ ha_a, m_a, β_a lần lượt là độ dài các đường cao, trung tuyến, phân giác của tam giác hạ từ đỉnh A.



Đối với tam giác, các đỉnh được kí hiệu là A_1, B_1, C_1 thì các kí hiệu tương ứng sẽ được gắn thêm kí hiệu 1 : $R_1, a_1, b_1, c_1 ...$

Giữa R_a, R_b, R_c và d_a, d_b, d_c có một số liên hệ

Ta để ý 2 bất đẳng thức cơ bản trong chúng :

$$Ra + Rb + Rc \geqslant 2(d_a + d_b + d_c) \qquad (1)$$

$$aR_a + bR_b + cR_c \geqslant 2(ad_a + bd_b + cd_c) \qquad (2)$$

Dưới đây ta nêu ra một số quy tắc "biến đổi" đối với các kí hiệu $R_a, R_b, R_c, d_a, d_b, d_c$, dựa vào chúng ta sẽ chứng minh (1) và (2) và dẫn ra một số bất đẳng thức khác là hệ quả của (1) và (2).

II. Thành lập các quy tắc :

1. Gọi chân các đường cao hạ từ M xuống các cạnh đối diện với các đỉnh A, B, C, là A_1, B_1, C_1. Ta sẽ thành lập sự liên hệ giữa tam giác ABC và $A_1B_1C_1$.

Rõ ràng $MA_1 = d_a = R_{a_1}$

Vậy ta có liên hệ đầu tiên

$$R_{a_1} = d_a \qquad (3)$$

Hạ $MH \perp C_1B_1$ vậy $MH = d_{a_1}$.

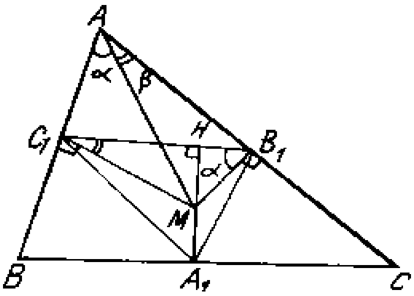
Từ hình vẽ ta có :

$$MH = MB_1 \sin\alpha = MB_1 \cdot \frac{MC_1}{MA} = \frac{d_b b_c}{R_a}$$

Vậy ta có liên hệ thứ hai :

$d_{a_1} = d_b d_c / R_a$ (4) ; Từ (4) ta có :

$$R_a = R_{b_1} R_{c_1} / d_{a_1} \qquad (4')$$



Ta lại có $B_1C_1 = AM\sin(\widehat{C_1AB_1}) =$

$= AM \cdot \frac{BC}{2R}$. Mà $B_1C_1 = a_1$, $AM = R_a$, $BC = a$ vậy ta có :

$a_1 = aR_a/2R$ (5). Từ (4') ta suy ra công thức ngược của (5).

$a = \lambda \frac{a_1 d_{a_1}}{R_{b_1} R_{c_1}}$ (5') ở đây $\lambda = 2R$.

Một cách tương tự ta có các công thức đối với b_1, c_1. Các công thức (3) – (5) cho ta một "quy tắc biến đổi", được phát biểu như sau : (Kí hiệu là Q)

$$R_a \mapsto d_a\,;\; d_a \mapsto d_b d_c/R_a\,;\; a \mapsto aR_3/2R \quad (Q)$$

Các công thức (3), (4'), (5') cho ta một quy tắc khác :

$$R_a \mapsto R_b R_c/d_a\,;\; d_a \mapsto R_a\,;$$

$$a \mapsto \lambda \frac{ad_a}{R_b R_c} \qquad (Q^*)$$

Kéo dài các đoạn MA_1, MB_1, MC_1 và lấy trên đó các điểm A_2, B_2, C_2 thỏa mãn :

$$\overline{MA}_1 . \overline{MA}_2 = \overline{MB}_1 . \overline{MB}_2 = \overline{MC}_1 . \overline{MC}_2 = k^2 \quad (6)$$

Ở đây k = const $\neq 0$ cho trước (có thể điểm A_2 nằm trong MA_1). Các đường MA, MB, MC cắt các cạnh của tam giác $A_2B_2C_2$ lần lượt tại D_1, E_1, F_1.

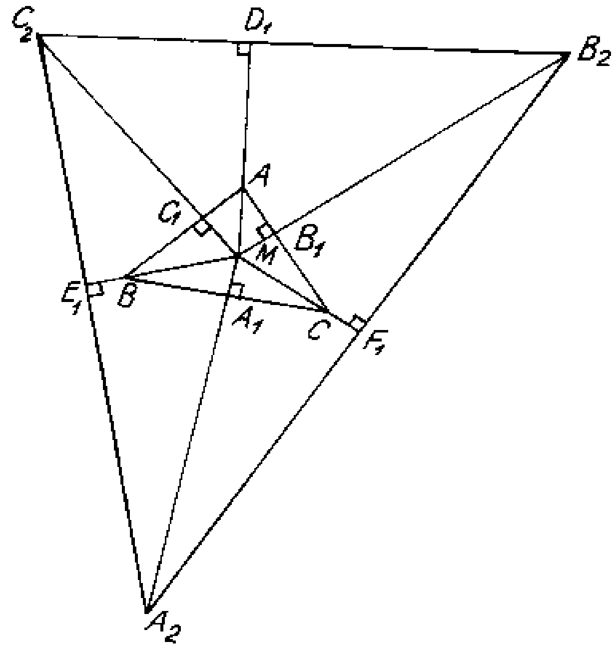
Dễ kiểm tra thấy rằng D_1, E_1, F_1 chính là chân các đường vuông góc hạ từ M xuống các cạnh B_2C_2, A_2C_2 và A_2B_2 hơn nữa ta có đẳng thức :

$$\overline{MA} . \overline{MD}_1 = \overline{MB} . \overline{ME}_1 = \overline{MC} . \overline{MF}_1 = k^2 \quad (7)$$

(các bạn hãy tự kiểm tra điều này)

Đẳng thức (7) cho ta $MA = k^2/MD_1$ hay

$$R_a = k^2/d_{a_2} \qquad (8)$$



(6) cho ta : $MA_1 = k^2/MA_2$

hay $d_a = k^2/R_{a_2}$ (9)

Từ hình vẽ ta có : $BC/E_1F_1 = MB/MF_1$ (vì 2 ΔMBC, ΔME_1F_1 *đồng dạng*).

Nhưng (công thức (5) trang 1) :

$E_1F_1 = B_2C_2 . MA_2/2R_2$ Vậy

$$BC = \frac{MB}{MF_1} \cdot \frac{B_2C_2 . MA_2}{2R_2} = \frac{R_b}{d_{c_2}} = \frac{a_2 . R_2}{2R_2}$$

Thay thế $R_b = k^2/db_2$ ta có :

$$a = \frac{k^2}{2R_2\ d_{a_2} d_{b_2} d_{c_2}} \cdot a_2 R_{a_2} d_{a_2} \qquad (10)$$

Các công thức ngược của (8), (9), (10) được tính như sau : (9) cho ta :

$$R_{a_2} = k^2/d_a \qquad (8')$$

(8) cho ta :

$$d_{a_2} = k^2/R_a \qquad (9')$$

(10) cho ta :

$$a_2 = \frac{ad_{b_2} d_{c_2} 2R_2}{k^2 . R_{a_2}}$$

Thay thế (8'), (9') ta có :

$$a_2 = \frac{a}{k^2} \cdot 2R_2 \cdot \frac{k^2}{R_b} \cdot \frac{k^2}{R_c} \cdot \frac{d_a}{k^2} =$$

$$= 2R_2 \cdot \frac{ad_a}{R_b R_c}$$

Vậy :

$$a_2 = 2R_2 \cdot \frac{ad_a}{R_bR_c} \qquad (10')$$

Các công thức (8), (9), (10) và (8'), (9'), (10') cho ta một quy tắc biến đổi nữa, kí hiệu là T : (ta lấy $k = 1$ cho tiện)

$$R_a \mapsto \frac{1}{d_a}\,;\, d_a \mapsto \frac{1}{R_a}$$

$$a \mapsto \frac{1}{2R} \cdot \frac{aR_a}{d_bd_c} \qquad (\mathrm{T})$$

và $$R_a \mapsto \frac{1}{d_a}\,;\, d_a \mapsto \frac{1}{R_a}\,;$$

$$a \mapsto \lambda \cdot \frac{ad_a}{R_bR_c} \qquad (\mathrm{T}^*)$$

III. Bây giờ ta sẽ áp dụng các quy tắc trên để chứng minh các công thức (1), (2) trong I :

Rõ ràng ta có :

$$R_a + d_a \geqslant h_a.$$

$$\Rightarrow aR_a + ad_a \geqslant ah_a = 2S = ad_a + bd_b + cd_c$$

Suy ra :

$$aR_a \geqslant bd_b + cd_c \qquad (^*)$$

Viết thêm 2 bất đẳng thức tương tự (*) cho bR_b, cR_c và cộng từng vế của 3 bất đẳng thức được (2).

Bây giờ áp dụng Q cho (*) ta được

$$\frac{aR_a}{2R} \cdot d_a \geqslant \frac{bR_b}{2R} \cdot \frac{d_ad_c}{R_b} + \frac{cR_c}{2R} \cdot \frac{d_ad_b}{R_c}$$

hay $$aR_a \geqslant bd_c + cd_b \quad (^{**})$$

hay $$R_a \geqslant \frac{b}{a} d_c \frac{c}{a} d_b$$

Viết thêm 2 công thức tương tự cho R_b, R_c rồi cộng từng vế của 3 bất đẳng thức ta được (1)

IV. Trong phần này ta sẽ áp dụng các quy tắc trên vào các bất đẳng thức (1) (2)

Áp dụng T vào (1) ta có ngay :

$$\frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_b} + \frac{1}{R_c} \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{d_a} + \frac{1}{d_b} + \frac{1}{d_c}\right) \qquad (11)$$

Áp dụng Q vào (1) ta sẽ thu được :

$$d_a + d_b + d_c \geqslant 2\left(\frac{d_bd_c}{R_a} + \frac{d_ad_c}{R_b} + \frac{d_ad_b}{R_c}\right)$$

hay dưới dạng khác :

$$\frac{1}{d_bd_c} + \frac{1}{d_ad_c} + \frac{1}{d_ad_b} \geqslant$$

$$\geqslant 2\left(\frac{1}{R_ad_a} + \frac{1}{R_bd_b} + \frac{1}{R_cd_c}\right) \qquad (12$$

Theo quy tắc T thì (12) dẫn đến :

$$R_bR_c + R_aR_c + R_aR_b \geqslant$$

$$\geqslant 2(R_ad_a + R_bd_b + R_cd_c) \qquad (13$$

Bây giờ áp dụng Q^* vào (1) ta có :

$$\frac{R_bR_c}{d_a} + \frac{R_aR_c}{d_b} + \frac{R_aR_b}{d_c} \geqslant 2(R_a + R_b + R_c) \quad (14)$$

hay

$$\frac{1}{R_ad_a} + \frac{1}{R_bd_b} + \frac{1}{R_cd_c} \geqslant$$

$$\geqslant 2\left(\frac{1}{R_bR_c} + \frac{1}{R_aR_c} + \frac{5}{R_aR_b}\right) \qquad (14')$$

Áp dụng T vào (14') ta thu được :

$$R_ad_a + R_bd_b + R_cd_c \geqslant$$

$$\geqslant 2(d_bd_c + d_ad_c + d_ad_b) \qquad (15$$

Áp dụng quy tắc Q vào (2) ta có :

$$aR_ad_a + bR_bd_b + cR_cd_c \geqslant$$

$$\geqslant 2(ad_bd_c + bd_ad_c + cd_ad_b) \qquad (16$$

Theo T thì (16) dẫn đến :

$$a + b + c \geqslant 2\left(a\frac{R_ad_a}{R_bR_c} + b\frac{R_bd_b}{R_aR_c} + c\frac{R_cd_c}{R_aR_b}\right) \quad (17)$$

Trong III ta đã chứng minh được bất đẳng thức (*)

Từ đây suy ra :

$$a\frac{R_a}{d_a} \geqslant b\frac{d_c}{d_a} + c\frac{d_b}{d_a}$$

Từ đó có :

$$a\frac{R_a}{d_a} + b\frac{R_b}{d_b} + c\frac{R_c}{d_c} \geqslant 2(a + b + c) \quad (18)$$

Áp dụng T vào (18) ta có :

$$aR_a^2 + bR_b^2 + cR_c^2 \geqslant 2(aR_ad_a + bR_bd_b + cR_cd_c) \quad (19)$$

Áp dụng Q^* vào (18) ta có :

$$aR_bR_c + bR_aR_c + cR_aR_b \geqslant$$

$$\geqslant 2(aR_ad_a + bR_bd_b + cR_cd_c) \qquad (20)$$

Lại áp dụng $Q(^*)$ vào (19) ta có :

$$\frac{a}{R_a d_a}+\frac{b}{R_b d_b}+\frac{c}{R_c d_c}\geqslant$$

$$\geqslant 2\left(\frac{a}{R_b R_c}+\frac{b}{R_a R_c}+\frac{c}{R_a R_b}\right) \qquad (21)$$

Từ (*) ta cũng có $R_a > d_b\cdot\frac{c}{a}+dc\cdot\frac{b}{a}$ hay

$$\sqrt{R_a}\geqslant\sqrt{d_b\cdot\frac{c}{a}+d_c\cdot\frac{b}{a}}\geqslant$$

$$\geqslant(\sqrt{d_b}\cdot\sqrt{c/a}+\sqrt{d_c}\cdot\sqrt{b/a})/\sqrt{2}$$

Ta cũng có các bất đẳng thức tương tự cho $\sqrt{R_b}$ và $\sqrt{R_c}$ và đi đến :

$$\sqrt{R_a}+\sqrt{R_b}+\sqrt{R_c}\geqslant\sqrt{2}(\sqrt{d_a}+\sqrt{d_b}+\sqrt{d_c}) \qquad (22)$$

Áp dụng các quy tắc Q, Q^*, T vào (22) ta sẽ thu được (các bạn thử lại !)

$$\frac{1}{\sqrt{R_a}}+\frac{1}{\sqrt{R_b}}+\frac{1}{\sqrt{R_c}}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{d_a}}+\frac{1}{\sqrt{d_b}}+\frac{1}{\sqrt{d_c}}\right) \qquad (23)$$

$$\sqrt{R_a d_a}+\sqrt{R_b d_b}+\sqrt{R_c d_c}\geqslant$$

$$\geqslant\sqrt{2}\,(\sqrt{d_b d_c}+\sqrt{d d_c}+\sqrt{d_a d_b}) \qquad (24)$$

$$\sqrt{R_b R_c}+\sqrt{R_a R_b c}+\sqrt{R_a R_b}\geqslant$$

$$\geqslant\sqrt{2}\,(\sqrt{R_a d_a}+\sqrt{R_b d_b}+\sqrt{R_c d_c}) \qquad (25)$$

$$\frac{1}{\sqrt{R_a d_a}}+\frac{1}{\sqrt{R_b d_b}}+\frac{1}{\sqrt{R_c d_c}}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{d_b d_c}}+\frac{1}{\sqrt{d_a d_c}}+\frac{1}{\sqrt{d_a d_b}}\right) \qquad (26)$$

$$\frac{1}{\sqrt{R_b R_c}}+\frac{1}{\sqrt{R_a R_c}}+\frac{1}{\sqrt{R_c R_b}}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{R_a d_a}}+\frac{1}{\sqrt{R_b d_b}}+\frac{1}{\sqrt{R_c d_c}}\right) \qquad (27)$$

Từ (*) trong III ta có

$$\frac{1}{aR_a}\leqslant\frac{1}{bd_b+cd_c}\leqslant\frac{1}{4}\left(\frac{1}{bd_b}+\frac{1}{cd_c}\right)$$

và các bất đẳng thức tương tự cho $1/bR_b$, $1/cR_c$, vậy ta có

$$\frac{1}{aR_a}+\frac{1}{bR_b}+\frac{1}{cR_c}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{1}{ad_a}+\frac{1}{bd_b}+\frac{1}{cd_c}\right) \qquad (28)$$

Áp dụng Q vào (28) ta có

$$\frac{1}{aR_a d_a}+\frac{1}{bR_b d_b}+\frac{1}{cR_c d_c}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{1}{ad_b d_c}+\frac{1}{bd_a d_c}+\frac{1}{cd_a d_b}\right) \qquad (29)$$

Áp dụng T vào (29) ta sẽ có :

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}\cdot\frac{R_b R_c}{R_a d_a}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{b}\cdot\frac{R_a R_b}{R_a d_b}+\frac{1}{c}\cdot\frac{R_a R_b}{R_b d_c}\right) \qquad (30)$$

Bây giờ ta áp dụng Q^* vào (*) thu được

$$aR_a\geqslant bd_b\frac{R_b}{R_c}+cd_c\frac{R_c}{R_b}$$

Từ đó :

$$aR_a+bR_b+cR_c\geqslant aR_a d_a\left(\frac{1}{R_b}+\frac{1}{R_c}\right)+$$

$$+bR_b d_b\left(\frac{1}{R_a}+\frac{1}{R_c}\right)+cR_c d_c\left(\frac{1}{R_a}+\frac{1}{R_b}\right)$$

Áp dụng bất đẳng thức $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geqslant 4\cdot\frac{1}{x+y}$ ta có :

$$aR_a+bR_b+cR_c\geqslant$$

$$\geqslant 4\left(\frac{aR_a d_a}{R_b+R_c}+\frac{bR_b d_b}{R_a+R_c}+\frac{cR_c d_c}{R_a+R_b}\right) \qquad (31)$$

Theo quy tắc Q thì (31) cho ta

$$\frac{aR_a}{d_b d_c}+\frac{bR_b}{d_a d_c}+\frac{cR_c}{d_a d_b}\geqslant$$

$$\geqslant 4\left(\frac{a}{d_b+d_c}+\frac{b}{d_a+d_c}+\frac{c}{d_a+d_b}\right) \qquad (32)$$

Áp dụng T vào (31) ta thu được :

$$aR_a+bR_b+cR_c\geqslant$$

$$4\left(a\frac{d_b d_c}{d_b+d_c}+b\frac{d_a d_c}{d_a+d_c}+c\frac{d_a d_b}{d_a+d_b}\right) \qquad (33)$$

Áp dụng T vào (32) ta sẽ có

$$a+b+c\geqslant$$

$$\geqslant 4\left(\frac{ad_a}{R_b+R_c}+\frac{bd_b}{R_a+R_c}+\frac{cd_c}{R_a+R_b}\right) \qquad (34)$$

Cuối cùng ta trở lại (*) : $aR_a\geqslant bd_c+cd_b$

Suy ra :

$$\sqrt{a\frac{R_a}{d_a}} \geqslant \sqrt{b\frac{d_c}{d_a}+c\frac{d_b}{d_a}} \geqslant$$

$$\geqslant (\sqrt{b}\,.\,\sqrt{d_b/d_a}+\sqrt{c}\,.\,\sqrt{d_c/d_a})/\sqrt{2}.$$

Từ đó có :

$$\sqrt{a}.\sqrt{R_a/d_a}+\sqrt{b}\,.\,\sqrt{R_b/d_b}+\sqrt{c}\,.\,\sqrt{R_c/d_c} \geqslant$$

$$\geqslant \sqrt{2}\,(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}) \qquad (35)$$

Từ (*) ta suy ra :

$$\sqrt{\frac{1}{aR_a}} \leqslant \sqrt{\frac{1}{bd_b+cd_c}} \leqslant \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{bd_b}+\sqrt{cd_c}} <$$

$$< \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{1}{bd_b}}+\sqrt{\frac{1}{cd_c}}\right)$$

Và đi đến bất đẳng thức

$$\frac{1}{\sqrt{aR_a}}+\frac{1}{\sqrt{bR_b}}+\frac{1}{\sqrt{cd_c}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{ad_a}}+\frac{1}{\sqrt{bd_b}}+\frac{1}{\sqrt{cd_c}}\right) \qquad (36)$$

Dùng các phép biến đổi đã thiết lập trong II ta có thể thu được nhiều bất đẳng thức thú vị khác nữa.

TÌM ĐA THỨC VỚI NGHIỆM CHO TRƯỚC

NGÔ VIỆT TRUNG

Hãy xét bài toán : *Tìm một đa thức với hệ số nguyên có bậc nhỏ nhất nhận một số α cho trước làm nghiệm.* Đây là một bài toán cổ điển có liên quan chặt chẽ đến việc phát triển một số khái niệm cơ sở của toán học. Ngày nay người ta biết rõ phải giải quyết bài toán này như thế nào. Tuy nhiên với trình độ phổ thông đó vẫn là một bài toán khó.

Có thể minh họa điều này qua trường hợp $\alpha = \sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$. Đây là một đề bài của kì thi học sinh giỏi toán lớp 12 toàn quốc vừa qua. Hầu hết thí sinh đều tìm thấy :

$$P(X) = X^6 - 6X^4 - 6X^3 + 12X^2 - 36X + 1$$

là một đa thức với hệ số nguyên nhận $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$ làm nghiệm nhưng không ai chứng minh được đó là đa thức có bậc nhỏ nhất thỏa mãn điều kiện trên.

Việc tìm ra $P(X)$ hoàn toàn đơn giản và dựa vào nhận xét sau : Tích của một đa thức có nghiệm là α với một đa thức bất kì vẫn là một đa thức có nghiệm là α. Đa thức có bậc nhỏ nhất (với hệ số thực) nhận $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$ làm nghiệm là $X-\sqrt{2}-\sqrt[3]{3}$. Để loại căn bậc ba ta nhân nó với $(X-\sqrt{2})^2+(X-\sqrt{2})\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}$ và nhận được đa thức

$$(X-\sqrt{2})^3 - 3 = X^3 - 3\sqrt{2}X^2 + 6X - 2\sqrt{2} - 3.$$

Để loại căn bậc hai ta lại nhân tiếp với $X^3+6X-3+\sqrt{2}\,(3X^2+2)$ và nhận được :

$$P(X) = (X^3+6X-3)^2 - 2(3X^2+2)^2$$

Sau khi tìm được $P(X)$ nhiều thí sinh nhận xét là : vì 2 và 3 nguyên tố cùng nhau nên $6 = 2.3$ phải là bậc nhỏ nhất của các đa thức với hệ số nguyên nhận $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$ làm nghiệm. Do đó $P(X)$ là đa thức cần tìm. Kết luận liều nhưng rất gần sự thật. Tại sao không tiếp tục một cách bình thường bằng việc giả sử có một đa thức : $Q(X) = a_o + a_1X + \dots + a_5X^5$ với hệ số nguyên nhận $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$ làm nghiệm rồi chứng minh $a_o = \dots = a_5 = 0$?

Điều kiện duy nhất ràng buộc các số nguyên $a_o, \dots, a_5$ với nhau là $Q(\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}) = 0$. Vấn đề là phải loại được các căn bậc hai và ba. Để làm việc này ta hãy khai triển các lũy thừa của $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$ trong $Q(\sqrt{2}+\sqrt[3]{3})$ rồi viết lại phương trình $Q(\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}) = 0$ dưới dạng

$$b_o + b_1\sqrt{2} + b_2\sqrt[3]{3} + b_3\sqrt[3]{9} + b_4\sqrt{2}\sqrt[3]{3} +$$

$$+ b_5\sqrt{2}\,.\,\sqrt[3]{9} = 0.$$

Bạn đọc có thể dễ dàng thử lại để thấy :

$$b_o = a_o + 2a_2 + 3a_3 - 4a_4 + 50a_5$$

$$b_1 = a_1 + 2a_3 + 12a_4 + 4a_5$$
$$b_2 = a_1 + 6a_3 + 3a_4 + 20a_5$$
$$b_3 = 3a_2 + 12a_4 + 3a_5$$
$$b_4 = 2a_2 + 8a_4 + 15a_5$$
$$b_5 = 3a_3 + 20a_5.$$

Loại căn bậc hai ta nhận được phương trình

$$(b_o + b_2\sqrt[3]{3} + b_3\sqrt[3]{9})^2 -$$
$$- \ 2(b_1 + b_4\sqrt[3]{3} + b_5\sqrt[6]{9})^2 =$$
$$= b_o^2 + 6b_2b_3 - 2b_1^2 - 12b_4b_5 +$$
$$+ (2b_ob_2 + 3b_3^2 - 4b_1b_4 - 6b_5^2)\sqrt[3]{3} +$$
$$+ (2b_ob_3 + b_2^2 - 4b_1b_5 - 2b_4^2)\sqrt[3]{3} = 0$$

Tinh ý sẽ thấy phương trình trên cho ta một đa thức bậc hai $AX^2 + BX + C$ với hệ số nguyên nhận $\sqrt[3]{3}$ làm nghiệm. Điều này dẫn đến liên tưởng 3 là bậc nhỏ nhất của các đa thức nhận $\sqrt[3]{3}$ làm nghiệm và do đó A, B, C phải bằng không. Chứng minh điều này không khó. Từ giả thiết $A\sqrt[3]{3} + B\sqrt[3]{3} + C = 0$ ta có :

$$(A\sqrt[3]{9} + B\sqrt[3]{3} + C)(A\sqrt[3]{3} - B) =$$
$$= \ 3A^2 - BC - (B^2 - AC)\sqrt[3]{3} = 0.$$

Khử căn bậc ba sẽ nhận được

$$(3A^2 - BC)^3 - 3(B^2 - AC)^3 = 0$$

Đặt $m = 3A^2 - BC$ và $n = B^2 - AC$. Ta có thể thấy ngay là m, n phải chia hết cho 3 nghĩa là $m = 3m_1$, $n = 3n_1$ với m_1, n_1 là những số nguyên. Ta lại có $m_1^3 - 3n_1^3 = 0$, từ đây lại suy ra m_1, n_1 phải chia hết cho 3, v.v... Như vậy m, n sẽ chia hết cho mọi lũy thừa của 3. Điều này chỉ xảy ra khi $m = n = 0$. Từ điều kiện $3A^2 - BC = 0$, $B^2 - AC = 0$ ta lại có $3A^3 - B^3 = 0$ và do đó A, B phải bằng không như ở trên. Quay lại với giả thiết $A\sqrt[3]{9} + B\sqrt[3]{3} + C = 0$ ta có thể kết luận là $A = B = C = 0$.

Với chứng minh trên thì

$$b_o^2 + 6b_2b_3 - 2b_1^2 - 12b_4b_5 = 0,$$
$$2b_ob_2 + 3b_3^2 - 4b_1b_4 - 6b_5^2 = 0,$$
$$2b_ob_3 + b_2^2 - 4b_1b_5 - 2b_4^2 = 0.$$

Các phương trình này cho thấy $b_o, \ldots, b_5$ phải là các số chẵn. Đặt $b_o = 2b_o'$, ... $b_5 = 2b_5'$ rồi thay vào hệ phương trình trên và giản ước số số hạng đồng dạng đi ta lại được một hệ phương trình tương đương với ẩn là $b_o', \ldots, b_5'$. Từ đây lại suy ra $b'_o, \ldots b'_5$ phải là các số chẵn v.v... Tóm lại $b_o, \ldots, b_5$ chia hết cho mọi lũy thừa của 2. Điều này chỉ xảy ra khi $b_o = \ldots = b_5 = 0$.

Như vậy là từ điều kiện $Q(\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}) = 0$ ta đã suy ra được 6 phương trình sau :

$$\begin{aligned}
a_o + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 + 50a_5 &= 0\\
a_1 + 2a_3 + 12a_4 + 4a_5 &= 0\\
a_1 + 6a_3 + 3a_4 + 20a_5 &= 0\\
3a_2 + 12a_4 + 3a_5 &= 0\\
2a_2 + 8a_4 + 15a_5 &= 0\\
3a_3 + 20a_5 &= 0.
\end{aligned}$$

Bạn đọc có thể dễ dàng giải hệ phương trình này và nhận được kết quả $a_o = \ldots = a_5 = 0$. Bây giờ ta có thể kết luận 6 là bậc nhỏ nhất của các đa thức với hệ số nguyên nhận $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$ làm nghiệm.

Trong trường hợp tổng quát không phải với số α nào ta cũng tìm được một đa thức với hệ số nguyên nhận α làm nghiệm. Ví dụ như các số π, e không thể là nghiệm của bất kì một đa thức với hệ số nguyên nào, vì vậy người ta gọi chúng là các *số siêu việt*. Ngược lại người ta gọi α là một *số đại số* nếu có một đa thức với hệ số nguyên nhận α làm nghiệm. Số ảo i cũng là một số đại số vì nó là nghiệm của phương trình $X^2 + 1 = 0$.

Các số đại số thường có thể biểu diễn qua các căn bậc tự nhiên của các số nguyên với các phép tính thông thường. Không phải việc xác định các đa thức với hệ số nguyên bậc nhỏ nhất nhận chúng làm nghiệm lúc nào cũng dễ dàng như trường hợp $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$. Sau đây là một cách xác định các đa thức này dựa theo các kết quả của toán học cao cấp.

Giả sử $P(X)$ là một đa thức với hệ số nguyên bậc nhỏ nhất nhận một số α làm nghiệm. Nếu bậc của $P(X)$ là n thì người ta có thể tìm thấy n số $\alpha_1, ..., \alpha_n$ khác nhau sao cho :

$$P(X) = a(X - \alpha_1) ... (X - \alpha_n).$$

ở đây a là hệ số của X^n trong $P(X)$. Tất nhiên nằm trong các số $\alpha_1, ..., \alpha_n$ và $\alpha_1, ... \alpha_n$ có thể là các số phức. Bạn đọc chưa quen với số phức có thể hiểu chúng là các số có dạng $a + ib$ với a, b là những số thực mà phép nhân hai số phức thực hiện được nhờ tính chất $i^2 = -1$. Các số $\alpha_1, ... \alpha_n$ được gọi là các *số liên hợp* của α. Việc tìm $P(X)$ có thể quy về việc tìm các số liên hợp của α.

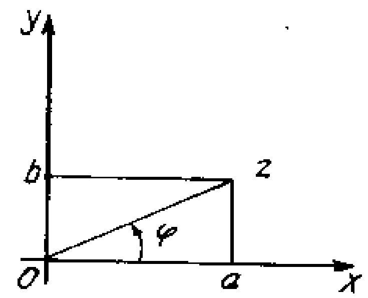
C - MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH

SỐ PHỨC, MỘT CÔNG CỤ GIẢI TOÁN HÌNH HỌC

NGUYỄN CÔNG QUỲ
(Hà Nội)

Số phức, từ khi ra đời, đã thúc đẩy toán học tiến lên và giải quyết được một số vấn đề về khoa học kĩ thuật. Riêng trong hình học, số phức cũng có những ứng dụng quan trọng. Bài này sẽ giới thiệu việc áp dụng số phức để giải một số bài toán hình học.

1) Lí thuyết số phức đã được trình bày trong sách giáo khoa phổ thông. Cũng nên nhắc lại việc biểu diễn hình học các số phức vì đó là cái cầu nối liền lí thuyết số phức với hình học. Trên mặt phẳng quy về hai trục tọa độ vuông góc Ox và Oy, một số phức $z = a + bi$ được biểu diễn bởi một điểm Z có hoành độ a và tung độ b. Nếu số phức được viết dưới dạng lượng giác $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ thì môđun $|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2} = OZ$, còn agumen φ là góc giữa trục hoành và OZ (hình 1). Như vậy, ta cũng có thể biểu diễn số phức z bởi vectơ $\overrightarrow{OZ}$.



Hình 1

Để tiện việc trình bày sau này, ta sẽ kí hiệu các điểm bằng các chữ lớn $A, B, C, \ldots, Z$, còn các số phức tương ứng theo thứ tự được kí hiệu bằng các chữ nhỏ $a, b, c, \ldots, z$.

2) Trước hết cần làm quen với các phép biến hình thường gặp. Ta sẽ thống nhất kí hiệu $Z'(z')$ là ảnh của điểm $Z(z)$. (Những điều không khó lắm, xin dành việc chứng minh cho bạn đọc).

– Phép đối xứng qua gốc tọa độ : $z' = -z$.

– Phép đối xứng qua trục Ox : $z' = \bar{z}$ (liên hợp của z).

– Phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{OA}$ (hình 2) :

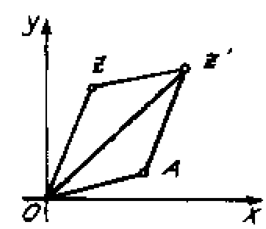
$$z' = z + a \tag{1}$$

(vì $\overrightarrow{OZ'} = \overrightarrow{OZ} + \overrightarrow{OA}$)

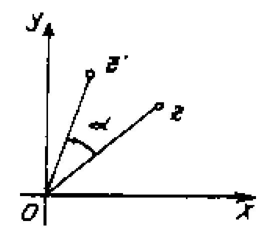
– Phép quay góc α xung quanh gốc tọa độ O :

$$z' = qz \tag{2}$$

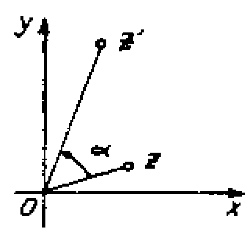
trong đó $q = \cos\alpha + i\sin\alpha$ (hình 3). Điều này suy ra dễ dàng nếu nhớ lại quy tắc nhân hai số phức : khi nhân hai số phức thì môđun của tích bằng tích các môđun, còn agumen của tích thì bằng tổng các agumen của hai thừa số.



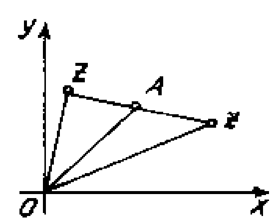
Hình 2



Hình 3



Hình 4



Hình 5

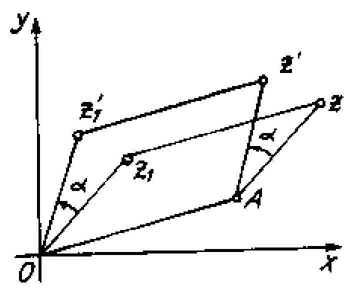
– Phép vị tự tâm O tỉ số k : $z' = kz$.

– Phép quay góc α quanh O rồi tiếp theo, phép vị tự tâm O tỉ số k (hình 4) :

$$z' = pz \text{ với } p = k(\cos\alpha + i\sin\alpha).$$

– Phép đối xứng qua điểm A. Vì A là trung điểm đoạn ZZ' (hình 5) nên $OA = (1/2)(OZ + \overrightarrow{OZ'})$, từ đó $a = (1/2)(z + z')$ hay $z' = 2a - z$. Đó là công thức của phép đối xứng qua điểm A.

– Phép quay góc α xung quanh điểm A. Nếu thực hiện một phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{OA}$ thì rõ ràng điểm A biến thành điểm O (hình 6), còn các điểm Z và Z' theo thứ tự biến thành



Hình 6

các điểm Z_1 và Z'_1 xác định bởi $z_1 = z - a$ và $z'_1 = z' - a$ (theo công thức (1). Nếu Z' là ảnh của z trong phép quay góc α quanh A thì z'_1 sẽ là ảnh của Z_1 trong phép quay góc α quanh O, và ngược lại. Theo công thức (2) ta có $z'_1 = qz_1$ hay

$$z' - a = q(z - a) \qquad (3)$$

với $q = \cos\alpha + i\sin\alpha$. Đó là phép quay góc α quanh điểm A.

Bằng phương pháp tịnh tiến về gốc như trên ta suy ra công thức các phép biến hình sau :

– Phép vị tự tâm A tỉ số k :

$$z' - a = k'(z - a)$$

– Phép quay góc α xung quanh điểm A, rồi tiếp theo, phép vị tự tâm A tỉ số k :

$$z' - a = p(z - a) \qquad (4)$$

với $\quad p = k(\cos\alpha + i\sin\alpha)$

III. Để chuẩn bị cho việc làm toán, ta hãy tập dượt diễn dạt những tính chất hình học quen thuộc bằng những biểu thức số phức :

– Nếu M là điểm chia đoạn thẳng AB theo tỉ số $MA/MB = k$ thì ta có $(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OM})/(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM}) = k$ hay $\overrightarrow{OM} = (OA - k\,\overrightarrow{OB})/(1 - k)$. Từ đó có hệ thức số phức :

$$m = (a - kb)/(1 - k) \qquad (5)$$

Đặc biệt nếu M là trung điểm của đoạn AB thì $m = (a + b)/2$.

– Nếu G là trọng tâm tam giác ABC thì

$$OG = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})/3$$

Từ đó có

$$g = (a + b + c)/3 \qquad (6)$$

– Điều kiện cần và đủ để tứ giác $ABCD$ là một hình bình hành là các đường chéo AC và BD của nó có trung điểm trùng nhau, hay

$$a + c = b + d \qquad (7)$$

– Điều kiện để hai đoạn thẳng AM và AN vuông góc và bằng nhau là

$$m - c = \pm i(n - a) \qquad (8)$$

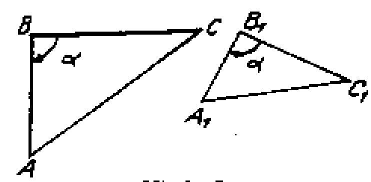
(áp dụng công thức (3) trong đó

$q = \cos(\pm 90^o) = \pm i$)

– Điều kiện cần và đủ để hai tam giác ABC và $A_1B_1C_1$ đồng dạng và cùng hướng là

$$(a - b)/(c - b) = (a_1 - b_1)/(c_1 - b_1) \qquad (9)$$

Thật vậy, nếu thực hiện phép quay góc α quanh điểm B (hình 7) rồi tiếp theo đó, phép vị tự tâm B tỉ số $k = BA/BC$ thì C biến thành



Hình 7

A. Theo công thức (4) ta có

$$a - b = \mu(c - b) \qquad (10)$$

với $\quad p = k(\cos\alpha + i\sin\alpha)$.

Hai tam giác ABC và $A_1B_1C_1$ đồng dạng và cùng hướng khi và chỉ khi

$CBA = C_1B_1A_1 = \alpha$ (cùng hướng), và

$$B_1A_1/B_1C_1 = BA/BC = k,$$

$$a_1 - b_1 = p(c_1 - b_1) \qquad (11)$$

Từ các hệ thức (10) và (11) ta rút ra

$$(a - b)/(c - b) = (a_1 - b_1)/(c_1 - b_1)$$

Đó chính là điều kiện cần và đủ để hai tam giác đã cho đồng dạng và cùng hướng.

Chú thích. Hai tam giác ABC và $A_1B_1C_1$ được gọi là cùng hướng nếu trong khi đi trên chu vi của tam giác ABC từ A đến B rồi đến C và trở về A cũng như khi đi trên chu vi của tam giác $A_1B_1C_1$ từ A_1 đến B_1 rồi đến C_1 và trở về A_1, ta cùng đi theo chiều kim đồng hồ hay cùng đi ngược chiều kim đồng hồ. Nếu không thỏa mãn điều đó thì hai tam giác đã cho gọi là ngược hướng.

4. Bây giờ ta hãy vận dụng những điều trình bày trên để giải một số bài toán hình học phẳng.

1. Cho hai hình bình hành $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$ và các điểm A, B, C, D theo thứ tự chia các đoạn A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2, D_1D_2 theo cùng một tỉ số k. Chứng minh rằng tứ giác $ABCD$ là một hình bình hành và tìm quỹ tích giao điểm các đường chéo của hình bình hành này khi k thay đổi.

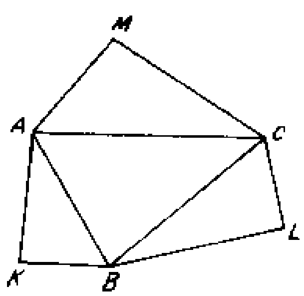
Lời giải. Theo giả thiết ta có (áp dụng các công thức (7) và (5)

$$a_1 + c_1 = b_1 + d_1, a_2 + c_2 =$$
$$= b_2 + d_2, a = (a_1 - ka_2)/(1 - k),$$
$$b = (b_1 - kb_2)/(1 - k)\ c = (c_1 - kc_2)/(1 - k),$$
$$d = (d_1 - kd_2)/(1 - k).$$

Từ những hệ thức trên dễ dàng rút ra $a + c = b + d$, chứng tỏ rằng tứ giác $ABCD$ là một hình bình hành. Gọi M_1, M_2 và M là giao điểm các đường chéo của các hình bình hành $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$ và $ABCD$. Cũng từ các hệ thức trên ta rút ra

$$m = (a + c)/2 = [(a_1 + c_1)/2 -$$
$$- k(a_2 + c_2)/2]/(1 - k) = (m_1 - km_2)/(1 - k)$$

Hệ thức này chứng tỏ M nằm trên đường thẳng M_1M_2 và chia đoạn M_1M_2 theo tỉ số k. Khi k thay đổi, quỹ tích của M là đường thẳng M_1M_2.



Hình 8

2. Người ta dựng ở phía ngoài tam giác ABC các tam giác đồng dạng ABK, BCL và CAM. Chứng minh rằng các tam giác KLM và ABC có trọng tâm trùng nhau.

Lời giải. Theo công thức (9) ta có (hình 8) :

$$(a - k)/(b - k) = (b - l)/(c - l) =$$
$$= (c - m)/(a - m) = p$$

(p là một số phức nào đó).

Từ đó rút ra $k = (a - pb)/(1 - p)$,

$l = (b - pc)/(1 - p)$, $m = (c - pa)/(1 - p)$.

Ta có $1/3\,(k + l + m) =$

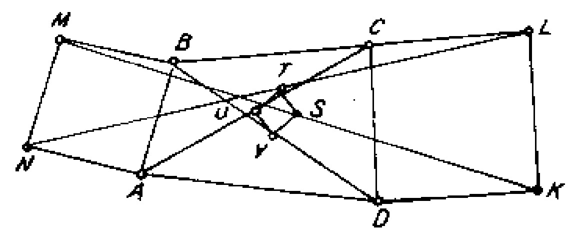
$$= 1/3(a - pb + b - pc + c - pa)/(1 - p) =$$
$$= 1/3(a + b + c),$$

điều này chứng tỏ rằng trọng tâm của các tam giác KLM và ABC trùng nhau.

Chú ý. Nếu dựng các tam giác ABK, BCL, CAM ở phía trong tam giác ABC thì kết quả trên vẫn còn đúng. Tóm lại chỉ cần các tam giác đó cùng hướng là được.

3. Người ta dựng phía ngoài tứ giác lồi $ABCD$ hai hình vuông $ABMN$ và $CDKL$. Chứng minh rằng các trung điểm các đường chéo của các tứ giác $ABCD$ và $MNKL$ là các đỉnh của một hình vuông hoặc có thể trùng nhau.

Lời giải. Theo công thức (8) ta có (hình 9) $n - a = i(b - a), a - b = i(m - b)$. Từ đó rút ra $n = a + i(b - a), m = b + i(b - a)$. Tương tự có $l = c + i(d - c)$ và $k = d + i(d - c)$.



Hình 9

Gọi U, V, S, T theo thứ tự là trung điểm các đường chéo AC, BD, KM và LN. Ta có

$$u = (a + c)/2, v = (b + d)/2.$$
$$s = [b + d + i(b + d - a - c)]/2$$
$$t = [a + c + i(b + d - a - c)]/2 \text{ Ta có}$$
$$v + t = [a + b + c + d + i(b + d - a - c)]/2 =$$
$$= u + s.$$
$$v - t = (b + d - a - c)(1 - i)/2,$$
$$u - s = (a + c - b - d)(1 + i)/2$$

Giả sử $b + d - a - c \neq 0$. Ta có

$$(v - t)/(u - s) = -(1 - i)/(1 + i) =$$
$$= -(1 - i)^2/[(1 + i)(1 - i)] = i$$

Các hệ thức $(v - t)/(u - s) = i$ và $v + t = u + s$ theo thứ tự chứng tỏ rằng các đường chéo VT và US của tứ giác $UVST$ vuông góc, bằng nhau và có trung điểm trùng nhau, tức là tứ giác $UVST$ là hình vuông. Trong trường hợp $b + d - a - c = 0$, tức $a + c = b + d$, tứ giác $ABCD$ là hình bình hành. Lúc đó ta có $v - t = u - s = 0$, và cùng với $v + t = u + s$, ta rút ra $u = v = s = t$, tức là các điểm U, V, S và T trùng nhau.

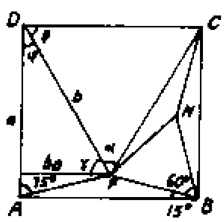
MỘT CÁCH SÁNG TẠO CÁC BÀI TOÁN MỚI

NGUYỄN VĂN BÀNG
(Vinh - Nghệ An)

Để phát huy được sự suy nghĩ sáng tạo trong quá trình học tập toán học, các bạn cần tập luyện đề ra những dự đoán, những giả thiết mới, biết cách rút ra những kết luận khác nhau từ việc giải bài toán, biết khảo sát các trường hợp riêng có thể xảy ra hay mở rộng bài toán. Sau đây xin giới thiệu làm thí dụ một loạt bài toán suy ra được từ việc giải một bài toán nhằm giúp các bạn yêu toán có thêm một phương pháp tư duy để phát huy khả năng độc lập nghiên cứu và khả năng sáng tạo toán học.

Bài 1. Trên cạnh AB và ở về phía trong của hình vuông $ABCD$ dựng một tam giác cân AFB có góc ở đáy là 15°. Hãy xác định dạng của tam giác CFD.

Khi giải bài toán này, có thể nảy ra những cách suy nghĩ nào ? Nhiều bạn có thể suy nghĩ như sau : tam giác CFD cân và có thể đều. Tính chất cân dễ dàng chứng minh được căn cứ vào tính chất đối xứng trục của hình đã cho. Vấn đề còn lại cần giải quyết là tam giác đó có phải là đều hay không ? Muốn vậy, ta có thể dùng cách chứng minh bằng phản chứng như sau :



Hình 1

Để được tiện lợi, ta sẽ đưa vào các kí hiệu sau đây :

$$AB = a, DF = b, \widehat{DFC} = \alpha,$$
$$\widehat{CDF} = \beta, \widehat{AFE} = \varphi$$

Giả sử rằng $b > a$. Lúc đó $\varphi < 75^o$ và $\alpha > 60^o$ còn $\beta < 60^o$. Từ đó suy ra $b < a$. Điều này mâu thuẫn với giả thiết đề ra. Như vậy b không thể lớn hơn a.

Bây giờ lại giả sử rằng $b < a$. Lúc đó $\varphi > 75^\circ$ và $\alpha < 60^o$ còn $\beta > 60^\circ$. Cho nên $b > a$. Điều này lại mâu thuẫn với giả thiết trên nên mệnh đề $b < a$ không đúng.

Vì vậy ta đi đến kết luận $b = a$ tức là tam giác CFD đều.

Bài toán trên còn có thể giải quyết theo một cách khác như sau : ta hãy dựng trên cạnh CB và ở trong hình vuông $ABCD$ một tam giác CNB bằng tam giác AFB (hình 1). Trong tam giác BNF ta có : $BN = BF$ (cạnh tương ứng của các tam giác bằng nhau) và góc $\widehat{NBF} = 60^o$. Từ đó suy ra $NC = NB = NF$, $\widehat{CNB} = \widehat{CNF} = 150^\circ$ tức là các tam giác CNB và CNF bằng nhau. Vì vậy $CF = a$ nghĩa là tam giác CFD đều.

Để cho cách chứng minh trên đây được chặt chẽ, ta cần chứng minh thêm rằng điểm N chỉ có thể nằm trong tam giác FCR. Thật vậy, trong trường hợp ngược lại, góc $\widehat{FNC}$ sẽ bằng 210°, điều này không thể xảy ra được.

Từ bài toán này, nếu phát biểu mệnh đề đảo lại, ta thu được bài toán đơn giản hơn sau đây :

Bài 2. Trên cạnh CD và ở trong hình vuông $ABCD$, ta dựng một tam giác đều CFD. Tính các góc của tam giác AFB.

Từ bài toán 2, nếu suy nghĩ sáng tạo một tí (lấy điểm F không phải ở trong mà ở ngoài hình vuông) ta sẽ thu được bài toán sau :

Bài 3. Trên cạnh CD và ở ngoài hình vuông $ABCD$, ta dựng một hình tam giác đều DF_1C. Tìm giá trị các góc của tam giác AF_1B.

Từ bài toán 3, nếu phát biểu đảo lại, ta lại có bài toán :

Bài 4. Trên cạnh CD của hình vuông $ABCD$, ta dựng một tam giác cân AF_1B và các góc ở đáy bằng 75°. Nếu đỉnh F_1 nằm về cùng một phía đối với AB, CD thì tam giác DF_1C đều.

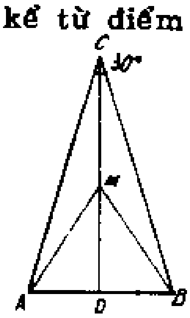
Như vậy, bằng cách lấy đảo đề và thay đổi một vài giả thiết của bài toán 1, ta lại có thể thành lập thêm được 3 bài mới. Bây giờ ta hãy thử xét đến một số tính chất của các bộ phận của hình 1. Chẳng hạn ta hãy xét đến các tam giác ADF và BCF cân và bằng nhau trong đó đường cao ứng với cạnh bên có độ dài bằng nửa độ dài của cạnh bên đó. Đó là một tính chất đặc trưng cho loại tam giác cân có góc ở đỉnh bằng 30^o và căn cứ vào đó ta có thể phát biểu bài toán sau đây :

Bài 5. Đường cao của một tam giác là hai lần nhỏ hơn cạnh bên tương ứng với nó và một trong các góc kề với cạnh đó bằng 75^o. Hãy tính các góc của tam giác đó.

Nếu khảo sát tỉ mỉ trên hình 2, ta sẽ thu được một bài toán tương tự với bài toán 5 như sau :

Bài 6. Hãy xác định các góc của một tam giác sao cho chiều cao của nó là hai lần nhỏ hơn cạnh tương ứng và một trong các góc kề bằng 15^o.

Chú ý rằng việc nghiên cứu các tính chất của hình tam giác cân với góc ở đỉnh bằng 30^o có nhiều điều lí thú, tương tự như khi nghiên cứu các tính chất của tam giác vuông có một góc bằng 30^o. Thật vậy nếu trong tam giác ABC nói trong bài 5 (hình 2) mà ta vẽ đường cao CD phát xuất từ đỉnh C ứng với góc 30^o rồi lấy trên CD kể từ điểm C một đoạn $CM = AB$ thì ta sẽ được tam giác đều AMB. Mệnh đề này suy ra từ việc giải bài toán trên đây và dựa vào một trong các tính chất của tam giác cân (hoặc có thể dựa vào các tính chất của góc nội tiếp).



Hình 2

Từ đó, ta có thể phát biểu bài toán sau đây :

Bài 7. Tính đáy của một tam giác cân nếu cạnh bên của nó bằng đơn vị còn góc ở đỉnh bằng 30^o.

Tính ra ta được $AB = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$. Nhưng AB là cạnh bên của một tam giác cân đáy bằng đơn vị và góc kề với đáy bằng 15^o. Từ đó có thể thiết lập được bài toán mới như sau.

Bài 8. Biểu thị độ dài cạnh bên của một tam giác cân có góc ở đỉnh bằng 150^o theo độ dài của cạnh đáy.

Từ hai bài toán trên, ta lại có thể suy ra một số bài toán khác. Các bạn hãy thử nghĩ xem.

Bây giờ ta trở lại bài 5, 6 và hãy chú ý nghiên cứu tính chất của các tam giác trong đó chiều cao bằng nửa cạnh đáy. Từ đó, có thể phát biểu được bài toán sau đây.

Bài 9. Chiều cao của một tam giác bằng nửa đáy. Có thể kết luận được những gì về độ lớn của góc đối diện với cạnh đáy đó.

Góc ACB rõ ràng là không lớn hơn 90^o. Từ bài toán này, ta có thể nghĩ ngay đến bài toán sau.

Bài 10. Trên đường thẳng MN song song với đoạn thẳng AB, hãy tìm một điểm C sao cho góc ACB có giá trị lớn nhất.

Nếu xét về mặt hệ thức lượng giác thì bài toán 9 còn có thể phát biểu như sau :

Bài 11. Các góc A và B của tam giác ABC liên hệ với nhau theo hệ thức : $ctgA + ctgB = 2$. Chứng minh rằng $C \leq 90^o$.

Nếu thay đổi đi một ít các giả thiết của bài toán 9 chẳng hạn nếu cho :

1) $h_c : c = \sqrt{3} : 2$

2) $h'_c : = 1 : 2\sqrt{3}$

ta sẽ thu được các bài toán sau :

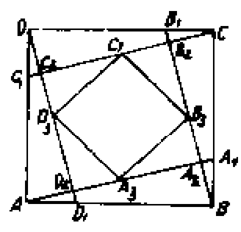
Bài 12. Chiều cao h_c và cạnh c của tam giác ABC liên hệ với nhau theo hệ thức : $h_c : c = \sqrt{3} : 2$. Chứng minh rằng $C \leq 60^o$.

Bài 13. Các góc A và B của tam giác ABC liên hệ với nhau theo hệ thức : $ctgA + ctgB = 2\sqrt{3}$. Chứng minh rằng $C \leq 120^o$.

Các tính chất nêu trên đây của các tam giác cân với góc ở đỉnh 30^o và 150^o cho phép ta giải được bài toán sau.

Bài 14. Tính tang 15^o mà không dùng đến bảng lượng giác và các công thức.

Để kết thúc ta hãy trở lại hình vuông ban đầu. Các bài 5, 6, 7 gợi cho ta thấy rằng nếu lần lượt vẽ qua các đỉnh và ở trong hình vuông những cát tuyến tạo với các cạnh hình vuông góc 15^o thì những cát tuyến này sẽ vuông góc với nhau từ đó có thể thành lập bài toán mới như sau :



Hình 3

Bài 15. Qua các đỉnh của một hình vuông đơn vị và ở về phía trong hình vuông đó, ta lần lượt vẽ các cát tuyến AA_1, BB_1, CC_1, DD_1, tạo với các cạnh tương ứng của hình vuông góc 15^o. Chứng minh rằng các cát tuyến này tạo thành hình vuông $A_2B_2C_2D_2$ có diện tích bằng $\frac{1}{2}$ (hình 3).

Chú ý rằng các đoạn thẳng AD_1, BA_1, CB_1, DC_1 bằng $2 - \sqrt{3}$ và hình vuông mà có các đỉnh A_3, B_3, C_3, D_3 lần lượt là điểm giữa của các đoạn thẳng AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 cũng có diện tích bằng $2 - \sqrt{3}$.

Cuối cùng nếu thay khái niệm hình vuông bằng hình bình hành và xác định vị trí của các cát tuyến không phải theo góc 15^o mà theo tỉ số của những đoạn thẳng được phân ra trên các cạnh hình bình hành thì sẽ đề xuất được bài toán có tính cách tổng quát hơn sau đây mà các bạn hãy tự chứng minh lấy.

Bài 16. Từ mỗi đỉnh của một hình bình hành và ở về phía trong hình đó, ta lần lượt vẽ các cát tuyến sao cho chúng chia các cạnh tương ứng của hình bình hành theo tỉ số $1 : (1 + \sqrt{3})$. Chứng minh rằng :

1) Các điểm giữa của những đoạn cát tuyến nằm ở phía trong hình bình hành lại là các đỉnh của một hình bình hành mới,

2) Tỉ số diện tích của hình bình hành mới so với hình bình hành đã cho bằng $2 - \sqrt{3}$,

3) Diện tích của hình bình hành tạo thành bởi các cát tuyến bằng một nửa diện tích của hình bình hành đã cho.

Tóm lại, đứng trước một bài toán, các bạn nên đào sâu suy kĩ cố gắng tìm được một phương pháp giải gọn ghẽ, hợp lí và chính xác nhưng không nên tự thỏa mãn với công việc này mà phải tiến lên, từ bài toán đã giải được đi sâu khai thác các khía cạnh và các trường hợp lí thú của bài toán, biết thay đổi giả thiết, lật ngược vấn đề, khái quát hóa bài toán để có thể đề xuất được nhiều bài toán mới mẻ. Đó là con đường tập dượt sáng tạo tốt nhất đối với các bạn.

Viết dựa theo tạp chí
"*Toán học ở nhà trường*" Số 5/196 .

LIÊN PHÂN SỐ

LẠI ĐỨC THỊNH – NGUYỄN TIẾN TÀI
(ĐHSP Hà Nội)

Cách biểu diễn số bằng phân số thập phân, mà các bạn quen biết, đã tỏ ra rất hiệu lực. Chẳng hạn trên các số biểu diễn bằng phân số thập phân ta thực hiện khá thuận tiện các phép tính.

Nhưng một cách biểu diễn số, dù ưu việt đến đâu, cũng không thể biểu hiện được đầy đủ bản chất các số và không tránh khỏi sự phụ thuộc vào hình thức biểu diễn. Bởi vậy trong khi nghiên cứu các số ở khía cạnh này hay khía cạnh khác, người ta còn dùng những cách biểu diễn khác thuận tiện hơn.

Dưới đây chúng tôi giới thiệu với các bạn một công cụ biểu diễn số, có nhiều ứng dụng, gọi là liên phân số.

Trước hết ta hãy xét các số hữu tỉ. Một số hữu tỉ có thể biểu diễn được bằng phân số $\frac{a}{b}$ (a, b nguyên, $b \geqslant 1$). Với cặp số nguyên a, b, $b \geqslant 1$ sẽ tồn tại duy nhất cặp số q_o, r_1 nguyên sao cho $a = bq_o + r_1$, $0 \leqslant r_1 < b$. Cũng thế nếu $r_1 \neq 0$ thì với b, r_1 ta có q_1, r_2 để $b = r_1 q_1 + r_2$, $0 \leqslant r_2 < r_1$. Tương tự nếu $r_2 \neq 0$ có q_2, r_3 để $r_1 = r_2 q_2 + r_3$, $0 \leqslant r_3 < R_2$, v.v... Vì $b > r_1 > r_2 > \ldots \geqslant 0$ dãy các số dương b, r_1, r_2... giảm dần, nên quá trình trên sẽ kết thúc sau một số hữu hạn bước, và ta có hệ thức :

$$
\begin{array}{ll}
a = bq_o + r_1 & 0 < r_1 < b \\
b = r_1q_1 + r_2 & 0 < r_2 < r_1 \\
r_1 = r_2q_2 + r_3 & 0 < r_3 < r_2 \\
\cdots\cdots & \\
r_{k-2} = r_{k-1}q_{k-1} + r_k & 0 < r_k < r_{k-1} \\
r_{k-1} = r_kq_k & q_k > 1.
\end{array}
$$

Nhưng hệ thức trên còn có thể viết :

$$\frac{a}{b} = q_o + \frac{r_1}{b} = q_o + \frac{1}{\frac{b}{r_1}}$$

$$\frac{b}{r_1} = q_1 + \frac{1}{\frac{r_1}{r_2}}$$

$$\cdots$$

$$\frac{r_{k-2}}{r_{k-1}} = q_{k-1} + \frac{1}{\frac{r_{k-2}}{r_k}}$$

$$\frac{r_{k-1}}{r_k} = q_k$$

hay
$$\frac{a}{b} = q_o + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{q_k}}}}} \qquad (1)$$

ta có một dạng biểu diễn mới của số hữu tỉ $\frac{a}{b}$!

Gọi biểu thức bên phải của (1) với q_o nguyên, q_i ($i = 1, 2, \ldots k$) nguyên dương và $q_k > 1$ là một liên phân số bậc k và kí hiệu là $[q_o ; q_1, \ldots, q_k]$.

Thí dụ :

a) $$\frac{109}{48} = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4}}}} = [2; 3, 1, 2, 4]$$

b) $$\frac{-19}{7} = -3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2}} = [-3 ; 3, 2].$$

Như vậy một số hữu tỉ bất kì biểu diễn được dưới dạng một liên phân số bậc k nào đó. Người ta còn chứng minh được sự biểu diễn đó là duy nhất. Ngược lại nếu cho một liên phân số bậc k, sau khi thực hiện các phép tính trong biểu thức (từ dưới lên) ta được kết quả là một số hữu tỉ. Vậy có thể đặc trưng một số hữu tỉ bằng một liên phân số bậc k.

Đến đây chắc các bạn nghĩ ngay đến biểu thức vô hạn

$$q_o + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cdots}} \qquad (2)$$

là sự biểu diễn số vô tỉ. Đúng, ta sẽ gọi biểu thức (2) với q_o nguyên $q_1, q_2 \ldots$ nguyên dương là một liên phân số vô hạn và kí hiệu $[q_o ; q_1, q_2 \ldots]$. Nhưng bây giờ vấn đề không đơn giản nữa, ta có một biểu thức gồm vô hạn các phép tính hữu tỉ, trên các số hữu tỉ mà chưa có ý nghĩa gì. Để đạt được mục đích đã đề ra, ta hãy nghiên cứu các tính chất của liên phân số !

Giả sử đã cho một liên phân số hữu hạn hoặc vô hạn $[q_o ; q_1, q_2 \ldots]$ (3)

Xét biểu thức

$$\partial_n = q_o + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{q_n}}}} \qquad (4)$$

(nếu (3) là liên phân số hữu hạn bậc k thì $n \leqslant k$). Thực hiện các phép tính trong (4) (từ dưới lên) ta được kết quả là một phân số, kí hiệu là

$\partial_n = \frac{P_n}{Q_n}$ và gọi nó là *giản phân bậc n*. Vậy

$$\partial_o = \frac{P_o}{Q_o} = \frac{q_o}{1} \Rightarrow P_o = q_o \; Q_o = 1.$$

$$\partial_1 = \frac{P_1}{Q_1} = q_o + \frac{1}{q_1} = \frac{q_o q_1 + 1}{q_1} =$$

$$= \frac{q_1 P_o + 1}{q_1 Q_o + 0} \Rightarrow \begin{cases} P_1 = q_1 P_o + 1 \\ Q_1 = q_1 Q_o + 0 \end{cases}$$

$$\partial_2 = \frac{P_2}{Q_2} = q_o + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2}} = \frac{q_2 P_1 + P_o}{q_2 Q_1 + Q_o} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} P_2 = q_2 P_1 + P_o \\ Q_2 = q_2 Q_1 + Q_o \end{cases} \text{v.v...}$$

Nếu đặt $P_{-1} = 1$, $Q_{-1} = 0$ có thể chứng minh được công thức truy chứng để tính các giản phân

$$\begin{cases} P_s = q_s P_{s-1} + P_{s-2} \\ Q_s = q_s Q_{s-1} + Q_{s-2} \end{cases} s \geqslant 1 \qquad (5)$$

Ta nhận thấy, với chỉ số càng tăng thì giản phân càng gần đến biểu thức của liên phân số. Trong trường hợp liên phân số hữu hạn bậc k, thì rõ ràng giản phân bậc k bằng giá trị của liên phân số. Điều đó gợi ý cho ta là trong trường hợp liên phân số vô hạn ta có thể coi giới hạn của dãy các giản phân khi chỉ số tăng vô hạn là giá trị của liên phân số. Nhưng vấn đề đặt ra là dãy các giản phân có giới hạn hay không ? Nghiên cứu dãy các giản phân người ta thấy : Các giản phân bậc chẵn làm thành dãy đơn điệu tăng $\delta_0 < \delta_2 < \delta_4$... còn các giản phân bậc lẻ làm thành dãy đơn điệu giảm $\delta_1 < \delta_3 < \delta_5$... và mỗi giản phân bậc chẵn nhỏ hơn một giản phân bậc lẻ bất kì. Cuối cùng người ta chứng minh được là khoảng cách giữa hai giản phân liên tiếp dần đến 0 khi chỉ số của chúng tăng vô hạn. Những điều đó chứng tỏ dãy các giản phân bậc chẵn và dãy các giản phân bậc lẻ đều tụ và có cùng một giới hạn, tức dãy các giản phân hội tụ. Ta gọi giới hạn của dãy các giản phân là giá trị của liên phân số vô hạn. Người ta chứng minh được giá trị của liên phân số vô hạn là một số vô tỉ và ngược lại mỗi số vô tỉ hiểu diễn được duy nhất dưới dạng một liên phân số vô hạn.

Vậy mỗi số thực biểu diễn được dưới dạng một liên phân số, liên phân số là hữu hạn nếu là số hữu tỉ và vô hạn nếu là số vô tỉ.

Trên đây chúng ta đã giải quyết về phương diện lí thuyết sự biểu diễn số thực bằng liên phân số, và qua đó chúng ta cũng biết cách biểu diễn một số hữu tỉ thành liên phân số. Nhưng làm thế nào để biểu diễn một số vô tỉ thành liên phân số ?

Để giải quyết vấn đề, ta đưa ra khái niệm phần nguyên của một số. Cho số thực α, gọi là phần nguyên của α kí hiệu là $[\alpha]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá α. Chẳng hạn $\alpha = 7{,}152$ thì $[\alpha] = 7$; $\alpha = -6{,}15$ thì $[\alpha] = -7$; $\alpha = \sqrt{2}$ thì $[\alpha] = 1$, gọi là phần lẻ của α và kí hiệu $\{\alpha\}$ là hiệu $\{\alpha\} = \alpha - [\alpha]$, rõ ràng $0 \leqslant \{\alpha\} < 1$.

Ta có thể viết : $\alpha = [\alpha] + \{\alpha\}$ đặt $\{\alpha\} = \frac{1}{\alpha_1}$ (nếu $\{\alpha\} \neq 0$) thì $\alpha_1 > 1$ và ta lại có

$\alpha_1 = [\alpha_1] + \{\alpha_1\}$ v.v...

Nếu đặt $[\alpha] = q_0$, $[\alpha_1\} = q_1$,... thì ta có thể viết

$$\alpha = q_o + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{\dots}}$$

với q_0 nguyên, q_1, q_2 nguyên dương.

Bằng cách như vậy ta có thể biểu diễn số thực bất kì thành liên phân số.

Chẳng hạn với

$\alpha = \sqrt{2}$ có $q_o = [\sqrt{2}] = 1$

$$\rightarrow \sqrt{2} = 1 + \frac{1}{\alpha_1}.$$

$$\rightarrow \alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} + 1 \rightarrow [\alpha_1] = 2$$

$$\rightarrow \sqrt{2} + 1 = 2 + \frac{1}{\alpha_2}$$

$$\rightarrow \alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \alpha_1 \rightarrow [\alpha_2] = [\alpha_1] = 2...$$

Tiếp tục ta sẽ có $\alpha_3 = \alpha_2 = \alpha_1$, và v.v.. cho nên có :

$$\alpha = \sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \dots}} = [1 ; 2, 2. . .]$$

. . .

Một liên phân số như trên (các phần tử của nó lặp lại thành chu kì) gọi là một liên phân số tuần hoàn. Vậy liên phân số biểu diễn số $\sqrt{2}$ là liên phân số tuần hoàn. Nhưng không phải bao giờ ta cũng gặp may mắn như vậy, người ta đã chứng minh rằng những số đại số bậc 2 (nghiệm của phương trình đại số bậc hai và không phải là nghiệm của phương trình đại số bậc nhỏ hơn hai) và chỉ chúng mới biểu diễn được dưới dạng liên phân số tuần hoàn. Cho nên với những số vô tỉ không phải là đại số bậc hai, nói chung ta chỉ biết được một số phần tử đầu tiên của liên phân số biểu diễn nó. Chẳng hạn $\pi = [3$; $7, 15, 1, 292,...]$ $\sqrt[3]{2} = [1 ; 3, 1, 5, 1, 1,...]$.

Bây giờ chúng tôi trình bày một vài ứng dụng đơn giản của liên phân số.

I. Giải phương trình vô định $ax + by = c$ với a, b, c nguyên, $a \neq 0$, $b > 0$. Bao giờ ta cũng có thể giả thiết a, b nguyên tố cùng nhau (tức ước số chung lớn nhất của chúng bằng 1) và nếu phương trình này có một nghiệm nguyên riêng là $x = x_o$ và $y = y_o$ thì nghiệm nguyên tổng quát của phương trình này là :

$$\begin{cases} x = x_o + bt \\ y = y_o - at \end{cases}$$

(các bạn tự chứng minh điều này).

Giả sử $\frac{a}{b} = [q_o ; q_1,..., q_n]$ và $\delta_1 = \frac{P_1}{Q_1}$,...

$\delta_n = \frac{P_n}{Q_n}$ là các giản phân của nó. Xét hiệu $P_kQ_{k-1} - Q_kP_{k-1}$. Theo công thức (5) ta có $P_kQ_{k-1} - Q_kP_{k-1} =$

$= (q_kP_{k-1} + P_{k-2})Q_{k-1} -$
$- (q_kQ_{k-1} + Q_{k-2})P_{k-1}$
$= -(P_{k-1}Q_{k-2} - Q_{k-1}P_{k-2})$

Ta thấy biểu thức trong dấu ngoặc ở vế phải là biểu thức ở vế trái mà thay chỉ số k bởi $k - 1$. Nếu áp dụng liên tiếp phép biến đổi đó thì ta được : $P_kQ_{k-1} - Q_kP_{k-1} =$

$= (-1)(P_{k-1}Q_{k-2} - Q_{k-1}P_{k-2})$

$= (-1)^2(P_{k-2}Q_{k-3} - Q_{k-2}P_{k-3})$

. . . . .

$= (-1)^{k-1}(P_1Q_o - Q_1P_o)$

$= (-1)^{k-1}(q_1P_o + 1 - q_1P_o),$

Vậy $P_kQ_{k-1} - Q_kP_{k-1} = (-1)^{k-1}$ (6)

Đẳng thức (6) chứng tỏ :

1) $(P_k, Q_k) = 1$: Vì nếu d là ước chung của P_k, Q_k thì nó phải là ước của vế trái (6) do đó là ước của vế phải, suy ra $d = 1$. Vậy giản phân là phân số tối giản. Từ đó nếu $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản thì từ $\frac{a}{b} = \frac{P_n}{Q_n}$ suy ra $a = P_n$, $b = Q_n$.

Đặc biệt lấy $k = n$ thì (6) có thể viết :

$P_nQ_{n-1} - Q_nP_{n-1} = (-1)^{n-1} \rightarrow$

$\rightarrow aQ_{n-1} - bP_{n-1} = (-1)^{n-1}$

và do đó

$a[(-1)^{n-1}cQ_{n-1}] + b[(-1)^ncP_{n-1}] = c.$

Rõ ràng là $x_o = (-1)^{n-1}cQ_{n-1}$

$y_o = (-1)^ncP_{n-1}$

là một nghiệm của phương trình.

Ví dụ : Giải phương trình

$$43x + 37y = 21.$$

Khai triển $\frac{43}{37}$ thành liên phân số theo phương pháp trên, để cho gọn ta viết

$$\begin{array}{r|l} 43 & 37 \\ \hline 37 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 37 & 6 \\ \hline 6 & 6 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 6 & 1 \\ \hline & 6 \end{array}$$

Vậy $\frac{43}{37} = [1 ; 6 , 6]$

Để tính các giản phân ta lập bảng sau :

k	-1	0	1	2
q		1	6	6
P	1	1	7	43
Q	0	1	6	37

dòng thứ nhất ghi chỉ số k, dòng thứ hai ghi các giá trị q_k tương ứng ở đây $q_o = 1$, $q_1 = 6$, $q_2 = 6$. Dòng thứ 3 ghi P_k bằng cách sau : ta ghi $P_{-1} = 1$, $P_o = q_o = 1$ còn P_k với $k \geqslant 1$ có được bằng cách lấy q ở dòng trên nhân với P_{k-1} cộng với P_{k-2}. Chẳng hạn $P_1 = 6 \times 1 + 1 = 7$. Cũng như thế dòng thứ tư gồm các Q_k tương ứng.

Ở đây $n = 2$ $Q_{n-1} = Q_1 = 6$, $P_{n-1} = P_1 = 7$.

Vậy theo trên ta có một nghiệm của phương trình là :

$$x_o = (-1)^{2-1}21 \times 6 = -126$$
$$y_o = (-1)^2 21 \times 7 = 147.$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là :

$$\begin{cases} x = x_o + 37t = 37t - 126 \\ y = y_o - 43t = 147 - 43t \end{cases}$$

II. Biểu diễn xấp xỉ số thực bằng các giản phân.

Cho α là số thực, $\frac{P_n}{Q_n}$ là giản phân bậc n của liên phân số biểu diễn số α, người ta thấy

$$\frac{1}{Q_n(Q_{n+1} + Q_n)} < \left| \alpha - \frac{P_n}{Q_n} \right| \leqslant \frac{1}{Q_nQ_{n+1}}$$

Như vậy, nếu dùng giản phân để biểu diễn gần đúng số thực thì ta biết được cả cận trên và cận dưới của sai số. Người ta chứng minh được rằng mỗi giản phân bậc n, $\frac{P_n}{Q_n}$ biểu diễn xấp xỉ α tốt nhất so với các phân số có mẫu số nhỏ hơn hay bằng Q_n. Có nghĩa nếu $b \leqslant Q_n$ thì

$$\left| \alpha - \frac{P_n}{Q_n} \right) \leqslant \left| \alpha - \frac{a}{b} \right|$$

với mọi phân số $\frac{a}{b}$. Như vậy ta có thể dùng giản phân để biểu diễn xấp xỉ số thực với độ chính xác cao, bằng những số không lớn lắm. Chẳng hạn ta biết $\pi = [3\ ;\ 7, 15, 1, 292,...]$ các giản phân của nó là $\frac{P_o}{Q_o} = 3$, $\frac{P_1}{Q_1} = \frac{22}{7}$,

$$\frac{P_2}{Q_2} = \frac{333}{106}, \frac{P_3}{Q_3} = \frac{355}{113}, \frac{P_4}{Q_4} = \frac{103993}{33102}$$

do đó

$$\left| \pi - \frac{P_3}{Q_3} \right| = \left| \pi - \frac{355}{113} \right| <$$

$$< \frac{1}{113 \times 33102} < 0{,}0000003\ ,$$

như vậy dùng giản phân $\frac{355}{113}$ biểu diễn số π ta mắc sai số nhỏ hơn một phần triệu.

Muốn biểu diễn bằng phân số thập phân với sai số như vậy, phải dùng số 3,1415926 hay phân số $\frac{15707963}{5000000}$.

Trên đây mới chỉ là vài nét sơ lược về liên phân số. Nhiều công trình của các nhà toán học lớn như Ơle, Lagơrăng, Galoa... về liên phân số, đã làm cho liên phân số trở thành một công cụ có hiệu lực trong nhiều lĩnh vực toán học.

NGUYÊN LÍ DIRICHLET "NHỮNG CHIẾC LỒNG" VÀ "CÁC CHÚ THỎ"

LÊ ĐÌNH THỊNH
(dịch)

Khi chứng minh các bài toán thường người ta dùng một phương pháp rất thuận lợi, đó là phương pháp Dirichlet (Pête Gutxtap Legien Đirichcơlê (1805 - 1859) nhà toán học Đức nổi tiếng). Dạng đơn giản nhất có thể phát biểu như sau : *Không thể nhốt 7 chú thỏ vào 3 chiếc lồng, sao cho trong mỗi lồng có không quá hai chú thỏ.*

Bây giờ ta sẽ giải một số bài toán bằng cách chọn các chú thỏ thích hợp và nhốt vào những chiếc lồng tương ứng.

1. Trong lớp có 30 học sinh. Khi viết chính tả em Xuân phạm 13 lỗi, còn các em khác ít lỗi hơn. Chứng minh rằng có ít nhất là 3 em học sinh đã mắc một số lỗi bằng nhau (kể cả những người viết 0 lỗi).

Ở đây "thỏ" tức là các em học sinh, còn "lồng" là lỗi đã phạm phải.

Trong "lồng" 0 ta nhốt tất cả những em viết chính tả không lỗi, trong "lồng" 1 nhốt tất cả các em phạm 1 lỗi, trong "lồng" 2 nhốt tất cả các em phạm 2 lỗi, v.v... cho đến chiếc "lồng" thứ 13 ta chỉ nhốt mình chú "thỏ" Xuân.

Bây giờ chúng ta ứng dụng nguyên tắc Đirichcơlê (chú ý là chỗ này rất quan trọng).

Ta sẽ chứng minh bài toán bằng phản chứng. Giả sử rằng không có ba em nào viết chính tả phạm cùng số lỗi như nhau, điều đó có nghĩa là trong mỗi lồng 0, 1, ..., 12 có ít hơn 3 học sinh, khi đó trong mỗi lồng có không quá 2 học sinh và trong số 13 lồng có không quá 26 em học sinh, cộng thêm em Xuân nữa cũng chưa đầy 30 em : Điều đó mâu thuẫn.

Có thể khẳng định rằng có đúng ba em học sinh có cùng số lỗi như nhau không ? Tất nhiên là không. Có thể là trừ Xuân ra, còn tất cả các em đều viết chính tả không lỗi. Có thể nói rằng ít nhất là có 4 em ở trong cùng một lồng hay không ? Cũng không. Lớp học có 3 người viết không lỗi, 3 người viết 1 lỗi, 3 người viết 2 lỗi, 2 người viết 3 lỗi,..., 2 người viết 12 lỗi và 1 người viết 13 lỗi thỏa mãn đầu bài toán.

2. Ở Matxcơva có khoảng 7,1 triệu dân. Trên đầu mỗi người có không quá 100.000 sợi tóc, chứng minh rằng ở Matxcơva có ít nhất là 70 người có số sợi tóc trên đầu như nhau.

SỰ QUEN BIẾT

Ta xem sự quen biết là đối xứng giữa mọi người, có nghĩa là nếu Mai quen với Hồng, thì Hồng cũng quen với Mai.

3. Chọn 5 người tùy ý. Chứng minh rằng ít nhất là 2 người trong số đó có số người quen (trong 5 người đã chọn) như nhau.

Ta dựng 5 "chiếc lồng" 0, 1, 2, 3, 4. Giả sử số thứ tự của những "chiếc lồng" bằng số người quen của người ở trong lồng đó. Có hai trường hợp có thể : Có người không quen với 4 người còn lại hay là không có người như thế. Trong trường hợp đầu trong chiếc lồng 4 không có ai cả (không thế thì những người ngồi trong lồng 4 và lồng 0 quen nhau mất) và 5 người bị nhốt trong 4 "lồng". Trong trường hợp thứ hai họ cũng bị nhốt như thế (vì "lồng" 0 trống). Theo nguyên tắc Đirichcơlê ít nhất là có hai người ở trong một lồng.

4. Trong cuộc thi đấu bóng đá có 10 đội tham gia. Cứ hai đội trong số đó phải đấu với nhau một trận. Chứng minh rằng, trong mọi thời điểm của cuộc đấu đều có hai đội đã đấu được một số trận như nhau.

TÍNH CHIA HẾT

5. Chứng minh rằng trong số 12 số tự nhiên bất kì có thể chọn hai số có hiệu chia hết cho 11.

Khi chia cho 11 ta có một trong 11 dư số là 0, 1, 2,..., 10 ta có tới 11 số, do đó theo nguyên tắc Đirichcơlê phải tồn tại hai số có cùng dư số. Hiệu của hai số đó sẽ chia hết cho 11.

6. Người ta viết 5 số tự nhiên vào một hàng : a_1, a_2, a_3, a_4, a_5. Chứng minh rằng, hoặc một trong các số đó chia hết cho 5, hoặc tổng một số số tự nhiên kề nhau chia hết cho 5.

Xét 5 số

$$a_1,$$
$$a_1 + a_2,$$
$$a_1 + a_2 + a_3,$$
$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4,$$
$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5.$$

Nếu một trong các số đó chia hết cho 5 thì bài toán đã giải xong. Trong trường hợp trái lại, khi chia cho 5 mỗi số có 1 dư số nào đó trong 4 số : 1, 2, 3, 4. Theo nguyên tắc Dirichcơlê ít nhất 2 trong 5 số đó có cùng dư số. Nhưng hiệu hai số đó hoặc là 1 trong những số đã cho trong đầu bài, hoặc là tổng một số số kề nhau.

7. Chứng minh rằng trong 52 số tự nhiên có thể chọn hai số, sao cho tổng hoặc hiệu của chúng chia hết cho 100. Mệnh đề đó có đúng không, nếu ta chỉ lấy 51 số ?

HÌNH HỌC

8. Trong hình vuông cạnh $1m$ lấy 51 điểm tùy ý. Chứng minh rằng tồn tại 3 điểm trong một vòng tròn bán kính $1/7.m$.

Chia hình vuông thành 25 hình vuông nhỏ bằng nhau (với cạnh $1/5.m$). Ta sẽ chứng minh rằng trong một hình vuông nào đó có ít nhất là 3 điểm trong số 51 điểm đã cho. Ứng dụng nguyên tắc Đirichcơlê : nếu như trong mỗi hình vuông (ở trong hay ở trên cạnh) có không quá hai điểm thì tổng số các điểm trong hình vuông không quá $2 \times 25 = 50$ điểm mất.

Ngoại tiếp hình vuông nhỏ có ít nhất 3 điểm đã cho đó một vòng tròn, bán kính của vòng tròn đó bé hơn $1/7.m$.

9. Trong hình vuông có cạnh là 1 lấy 101 điểm tùy ý (không nhất thiết là các điểm trong) ; không có ba điểm nào thẳng hàng. Chứng minh rằng tồn tại một tam giác với đỉnh tại các điểm đã cho, có diện tích không lớn hơn 1/100.

Bây giờ là một số bài toán mà khi dùng nguyên tắc Đirichcơlê phải biến về dạng hình học.

10. Một số cung của một vòng tròn được sơn đen. Tổng độ dài của các cung sơn đen đó bé hơn nửa vòng tròn. Chứng minh rằng tồn tại một đường kính có hai đầu không bị sơn đen.

Ta sơn xanh những cung đối xứng với các cung đen qua tâm của vòng tròn. Vì tổng độ dài của các cung xanh bằng tổng độ dài của các cung đen, nên tổng độ dài các cung bị sơn bé hơn độ dài của vòng tròn. Điều đó có nghĩa là (nguyên tắc Đirichcơlê) tồn tại một điểm chưa bị sơn. Đường kính đi qua điểm đó, chính là đường kính cần tìm.

"Xét đoạn thẳng AB. Giả sử trên đó có một số đoạn đen với tổng độ dài là 1,5 AB khi đó một điểm nào đó của đoạn AB sẽ nằm trên ít nhất là 2 đoạn đen". Biện luận đó giúp ta giải bài toán sau đây :

11. Trong hình vuông $ABCD$ với cạnh $1cm$ có một số vòng tròn, tổng bán kính của nó là $0,6cm$ (các vòng tròn có thể giao nhau hay trùng nhau). Chứng minh rằng tồn tại một đường thẳng song song với AB, có các điểm chung với ít nhất là hai vòng tròn.

SỚM HAY MUỘN SẼ PHẢI LẶP LẠI

12. Cho dãy số 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89,..., trong đó mỗi số bắt đầu từ số thứ ba bằng tổng hai số đứng trước nó. Có tìm được trong 100.000.001 số hạng đầu của dãy số đó một số tận cùng bằng 4 số không hay không ?

Xét dãy dư số của những số đã cho, khi chia cho 10.000. Kí hiệu dư số của số thứ n là a_n : $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_6 = 8$, $a_{10} = 55$, v.v... Có tất cả 10.000 dư số khác nhau. Số cặp dư số khác nhau là $10.000^2 = 100.000.000$. Xét các cặp a_1a_2 ; a_2a_3 ; a_3a_4 ; ... ; $a_{100.000.001}$; $a_{100.000.002}$. Theo nguyên tắc Dirichcolê, trong số 100.000.001 cặp dư số đó, có ít nhất là hai cặp trùng nhau : $a_k = a_m, a_{k+1} = a_{m+1}$, trong đó k và m bé hơn 100.000.002, k bé hơn m. Theo dư số của tổng và của một số hạng, dư số của số hạng thứ hai được xác định duy nhất (hãy kiểm tra xem), bởi vậy $a_{k-1} = a_{m-1}, a_{k-2} = a_{m-2}$ v.v... cho đến $a_2 = 1 = a_{m-k+2}, a_1 = 1 = a_{m-k+1}$. Bây giờ thì rõ (tại sao ?) là $a_{m-k} = 0$

13. Chứng minh rằng tồn tại một lũy thừa của số 29 tận cùng bằng các chữ số 00.001.

BẢNG

Trong bảng $n \times n$ ô đặt các số tự nhiên từ 1 đến n^2. Người ta quan tâm đến mệnh đề sau đây :

"Với mọi cách xếp đặt đều tồn tại 2 ô có chung cạnh, sao cho hiệu các số ở hai ô đó lớn hơn 5".

14. Chứng minh mệnh đề đó

a) với $n = 10$

b) với mọi $n > 10$

c) với $n = 9$

15. Phủ định mệnh đề đó khi $n = 5$

Tác giả không biết mệnh đề đó có đúng cho $n = 6, 7, 8$ hay không !

MỘT PHƯƠNG PHÁP GIẢI PHƯƠNG TRÌNH

TẠ VĂN TỰ
(Hà Nội)

Khi giải phương trình

$$16x^4 - 32x^3 + 8x^2 + 8x + 1 = 0$$

bằng cách chia cho x^2 và đặt $y = 4x = -1/x$, ta đưa được nó về một phương trình bậc hai đối với y. Phương pháp này có vai trò quan trọng khi giải toán vì nó đưa việc giải phương trình bậc cao về giải phương trình bậc thấp hơn. Tuy nhiên cũng có phương trình không giải được bằng phương pháp đó, ví dụ phương trình

$$x^4 + 2x^3 - 12x^2 - 13x + 42 = 0.$$

Vấn đề được đặt ra là : *Các phương trình có các hệ số như thế nào thì áp dụng được phương pháp trên ?* Kết luận sẽ được nêu bằng các mệnh đề sau đây :

Mệnh đề 1. Cho phương trình bậc $2n$

$$f(x) = a_o x^{2n} + a_1 x^{2n-1} + ... + a_n x^n + ... + a_{2n-1}x + a_{2n} = 0.$$

Nếu có số $t \neq 0$ sao cho

$a_{n-j} = a_{n+j} t^j$ với mọi $j = 1, 2, ..., n$.

thì phương trình trên có thể đưa được về một phương trình bậc n.

Chứng minh. Theo giả thiết : $a_o = a_{2n} t^n$, nên từ $a \neq 0$ và $t \neq 0$ suy ra $a_{2n} \neq 0$. Như vậy $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình, ta có phương trình tương đương (bằng cách chia cho x^n) :

$$a_o x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_n + ... + \frac{a_{2n-1}}{x^{n-1}} + \frac{a_{2n}}{x^n} = 0$$

hay

$$\left(a_o x^n + \frac{a_{2n}}{x^n}\right) + ... + \left(a_{n-j}x^j + \frac{a_{n+j}}{x_j}\right) + ... + \left(a_{n-1}x + \frac{a_{n+1}}{x}\right) + a_n = 0.$$

Theo giả thiết : $a_{n-j} = a_{n+j}t^j$ $(1 \leq j \leq n)$, nên phương trình trên tương đương với :

$$a_{2n}\left[(tx)^n + \frac{1}{x^n}\right] + ... + a_{n+j}\left[(tx)^j + \frac{1}{x^j}\right] + ... + a_{n+1}\left[tx + \frac{1}{x}\right] + a_n = 0$$

hay

$$a_{2n}Y_n + ... + a_{n+j}Y_j + ... + a_{n+1}Y_1 + a_n = 0$$

với

$$Y_j = (tx)^j + \frac{1}{x^j} \; (1 \leq j \leq n).$$

Theo nhị thức Niu-tơn

$$(a+b)^j = C_j^o a^j + ... + C_j^k a^{j-k}b^k + ... + C_j^j b^j.$$

Ta có

$$\left(tx + \frac{1}{x}\right)^j = (tx)^j + tC_j^1(tx)^{j-2} + t^2C_j^2(tx)^{j-4} + ... + t^kC_j^k(tx)^{j-2k} + ... + t^kC_j^{j-k}\frac{1}{x^{j-2k}} + ... + \frac{1}{x^j}$$

với k là số tự nhiên và $0 \leq k \leq j$.

Từ đó ta có

$$Y_j = (tx)^j + \frac{1}{x^j} = \left(tx + \frac{1}{x}\right)^j - \left[tC_j^1(tx)^{j-2} + C_j^{j-1}\frac{t}{x^{j-2}}\right] - ... - \left[t^kC_j^k(tx)^{j-2k} + t^kC_j^{j-k}\frac{1}{x^{j-2k}} + ...\right.$$

hay

$$Y_j = Y_1^j - tC_j^1Y_{j-2} - ... - t^kC_j^kY_{j-2k} - ... \quad (1)$$

Từ (1) với $j = 3$ và $j = 2$ ta có

$$Y_3 = Y_1^3 - tC_3^1Y_1 \quad (2)$$

$$Y_2 = Y_1^2 - tC_2^1 \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) bằng cách truy hồi ta có thể biểu diễn được mọi Y_j qua Y_1 với số mũ cao nhất của Y_1 là n. Vậy phương trình đưa được về dạng $f(Y_1) = 0$ với số mũ cao nhất của Y_1 là n. Đó là điều cần chứng minh.

Ví dụ 1. Giải phương trình

$$16x^8 - 8x^7 - 56x^6 + 16x^5 + 52x^4 - 8x^3 - 14x^2 + x + 1 = 0.$$

Ta thấy với $t = -2 = a_3/a_5$, $a_2/a_6 = (-2)^2$, $a_1/a_7 = (-2)^3$, $a_o/a_8 = (-2)^4$, thỏa mãn giả thiết của mệnh đề 1. Vậy có thể đưa phương trình về một phương trình bậc bốn.

Ta có phương trình tương đương

$$\left(16x^4 + \frac{1}{x^4}\right) + \left(-8x^3 + \frac{1}{x^3}\right) - 14\left(4x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 8\left(2x + \frac{1}{x}\right) + 52 = 0$$

Do $\left(16x^4 + \frac{1}{x^4}\right) =$

$$= \left(\frac{1}{x} - 2x\right)^4 + 8\left(\frac{1}{x} - 2x\right)^2 + 8$$

$$\left(-8x^3 + \frac{1}{x^3}\right) = \left(\frac{1}{x} - 2x\right)^3 + 6\left(\frac{1}{x} - 2x\right)$$

$$\left(4x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = \left(\frac{1}{x} - 2x\right) + 4,$$

nên phương trình trên tương đương với

$$\left(\frac{1}{x} - 2x\right)^4 + \left(\frac{1}{x} - 2x\right)^3 - 6\left(\frac{1}{x} - 2x\right)^2 - 2\left(\frac{1}{x} - 2x\right) + 4 = 0.$$

Đặt $Y = \frac{1}{x} - 2x$ thì có

$$Y^4 + Y^3 - 6Y^2 - 2Y + 4 = 0$$

Ta lại có $t = -1/2$ thỏa mãn giả thiết của mệnh đề 1. Vậy ta có phương trình tương đương

$$\left(Y^2 + \frac{4}{Y^2}\right) + \left(Y - \frac{2}{Y}\right) - 6 = 0$$

đưa được về

$$Z^2 + Z - 2 = 0 \text{ với } Z = Y - 2/Y.$$

Phương trình có nghiệm $Z = 1$ và $Z = -2$.

Từ Z tìm ra Y và cuối cùng tìm ra 8 nghiệm của phương trình là :

$$x_1 = 1,\ x_2 = -1/2,\ x_{3,4} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$$

$$x_{5,6} = \frac{1 - \sqrt{3} \pm \sqrt{12 - 2\sqrt{3}}}{4}$$

$$x_{7,8} = \frac{1 + \sqrt{3} \pm \sqrt{12 + 2\sqrt{3}}}{4}$$

Ví dụ 2. Giải phương trình

$$96x^4 + 24\sqrt{3}x^3 - 5x^2 + 6x + 2 = 0.$$

Ta thấy $t = 4\sqrt{3}$ thỏa mãn giả thiết của mệnh đề 1, nên đưa được về việc giải phương trình bậc hai.

Để hoàn thiện phương pháp, các bạn hãy tự chứng minh mệnh đề sau đây.

Mệnh đề 2. Phương trình bậc $2n$

$$f(x) = a_0x^{2n} + a_1x^{2n-1} + ... + a_{2n} = 0$$

muốn đưa được về một phương trình bậc n bằng cách chia cho x^n thì điều kiện cần là có số $t \neq 0$ sao cho

$$a_{n-j} = a_{n+j}t^j \text{ với mọi } j = 1, 2, ..., n.$$

Một số chú ý :

1. Cần chú ý dấu của các hệ số : a_{2k} và a_{2n-2k} phải cùng dấu thì mới sử dụng được phương pháp trên.

2. Nếu có thể thì dùng phép thế dạng $y = x^k$ sau đó mới dùng phương pháp trên. Ví dụ phương trình

$$16x^{12} - 32x^9 + 8x^6 + 8x^3 + 1 = 0$$

nên đưa về

$$16y^4 - 32y^3 + 8y^2 + 8y + 1 = 0$$

rồi mới áp dụng phương pháp này.

Cuối cùng xin đưa ra vài phương trình để các bạn áp dụng phương pháp trên :

1) $x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 10x + 25 = 0.$

2) $5\sqrt{3}x^4 + x^3 - 10\sqrt{7}x^2 - 2x = 4\sqrt{75} = 0$

3) $5x^{12} + 4x^9 - 18x^6 - 12x^3 + 45 = 0$

4) $8x^6 - 16x^5 + 2x^4 + 12x^3 + 3x^2 - 36x + 27 = 0.$

5) $2x^8 + 9x^7 + 20x^6 + 33x^5 + 48x^4 + 66x^3 + 80x^2 + 72x + 32 = 0.$

VÀI VẤN ĐỀ VỀ SO SÁNH CÁC SỐ

NGUYỄN VIẾT THÀNH

So sánh các số, nhất là các số lớn là một việc rất khó khăn và phức tạp. Đặc biệt các số đó lại ở dạng không cố định thì việc tìm các dấu bất đẳng thức giữa chúng lại càng khó khăn. Thế nhưng trong chương trình toán ở trường phổ thông lại rất ít đề cập đến vấn đề này. Qua bài báo này tôi muốn trao đổi với các bạn phương pháp giải một số bài toán dạng đó.

Bài toán 1. Số nào lớn hơn trong hai số

$$2^{3^{100}} \text{ và } 3^{2^{100}}$$

Lời giải. Ta sẽ chứng minh rằng $2^{3^{100}} > 3^{2^{100}}$.

Thật vậy, từ $(3/2)^2 > 2$

ta suy ra

$$(3/2)^{100} > 2 \text{ hay } 3^{100} > 2 \,.\, 2^{100}.$$

Từ đó

$$2^{3^{100}} > 4^{2^{100}} > 3^{2^{100}} \qquad \text{(đpcm)}$$

Bài toán 2. Số nào lớn hơn trong hai số

$$5^{10} + 6^{10} \text{ và } 7^{10}$$

Lời giải.

Cách 1 : Ta chứng minh rằng

$$5^{10} + 6^{10} < 7^{10}$$

Thật vậy, ta có $5^{10} + 6^{10} < 2 \,.\, 6^{10}$

Vậy điều cần chứng minh tương đương với

$2 \,.\, 6^{10} < 7^{10}$ *hay* $(7/6)^{10} > 2$

Theo bất đẳng thức Becnuli, ta được

$$(7/6)^{10} = (1 + 1/6)^{10} > 1 + 10 \,.\, 1/6 > 2$$

đó là điều phải chứng minh.

Cách 2 : Ta có $5^3 + 6^3 = 341 < 343 = 7^3$ hay $(5/7)^3 + (6/7)^3 < 1$

Mặt khác

$$(5/7)^{10} < (5/7)^3 \text{ và } (6/7)^{10} < (6/7)^3 .$$

Từ đó

$$(5/7)^{10} + (6/7)^{10} < 1$$

nghĩa là

$$5^{10} + 6^{10} < 7^{10} ,$$

Bài toán 2 không phải là bài toán quá khó, song lời giải của nó là cơ sở để ta suy nghĩ giải các bài toán tổng quát hơn.

Bài toán 3. Số nào lớn hơn trong hai số $1^n + 2^n + ... + 9^n$ *và* 10^n .

Lời giải. Trước hết ta nhận thấy rằng nếu có một số n nào đó sao cho

$$1^n + 2^n + ... + 9^n < 10^n$$

thì với mọi số $m \geqslant n$ ta đều có

$$1^m + 2^m + ... + 9^m < 10^m .$$

Bây giờ, bằng phép thử trực tiếp, ta được $1 + 2 ... + 9 > 10$, $1^2 + 2^2 + ... + 9^2 > 10^2$, $1^3 + 2^3 + ... + 9^3 > 8^3 + 9^3 = 729 + 512 > 10^3$.

Như vậy, với n tương đối bé thì bước thử đó làm cho các ước vọng sử dụng các nhận xét của ta mất hiệu quả, song với $n = 7$ ta có :

$1^7 + 2^7 < 3^7$, vì thế $1^7 + 2^7 + 3^7 < 2.3^7 < 4^7$.

tiếp tục quá trình đó, bằng cách sử dụng bất đẳng thức Benuli thì $1^7 + 2^7 + ... + 8^7 < 2.8^7$, $2.8^7 < 9^7$ và $2.9^7 < 10^7$, tức là $1^7 + 2^7 + ... + 9^7 < 10^7$. Với $n = 5$ thì $1^5 + 2^5 + ... + 9^5 \geqslant 10^5$ do có bất đẳng thức $0{,}9^5 + 0{,}8^5 + 0{,}7^5 > 1$. Các bạn hãy tìm lấy trường hợp $n = 6$.

(Trả lời : $1^6 + 2^6 + ... + 9^6 < 10^6$)

Vậy ta đi đến đáp số là

– Với $1 \leqslant n \leqslant 5$ thì $1^n + 2^n + ... + 9^n > 10^n$

– Với $n > 6$ thì $1^n + 2^n + ... + 9^n < 10^n$

Bài toán 4. Số nào lớn hơn trong hai số

$$1 + 2^2 + 3^3 + ... + 1000^{1000} \text{ và } 2^{2^{2^{2^2}}}$$

Lời giải.

Ta có

$$2^{2^{2^{2^2}}} = 2^{2^{2^4}} = 2^{2^{16}}$$

vì $2^{10} = 1024 > 10^3$

và $2^6 = 64$ *nên* $2^{16} > 64000$

nghĩa là $2^{2^{2^{2^2}}} > 2^{64000}$

Mặt khác

$1 + 2^2 + 3^3 + ... + 1000^{1000} < 1000 . 1000^{1000}$ $= 1000^{1001} < (2^{10})^{1001} = 2^{10010}$

Do $2^{64000} > 2^{10010}$

Nên $1 + 2^2 + 3^3 + ... + 1000^{1000} < 2^{2^{2^{2^2}}}$

Bài toán 5. Số nào lớn hơn trong hai số

$$\left.2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}\right\} n \quad \text{và } \underbrace{22 ... 2}_{n}{}^{\overbrace{22 ... 2}^{n}}$$

Lời giải. Ta hãy đặt

$$a_n = \left.2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}\right\} n$$

và
$$b_n = \underbrace{22 ... 2}_{n}{}^{\overbrace{22 ... 2}^{n}}$$

Khi đó

$a_1 = 2$, $a_2 = 4$, $a_3 = 16$, $a_4 = 65536$; $b_1 = 4$.

Như vậy dễ thấy rằng

$$a_1 < b_1 , a_2 < b_2 , a_3 < b_3 , a_4 < b_4$$

Ta hãy xem a_5 *và* b_5 , ta có :

$$a_5 = a^{a_4} = 2^{65536} , b_5 = 22222^{22222}$$

Ta chứng minh $a_5 < b_5$.

Thật vậy, vì $22222 > 1024 = 2^{10}$

nên

$$22222^{22222} > (2^{10})^{22222} = 2^{222220} > 2^{65536}$$

tức là $b_5 > a_5$

Ta hãy chứng minh rằng với $n \geqslant 6$ thì $a_n > b_n$.

Ta có $\underbrace{22 ... 2}_{n} < 10^n$

nên $b_n < (10^n)^{10^n} = 10^{n10^n} < (2^4)^{n(2^4)^n}$

$$= 2^{4n}.2^{4^n} < 2^{2^{5n}}$$

tức là $\quad b_n < 2^{2^{5n}}$.

Mặt khác ta luôn có $a_{n-2} > 5n$ với $n \geqslant 6$

do đó $\quad a_n = 2^{2^{a_{n-2}}} > 2^{2^{5n}} > b_n$.

Vậy ta có kết quả

- Với $1 \leqslant n \leqslant 5$ thì $a_n < b_n$

- Với $6 \leqslant n$ thì $a_n > b_n$.

Bây giờ bạn hãy chọn lấy một dãy số tự nhiên liên tiếp k, $k+1$, ..., $k+n$ với $k > 2$ và lập các số theo quy luật sau :

$$k^{(k+1)^{\cdot^{\cdot^{k+n}}}} \quad \text{và} \quad (k+1)^{(k+2)^{\cdot^{\cdot^{(k+n)^k}}}}$$

Bài toán 6. Hai số vừa lập được thì số nào lớn hơn.

Lời giải. Ta sử dụng bất đẳng thức :

với $k < n$ thì $\sqrt[k]{k} > \sqrt[n]{n}$

mà đã có lần chứng minh trên báo Toán học và tuổi trẻ.

Trở lại bài toán, ta hãy đặt

$$a = (k+1)^{(k+2)^{\cdot^{\cdot^{k+n}}}}$$

thì bài toán đưa về so sánh hai số k^a *và* a^k với k, $a > 1$.

Rõ ràng $k^a > a^k$ (vì nó tương đương với $\sqrt[k]{k} > \sqrt[n]{n}$).

Bây giờ cũng với dãy số đó, song ta lập các số theo một quy luật phức tạp hơn.

Bài toán 7. Số nào lớn hơn trong hai số

$$(k+i)^{k^{(k+1)^{\cdot^{\cdot^{(k+i-1)^{(k+i+1)^{\cdot^{\cdot^{k+n}}}}}}}}}$$

và $\quad (k+i+1)^{k^{(k+1)^{\cdot^{\cdot^{(k+i)^{(k+i+2)^{\cdot^{\cdot^{k+n}}}}}}}}}$

trong đó $k > 1$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

Lời giải. Ta hãy đặt

$$a = k^{(k+1)^{\cdot^{\cdot^{k+i-1}}}}$$

và $\quad b = (k+i+2)^{(k+i+3)^{\cdot^{\cdot^{k+n}}}}$

thì rõ ràng $a > 2$ *và* $b > 2$, và bài toán đưa về so sánh hai số

$$(k+i)^{a^{(k+i+1)^b}} \quad \text{và} \quad (k+i+1)^{a^{(k+1)^b}}$$

Trước hết ta hãy chứng minh rằng với $k > 1$, $a > 2$, $b > 2$ thì

$$a^{(k+i+1)^b} > 2a^{(k+i)^b}$$

Thật vậy, do $(k+i+1)^b > (k+i)^b + 1$ nên

$$a^{(k+i+1)^b} > a^{(k+i)^b+1} =$$

$$= a\,.\,a^{(k+i)^b} > 2a^{(k+1)^b}$$

Trở lại bài toán ta thấy :

$$(k+i)^{a^{(k+i+1)^b}} > (k+i)^{2a^{(k+1)^b}} =$$

$$= (k^2+2ki+i^2)^{a^{(k+1)^b}} > (k+i+1)^{a^{(k+i)^b}}.$$

Bài toán được giải quyết xong.

DÙNG HỆ THỨC VECTƠ ĐỂ XÁC ĐỊNH CÁC ĐIỂM ĐẶC BIỆT TRONG TAM GIÁC VÀ TRONG TỨ DIỆN

NGUYỄN CÔNG QUỲ

(Đại học Sư phạm T.P. Hồ Chí Minh)

Trong nhiều bài toán hình học phẳng cũng như không gian, phương pháp vectơ tỏ ra rất có hiệu lực. Để giúp các bạn có thể vận dụng được phương pháp đó, bài này sẽ nêu lên cách xác định bằng vectơ một số điểm đặc biệt như trọng tâm, tâm các đường tròn (hay mặt cầu) ngoại tiếp, nội tiếp, bàng tiếp... của tam giác (hay tứ diện).

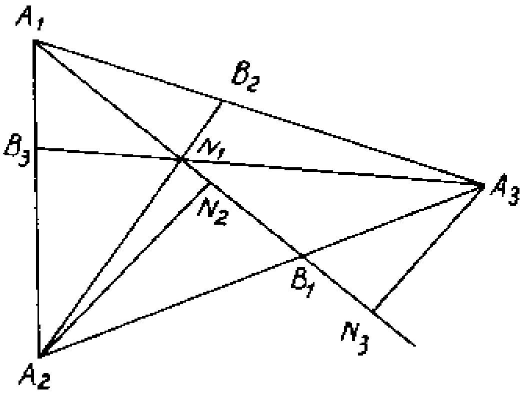
I – Trước hết chúng ta bắt đầu bằng những bài toán trong mặt phẳng.

1. Xét bài toán sau đây : *Cho một điểm M nằm trong một tam giác $A_1A_2A_3$. Hãy xác định các số thực k_1, k_2 và k_3 không đồng thời bằng 0 sao cho.* $\sum k_i \overrightarrow{MA_i} = 0$

(kí hiệu $\sum$ ở đây và suốt trong mục 1 được hiểu là tổng $\sum_{i=1}^{3}$).

Trước hết ta thấy rằng nếu (k_1, k_2, k_3) là một bộ số thực thỏa mãn hệ thức đã cho thì mọi bộ số thực $(\lambda k_1, \lambda k_2, \lambda k_3)$ trong đó λ là một số thực khác 0, đều thỏa mãn hệ thức đã cho. Vì vậy nghiệm của bài toán được xác định sai khác một thừa số khác 0.

Để giải bài toán này, ta hãy gọi B_i là giao điểm của đường nối M và đỉnh A_i với cạnh đối diện (i = 1, 2, 3) ; s_1, s_2, s_3 theo thứ tự là diện tích các tam giác MA_2A_3, MA_2A_1 *và* MA_1A_2 (hình 1).



Hình 1

Nếu N_2 *và* N_3 lần lượt là chân các đường vuông góc hạ từ A_2 *và* A_3 xuống A_1B_1 thì

$\overrightarrow{B_1A_2}/\overrightarrow{B_1A_3} = -A_2N_2/A_3N_3 = -(1/2)A_2N_2$.

$MA_1/(1/2)A_3N_3 \,.\, MA_1 = -s_3/s_2$,

Nếu P là một điểm bất kì trong mặt phẳng thì hệ thức

$$\overrightarrow{B_1A_2}/\overrightarrow{B_1A_3} = -s_3/s_2 \;.$$

có thể viết thành $(\overrightarrow{PA_2} - \overrightarrow{PB_1})/(\overrightarrow{PA_3} - \overrightarrow{PB_1}) = -s_3/s_2$ từ đó rút ra $(s_2 + s_3)\overrightarrow{PB_1} = s_2\overrightarrow{PA_2} + s_3\overrightarrow{PA_3}$. (1)

Ta hãy chọn P là điểm chia đoạn A_1B_1 theo tỉ số $-(s_2 + s_3)/s_1$, tức là $\overrightarrow{PA_1}/\overrightarrow{PB_1} = -(s_2 + s_3)/s_1$ hay

$$s_1\overrightarrow{PA_1} + (s_2 + s_3)\overrightarrow{PB_1} = 0$$

Hệ thức này cùng với (1) cho ta $s_1\overrightarrow{PA_1} + s_2\overrightarrow{PA_2} + s_3\overrightarrow{PA_3} = 0$ hay $\sum s_i\overrightarrow{PA_i} = 0$ (2)

Như vậy, điểm P xác định bởi hệ thức (2) nằm trên đường thẳng A_1B_1 .

Để ý rằng trong hệ thức (2), các chỉ số 1, 2, 3 có vai trò như nhau, nên bằng cách tương tự ta cũng chứng minh được điểm P xác định bởi hệ thức (2) cũng nằm trên các đường thẳng A_2B_2 *và* A_3B_3 . Nói cách khác điểm P xác định như vậy chính là điểm M đã cho.

Như vậy là ta đã chứng minh được rằng k_i tỉ lệ với s_i $(i = 1, 2, 3)$, và *với mọi điểm M nằm trong tam giác $A_1A_2A_3$ ta có hệ thức*

$$\sum s_i\overrightarrow{MA_i} = 0$$

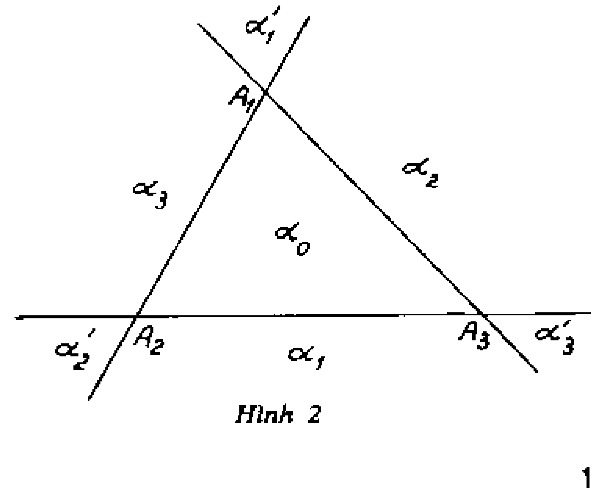
Nếu O là một điểm tùy ý trong mặt phẳng thì hệ thức trên có thể viết thành $\sum s_i(\overrightarrow{OA_i} - \overrightarrow{OM}) = 0$ từ đó rút ra $\overrightarrow{OM} = \sum s_i\overrightarrow{OA_i}/\sum s_i = \sum s_i\overrightarrow{OA_i}/S$ với S là diện tích tam giác $A_1A_2A_3$. Để cho gọn ta sẽ quy ước kí hiệu theo vectơ bán kính tức là viết $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{M}$. $\overrightarrow{OA_i} = \overrightarrow{A_i}$. Như vậy hệ thức trên có thể viết thành

$$\overrightarrow{M} = \sum s_iA_i/S \qquad \text{(I')}$$

2. Trường hợp điểm M nằm ngoài tam giác $A_1A_2A_3$. Bằng đường lối tương tự trên ta dễ dàng đi tới kết quả sau đây. Nếu ta đánh số các miền của mặt phẳng như ở hình 2 thì trong trường hợp M thuộc miền α_1 hoặc α'_1 thì hệ thức (I) được thay thế bởi.

$-s_1\overrightarrow{MA_1} + s_2\overrightarrow{MA_2} + s_3\overrightarrow{MA_3} = 0$, còn (I') thì được thay thế bởi các hệ thức

$\overrightarrow{M} = (-s_1\overrightarrow{A_1} + s_2\overrightarrow{A_2} + s_3\overrightarrow{A_3})/S$ nếu $M \in \alpha_1$, hoặc $\overrightarrow{M} = (s_1A_2 - s_2\overrightarrow{A_2} - s_3\overrightarrow{A_3})/S$ nếu $M \in \alpha'_1$



Hình 2

Trường hợp M nằm trong các miền khác cũng được giải tuyết tương tự. Còn nếu M nằm trên một hoặc hai trong những đường thẳng A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 thì các hệ thức (I) và (I') vẫn đúng. Lúc đó sẽ có một hoặc hai trong những số s_i bằng 0.

3. Bây giờ ta hãy vận dụng các kết quả đã thu được để xác định các điểm đặc biệt trong tam giác.

a) Nếu điểm M trùng với trọng tâm G của tam giác $A_1A_2A_3$ thì rõ răng $s_1 = s_2 = s_3$ và ta thu được các kết quả quen thuộc

$$\sum \vec{GA_i} = 0 \text{ và } \vec{G} = \sum A_i/3 .$$

b) Nếu điểm M trùng với tâm I của đường tròn nội tiếp tam giác $A_1A_2A_3$ thì $s_1/a_1 = s_2/a_2 = s_3/a_3 = r/2$ trong đó $a_1 = A_2A_3$, $a_2 = A_3A_1$, $a_3 = A_1A_2$ và r là bán kính đường tròn nội tiếp. Hệ thức (I) trở thành

$$\sum a_i\vec{IA_i} = 0 \qquad (3)$$

Để ý đến các hệ thức $a_1h_1 = a_2h_2 = a_3h_3$ (h_i là đường cao hạ từ A_i) và $a_1/\sin A_1 = A_2/\sin A_2 = a_3/\sin A_3$, từ hệ thức (3) ta suy ra

$$\sum h_i^{-1}\vec{IA_i} = 0$$

$$\sum \sin A_i\vec{IA_i} = 0$$

Từ đó suy ra các hệ thức

$$\vec{I} = \sum a_i\vec{A_i}\,2p$$

(trong đó p là nửa chu vi của tam giác)

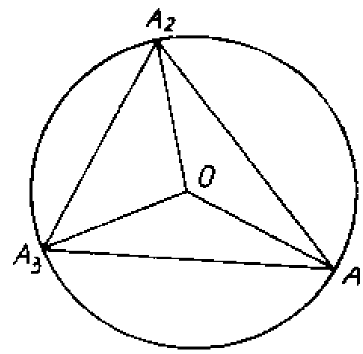
$$\vec{I} = (h_2h_3\vec{Ai} + h_3h_1\vec{A_2} + h_1h_2\vec{A_3})/$$
$$/(h_2h_3 + h_3h_1 + h_1h_2)$$

$$\vec{I} = \sum \sin A_i\vec{A_i}/\sum \sin A_i =$$
$$= \sum \sin A_i\vec{A_i}/4\,\pi\cos(A_i/2)$$

(với $\pi = \underset{i=1}{\overset{3}{\pi}}$ là kí hiệu tích).

c) Nếu điểm M trùng với tâm I_1 của đường tròn bàng tiếp tam giác $A_1A_2A_3$ nằm trong góc $\widehat{A_2A_1A_3}$ thì ta thu được các hệ thức

$$-a_1\vec{I_1A_1} + a_2\vec{I_1A_2} + a_3\vec{I_1A_3} = 0 .$$
$$-h_1^{-1}\vec{I_1A_1} + h_2^{-1}\vec{I_1A_2} + h_3^{-1}\vec{I_1A_3} = 0 .$$
$$-\sin A_1\vec{I_1A_1} + \sin A_2\vec{I_1A_2} + \sin A_3\vec{I_1A_3} = 0$$
$$\vec{I_1} = (-a_1\vec{A_1} + a_2\vec{A_2} + a_3A_3)/2(p - a_1) .$$
$$\vec{I_1} = (-h_2h_3\vec{A_1} + h_3h_1\vec{A_2} + h_1h_2\vec{A_3})/$$
$$/(-h_2h_3 + h_3h_1 + h_1h_2) .$$
$$\vec{I_1} = (-\sin A_1\vec{A_1} + \sin A_2\vec{A_2} + \sin A_3\vec{A_3})/$$
$$/(\sin A_1 + \sin A_2 + \sin A_3)$$
$$= (\sin A_1\vec{A_1} + \sin A_2\vec{A_2} + \sin A_3\vec{A_3})/$$
$$/4\cos(A_1/2)\sin(A_2/2) \times \sin(A_3/2) .$$



Hình 3

d) Nếu điểm M trùng với tâm O của đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_1A_2A_3$ (hình 3) thì

$$s_1/\sin\widehat{A_2OA_3} = s_2/\sin\widehat{A_3OA_1} = s_3/\sin\widehat{A_1OA_2}$$

hay

$$s_1/\sin 2A_1 = s_2/\sin 2A_2 = s_3/\sin 2A_3$$

Vì vậy các hệ tbức (I) và (I') lần lượt cho ta

$$\sum \sin 2A_i\vec{OA_i} = 0$$

$$\text{và } \vec{O} = \sum \sin 2A_i\vec{A_i}/\sum \sin 2A_i =$$
$$= \sum \sin 2A_i\vec{A_i}/4\,\pi\sin A_i$$

Chúng ta có thể kiểm nghiệm lại rằng các hệ thức này đúng với mọi vị trí của tâm O (ở trong, ở ngoài hay ở trên biên của tam giác), tức là đúng cho mọi tam giác (có toàn góc nhọn, có góc tù hay góc vuông).

e) Trường hợp điểm M trùng với trực tâm của tam giác xin dành cho các bạn nghiên cứu.

II - Bây giờ ta hãy mở rộng các kết quả trên vào hình học không gian

1. Trước hết xét bài toán : *Cho một điểm M nằm trong tứ diện $A_1A_2A_3A_4$. Hãy xác định các số thực k_1, k_2, k_3 và k_4 không đồng thời bằng 0 sao cho*

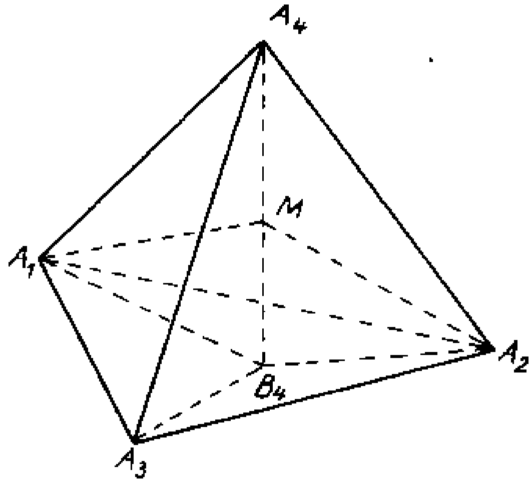
$$\sum k_i\overrightarrow{MA_i} = 0$$

(kí hiệu $\sum$ ở đây về sau sẽ được hiểu là tổng $\sum\limits_{i=1}^{4}$).

Cũng như ở mục trên, ta nhận xét rằng nghiệm của bài toán được xác định sai khác một thừa số khác 0.

Để giải bài toán này ta hãy gọi v_1, v_2, v_3, và v_4, theo thứ tự là thể tích các tứ diện $MA_2A_3A_4$, $MA_3A_4A_1$, $MA_4A_1A_2$ và $MA_1A_2A_3$.

Giả sử đường thẳng nối M với đỉnh A_i cắt mặt đối diện tại B_i ($i = 1, 2, 3, 4$).



Hình 4

Ta kí hiệu s_1, s_2, s_3, lần lượt là diện tích các tam giác $B_4A_2A_3$, $B_4A_3A_1$ và $B_4A_1A_2$. Trước hết ta hãy chứng minh rằng $s_1/s_2 = v_1/v_2$. Thật vậy, với kí hiệu V là thể tích ta có

$$s_1/s_2 = V(A_4B_4A_3A_2)/V(A_4B_4A_3A_1)$$

$$= V(MB_4A_3A_2)/V(MB_4A_3A_1)$$

$$= [V(A_4B_4A_3A_2) - V(MB_4A_3A_2)]/ .$$

$$/[V(A_4B_4A_3A_1) - V(MB_4A_3A_1)] = v_1/v_2$$

Tương tự ta cũng chứng minh được $s_2/s_3 = v_2/v_3$. Từ đó có

$$s_1/v_1 = s_2/v_2 = s_3/v_3 \qquad (4)$$

Từ hệ thức (I') ở mục I ta có

$$B_4 = (s_1\overrightarrow{A_1} + s_2\overrightarrow{A_2} + s_3\overrightarrow{A_3})/(s_1 + s_2 + s_3) \quad (5)$$

Từ các hệ thức (4) và (5) ta suy ra

$$B_4 = (v_1\overrightarrow{A_1} + v_2\overrightarrow{A_2} + v_3\overrightarrow{A_3}) / (v_1 = v_2 + v_3),$$

từ đó có

$$(v_1 + v_2 + v_3)\overrightarrow{B_4} = v_1\overrightarrow{A_1} + v_2\overrightarrow{A_2} + v_3\overrightarrow{A_3} .$$

tức là

$$(v_1 + v_2 + v_3)\overrightarrow{PB_4} = v_1\overrightarrow{PA_1} + v_2\overrightarrow{PA_2} + v_3\overrightarrow{PA_3} \quad (6)$$

trong đó P là một điểm tùy ý trong không gian

Nếu ta chọn P là điểm chia đoạn thẳng A_4B_4 theo tỉ số $-(v_1 + v_2 + v_3)/v_4$ tức là

$$\overrightarrow{PA_4} / \overrightarrow{PB_4} = -(v_1 + v_2 + v_3)/v_4$$

thì ta sẽ có $v_4\overrightarrow{PA_4} + (v_1 + v_2 + v_3)\overrightarrow{PB_4} = 0$, hay, kết hợp với (6).

$$v_1\overrightarrow{PA_1} + v_2\overrightarrow{PA_2} + v_3\overrightarrow{PA_3} + v_4\overrightarrow{PA_4} = 0 \quad (7)$$

Như vậy tức là : nếu điểm P thỏa mãn hệ thức (7) thì nó nằm trên đường thẳng A_4B_4. Nhận xét rằng các chỉ số 1, 2, 3, 4 tham gia vào hệ thức (7) với vai trò ngang nhau nên bằng cách tương tự trên ta cũng chứng minh được rằng điểm P xác định bởi hệ thức (7) nằm trên các đường thẳng A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3. Nói cách khác điểm P chính là điểm M đã cho.

Như vậy ta đã thấy rằng k_i tỉ lệ với v_i (i = 1, 2, 3, 4), và *với mọi điểm M nằm trong tứ diện $A_1A_2A_3A_4$ ta có hệ thức*

$$\sum v_i\overrightarrow{MA_i} = 0 \qquad \text{(II)}$$

Cũng với cách kí hiệu vectơ bán kính như ở mục trên : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{M}$, $\overrightarrow{OA_i} = A_i$, ta đưa được (II) về một hệ thức tương đương

$$\overrightarrow{M} = \sum v_i\overrightarrow{A_i}/V \qquad \text{(II')}$$

với V là thể tích tứ diện $A_1A_2A_3A_4$.

2. Trường hợp điểm M nằm ngoài tứ diện xin dành cho các bạn nghiên cứu. Nói chung ta thu được những hệ thức tương tự (II) và (II') trong đó một vài số v_i được thay bởi $-v_i$.

3. Ta hãy vận dụng các kết quả trên vào các điểm đặc biệt của tứ diện.

a) Nếu M trùng với trọng tâm G của tứ diện thì $v_1 = v_2 = v_3 = v_4$ và ta đi tới những hệ thức quen thuộc :

$$\sum \overrightarrow{GA_i} = 0 \text{ và } \vec{G} = \sum \overrightarrow{A_i}/4$$

b) Nếu M trùng với tâm I của mặt cầu nội tiếp tứ diện thì ta có $v_1/S_1 = v_2/S_2 = v_3/S_3 = v_4/S_4$ (với s_i là diện tích mặt đối diện với đỉnh A_i) và $S_1 h_1 = S_2 h_2 = S_3 h_3 = S_4 h_4$ (với h_i là đường cao hạ từ đỉnh A_i).

Từ đó các hệ thức (II) và (II') sẽ cho

$$\sum S_i \overrightarrow{IA_i} = 0 \ , \ \sum h_i^{-1} \overrightarrow{IA_i} = 0 \ ,$$
$$\vec{I} = \sum s_i \overrightarrow{A_i}/S$$

(S là diện tích toàn phần của tứ diện).

$$\vec{I} = \sum h_i^{-1} \overrightarrow{A_i} / \sum h_i^{-1} \ .$$

Chúng ta có thể tiếp tục áp dụng các hệ thức (II) và (II') cho các trường hợp điểm M trùng với tâm các mặt cầu bàng tiếp, ngoại tiếp... của tứ diện như đã khảo sát ở mục trên để thu được các kết quả khác.

VỀ PHƯƠNG PHÁP XUỐNG THANG

PHAN ĐỨC THÀNH

Mọi người đều biết điều khẳng định của P.Fecma rằng với n nguyên ≥ 3 phương trình

$$x^n + y^n = z^n \qquad (1)$$

không có nghiệm nguyên dương (mệnh đề đó thường được gọi là Định lí lớn Fecma).

Mặc dầu Fecma đã quả quyết rằng "ông đã tìm được cách chứng minh kì lạ định lí lớn Fecma, nhưng ông không viết vì không đủ chỗ" (ghi chú đó Fecma viết trên lề cuốn sách của Điôphăng). Cho đến nay Định lí lớn Fecma vẫn chưa được chứng minh ở dạng tổng quát (và cũng không phủ định được). Định lí lớn Fecma được chứng minh với các số mũ riêng biệt hay một nhóm số mũ, chẳng hạn với mọi $n \leq 4002$. Định lí lớn Fecma hiện nay vẫn là vấn đề rất lí thú vì việc giải quyết đòi hỏi phải sáng lập ra nhiều *phương pháp mới*.

Phương pháp chứng minh sẽ giới thiệu trong bài này (thường được gọi là phương pháp xuống thang) có cơ sở vững chắc để nhiều người nghĩ rằng đó chính là cách chứng minh mà Fecma đã dùng "nhưng ông không viết vì không đủ chỗ". Nhưng điều quan trọng muốn đề cập đến trong bài này là phương pháp xuống thang còn là phương pháp có hiệu quả để giải một lớp khá rộng những bài toán liên quan đến *phương trình nguyên*. Sau đây xin giới thiệu một số bài toán điển hình được giải bằng phương pháp xuống thang.

Bài toán 1. (Định lí lớn Fecma khi $n = 4$).

Chứng minh rằng phương trình Fecma

$$x^4 + y^4 = z^4 \qquad (2)$$

không có nghiệm nguyên $x,y,z,xyz \neq 0$.

Trước khi chứng minh định lí trên, ta sẽ chứng minh một định lí mạnh hơn, cụ thể là

Định lí. Phương trình

$$x^4 + y^4 = z^2 \qquad (3)$$

không có nghiệm nguyên $x,y,z,xyz \neq 0$.

Dễ dàng nhận thấy rằng từ sự không tồn tại nghiệm nguyên $x, y,z, xyz \neq 0$ của phương trình (3) suy ra sự không tồn tại nghiệm nguyên của phương trình (2). Thực vậy nếu $|x,y,z|$ là nghiệm của (2) thì $[x,y,z^2]$ là nghiệm của (3).

Bây giờ ta chú ý rằng nếu phương trình (3) có nghiệm nguyên $x, y, x, xyz \neq 0$ thì có thể giả thiết rằng các số x,y,z từng cặp nguyên tố cùng nhau. Thực vậy nếu x,y (thuộc nghiệm) có ước chung lớn nhất $d > 1$ thì

$$x = dx_1 \ , y = dy_1 \ , (x_1 \ , y_1) = 1.$$

Sau khi chia cả hai vế của (3) cho d^4 ta có

$$x_1^4 + y_1^4 = (z/d^2)^2 = z_1^2 \quad (4)$$

Nhưng x_1 *và* y_1 nguyên nên $z_1 = z/d^2$ cũng nguyên.

Nếu z_1 *và* y_1 có ước chung $k > 1$ thì $x_1^2 \vdots\ k$ có nghĩa là x_1 và k không thể nguyên tố cùng nhau. Như vậy chúng ta đã chứng minh được rằng nếu tồn tại nghiệm nguyên khác không của (3) thì tồn tại nghiệm nguyên khác không và nguyên tố cùng nhau. Do đó ta cần chứng minh rằng phương trình (3) không có nghiệm nguyên khác không và từng cặp nguyên tố cùng nhau. Để đơn giản cách nói ra quy ước : khi nói phương trình (3) có nghiệm thì điều đó có nghĩa là nó có nghiệm nguyên dương và từng cặp nguyên tố cùng nhau.

Dễ dàng nhận thấy rằng tất cả các nghiệm của phương trình

$$x^2 + y^2 = z^2 \quad (5)$$

nguyên dương, từng cặp nguyên tố cùng nhau thì x,y chẵn lẻ khác nhau, nến x lẻ thì nghiệm có dạng :

$$x = uv\ ,\ y = (u^2 - v^2)/2\ ,\ z = (u^2 + v^2)/2 (6)$$

trong đó u,v mọi số dương, lẻ, nguyên tố cùng nhau. Nếu đặt

$$(u + v)/2 = a\ ,\ (u - v)/2 = b \quad (7)$$

hay $$u = a + b\ ,\ v = a - b \quad (8)$$

ta có dạng khác của (6)

$$x = a^2 - b^2\ ,\ y = 2ab\ ,\ z = a^2 + b^2 \quad (9)$$

trong đó a, b – nguyên tố cùng nhau bất kì vá chẵn lẻ khác nhau vá $x > 0$.

Nếu (3) có nghiệm $[x_o , y_o , z_o]$ thì

$$(x_o^2)^2 + (y_o^2)^2 = z_o^2\ .$$

Từ đó $[x_o^2 , y_o^2 , z_o]$ là nghiệm của (5). Khi đó tồn tại a, b *($a > b$)* nguyên tố cùng nhau, chẵn lẻ khác nhau sao cho

$$x_o^2 = a^2 - b^2\ ,\ y_o^2 = 2ab\ z_o = a^2 + b^2 \quad (10)$$

Do bình phương một số lẻ chia cho 4 dư 1 nên từ

$$x_o^2 = a^2 - b^2 \quad (11)$$

suy ra a lẻ, b chẵn. Vì a lẻ, $(a, b) = 1$ nên $(a, 2b) = 1$. Khi ấy từ đẳng thức $y_o^2 = 2ba$ suy ra

$$a = t^2\ ,\ 2b = s^2 \quad (12)$$

trong đó t,s – nguyên. Từ (11) suy ra $[x_o^2 , b , a]$ là nghiệm của (5). Có nghĩa là

$$x_o^2 = m^2 - nsup2,\ b = 2mn\ ,\ a = m^2 + n^2$$

trong đó m,n – nguyên tố cùng nhau, chẵn lẻ khác nhau. Từ (12) ta có

$$mn = b/2 = (s/2)^2\ .$$

Từ đó theo tính nguyên tố cùng nhau của m và n suy ra

$$m = p^2,\ \ n = q^2 \quad (13)$$

trong đó p,q – nguyên khác không.

Vì $a = t^2$, $a = m^2 + n^2$ nên

$$p^4 + q^4 = t^2 \quad (14)$$

Nhưng $z_o = a^2 + b^2 > a^2$, do đó

$$0 < t = \sqrt{a} < \sqrt[4]{z_o} < z_o \quad (15)$$

Sau khi đặt $p = x_1$, $q = y_1$, $t = z_1$ ta thấy rằng nếu tồn tại nghiệm $[x_o , y_o , z_o]$ thì cũng tồn tại nghiệm khác $[x_1 , y_1 , z_1]$ trong đó $0 < z_1 < z_o$. Quá trình nhận được nghiệm đó của phương trình (3) có thể tiếp tục vô hạn và ta thu được dãy các nghiệm

$$[x_o, y_o, z_o], [x_1 ,\ y_1 ,\ z_1] ,...[x_n, y_n ,\ z_n],...$$

trong đó các số nguyên dương $z_o , z_1 , \dots , z_n \dots$ đơn điệu giảm

$$z_o > z_1 > \dots > z_n > \dots$$

Nhưng các số nguyên dương không thể lập nên dãy đơn điệu giảm vô hạn vì trong dãy đó không thể có quá z_o số hạng. Ta đi đến mâu thuẫn do giả thiết rằng phương trình (3) có ít ra một nghiệm nguyên x, y, z, $xyz \neq 0$. Điều đó chứng tỏ rằng phương trình (3) không có nghiệm.

Thực chất của phương pháp chứng minh mà ta đã tiến hành là : *xuất phát từ một nghiệm, xây dựng dãy vô số nghiệm có tính chất là z dương, giảm vô hạn. Ta gọi đó là phương pháp xuống thang.*

Bằng phương pháp xuống thang ta có thể chứng minh được rằng phương trình

$$x^{4n} + y^{4n} = z^{2n}$$

không có nghiệm nguyên.

Bài toán 2. Chứng minh rằng phương trình sau không có nghiệm nguyên

$$x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = xyzu \ .$$

Giải : Giả sử phương trình có nghiệm (x, y, z, u). Vì $x^2 + y^2 + z^2 + u^2$ chẵn nên trong các số x, y, z, u có một số chẵn các số lẻ (hoặc 0 hoặc 2 hoặc 4).

Nếu tất cả đều lẻ thì $x^2 + y^2 + z^2 + u^2 \vdots\ 4$ trong khi đó $2xyzu$ không chia hết cho 4. Nếu chỉ có hai số lẻ thì $x^2 + y^2 + z^2 + u^2$ không chia hết cho 4, trong khi đó $2xyzu \vdots\ 4$. Vậy tất cả các số x, y, z, u phải chẵn

$$x = 2x_1 \ , \ y = 2y_1, \ z = 2z_1 \ , \ u = 2u_1$$

Thay chúng vào phương trình đã cho ta được

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + u_1^2 = 8\, x_1 y_1 z_1 u_1 \ .$$

Cũng lí luận tương tự như trên tất cả các nghiệm của phương rình này phải chẵn

$$x_1 = 2x_2 \ , \ y_1 = 2y_2 \ , \ z_1 = 2z_2 \ , \ u_1 = 2u_2 \ .$$

Từ đó đi đến

$$x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 + u_2^2 = 32 x_2 y_2 z_2 u_2 \ .$$

Một cách tổng quát, xuất phát từ nghiệm (x, y, z, u) bằng phương pháp xuống thang ta đi đến phương trình

$$x_s^2 + y_s^2 + z_s^2 + u_s^2 = 2^{2s+1} x_s y_s z_s u_s$$

trong đó $x_k = 2x_{k+1}$, $y_k = 2y_{k+1}$, $z_k = 2z_{k+1}$, $u_k = 2u_{k+1}$ $(k \geq 1)$, tức là với mọi s tự nhiên : $x/2^s$, $y/2^s$, $z/2^s$, $u/2^s$ là các số nguyên.

Đó là điều không thể có được với các x, y, z, u tự nhiên.

Bài toán 3. Chứng minh rằng phương trình sau không có nghiệm nguyên

$$8x^4 + 4y^4 + 2z^4 = u^4$$

Giải : Giả sử phương trình có nghiệm nguyên $[x, y, z, u]$ với x có giá trị nhỏ nhất trong những giá trị có thể của nó.

Từ phương trình đã cho ta nhận thấy u chẵn $u = 2u_1$.

Thế nghiệm này vào phương trình và chia 2 ta có

$$4x^4 + 2y^4 + z^4 = 8u_1^4 \ .$$

Từ phương trình suy ra z chẵn $z = 2z_1$.

Thay vào phương trình ta đi đến

$$2x^4 + y^4 + 8z_1^4 = 4u_1^4$$

Tương tự $y = 2y_1$

$$\Rightarrow x^4 + 8y_1^4 + 4z_1^4 = 2u_1^4$$

Cuối cùng $x = 2x_1$

$$\Rightarrow 8x_1^4 + 4y_1^4 + 2z_1^4 = u_1^4$$

Vậy $[x_1, y_1, z_1, u_1]$ cũng là nghiệm của phương trình đã cho. Nhưng ở nghiệm này $x_1 < x$, mâu thuẫn với cách chọn nghiệm ban đầu có x bé nhất.

Bài toán 4. Cho một tờ giấy kẻ ô vuông. Chứng minh rằng với $n \neq 4$ không tồn tại đa giác đều n cạnh có đỉnh tại các điểm nút.

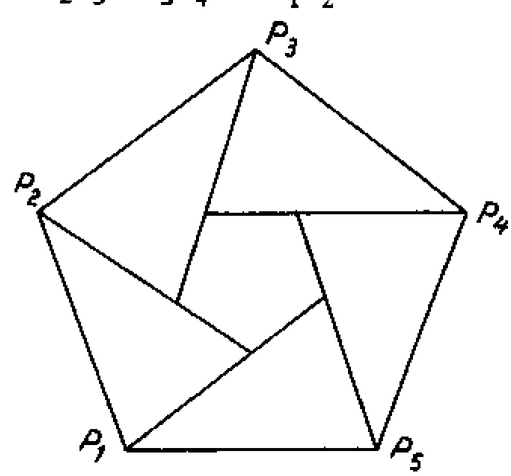
Giải : Trước hết ta chứng minh điều khẳng định khi $n = 3$ tức là không tồn tại tam giác đều có đỉnh tại các nút. Thực vậy giả sử a là cạnh của tam giác đó. Khi ấy a^2 là số nguyên theo định lí Pitago. Diện tích của tam giác này bằng $a^2\sqrt{3}/4$ là một số vô tỉ.

Mặt khác diện tích của mọi đa thức có đỉnh tại các nút là số hữu tỉ. Vậy đi đến mâu thuẫn.

Điều khẳng định trên cũng được chứng minh cho trường hợp $n = 6$ vì mọi tam giác đều có thể nội tiếp trong một lục giác đều tại các đỉnh của nó.

Bây giờ ta chứng minh điều khẳng định trên cho trường hợp $n \neq 3, 4, 6$.

Giả sử $P_1P_2 \dots P_n$ là một đa giác đều n cạnh có đỉnh ở các nút. Xuất phát từ các đỉnh $P_1, P_2, \dots, P_n$ ta đặt các vectơ tương ứng với các vectơ $\overrightarrow{P_2P_3}$, $\overrightarrow{P_3P_4}$, ... $\overrightarrow{P_1P_2}$ (xem hình vẽ).



Các điểm mới lại rơi vào các nút và lập thành đa giác đều n cạnh trong đa giác đã cho. Đối với đa giác đều n cạnh mới ta cũng làm như trên. Chú ý rằng bình phương độ dài cạnh của đa giác n cạnh là một số nguyên.

Theo cách xây dựng của ta các số nguyên đó luôn luôn giảm xuống mãi ! Đó là điều không thể được.

Phương pháp xuống thang còn cho phép ta giải một số bài toán về hình học tổ hợp. Chẳng hạn.

Bài toán 5. Có thể chia cắt một khối lập phương thành một số lập phương nhỏ khác nhau hay không ?

Giải : Trước hết ta hãy nêu lên một chú ý dĩ nhiên : nếu một hình vuông P phân chia được thành một số hữu hạn hình vuông khác nhau thì hình vuông bé nhất không dính với biên của hình vuông P.

Bây giờ ta giả thiết rằng có thể chia cắt lập phương Q thành các lập phương khác nhau Q_i và gọi P là một trong những mặt bên của Q.

Các lập phương Q_i dính với P tạo nên một sự phân chia P thành các hình vuông từng cặp khác nhau. Gọi P_1 là hình vuông bé nhất trong các hình vuông đó và Q_1 là lập phương tương ứng. P_1 không dính với biên của P do đó bị bao bọc bởi các hình vuông lớn hơn. Các lập phương tương ứng tạo thành một "cái giếng" có Q_1 nằm trong đó.

Giả sử P_1 là mặt đối diện với P_1 của lập phương Q_1 . Các lập phương dính với P'_1 tạo nên một sự phân hoạch P'_1 thành một số hình vuông khác nhau. Gọi P_2 là hình vuông bé nhất trong chúng.

Vì P_2 đặt trong P'_1 nên những lập phương bao bọc lập phương Q_2 lớn hơn Q_2 và tạo thành "giếng". Tiếp tục quá trình xây dựng đó nhận được một "cái tháp" vô hạn gồm tất cả các lập phương bé dần. Đó là điều không thể có được.

Để kết thúc bài này chúng tôi xin giới thiệu một số bài tập có thể giải bằng phương pháp xuống thang.

1. Chứng minh rằng không thể biểu diễn số 7 dưới dạng tổng bình phương của 3 số hữu tỉ.

Hướng dẫn : Bài toán đưa về việc giải phương trình nguyên

$$x^2 + y^2 + z^2 = 7u^2 .$$

2. Chứng minh rằng các phương trình

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$$

$$x^4 + 2y^4 + z^2$$

không có nghiệm nguyên dương.

3. Giải các phương trình nguyên

a) $x^3 - 3y^3 - 9z^3 = 0$,

b) $5x^3 + 11y^3 + 13z^3 = 0$.

Hướng dẫn : Bài a) Dùng tính chia hết cho 3.

Bài b) Dùng tính chia hết cho 13

4. Chứng minh rằng số có dạng 4^n $(8k - 1)$ (trong đó kn và n–tự nhiên) không thể là số chính phương và không thể biểu diễn được dưới dạng tổng của hai hay ba bình phương của các số nguyên.

GIẢI PHƯƠNG TRÌNH BẬC BỐN
$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

QUỐC TRINH

Trong chương trình đại số hiện nay ở trường phổ thông các bạn chỉ học một loại phương trình bậc bốn đặc biệt. Đó là phương trình trùng phương.

Sau đây xin giới thiệu với các bạn vài cách giải các phương trình bậc bốn dạng

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 ,$$

trong đó a, b, c, d là các số thực khác không.

§1. Với các phương trình bậc bốn, trong một số trường hợp cụ thể, nếu bạn có *cách nhìn sáng tạo, biết biến đổi hợp lí và sáng tạo*, bạn có thể giải được chúng không khó khăn gì

Ví dụ 1. Giải phương trình

$$(x^2 - a)^2 - 6x^2 + 4x + 2a = 0 \qquad (1)$$

Phương trình (1) được viết thành

$$x^4 - 2ax^2 + a^2 - 6x^2 + 4x + 2a = 0$$

hay $x^4 - (2a + 6)x^2 + 4x + a^2 + 2a = 0 \qquad (2)$

Phương trình (2) là phương trình bậc bốn đối với x mà bạn không được học cách giải.

Nhưng ta lại có thể viết phương rình (1) dưới dạng

$$a^2 - 2(x^2 - 1)a + x^4 - 6x^2 + 4x = 0 \qquad (3)$$

và xem (3) là phương trình bậc hai đối với a.

Với cách nhìn này, ta tìm được a theo x :

$$a_{1,2} = x^2 - 1 \pm \sqrt{x^4 - 2x^2 + 1 - x^4 + 6x^2 - 4x}$$

$$= x^2 - 1 \pm \sqrt{4x^2 - 4x + 1}$$

$$= x^2 - 1 \pm (2x - 1) .$$

Giải các phương trình bậc hai đối với x :

$$x^2 + 2x - a - 2 = 0 \qquad (4)$$

và $\quad x^2 - 2x - a = 0 \qquad (5)$

ta tìm được các nghiệm của (1) theo a.

Điều kiện để (4) có nghiệm là $3 + a \geqslant 0$ và các nghiệm của (4) là $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{3 + a}$

Điều kiện để (5) có nghiệm là $1 + a \geqslant 0$ và các nghiệm của (5) là

$$x_{3,4} = 1 \pm \sqrt{1 + a} .$$

Tổng kết

a		−3	−1
Phương trình (4)	Vô nghiệm	2 nghiệm	2 nghiệm
Phương trình (5)	Vô nghiệm	Vô nghiệm	2 nghiệm
Phương trình (1)	Vô nghiệm	2 nghiệm	4 nghiệm

1 nghiệm 3 nghiệm

Ví dụ 2. Giải phương trình

$$x^4 - x^3 - 5x^2 + 4x + 4 = 0 \qquad (1)$$

Phương trình (1) được viết dưới dạng :

$$x^4 - x^3 - x^2 - (4x^2 - 4x - 4) = 0$$

$$x^2(x^2 - x - 1) - 4(x^2 - x - 1) = 0$$

$$(x^2 - 4)(x^2 - x - 1) = 0 .$$

Vậy (1) có 4 nghiệm là

$$x_1 = -2 \; ; \; x_2 = 2 \; ;$$

$$x_3 = (1 - \sqrt{5})/2 \; ; \; x_4 = (1 + \sqrt{5})/2 .$$

Ví dụ 3. Giải phương trình

$$32x^4 - 48x^3 - 10^2 + 21x + 5 = 0 \qquad (1)$$

Ta viết (1) dưới dạng :

$$2(16x^4 - 24x^3 + 9x^2) - 7(4x^2 - 3x) + 5 = 0$$

và đặt

$y = 4x^2 - 3x$ thì (1) được biến đổi thành

$$2y^2 - 7y + 5 = 0 .$$

Từ đó $\quad y_1 = 1$ và $y_2 = 5/2$.

Giải tiếp các phương trình bậc hai đối với x sau đây (sau khi thay $y_1 = 1$ và $y_2 = 5/2$ vào $y = 4x^2 - 3x$) :

$$4x^2 - 3x - 1 = 0$$

và $\qquad 8x^2 - 6x - 5 = 0$,

ta sẽ được các nghiệm của (1).

Ví dụ 4. Giải phương trình

$$2x^4 + 3x^3 - 16x^2 + 3x + 2 = 0 \qquad (1)$$

Đây là phương trình bậc bốn (và là *phương trình đối xứng* vì các hệ số của những số hạng cách đều các số hạng đầu và cuối bằng nhau).

Với phương trình này ta giải như sau :

Chia hai vế của phương trình cho x^2 (khác không) thì (1) tương đương với

$$2x^2 + 3x - 16 + 3/x + 2/x^2 = 0$$

hay $\qquad 2(x^2 + 1/x^2) + 3(x + 1/x) - 16 = 0 .$

Đặt $x + 1/x = y$ thì $(x + 1/x)^2 = y^2$

hay $\qquad x^2 + 1/x^2 = y^2 - 2 .$

Phương trình (1) được biến đổi thành :

$$2(y^2 - 2) + 3y - 16 = 0 .$$

hay $\qquad 2y^2 + 3y - 20 = 0 .$

Phương trình này có nghiệm là $y_1 = -4$, $y_2 = 5/2$.

Vì vậy $x + 1/x = -4$ và $x + 1/x = 5/2$

tức là $x^2 + 4x + 1 = 0$ và $2x^2 - 5x + 2 = 0$.

Từ đó ta tìm được các nghiệm của (1) là :

$$x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{3} \, , \; x_3 = 1/2 \, , \; x_4 = 2 .$$

Như vậy, với các ví dụ 2, 3 và 4 ta giải được phương trình bậc bốn nhờ *biết biến đổi* *sáng tạo vế trái của phương trình để dẫn tới việc giải các phương trình tích và phương trình quen thuộc.*

§2. Có thể giải phương trình bậc bốn nói trên bằng cách phân tích vế trái của phương trình thành các nhân tử *bằng phương pháp hệ số bất định*.

Ví dụ 5. Giải phương trình

$$x^4 - 4x^3 - 10x^2 + 37x - 14 = 0 \qquad (1)$$

Ta thử phân tích vế trái của phương trình ra hai nhân tử bậc hai $x^2 + px + q$ và $x^2 + rx + s$, trong đó p, q, r, s là các hệ số nguyên chưa xác định.

Ta có :

$$x^4 + 4x^3 - 10x^2 + 37x - 14 =$$

$$= (x^2 + px + q)(x^2 + rx + s) \qquad (2)$$

Đồng nhất các hệ số của những số hạng cùng bậc ở hai vế của đồng nhất thức ta có hệ phương trình sau

$$\begin{cases} p + r = -4 \\ s + q + pr = -10 \\ ps + qr = 37 \\ qs = -14 \end{cases}$$

Nhờ phương trình cuối cùng của hệ này ta đoán nhận các giá trị nguyên tương ứng có thể lấy được của q và s như sau :

q	1	2	7	14	−1	−2	−7	−14
s	−14	−7	−2	1	14	7	2	1

Thử lần lượt các giá trị trên của q thì thấy với $q = 2$, $s = -7$ phương trình thứ hai và thứ ba của hệ trên cho ta hệ phương trình mới

$$\begin{cases} pr = -5 \\ -7p + 2r = 37 \end{cases}$$

mà khử p đi thì được

$$2r^2 - 37r + 35 = 0 \ .$$

Phương trình này cho nghiệm nguyên của r là 1. Nhờ thế ta suy ra $p = -5$.

Thay các giá trị p,q,r,s vừa tìm được vào (2) thì có :

$$x^4 - 4x^3 - 10x^2 + 37x - 14 =$$

$$= (x^2 - 5x + 2)(x^2 + x - 7)$$

Phương trình (1) tương ứng với

$$(x^2 - 5x + 2)(x^2 + x - 7) = 0$$

Giải phương trình tích này ta được các nghiệm sau của (1) :

$$(5 \pm \sqrt{17})/2 \ ; \ (- \ \pm \sqrt{29})/2$$

§3. Sau đây ta sẽ tìm *công thức nghiệm* của phương trình bậc bốn

$$f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \qquad (1)$$

trong đó a,b,c,d là các số thực.

Dụng ý của ta là phân tích đa thức

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$$

thành hai nhân tử bậc hai.

Dùng ẩn phụ h, ta biến đổi như sau :

$$f(x) = \left(x^2 + \frac{1}{2}ax + \frac{1}{2}h\right)^2 + bx^2 + cx + d$$

$$- \frac{1}{4}a^2x^2 - \frac{1}{4}h^2 - hx^2 - \frac{1}{2}ahx$$

$$f(x) = \left(x^2 + \frac{1}{2}ax + \frac{1}{2}h^2\right) - \left[\left(h + \frac{1}{4}a^2 - b\right)x^2 \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{2}ah - c\right)x + \left(\frac{1}{4}h^2 - d\right) \right] \qquad (2)$$

Tam thức trong dấu móc vuông có dạng

$$Ax^2 + Bx + C \ .$$

$Ax^2 + Bx + C$ có thể viết dưới dạng :

$$Ax^2 + Bx^2 + C = (Px + q)^2 \qquad (3)$$

khi và chỉ khi $B^2 - 4AC = 0$.

Từ đó ta có khả năng tính được một nghiệm thực của phương trình có ẩn phụ h.

Thật vậy từ $B^2 - 4AC = 0$

hay $\qquad 4AC - B^2 = 0$

ta có

$$4\left(h + \frac{1}{4}a^2 - b\right)\left(\frac{1}{4}h^2 - d\right) - \left(\frac{1}{2}ah - c\right)^2 = 0 \ .$$

Đây là phương trình bậc ba đối với h nên phải có ít nhất một nghiệm thực (*).

Giả sử nghiệm đó là $h = 1$.

Thế thì (2) được viết dưới dạng :

$$f(x) = \left(x^2 + \frac{1}{2}ax + \frac{1}{2}t\right)^2 - (px + q)^2 \qquad (4)$$

Vậy

$$f(x) = \left(x^2 + \frac{1}{2}ax + \frac{1}{2}t + px + q\right) \times$$

$$\times \left(x^2 + \frac{1}{2}ax + \frac{1}{2}t - px - q\right) = 0 \ .$$

(*) *Xem Quốc Trinh – Giải phương trình bậc ba – báo Toán học và Tuổi trẻ số 107.*

Từ đó

$$x^2 + \left(\frac{1}{2}a + p\right)x + \frac{1}{2}t + q = 0$$

hoặc

$$x^2 + \left(\frac{1}{2}a - p\right)x + \frac{1}{2}t - q = 0 .$$

Giải hai phương trình bậc hai này ta được tập hợp nghiệm của (1) :

$$x_{1,2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}a + p\right) \pm$$

$$\pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{1}{2}a + p\right)^2 - 4q - 2t}$$

và

$$x_{3,4} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}a - p\right) \pm$$

$$\pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}a - p\right)^2 + 4q - 2t}$$

Ví dụ 6. Giải phương trình

$$x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = 0 .$$

Dựa vào công thức (3) ta xác định được h :

$$4\left(h + \frac{29}{4}\right)\left(\frac{1}{4}h^2 - 6\right) - \left(-\frac{1}{2}h - 1\right)^2 = 0$$

tức

$$h^3 + 7h^2 - 25h - 175 = 0 .$$

Ta tìm được một nghiệm thực h của phương trình này là $h = 5$.

Dựa vào (3) và với $h = t = 5$, $a = -1$, $b = -7$, $c = 1$, $d = 6$ thì tính được $p = 7/2$, $q = -1/2$

Phương trình đã cho sẽ được diễn đạt theo (4) là :

$$\left(x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{7}{2}x - \frac{1}{2}\right)^2 = 0$$

Từ đó ta giải phương trình tích :

$$\left(x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{5}{2} + \frac{7}{2}x - \frac{1}{2}\right) \times$$

$$\times \left(x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{5}{2} - \frac{7}{2}x + \frac{1}{2}\right) = 0$$

thì được tập hợp nghiệm của phương trình đã cho là :

$$\{-1 ; -2 ; 3 ; 1\}.$$

§4. Ta lại còn có thể giải phương trình bậc bốn bằng *cách sử dụng đồ thị.*

Thật vậy, để giải phương trình bậc bốn

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \qquad (1)$$

bằng đồ thị, ta hãy đặt

$$x^2 = y - mx .$$

Phương trình (1) trở thành

$$y^2 - 2mxy + m^2x^2 + axy -$$

$$- amx^2 + bx^2 + cx + d = 0$$

Để khử được các số hạng có xy trong phương trình này thì phải có :

$-2m + a = 0$ tức $m = a/2$

Vậy nếu đặt

$$x^2 = y - mx \text{ và } m = a/2 \text{ tức}$$

$$x^2 = y - (a/2)x$$

thì (1) trở thành :

$$y^2 + (a^2/4)x^2 - (a^2/2)x^2 + bx^2 + cx + d = 0 \quad (2)$$

Thay x^2 bởi $y - (a/2)x$ và biến đổi thì (2) trở thành

$$x^2 + y^2 + (a/2 + a^3/8 - ab/2 + c)x +$$

$$+ (b - a^2/4 - 1)y + d = 0$$

Vậy phương trình (1) tương đương với hệ phương trình :

$$\begin{cases} y = x^4 + (a/2)x & (3) \\ x^2 + y^2 + (a/2 + a^3/8 - ab/2 + c)x + & \\ + (b - a^2/4 - 1)y + d = 0 & (4) \end{cases}$$

Do đó hoành độ các giao điểm của parabôn, đồ thị của (3) và của đường tròn, đồ thị của (4), là nghiệm của phương trình (1) đã cho

Nếu ta đặt $my = x^2 + (a/2)x$ $(m \neq 0)$ thì khi ấy nghiệm của phương trình (1) lại là hoành độ các giao điểm của hai parabôn.

$$y = (1/m)x^2 + (a/2m)x$$

và

$$x = m^2y^2 / (ab/2 - a^3/8 - c) +$$

$$+ m(b - a^2/4)y/(ab/2 - a^3/3 - c) + d$$

Bạn hãy vận dụng các phương pháp trên để giải các phương trình bậc bốn sau :

1) $x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x - 1 = 0$,

2) $x^4 + 2x^2 + 5x^2 + 4x - 12 = 0$,

3) $6x^4 + 5x^3 - 38x^2 + 5x + 6 = 0$,

4) $x^4 + 5x^3 - 12x^2 + 5x + 1 = 0$,

5) $x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 6x - 15 = 0$.

VỀ MỘT PHƯƠNG TRÌNH HÀM

PHAN ĐỨC CHÍNH

Tòa soạn báo Toán học tuổi trẻ có nhận được một số lời giải bài toán số 1 trong kì thi Toán ở Lúc-xem-bua :

Bài toán 1. *Hãy tìm một hàm số $f(x)$ xác định với mọi x hữu tỉ, thỏa mãn các điều kiện*

$$f(1) = 2\,,\ f(xy) = f(x)f(y) - f(x+y) + 1$$

với mọi x, y hữu tỉ.

Các lời giải gởi đến kể ra cũng đáp ứng được yêu cầu đòi hỏi, vì bài toán nói rằng : hãy tìm một hàm... Do đó chẳng cần dài dòng có thể đưa ngay ra hàm số $f(x) = x + 1$, xác định với mọi số hữu tỉ.

Nhưng đó không phải là thâm ý của bài toán ! Thực chất bài toán đòi hỏi tìm tất cả các hàm số thỏa mãn các điều kiện đã nêu. Và thực tế là $f(x) = x + 1$ (x hữu tỉ) là nghiệm duy nhất của bài toán. Rất tiếc trong các lời giải gửi đến, không có bạn nào chứng minh được tính duy nhất ấy.

Đồng chí *Phạm Quang Giám* làm việc tại tòa soạn có hỏi tôi : tại sao bài toán chỉ nói đến hàm $f(x)$ xác định với x hữu tỉ, liệu có mở rộng được cho mọi số thực x chăng ?

Bài toán 1 thuộc loại "phương trình hàm", tức là ẩn là hàm số và phải tìm tất cả các hàm số nghiệm bài toán. Phép giải một phương trình thông thường nói chung đã là việc không đơn giản, lẽ dĩ nhiên phép giải một phương trình hàm lại càng phức tạp hơn.

Trong một bài toán về phương trình hàm, hàm số phải tìm buộc phải thỏa mãn một (hay nhiều) hệ thức đại số cơ bản. Và nói chung, nếu không buộc thêm một vài điều kiện phụ, thì có vô số hàm số có dạng rất khác nhau, nghiệm bài toán. Chẳng hạn :

Bài toán 2. *Tìm tất cả các hàm $f(x)$, xác định với mọi số thực x, và thỏa mãn điều kiện*

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

với mọi x và y.

Có vô số hàm số nghiệm bài toán này. Đặc điểm chung của chúng là :

$$f(x) = Cx \text{ với mọi } x \textit{ hữu tỉ},$$

trong đó C là một hằng số tùy ý, cố định. Nhưng không thể kết luận rằng

$$f(x) = Cx \text{ với mọi số } \textit{thực } x. \qquad (1)$$

Chẳng hạn, với A và C là hai hằng số tùy ý, cố định, hàm

$$f(x) = \begin{cases} Ar + Cs \text{ nếu } x \text{ có dạng } x = r\sqrt{2} + s \\ \qquad \text{với } r,\ s \text{ hữu tỉ}, \\ 0 \text{ nếu } x \text{ không biểu diễn dưới dạng} \\ \quad \text{trên ;} \end{cases}$$

là một nghiệm của bài toán.

Để bài toán 2 chỉ có nghiệm (1), cần đặt thêm điều kiện phụ. Thông thường, đối với đa số các phương trình hàm, đó là điều kiện : *$f(x)$ liên tục.*

Khái niệm liên tục hết sức quan trong trong toán học. Nhưng khái niệm ấy rất tinh vi, nó phải dựa trên quan niệm chặt chẽ về số thực. Vì vậy, ở trình độ phổ thông, nếu có thì cũng chỉ có thể đề cập đến khái niệm liên tục một cách sơ lược.

Đến đây các bạn đã hiểu vì sao trong bài toán 1, chỉ nói đến hàm $f(x)$ xác định với x hữu tỉ. Dù sao câu hỏi của đồng chí Giám đã thôi thúc tôi : mở rộng bài toán 1 cho các số thực, không phải sử dụng khái niệm liên tục. Nói cách khác, có thể là hệ thức đại số trong bài toán 1 đã ngầm bao gồm khái niệm liên tục ?

Nghĩ sâu hơn, tôi thấy rằng đúng là như vậy. Đồng thời có thể giảm nhẹ giả thiết, tôi đã đi đến :

Bài toán 3. *Giả sử $f(x)$ là một hàm số xác định với mọi số thực x, và thỏa mãn điều kiện*

$$f(xy) = f(x)f(y) - f(x+y) + 1 \qquad (2)$$

với mọi x và y. Thế thì $f(x)$ phải là một trong hai hàm sau đây :

– hoặc $f(x) = 1$ với mọi x ;

– hoặc $f(x) = x + 1$ với mọi x.

Hệ thức (2) tuy có vẻ đơn giản, nhưng hơi khó làm việc. Đặt $g(x) = f(x) - 1$, thì bài toán 3 tương đương với.

Bài toán 3*. *Giả sử $g(x)$ là một hàm số xác định với mọi số thực x, và thỏa mãn điều kiện*

$$g(xy) = g(x)\, g(y) + g(x) + g(y)\, g(x+y) \quad (3)$$

với mọi x và y. Thế thì :

- *hoặc g(x) đồng nhất bằng 0 ;*
- *hoặc g(x) = x với mọi x.*

Lời giải. Ta chỉ việc tìm các hàm $g(x)$ không đồng nhất bằng 0, nghiệm bài toán. Phép giải chia ra nhiều bước.

1) Trong (3), cho $x = y = 0$ thì được

$g(0) = g^2(0) + 2g(0) - g(0)$,

vậy $g(0) = 0$.

2) Trong (3), cho $y = 1$, ta được

$g(x) = g(x)g(1) + g(x) + g(1) - g(x+1)$,

Vậy

$$g(x+1) = g(1)[g(x) + 1], \quad (4)$$

Nếu $g(1) = 0$, thì $g(x+1) = 0$ với mọi x, tức là $g(x)$ đồng nhất bằng 0, trái với giả thiết. Thành thử $g(4) \neq 0$. Trong (1), cho $x = -1$, thì được

$0 = g(0) = g(-1+1) = = g(1)\,[g(-1) + 1]$,

mà $g(1) \neq 0$, nên $g(-1) = -1$.

3) Trong (3) cho $y = -1$ thì được

$$g(-x) = g(-1)g(x) + g(-1) + g(x) - g(x-1)$$
$$= -1 - g(x-1).$$

Nhân cả hai vế này với $-g(1)$, thì theo (4)

$$-g(1)g(-x) = g(1)[1 + g(x-1)] = g(x) \quad (5)$$

Trong hệ thức này, cho $x = -1$, thì được

$-g^2(1) = g(-1) = -1$,

vậy $g^2(1) = 1$. Nếu $g(1) = -1$, thì (4) trở thành

$$g(x+1) = -1 - g(x),$$

do đó

$$g(x+2) = -1 - g(x+1)$$
$$= -1 + 1 + g(x) = g(x),$$

đặc biệt $g(2) = g(0) = 0$. Nhưng khi đó

$-1 = g(1) = g(2\,.\,1/2) = g(2)g(1/2) + g(2) +$
$+ g(1/2) - g(2 + 1/2) = g(1/2) - g(1/2) = 0,$

mâu thuẫn. Vậy ta phải có $g(1) = 1$, và (4), (5) trở thành.

$$g(x+1) = g(x) + 1\,.\, g(-x) = -g(x).$$

4) Lại theo (3), (và theo trên, $g(x+2) = g(x+1) + 1 = g(x) + 2$ và $g(2) = 2$

$$g(2x) = g(2)g(x) + g(2) + g(x) - g(x+2)$$
$$= 2g(x) + 2 + g(x) - g(x) - 2 = 2g(x).$$

5) Để ý rằng

$$-g(xy) = g(-xy)$$
$$= g(x)g(-y) + g(x)g(-y) - g(x-y)$$
$$= -g(x)g(y) + g(x) - g(y) - g(x-y).$$

Cộng đẳng thức này với (3), suy ra

$$g(x+y) + g(x-y) = 2g(x) = g(2x).$$

Đặt $u = x + y$, $v = x - y$, thì ta có

$$g(u) + g(v) = g(u+v)$$

đúng với mọi u, v, hay viết lại

$$g(x) + g(y) = g(x+y).$$

Khi đó từ (3), ta được

$$g(xy) = g(x)\, g(y)$$

Tóm lại, hàm $g(x)$ có các tính chất :

i) $g(f) = 1$,

ii) $g(x+y) = g(x) + g(y)$ với mọi x, y,

iii) $g(xy) = g(x)\, g(y)$ với mọi x, y.

Từ ii) bằng phép quy nạp, ta được $g(nx) = ng(x)$ với mọi n nguyên. Do đó với n nguyên, m nguyên dương

$$g(n/m) = ng(1/m)\,,\, f = g(n\,.\,1/m) = mg(1/m),$$

Vậy

$$g(n/m) = n/m$$

Từ iii) để ý rằng nếu $x \geqslant 0$ thì $g(x) \geqslant 0$ bởi vì khi đó

$$g(x) = g(\sqrt{x}\,.\,\sqrt{x}) = g^2(\sqrt{x}) \geqslant 0$$

thành thử nếu $x \geqslant y$ thì

$$0 \leqslant g(x-y) = g(x) + g(-y) = g(x) - g(y),$$

hay $g(x) \geqslant g(y)$.

Giả thử x là một số thực, tùy ý. Nếu x hữu tỉ, ta có ngay $g(x) = x$. Nếu x vô tỉ, chẳng hạn bằng cách xấp xỉ thiếu và thừa số x, ta tìm được hai dãy số hữu tỉ

$$r_1 > r_2 > \ldots > r_n > \ldots,\ \lim r_n = x,$$

$$s_1 < s_2 < \ldots < s_n > \ldots,\ \lim s_n = x,$$

Vì với mọi n

$$s_n < x < r_n$$

nên

$$g(s_n) \leqslant g(x) \leqslant g(r_n)$$

hay

$$s_n \leqslant g(x) \leqslant r_n.$$

Cho $n \to \infty$ thì $s_n \to x$, $r_n \to x$, vậy $g(x) = x$.

GIẢI TOÁN BẰNG PHƯƠNG PHÁP ĐỒ THỊ

PHAN ĐỨC CHÍNH

Phương pháp đồ thị là một phương pháp rất có hiệu lực để giải một loạt bài toán : có những bài toán cổ điển trong chương trình PTTH và những bài toán không mẫu mực trong phần thực hành ở các lớp PT chuyên toán.

Các bạn đang học ở các lớp PTTH thông thường cần chú ý đến các bài toán cổ điển nêu trong các ví dụ 1, 2, 3 dưới đây : chúng tôi đặc biệt chọn những bài toán liên quan đến việc biện luận tham số, các kiểu toán này thường gặp trong đề thi tuyển sinh vào Đại học và Cao đẳng.

Ví dụ 1. *Với những giá trị nào của m thì phương trình sau đây có nghiệm*

$$\cos^4 x + m\sin^2 x + 2 = 0 \ ?$$

Giải. Đặt $t = \cos^2 x$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ thì phương trình trên trở thành

$$t^2 + mt + m + 2 = 0 \qquad (1)$$

Như vậy ta cần xác định m để phương trình (1) có ít nhất một nghiệm t với $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Kinh nghiệm giảng dạy của tôi cho hay rằng đại đa số các bạn học sinh thường giải bài toán trên bằng cách so sánh các số 0 và 1 với các nghiệm của (1), thật là cầu kì. Có cách giải trong sáng hơn như sau :

Hiển nhiên $t = 1$ không phải là nghiệm của (1). Vì vậy (1) tương đương với $m = (t^2 + 2)/(t + 1) = t + 1 + 3/(t - 1)$,

khi đó bài toán đã cho trở thành. *Tìm m để đường thẳng y = m cắt đồ thị của hàm*

$$y = t + 1 + 3/(t - 1) \qquad (2)$$

tại ít nhất một điểm với hoành độ $0 \leqslant t < 1$.

Để giải, không cần vẽ đồ thị hàm (2), ta chỉ việc lập bảng biến thiên của nó như sau

x	$-\infty$		$1-\sqrt{3}$		1		$1+\sqrt{3}$		$+\infty$
y'		+	0	−	‖	−	0	+	
y	$-\infty$	↗		↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘		↗	$+\infty$

Như vậy trong khoảng (0, 1), hàm (2) là nghịch biến, và trong khoảng đó nó lấy mọi giá trị $y \leqslant -2$. Thành thử đáp số của bài toán là $m \leqslant -2$.

Ví dụ 2. *Với những giá trị nào của a thì bất phương trình* $2x + 1 \geqslant a(\sqrt{1 - x} + 1)$ *có nghiệm ?*

Giải. Đặt $t = \sqrt{1 - x}$ $(t \geqslant 0)$ thì $x = 1 - t^2$, bất phương trình trên trở thành

$$-2t^2 + 3 \geqslant a\ (t + 1).$$

Ta chỉ xét các $t \geqslant 0$, vậy nó tương đương với $(-2t^2 + 3)/(t + 1) \geqslant a$,

và bài toán trở thành : *xác định a để hàm số* $y = (-2t^2 + 3)/(t + 1) = -2t + 2 + 1/(t + 1)$ (3) *có phần đồ thị ứng với* $t \geqslant 0$ *nằm trên đường thẳng* $y = a$.

Hàm (3) có đạo hàm

$$y' = -2 - 1/(t + 1)^2 < 0$$

vậy nó nghịch biến trên các khoảng $(-\infty\ ; -1)$ $(-1\ ; +\infty)$. Với $t = 0$, ta có $y = 3$, từ đó suy ra kết quả phải tìm : $a \leqslant 3$.

Ví dụ 3. *Tìm các giá trị m sao cho phương trình*

$$x + \sqrt{4x^2 - 1} = mx + 1/2$$

có đúng hai nghiệm

Giải. Ta phải xác định m sao đường thẳng D có phương trình

$$y = mx + 1/2.$$

cắt đồ thị của hàm số

$$y = x + \sqrt{4x^2 - 1} \qquad (4)$$

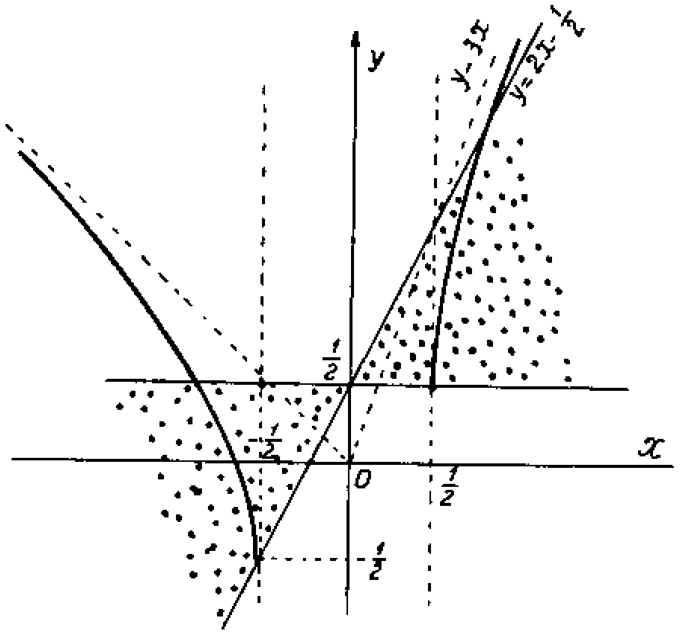
tại hai điểm. Đường thẳng D có hệ số góc m và đi qua điểm (0 ; 1/2). Đồ thị của hàm (4) có tiệm cận xiên về bên phải $y = 3x$ và tiệm cận xiên về bên trái $y = -x$. Hàm (4) được xác định với $|x| \geqslant 1/2$ và có đạo hàm

$$y' = 1 + 4x/\sqrt{4x^2 - 1}$$

Vậy hiển nhiên $y' > 0$ khi $x > 1/2$. Với $x < -1/2$, để ý rằng $|2x| > \sqrt{4x^2 - 1}$, vậy $y' < 0$ từ đó suy ra bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
y'		−	‖		‖	+	
y	$+\infty$	↘	$-\frac{1}{2}$ ‖		‖ $\frac{1}{2}$	↗	$+\infty$

dưa vào đó, ta vẽ được đồ thị



Nghiên cứu đồ thị và các tiệm cận xiên của nó, ta thấy rằng yêu cầu của bài toán được thỏa mãn nếu đường thẳng D nằm trong miền chấm (hình vẽ), giới hạn bởi các đường thẳng $y = 1/2$ và $y = 2x + 1/2$, vậy các giá trị phải tìm của m là

$$0 \leqslant m \leqslant 2.$$

Sau đây là hai ví dụ nữa cho các bạn chuyên toán.

Ví dụ 4. *a, b, c, h là bốn số dương cho trước ; x, y, z là ba số thực thay đổi, ràng buộc bởi điều kiện*

$ax + by + cz = k$ (k cố định).

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$S = a\sqrt{h^2 + x^2} + b\sqrt{h^2 + y^2} + c\sqrt{h^2 + z^2}$$

(Bài toán này nảy sinh ra từ một bài toán hình học của tác giả đã đăng trong báo TH và TT số 5 + 6–1980).

Giải. Trên mặt phẳng tọa độ OXY, xét các điểm

$$A(ah\ ;\ ax),\ B((a+b)h\ ;\ ax+by).$$

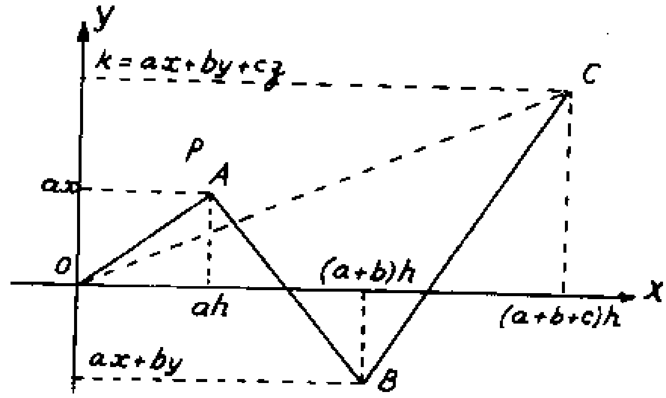
$$C\ ((a+b+c)h\ ;\ ax+by+cz).$$

Có thể thấy ngay rằng

$$OA = a\sqrt{h^2 + x^2},\ AB = b\sqrt{h^2 + y^2}.$$

$$BC = c\sqrt{h^2 + z^2}.$$

Vì vậy S là độ dài đường gấp khúc $OABC$, S nhỏ nhất nếu đường gấp khúc ấy trùng với đoạn thẳng OC (do C là điểm cố định), điều này xảy ra khi



$$\frac{ax}{ah} = \frac{ax+by}{ah+bh} = \frac{ax+by+cz}{ah+bh+ch}$$

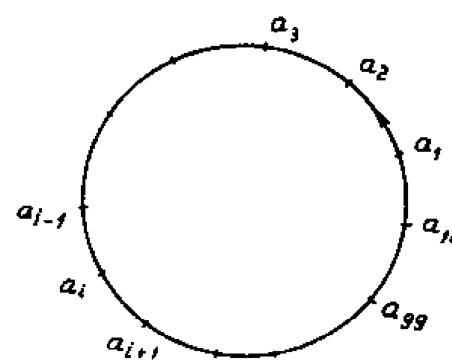
tức là

$$x = y = z = k/(a+b+c).$$

Khi đó

$$S_{\min} = OC = \sqrt{k^2 + (a+b+c)^2h^2}$$

Ví dụ 5. *100 số thực* $a_1, a_2, \dots a_{100}$ có tổng bằng 0. Người ta viết các số ấy theo thứ tự trên một đường tròn định hướng (hình vẽ).



Chứng minh rằng tồn tại một chỉ số i sao cho tất cả các tổng

$$S_1 = a_{i+1}$$

$$S_2 = a_{i+1} + a_{i+2}$$

$$S_3 = a_{i+1} + a_{i+2} + a_{i+3}$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$S_{99} = a_{i+1} + a_{i+2} + \dots + a_{i-1}$$

$$S_{100} = a_{i+1} + a_{i+2} + \dots + a_{i-1} + a$$

đều không âm.

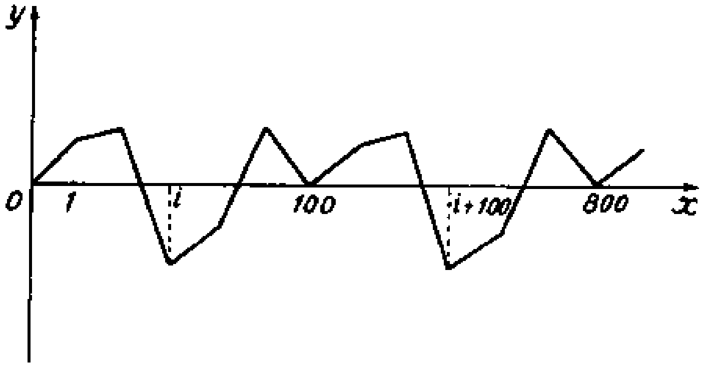
Giải. Nếu n là một số tự nhiên $\geqslant 100$; thì $n = 100m + r$ với $0 \leqslant r \leqslant 99$, và ta đặt

$$a_n = a_r \text{ nếu } r > 0,\ a_n = a_{100} \text{ nếu } r = 0$$

Chẳng hạn $a_{172} = a_{72}$, $a_{200} = a_{100}$. Với k là một nguyên không âm, ta đặt

$$f(0) = 0,\ f(k) = a_1 + a_2 + \dots + a_k.$$

Trên mặt phẳng tọa độ, xem các điểm A_k $(k ; f(k))$ $(k = 0, 1,...)$ Nối các điểm Ak với



A_{k+1} $(k = 0, 1,...)$, ta được một đường gấp khúc, tuần hoàn với chu kì 100 (hình vẽ). Xét một chu kì, chẳng hạn từ 0 đến 100. Gọi i là giá trị sao cho $f(i)$ nhỏ nhất : đồ thị của $f(x)$ chứng tỏ rằng đó là chỉ số i phải tìm (có thể có nhiều chỉ số i như vậy).

Hiển nhiên trong ví dụ này, cũng như cả trong 4 ví dụ trên, có thể đưa ra một lời giải không dùng đến đồ thị. Nhưng các lời giải đã nêu dùng phương pháp đồ thị chắc chắn có đủ sức thuyết phục để các bạn tự rút ra kết luận cần thiết.

MỘT PHƯƠNG PHÁP TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT

LÊ THỐNG NHẤT

Trong số báo 113, chúng ta đã bàn về một số phương pháp tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số. Ở bài này, tôi muốn trao đổi thêm về phương pháp dựa vào miền giá trị của hàm số.

Trước hết ta nhắc lại khái niệm miền giá trị của hàm số là gì ? Cho hàm số $y = f(x)$, miền giá trị của hàm số là tất cả các giá trị của y sao cho tồn tại x mà $y = f(x)$. Nếu hàm số cho bởi công thức giải tích thì ta có thể coi đẳng thức $y = f(x)$ là phương trình đối với ẩn x, còn tham số là y. Vậy trong trường hợp này để tìm miền giá trị của y, ta làm bài toán : "Tìm các giá trị của tham số y sao cho phương trình $y = f(x)$ đối với ẩn x, có nghiệm".

Thí dụ 1. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số

$$y = \frac{x+1}{x^2+x+1}.$$

Giải : Ta tìm miền giá trị bằng cách tìm giá trị của y để phương trình $y = \dfrac{x+1}{x^2+x+1}$ có nghiệm đối với ẩn x. Do $x^2 + x + 1 \neq 0$ nên phương trình trên tương đương :

$$yx^2 + (y-1)x + y - 1 = 0 \qquad (1)$$

Khi $y = 0$ ta có phương trình : $-x - 1 = 0$, phương trình có nghiệm $x = -1$. Vậy $y = 0$ là một trong các giá trị cần tìm. (Ở bài báo số 113 bỏ sót trường hợp này ở ví dụ 4).

Khi $y \neq 0$ ta có (1) là phương trình bậc 2, muốn có nghiệm thì :

$\Delta = (y-1)^2 - 4y(y-1) \geq 0$

$\Leftrightarrow (y-1)(y-1-4y) \geq 0$

$\Leftrightarrow (y-1)(-1-3y) \geq 0$

$\Leftrightarrow -1/3 \leq y \leq 1 ; y \neq 0.$

Kết hợp cả $y = 0$ và $y \neq 0$ đã xét ta có đáp số

$$-1/3 \leq y \leq 1.$$

Vậy giá trị lớn nhất của y là 1 và nhỏ nhất của y là $-1/3$.

Ở thí dụ 1, ta mới đưa về biện luận phương trình đơn giản. Ta xét thí dụ phức tạp hơn :

Thí dụ 2. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số :

$$y = \frac{-4^{|x|} + 2^{|x|+2}}{4^{|x|} - 2^{|x|+1} + 2}.$$

Giải. Ta hãy tìm y để phương trình :

$$y = \frac{-4^{|x|} + 2^{|x|+2}}{4^{|x|} - 2^{|x|+1} + 2}$$

có nghiệm. Đặt $X = 2^{|x|}$ ta thấy do $|x| \geqslant 1$ nên $X = 2^{|x|} \geqslant 1$. Phương trình trên có nghiệm khi và chỉ khi phương trình :

$$y = \frac{-X^2 + 4X}{X^2 + 2X + 2}$$

có ít nhất một nghiệm thỏa mãn $X \geqslant 1$.

Do $X^2 - 2X + 2 \neq 0$ nên phương trình tương đương với

$$(y + 1)X^2 - 2(y + 2)X + 2y = 0. \qquad (2)$$

Với $y = -1$ ta có : $-2X - 2 = 0$, không thỏa mãn $X \geqslant 1$. Vậy $y = -1$ không nằm trong những giá trị cần tìm. Với $y \neq -1$ ta có (2) là phương trình bậc (2) : cần phải biện luận và so sánh nghiệm của (2) với số 1. Ta có :

$$\Delta' = -y^2 + 2y + 4.$$

$$af(1) = (y + 1)(y - 3)$$

$$1 - S/2 = -f/(y + 1)$$

Ta có bảng sau :

y	Δ'	$af(1)$	$1 - S/2$	Nghiệm của (2)
	−	+	+	Vô nghiệm
$1 - \sqrt{5}$	0	+	+	$x_1 = x_2 = -(1 + \sqrt{5}) > 1$
	+	+	+	$x_1 < x_2 < 1$
-1		0	=	$x = -1$
	+	−	−	$x_1 < 1 < x_2$
3	+	0	−	$x_1 = 1 < x_2 = S/2$
	+	+	−	$1 < x_1 < x_2$
$1 + \sqrt{5}$	0	+	−	$x_1 = x_2 = \sqrt{5} - 1 > 1$
	−	+	−	Vô nghiệm

Nhìn vào bảng ta thấy với $-1 < y \leqslant 1 + \sqrt{5}$ thì phương trình (2) có nghiệm thỏa mãn X.

Từ đó ta kết luận $y_{max} = 1 + \sqrt{5}$ còn y_{min} không tồn tại.

Như vậy phương pháp này còn chứng tỏ được sự tồn tại hay không của các giá trị lớn nhất và nhỏ nhất.

Bây giờ ta chuyển sang làm với những hàm số không chỉ là 1 đối số. Chẳng hạn ta xét ví dụ 12 của bài đã nói "Cho $x^2 + y^2 = 1$. Ta có giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của $S = x + y$". Đây là nội dung của bài thi khối A, vào trường Đại học năm 1970. Có rất nhiều lời giải cho bài này, nay xin trình bày 1 lời giải chưa từng giới thiệu.

Ta coi S là tham số, ta có hệ

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x + y = S \end{cases}$$

Miền giá trị của S chính là những giá trị của làm cho hệ trên có nghiệm. Ta có :

$$(x + y)^2 - 2xy = x^2 + y^2 = 1$$

Vậy : $xy = (S^2 - 1)/2$

Do đó x, y là nghiệm của phương trình (có định lý Vi-ét)

$$X^2 - SX + \frac{S^2 - 1}{2} = 0.$$

Hệ (3) có nghiệm $\Leftrightarrow$ (4) có nghiệm, hay

$\Delta = S^2 - 2(S^2 - 1) \geqslant 0$

$\Leftrightarrow 2 - S^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow 2 \geqslant S^2$

$\Leftrightarrow \sqrt{2} \geqslant S \geqslant -\sqrt{2}$.

Vậy $S_{max} = \sqrt{2}$; $S_{min} = -\sqrt{2}$.

Ta có thể giải ví dụ 1 của bài viết số 113 bằng cách này. Bây giờ ta xét ví dụ phức tạp hơn :

Thí dụ 3. Biết : $\sin^2 x + \sin y = 1/2$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của

$$S = tg^2 x + tg^2 y.$$

Giải : Ta tìm $S \geqslant 0$ để

$$\begin{cases} \sin^2 x + \sin^2 y = 1/2 \\ tg^2 x + tg^2 y = S \end{cases} \quad (5) \text{ có nghiệm.}$$

Hệ (5) tương đương với $\begin{cases} \cos^2 x + \cos^2 y = 3/2 \\ 1/\cos^2 x + 1/\cos^2 y = S + 2 \end{cases}$

Từ đó suy ra :

$(\cos^2x + \cos^2y)/(\cos^2x \cos^2y) = S + 2.$

hay $\quad \cos^2x \cos^2y = \dfrac{3}{2(S+2)}$

Vậy $\cos^2x$, $\cos^2y$ là nghiệm của phương trình :

$$X^2 - (3/2)X + \frac{3}{2(S+2)} = 0 \qquad (6)$$

Do $0 \leqslant \cos^2x \leqslant 1$; $0 \leqslant \cos^2y \leqslant 1$, nên để (5) có nghiệm thì (6) phải có tất cả các nghiệm thỏa mãn $0 \leqslant X \leqslant 1$. Ta có hệ điều kiện

$$\begin{cases} \Delta = 9 - 24/(S+2) \geqslant 0 \\ af(0) = 3/(S+2) > 0 \\ -b/2a - 0 > 0 \\ af(1) = 3/(S+2) - 1 \geqslant 0 \\ -b/2a - 1 < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (9S-6)/(S+2) \geqslant 0 \\ S \geqslant -2 \\ (-S+1)/(S+2) \geqslant 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} S \geqslant 2/3 \\ S \leqslant -2 \end{array}\right. \\ S > -2 \\ -2 \leqslant S \leqslant 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2/3 \leqslant S \leqslant 1.$$

Vậy $S_{max} = 1$; $S_{min} = 2/3$.

Cuối cùng các bạn hãy tự làm các bài tập

Bài 1 : Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất

1) $y = \dfrac{\sin^2x + 2\cos x + 1}{\sin^2x - 2\cos x + 2}$;

2) $y = \dfrac{1 - 3 . 4^{|x|}}{4^{|x|} + 2^{|x|+1} + 1}$.

Bài 2 : Biết : $\cos x + \cos y = 1$. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất

$$S = \cos(x/2) + \cos(y/2).$$

MỘT VÀI SUY DIỄN TỪ MỘT BẤT ĐẲNG THỨC ĐƠN GIẢN

NGUYỄN MINH HÀ

Trong tam giác có một kết quả rất quen thuộc.

Bài toán 1 : Cho ΔABC chứng minh rằng :

$$\cos A + \cos B + \cos C \leqslant 3/2 \qquad (1)$$

Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi ΔABC đều (1) được chứng minh khá đơn giản nhờ phương pháp tam thức bậc hai. Trong bài viết này tôi xin nêu lên một vài suy diễn từ (1).

Bài toán 2 : Cho ΔABC với mọi x, y, z không đồng thời bằng không. Chứng minh rằng :

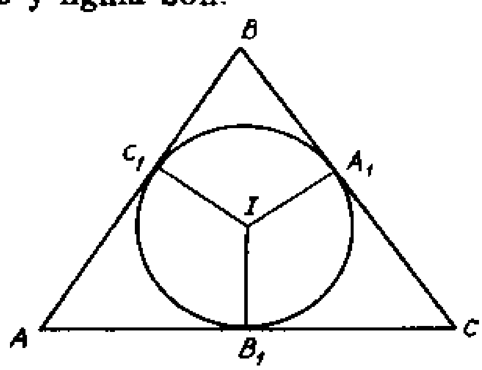
$$yz\cos A + zx\cos B + xy\cos C \leqslant (x^2 + y^2 + z^2)/2 \quad (2)$$

đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi

$x/\sin A = y/\sin B = z/\sin C$

$\Leftrightarrow x/a = y/b = z/c$

(2) vẫn có thể được chứng minh nhờ phương pháp tam thức bậc hai, nhưng ở đây tôi xin nêu ra một phương pháp chứng minh khác có ý nghĩa hơn.



Không mất tính tổng quát giả sử bán kính đường tròn nội tiếp ΔABC bằng 1 : Ta kí hiệu I là tâm đường tròn nội tiếp A_1, B_1, C_1 theo thứ tự là các tiếp điểm của đường tròn với các cạnh BC, CA, AB. Ta có ngay

$$0 \leqslant (x\vec{IA}_1 + y\vec{IB}_1 + z\vec{IC}_1)^2$$
$$= x^2 + y^2 + z^2 + 2yz\cos(\pi - A) +$$
$$+ 2zx\cos(\pi - B) + 2xy\cos(\pi - C) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow yz\cos A + zx\cos B + xy\cos C \leqslant$$
$$\leqslant (x^2 + y^2 + z^2)/2 \qquad (2)$$
dễ thấy đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi
$$x\vec{IA}_1 + y\vec{IB}_1 + z\vec{IC}_1 = 0$$

Gọi f là phép quay véctơ góc $\pi/2$ theo chiều kim đồng hồ ta có :
$$f(x\vec{IA}_1 + y\vec{IB}_1 + z\vec{IC}_1) =$$
$$= xf(\vec{IA}_1) + yf(\vec{IB}_1) + zf(\vec{IC}_1)$$
$$= x\,.\,\vec{CB}/CB + y\vec{BA}/BA + z\vec{AC}/AC$$
$$= (x/a)\vec{CB} + (y/b)\vec{BA} + (z/c)\vec{AC} \; (*)$$
Mặt khác ta lại có $\vec{CB} + \vec{BA} + \vec{AC} = 0 \; (**)$

Vậy $x\vec{IA}_1 + y\vec{IB}_1 + z\vec{IC}_1 = 0$
$$\Leftrightarrow f(x\vec{IA}_1 + y\vec{IB}_1 + z\vec{IC}_1) = 0$$
$$\Leftrightarrow (x/a)\vec{CB} + (y/b)\vec{BA} + (z/c)\vec{CA} = 0$$
$$\Leftrightarrow x/a = y/b = z/c$$
(điều này suy ra từ (*) và (**))

Tóm lại (2) xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi
$$x/a = y/b = z/c$$
$$\Leftrightarrow x/\sin A = y/\sin B = z/\sin C$$
"Song song" với (1) trong ΔABC có một kết quả khác cũng rất quen thuộc.

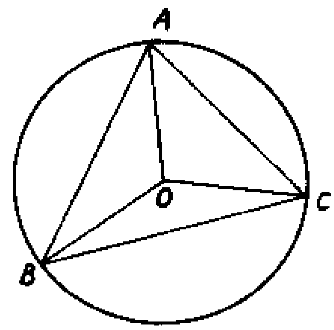
Bài toán 3 : Cho ΔABC chứng minh rằng :
$$\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C \geqslant -3/2 \qquad (3)$$

Việc chứng minh (3) không khó khăn gì. Ở đây tôi xin nêu ra và chứng minh kết quả tổng quát của (3).

Bài toán 4 : Cho ΔABC với mọi x, y, z không đồng thời bằng không chứng minh rằng :
$$yz\cos 2A + zx\cos 2B + xy\cos 2C \geqslant$$
$$-(x^2 + y^2 + z^2)/2 \qquad (4)$$
đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $\forall\, k$:
$$\begin{cases} x = k\sin 2A \\ y = k\sin 2B \\ z = k\sin 2C \end{cases}$$

Để chứng minh (4) ta lại sử dụng phương pháp đã dùng để chứng minh (2).

Không mất tính tổng quát giả sử bán kính vòng tròn tâm O ngoại tiếp ΔABC bằng 1 ta có ngay :
$$0 \leqslant (x\vec{OA} + y\vec{OB} + z\vec{OC})^2 =$$
$$= x^2 + y^2 + z^2 + 2yz\cos 2A +$$
$$+ 2zx\cos 2B + 2xy\cos 2C$$
$$\Rightarrow yz\cos 2A + zx\cos 2B + xy\cos 2C \geqslant$$
$$\geqslant -(x^2 + y^2 + z^2)/2 \qquad (4)$$



Dễ thấy đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi
$$x\vec{OA} + y\vec{OB} + z\vec{OC} = \vec{0} \qquad (*)$$
Mặt khác ta lại có :
$$\sin 2A.\vec{OA} + \sin 2B.\vec{OB} + \sin 2C.OC = \vec{O} \; (**)$$
(Việc chứng minh (**) không khó khăn gì)

Từ (*) và (**) $\Rightarrow \exists\, k$: (do $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}$ độc lập tuyến tính).
$$\begin{cases} x = k\sin 2A \\ y = k\sin 2B \\ z = k\sin 2C \end{cases}$$

Chú ý rằng ở trên ta vẽ hình và chứng minh (4) khi ΔABC nhọn. Nếu ΔABC vuông hoặc tù, chứng minh trên vẫn có hiệu lực.

Trong không gian đối với tứ diện cũng có kết quả tương tự như (1)

Bài toán 5 : Cho tứ diện $ABCD$ đặt các góc nhị diện cạnh AB, AC, AD ; CD ; DB ; BC là α_1, α_2, α_3, α_4, α_5, α_6. Chứng minh rằng :
$$\sum_{i=1}^{6} \cos\alpha_1 \leqslant 2 \qquad (5)$$

Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi tứ diện $ABCD$ gần đều.

Không mất tính tổng quát giả sử bán kính mặt cầu nội tiếp $ABCD$ bằng 1. Ta kí hiệu I là tâm mặt cầu nội tiếp A_1, B_1, C_1, D_1 là tiếp điểm của mặt cầu với các mặt BCD ; CDA ; DAB ; ABC ta có ngay :

$$0 \leq (\vec{IA}_1 + \vec{IB}_1 + \vec{IC}_1 + \vec{ID}_1)^2$$

$$= 4 + \sum_{i=1}^{6} 2\cos(\pi - \alpha_1)$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{6} \cos\alpha_i \leq 2 \qquad (5)$$

bây giờ ta chứng minh điều kiện cần và đủ để xảy ra đẳng thức.

Nếu đẳng thức xảy ra ở (5) thì :

$$\vec{IA}_1 + \vec{IB}_1 + \vec{IC}_1 + \vec{ID}_1 = \vec{0} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \vec{IA}_1 + \vec{IB}_1 = -(\vec{IC}_1 + \vec{ID}_1)$ bình phương hai vế $\Rightarrow 2 + \cos\alpha_1 = 2 + \cos\alpha_4 \Rightarrow \cos\alpha = \cos\alpha_4 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_4$. Tương tự ta có $\alpha_2 = \alpha_5$, $\alpha_3 = \alpha_6$. Tứ diện ABCD có các nhị diện đối, bằng nhau $\Rightarrow ABCD$ gần đều.

Nếu $ABCD$ gần đều thì I chính là trọng tâm $ABCD$ vì vai trò của I đối với các mặt như nhau nên ta có các biểu diễn :

$$\vec{IA}_1 = x\vec{IB} + y\vec{IC} + z\vec{ID}$$

$$\vec{IB}_1 = x\vec{IA} + y\vec{ID} + z\vec{IC}$$

$$\vec{IC}_1 = x\vec{ID} + y\vec{IA} + z\vec{IB}$$

$$\vec{ID}_1 = x\vec{IC} + y\vec{IB} + z\vec{IA}$$

(x, y, z là ba số thích hợp nào đó) cộng các đẳng thức trên ta có :

$$\vec{IA}_1 = \vec{IB}_1 + \vec{IC}_1 + \vec{ID}_1 =$$

$$= x(\vec{IA} + \vec{IB} + \vec{IC} + \vec{ID})$$

$$+ y(\vec{IA} + \vec{IB} + \vec{IC} + \vec{ID})$$

$$+ z(\vec{IA} + \vec{IB} + \vec{IC} + \vec{ID}) = \vec{O}$$

$\Rightarrow$ (5) xảy ra đẳng thức

Kết quả sau đây là sự tổng quát của (5)

Bài toán 6 : Cho tứ diện $ABCD$. Với các kí hiệu như bài toán 5 : khi mọi x, y, z, t không đồng thời bằng không. Chứng minh rằng :

$$z + \cos\alpha_1 + tg\cos\alpha_2 + yz\cos\alpha_3 + xy\cos\alpha_4 + xz\cos\alpha_5 + xt\cos\alpha_3 \leq (x^2 + y^2 + z^2 + t^2)/2 \quad (6)$$

Đẳng thức xảy ra

$$\Leftrightarrow x/S_{\Delta BCD} = y/S_{\Delta CDA} = z/S_{\Delta DAB} = t/S_{\Delta ABC}$$

Việc chứng minh (6) cũng giống như chứng minh (5). Ta coi bán kính cầu nội tiếp bằng 1 và xét $(x\vec{IA}_1 + y\vec{IB}_1 + z\vec{IC}_1 + t\vec{ID}_1)^2 \geq 0$

nhưng khi tìm điều kiện xảy ra đẳng thức ta phải sử dụng kết quả sau :

$$S_{\Delta BCD} . \vec{IA}_1 + S_{\Delta CDA} . \vec{IB}_1 +$$

$$+ S_{\Delta DAB} . \vec{IC}_1 + S_{\Delta ABC} . \vec{ID}_1 = \vec{O}$$

Kết quả trên được chứng minh rất ngắn nhờ khái niệm tích có hướng của hai véctơ. Nhưng nếu không dùng khái niệm đó ta vẫn có thể chứng minh được.

Để kết thúc bài viết này tôi xin trở lại (1) với nhận xét sau : Người ta có thể chứng minh (1) (tuy hơi dài) nhờ hai kết quả :

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + r/R$$

$$r/R \leq 1/2$$

Phải chăng trong không gian cũng có một cái gì đó na ná như hai kết quả trên mà từ đó ta có thể suy ra (5).

SỬ DỤNG GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ BÉ NHẤT TRONG CHỨNG MINH

LÊ ĐÌNH THỊNH

Trong các kì thi vào Đại học thường gặp các bài toán mà nếu dùng giá trị lớn nhất và giá trị bé nhất của hàm số y (gọi tắt là y_{max} và y_{min}) thì cách giải bài toán sẽ trở nên đơn giản hơn nhiều.

Thí dụ 1. (Đề thi Đại học A – B – D/1985).

Tìm m để cho hàm số

$$y = 2mx - 2\cos^2 x - m\sin x\cos x + 1/4 \times \cos^2 2x$$

luôn luôn đồng biến.

Giải. Hàm số xác định với mọi x

$$y' = 2m + 2\sin 2x - m\cos 2x - 1/2\sin 4x =$$

$$= (m + \sin 2x)(2 - \cos 2x).$$

Để hàm số luôn luôn đồng biến, cần và đủ là $y' \geqslant 0 \ \forall x$. Vì $2 - \cos 2x > 0 \ \forall x$, nên chỉ cần tìm m để $g(x) = m + \sin 2x \geqslant 0 \ \forall x$ là đủ. Muốn vậy $g_{min} = m - 1 \geqslant 0$ hay $m \geqslant 1$.

Thí dụ 2. (Đề thi Đại học A/1978). Hãy tìm tất cả các giá trị của m để $\cos 2x + m\cos x + 4 \geqslant 0 \ \forall x$

Giải. Gọi vế trái là y và đặt $t = \cos x$,

$-1 \leqslant t \leqslant 1$, ta được hàm số xác định với mọi $t : -1 \leqslant t \leqslant 1$; $y = 2t^2 + mt + 2$, $-1 \leqslant t \leqslant 1$; $y' = 4t + m = 0$ khi $t = -m/4$. Vậy để $y \geqslant 0 \ \forall x$ chỉ cần $y_{min} \geqslant 0 \ \forall t$: $-1 \leqslant t \leqslant 1$ là đủ. Ta có :

1) $-m/4 < -1$, $m > 4$ thì $y_{min} = y(-1) = 4 - m \geqslant 0 \Leftrightarrow m \leqslant 4$, mâu thuẫn với $m > 4$.

2) $-m/4 > 1$, $m < -4$ thì $y_{min} = y(1) = 4 + m \geqslant 0$

$\Leftrightarrow m \geqslant -4$, mâu thuẫn với $m < -4$.

3) $-1 \leqslant -m/4 \leqslant 1$, $-4 \leqslant m \leqslant 4$ thì $y_{min} = y(-m/4) = 2 - m^2/8 \geqslant 0 \Rightarrow m^2 \leqslant 16 \Rightarrow -4 \leqslant m \leqslant 4$.

Vậy để $y \geqslant 0 \ \forall x$ thì $-4 \leqslant m \leqslant 4$.

Thí dụ 3. Chứng minh rằng

$4\cos 8x + 8\cos 4x + \cos x \geqslant -7 \ \forall x$.

Giải. Xét $y = 4\cos 8x + 8\cos 4x$. Đặt $t = \cos 4x$, $-1 \leqslant t \leqslant 1$, khi đó $y = 8t^2 + 8t - 4$, $-1 \leqslant t \leqslant 1$.

Đây là parabôn quay bề lõm về phía trên, có đỉnh $t = -1/2$, nên $y_{min} = y(-1/2) = -6$.

Vậy $y = 4\cos 8x + 8\cos 4x \geqslant y_{min} = -6$. $\forall x$, và $4\cos 8x + 8\cos 4x + \cos x \geqslant -6 - 1 = -7 \ \forall x$

Thí dụ 4. Với m nào thì hàm số

$$y = 1/3x^3 + m(x + 1)$$

đồng biến khi $x > 5$.

Giải. Ta có $y' = x^2 + m$. Để hàm số đồng biến khi $x > 5$, cần và đủ là $y' \geqslant 0 \ \forall x > 5$. Muốn vậy $y'_{min} \geqslant 0$ khi $x > 5$ là đủ. Vì y' là parapôn quay bề lõm về phía trên, có đỉnh điểm $x = 0$, nên y' đồng biến khi $x > 5$ $y'_{min} = y'$ 5) $25 + m \geqslant 0 \Rightarrow m \geqslant -25$.

Thí dụ 5. Giải phương trình

$(2 + \sin x)(6 - \sin x) = 16.\ 10$? ? ?

Giải. Gọi vế trái là g và đặt $t = \sin x$, $-1 \leqslant t \leqslant 1$ ta được $g = (2 + t)(6 - t) = -t^2 + 4t + 12$. Đây là một parabôn quay bề lõm về phía dưới, có đỉnh tại điểm $t = 2$, nằm trên đoạn $-1 \leqslant t \leqslant 1$ hàm g đồng biến, do $g_{max} = g$

(1) = 15. Vậy $g \leqslant g_{max} = 15 \ \forall x$. Còn y phải là hàm đồng biến, đạt giá trị bé nhất 16 khi $|y| = 0$.

Vậy $16.10^{|y|} \geqslant 16$. Bởi vậy phương trình nghiệm.

Thí dụ 6. Chứng minh rằng trong mọi tam giác ta đều có

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 4S\sqrt{3}$$

trong đó a, b, c là các cạnh, S là diện tích tam giác. Khi nào xảy ra dấu đẳng thức.

Giải. Theo công thức $S = 1/2 \times ab\sin C$ và công thức hàm số côsin :

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$ được

$2(a^2 + b^2 - 2ab\cos C \geqslant 2ab\sin C\sqrt{3}$

hay

$a^2 + b^2 - 2ab(1/2\cos C + \sqrt{3}/2\sin C) \geqslant 0$

$a^2 + b^2 - 2ab\cos(C - 60^o) \geqslant 0$.

Muốn vậy giá trị bé nhất của vế trái phải $\geqslant$? ? ?

Giá trị bé nhất đạt được khi $\cos(C - 60^o) =$? ? ?

tức là

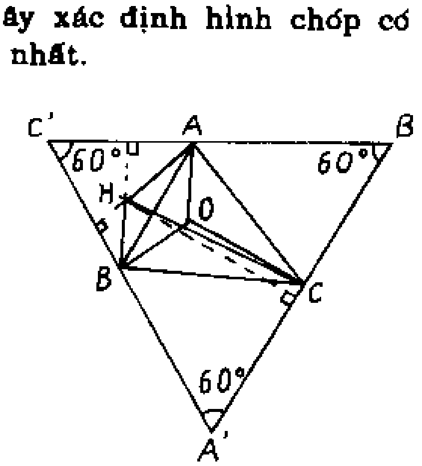
$a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2 \geqslant 0$ đúng.

Dấu đẳng thức đạt được khi $a = b$ và

$\cos(C - 60^o) = 1$, $C - 60^o = 0$, $C = 60^o$. Vậy dấu đẳng thức đạt được khi tam giác là tam giác đều.

Thí dụ 7. ABC là tam giác có các góc đều bé hơn 120^o. Xét tất cả các hình chóp tam giác $SABC$ nó chung đáy ABC và có cùng thể tích. Hãy xác định hình chóp có tổng các cạnh bé nhất.

Giải. Vì các hình chóp chung đáy, nên chỉ cần xác định hình chóp có tổng các cạnh $SA + SB + SC$ bé nhất là đủ. Gọi H là chân đường cao SH, khi đó ta



chỉ cần tìm hình chóp có tổng các hình chiếu $HA + HB + HC$ bé nhất là đủ.

Vì các góc của tam giác ABC đều bé hơn 120^o, nên tồn tại duy nhất một điểm O trong tam giác, nhìn các cạnh đều dưới một góc bằng 120^o (Bạn đọc tự chứng minh). Hình chóp cần tìm là hình chóp có chân đường cao H trùng với điểm O.

Thật vậy, qua A, B, C kẻ các đường thẳng tương ứng $\perp OA, OB, OC$ tạo thành $\Delta A'B'C'$, khi đó tam giác $A'B'C'$ là tam giác đều.

Nếu $H \equiv O$ thì

$HA + HB + HC = OA + OB + OC = h$;

h là đường cao tam giác đều $A'B'C'$. Nếu H khác O thì

$HA + HB + HC > HP + HQ + HR = h$

(vì tổng khoảng cách từ một điểm trong tam giác đều đến các cạnh không đổi, bằng chiều cao của tam giác, còn khoảng cách từ một điểm ngoài tam giác đều đến các cạnh lớn hơn chiều cao tam giác đều. Bạn đọc tự chứng minh bằng phương pháp diện tích).

Cuối cùng, mời các bạn tự giải một số bài tập sau đây :

1. Chứng minh rằng hàm số :

$y = 7x + 1/2.\sin 8x + 2\sin 4x + \sin x$

luôn luôn đồng biến.

2. Hãy tìm tất cả các giá trị của m để

$1/3 \sin 3x + m\sin 2x + \sin x \geqslant 0$

khi $0 < x < \pi$.

3. Giải phương trình :

$(8 - \cos x)(2 + \cos x) = 21.5^{|y|}$

4. Chứng minh rằng, trong mọi tam giác ta đều có

$3a^2 + 3b^2 - c^2 \geqslant 4S\sqrt{3}$

trong đó a, b, c là các cạnh, S là diện tích tam giác. Khi nào xảy ra dấu đẳng thức.

5. Trong các tam giác có cùng diện tích, hãy tìm tam giác có tổng bình phương các cạnh bé nhất.

LABYRINTH - MỘT ĐỀ TÀI CŨ ĐANG TRỞ THÀNH VẤN ĐỀ THỜI SỰ LỚN

VŨ ĐÌNH HÒA

1. Mở đầu

Thông thường người ta hiểu mê đạo là một hệ thống các đường ngầm dưới đất, được nối với nhau nhằng nhịt và tỏa rất nhiều nhánh, nếu một người không quen thuộc nó bước vào sẽ nhanh chóng mất khả năng định hướng và không bao giờ tìm được đường ra.

Từ Labyrinth (mê đạo) có nguồn gốc trong những câu chuyện lịch sử Hy Lạp. Theo truyền thuyết Hy Lạp thì mê đạo đầu tiên được xây dựng trên đảo Kreta bởi ông tổ thợ xây và đồng thời là nhà phát minh Daedalus. Ở trong mê đạo này có một con quái vật nửa bò tót, nửa là người. Hàng năm nó bắt cống 7 cậu bé và 7 cô bé khỏe mạnh, xinh đẹp để ăn thịt. Hoàng tử Theseus đã vào được mê đạo, giết chết con quái vật và với một cuộn chỉ của cô gái Ariadne trao cho, hoàng tử Theseus đã tìm được đường ra khỏi mê đạo.

Chủ đề mê đạo hãy còn dư âm tới tận giờ, vì thế ta thường gặp các bài toán về mê đạo trong các sách toán, hoặc ở dạng toán học giải trí trên các báo chí...

Công trình đầu tiên về vấn đề mê đạo năm 1873 là của giáo sư Christian Wiener (1826 - 1896, giáo sư hình học xạ ảnh trường đại học kĩ thuật Karlsrube). Cuối thế kỉ 19 tại Pháp vấn đề này được hai nhà toán học Trémaux và Tarry nghiên cứu. Những nghiên cứu này xoay quanh vấn đề tìm đường đi trên một đồ thị.

Những lời giải cổ điển này được lập thành chương trình máy tính bởi C. E. Shannon, nhà toán học đồng thời là kĩ sư người Mỹ (sinh năm 1916), một trong những người sáng lập ngành điều khiển học, người đã sáng tạo ra con chuột máy tìm được đường đi trong mê đạo (năm 1951). Thông qua công trình của mình Shannon đã gợi ý cho những nghiên cứu hiện đại về vấn đề mê đạo bằng công cụ của điều khiển học mà thực sự được tiến hành trên cả chiều sâu lẫn chiều rộng trong 15 năm gần đây.

Những nghiên cứu này có động lực thực tiễn và chứa đựng những ứng dụng quan trọng cho ngành điều khiển học. Vì thế, khả năng của một máy tính hoặc một người máy trong mê đạo sẽ là những cơ sở đánh giá năng lực của người máy và máy tính trong mối tác động qua lại với môi trường. Ngoài ra, những lời giải trong vấn đề mê đạo sẽ cho ta phương pháp được sử dụng có hiệu lực vào trong các thuật toán nhận dạng trên các đồ thị hoặc các vật mẫu và động chạm tới các vấn đề "xử lí" ảnh (ví dụ phân tích ảnh vệ tinh...).

2. Các vấn đề cơ bản

Cái gì là những vấn đề mà các nhà toán học quan tâm tới trong chủ đề mê đạo. Ta hãy xem vấn đề cơ bản nhất.

Vấn đề thứ nhất là từ một điểm tùy ý của mê đạo phải tìm được cửa ra. Bài toán này được đặt ra cho những người bị dẫn vào mê đạo không tự nguyện và bị bỏ mặc một mình ở đó. Cần lưu ý là người bị nhốt không được biết tí gì về cấu trúc xây dựng của mê đạo và chỉ có thể nhìn thấy một phần của đường hầm, hoặc các nhánh được phân rẽ của mê đạo tại khoảng cách gần. Vì không có một dữ kiện nào thêm, nên phương pháp dò tìm cửa hầm ở đây đòi hỏi phải là đúng được cho bất cứ một mê đạo có thể nào khác. Tóm lại, bài toán được phát biểu như sau :

Bài toán chạy trốn :

Hãy đưa ra một phương pháp (một thuật toán, một chương trình máy tính...) để từ một điểm tùy ý của mê đạo ta đều có thể tìm được đường ra.

Phương pháp mà hoàng tử Theseus đã dùng có lẽ là như sau : "Người anh hùng của chúng ta đã giải bài toán bằng cách đem buộc một đầu sợi chỉ của cô gái Ariadne vào cửa mê đạo và đi vào, khi đi ra anh ta chỉ việc lần theo sợi chỉ là tìm được đường ra".

Khi giải thích như vậy là ta đã quên mất một điều quan trọng, nó chính là vấn đề thứ hai của ta : "làm thế nào mà hoàng tử Theseus có thể tìm đến được nơi ẩn náp của con quái vật và không bị chạy luẩn quẩn trong mê đạo quá lâu (ví dụ là không bị sa vào tình trạng chạy theo một vòng tròn trong mê đạo), để vẫn còn sức giết chết con quái vật". Đó là bài toán khảo sát mê đạo : – cần tìm cho mọi mê đạo một phương pháp khảo sát khi không có một thông tin nào cho biết trước.

Bài toán khảo sát :

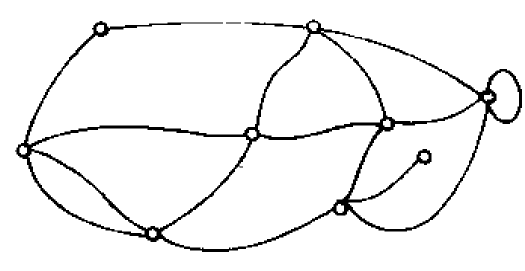
Hãy đưa ra một phương pháp (một thuật toán, một chương trình...) để có thể tới được mọi điểm của mê đạo.

Ta có thể thấy ngay là giữa hai bài toán này có một mối quan hệ chặt chẽ. Mỗi lời giải của bài toán khảo sát cho ta một lời giải của bài toán chạy trốn : một thuật toán khảo sát được toàn bộ mê đạo sẽ dẫn ta tới cửa ra. Ngoài ra một cuộc chạy trốn có kết quả cũng góp phần khảo sát mê đạo vì không phải con đường nào cũng dẫn đến cửa.

Sau đây ta sẽ nghiên cứu bài toán khảo sát mê đạo vì mô hình toán của nó dễ giải thích hơn bài toán chạy trốn.

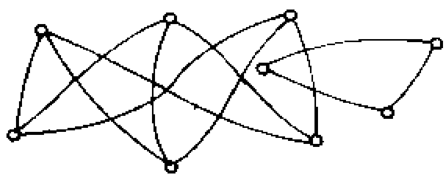
3. Khảo sát đồ thị hữu hạn :

Ta hiểu một *đồ thị hữu hạn* là một hình tạo bởi một số hữu hạn các điểm (được gọi là *đỉnh*) và được nối với nhau bởi một số các cung (được gọi là các cạnh). Trên hình 1 và hình 2 ta có hai đồ thị khác nhau. Mỗi cạnh của đồ thị được bắt đầu và kết thúc tại 2 đỉnh nào đó và không chứa đỉnh nào khác ngoài đỉnh đầu và đỉnh cuối của nó. Đỉnh của đồ thị ứng với các ngả rẽ của các đường hầm hoặc các bãi cuối đường hầm, còn các cạnh của đồ thị chính là các đường hầm của mê đạo.



Hình 1

Một đồ thị được gọi là liên thông nếu từ một đỉnh bất kỳ ta đi tới được đỉnh tùy ý khác của đồ thị qua một dãy (hữu hạn) các cạnh. Đây chính là điều kiện cần cho sự khảo sát được của mê đạo tương ứng với nó. Ví dụ trên hình 2 là một đồ thị không liên thông. Từ đỉnh A của đồ thị này ta không thể tới được đỉnh B.



Hình 2

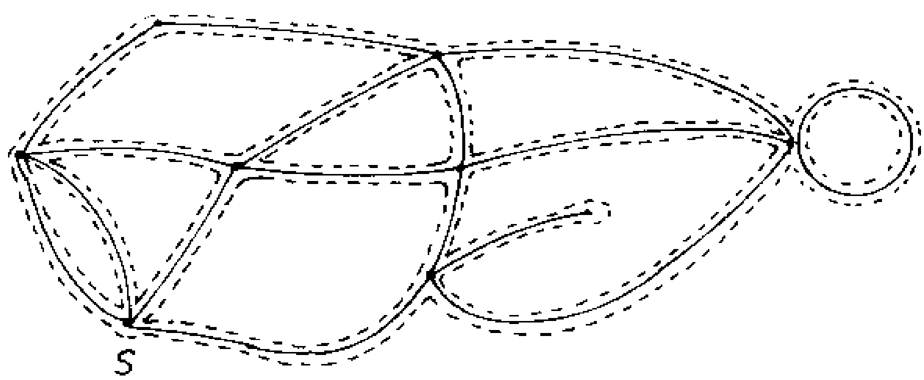
Đồ thị trên hình 1 là một đồ thị liên thông. Ngoài ra nó còn là một đồ thị phẳng, (các đỉnh và các cạnh của nó có thể biểu diễn được trên mặt phẳng mà các cạnh không giao nhau ngoài các đỉnh chung) nghĩa là một đồ thị hai chiều. Tính chất này thực ra không cần để bảo đảm cho tính sử dụng được của 2 phương pháp khảo sát sau đây.

rời cạnh đang đi để vào đỉnh cuối của nó thì ta đánh dấu (o) trong trường hợp trên các cạnh xuất phát từ đỉnh này chưa có cạnh nào được đánh dấu (o).

2. Nếu tất cả các cạnh xuất phát từ đỉnh ta đang đứng đều mang dấu (+) thì ta dừng lại.

Con đường đi tạo ra bởi thuật toán Tarry được gọi là *đường Tarry*. Trong một đồ thị hữu hạn liên thông thì mỗi đường Tarry sẽ kết thúc sau một số hữu hạn bước bởi điều kiện 2, kết thúc tại đỉnh ta xuất phát. Theo thuật toán này ta sẽ đi qua mỗi cạnh của đồ thị đúng 2 lần, và mỗi lần theo một chiều khác nhau. Trong hình 3 là ví dụ về một đường Tarry. Trong hình 4 ta có một đường Tarry khác với các đỉnh được đánh dấu (o) và (+) tại các cạnh dẫn tới nó.

Các bạn hãy thử nghiệm thuật toán Tarry bằng cách kiểm nghiệm lại trên 2 ví dụ và hãy tự đánh dấu lấy các cạnh. Hãy thử lấy đỉnh xuất phát khác và kiểm nghiệm lại



Hình 3

Ta hãy xem xét phương pháp của Tarry. Phương pháp này dễ mô tả hơn. Trong phương pháp này ta phải đánh dấu các đỉnh đã được đi qua trên các cạnh dẫn tới nó, nếu nó lần đầu tiên được đi qua. Ngoài ra, còn phải nhận biết được là mỗi cạnh dẫn tới đỉnh ta vừa tới đã được đi qua hay chưa, và đã đi theo chiều nào rồi. Vì vậy ta sẽ dùng hai loại kí hiệu khác nhau để đánh dấu các cạnh.

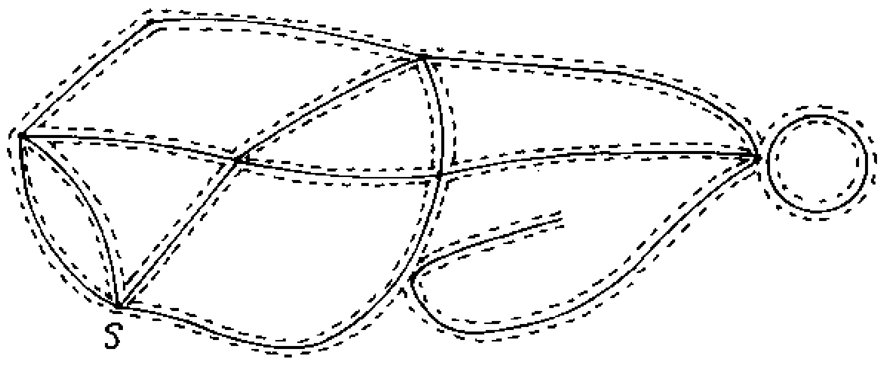
Thuật toán của Tarry :

1. Từ đỉnh đang đứng ta đi tiếp trên cạnh mà chưa có dấu (+) ở trên đầu xuất phát của cạnh đó. Trước khi đi vào cạnh đó thì ta đánh dấu (+) vào đầu cạnh, tại đầu mà ta xuất phát. Chỉ khi nào mà tất cả mỗi cạnh đều mang dấu (+) tại đầu ta xuất phát thì ta mới đi vào các cạnh có dấu (o). Trước khi

thuật toán. Cuối cùng các bạn hãy chọn lấy một mê đạo nào đó và biểu diễn thành đồ thị và thử nghiệm lại thuật toán một lần nữa. Ngoài ra ta còn có thể sử dụng kí hiệu (o) làm bảng chỉ đường để từ một đỉnh tùy ý khác của đồ thị trở về đỉnh xuất phát mà không qua đỉnh nào quá 1 lần. Bạn đọc có thể kiểm tra bằng cách luôn đi ngược lại chiều dấu (o).

Xin nhường cho bạn đọc chứng minh sự đúng đắn của thuật toán rằng, thuật toán luôn dẫn ta qua tất cả các cạnh của đồ thị liên thông và bao giờ cũng đưa ta về đỉnh xuất phát.

Thuật toán của Tresmaux tương đối đặc biệt hơn của Tarry, nhưng mô tả phức tạp hơn.



Hình 4

Thuật toán Trémaux :

1. Hãy đi tùy ý sao cho tới một đỉnh mà ta đã tới, hoặc tới đỉnh chỉ có một cạnh. Hãy đi ngược trở lại về đỉnh xuất phát và hành động theo bước 2.

2. a) Nếu tại đỉnh xuất phát hãy còn cạnh chưa đi thì hãy đi theo cạnh đó như 1 chỉ dẫn.

b) Nếu các cạnh đều đã đi qua, nhưng hãy còn có cạnh mới đi qua có một lần thì hãy bước vào và đi như 1 chỉ dẫn.

c) Nếu các cạnh tại đỉnh xuất phát đã qua 2 lần thì kết thúc.

Phương pháp này đòi hỏi ta phải biết mỗi cạnh xuất phát từ đỉnh khởi đầu đã qua mấy lần, và cũng phải biết thứ tự đi qua của các cạnh. Một đường đi theo thuật toán Trémaux được gọi là một *đường Trémaux*. Có thể thấy mọi đường Trémaux đều là đường Tarry, nhưng ngược lại không đúng, ví dụ đường Tarry trong hình 4 không phải là đường Trémaux.

Vấn đề cổ điển về mê đạo đang là một đối tượng mới của toán học hiện đại mà nhiều phương pháp nghiên cứu của nó được áp dụng cho nhiều ngành toán học trẻ trung, hi vọng rằng có thể giới thiệu với bạn đọc trong dịp khác.

VỀ MỘT LỚP BÀI TOÁN HÌNH HỌC

PHẠM THU HÀ

Bài báo này giới thiệu với bạn đọc một phương pháp có ích cho việc giải nhiều bài toán hình học thường được coi là không mẫu mực và hay gặp trong các kì thi chuyên toán và học sinh giỏi.

Trước tiên chúng ta hãy làm quen với một khái niệm mới : *Lân cận bán kính r của một hình phẳng là tập hợp các điểm trên mặt phẳng có khoảng cách tới hình đã cho không vượt quá r.* Ở đây ta hiểu khoảng cách từ một điểm A tới một hình (H) là khoảng cách bé nhất từ điểm A đến một điểm bất kì của (H). Ví dụ lân cận bán kính r của một điểm O là hình tròn tâm O bán kính r, lân cận bán kính r của một hình tròn bán kính R là hình tròn đồng tâm bán kính R + r, còn lân cận bán kính r của một đoạn thẳng là một hình chữ nhật cùng với hai nửa hình tròn bán kính r ở hai đầu, v.v... Bạn đọc hãy tự tìm lấy lân cận bán kính r của một đa giác, một đường gấp khúc.

Phương pháp mà chúng tôi muốn giới thiệu với các bạn dựa trên hai nguyên lí hình học rất đơn giản sau đây mà chứng minh xin nhường cho bạn đọc.

Nguyên lí 1 : *Cho các hình phẳng $(H_1), (H_2), ..., (H_n)$ và (K). Nếu tổng diện tích các hình $(H_1), (H_2), ..., (H_n)$ mà nhỏ hơn diện tích hình (K) thì phải có một điểm của (K) mà nằm ngoài tất cả các hình (H_i) (i = 1, 2, ..., n).*

Nguyên lí 2 : *Nếu các hình phẳng* (H_1), (H_2), ..., (H_n) *nằm trong hình phẳng (K) sao cho tổng diện tích của chúng lớn hơn diện tích (K) khi phải có hai hình* H_i) và (H_j) nào *đó* $(i, j \in \{1, 2, ..., n\})$ *có điểm chung.*

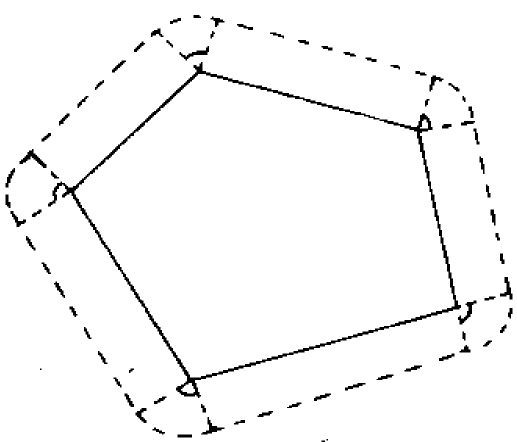
Bây giờ ta hãy làm quen với phương pháp mới thông qua một vài ví dụ.

Bài toán 1. *Một tờ giấy hình tròn bán kính 100cm có 9800 lỗ kim châm. Chứng minh rằng khi đó có thể cắt ra một hình tròn bán kính 1cm không có lỗ kim châm nào.*

Giải. Để hình tròn phải tìm không chứa lỗ kim châm nào thì tâm của nó phải nằm ngoài tất cả các lân cận bán kính 1cm của mọi lỗ kim châm. Mặt khác để hình tròn đó nằm trọn trong tờ giấy ban đầu tâm của nó phải nằm trong hình tròn đồng tâm với tờ giấy, bán kính 100 - 1 = 99 (cm). Mà tổng diện tích của 9800 lân cận bằng $9800.\pi.1^2 = 9800\pi$ (cm^2) nhỏ hơn diện tích của hình tròn bán kính 99cm (= 9801 πcm^2). Do đó theo nguyên lí 1 phải tồn tại điểm I nằm trong hình tròn bán kính 99cm và nằm ngoài mọi lân cận. Rõ ràng hình tròn tâm *I* bán kính 1cm là hình tròn phải tìm.

Bài toán 2. *(Đề dự bị thi vô địch quốc tế). Trong một hình vuông cạnh 38cm có 100 đa giác lồi, mỗi đa giác có diện tích* $\leq \pi$*cm*^{2} còn chu vi thì $\leq 2\pi$cm. Chứng minh rằng trong hình vuông tồn tại một hình tròn bán kính 1cm không cắt đa giác nào.

Giải. Để hình tròn phải tìm không cắt đa giác nào, tâm của nó phải nằm ngoài các lân cận bán kính 1cm của tất cả các đa giác. Mặt khác để hình tròn bán kính 1cm nằm trọn trong hình vuông cạnh 38cm thì tâm của nó phải nằm trong hình vuông cạnh 36cm (nhận được từ hình vuông đã cho bằng cách tịnh tiến mỗi cạnh về phía trong 1cm). Ta phải chứng minh tồn tại một điểm như vậy.



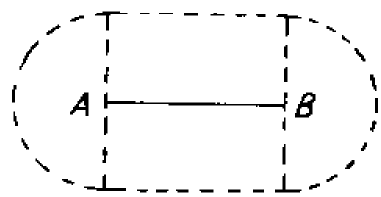
Hình 1

Diện tích lân cận bán kính *r* của một đa giác lồi (H.1) bằng :

diện tích đa giác + tổng diện tích các hình chữ nhật + tổng diện tích các hình quạt. Để ý rằng góc ở tâm của mỗi hình quạt chính bằng góc ngoài tương ứng của đa giác nên tổng diện tích các hình quạt chính là diện tích hình tròn bán kính 1cm. Do đó theo giả thiết, diện tích mỗi lân cận sẽ bé hơn $\pi + 2\pi.1 + \pi.1^2 = 4\pi$ (cm^2) và tổng diện tích lân cận của 100 đa giác sẽ bé hơn 100. 4π = $= 400\pi$ (cm^2) < 100.4.3,2 = 1280 < 1296 = $= 36^2$ (cm)^2 là diện tích hình vuông. Theo nguyên lí 1 phải có điểm I nằm trong hình vuông cạnh 36cm và nằm ngoài các lân cận và đó chính là tâm của hình tròn phải tìm.

Bài toán 3. *Trong hình chữ nhật kích thước 10 × 20 có 132 đoạn thẳng độ dài 1. Chứng minh rằng bao giờ cũng tìm được 2 điểm nằm trên 2 đoạn khác nhau có khoảng cách không vượt quá 1.*

Giải. Xét các lân cận bán kính 1/2 của mỗi đoạn thẳng (H.2).



Hình 2

Dễ dàng tính được diện tích của mỗi lân cận là

$$1 \times 1 + \pi.\ (1/2)^2 = 1 + \pi/4.$$

Do đó tổng diện tích các lân cận bằng

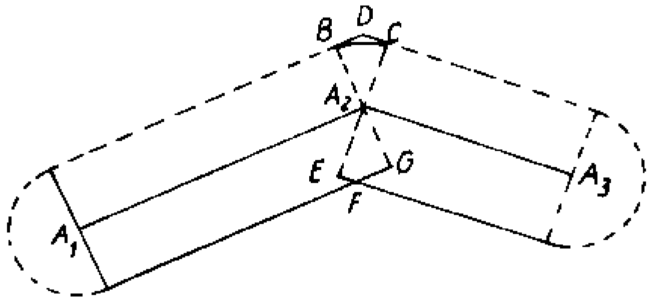
$$132\ (1 + \pi/4) > 132\ (1 + 3/4) = 231.$$

Mà các lân cận này đều nằm trong hình chữ nhật kích thước 11 × 21 (nhận được bằng cách tịnh tiến mỗi cạnh của hình chữ nhật đã cho ra phía ngoài 1/2). Theo nguyên lí 2 phải có 2 lân cận của hai đoạn thẳng có điểm chung, do đó trên hai đoạn này phải có hai điểm mà khoảng cách tới điểm chung đều không vượt quá 1/2, đó chính là hai điểm cần tìm.

Bài toán 4. *(Đề thi vô địch Balan). Một đường gấp khúc nằm trong một hình vuông cạnh 50cm có tính chất như sau : khoảng cách từ mỗi điểm của hình vuông đến đường gấp khúc không vượt quá 1. Chứng minh rằng độ dài đường gấp khúc lớn hơn 1248cm.*

Giải. Ta tính diện tích lân cận bán kính 1 của dường gấp khúc. Trước hết xét trường hợp dường gấp khúc gồm 2 đoạn A_1A_2 và A_2A_3 (H.3).

Để ý rằng diện tích hình quạt A_2BC bé hơn diện tích tứ giác A_2BDC, mà hai tứ giác A_2BDC và A_2EFG đối xứng nhau qua A_2, do



Hình 3

dó diện tích lân cận bán kính 1 của $A_1A_2A_3$ sẽ bé hơn

$$\pi.1^2 + 2(A_1A_2 + A_2A_3).$$

Bằng quy nạp theo số đoạn thẳng của dường gấp khúc ta suy ra diện tích của lân cận bán kính 1 của đường gấp khúc sẽ bé hơn $\pi + 2p$ (với p là độ dài đường gấp khúc). Theo giả thiết lân cận này phủ kín hình vuông cạnh 50, do đó diện tích lân cận phải lớn hơn diện tích hình vuông (theo nguyên lí 1).

Vậy $50 < \pi + 2p \Rightarrow p > 1250 - \pi/2$ > 1248 (đpcm)

Qua một vài ví dụ trên chắc các bạn có thể hình dung được phương pháp chúng tôi muốn giới thiệu với các bạn. V mời bạn hãy thử sức với các bài tập sau, liệu chúng có thể mở rộng phương pháp tr cho các bài toán trong không gian đu không ?

1. Trong một hình chữ nhật kích th 20 × 25 có 120 hình vuông đơn vị. Chứ minh rằng tồn tại hình tròn bán kính nằm trong hình chữ nhật mà không cắt hì vuông nào.

2. Chứng minh rằng một đa giác lồi d tích S chu vi p bao giờ cũng chứa 1 h tròn bán kính S/p.

3. Trong một hình chữ nhật kích th 15 × 20 có 57 hình chữ nhật 1 × 2 đều cạnh song song với cạnh của hình chữ n lớn. Chứng tỏ rằng tồn tại một hình vu đơn vị nằm trong hình chữ nhật lớn cá nhất hai hình chữ nhật con.

4. Cho đa giác lồi M. Gọi s là số nhất các hình tròn bán kính 1 phủ kín M là số nhiều nhất các hình tròn đôi một nhau có tâm thuộc M và bán kính Roman cos rằng $s \leqslant t$.

MIỀN GIÁ TRỊ CỦA HÀM SỐ

LÊ THỐNG NHẤT

Ở phổ thông các bạn học 3 phương pháp cho một hàm số $y = f(x)$: cho bởi đồ thị, cho bởi bảng và cho bởi biểu thức đại số. Miền xác định của hàm số là tất cả các giá trị của đối số x mà tương ứng xác định duy nhất giá trị của hàm số $f(x)$. Việc tìm miền xác định của hàm số, nhất là khi hàm số cho bởi các biểu thức đại số chắc là các bạn đã làm quen nhiều. Thí dụ trong kì thi đại học tháng 6 năm 1970 :

"Tìm miền xác định của các hàm số :

$$y = 1/\sqrt{-x^2 + 4x + 5} + lg(x^2 - 3x + 2)$$

$$y = \sqrt{\log_{0,8}\frac{2x + 1}{x + 5} - 2}\text{''}.$$

Thực chất của những bài loại này là bạn tìm các giá trị của đối số để tất cả biểu thức đại số đã cho là có nghĩa (xác đị

Trong trường hợp hàm số cho bởi các b thức đại số thì còn một vấn đề nữa mà bạn cần quan tâm đó là miền giá trị hàm số. Miền giá trị của hàm số tức những giá trị có thể nhận được của hàm y để có giá trị của đối số x lập tương với nó. Thí dụ hàm số $y = x^2$ thì miền trị là $y \geq 0$: vì với mọi giá trị của x đều tương ứng với giá trị của hàm số $y = x^2 \geq 0$ và ngược lại với bất cứ giá trị nào của $y \geq 0$ đều tồn tại giá trị của x sao cho $x^2 = y$. Một thí dụ nữa là hàm số $y = \sin x$ thì miền giá trị là $-1 \leq y \leq 1$, vì với mọi giá trị của x ta có $-1 \leq y = \sin x \leq 1$ và với bất cứ giá trị nào của $-1 \leq y \leq 1$ thì đều tồn tại giá trị của x sao cho $\sin x = y$. Vậy khi hàm số cho bởi biểu thức đại số thì miền giá trị của nó chính là tất cả những giá trị của y để phương trình $y = f(x)$ có nghiệm đối với ẩn x. Do đó khi chúng ta đi tìm miền giá trị của hàm số, chính là đưa đến việc tìm tham số y thỏa mãn cho phương trình $y = f(x)$ có nghiệm với ẩn x.

Thí dụ 1 : Tìm miền giá trị của hàm số

$$y = (x + 1)(x^2 + x + 1)$$

Do $x^2 + x + 1 > 0$ nên ta có phương trình tương đương :

$$y(x^2 + x + 1) = x + 1$$

hay : $\quad yx^2 - (1 - y)x + y - 1 = 0$

Phương trình bậc 2 đối với ẩn x muốn có nghiệm thì :

$$\Delta = (1 - y)^2 - 4y(y - 1) \geq 0$$
$$\Leftrightarrow (y - 1)(-1 - 3y) \geq 0$$
$$\Leftrightarrow (y - 1)(y + 1/3) \leq 0$$
$$\Leftrightarrow -1/3 \leq y \leq 1$$

Vậy miền giá trị của hàm số là :

$$-1/3 \leq y \leq 1$$

Từ đó các bạn có thể suy ra kết quả của các bài toán sau (các bạn thử suy ra xem !).

Bài toán 1a : Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số :

$$y = (x + 1)/(x^2 + x + 1)$$

Bài toán 1b : Tìm các góc α thỏa mãn

$$\sin \alpha = (x + 1)/(x^2 + x + 1)$$

với giá trị nào đó của x.

Bây giờ các bạn xét thí dụ phức tạp hơn :

Thí dụ 2 : tìm miền giá trị của hàm số :

$$y = \cos 2x - \sin^2 x + \cos x$$

Ta biến đổi :

$$y = \cos 2x - \sin^2 x + \cos x$$
$$= 2\cos^2 x - 1 - 1 + \cos^2 x + \cos x =$$
$$= 3\cos^2 x + \cos x - 2$$

Đến đây tôi hướng dẫn các bạn theo 2 phương pháp.

Phương pháp 1 : Tìm giá trị của y để phương trình đối với x có nghiệm :

$$3\cos^2 x + \cos x - 2 - y = 0$$

Đặt $X = \cos x$ thì dẫn đến bài toán tìm giá trị của y để phương trình bậc 2 đối với ẩn X có nghiệm thỏa mãn : $-1 \leq X \leq 1$. Ta có phương trình :

$$3X^2 + X - (2 + y) = 0$$

Xét tam thức bậc 2 : $f(X) = 3X^2 + X - (2 + y)$. Điều kiện để $f(X)$ có nghiệm thỏa mãn $-1 \leq X \leq 1$ là

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\Delta \geq 0\\ f(-1) \geq 0\\ f(1) \geq 0\end{cases}\\ (-1).f(1) \leq 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}1 + 12(2 + y) \geq 0\\ -y \geq 0\\ 2 - y \geq 0\end{cases}\\ -y(2 - y) \leq 0\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}25 + 12y \geq 0\\ y \leq 0\\ y \leq 2\end{cases}\\ 0 \leq y \leq 2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}0 \geq y \geq -25/12\\ 2 \geq y \geq 0\end{array}\right.$$

$$2 \geq y \geq -25/12.$$

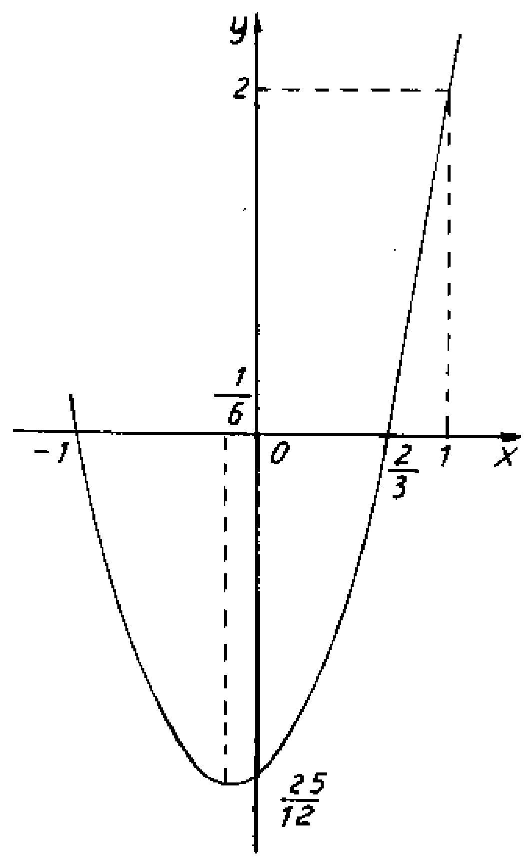
Vậy miền giá trị của hàm số là

$$-25/12 \leq y \leq 2$$

Phương pháp 2 : Đặt $X = \cos x$ ta có :

$$y = 3X^2 + X - 2$$

Vẽ đồ thị của $y = 3X^2 + X - 2$ ta được một parabon như hình vẽ, từ đó miền giá trị của



$y = 3X^2 + X - 2$ chính là $y \geqslant -25/12$ nếu X nhận mọi giá trị tùy ý. Nhưng ở đây $X = \cos x$ nên :

$$-1 \leqslant X \leqslant 1.$$

Ta xét đồ thị giới hạn trên đoạn $-1 \leqslant X \leqslant 1$.

Từ đó ta thấy ngay khi $-1 \leqslant X \leqslant 1$ thì $-25/12 \leqslant y \leqslant 2$. Vậy miền giá trị của hàm số là $-25/12 \leqslant y \leqslant 2$.

Những vấn đề xoay quanh phương pháp 2 tôi có dịp sẽ trở lại với các bạn ở một bài báo sau.

Từ đó các bạn có thể thấy kết quả và phương pháp làm các bài toán ;

Bài toán 2a : Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số :

$$y = \cos 2x - \sin^2 x + \cos x$$

Bài toán 2b : Chứng minh rằng :

$$-25/12 \leqslant \cos 2x - \sin^2 x + \cos x \leqslant 2$$

Bài toán 2c : Biết rằng góc α của một tam giác thỏa mãn :

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{cotg}\alpha = \cos 2x - \sin^2 x + \cos x$$

với x là một góc nào đó. Chứng minh α là một góc tù.

Bây giờ các bạn làm quen với cách phát biểu khác của bài toán tìm miền giá trị của hàm số.

Thí dụ 3 : Cho hàm số :

$$y = \frac{x + m + 1}{x^2 + m^2 + x + m + 1}$$

Tìm những điểm trên trục tung mà đồ thị của hàm số không đi qua với mọi giá trị của tham số m.

Ta hãy tìm những điểm của trục tung mà đồ thị của hàm số có thể đi qua. Đó chính là những điểm có hoành độ $x = 0$ (vì điểm nằm trên trục tung) và có tung độ là $y = \dfrac{m + 1}{m^2 + m + 1}$ (vì điểm nằm trên đồ thị của hàm số $y = \dfrac{x + m + 1}{x^2 + m^2 + x + m + 1}$). Ta thấy miền giá trị của $y = \dfrac{m + 1}{m^2 + m + 1}$ là $-1/3 \leqslant y \leqslant 1$ (xem thí dụ 1). Vậy tung độ của những điểm trên trục tung mà đồ thị có thể đi qua phải thỏa mãn : $-1/3 \leqslant y \leqslant 1$.

Nên những điểm của trục tung mà đồ thị hàm số không đi qua với mọi giá trị của m là $y > 1$ hoặc $y < -1/3$.

Vậy bài toán này thực chất bắt ta phải tìm được miền giá trị của hàm số

$$y = \frac{m + 1}{m^2 + m + 1}$$

(đối số m) để từ đó suy ra kết quả bài toán ban đầu.

Thí dụ 4 : Giải phương trình :

$$\cos \pi x = x^2 - 4x + 5.$$

Ở đây ta xét 2 hàm số :

$y_1 = \cos \pi x$ và $y_2 = x^2 - 4x + 5$.

Ta có : $y_1 = \cos \pi x \leqslant 1$ và $y_2 = x^2 - 4x = (x - 2)^2 + 1 \geqslant 1$.

Ta thấy ngay miền giá trị của chúng là $y_1 < 1$ và $y_2 \geqslant 1$.

Để cho $y_1 = y_2$ suy ra chỉ có thể là

$$y_1 = y_2 = 1.$$

Vậy : phương trình tương đương với :

$$\begin{cases} \cos \pi x = 1 \\ x^2 - 4x + 5 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$$

Tóm lại nghiệm của phương trình là $x = 2$.

Cuối cùng xin các bạn hãy luyện tập bằng các bài tập sau :

Bài tập 1 : Tìm miền giá trị của hàm số

$$y = -\cos x/(2\cos^2 x - 1).$$

Bài tập 2 : Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{cotg}^2 x = 2\sin^2 y \\ \sin^2 y + \cos^2 x = 1 \end{cases}$$

Bài tập 3 : Giải phương trình :

$$\sqrt{2 + \cos^2 2x} = \sin 3x - \cos 3x.$$

Bài tập 4 : Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số

$$y = (x + 1)/(x - 1)$$

chỉ có thể bị parabol : $y = x^2 + 4mx + m^2$ cắt những điểm nào ? Với m là tham số tùy ý.

Bài tập 5 : Với $x \geqslant 0$ thì hàm số :

$$y = (1 + x^2)/(1 + x)$$

đạt giá trị nhỏ nhất bằng bao nhiêu ?

Bài tập 6 : Chứng minh rằng với mọi x ta có

$$x^2/(x^4 + 1) \leqslant 1/2.$$

Chúc các bạn thành công.

ỨNG DỤNG CỦA MỘT HỆ THỨC TỶ SỐ THỂ TÍCH

ĐỖ THANH SƠN

Trong bài này chúng ta sẽ đề cập đến ứng dụng của một hệ thức hình học không gian. Hệ thức đó được phát biểu như sau :

Hệ thức : *Nếu một mặt phẳng cắt ba cạnh SA, SB, SC của một hình chóp tam giác SABC lần lượt tại các điểm A', B', C' thì*

$$\frac{V_{(SA'B'C')}}{V_{(SABC)}} = \frac{SA'}{SA} \times \frac{SB'}{SB} \times \frac{SC'}{SC} \qquad (1)$$

Với $V_{(SABC)}$ là thể tích hình chóp SABC.

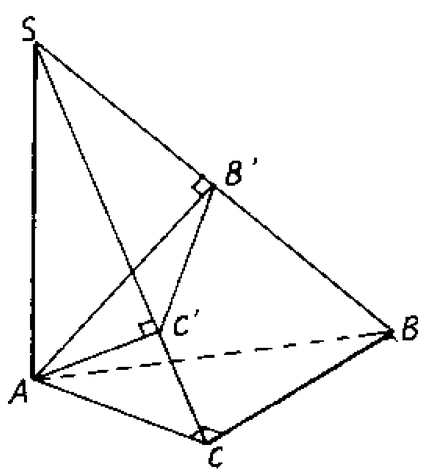
Việc chứng minh hệ thức (1) khá dễ dàng và xin nhường cho bạn đọc. Dưới đây thông qua một số bài toán, tôi muốn chỉ ra rằng sử dụng hệ thức (1), một số bài toán hình học có thể giải được khá gọn và hay.

Bài toán 1. Hình chóp $SABC$ có đáy là tam giác vuông cân ABC $(AC = BC)$, cạnh bên $SA \perp (ABC)$ và $SA = AB$. Mặt phẳng qua A vuông góc với SB cắt SB tại B', SC tại C'. Tính tỉ số thể tích của hai đa diện tạo thành do thiết diện cắt hình chóp $SABC$.

Giải. Đặt $AC = a$, khi đó $AB = a\sqrt{2} = SA$ và $SC = a\sqrt{3}$. Đặt V là thể tích hình chóp $SABC$, V_1 là thể tích hình chóp $SA'B'C'$, $V_2 = V - V_1 \Rightarrow V_2/V_1 = V/V_1 - 1$, ta tìm V/V_1. Theo (1) ta có :

$$V_1/V = SA'/SA \times SB'/SB \times SC'/SC \qquad (*)$$

ta tính các tỉ số SB'/SB, SC'/SC.



Hình 1

Theo giả thiết $SB \perp (A'B'C')$ *nên* $A'B' \perp SB$, *do* ΔSAB cân nên $SB'/SB = 1/2$. Mặt khác

$BC \perp (SAC)$ nên $BC \perp AC$, *lại có* $SB \perp AC'$. Vậy $AC' \perp (SBC) \Leftrightarrow AC' \perp SC$.

Xét tam giác vuông SAC : $SA^2 = SC'.SC$

$\Rightarrow SA^2/SC^2 = SC'/SC \Rightarrow SC'/SC = 2a^2/3a^2 = 2/3$

Thay các tỉ số đã tính được vào (*) ta có :

$V_1/V = 1/2 \times 2/3 = 1/3 \Rightarrow V/V_1 = 3$

$\Rightarrow V_2/V_1 = 2$ (đpcm).

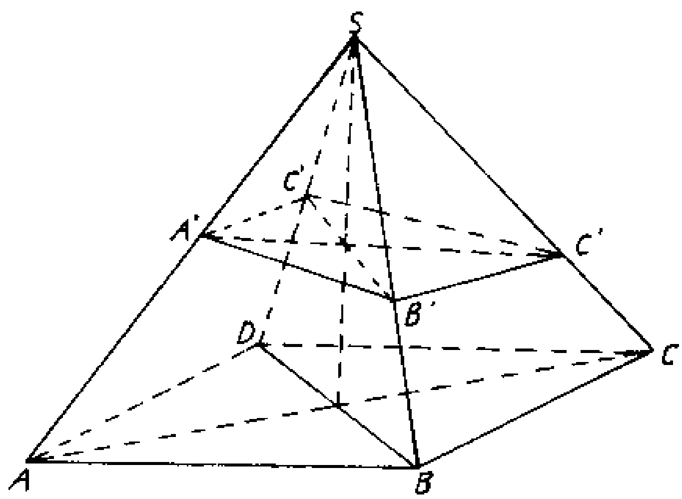
Chú ý : Hệ thức (1) chỉ đúng cho hình chóp tam giác. Đối với hình chóp tứ giác, hình chóp ngũ giác, v.v... ta phải chia ra thành các hình chóp tam giác rồi mới được áp dụng hệ thức (1).

Bài toán 2. Hình chóp $SABCD$ có đáy là hình bình hành $ABCD$. Cắt hình chóp bằng mặt phẳng. Mặt phẳng này cắt SA, SB, SC, SD tại các điểm tương ứng A', B', C', D'. Chứng minh rằng :

$$SA/SA' + SC/SC' = SB/SB' + SD/SD' \qquad (**)$$

Nếu hình chóp $SABCD$ là đều, thì (**) trở thành :

$$1/SA' + 1/SC' = 1/SB' + 1/SD' \qquad (***)$$



Hình 2

Giải.

Xét hình chóp $SABC$ và $SADC$ ta có :

$$\frac{V_{SA'B'C'}}{V_{SABC}} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC} \qquad (I)$$

$$\frac{V_{SA'D'C'}}{V_{SADC}} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SD'}{SD} \cdot \frac{SC'}{SC} \qquad \text{(II)}$$

Vì $V_{SABC} = V_{SADC} = V/2$ (V là thể tích hình chóp $SABC$). Cộng (I) và (II) ta có :

$$\frac{V_{SA'B'C'D'}}{V/2} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC} + \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SD'}{SD} \cdot \frac{SC'}{SC} \ \text{(III)}$$

Xét hình chóp $SABD$ và $SBCD$ ta có :

$$\frac{V_{SA'B'D'}}{V_{SABD}} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SD'}{SD} \qquad \text{(IV)}$$

$$\frac{V_{SB'C'D'}}{V_{SBCD}} = \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC} \cdot \frac{SD'}{SD} \qquad \text{(V)}$$

Cộng (IV) và (V) ta được :

$$\frac{V_{SA'B'C'D'}}{V/2} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SD'}{SD} + \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC} \cdot \frac{SD}{SD} \ \text{(VI)}$$

So sánh (III) và (VI) ta được

$$\frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC} + \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SD'}{SD} \cdot \frac{SC'}{SC} =$$

$$= \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SD'}{SD} + \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC} \cdot \frac{SD'}{SD}$$

hay :

$$\frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC} \cdot \frac{SD'}{SD} \left(\frac{SD}{SD'} + \frac{SB}{SB'}\right) =$$

$$= \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC} \cdot \frac{SD'}{SD} \left(\frac{SC}{SC'} + \frac{SA}{SA'}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{SD}{SD'} + \frac{SB}{SB'} = \frac{SC}{SC'} + \frac{SA}{SA'}$$

Nếu hình chóp là đều, thì ta có SA = SB = SC = SD và vì vậy

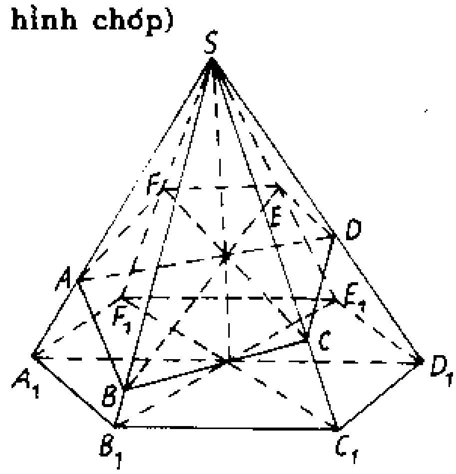
$1/SD' + 1/SB' = 1/SC' + 1/SA'$ (đpcm).

Bài toán 3. Một mặt phẳng cắt tất cả 6 cạnh bên của một hình chóp lục giác đều tại các điểm A, B, C, D, E, F. Chứng minh rằng

$1/SA + 1/SD = 1/SB + 1/SE = 1/SC + 1/SF$

(S là đỉnh hình chóp)

Giải.



Hình 3

Ta hãy áp dụng kết quả của bài toán 2. Gọi hình chóp đều đã cho là $SA_1B_1C_1D_1E_1F_1$.

Xét hình chóp $SA_1B_1D_1E_1$ với đáy là hình bình hành $A_1B_1D_1E_1$, thiết diện là $ABDE$ ta có :

$SA_1/SA + SD_1/SD = SB_1/SB + SE_1/SE.$

Vì $SA_1 = SD_1 = SB_1 = SE_1$, nên hệ thức trên viết lại :

$1/SA + 1/SD = 1/SB + 1/SE.$

Xét hình chóp $SA_1F_1D_1C_1$ ta có :

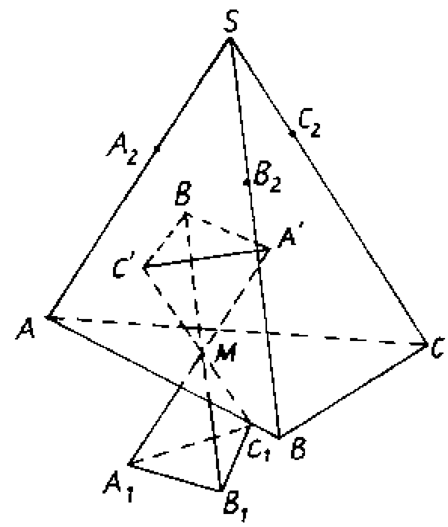
$SA_1/SA + SD_1/SD = SF_1/SF + SC_1/SC \Rightarrow$ $1/SA + 1/SD = 1/SF + 1/SC.$

Hệ thức (1) có một hệ quả khá trực tiếp như sau :

Bài toán 4 : (Hệ quả của (1))

Trên đáy ABC của hình chóp $SABC$ ta lấy điểm M. Các đường thẳng kẻ qua M song song với SA, SB, SC cắt các mặt bên hình chóp lần lượt tại các điểm A', B', C'. Chứng minh rằng $\dfrac{V_{MA'B'C'}}{V_{SABC}} = \dfrac{MA'}{SA} \times \dfrac{MB'}{SB} \times \dfrac{MC'}{SC}$ (2)

Giải.



Hình 4

Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là các điểm đối xứng với A', B', C' qua M (xem hình 4). Khi đó

$$V_{MA'B'C'} = V_{MA_1B_1C_1}.$$

Trên các cạnh SA, SB, SC lấy các điểm A_2, B_2, C_2 sao cho $SA_2 = MA_1$; $SB_2 = MB_1$; $SC_2 = MC_1$.

Khi đó hình chóp $SA_2B_2C_2$ là ảnh của hình chóp $MA_1B_1C_1$ trong phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{MS}$ nên

$$V_{MA_1B_1C_1} = V_{SA_2B_2C_2}$$

hay

$$V_{MA'B'C'} = V_{SA_2B_2C_2}$$

Mặt khác

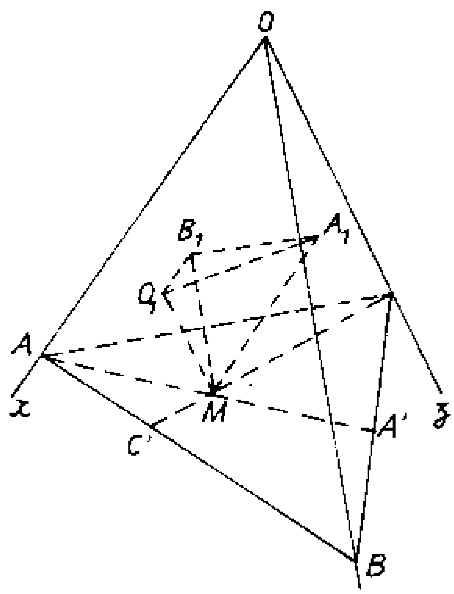
$$\frac{V_{SA_2B_2C_2}}{V_{SABC}} = \frac{SA_2}{SA} \cdot \frac{SB_2}{SB} \cdot \frac{SC_2}{SC}$$

$$\Rightarrow \frac{V_{MA'B'C'}}{V_{SABC}} = \frac{MA'}{SA} \cdot \frac{MB'}{SB} \cdot \frac{MC'}{SC}$$

Hệ thức (2) giúp ta giải được bài toán cực trị sau đây :

Bài toán 5. Cho trước góc tam diện $Oxyz$ và điểm M cố định trong góc đó. Hãy dựng một mặt phẳng qua M cắt góc tam diện thành tứ diện có thể tích bé nhất.

Giải.



Hình 5

Giả sử mặt phẳng qua M cắt các cạnh Ox, Oy, Oz của tam diện $Oxyz$ tại A, B, C. Kẻ qua M các đường thẳng song song với các tia Ox, Oy, Oz cắt các mặt (yOz), (zOx) và (xOy) tại A_1, B_1, C_1.

Theo (2) ta có :

$$\frac{V_{MA_1B_1C_1}}{V_{OABC}} = \frac{MA_1}{OA} \cdot \frac{MB_1}{OB} \cdot \frac{MC_1}{OC} \qquad (*)$$

Vì $V_{MA_1B_1C_1}$ không đổi, nên V_{OABC} bé nhất khi $MA_1/OA.OB_1/OB.MC_1/OC$ đạt max.

Gọi A', B', C' là giao điểm của AM, BM, CM với các cạnh đối diện của ΔABC (xem hình 5), ta có :

$$MA_1/OA = A'M/A'A \; ; \; MB_1/OB = B'M/B'B,$$

$$MC_1/OC = C'M/C'C,$$

do M nằm trong ΔABC, ta có

$$MA'/AA' + MB'/BB' + MC'/CC' = 1$$

nên $MA_1/OA + MB_1/OB + MC_1/OC = 1$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 3 số dương ta có

$MA_1/OA.MB_1/OB.MC_1/OC$ đạt max khi $MA_1/OA = MB_1/OB = MC_1/OC \Leftrightarrow MA'/AA' = MB'/BB' = MC'/CC' \Leftrightarrow M$ là trọng tâm tam giác.

Nếu dựng mặt phẳng qua M thừa nhận M là trọng tâm tam giác tạo thành do mặt phẳng cắt Ox, Oy, Oz thì V_{OABC} bé nhất.

Việc dựng cụ thể xin nhường bạn đọc.

Bài toán sau đây lại là một ứng dụng khác của hệ thức (2).

Bài toán 6. Cho góc tam diện $Oxyz$ và điểm M bên trong nó.

Một mặt phẳng qua M cắt các cạnh của góc tại các điểm A, B, C. Chứng minh rằng

$$V^3_{OABC}/(V_{MOBC} \cdot V_{MOCA} \cdot V_{MOAB})$$

có giá trị không phụ thuộc cách chọn mặt phẳng.

Giải.

Giả sử mặt phẳng qua M cắt Ox, Oy, Oz, tại A, B, C (xem hình 6). Kẻ qua M các đường thẳng song song với Ox, Oy, Oz lần lượt cắt các mặt bên hình chóp $OABC$ tại A', B', C'. Áp dụng (2) của bài toán 1 ta có :

$$V_{OABC}/V_{MA'B'C'} =$$

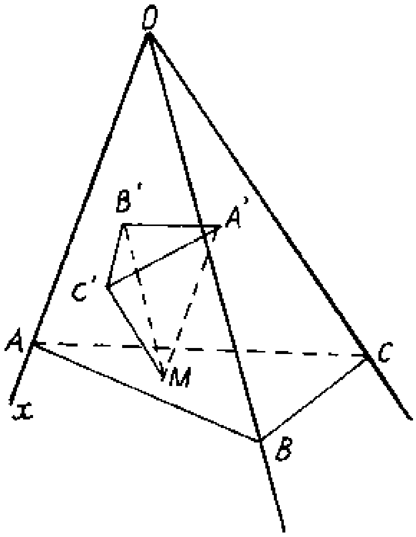
$$= OA/MA' \times OB/MB' \times OC/MC' \qquad (*)$$

Mặt khác

$$V_{OABC}/V_{MOAB} = OC/MC' \; ;$$

$$V_{OABC}/V_{MOBC} = OA/MA' \; ;$$

$$V_{OABC}/V_{MOCA} = OB/MB' \; ;$$



Hình 6

thay các hệ thức này vào (*) ta có

$$V_{OABC}/V_{MA'B'C} = V^3_{OABC} /$$

$$/ (V_{MOAB} \times V_{MOBC} \times V_{MOCA}) \Rightarrow \text{đpcm}.$$

Một số bài toán sau đây giành cho bạn đọc.

Bài toán 7. Hình chóp $SABCD$ có đáy là hình chữ nhật $ABCD$ cạnh $BC = AB\sqrt{2}$; $SA \perp (ABCD)$. Một mặt phẳng qua A vuông góc với SC cắt SC tại C', SB tại B' và SD tại D'. Biết rằng mặt phẳng $(AB'C'D')$ hợp với $(ABCD)$ một góc nhọn α. Tính tỉ số thể tích của hai khối đa diện tạo thành do mặt phẳng cắt hình chóp $SABCD$.

Bài toán 8. Cắt hình chóp ngũ giác đều bằng mặt phẳng cắt tất cả các cạnh bên hình chóp tại các điểm A, B, C, D, E. Gọi S là đỉnh hình chóp. Hãy tìm hệ thức liên hệ cho các đoạn SA, SB, SC, SD và SE.

Bài toán 9. M, N lần lượt là trung điểm của hai cạnh AB và CD của tứ diện $ABCD$. Chứng minh rằng mặt phẳng bất kì đi qua MN cắt tứ diện thành hai khối đa diện có thể tích bằng nhau.

PHƯƠNG TRÌNH LÙI VÀ LÙI BẬC PHƯƠNG TRÌNH

LÊ ĐÌNH THỊNH

Nhiều bài toán bậc cao ta có thể giải được bằng cách đưa về phương trình bậc hai. Sau đây là một số phương pháp thường dùng.

1. Nếu ta có phương trình bậc 4 dạng

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0,\ a \neq 0$$

mà tồn tại một số $\lambda \neq 0$ sao cho $d = b\lambda$, $e = a\lambda^2$ thì ta có thể dẫn về phương trình bậc hai. Phương trình này gọi là *phương trình lùi*, vì nếu đổi biến $x = \lambda/y$ thì phương trình theo y hoàn toàn giống phương trình theo x.

Ta giải phương trình lùi như sau :

Vì $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình (nếu trái lại ta có $e = 0$ mất) nên chia 2 vế cho $x^2 \neq 0$ ta được :

$$ax^2 + bx + c + \frac{d}{x} + \frac{e}{x^2} = 0$$

Thay $d = b\lambda$, $e = a\lambda^2$ và nhóm các số hạng chung :

$$a(x^2 + \lambda^2/x^2) + b(x + \lambda/x) + c = 0$$

Đặt $t = x + \lambda/x$, khi đó $t^2 = x^2 + \lambda^2/x^2 + 2\lambda$, ta có $at^2 + bt + c - 2a\lambda = 0$.

Chú ý : Nếu phương trình có dạng $f(x^2 + \lambda^2x^2, x \pm \lambda/x) = 0$, thì đổi biến $t = x \pm \lambda/x$ ta dẫn phương trình về dạng phương trình bậc hai.

Thí dụ 1 : Giải phương trình $x^4 + 4 = 5x(x^2 - 2)$.

Giải : Mở dấu ngoặc và chuyển vế ta được

$$x^4 - 5x^3 + 10x + 4 = 0$$

Đây là phương trình lùi, vì

$$d = 10 = -2(-5) = -2b,$$

$$e = 4 = (-2)^2 . 1 = (-2)^2a.$$

Do vậy ta giải như sau :

Vì $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình đã cho (nếu trái lại ta có $4 = 0$ vô lí), nên chia hai vế cho x^2 và nhóm các số hạng ta được

$x^2 + 4/x^2 - 5(x - 2/x) = 0$ Đặt $t = x - 2/x$, khi đó $t^2 = x^2 + 4/x^2 - 4$ và ta có $t^2 - 5t + 4 = 0$.

Do $a + b + c = 0$ nên phương trình có nghiệm $t = 1, t = 4$. Nếu $t = 1$, ta có $x - 2/x = 1 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$. Vì $a - b + c = 0$, nên phương trình có nghiệm $x = -1$, $x = 2$. Nếu $t = 4$, ta có $x - 2/x = 4 \Rightarrow x^2 - 4x - 2 = 0, x = 2 \pm \sqrt{6}$.

Thí dụ 2. (Đề thi vào đại học khối A năm 1976). Tìm tất cả các góc α sao cho với mọi $x \neq 0$ ta có

$$(x^2 + 1/x^2) + (1 - 3\sin\alpha)(x + 1/x) + 3\sin\alpha > 0$$

Giải : Đặt $t = x + 1/x$, khi đó vì $x.1/x > 0$ nên $|t| = |x + 1/x| = |x| + 1/|x| \geq$ $\geq 2\sqrt{|x| \,.\, 1/|x|} = 2$. Dấu đẳng thức nhận được khi và chỉ khi $|x| = 1$ hay $x = \pm 1$; $t^2 = x^2 + 1/x^2 + 2$. Thay vào bất đẳng thức ta được

$$t^2 + (1 - 3\sin\alpha)t + 3\sin\alpha - 2 > 0 \ \forall |t| \geq 2.$$

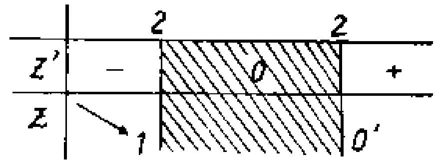
Vế trái là tam thức bậc hai theo t, lại có $a + b + c = 0$, nên tam thức có nghiệm là $t = 1$? ? $t = 3\sin\alpha - 2$. Bất phương trình đúng với mọi giá trị t nằm ngoài hai nghiệm, nhưng vì $|t| \geq 2$ nên $t = 1$ và $t = 3\sin\alpha - 2$ phải nằm trong khoảng $(-2, 2)$. Hiển nhiên $t = 1$ thuộc khoảng $(-2, 2)$ nghiệm $t = 3\sin\alpha - 2$ thuộc khoảng này, nếu $-2 < 3\sin\alpha - 2 < 2$ hay $0 < 3\sin\alpha < 4$, suy ra $\sin\alpha > 0$, $2k\pi < \alpha < (2k + 1)\pi$.

Thí dụ 3. (Đề thi khối A, Đại học giáo dục miền Nam năm học 1975 - 1976). Chứng minh rằng biểu thức

$$3(x^2/y^2 + y^2/x^2) - 8(x/y + y/x) + 10$$

không âm với mọi giá trị thực của x và y khác giá trị 0.

Giải. Đặt $Z = 3(x^2/y^2 + y^2/x^2) - S(x/y + y/x) + 10$. Ta phải chứng minh rằng $Z \geq 0 \ \forall x, y \neq 0$. Đặt $t = x/y + y/x$, ta có $|t| \geq 2$, dấu bằng xảy ra khi $x/y = y/x = \pm 1$, tức là $x = \pm y$. Ta có $Z = 3t^2 - 8t + 4 > 0 \quad \forall \quad |t \quad \geq \quad 2$.



$Z' = 6t - 8 = 0$ khi $t = \frac{4}{3}$. Lập bảng biến thiên

Do vậy $Z \geq Z_{min} = 0 \ \forall \ |t| \geq 2$.

II. Nếu phương trình có dạng $(f(x) + a)^4 + (f(x) - b)^4 = c$ thì đặt $f(x) + a = t + \alpha, f(x) - b = t - \alpha \Rightarrow$ $\alpha = (a + b)/2$, để đưa về dạng đối xứng $(t + \alpha)^4 + (t - \alpha)^4 = c$ hay $2t^4 + 12\alpha^2 t^2 + 2\alpha^4 - c = ??$ (phương trình trùng phương), rồi đưa về phương trình bậc hai $2X^2 + 12\alpha^2 X + 2\alpha^4 - c = 0$, trong đó $X = t^2 \geq 0$.

Thí dụ 4. Giải phương trình $\cos^4 x + (1 - \cos x)^4 = 1$.

Giải. Vì $(1 - \cos x)^4 = (\cos x - 1)^4$, nên ta có

$$\cos^4 x + (\cos x - 1)^4 = 1.$$

Đặt $\cos x = t + 1/2, \cos x - 1 = t - 1/2$, ta được

$(t + 1/2)^4 + (t - 1/2)^4 = 1$ hay $2t^4 + 3t^2 + 1/8 = 1$

Đặt $t^2 = X$, khi đó $0 \leq X \leq 9/4$ và ta có

$$2X^2 + 3x - 7/8 = 0.$$

Phương trình có nghiệm $X = 1/4$, $X = -7/4 < 0$ (loại) $\Rightarrow t = \pm 1/2$.

Nếu $t = 1/2$, $\cos x = 1, x = 2m\pi$, m nguyên.

Nếu $t = -1/2$, $\cos x = 0, x = \pi/2 + k\pi$, k nguyên.

III. Nhiều khi ta đoán một số nghiệm hữu tỉ rồi lùi bậc phương trình về bậc hai. Chú ý rằng, nếu tổng các hệ số của phương trình bằng 0, thì phương trình có một nghiệm $x = 1$, còn nếu tổng các hệ số bậc chẵn bằng tổng các hệ số bậc lẻ thì phương trình có nghiệm $x = -1$. Nếu không thỏa mãn hai điều kiện trên thì ta đoán nghiệm hữu tỉ như sau :

Tìm x dưới dạng $x = p/q$, $(p, q) = 1$.

Thay vào phương trình $a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n = 0$ và quy đồng mẫu số ta được $a_0p^n + a_1p^{n-1}q + ... + a_{n-1}pq^{n-1} + a_nq^n = 0$.

Vì n số hạng đầu chứa p, nên chia hết cho p, 0 cũng chia hết cho p, do vậy $a_n q^n \vdots\ p$. Do $(p \,.\, q) = 1$, suy ra $a_n \vdots\ p$. Tương tự ta suy ra $a_o \vdots\ q$. Vậy nếu phương trình $a_o x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_{n-1} x + a_n = 0$, với $a_o, a_1, ..., a_n$ nguyên, có nghiệm hữu tỉ $x = p/q$, $(p, q) = 1$ thì p là ước của a_n, còn q là ước của a_o. Đặc biệt nếu $a_o = \pm 1$, thì nghiệm hữu tỉ là nghiệm nguyên và là ước của hệ số tự do a_n.

Trong thí dụ 1, vì tổng các hệ số bậc chẵn bằng tổng các hệ số bậc lẻ bằng 5, nên phương trình có nghiệm $x = -1$, và có thể viết

$$(x + 1)(x^3 - 6x^2 + 6x + 4) = 0$$

Vì $x^3 - 6x^2 + 6x + 4$ không có nghiệm $x = \pm 1$, nên ta xét các nghiệm hữu tỉ là các nghiệm nguyên (vì $a_o = 1$) và là các ước của 4, tức là $x = \pm 2, \pm 4$. Do $x = 2$ là nghiệm : $8 - 24 + 12 + 4 = 0$, nên có thể viết

$$(x + 1)(x - 2)(x^2 - 4x - 2) = 0,$$

do vậy phương trình còn có nghiệm $x = 2 \pm \sqrt{6}$.

Thí dụ 5. (Đề thi năm 1984). Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 - y^3 = (x - y) \\ x + y = -1 \end{cases}$$

Giải. Nếu các bạn giải bằng phương pháp thế, tức là rút $y = -x - 1$ thay vào phương trình đầu, thì được $2x^3 + 3x^2 - 2x = 0$. Do $a + b + c + d = 0$, nên phương trình có nghiệm $x = 1$ và có thể viết

$$(x - 1)(2x^2 + 5x + 2) = 0$$

Do vậy phương trình còn có 2 nghiệm $x = -1/2$ và $x = -2$.

Nếu $x = -1/2$, ta có $y = -1/2$ và hệ có nghiệm $(-1/2, -1/2)$.

$x = +1$, ta có $y = -2$ và hệ có nghiệm $(1, -2)$

$x = -2$, ta có $y = 1$ và hệ có nghiệm $(-2, 1)$.

Thí dụ 6. (Đề thi vào Đại học sư phạm thành phố Hồ Chí Minh năm học 1976 – 1977).

Giải phương trình $4x^3 - 3x + 1 = 0$.

Giải. Ta lùi bậc phương trình bằng cách tìm 1 nghiệm hữu tỉ $x = p/q$, $(p, q) = 1$; ước của p là ± 1, của q là ± 1, ± 2, ± 4, nên nếu phương trình có nghiệm hữu tỉ, thì chỉ có thể là $x = \pm 1, \pm 1/2, \pm 1/4$. Phương trình không có nghiệm $x = 1$, vì tổng các hệ số bằng $2 \neq 0$, còn tổng các hệ số bậc chẵn là 1, bằng tổng các hệ số bậc lẻ là 1, nên phương trình có nghiệm $x = -1$ và có thể viết

$$(x + 1)(4x^2 - 4x + 1) = 0 \text{ hay}$$

$$(x + 1)(2x - 1)^2 = 0$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = -1$, $x = 1/2$ (kép).

Thí dụ 7. Giải phương trình

$$\cos^2 x + \cos^2 3x = 3\cos^2 2x.$$

Giải. Theo công thức $\cos^2\alpha = (1 + \cos 2\alpha)/2$ và $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$, ta có

$$(1 + \cos 2x)/2 + (1 + \cos 6x)/2 = 3\cos^2 2x$$

$$1 + (1/2)\cos 2x + (1/2)\cos 3 \,.\, 2x = 3\cos^2 2x$$

$2\cos^3 2x - 3\cos^2 2x - \cos 2x + 1 = 0$. Đặt $\cos 2x = t$, $-1 \leq t \leq 1$, ta được

$$2t^3 - 3t^2 - t + 1 = 0.$$

Vì ước của 1 là ± 1, của 2 là ± 1, ± 2 nên nếu phương trình có nghiệm hữu tỉ, thì chỉ có thể là ± 1, $\pm 1/2$. Khi $t = 1/2$ ta có $1/4 - 3/4 - 1/2 + 1 = 0$, nên phương trình có nghiệm $t = 1/2$ và có thể viết

$$2(t - 1/2)(t^2 - t - 1) = 0$$

và phương trình còn có nghiệm $t = (1 - \sqrt{5})/2$, $t = (1 + \sqrt{5})/2$ (loại)

Nếu $t = 1/2$, $\cos 2x = 1/2 = \cos \pi/3$; $2x = \pm \pi/3 + 2k\pi$

$x = \pm \pi/6 + k\pi$, k nguyên.

Nếu $t = (t - \sqrt{5})/2$, $\cos 2x = (1 - \sqrt{5})/2 = \cos x \Rightarrow 2x = \pm a + 2k\pi$

$x = \pm a/2 + l\pi$, l nguyên, $0 \leq \alpha \leq \pi$, mà $\cos\alpha = (1 - \sqrt{5})/2$

Cuối cùng mời các bạn tự giải một số bài sau đây :

1. Giải phương trình

a) $x^4 + 9 = 5x(x^2 - 3)$.

b) $x^4 - 6x^3 + 4x^2 + 12x + 4 = 0$

2. $\cos^2 x + 1/\cos^2 x = \cos x - 1/\cos x$.

3. $x^2/y^2 + y^2/x^2 - 3(x/y + y/x) + 4 \geq 0$ $\forall x, y \neq ?\ ?$

4. $\sin^4 x + (1 - \sin x)^4 = 17$

5. $\sin^2 x + \sin^2 3x = 5\sin^2 2x$.

6. Cho hàm số $y = (1/3)x^3 - mx^2 - x + 2/3 + m$

Với m nào đồ thị cắt trục hoành tại ba điểm khác nhau.

7. Giải phương trình $-4x^3 + 3x + 1 = 0$.

CỰC TIỂU CỦA PHÂN THỨC CHÍNH QUY

PHAN HUY KHẢI

Trong bài này xin giới thiệu một lớp hàm số đặc biệt, mà việc tìm cực tiểu của nó rất đơn giản do cấu trúc đặc biệt của chúng. Lớp hàm số ấy có tên gọi là phân thức chính quy.

1. Phân thức chính quy. Giả sử

$$g(x) = \sum_{i=1}^{m} c_1 x^{\alpha i}$$

là phân thức của một biến x. Ta sẽ nói rằng phân thức $g(x)$ là chính quy, nếu tổng các tích của các hệ số c_i của nó với bậc của các lũy thừa tương ứng α_i là bằng không, tức là

$$-\sum_{i=1}^{m} \alpha_i c_i = 0. \qquad (1)$$

Thí dụ đơn giản nhất về phân thức chính quy là

$$f(x) = x + \frac{1}{x} = x + x^{-1}$$

(ở đây $c_1 = c_2 = 1, \alpha_1 = 1, \alpha_2 = -1$).

Dựa vào đồng nhất thức lượng giác $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, ta có thể chứng minh rằng phân thức

$$h(x) = x + \frac{\sin\alpha}{x^{\sin\alpha}} + \frac{\cos\alpha}{x^{\cos\alpha}}, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

là chính quy. Thật vậy $h(x)$ có thể viết dưới dạng

$$h(x) = x + (\sin\alpha)x^{-\sin\alpha} + (\cos\alpha)x^{-\cos\alpha}.$$

Do đó $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i c_i = 1 - \sin^2\alpha - \cos^2\alpha = 0$.

Bây giờ giả sử

$$g(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{m} c_i x_i^{\alpha_{1i}} x_2^{\alpha_{2i}} \dots x_n^{\alpha_{ni}} \qquad (2)$$

là phân thức của n biến $x_1, x_2, ..., x_n$. Ta sẽ nói rằng phân thức $g(x_1, ..., x_n)$ là chính quy nếu

$$\alpha_{11}c_1 + \alpha_{12}c_2 + \dots + \alpha_{1m}c_m = 0$$

$$\alpha_{21}c_1 + \alpha_{22}c_2 + \dots + \alpha_{2m}c_m = 0$$

$$\alpha_{n1}c_1 + \alpha_{n2}c_{n2} + \dots + \alpha_{nm}c_m = 0.$$

Các phân thức một biến

$$g_1(x_1) = \sum_{i=1}^{m} c_i x_1^{\alpha_{1i}} \dots g_n(x_n) = \sum_{i=1}^{m} c_i x_n^{\alpha_{ni}}$$

sẽ được gọi là các thành phần của phân thức $g(x_1, ..., x_n)$.

Thí dụ, các thành phần của phân thức hai biến

$$g(x, y) = 2x^{\frac{-4}{r}} y^{\frac{-1}{s}} + 2x^{\frac{5}{r}} y^{\frac{2}{s}} + x^{\frac{-2}{r}} y^{\frac{-2}{s}}$$

$r, s \neq 0$

sẽ là các phân thức

$$g_1(x) = 2x^{\frac{-4}{r}} + 2x^{\frac{5}{r}} + x^{\frac{-2}{r}}$$

$$g_2(y) = 2y^{\frac{-1}{s}} + 2y^{\frac{2}{s}} + y^{\frac{-2}{s}}$$

Rõ ràng phân thức $g(x_1, ..., x_n)$ là chính quy khi và chỉ khi tất cả các thành phần $g_i(x_i)$, $i = 1, ..., n$ của nó là chính quy. Trong thí dụ trên, phân thức hai biến $g(x, y)$ là chính quy vì cả hai thành phần của nó $g_1(x)$ và $g_2(y)$ đều là chính quy.

Dưới đây, chúng ta sẽ đưa ra một định lí mà nó sẽ giúp nhiều trong việc kiểm tra tính chính quy của một phân thức.

Định lí 1. Nếu các phân thức g, h là chính quy thì các phân thức λg (λ là số dương), $g + h$, g, h (g, h là kí hiệu hàm hợp quen thuộc) cũng là chính quy.

Chứng minh của định lí 1 suy trực tiếp từ định nghĩa.

Hệ quả. Nếu $g(x_1, ..., x_n)$ là phân thức chính quy thì với mọi m nguyên dương, ta cũng có g^m là chính quy.

Thí dụ 1. Xét phân thức chính quy $g(x) = r + \frac{1}{x}$. Từ hệ quả suy ra phân thức

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k \frac{1}{x^{n-k}} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{2k-n}$$

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Cũng là chính quy. Do đó ta có

$\sum_{k=0}^{n} C_n^k(2k-n) = 0$, tức là $2\sum_{k=0}^{n} kC_n^k =$

$= n\sum_{k=0}^{n} C_n^k = n2^n$ và như vậy ta đã chứng minh được một đồng nhất thức quen biết.

$$\sum_{k=1}^{n} kC_n^k = n \cdot 2^{n-1}.$$

2. Cực tiểu phân thức chính quy

Giả sử

$$g(x_1, ..., x_n) = \sum_{k=1}^{m} c_k x_1^{a_{1k}} ... x_n^{a_{nk}} \qquad (3)$$

là phân thức chính quy, tức là

$q_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}c_{ik} = 0$ với mọi $i = 1, ..., n$. Tính chất cực trị của phân thức chính quy biểu diễn qua định lí sau đây.

Định lí 2. Giá trị nhỏ nhất của phân thức chính quy (3) trên miền $x_1 > 0, x_2 > 0, ..., x_n > 0$ bằng tổng các hệ số của nó, và đạt được khi $x_1 = x_2 = ... = x_n = 1$, tức là

$$\min_{x_j > 0 (j = \overline{1,n})} g(x_1, ..., x_n) = g(1, ..., 1) = \sum_{k=1}^{m} c_k$$

Định lí 2 được chứng minh dựa trên hai bổ đề sau.

Bổ đề 1 (Bất Đẳng thức Cauchy suy rộng)

Giả sử $x_1, ..., x_n$ là n số không âm tùy ý, còn $\alpha_1, ..., \alpha_n$ là n số không âm mà $\alpha_1 + ... + \alpha_n = 1$. Khi đó ta có

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k \geqslant \prod_{k=1}^{n} x_k^{\alpha_k} \qquad (4)$$

ngoài ra ta có dấu đẳng thức khi và chỉ khi $x_1 = ... = x_n$.

Bổ đề 2. Giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$\varphi(Z_1, ..., Z_n) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i Z_i$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} Z_1 > 0 ... Z_n > 0 \\ Z_1^{\gamma_1} Z_2^{\gamma_2} ... Z_n^{\gamma_n} = A. \end{cases} \qquad (4)$$

trong đó $\beta_i > 0, \gamma_i > 0,\ A > 0, i = 1 - n$. bằng

$$\mu = (\gamma_1 + ... + \gamma_n)\left(A\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\beta_i}{\gamma_i}\right)^{\gamma_i}\right)^{\frac{1}{\gamma_1 + ... + \gamma_n}}$$

Giá trị nhỏ nhất đạt được tại điểm duy nhất $(Z_i^*, ..., Z_n^*)$, trong đó

$$Z_i^* = \frac{\gamma_i}{\beta_i}\left(\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\beta_i}{\gamma_i}\right)^{\gamma_i}\right)^{\frac{1}{\gamma_1 + ... + \gamma_n}} = \frac{\gamma_i}{\beta_i}\frac{\mu}{\gamma},$$

ở đây $\gamma = \gamma_1 + ... + \gamma_n$.

Chứng minh của bổ đề 1 bạn đọc đã biết.

Chứng minh của bổ đề 2.

Đưa vào các biến dương mới $x_1, ..., x_n$ như sau

$$Z_i = \frac{1}{\gamma}\frac{\gamma_i}{\beta_i}x_i,\ i = 1, ..., n.$$

Khi đó hàm số $\varphi(Z_1,..., Z_n)$ trở thành hàm số

$$\Phi(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\gamma_i}{\gamma}x_i \qquad (5)$$

và ràng buộc (4) trở thành ràng buộc sau

$$\begin{cases} x_1 > 0, ..., x_n > 0 \\ x_1^{\frac{\gamma_1}{\gamma}} x_2^{\frac{\gamma_2}{\gamma}} ... x_n^{\frac{\gamma_n}{\gamma}} = A_1 \end{cases} \qquad (6)$$

trong đó

$$A_1 = \gamma\left(A\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\beta_i}{\gamma_i}\right)^{\gamma_i}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

Như vậy ta chuyển về bài toán tìm cực tiểu hàm số (5) với ràng buộc (6).

Giả sử $x_1 ... x_n$ là các số tùy ý thỏa mãn ràng buộc (6). Theo bổ đề 1 ta có

$$\Phi(x_1 ... x_n) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\gamma_1}{\gamma}{}_i \geqslant x_1^{\frac{\gamma_1}{\gamma}} ... x_n^{\frac{\gamma_n}{\gamma}} = A_1 \qquad (7)$$

Mặt khác nếu lấy $x_i^* = A_1$ với mọi $i = 1, ..., n$, khi đó rõ ràng $(x_1^*, ..., x_n^*)$ thỏa mãn ràng buộc (6) và ta có

$\Phi(x_1^*, ..., x_n^*) = A_1$ Điều đó chứng tỏ rằng $\min \Phi(x_1 ... x_n) = A_1$. Vì dấu đẳng thức trong (7) chỉ có tại một điểm duy nhất, nên

$(A_1, ..., A_1)$ là điểm cực tiểu duy nhất của hàm số (5) với ràng buộc (6). Rõ ràng giá trị bé nhất của hàm số $\varphi(Z_1, ..., Z_n)$ với ràng buộc (4) cũng bằng A_1. Cực tiểu đó sẽ đạt tại điểm $(Z_1^* ... Z_n^*)$ duy nhất, trong đó

$$Z_1^* = (1/\gamma)(\gamma_i/\beta_i) A_i.$$

Bổ đề 2 được chứng minh hoàn toàn.

Chứng minh định lí 2

Trước hết để ý rằng

$$\min_{\substack{x_j > 0 \\ j = 1, ..., n.}} g(x_1, ..., x_n) \leqslant g(1 ... 1) = \sum_{k=1}^{m} c_k \qquad (8)$$

Giả sử $(x_1, ..., x_n)$ là một điểm tùy ý với các tọa độ dương. Đặt

$$u_k = c_k x_1^{a_{1k}} ... x_n^{a_{nk}}, \ k = 1, 2, ..., m$$

Ta sẽ chứng minh rằng

$$\prod_{k=1}^{m} u_k^{c_k} = \prod_{k=1}^{m} c_k^{c_k} \qquad (9)$$

Thật vậy từ

$$q_i = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} c_k = 0, \ i = 1, ..., n \text{ ta có}$$

$$\prod_{k=1}^{m} u_k^{c_k} = \prod_{k=1}^{m} \left(c_k x_1^{a_{1k}}, ..., x_n^{a_{nk}} \right)^{c_k}$$

$$= \prod_{k=1}^{m} c_k^{c_k} \prod_{k=1}^{m} x_1^{c_k a_{1k}} ... \prod_{k=1}^{m} x_n^{c_k a_{nk}}$$

$$= \prod_{k=1}^{m} c_k^{c_k} x_1^{q_1} ... x_n^{q_n} = \prod_{k=1}^{m} c_k^{c_k}$$

Đặt $A = \prod_{k=1}^{m} c_k^{c_k}$ và xét bài toán sau :

Tìm $\mu = \min(Z_1 + Z_2 + ... + Z_m)$

với ràng buộc

$$\begin{cases} Z_1 > O_1, ..., Z_m > 0 \\ Z_1^{c_1} Z_2^{c_2} ... Z_m^{c_p} = A \end{cases} \qquad (10)$$

Ứng dụng vào bài toán này bổ đề 2 khi $n = m$; $\beta_1 = 1, \gamma_i = c_i$ và giá trị A, kbi đó ta có $\mu = \gamma = \gamma_i + ... + \gamma_m = c_1 + ... + c_m$.

Chú ý rằng dựa vào đẳng thức (9), ta thấy các số $u_1, ..., u_m$ xác định như trên thỏa mãn ràng buộc (10). Do đó với $x_1 > 0, ..., x_n > 0$ tùy ý ta có

$$g(x_1, ..., x_n) = \sum_{k=1}^{m} u_k \geqslant \mu = \sum c_k.$$

Bất đẳng thức này cùng với bất đẳng thức (8) suy ra điều phải chứng minh.

3. Ứng dụng. Kết quả thu được trong mục trên có thể ứng dụng để giải nhiều bài toán cực trị.

1. Xét các phân thức

$$g_1(x) = x + \frac{\sin\beta}{x^{\sin\beta}} + \frac{\cos\beta}{x^{\cos\beta}}, \ 0 < \beta < \frac{\pi}{2}$$

$$g_2(x) = \left(x + \frac{1}{x} \right)^n$$

$$g_3(x, y) = 2x^{-\frac{4}{r}} y^{-\frac{1}{s}} + 2x^{\frac{5}{r}} y^{\frac{2}{s}} + x^{-\frac{2}{r}} y^{-\frac{2}{s}} \ r, s \neq 0$$

Như trong mục 1 đã chỉ ra tất cả các phân thức đó đều là chính quy. Theo định lí 2 ta có

$$\min_{x > 0} g_1(x) = g_1(1) = 1 + \sin\beta + \cos\beta$$

$$\min_{x > 0} g_2(x) = g_2(1) = 2^n$$

$$\min_{x > 0, y > 0} g_3(x, y) = g_3(1, 1) = 2 + 2 + 1 = 5.$$

2. Tìm cực tiểu của phân thức

$$g(x, y) = x^{\frac{n}{n+1}} y^n + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k y^k \sqrt[k+1]{x}}$$

trên miền $x > 0, y > 0$

Có thể thấy rằng

$$1 \cdot \frac{n}{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \left(-\frac{1}{k+1} \right) = 0 \text{ và}$$

$$1 \cdot n + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} (-k) = 0$$

do đó phân thức $g(x, y)$ là chính quy. Vì vậy theo định lí 2

$$\min_{\substack{x > 0 \\ y > 0}} g(x, y) = g(1, 1) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

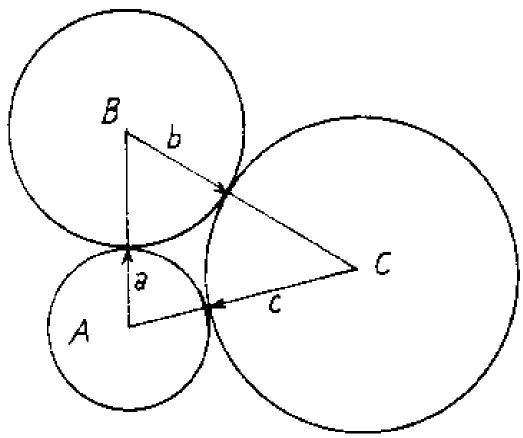
3. Cho 3 vòng tròn tâm A, B, C với bán kính a, b, c tương ứng, từng đôi một tiếp xúc ngoài với nhau. Xét ΔABC và hãy chứng minh rằng

$$cotg^2\left(\frac{A}{2}\right) cotg^2\left(\frac{B}{2}\right)$$

$$+ cotg^2\left(\frac{B}{2}\right) cotg^2\left(\frac{C}{2}\right)$$

$$+ cotg^2\left(\frac{C}{2}\right) cotg^2\left(\frac{A}{2}\right) \geqslant 27 \qquad (11)$$

Đặt $p = a + b + c$; $u = AB = a + b$;



$$v = BC = b + c \text{ ; } w = AC = a + c.$$

Theo định lí hàm số cosin trong $\Delta\ ABC$ ta có

$$\cos A = \frac{(u^2 + w^2 - v^2)}{2uw}$$

Từ đó dễ dàng suy ra $\cos^2\frac{A}{2} = \frac{pa}{uw}$

$$\sin^2\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{bc}{uw}$$

và vì thế $tg^2\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{bc}{pa}$

Lí luận tương tự ta có

$$tg^2\left(\frac{B}{2}\right) = \frac{ac}{pb},\ tg^2\left(\frac{C}{2}\right) = \frac{ab}{pc}$$

Do đó

$$cotg^2\left(\frac{A}{2}\right) cotg^2\left(\frac{B}{2}\right)$$

$$+ cotg^2\left(\frac{B}{2}\right) cotg^2\left(\frac{C}{2}\right)$$

$$+ cotg^2\left(\frac{C}{2}\right) cotg^2\left(\frac{A}{2}\right)$$

$$= (a + b + c)^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)$$

Dễ dàng kiểm tra rằng phân thức

$$g(a, b, c) = (a + b + c)^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)$$

là chính quy. Từ đó suy ra rằng

$$\min_{a>0, b>0, c>0} g(a, b, c) = g(1, 1, 1) = 27$$

Vậy bất đẳng thức (11) là đúng.

4. Để hiểu kĩ hơn những điều trình bày ở trên mời các bạn giải mấy bài tập sau đây.

1. Chứng minh rằng các phân thức sau đây là chính quy :

a) $g(x) = \frac{nx}{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k \cdot \sqrt[k+]{x}}$

b) $g(x, y) = (x + y)^n (x^{-n} + y^{-n})$

c) $g(x) = x + \sum_{j=1}^{n} x^{-\alpha_j}$, trong đó $\alpha_j > 0$

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j = 1$$

2. Chứng minh rằng các phân thức sau đây là chính quy và tìm giá trị nhỏ nhất của chúng (trong miền các biến dương).

a) $g(x, y) = \frac{1}{p} a^{p-1} y^{-1} + \frac{1}{q} x^{-1} y^{q-1}$

trong đó $p, q > 0$, $1/p + 1/q = 1$.

b) $g(x, y) = y^n x^{-n/(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} x^{1/(k+1)} k^{-1} y^{-k}$

c) $g(x_1, \ldots, x_n) = \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{-1} \sum_{i=1}^{n} x_i^n$

PHƯƠNG PHÁP HÌNH HỌC GIẢI CÁC BÀI TOÁN TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ NHỎ NHẤT

TẠ VĂN TỰ

Từ trước chúng ta đã làm quen với các bài toán cực trị ít biến hoặc ít điều kiện. Trong bài này sẽ trình bầy một phương pháp giải dễ hiểu đối với một số bài toán cực trị nhiều biến và nhiều điều kiện.

Để làm rõ nội dung và cách vận dụng phương pháp này, ta trình bày thông qua các ví dụ tiêu biểu dưới đây :

Ví dụ 1 : Tìm giá trị lớn nhất và bé nhất của hàm số $y = x_1 - x_2$ trên miền G :

$$G = \begin{cases} (x_1 - 6)^2 - (x_2 - 3)^2 \geqslant 25 \\ x_1^2 + (x_2 - 4)^2 \leqslant 25 \\ -2x_1 + x_2 \leqslant 4 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

Lời giải : Đồ thị biểu diễn miền G là miền gạch chéo trên hình 1. Đồ thị của hàm $x_2 = x_1 - y$, y là hằng số nào đó, là tịnh tiến đồ thị Δ của hàm $x_2 = x_1$, một lượng $(-y)$ theo trục x_2. Giả sử giá trị lớn nhất y_{max} (tương tự y_{min}) đạt được tại điểm (x_1', x_2') của miền G. Điều đó có nghĩa là hệ

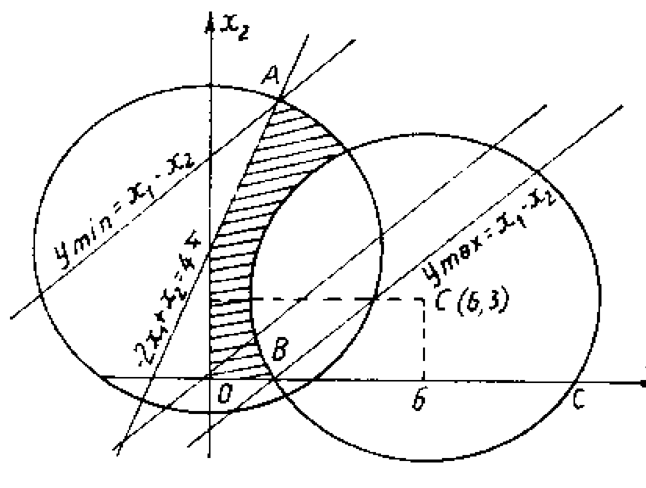
$$\begin{cases} x_1 - x_2 = y_{max} \\ (x_1 - 6)^2 + (x_2 - 3)^2 \geqslant 25 \\ x_1^2 + (x_2 - 4)^2 \leqslant 25 \\ -2x_1 + x_2 \leqslant 4 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 > 0 \end{cases}$$

có ít nhất 1 nghiệm là (x_1', x_2'), hay đồ thị hàm $x_2 = x_1 - y_{max}$ có điểm chung với đồ thị biểu diễn miền G. Như vậy để tìm y_{max} hoặc y_{min} trên G, ta xác định vị trí thích hợp của đồ thị là tịnh tiến của Δ và có điểm chung với đồ thị biểu diễn miền G mà từ đó ta nhận được giá trị lớn nhất hoặc nhỏ nhất cần tìm. Do : $(-y_{max}) \leqslant -y \leqslant (-y_{min})$ với $y = x_1 - x_2, (x_1, x_2) \in G$, nên y_{min} tương ứng với vị trí đồ thị cao nhất và y_{max} tương ứng với vị trí đồ thị thấp nhất trong các đồ thị là tịnh tiến của Δ mà có điểm chung với đồ thị của miền G. Vị trí đồ thị cao nhất là đi qua điểm A và vị trí đồ thị thấp nhất là đi qua điểm B. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 = 4 \\ x_1^2 + (x_2 - 4)^2 = 25 \end{cases}$$

với chú ý tọa độ của điểm A đều dương ta có tọa độ của A là $(\sqrt{5}, 4 + 2\sqrt{5})$.

Vậy $y_{min} = \sqrt{5} - (4 + 2\sqrt{5}) = -4 - \sqrt{5}$



Hình 1

Đường tròn $(x_1 - 6)^2 + (x_2 - 3)^2 = 25$ cắt trục hoành tại các điểm B và C với các tọa độ tương ứng là (2, 0) và (10, 0). Vậy $y_{max} = 2 + 0 = 2$

Nhận xét :

Muốn làm tốt phương pháp này cần vẽ đồ thị nhanh, chính xác và phải biết cách lập ? ? ? trên đồ thị. Các hàm số thường gặp là :

1) $y = ax + b$ – có đồ thị là đường thẳng.

2) $y = (x_1 - a)^2 + (x_2 - b)^2, y \geqslant 0$ – có đồ thị là đường tròn tâm (a, b) bán kính $\sqrt{y}$.

3) $y = ax^2 + bx + c, a \neq 0$ – có đồ thị là Parabol

4) $xy = b, b \neq 0$ – có đồ thị là đường Hypecbol

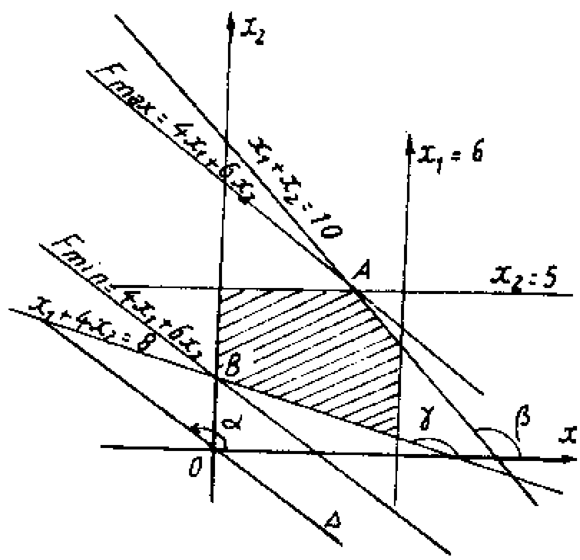
Các tính chất thường dùng là :

1 – Đồ thị hàm số $y = f(x + a)$ là tịnh tiến đồ thị của hàm $y = f(x)$ theo trục x một lượng $= a$.

2 – Đồ thị hàm số $y = f(x) + b$ là tịnh tiến đồ thị hàm $y = f(x)$ theo trục y một lượng b.

Ví dụ 2 : Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của hàm số $F = 4x_1 + 6x_2$ với các điều kiện

$$G = \begin{cases} x_1 + x_2 \leqslant 10 \\ x_1 + 4x_2 \geqslant 8 \\ 0 \leqslant x_1 \leqslant 6 \\ 0 \leqslant x_2 \leqslant 5 \end{cases}$$



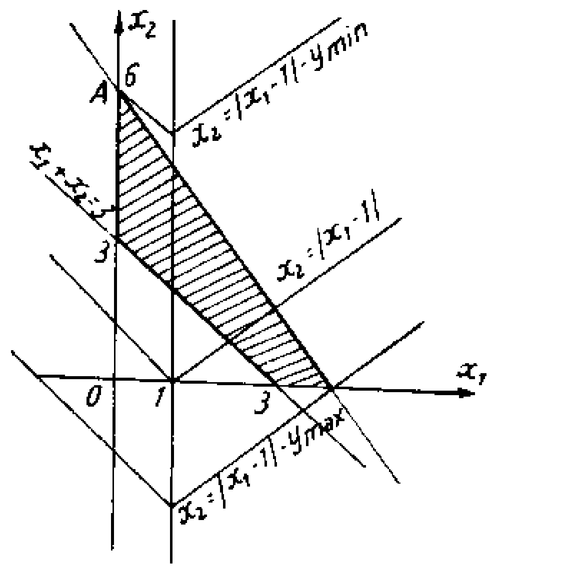
Hình 2

Lời giải : Đồ thị miền G được biểu diễn bằng miền gạch chéo trên hình 2. Hàm $x_2 = -\dfrac{2}{3}x_1 + ???$ với F là hằng số, có đồ thị là tịnh tiến ? ? ? thị Δ của hàm $x_2 = -\dfrac{2}{3}x_1$ theo trục x_2 ? ? ? lượng $P/6$. Do $F_{min} \leqslant F \leqslant F_{max}$ với $F = 4x_1$??? $6x_2$, $(x_1, x_2) \in G$, nên F_{max} tương ứng với vị trí cao nhất, còn F_{min} tương ứng với vị trí đồ thị thấp nhất trong các đồ thị là tịnh tiến của Δ mà có điểm chung với miền gạch chéo.

Hệ số góc của các đường thẳng $x_2 = -\dfrac{2}{3}x_1$, $x_2 = -x_1 + 10$, $x_2 = -\dfrac{1}{4}x_1 + 2$ lần lượt là $tg\alpha = -2/3$, $tg\beta = -1$, $tg\gamma = -1/4$. Vậy các góc α, β, γ đều tù và $\beta < \alpha < \gamma$ do hàm $y = tg(x)$ tăng trong khoảng $(\pi/2, \pi)$. Từ đó vị trí đồ thị cao nhất là đi qua điểm A, vị trí đồ thị thấp nhất là đi qua điểm B. Dễ có tọa độ của điểm A là (5, 5), tọa độ của điểm B là (0, 2), nên : $F_{max} = 4 \,.\, 5 + 6 \,.\, 5 = 50$ và $F_{min} = 4 \,.\, 0 + 6 \,.\, 2 = 12$.

Ví dụ 3 : Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm $y = |x_1 - 1| - x_2$ trên miền G :

$$G = \begin{cases} x_1 + x_2 \geqslant 3 \\ 3x_1 + 2x_2 \leqslant 12 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0. \end{cases}$$



Hình 3

Lời giải : Đồ thị miền G là miền gạch chéo, trên hình 3. Ứng với mỗi y, đồ thị hàm số $x_2 = |x_1 - 1| - y$ là tịnh tiến đồ thị Δ của hàm $x_2 = |x_1 - 1|$ theo trục x_2 đi một lượng $(-y)$. Do $(-y_{max}) \leqslant -y \leqslant (-y_{min})$ với $y = |x_1 - 1| - x_2$, $(x_1, x_2) \in G$, nên y_{min} tương ứng với vị trí đồ thị cao nhất, y_{max} tương ứng với vị trí đồ thị thấp nhất so với trục x_2 trong các đồ thị là tịnh tiến của Δ mà có điểm chung với miền gạch chéo. Vị trí đồ thị cao nhất là đi qua điểm A, vị trí đồ thị thấp nhất là đi qua điểm B. Tọa độ của các điểm A và B dễ dàng tìm được là (0, 6) và (4, 0). Do vậy

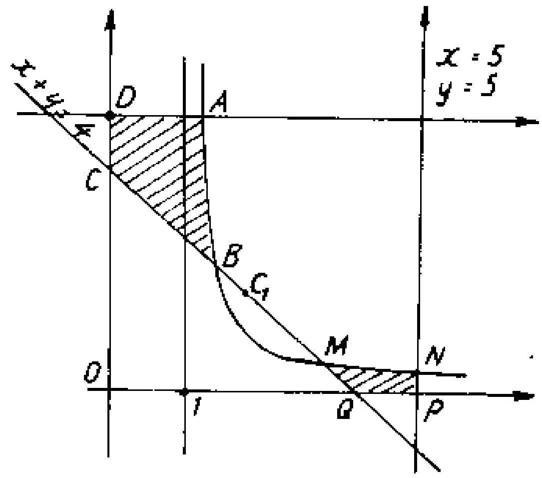
$y_{min} = |0 - 1) - 6 = -5$.

$y_{max} = |4 - 1| - 0 = 3$.

Ví dụ 4 : Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm $Z = x^2 + y^2$, với hệ điều kiện :

$$G = \begin{cases} (x-1)y \leqslant 1 \\ x + y \geqslant 4 \\ 0 \leqslant x \leqslant 5 \\ 0 \leqslant y \leqslant 5. \end{cases}$$

Lời giải : Đồ thị miền G là miền gạch chéo trên hình 4. Ứng với mỗi $Z \geqslant 0$, đồ thị $x^2 + y^2 = Z$ là đường tròn tâm (0, 0) bán kính $\sqrt{Z}$. Để tìm Z_{max}, ta xác định đường tròn tâm O (0, 0) bán kính lớn nhất và có điểm chung với miền gạch chéo. Dễ dàng thấy đường tròn như thế là đi qua điểm A hoặc N.



Hình 4

Giải hệ $\begin{cases} y = 5 \\ (x-1)y = 1 \end{cases}$ ta có tọa độ của điểm A là (6/5, 5). Tương tự tọa độ của N là (5, 1/4). Có $Z_A = (6/5)^2 + 5^2 = 26{,}44$ và $Z_N = 5^2 + (1/4)^2 = 25\frac{1}{16}$. Vậy đường tròn cần tìm là đi qua điểm A và có : $Z_{max} = Z_A = 26{,}44$.

Để tìm Z_{min} ta xác định đường tròn tâm (0, 0) có điểm chung với miền gạch chéo và có bán kính bé nhất. Để xác định tọa độ của các điểm B và M ta giải hệ phương trình

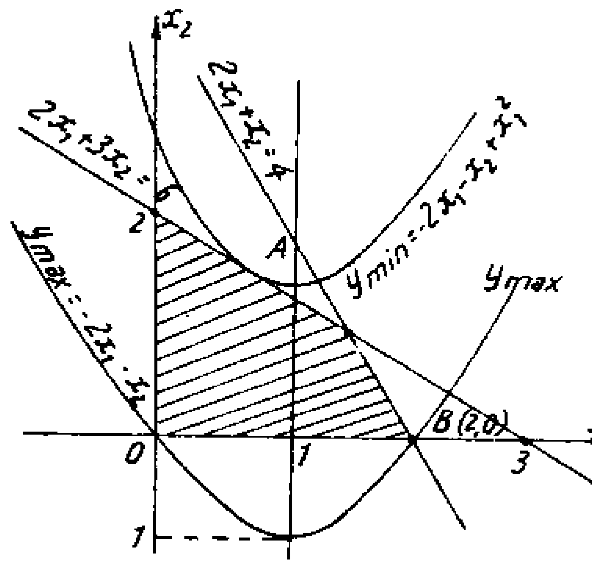
$\begin{cases} x + y = 4 \\ (x-1)y = 1. \end{cases}$ Với chú ý hoành độ của B bé hơn hoành độ của điểm M ta có $B\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$ và $M\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$. Gọi O_1 là điểm giữa của đoạn CQ, tọa độ của C và Q là (0, 4) và (4, 0) nên O_1 có tọa độ là (2, 2). Do $\frac{5-\sqrt{5}}{2} < 2$, nên điểm C và B nằm cùng phía đối với điểm O_1. Lại do $\Delta\ OCQ$ cân, nên $OO_1 \perp CQ$, và theo định lí về hình chiếu và đường xiên, ta có trong miền $ABCD$ điểm B gần gốc tọa độ nhất. Lí luận tương tự, ta có trong miền $QMNP$ thì điểm M gần gốc tọa độ nhất. Nhưng có $Z_B = 11 - \sqrt{5}$, $Z_M = 11 + \sqrt{5}$, nên đường tròn cần xác định là đi qua điểm B và có $Z_{min} = Z_B = 11 - \sqrt{5}$.

Ví dụ 5 : Tìm giá trị bé nhất và lớn nhất của hàm số $y = -2x_1 - x_2 + x_1^2$ với hệ điều kiện :

$$G = \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leqslant 6 \\ 2x_1 + x_2 \leqslant 4 \\ x_1 > 0, x_2 \geqslant 0. \end{cases}$$

(Bài 8 trong mục "Đề ra kì này" - Báo TH v TT số 101).

Lời giải : Đồ thị của G là miền gạch chéo trên hình 5. Với mỗi hằng số y, đồ thị hàm số $x_2 = x_1^2 - 2x_1 - y$ là tịnh tiến đồ thị parabol Δ của hàm $x_2 = x_1^2 - 2x_1$ theo trục x_2 một lượng $(-y)$. Để tìm y_{min} ta xác định vị trí đồ thị cao nhất trong các đồ thị là tịnh tiến của Δ mà có điểm chung với đồ thị của miền G. Đồ thị ? ? ? tìm tiếp xúc với đường thẳng $2x_1 + 3x_2 =$??? điểm A. Để tìm giá trị hoành độ của A ? ? ? phương trình có nghiệm kép :



Hình 5

$$-\frac{2}{3}x_1 + 2 = x_1^2 - 2x_1 - y_{min}$$

Ta có $x_1 = 2/3$ và đồng thời có $y_{min} = -$?? Do A thuộc đường thẳng $2x_1 + 3x_2 = 6$, nên tung độ của A là $x_2 = 14/9$. Để tìm y_{max} ta ? ? ? định vị trí đồ thị thấp nhất trong các đồ thị tịnh tiến của Δ và có điểm chung với miền gạch chéo. Dễ thấy vị trí đồ thị cần tìm là đi ? ? ? điểm O (0, 0) hoặc B (2, 0) và có $y_{max} = 0$.

D – MỘT SỐ KIẾN THỨC BỔ SUNG

K – TÂM VÀ ĐƯỜNG THẲNG Ơ-LE CỦA ĐA GIÁC NỘI TIẾP

NGUYỄN CÔNG QUỲ

Chúng ta đã biết rằng trong một tam giác $A_1A_2A_3$, trọng tâm G, trực tâm H, tâm O của đường tròn ngoại tiếp và tâm E của đường tròn Ơ–le là bốn điểm nằm trên một đường thẳng (gọi là đường thẳng Ơ–le) và thỏa mãn các hệ thức $\overline{HE}/\overline{HO} = -\overline{GE}/\overline{GO} = 1/2$. Từ đó dễ dàng suy ra

$$\overrightarrow{OH} = 3\,\overrightarrow{OG}$$

$$\overrightarrow{OE} = (3/2)\,\overrightarrow{OG} \qquad (1)$$

Vì $\overrightarrow{OG} = (\overrightarrow{OA}_1 + \overrightarrow{OA}_2 + \overrightarrow{OA}_3)/3, \qquad (2)$

nên từ các hệ thức (1) ta có

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA}_1 + \overrightarrow{OA}_2 + \overrightarrow{OA}_3,$$

$$\overrightarrow{OE} = (\overrightarrow{OA}_1 + \overrightarrow{OA}_2 + \overrightarrow{OA}_3)/2 \qquad (3)$$

Vế phải của các hệ thức (2) và (3) có dạng chung $\sum_{i=1}^{3} \overrightarrow{OA}_i/k$ hay $\sum_{i=1}^{3} \overrightarrow{a_i}/k$ nếu đặt $\overrightarrow{OA}_i = \overrightarrow{a_i}$, trong đó k lấy các giá trị 1, 2, 3 theo thứ tự ứng với trực tâm, tâm đường tròn Ơ–le và trọng tâm.

Để mở rộng, ta hãy xét một đa giác n cạnh $A_1A_2..A_n$ nội tiếp trong một đường tròn tâm O bán kính R, và đưa vào các khái niệm mới qua định nghĩa sau đây.

Định nghĩa. Cho trước một *số thực k*. Một điểm C được gọi là *k–tâm* của đa giác nội tiếp $A_1A_2..A_n$ nếu

$$\overrightarrow{OC} = (\overrightarrow{OA}_1 + \overrightarrow{OA}_2 + \ldots + \overrightarrow{OA}_n)\ /\ \mathrm{k},$$

hay

$$\overrightarrow{c} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{a_i}\ /\ \mathrm{k} \qquad (4)$$

trong đó $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{OC}$.

k–tâm ứng với các giá trị k bằng 1, 2, n theo thứ tự được gọi là *trực tâm, tâm Ơ–le* và *trọng tâm* của đa giác đã cho. Nói cách khác, *trực tâm H, tâm Ơ–le E* và *trọng tâm G* của đa giác $A_1A_2..A_n$ theo thứ tự là các điểm mà bán kính vectơ thỏa mãn các hệ thức -

$$\overrightarrow{h} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{a_i}, \overrightarrow{e} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{a_i}/2, \overrightarrow{g} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{a_i}/n,$$

trong đó $\overrightarrow{h} = \overrightarrow{OH}$, $\overrightarrow{e} = \overrightarrow{OE}$ và $\overrightarrow{g} = \overrightarrow{OG}$.

Thoạt tiên mới đọc ta thấy hình như định nghĩa trên mang tính chất hình thức, các khái niệm được định nghĩa phần nào có tính chất "giả tạo". Và một câu hỏi được đặt ra là : liệu các khái niệm nêu trên có tính chất hình học không ? Ý nghĩa hình học của các khái niệm được định nghĩa như thế nào ?

Giải đáp câu hỏi này ta sẽ chứng minh tính chất cơ bản sau đây :

Cho một đa giác $A_1A_2..A_n$ nội tiếp trong đường tròn tâm O bán kính R và một số thực k. Các k–tâm của n đa giác n – 1 cạnh có đỉnh tại A_i (i = 1, 2, ..., n) cùng nằm trên một đường tròn bán kính $R\ /\ |k|$ tâm là k–tâm của đa giác đã cho.

Chứng minh. Gọi C và C_1 theo thứ tự là k–tâm của đa giác đã cho và của đa giác $n-1$ cạnh $A_2A_3..A_n$.

Ta có

$$\overrightarrow{c} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{a_i}/k,\ \overrightarrow{c_1} = \sum_{i=2}^{n} \overrightarrow{a_i}/k$$

Từ đó

$$CC_1 = |\overrightarrow{c} - \overrightarrow{c_1}| = \left|\left(\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{a_i} - \sum_{i=2}^{n} a_i\right)/k\right| =$$

$$= |\overrightarrow{a_1}/k| = R/|k|,$$

tức là $CC_1 = R/|k|$. Tương tự ta có

$$CC_2 = CC_3 = ... = CC_n = R/|k|,$$

trong đó $C_2, C_3, ..., C_n$. Cùng với C_1 là các k–tâm của các đa giác $n - 1$ cạnh có đỉnh tại A_i.

Như vậy tức là các điểm $C_1, C_2, ..., C_n$ đều thuộc một đường tròn bán kính bằng $R/|k|$, và tâm chính là k–tâm C của đa giác đã cho.

Tính chất trên còn có thể phát biểu dưới hình thức sau :

Các đường tròn tâm $C_1, C_2, ..., C_n$, bán kính $R/|h|$ đều đi qua một điểm chung là k–tâm của đa giác $A_1A_2..A_n$.

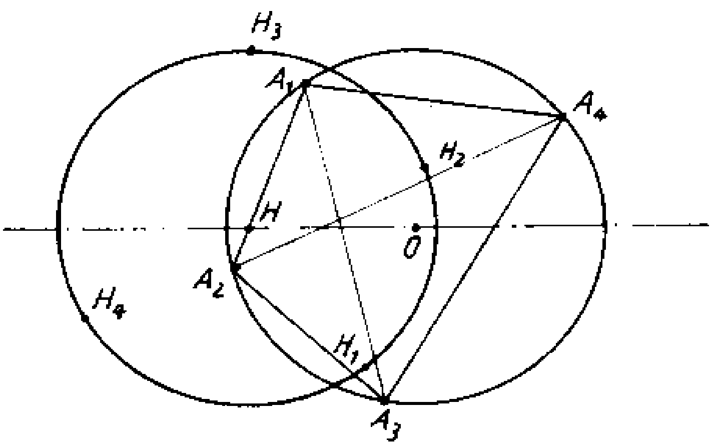
Bây giờ ta cho k các giá trị đặc biệt để có các kết quả cụ thể hơn. Với $k = 1$, ta có :

– Các trực tâm của các đa giác $n - 1$ cạnh đỉnh tại A_i đều nằm trên một đường tròn bán kính R, tâm là trực tâm của đa giác đã cho.

– Các đường tròn bán kính R, tâm là các trực tâm của các đa giác $n - 1$ cạnh có đỉnh tại A_i đều đi qua một điểm chung là trực tâm của đa giác đã cho.

Hình 1 vẽ một tứ giác $A_1A_2A_3A_4$ với các trực tâm H_1, H_2, H_3, H_4 của các tam giác $A_2A_3A_4$, $A_3A_4A_1$, $A_4A_1A_2$ và $A_1A_2A_3$. Các trực tâm đó đều nằm trên một đường tròn bằng đường tròn ngoại tiếp, tâm là trực tâm của tứ giác $A_1A_2A_3A_4$.

Nếu gọi đường tròn Ơ–le của một đa giác nội tiếp trong một đường tròn bán kính R là đường tròn bán kính $R/2$, tâm là tâm Ơ–le của đa giác đó, thì với $k = 2$ ta có kết quả sau :



Hình 1

– Tâm các đường tròn Ơ–le của các đa giác $n - 1$ cạnh có đỉnh tại A_i đều nằm trên đường tròn Ơ–le của đa giác nội tiếp $A_1A_2..A_n$.

– Các đường tròn Ơ–le của các đa giác $n - 1$ cạnh có đỉnh tại A_i đều đi qua một điểm chung là tâm đường tròn Ơ–le của đa giác nội tiếp $A_1A_2..A_n$.

Việc vẽ hình để kiểm nghiệm lại kết quả này xin dành cho bạn đọc.

Với $k = 3$ thì có điều hơi đặc biệt hơn :

– Các trọng tâm của các đa giác $n - 1$ cạnh có đỉnh tại A_i đều nằm trên một đường tròn bán kính $R/(n - 1)$, tâm là $(n - 1)$ – tâm của đa giác nội tiếp $A_1A_2..A_n$.

– Các n–tâm của các đa giác $n - 1$ cạnh có đỉnh tại A_i đều nằm trên một đường tròn bán kính R/n, tâm là trọng tâm của đa giác nội tiếp $A_1A_2..A_n$.

– Các đường thẳng nối mỗi đỉnh của đa giác $A_1A_2..A_n$ với trọng tâm của đa giác $n - 1$ cạnh có đỉnh là $n - 1$ đỉnh còn lại của đa giác đã cho đều đồng quy tại trọng tâm của đa giác đó. (Tính chất này được chứng minh dễ dàng).

Tính chất cơ bản và các kết quả nêu trên đã làm sáng tỏ ý nghĩa hình học của các khái niệm k–tâm cũng như trực tâm, trọng tâm và tâm Ơ–le của một đa giác nội tiếp. Trên cơ sở của tính chất cơ bản trên có thể đưa ra một định nghĩa thuần túy hình học như sau :

k–tâm của một tam giác $A_1A_2A_3$ là điểm C thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{OC} = (\overrightarrow{OA}_1 + \overrightarrow{OA}_2 + \overrightarrow{OA}_3) / k$ trong đó O là tâm đường tròn ngoại tiếp ;

k–tâm của một đa giác n cạnh nội tiếp $A_1A_2..A_n$ là tâm của đường tròn đi qua các k–tâm của các đa giác $n - 1$ cạnh đỉnh tại A_i.

Cũng cần nêu lên một tính chất khá hiển nhiên : *khi k thay đổi, quỹ tích các k–tâm của một đa giác nội tiếp là một đường thẳng gọi là đường thẳng Ơ–le của đa giác đó.* (Tính chất này không phải dễ dàng thấy ngay được nếu dựa vào định nghĩa của k–tâm). Đặc biệt, trực tâm, trọng tâm, tâm các đường tròn ngoại tiếp và đường tròn Ơ–le của một đa giác nội tiếp là những điểm thẳng hàng.

Cuối cùng, cũng cần để ý rằng : Các đường thẳng Ơ–le của tất cả các đa giác nội tiếp trong một đường tròn đều đồng quy tại tâm của đường tròn đó.

CÔNG THỨC VẠN NĂNG

NGÔ HÂN

Trong toán học cũng như trong các bộ môn khoa học khác, việc hệ thống hóa kiến thức nói chung và việc tìm mối liên hệ giữa các vấn đề nói riêng rất cần thiết và vô cùng quan trọng, bởi vì có làm như vậy thì chúng ta mới thấy rõ được toàn bộ vấn đề và nắm chắc được kiến thức. Vì vậy, mỗi khi học xong một bài nào, một chương nào, các bạn hãy cố gắng hệ thống nó lại để tìm mối liên hệ giữa các vấn đề với nhau, nêu lên những điểm chủ yếu nhất, cơ bản nhất và bao quát nhất.

Vừa qua, bạn Nguyễn Văn Mi, học sinh trường cấp 3 Phù Cừ (Hưng Yên) dựa vào cách tính của nhân dân ta đã tìm ra công thức tính thể tích của một khối đá hoặc cát. Công thức này liên quan tới một công thức mang tên là *công thức vạn năng* vì nó là công thức tổng quát nhất để tính thể tích và diện tích của tất cả các hình quen thuộc đã học ở phổ thông.

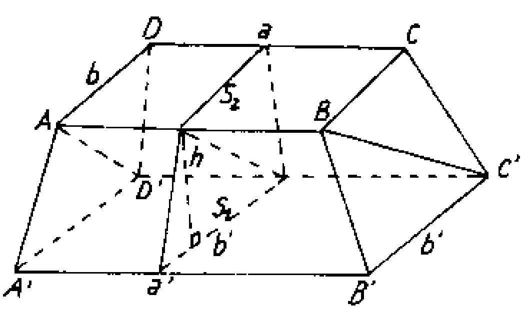
*

* *

Các bạn đã thấy muốn tính thể tích của một khối đá hoặc cát, người ta phải xếp khối đá hoặc cát đó thành một đống gần giống hình chóp cụt (*) có các đáy là các hình chữ nhật, các mặt bên là các hình thang cân (xem hình 1).

Trước hết, bạn Mi đã căn cứ vào công thức tính thể tích của một hình *lăng trụ lệch* (**) có đáy tam giác, đã được chứng minh là :

$$V = S\left(\frac{a + a' + a''}{3}\right)$$



Hình 1

trong đó S là thiết diện thẳng và a, a', a'' là 3 cạnh của hình lăng trụ lệch.

Sau đó, bạn Mi chia khối đá hoặc cát phải đo thành 2 hình lăng trụ lệch là hình $AA'D'BB'C'$ và hình $ADD'BCC'$.

Áp dụng công thức (1) cho hình $AA'D'BB'C'$, ta được :

$$V_1 = S_1\left(\frac{a + a' + a'}{3}\right)$$

Vì diện tích thiết diện thẳng $S_1 = \frac{1}{2}b'h$, nên :

$$V_1 = \frac{1}{6}b'h\,(a + 2a')$$

Đối với hình $ADD'BCC'$, ta có :

$$V_2 = S_2\left(\frac{a + a + a'}{3}\right)$$

Vì diện tích thiết diện thẳng $S_2 = \frac{1}{2}bh$, nên :

$$V_2 = \frac{1}{6}bh\,(2a + a')$$

Vậy thể tích của khối đá hoặc cát đó là :

$$V = V_1 + V_2 = \frac{h}{6}(2ab + ab' + a'b + 2a'b') \quad (2)$$

Ta có thể biến đổi công thức (2) thành :

$$V = \frac{h}{6}\left[ab + 4\left(\frac{a + a'}{2}\right)\left(\frac{b + b'}{2}\right) + a'b'\right]$$

Nhận xét các thành phần trong dấu móc, ta thấy :

ab là diện tích đáy trên của khối đá.

$a'b'$ là diện tích đáy dưới của khối đá.

$\left(\frac{a + a'}{2}\right)\left(\frac{b + b'}{2}\right)$ là diện tích của thiết diện giữa có các cạnh là các đường trung bình của các mặt hình thang.

Vì vậy, nếu gọi B_1, B_2, B_3 lần lượt là diện tích của đáy trên, thiết diện giữa, đáy dưới

---

(*) *Sở dĩ nói gần giống hình chóp cụt mà không phải là hình chóp cụt vì các cạnh AA', BB', CC', DD' kéo dài có thể không gặp nhau tại cùng 1 điểm.*

(**) *Hình lăng trụ lệch khác hình lăng trụ ở chỗ có 2 mặt đáy không song song với nhau.*

và h là chiều cao của khối đá hoặc cát thì thể tích của khối đó là :

$$V = \frac{h}{6}(B_1 + 4B_2 + B_3) \qquad (3)$$

Đó là *công thức vạn năng*, bởi vì công thức (3) không những biểu thị thể tích của khối đá hoặc cát nói trên mà nó còn dùng để tính thể tích của bất kì hình nào.

Các bạn hãy kiểm nghiệm xem ! Ta có thể biến đổi công thức (3) trở về dạng các công thức quen thuộc :

– Đối với hình lăng trụ, hình hộp, hình trụ, vì diện tích đáy trên, đáy dưới và thiết diện giữa đều bằng diện tích đáy B, nên ta có :

$$V = \frac{h}{6}(B + 4B + B) = Bh.$$

– Đối với hình chóp, vì khoảng cách từ đỉnh đến thiết diện giữa bằng $\frac{1}{2}$ chiều cao nên diện tích thiết diện giữa bằng $\frac{1}{4}$ đáy dưới B, ta có :

$$V = \frac{h}{6}\left(0 + 4\frac{B}{4} + B\right) = \frac{Bh}{3}$$

– Đối với hình nón, vì bán kính của thiết diện giữa bằng $\frac{1}{2}$ bán kính của đáy dưới, nên :

$$V = \frac{h}{6}\left[0 + 4\pi\left(\frac{r}{2}\right)^2 + \pi r^2\right] = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

– Đối với hình chóp cụt, các bạn tính sẽ thấy rằng diện tích của thiết diện giữa

$B_2 = \frac{B}{4} + \frac{B'}{4} + \frac{\sqrt{BB'}}{2}$. Do đó ta có :

$$V = \frac{h}{6}\left[B + 4\left(\frac{B}{4} + \frac{B'}{4} + \frac{\sqrt{BB'}}{2}\right) + B'\right]$$
$$= \frac{h}{3}\left(B + B' + \sqrt{BB'}\right)$$

– Đối với hình nón cụt, vì bán kính của thiết diện giữa bằng trung bình cộng của 2 bán kính của đáy trên và đáy dưới, nên :

$$V = \frac{h}{6}\left[\pi r^2 + 4\pi\left(\frac{r + r'}{2}\right)^2 + \pi r'^2\right]$$
$$= \frac{\pi h}{3}(r^2 + r'^2 + rr')$$

– Đối với hình cầu, vì chiều cao bằng $2r$, nên ta có :

$$V = \frac{2r}{6}(0 + 4\pi r^2 + 0) = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

– Đối với khối chỏm cầu, các bạn tính sẽ thấy diện tích của thiết diện giữa

$$B_2 = \pi\left(rh - \frac{h^2}{4}\right)$$

và diện tích của đáy dưới $B_3 = \pi(2rh - h^2)$. Do đó :

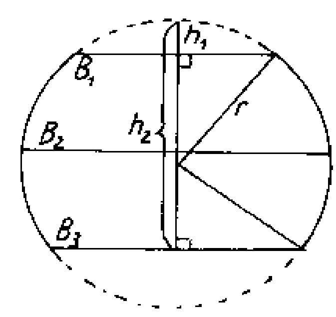
$$V = \frac{h}{6}\left[0 + 4\pi\left(rh - \frac{h^2}{4}\right) + \pi(2rh - h^2)\right]$$
$$= \pi h^2\left(r - \frac{h}{3}\right)$$

– Đối với khối đới cầu, nếu ta coi thể tích của nó là hiệu của 2 khối chỏm cầu tương ứng có chiều cao là h_2 và h_1 (xem hình 2) thì chiều cao của đới cầu $h = h_2 - h_1$, diện tích đáy trên $B_1 = \pi(2rh_1 - h_1^2)$, diện tích đáy dưới $B_3 = \pi(2rh_2 - h_2^2)$ và diện tích thiết diện giữa

$$B_2 = \pi\left(rh_1 + rh_2 - \frac{h_1^2}{4} - \frac{h}{4} - \frac{h_1h_2}{2}\right)$$

$$V = \frac{h_2 - h_1}{6}\Big[\pi(2rh_1 - h_1^2) +$$
$$+ 4\pi\left(rh_1 + rh_2 - \frac{h_1^2}{4} - \frac{h_2^2}{4} - \frac{h_1h_2}{2}\right) +$$
$$+ \pi\left(2rh_2 - h_2^2\right)\Big]$$
$$= \pi(h_2 - h_1)\left[r(h_1 + h_2) - \frac{1}{3}(h_1^2 + h_1h_2 + h_2^2)\right]$$
$$= \left[\pi h_2^2\left(r - \frac{h_2}{3}\right)\right] - \left[\pi h_1^2\left(r - \frac{h_1}{3}\right)\right]$$

Các biểu thức trong hai dấu móc của công thức trên chính là các thể tích của 2 chỏm cầu lập nên khối đới cầu đó.



Hình 2

Công thức vạn năng còn được dùng để tính diện tích của các hình phẳng, nếu trong công thức (3) ta coi V là diện tích, h là chiều cao, và B_1, B_2, B_3 là cạnh đáy trên, cạnh giữa và cạnh đáy dưới của hình :

– Đối với hình bình hành, hình chữ nhật, nếu gọi các đáy trên, đáy dưới và thiết diện giữa là a, đường cao là b thì :

$$V = \frac{b}{6}(a + 4a + a) = ab$$

– Đối với hình tam giác, ta có :

$$V = \frac{h}{6}\left(0 + 4\frac{a}{2} + a\right) = \frac{ah}{2}$$

– Đối với hình thang thì :

$$V = \frac{h}{6}\left(a + 4\frac{a+b}{2} + b\right) = h\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

– Đối với hình quạt, nếu coi là một tam giác cong, có góc ở đỉnh là α và đường cao bằng r (xem hình 3a) thì cạnh giữa $B_2 = 2\pi\left(\frac{r}{2}\right)\frac{\alpha}{360}$ và đáy dưới $B_3 = 2\pi r\frac{\alpha}{360}$. Do đó :

$$V = \frac{r}{6}\left(0 + 4\pi r\frac{\alpha}{360} + 2\pi r\frac{\alpha}{360}\right)$$

$$= \pi r^2\frac{\alpha}{360}$$

– Đối với hình tròn, nếu coi nó là một hình quạt đặc biệt khi góc $\alpha = 360^o$, tức là 2 cạnh của hình quạt trùng nhau (xem hình 3b) thì :

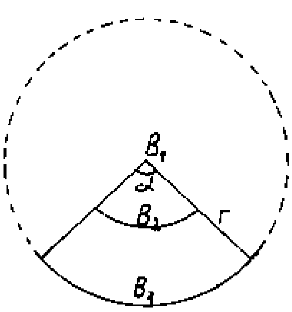
$$V = \frac{r}{6}(0 + 4\pi r + 2\pi r) = \pi r^2$$

– Đối với hình vành khăn, nếu coi nó là một hình thang cong có chiều cao $h = r - r'$ và 2 cạnh bên của hình thang trùng nhau thì đáy trên $B_1 = 2\pi r'$, đáy dưới $B_3 = 2\pi r$ và cạnh giữa $B_2 = 2\pi\left(\frac{r+r'}{2}\right)$ (xem hình 3c). Do đó :

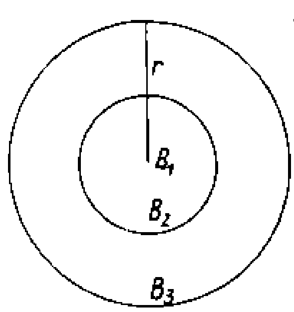
$$V = \frac{r-r'}{6}[2\pi r' + 4\pi(r+r') + 2\pi r]$$

$$= \pi(r^2 - r'^2)$$

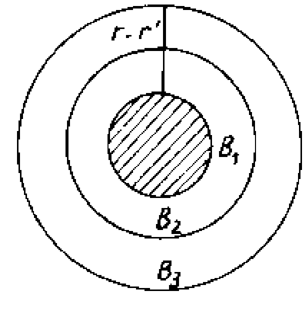
Không những đối với các hình phẳng mà *công thức vạn năng* còn đúng cho cả các hình tròn xoay trong không gian nữa, nếu ta coi V là diện tích xung quanh của hình tròn xoay, h là chiều cao và B_1, B_2, B_3 là các vòng(*) có bán kính vuông góc với đường sinh và kẻ từ các đầu mút hoặc điểm giữa của đường sinh đến trục quay.



Hình 3a



Hình 3b



Hình 3c

– Đối với hình trụ, vì các bán kính của 3 vòng đều bằng bán kính đáy hình trụ nên ta có :

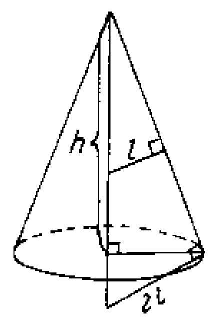
$$V = \frac{h}{6}(2\pi r + 4.2\pi r + 2\pi r) = 2\pi rh$$

– Đối với hình nón, nếu bán kính của vòng ở giữa (bán kính kẻ từ điểm giữa của đường sinh) bằng l thì bán kính của vòng ở đáy dưới sẽ là $2l$ (xem hình 4a). Do đó :

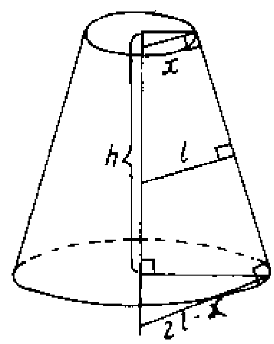
$$V = \frac{h}{6}(0 + 4.2\pi l + 2\pi . 2l) = 2\pi lh.$$

– Đối với hình nón cụt, nếu bán kính của *vòng* ở giữa bằng l và bán kính của *vòng* ở đáy trên là x thì bán kính của *vòng* ở đáy dưới là $2l - x$ (hình 4b). Ta có :

$$V = \frac{h}{6}[2\pi x + 4.2\pi l + 2\pi(2l - x)] = 2\pi lh.$$



Hình 4a



Hình 4b

– Đối với hình cầu, vì chiều cao bằng $2r$ và các bán kính của 3 *vòng* đều bằng r (hình 5a) nên :

$$V = \frac{2r}{6}(2\pi r + 4.2\pi r + 2\pi r) = 4\pi r^2$$

– Đối với chỏm cầu, vì các bán kính của ba *vòng* đều bằng r (hình 5b) nên :

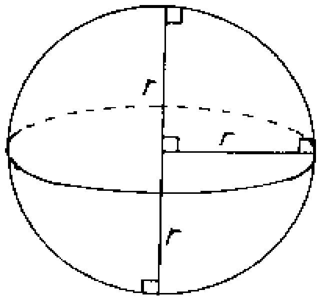
$$V = \frac{h}{6}(2\pi r + 4.2\pi r + 2\pi r) = 2\pi rh.$$

---

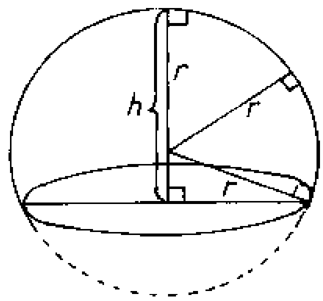
* *Các vòng này khác với các vòng tròn đáy và vòng tròn giữa của các hình tròn xoay, nếu đường sinh không song song với trục quay.*

– Đối với đới cầu cũng thế (hình 5c) ta có :

$$V = \frac{h}{6}(2\pi r + 4.2\pi r + 2\pi r) = 2\pi rh$$



Hình 5a

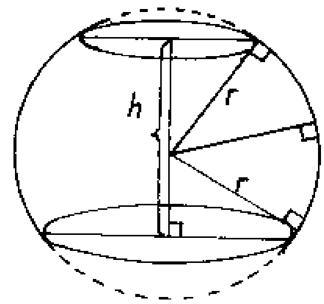


Hình 5b

Thật là tài tình và thú vị biết bao : Công thức (3) quả nhiên là *công thức vạn năng*.

Nhưng các bạn đã thấy : việc tìm ra *công thức vạn năng* không phải là một việc dễ dàng, tự nhiên mà có, mà công thức đó được đề ra từ một trường hợp cụ thể (tính thể tích của khối đá hoặc cát) rồi nó được kiểm nghiệm qua tất cả các trường hợp khác (diện tích và thể tích các hình).

Trong khi kiểm nghiệm, nhiều khi ta phải dùng đến phép biện chứng, nghĩa là đứng trên quan điểm động, để giải quyết (ví dụ coi hình quạt, hình tròn là các tam giác cong, coi hình vành khăn là hình thang cong, v.v...) hoặc phải sáng tạo ra các khái niệm mới để cho phù hợp với công thức trên (ví dụ các *vòng*) ở đáy trên, đáy dưới và ở giữa của các hình tròn xoay) và tất nhiên là phải vận dụng các kiến thức đã học một cách rất linh hoạt, vì mỗi khi kiểm nghiệm một công thức là phải giải một bài toán rồi (ví dụ việc tính thiết diện giữa của hình chóp cụt, diện tích các đáy trên, đáy dưới và thiết diện giữa của chỏm cầu, đới cầu, v.v...)



Hình 5c

Vì vậy, việc tìm ra và kiểm nghiệm *công thức vạn năng* nói trên rất là bổ ích.

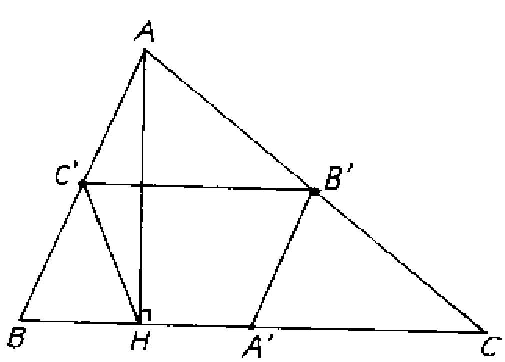
ĐƯỜNG TRÒN CHÍN ĐIỂM

NGÔ THÚC LANH

Với những kiến thức về hình học lớp 7(*), có thể dễ dàng chứng minh định lí sau đây :

Trong mọi tam giác ABC, các chân của các đường trung tuyến, các chân của các đường cao và các trung điểm của các đoạn nối trực tâm với các đỉnh, nằm trên cùng một đường tròn gọi là đường tròn chín điểm.

Thật vậy, trước hết ta chú ý rằng vòng tròn $A'B'C'$ đi qua chân của các trung tuyến,

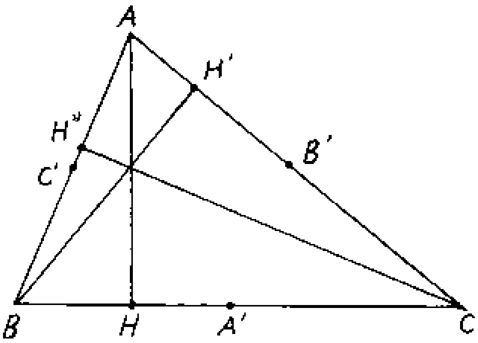


cũng đi qua chân các đường cao. Ta hãy chứng minh rằng nó đi qua H chẳng hạn. Trong tam giác vuông AHB ta có $AC' = C'B = C'H$. Mặt khác vì $A'B'$ là một đường trung bình nên $A'B' = AC' = C'B$. Vậy $C'H = A'B'$. Và như vậy hình thang $HA'B'C'$ là cân, do đó nó nội tiếp được.

Bây giờ ta lại xét đến tam giác IBC, trong đó I là trực tâm của tam giác ABC. Chân các đường cao của nó cũng là H, H', H''. Vòng tròn $HH'H''$, qua chân các đường cao của tam giác IBC, cũng qua chân các trung tuyến của nó, tức là qua trung điểm của các đoạn IB và IC nối trực tâm I với các đỉnh B và C. Tương tự như vậy ta sẽ thấy rằng nó cũng qua trung điểm của đoạn IA.

Ta hãy định *tâm* và *bán kính* của đường

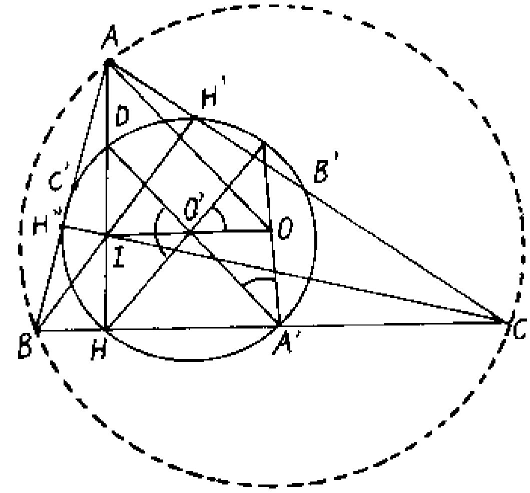
(*) *Tương đương lớp 9 hiện nay.*



tròn chín điểm. Trung điểm O' của đoạn OI nối tâm O của vòng tròn ngoại tiếp của tam giác ABC và trực tâm I, là tâm của đường tròn 9 điểm, vì các đường thẳng góc với các cạnh vạch từ A', B', C' và H, H', H'' xác định O và I theo thứ tự, và các đường trung trực của các dây $A'H$, $B'H'$, $C'H'$ xác định điểm O'. Mặt khác, nếu gọi D là trung điểm của đoạn AI thì $O'D$ là song song với OA và bằng một nửa của OA. Do đó bán kính của đường tròn 9 điểm bằng một nửa bán kính của vòng tròn ngoại tiếp với tam giác ABC.

Đường tròn 9 điểm thoạt tiên đã được các nhà toán học Öle (1707 – 1783), Phoiebakhơ (1800 – 1834) nghiên cứu. Tiếp sau đó, các nhà toán học Anh là Ha, Hamintơn, Kedi lại tìm ra được thêm nhiều tính chất khác của nó nữa. Sau đây là một số tính chất đã tìm được :

Có thể chứng minh rằng đường tròn 9 điểm tiếp xúc với vòng tròn nội tiếp và với ba vòng tròn bàng tiếp của tam giác ABC (Ha) ; nó còn tiếp xúc với 12 đường tròn nội tiếp và bàng tiếp với các tam giác xác định bởi ba đỉnh và trực tâm I (Hamintơn) ; nó còn tiếp xúc với mười sáu đường tròn nội tiếp và bàng tiếp với bốn tam giác có đỉnh



là các tâm của các đường tròn tiếp xúc với ba cạnh của tam giác mà các đỉnh là các trung điểm của các đoạn nối trực tâm I với các đỉnh A, B, C, nó còn tiếp xúc với những nhóm khác gồm 16 ; 64, 256, 1024... đường tròn, suy ra từ các nhóm trên (Kedi).

BÀI TOÁN "DỰNG ĐA GIÁC ĐỀU"

VĂN NHƯ CƯƠNG

Chỉ dùng thước và compa, có thể dựng được đa giác đều có số cạnh bất kì không ?

– Đề nghị nói qua phương pháp dựng đa giác đều của Gaoxơ, Risơlốt, Hecmetxơ.

– Đề nghị cho biết cách dựng đa giác đều mà số cạnh là một số nguyên tố có dạng $2^{2^n} + 1$ *(thí dụ : cách dựng đa giác đều 17 cạnh).*

(nhiều bạn đọc)

Chúng ta biết rằng mọi đa giác đều bất kì đều có thể nội tiếp được trong đường tròn, và khi đó các đỉnh của đa giác sẽ chia đường tròn thành những cung bằng nhau. Ngược lại nếu ta đã chia được đường tròn thành n cung bằng nhau ; nối liên tiếp các điểm chia ta sẽ được đa giác đều n cạnh. Vì thế việc dựng đa giác đều n cạnh tương đương với việc chia đường tròn bất kì thành n phần bằng nhau. Bài toán "dựng đa giác đều" do đó còn có tên gọi là bài toán "chia đường tròn".

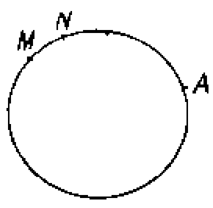
1. Ở chương trình phổ thông, ta đã biết dùng thước và compa có thể chia đường tròn thành 2, 3, 4, 5 và 6 phần bằng nhau. Nhưng dùng thước và compa ta lại có thể chia đôi dễ dàng một cung tròn bất kì, vì vậy nếu ta đã dựng được đa giác đều n cạnh thì cũng có thể dựng được đa giác đều với số cạnh gấp đôi, gấp bốn... nói tổng quát là $2^k . n$ cạnh (k là số nguyên, không âm).

Chẳng hạn, vì đã dựng được đa giác đều 4, 5, 6 cạnh nên cũng có thể dựng được đa giác đều 8, 10, 12, 16, 20, 24, ... cạnh.

Dùng thước và compa ta cũng có thể dựng được đa giác đều 15 cạnh. Thực vậy, vì ta có

$$\frac{1}{15} = \frac{2}{5} - \frac{1}{3},$$

và vì đã biết cách chia đường tròn thành 5 phần và 3 phần bằng nhau, nên từ một điểm A trên đường tròn ta đặt theo cùng một chiều hai cung $\overset{\frown}{AM}$ và $\overset{\frown}{AN}$ có độ dài lần lượt là $\frac{2}{5}$ và $\frac{1}{3}$ độ dài đường tròn (h.1) Cung $\widehat{MN}$ có độ dài bằng $\frac{1}{15}$ độ dài đường tròn. Như vậy ta đã tìm được cách chia đường tròn thành 15 phần bằng nhau.



Hình 1

Nói tổng quát từ định lí số học "*nếu m và n là hai nguyên tố với nhau, thì luôn luôn có hai số nguyên x và y sao cho :*

$$\frac{1}{m \cdot n} = \frac{x}{m} - \frac{y}{n}$$

ta có kết quả sau đây :

"*Bằng thước và compa, nếu ta đã dựng được những đa giác đều m và n cạnh, trong đó m và n là hai số nguyên tố với nhau thì ta có thể dựng được đa giác đều m.n cạnh*".

2. Nhà toán học nổi tiếng người Đức Gaoxơ (1777–1855) đã chứng minh rằng : "*Nếu p là một số nguyên tố có dạng $2^{2^n} + 1$ (n là số nguyên không âm) thì dùng thước và compa ta có thể dựng được đa giác đều p cạnh ; còn nếu p là một lũy thừa (với số mũ ≥ 2) của một số nguyên tố dạng trên hay p là một số nguyên tố không thuộc dạng trên thì dùng thước và compa, không thể dựng được đa giác đều p cạnh*".

Áp dụng phần đầu của định lí Gaoxơ, ta thấy rằng vì 3, 5, 17 đều là những số nguyên tố có dạng $2^{2^n} + 1$ $(3 = 2^{2^0} + 1, 5 = 2^{2^1} + 1, 17 = 2^{2^2} + 1)$ nên ta có thể dựng được đa giác đều 3, 5 và 17 cạnh. Nếu $n = 3$ thì $p = 2^{2^3} + 1 = 257$; số này cũng là số nguyên tố nên có thể dựng được đa giác đều 257 cạnh. Năm 1832, ở phần phụ lục một tác phẩm của Gaoxơ, nhà toán học Risơlốt đã trình bày cách dựng đa giác này.

Nếu $n = 4$ thì $p = 2^{2^4} + 1 = 65.537$ cũng là số nguyên tố. Chính Gaoxơ đã nêu lên phương hướng dựng đa giác đều 65.537 cạnh và Hecmetxơ theo phương hướng đó đã tìm ra phép dựng, bản thảo của lời giải xếp đầy một va li to. Với $n = 5, 6, 7$ thì số $p = 2^{2^n} + 1$ không phải số nguyên tố.

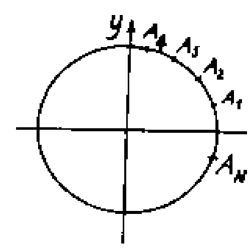
Từ phần thứ hai của định lí Gaoxơ ta thấy rằng dùng thước và compa không thể dựng được đa giác đều 9 cạnh hay 25 cạnh (vì $9 = 3^2$, $25 = 5^2$, 3 và 5 lại là số nguyên tố dạng $2^{2^n} + 1$) cũng không thể dựng được đa giác đều 7 cạnh, 11 cạnh, 13 cạnh, 19 cạnh... vì đó là những số nguyên tố nhưng không có dạng $2^{2^n} + 1$.

3. Nhờ định lí của Gaoxơ và do các nhận xét ở phần 1 ta đi đến kết luận tổng quát :

"*Dùng thước và compa có thể dựng được và chỉ dựng được các đa giác đều N cạnh, nếu N là số có dạng $N = 2^k, p_1p_2...p_m$ trong đó k là số nguyên không âm, $p_1, p_2, ..., p_m$ là những số nguyên tố có dạng $2^{2^n} + 1$ và không trùng nhau.*

Theo kết luận này, chẳng hạn đa giác đều 170 cạnh có thể dựng được bằng thước và compa vì 170 = 2.5.17.

4. Để kết thúc, ta sẽ nêu lên phép dựng đa giác đều 17 cạnh. Phép dựng này do Gaoxơ tìm ra khi ông 19 tuổi, và cũng do thành công này Gaoxơ đã quyết định dứt khoát rằng mình sẽ quyết tâm trở thành một nhà toán học. Sự thực ông đã là một nhà toán học lớn.



Hình 2

Trên hình 2, ta có một đường tròn đã được chia thành 17 phần bằng nhau bởi các điểm $A_1, A_2, ..., A_{16}, A_{17}$ chọn một hệ trục tọa độ Đêcac vuông góc Oxy, gốc O tại tâm đường tròn, trục Ox đi qua điểm A_{17} và đơn vị dài trên trục bằng bán kính đường tròn. Nếu ta xem mỗi điểm M của mặt phẳng có tọa độ (a, b) là điểm biểu diễn của số phức $a + ib$ thì điểm A_1 biểu diễn số phức $z = \cos\frac{2\pi}{17} + i\sin\frac{2\pi}{17}$, điểm A_2

biểu diễn phức số $\cos\frac{4\pi}{17} + i\sin\frac{4\pi}{17}$ tức là số phức z^2, ... nói tổng quát điểm A_k biểu diễn số phức z^k ; đặc biệt điểm A_{17} biểu diễn số phức :

$$z^{17} = \cos\frac{34\pi}{17} + i\sin\frac{34\pi}{17} = 1.$$

Vậy số phức z là một trong những nghiệm của phương trình $u^{17} - 1 = 0$ (1). Phương trình (1) có thể viết thành $(u - 1)(u^{16} + u^{15} + ... + u + 1) = 0$, nên z là một trong các nghiệm của phương trình $u^{16} + u^{15} + ... + u + 1 = 0$, tức là ta có đẳng thức $z^{16} + z^{15} + ... + z^2 + z = -1$. (2)

Ta chú ý rằng $z^{17} = 1$ nên $z^{17-k} = z^{17}.z^{-k} = z^{-k}$, thí dụ $z^{16} = z^{-1}, z^{15} = z^{-2}$ v.v..., và đẳng thức (2) có dạng

$z^{-1} + z^{-2} + ... + z^{-8} + z^8 + ... + z^2 + z = -1$ (3).

Ta đặt :

$$v_1 = z + z^2 + z^4 + z^8 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-4} + z^{-8},$$

$$v_2 = z^3 + z^5 + z^6 + z^7 + z^{-3} + z^{-5} + z^{-6} + z^{-7}.$$

Rõ ràng : $v_1 + v_2 = -1$ và

$$v_1 . v_2 = 4(v_1 + v_2) = -4.$$

Vậy v_1 và v_2 là hai nghiệm của phương trình bậc hai $x^2 + x - 4 = 0$ (4), tức là :

$$v_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{17},\ v_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{17}$$

(phương trình (4) có hai nghiệm khác dấu, tại sao ta lấy v_2 có giá trị âm, bạn đọc hãy tự suy nghĩ và trả lời).

Bây giờ ta lại đặt :

$$w_1 = z + z^4 + z^{-1} + z^{-4}$$

$$w_2 = z^2 + z^8 + z^{-2} + z^{-8}$$

$$w_3 = z^3 + z^5 + z^{-3} + z^{-5}$$

$$w_4 = z^6 + z^7 + z^{-6} + z^{-7}$$

Dễ thấy rằng $w_1 + w_2 = v_1$, $w_1w_2 = -1$, nên w_1 và w_2 là hai nghiệm của phương trình :

$$x^2 - v_1x - 1 = 0. \qquad (5)$$

Tương tự w_3 và w_4 là nghiệm của phương trình : $x^2 - v_2x - 1 = 0.$ (6)

Cuối cùng ta đặt :

$$y_1 = z + z^{-1}$$

$$y_2 = z^4 + z^{-4}$$

Rõ ràng $y_1 + y_2 = w_1$, $y_1 . y_2 = w_3$, nên y_1 và y_2 là nghiệm của phương trình :

$$x^2 - w_1x + w_3 = 0. \qquad (7)$$

(chú ý rằng w_1 và w_3 là các nghiệm dương của các phương trình (5), (6), $y_1 > y_2$).

Đến đây ta chú ý rằng $y_2 = z^4 + z^{-4} = \left(\cos\frac{8\pi}{17} + i\sin\frac{8\pi}{17}\right) + \left(\cos\frac{8\pi}{17} - i\sin\frac{8\pi}{17}\right) =$

$$= 2\cos\frac{8\pi}{17} = 2\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{8\pi}{17}\right) = 2\sin\frac{\pi}{34}.$$

Vậy y_2 chính bằng độ dài của cạnh đa giác đều 34 cạnh nội tiếp trong đường tròn. Biết y_2 có thể tìm được dễ dàng cạnh của đa giác đều 17 cạnh.

Tóm lại, từ những điều nói ở trên, để tìm giá trị của y_2, ta lần lượt giải các phương trình bậc hai sau đây : $x^2 + x - 4 = 0$, hai nghiệm là

$$v_1, v_2 = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{17}\ (v_1 > 0,\ v_2 < 0)$$

$x^2 - v_1x - 1 = 0$, hai nghiệm là $w_1, w_2 =$

$$= \frac{v_1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{v_1^2 + 4}\ (w_1 > 0,\ w_2 < 0)$$

$x^2 - v_2x - 1 = 0$, hai nghiệm là $w_3, w_4 =$

$$= \frac{v_2}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{v_2^2 + 4}\ (w_3 > 0,\ w_4 < 0)$$

$x^2 + w_1x + w_3 = 0$, hai nghiệm là $y_1, y_2 =$

$$= \frac{w_1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{w_1^2 - 4w_3}\ (y_1 > y_2)$$

Nghiệm của các phương trình bậc hai như ta biết có thể dựng được bằng thước và compa, nên đa giác đều 17 cạnh như thế cũng có thể dựng bằng thước và compa.

CHU KÌ CỦA HÀM SỐ VÀ MỘT VÀI ỨNG DỤNG

VŨ DƯƠNG THỤY

Ở lớp 9 khi học đến các hàm số lượng giác, các bạn đã thấy một tính chất đặc biệt của chúng, đó là tính chất tuần hoàn, nghĩa là có chu kì xác định. Chu kì đó gọi là chu kì cộng tính và có thể định nghĩa như sau :

Hàm số $y = f(x)$ được gọi là có chu kì nếu thỏa mãn hệ thức :

$$f(x \pm m) = f(x) \qquad (1)$$

trong đó m là số thực dương.

Dễ dàng thấy rằng nếu m là chu kì thì km cũng là chu kì (k là số tự nhiên). Chẳng hạn hàm số $y = \sin x/2 + \cos 3/4\, x$ có chu kì $m = 8\pi$, hàm số $y = \sin 2\pi x/m$ (m là số thực dương) có chu kì chính là m. Ngoài các hàm số lượng giác, còn có hàm số khác cũng có chu kì, ví dụ như hàm số $y = \{x\}$* (phần lẻ của x) có chu kì là $m = 1$.

Ngoài định nghĩa chu kì như trên, còn có định nghĩa khác là :

Hàm số $y = f(x)$ được gọi là có chu kì nếu thỏa mãn hệ thức :

$$f(mx) = f(x) \qquad (2)$$

Chu kì này phức tạp hơn, gọi là chu kì nhân tính, ở (1) và (2) ta hiểu m là số thực dương, các giá trị $x = \pm m$ và mx đều thuộc miền xác định của hàm số đã cho.

Ví dụ hàm số $y = \sin 2\pi \lg x/\lg m$ (m là số thực dương) có chu kì nhân tính là m.

Một cách tổng quát, ta có thể quan niệm chu kì theo ý nghĩa rộng rãi hơn, cụ thể là hàm số $y = f(x)$ được gọi là có chu kì nếu thỏa mãn hệ thức :

$$f[\varphi(x)] = f(x) \qquad (3)$$

trong đó x là số thực thuộc miền xác định của các hàm số $f(x)$ và $\varphi(x)$, các giá trị của $\varphi(x)$ thuộc miền xác định của hàm số $f(x)$.

Mọi hàm số đều có chu kì $\varphi(x) = x$, đó là trường hợp tầm thường. Rõ ràng là định nghĩa (3) này tổng quát hơn (1) và (2) vì ta thấy rằng :

Khi $\varphi(x) = \pm m$ thì có $f(x \pm m) = f(x)$ (1)

Khi $\varphi(x) = mx$ thì có $f(mx) = f(x)$ (2)

Tới đây, ta có thể xét một vài ứng dụng của chu kì theo (3) trong phạm vi toán sơ cấp, đặc biệt với những kiến thức ở phổ thông. Khái niệm chu kì theo (3) cho phép giải bằng phương pháp sơ cấp một số bài toán về cực trị, và áp dụng vào các hàm hữu tỉ nguyên, đặc biệt là tam thức bậc hai, sẽ được một số kết quả quen thuộc.

Trước hết, ta xét hàm số tam thức bậc hai :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

chu kì của hàm số nếu có sẽ thỏa mãn (3) tức là :

$$a\varphi^2(x) + b(x) + c = ax^2 + bx + c$$

hay $\quad a[\varphi^2(x) - x^2] + b[\varphi(x) - x] = 0$

loại trừ trường hợp tầm thường $\varphi(x) = x$, nghĩa là giả thiết $\varphi(x) \neq x$, ta được :

$$a\varphi(x) + ax + b = 0$$

suy ra $\quad \varphi(x) = -\ [(ax + b)/a] \qquad (4)$

Như vậy hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ thỏa mãn điều kiện $f[-(ax + b)/a] = f(x)$ theo ý nghĩa (3). Từ đó ta rút ra một loạt hệ quả thú vị sau :

1) Nếu $x = x_1$ là nghiệm của phương trình $f(x) = 0$ thì $x_2 = [-(ax_1 + b)/a\ ]$ là nghiệm thứ hai. Bởi vì :

$$f(x_2) = f[-(ax_1 + b)/a] = f(x_1) = 0$$

Chẳng hạn phương trình $2x^2 - 7x + 5 = 0$ có một nghiệm $x_1 = 1$. Thế thì

$$x_2 = [-(2\,.\,1 - 7)/2] = 2{,}5$$

2) Nếu $x = x_o$ là điểm cực trị của hàm số $f(x)$ thì $x = [-(ax_o + b)/a]$ cũng là điểm cực trị, theo tính chất của chu kì. Do đó phương trình $\varphi(x) = x$ là phương trình xác định điểm

* Hàm số này được xác định bởi

$y = \{x\} = x - [x]$ trong đó $[x]$ là hàm số phần nguyên của x, xác định với mọi x thực và có nghĩa là số nguyên lớn nhất không vượt quá x.

Chẳng hạn :

$[\sqrt{2}] = 1, [0{,}2] = 0, [-1{,}5] = -2 \ldots$

cực trị (chú ý rằng hàm số tam thức bậc hai chỉ có một điểm cực trị).

Thật vậy từ $x = [-(ax - b/a]$ suy ra $x = -(b/2a)$ chính là hoành độ của đỉnh parabôn. Giải phương trình $\varphi(x) = x$ ta được $x_o = -(b/2a)$ và do đó $y_o = f(x_o) = = -[(b^2 - 4ac)/4a]$, như đã biết, nếu $a > 0$ thì đây là giá trị nhỏ nhất, nếu $a < 0$ là giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$.

Ví dụ : tìm điểm cực trị của hàm số

$f(x) = 2x^2 - x + 3$ ở đây $a = 2 > 0$ nên hàm số có giá trị nhỏ nhất tại điểm có hoành độ suy ra từ :

$-[(2x - 1)/2] = x$ tức là $x_o = 1/4$

giá trị nhỏ nhất là $y_o = f(1/4) = 2\frac{7}{8}$.

3) Ta sẽ chứng minh định lí Vi-ét :

Nếu x_1, x_2 là nghiệm của tam thức bậc hai thì :

$$x_1 + x_2 = -(b/a)$$
$$x_1x_2 = c/a$$

Thật vậy,

$x_1 + x_2 = x_1[-(ax_1 + b)/a] = -(b/a)$

$x_1x_2 = x_1[-(ax_1 + b)/a] =$

$= [-(ax_1^2 + bx_1)/a) = c/a$

(chú ý $ax_1^2 + bx_1 + c = 0$)

4) Tam thức bậc hai $f(x)$, nếu có nghiệm, có thể phân tích ra thừa số :

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Thật vậy : $f(x) = a(x - x_1)[x + (ax_1 + b)/a]$

$= ax^2 + axx_1 + bx - axx_1 - (ax + bx_1) =$

$= ax^2 + bx + c.$

5) Như vậy hàm số $\varphi(x) = [-(ax + b)/a]$ là chu kì của tam thức bậc hai. Từ đó ta có :

Định lí : Để hai giá trị khác nhau x_1, x_2 của đối số làm cho tam thức bậc hai có cùng một giá trị, tức là $f(x_1) = f(x_2)$ thì điều kiện cần và đủ là phải thỏa mãn hệ thức

$x_1 + x_2 = -(b/a)$ hay $x_2 = [-(ax_1 + b)/a]$

điều kiện cần có thể suy ra từ $f(x_1) = f(x_2)$ với chú ý chu kì của hàm số là

$$\varphi(x) = [-(ax + b)/a]$$

Để có đủ điều kiện đủ, hãy xác định giá trị hàm số tại điểm $x_2 = [-(ax_1 + b)/a]$, ta có

$$f(x_2) = f[-(ax_1 + b)/a] = f(x_1).$$

Từ đây, định lí Vi-ét được xem như là trường hợp đặc biệt của định lí trên, khi

$$f(x_1) = f(x_2) = 0,$$

nghĩa là định lí Vi-ét là điều kiện cần và đủ để x_1, x_2 là các nghiệm của tam thức bậc hai.

Định lí trên có hình ảnh hình học là tung độ của hai điểm phân biệt trên parabôn, có hoành độ đối xứng qua trục đối xứng của parabôn sẽ bằng nhau.

6) Tương tự xét hàm số

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

có hai chu kì không tầm thường suy ra từ phương trình bậc hai đối với $\varphi(x)$:

$$a\varphi(x) + (ax + b)(x) + ax^2 + bx + c = 0$$

tức là :

$$\varphi(x) = [-(ax + b)\pm$$
$$\pm \sqrt{(ax + b)^2 - 4a(ax^2 + bx + c)}]/2a$$

và cũng tương tự, có thể nêu những hệ quả như đã xét ở trên, đặc biệt có thể chứng tỏ rằng, nếu $x = x_1$ là nghiệm của phương trình bậc hai $f(x) = 0$ thì $\varphi(x_1)$ sẽ cho hai nghiệm còn lại và phương trình xác định điểm cực trị là $\varphi(x) = x_1$ sau khi biến đổi có dạng :

$$3ax^2 + 2bx + c = 0.$$

Ví dụ giải bài toán về cực trị trong sách giáo khoa đại số lớp 10 tập hai §44 như sau :

"Dọc theo mỗi cạnh của 1 tấm nhôm hình vuông, cạnh a người ta gấp lên 1 băng để làm thành cái hộp (không nắp) có thể tích lớn nhất. Tính chiều rộng mỗi băng đó ?"

Thể tích của hình hộp là :

$V = f(x) = (a - 2x)^2 . x = 4x^3 - 4ax^2 + a^2x$

với điều kiện $0 < x < a/2$.

Chu kì $\varphi(x) = [a - x \pm \sqrt{x(2x - 3x)}]/2$

Phương trình xác định điểm cực trị $\varphi(x) = x$ có dạng : $12x^2 - 8ax + a^2 = 0$ từ đây, loại trường hợp $x = a/2$, ta có nghiệm $x = a/6$ khi đó $f(a/6) = 2a^3/27$.

Để xác định đây là giá trị lớn nhất hay nhỏ nhất, ta thử và thấy rằng :

$f(a/6) > f(a/5) = 9a^3/125$,

$f(a/6) > f(a/7) = 25a^3/34$

Do đó $V = f(x)$ có giá trị lớn nhất khi $x = a/6$

Phương trình $\varphi(x) = x$ cho những điểm cực trị không những đối với hàm số đại số (có cực trị) mà còn đối với một vài hàm số siêu việt.

Chẳng hạn ta xét trường hợp $f(x) = \sin x$.

Để xác định chu kì ta giải phương trình

$$\sin\varphi(x) = x.$$

Có hai chu kì

$\varphi_1(x) = x + 2k\pi$, $\varphi_2(x) = -x + (2k+1)\pi$

Phương trình $\varphi_1(x) = x$ vô nghiệm còn $\varphi_2(x) = x$ cho nghiệm $x = (2k+1)\pi/2$ là có cực trị.

Tương tự có thể xét $f(x) = \cos x$, và ngay cả một số tổ hợp tuyến tính đơn giản của $\sin x$ và $\cos x$, như $\sin x + \cos x$, $\sin x.\cos x$, hay $a\sin bx$, $a\cos bx$, $a\sin bx + c$ v.v...

Vấn đề về những hàm số siêu việt nào (được đề cập trong chương trình phổ thông) có thể xét cực trị bằng phương pháp trên như đối với hàm số đại số, với chu kì theo ý nghĩa (3) cũng là một bài toán lí thú. Mời các bạn cùng nhau bắt tay vào giải quyết vấn đề này. Cần nhấn mạnh một lần nữa là, nếu phương trình $\varphi(x) = x$ có nghiệm thì hàm số cho trước có cực trị, hay nói một cách khác, một hàm số không có cực trị thì $\varphi(x) = x$ vô nghiệm.

Ví dụ : $f(x) = a/x$ thế thì theo (3) ta có : $a/\varphi(x) = a/x$ với điều kiện $x \neq 0$; $\varphi(x) \neq 0$ ta suy ra $\varphi(x) = x$ với mọi x thuộc miền xác định của hàm số nghĩa là chỉ có một chu kì tầm thường mà thôi.

Hay chẳng hạn xét $f(x) = \operatorname{tg} x$ là hàm số không có cực trị, ở đây $\varphi(x) = x + k\pi$ nên phương trình $\varphi(x) = x$ vô nghiệm.

MỘT SỐ BÀI TOÁN ĐẲNG CHU TRONG KHÔNG GIAN

NGUYỄN HỒNG SƠN

(Lược dịch từ "Coranto")

Trước khi đề cập tới chủ đề của bài này, đề nghị các bạn tự chứng minh (hoặc nhớ lại) một số mệnh đề khá quen biết sau đây :

Mệnh đề 1.

Trong tất cả những hình bình hành có chu vi cho trước thì hình vuông là hình có diện tích lớn nhất.

Mệnh đề 2.

Trong tất cả những hình bình hành có chu vi và chiều dài của một đường chéo cho trước thì hình thoi là hình có diện tích lớn nhất.

Dĩ nhiên là mệnh đề 2 tương đương với mệnh đề sau.

Mệnh đề 2'.

Trong tất cả những tam giác có chu vi và chiều dài của một cạnh cho trước thì tam giác cân là hình có diện tích lớn nhất.

Mệnh đề 3.

Trong tất cả những tam giác có chu vi cho trước thì tam giác đều là hình có diện tích lớn nhất.

Các mệnh đề 1 – 3 trên đây là lời giải của những bài toán cực trị mà người ta thường gọi là những bài toán đẳng chu : Trong số những hình có dạng xác định và có chu vi cho trước hãy tìm hình có diện tích lớn nhất. Ở đây, cần chú ý rằng những mệnh đề 1 và 3 là những trường hợp đặc biệt của một mệnh đề tổng quát hơn : Trong tất cả những hình n cạnh có chu vi cho trước thì hình n cạnh đều là hình có diện tích lớn nhất. Tiến tới giới hạn có thể thấy một cách dễ dàng rằng trong tất cả những hình có chu vi cho trước (hình dáng có thể bất kì) thì hình tròn là hình có diện tích lớn nhất.

Bây giờ chúng ta hãy xét những mệnh đề trong không gian tương tự với các mệnh đề 1–3, trong đó hình bình hành được thay bằng hình hộp, tam giác được thay bằng tứ diện (hình chóp đáy tam giác) còn diện tích thì được thay bằng thể tích.

Bài toán 1.

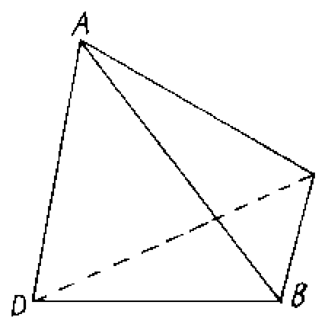
Trong tất cả những hình hộp có tổng chiều dài của các cạnh cho trước, hãy tìm hình hộp có thể tích lớn nhất.

Bài toán 2.

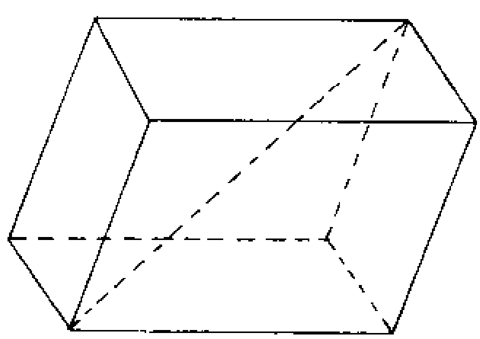
Trong tất cả những hình hộp có tổng chiều dài của các cạnh và chiều dài của một đường chéo cho trước, hãy tìm hình hộp có thể tích lớn nhất.

Trước khi nêu bài toán 2 một cách khác đi, dưới dạng một bài toán trong không gian tương tự như mệnh đề 2', chúng ta hãy thống nhất với nhau một số định nghĩa.

Một đường gấp khúc kín gồm 4 cạnh mà những đỉnh không nằm trong cùng một mặt phẳng thì được gọi là một *tứ giác ghềnh*. Nếu những đỉnh của một tứ diện trùng với những đỉnh của một tứ giác ghềnh thì người ta nói rằng nó *trương* tứ giác đó (hình 1).



Hình 1



Hình 2

Có thể thấy một cách dễ dàng rằng thể tích của một tứ diện trương một tứ giác ghềnh mà các cạnh là một đường chéo và 3 cạnh kề liên tiếp của một hình hộp (hình 2) thì bằng 1/6 thể tích hình hộp này. Vì vậy, bài toán 2 tương đương với bài toán sau :

Bài toán 2'.

Trong tất cả những tứ giác ghềnh có chu vi cho trước bằng 2p và chiều dài của một cạnh cho trước bằng h, hãy tìm tứ giác sao cho tứ diện trương nó có thể tích lớn nhất.

Sau khi đã giải những bài toán trên, chúng ta có thể giải dễ dàng bài toán sau :

Bài toán 3.

Trong tất cả những tứ giác ghềnh có chu vi cho trước bằng 2p, hãy tìm tứ giác sao cho hình tứ diện trương nó có thể tích lớn nhất.

Giải bài toán 1.

Vì rằng trong tất cả những hình bình hành có chiều dài của các cạnh cho trước thì hình chữ nhật là hình có diện tích lớn nhất còn trong tất cả những hình hộp có chiều dài của các cạnh cho trước thì hình hộp chữ nhật là hình có thể tích lớn nhất, nên khi giải bài toán 1, ta chỉ cần xét các hình hộp chữ nhật.

Nếu gọi chiều dài các cạnh của một hình hộp chữ nhật là $a_1 a_2, a_3$ thì bất đẳng thức Côsi.

$$\sqrt[3]{a_1 a_2 a_3} \leq (1/3)(a_1 + a_2 + a_3)$$

(trong đó dấu = chỉ đúng trong trường hợp $a_1 = a_2 = a_3$) sẽ dẫn tới kết quả sau :

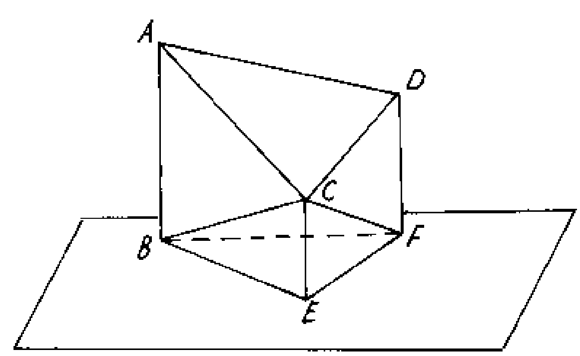
Định lí 1.

Trong tất cả những hình hộp có tổng các cạnh cho trước thì hình lập phương là hình có thể tích lớn nhất.

Giải bài toán 2'

Để giải bài toán này, chúng ta sẽ dùng bổ đề sau.

Gọi P là mặt phẳng vuông góc với cạnh AB của một tứ giác ghềnh $ABCD$ (hình 3).



Hình 3

Chiếu $ABCD$ lên mặt phẳng P, ta được tam giác BEF.

Bổ đề.

Thể tích V của một tứ diện trương tứ giác ABCD được tính theo công thức

$$V = (1/3)hS \quad (1)$$

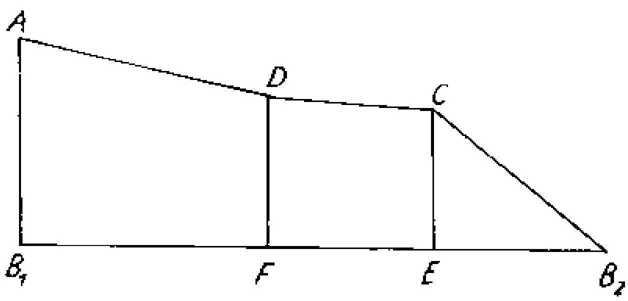
trong đó h là chiều dài cạnh AB.

S là diện tích tam giác BEF.

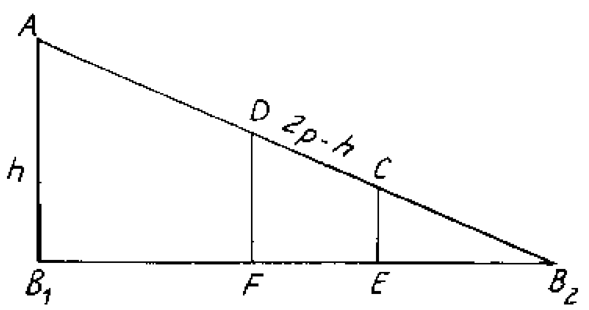
Để chứng minh, chúng ta chỉ cần chú ý rằng các tứ diện $ABCD$ và $ABEF$ tương đương nhau (có thể tích bằng nhau) vì rằng chúng đều tương đương với tứ diện $ABCF$.

Công thức (1) gợi ý ngay cho ta cách giải bài toán 2' : Cần xác định độ dài và vị trí các cạnh BC, CD và AD (hình 3) sao cho diện tích tam giác BEF là lớn nhất.

Để đạt được điều đó, trước nhất cần làm sao cho chu vi của nó có giá trị lớn nhất. Ta hãy trải các mặt $ABFD$, $FDCE$ và CEB lên trên một mặt phẳng. Trên hình phẳng mà ta thu được (hình 4), chiều dài cạnh B_1B_2 bằng chu vi của tam giác BEF, từ đó ta thấy rằng chu vi đó sẽ lớn nhất khi các đoạn AD, DC, CB chỉ tạo thành với cạnh AB một góc $\alpha = \arccos [h/(2p - h)]$ mà thôi (hình 5). Do đó tứ giác ghềnh có cạnh $AB = h$ và chu vi bằng $2p$ sao cho tam giác BEF có chu vi lớn nhất có thể dựng theo cách sau đây :



Hình 4



Hình 5

gấp một hình chữ nhật có cạnh $AB_1 = h$ và đường chéo $AB_2 = 2p - h$ thành mặt xung quanh của một lăng trụ đáy tam giác sao cho điểm B_1 đến trùng với điểm B_2 và đoạn AB_1 là một cạnh bên của nó. Khi đó, đường B_1ADCB_2 trở thành tứ giác ghềnh mà ta muốn có.

Bằng cách đó, bài toán của chúng ta đã được đưa về bài toán đẳng chu đối với tam giác BEF. Như chúng ta đã biết, với một chu vi cho trước, tam giác này sẽ có diện tích lớn nhất khi $BR = FE = EB$, do đó tứ giác $ABCD$ đáp ứng yêu cầu của bài toán 2', phải có các cạnh AD, DC và CB bằng nhau. Với điều kiện này và điều kiện đòi hỏi AD, DC và CB tạo thành với AB chỉ một góc mà thôi, tứ giác $ABCD$ sẽ được xác định một cách duy nhất.

Và như vậy là ta đã chứng minh xong :

Định lí 2 :

Trong tất cả những tứ diện trương tứ giác ghềnh ABCD có chu vi cho trước bằng 2p và chiều dài của cạnh AB cho trước bằng h thì tứ diện có thể tích lớn nhất là tứ diện trương tứ giác mà các cạnh AD, DC và CB bằng nhau và làm thành với cạnh AB những góc bằng nhau.

Đồng thời, chúng ta cũng có được cách dựng tứ giác ghềnh trương tứ diện lớn nhất : muốn vậy, ta lấy một hình chữ nhật có một cạnh bằng h và đường chéo bằng $2p - h$ và gấp nó thành mặt xung quanh của một hình lăng trụ tam giác đều.

Giải bài toán 3.

Ta hãy tính thể tích cực đại nói tới trong định lí 2. Từ hình 5, ta thấy rằng chu vi tam giác BEF bằng

$$\sqrt{(2p - h)^2 - h^2} = 2\sqrt{p(p - h)}$$

nghĩa là diện tích cực đại của nó bằng

$$[2\sqrt{p(p - h)}/3]^3 \,.\, \sqrt{3}/4 = p(p - h)/3\sqrt{3} \;;$$

cuối cùng, thể tích lớn nhất của hình tứ diện được trương, theo công thức (1), bằng :

$$V = (1/3)h\,p(p - h)/3\sqrt{3} = ph(p - h)/9\sqrt{3} \quad (2)$$

Bây giờ, chúng ta có thể giải bài toán 3 một cách dễ dàng. Bài toán này khác với bài toán 2' là ở đây người ta *chỉ cho biết chu vi* của tứ giác.

Dĩ nhiên là để giải bài toán này, chỉ cần lấy giá trị h trong bài toán trên sao cho vế phải của công thức (2) có giá trị lớn nhất. Giá trị h đó được xác định từ bất đẳng thức Côsi :

$$h(p - h) \leqslant \{ [h + (p - h)]/2\}^2 = p^2/4 \;;$$

nó bằng $p/2$ vì rằng $h = p - h$ khi $h = p/2$.

Từ đó suy ra lời giải của bài toán ba :

Định lí 3.

Trong tất cả những tứ diện trương các tứ giác ghềnh có chu vi cho trước thì tứ diện có thể tích lớn nhất là tứ diện trương tứ giác trong đó các cạnh bằng nhau và góc giữa mọi cặp cạnh cũng bằng nhau.

Thật vậy, nếu $h = p/2$ thì chiều dài của mỗi cạnh còn lại sẽ bằng $(2p - h)/3 = p/2$; có thể chứng minh sự bằng nhau của các góc bằng cách tính trực tiếp (vì $h = p/2$ nên tất cả các góc đều bằng arccos (1/3)) ; tuy nhiên, một cách đơn giản hơn, có thể chú ý rằng trong tứ giác mà ta xét tất cả các cạnh đều có vai trò như nhau.

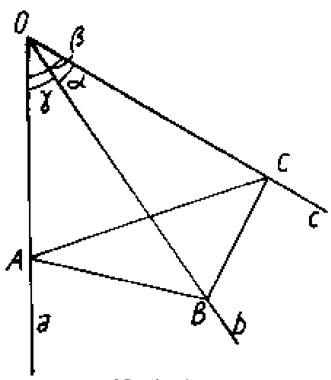
CÔNG THỨC CÔ-SIN

NGUYỄN CÔNG QUỲ

Trong hình học phẳng ta biết rằng cho trước hai cạnh $AB = c$, $AC = b$ của tam giác ABC và góc A thì cạnh thứ ba $BC = a$ được tính theo công thức $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ (1)

Đó là *công thức côsin cho các tam giác.*

Trong hình học không gian ta hãy xét bài toán tương tự sau đây : *Trong một góc tam diện Oabc, cho trước hai mặt $\widehat{aOb} = \gamma$, $\widehat{aOc} = \beta$ và nhị diện A có cạnh Oa, hãy tính mặt thứ ba $\widehat{bOc} = \alpha$.*



Hình 1

Trên cạnh Oa ta hãy đặt một đoạn OA bằng đơn vị rồi qua A kẻ những đường vuông góc với Oa trong các mặt aOb và aOc, cắt Ob ở B, cắt Oc ở C (hình 1). Như vậy góc BAC chính là góc phẳng của nhị diện cạnh Oa nên có độ lớn bằng A. Áp dụng công thức côsin cho các tam giác BOC và BAC ta được

$$BC^2 = OB^2 + OC^2 - 2OB.OC\cos\alpha$$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC\cos A$$

Nhưng $OB = 1/\cos\gamma$, $OC = 1/\cos\beta$, $AB = \mathrm{tg}\gamma$, $AC = \mathrm{tg}\beta$. Thay vào hai đẳng thức trên, ta rút ra. $1/\cos^2\beta + 1/\cos^2\gamma - 2\cos\alpha/\cos\beta\cos\gamma = \mathrm{tg}^2\beta + \mathrm{tg}\gamma - 2\mathrm{tg}\beta\mathrm{tg}\gamma\cos A$

Từ đó dễ dàng đưa đến công thức

$$\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos A \qquad (2)$$

Đó là *công thức côsin cho các tam diện.* Công thức đó có thể viết thành :

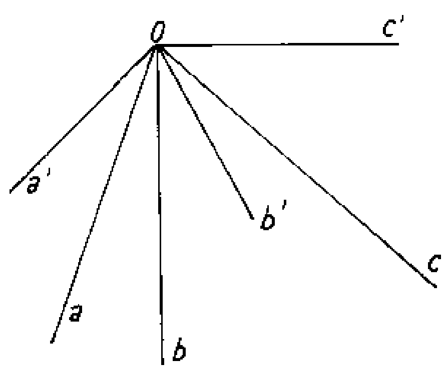
$$\cos A = (\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma)/\sin\beta\sin\gamma \qquad (2')$$

Công thức (2') cho phép ta tính được các góc nhị diện của một tam diện khi biết các mặt của tam diện đó.

Từ công thức đó có thể suy ra rằng : *nếu hai tam diện cùng hướng có các mặt tương ứng đôi một bằng nhau thì chúng bằng nhau.*

Một bài toán ngược lại được đặt ra là : *cho biết các góc nhị diện của một tam diện, hãy tính các mặt của tam diện đó.*

Để giải bài toán này cần biết khái niệm *tam diện bù*. Giả sử ta có tam diện $Oabc$. Qua đỉnh O ta hãy dựng các tia Oa', Ob', Oc' theo thứ tự vuông góc với các mặt bOc, cOa, aOb và sao cho các tia Oa, Oa' nằm cùng phía đối với mặt bOc ; Ob, Ob' nằm cùng phía đối với mặt cOa ; Oc, Oc' nằm cùng phía đối với mặt aOb (hình 2). Ta thu



Hình 2

được tam diện $Oa'b'c'$ gọi là tam diện bù của tam diện $Oabc$.

Dễ dàng chứng minh rằng nếu tam diện $Oa'b'c'$ là bù của $Oabc$ thì ngược lại tam diện $Oabc$ cũng là bù của tam diện $Oa'b'c'$. Hai tam diện như vậy gọi là bù nhau.

Người ta chứng minh được rằng nếu hai tam diện $Oabc$ và $Oa'b'c'$ bù nhau thì với những kí hiệu tương tự trên ta có

$$A + \alpha' = B + \beta' = C + \gamma' = A' + \alpha = B' + \beta = C' + \gamma = \pi \quad (3)$$

(các mặt và các nhị diện được tính bằng rađian)

Trở lại bài toán đã nêu trên ta hãy dựng tam diện bù $Oa'b'c'$ của tam diện $Oabc$ cho trước và viết công thức (2') cho tam diện bù đó.

$$\cos A' = (\cos\alpha' - \cos\beta'\cos\gamma')/\sin\beta'\sin\gamma'$$

Theo các hệ thức (3) ta có $\alpha' = \pi - A$, $\beta' = \pi - B$, $\gamma' = \pi - C$, $A' = \pi - \alpha$. Thay vào ta được :

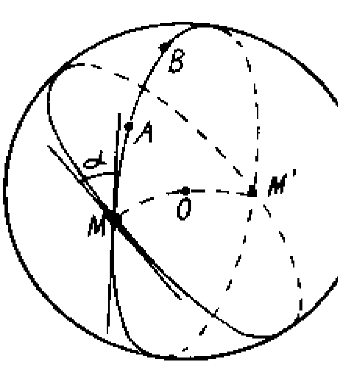
$$\cos\alpha = (\cos A + \cos B\cos C)/\sin B\sin C \quad (4)$$

Công thức này chính là lời giải của bài toán trên. Từ công thức này ta có thể suy ra rằng : *nếu hai tam diện cùng hướng có các góc nhị diện tương ứng đôi một bằng nhau thì chúng bằng nhau.*

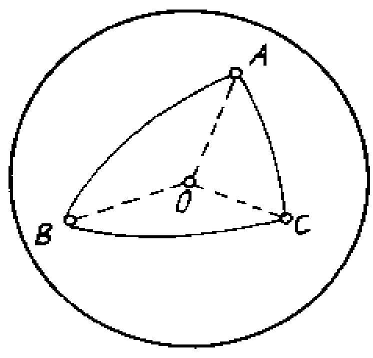
Các công thức (2) và (4) xác định mối quan hệ giữa các mặt và nhị diện của một tam diện. Đó là các công thức cơ bản của hình học các tam diện.

Ngoài ra các công thức đó còn cho phép ta xác định quan hệ giữa các cạnh và góc của một *tam giác cầu* (tức tam giác vẽ trên mặt cầu).

Trước hết cần hiểu biết sơ lược về hình học cầu. Trên một mặt cầu nếu cho trước hai điểm A, B không đối xứng qua tâm mặt cầu, thì có thể vẽ được một và chỉ một đường tròn lớn qua A và B mà thôi (hình 3). Vì vậy trên mặt cầu đường tròn lớn đóng vai trò tương tự như đường thẳng trên mặt phẳng. Góc của hai đường tròn lớn cắt nhau ở một điểm M, ta



Hình 3



Hình 4

sẽ hiểu là góc α giữa hai tiếp tuyến của mặt cầu tại M. Góc đó cũng chính là góc nhị diện tạo bởi hai mặt phẳng của hai đường tròn lớn.

Cho ba điểm A, B, C trên một mặt cầu, trong đó không có hai điểm nào là xuyên tâm đối. Như vậy thì qua mỗi cặp điểm (B, C), (C, A), (A, B) có một đường tròn lớn. Hình tạo bởi ba cung tròn lớn BC, CA, AB gọi là tam giác cầu ABC(1) (hình 4). Nếu gọi a, b, c là độ dài các cung BC, CA, AB, R là bán kính cầu, $\alpha = BOC$, $\beta = COA$, $\gamma = AOB$ thì $\alpha = a/R$, $\beta = b/R$, $\gamma = c/R$ (các góc α, β, γ được đo bằng rađian). Nếu hiểu các góc A, B, C của tam giác cầu là góc tạo bởi các cung nói trên qua các điểm đó, thì các góc này chính là góc nhị diện của tam diện $OABC$. Áp dụng công thức (2) cho tam diện này ta được

$$\cos(a/R) = \cos(b/R)\cos(c/R) + \sin(b/R)\sin(c/R)\cos A. \quad (5)$$

Đó là *công thức côsin cho các tam giác cầu.*

Từ công thức này ta rút ra

$$\cos A = [\cos(a/R) - \cos(b/R)\cos(c/R)]/\sin(b/R)\sin(c/R). \quad (5')$$

Nếu áp dụng công thức (4) cho tam diện $OABC$ thì ta lại được

$$\cos(a/R) = (\cos A + \cos B\cos C)/\sin B\sin C. \quad (6)$$

Các công thức (5) và (6) là những *công thức cơ bản của lượng giác cầu*. Chúng xác định các quan hệ giữa các cạnh và góc của một tam giác cầu.

Từ các công thức đó có thể suy ra các tiêu chuẩn bằng nhau của hai tam giác cầu. Bên cạnh những tiêu chuẩn như đối với tam giác thẳng, ta còn thấy thêm : *Nếu hai tam giác cầu có 3 góc tương ứng đôi một bằng nhau thì chúng bằng nhau.*

Như vậy, ta đã thấy các công thức côsin cho các tam giác phẳng, các tam diện và các tam giác cầu. Các công thức đó có quan hệ mật thiết với nhau như chúng ta đã thấy trong cách xây dựng ở trên. Đặc biệt, công

(1) Thật ra qua 2 điểm A, B có 2 cung của đường tròn lớn. Sau này ta sẽ chỉ lấy cung nhỏ hơn.

thức côsin trên mặt phẳng có thể coi là một trường hợp giới hạn của công thức côsin trên mặt cầu khi bán kính của mặt cầu lớn vô cùng. Thật vậy khi $R \to \infty$ thì $\sin(a/R) \to a/R$ do đó

$$\cos(a/R) \to \sqrt{1-(a/R)^2} = [1-(a/R)^2]^{1/2} \approx 1 - a^2/2R$$

Tương tự như vậy đối với $\sin(b/R)$, $\sin(c/R)$, $\cos(b/B)$ và $\cos(c/R)$. Công thức (5) bây giờ trở thành

$$1 - a^2/2R^2 = (1 - b^2/2R^2)(1 - c^2/2R^2) + (bc/R^2)\cos A \quad (7)$$

Để ý rằng khi $R \to \infty$, theo công thức tính gần đúng

$$(1 - b^2/2R^2)(1 - c^2/2R^2) \approx 1 - b^2/2R^2 - c^2/2R^2.$$

Thay vào (7) sau một vài biến đổi đơn giản cuối cùng ta được

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

tức là ta lại tìm thấy công thức côsin trên mặt phẳng.

Bây giờ ta xét thêm trường hợp đặc biệt khi tam giác cầu có góc vuông ở A chẳng hạn. Lúc đó $\cos A = \cos(\pi/2) = 0$ và công thức (5) trở thành

$$\cos(a/R) = \cos(b/R)\cos(c/R) \quad (8)$$

Công thức này được gọi là *công thức Pitago trên mặt cầu*, không phải vì được Pitago phát hiện ra, mà vì một lí do sâu xa hơn, bản chất hơn. Thật vậy nếu cho $R \to \infty$ thì (8) trở thành

$$1 - a^2/2R^2 = (1 - b^2/2R^2)(1 - c^2/2R^2) \approx 1 - b^2/2R^2 - c^2/2R^2.$$ Từ đó $a^2 = b^2 + c^2$

tức là ta lại trở về công thức Pitago trên mặt phẳng. Thực chất của tên gọi trên là ở chỗ đó.

BẤT ĐẲNG THỨC EC-ĐÔ-SƠ

NGUYỄN CÔNG QUỲ

TỪ DỰ ĐOÁN ĐẾN KHẲNG ĐỊNH

Một số các bạn, trong khi làm toán, có thể đã gặp bài toán sau đây : "*Chứng minh rằng tổng các khoảng cách từ một điểm M trong một tam giác ABC đến các đỉnh tam giác đó không nhỏ hơn hai lần tổng các khoảng cách từ điểm đó đến các cạnh (hay phần kéo dài của cạnh)*"

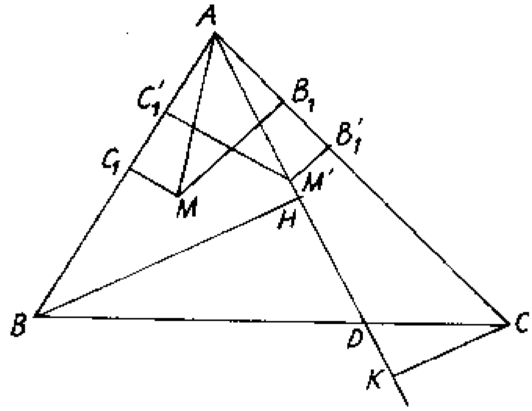
Đây là một bài toán khá đơn giản. Nếu đặt $MA = R_a$, $MB = R_b$, $MC = R_c$ và gọi d_a, d_b, d_c theo thứ tự là các khoảng cách từ M đến các cạnh BC, CA, AB, thì điều cần chứng minh trong bài toán trên là

$$R_a + R_b + R_c \geqslant 2(d_a + d_b + d_c) \quad \text{(E)}$$

Cách đây gần bốn chục năm, nhà toán học nổi tiếng Hung-ga-ri P. Ecđôsơ, trong khi nghiên cứu các tính chất của tam giác, lần đầu tiên đã nêu lên bất đẳng thức trên, mà sau này người ta vẫn quen gọi là bất đẳng thức Ecđôsơ. Bị lôi cuốn bởi tính giản dị của bài toán, nhà toán học lao vào chứng minh ; song vinh dự giải được bài toán đó không thuộc về ông, mà thuộc về nhà hình học nổi tiếng người Anh tên là Moocđen. Tuy nhiên chứng minh của Moocđen (dựa vào lượng giác) chỉ có ý nghĩa lịch sử, vì nó khá phức tạp và rườm rà.

Mãi đến năm 1945 (tức là mười năm sau khi Ecđôsơ phát biểu bài toán trên), nhà toán học Ma Cadarinốp mới đề xuất được một lời giải thuần túy hình học có thể chấp nhận được. Tiếp theo đó nhiều nhà toán học trên thế giới đã nêu lên được những lời giải ngắn gọn của bài toán đã đặt ra.

Thật ra việc chứng minh bất đẳng thức (E) không khó lắm, và có thể nói là thích hợp với trình độ của các bạn (ngay cả các bạn ở lớp 8 đã làm quen với việc chứng minh bất đẳng thức). Thật vậy, giả sử A_1, B_1, C_1 là các hình chiếu của M trên các cạnh $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Lấy điểm M đối xứng của M qua đường phân giác góc A và gọi B_1', C_1' là các hình chiếu của M' trên CA, AB. Gọi D là giao điểm $AM' \times BC$ và H, K là các hình chiếu của B, C trên AM'. Ta có (hình vẽ) :



$a = BC = BD + DC \geqslant BH + CK$ (đẳng thức chỉ xảy ra khi $H \equiv K \equiv D$, lúc đó AM' là đường cao của tam giác). Từ đó có $a.M'A \geqslant BH.M'A + CK.M'A = 2S(M'AB) + 2S(M'CA) = cM'C_1' + bM'B_1'$, tức là $aM'A \geqslant cM'C_1' + bM'B_1'$. Nhưng vì M và M' đối xứng với nhau qua phân giác góc A nên $M'A = MA$, $M'C_1' = MB_1$, $M'B_1' = MC_1$, nên ta có thể viết $aMA \geqslant cMB_1 + bMC_1$ hay $cR_a \geqslant cd_b + bd_c$, tức là

$$R_a \geqslant (c/a)d_b + (b/a)d_c. \qquad (1)$$

Tương tự $R_b \geqslant (a/b)d_c + (c/b)d_a$, $R_c \geqslant (b/c)d_a + (a/c)d_b$ và cộng lại ta được

$$R_a + R_b + R_c \geqslant$$
$$\geqslant \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) d_a + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right) d_b +$$
$$+ \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) d_c$$

Nhưng các tổng trong dấu ngoặc là tổng hai số đảo ngược nên chúng đều không nhỏ hơn 2 (các bạn lớp 8 cố gắng chứng minh tính chất này), do đó :

$$R_a + R_b + R_c \geqslant 2(d_a + d_b + d_c)$$

Đẳng thức chỉ xảy ra khi M' là trực tâm của tam giác ABC, đồng thời $a = b = c$, nói cách khác M' (và do đó cả M) là tâm của tam giác đều ABC.

Trên đây là một trong những lời giải tương đối ngắn gọn của bài toán đặt ra.

NHỮNG CỐ GẮNG ĐỂ MỞ RỘNG BÀI TOÁN CỦA ECĐÔSƠ

Sau khi chứng minh được bất đẳng thức (E) người ta còn chứng minh được những bất đẳng thức sau đây

$$R_aR_bR_c \geqslant 8d_ad_bd_c \qquad (2)$$

$$\sqrt{R_a} + \sqrt{R_b} + \sqrt{R_c} \geqslant \sqrt{2}(\sqrt{d_a} + \sqrt{d_b} + \sqrt{d_c}) \qquad (3)$$

$$1/R_a + 1/R_b + 1/R_c \leqslant (1/d_a + 1/d_b + 1/d_c)/2 \qquad (4)$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác đã cho là đều và M là tâm của tam giác đó.

Các bạn thích đi sâu có thể tự mình chứng minh các bất đẳng thức trên : (2) và (3) có thể xuất phát từ (1), rồi áp dụng các bất đẳng thức Côsi hoặc Bunbiacốpxki ; để chứng minh bất đẳng thức (4) có thể áp dụng bất đẳng thức (E) cho điểm M và tam giác mà các đỉnh là ảnh của A_1, B_1, C_1 trong phép nghịch đảo cực M phương tích bằng đơn vị.

Thế thì những bất đẳng thức trên có liên quan gì đến việc mở rộng bài toán của Ecđôsơ. Muốn biết điều đó, trước hết ta cần biết thế nào là giá trị trung bình của các số dương cho trước. Trong đại số học, người ta gọi giá trị trung bình bậc k (k là một số thực) của các số dương $x_1, x_2, ..., x_n$ là số

$$M_k(x_1, x_2, ..., x_n) = \sqrt[k]{(x_1^k + x_2^k + ... + x_n^k)/n}$$

Người ta cũng chứng minh được rằng khi k dần tới 0 thì $M_k(x_1, x_2, ..., x_n)$ dần tới trung bình nhân của các số $x_1, x_2, ..., x_n$, tức là

$$M_0(x_1, x_2, ..., x_n) = \sqrt[n]{x_1x_2...x_n/n}$$

Còn giá trị trung bình quen thuộc như trung bình cộng, trung bình toàn phương, trung bình điều hòa theo thứ tự ứng với các giá trị của k bằng 1, 2 và –1, tức là

$$M_1(x_1, x_2, ..., x_n) = (x_1 + x_2 + ... + x_n)/n$$
$$M_2(x_1, x_2, ..., x_n) = \sqrt{(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2)/n}$$
$$M_{-1}(x_1, x_2, ..., x_n) = n/(1/x_1 + 1/x_2 + ... + 1/x_n)$$

Bây giờ nếu ta viết lại các bất đẳng thức (2), (3), (4) dưới các dạng khác như sau

$$\sqrt[3]{R_aR_bR_c/3} \geqslant 2\sqrt{d_ad_bd_c/3} \qquad (2')$$

$$\sqrt[1/2]{(R_a^{1/2} + R_b^{1/2} + R_c^{1/2})/3} \geqslant$$
$$\geqslant 2\sqrt[1/2]{(d_a^{1/2} + d_b^{1/2} + d_c^{1/2})/3} \qquad (3')$$

$$\frac{3}{1/R_a + 1/R_b + 1/R_c} \geqslant 2\frac{3}{1/d_a + 1/d_b + 1/d_c} \qquad (4')$$

thì các bất đẳng thức này cùng với bất đẳng thức (E) có thể tóm tắt trong cách viết sau

$$M_k(R_a, R_b, R_c) \geqslant 2M_k(d_a, d_b, d_c) \qquad (5)$$

với $k = -1, 0, 1/2, 1$.

(Đẳng thức xảy ra khi tam giác đã cho là đều và M là tâm của tam giác đó).

Một giả thuyết được đặt ra là bất đẳng thức (5) có thể mở rộng cho mọi số thực k tùy ý. Nhưng chẳng bao lâu giả thuyết đó đã bị bác bỏ vì người ta đã chứng minh được bất đẳng thức (thật sự)

$$R_a^2 + R_b^2 + R_c^2 > (2d_a^2 + d_b^2 + d_c^2)$$

tức $M_2(R_a, R_b, R_c) > 2M_2(d_a + d_b + d_c)$ và tỉ số $M_2(R_a, R_b, R_c)/M_2(d_a, d_b, d_c)$ có thể dẫn tới 2 bao nhiêu cũng được nhưng không thể đạt được giá trị 2.

Tất nhiên là việc chứng minh được bất đẳng thức này đã phủ định hoàn toàn giả thuyết trên. Tuy nhiên đến đây bài toán vẫn chưa chấm dứt. Năm 1958, nhà hình học người Áo tên là Folôrian đã chứng minh được rằng bất đẳng thức (5) đúng với những giá trị k thỏa mãn điều kiện

$$-1 \leqslant k \leqslant 1,$$

và đồng thời cũng chứng minh được rằng với những giá trị của $k > 1$ và < -1 thì

$$M_k(R_a, R_b, R_c) > \sqrt[|k|]{2}\, M_k(d_a, d_b, d_c).$$

Như vậy là việc mở rộng bài toán của Ecđôsơ đã được giải quyết. Tuy nhiên, người ta không bao giờ chịu bằng lòng với những kết quả đã thu được. Nhiều nhà toán học đã nghĩ đến việc mở rộng những kết quả đó vào một đa giác lồi tùy ý. Năm 1948 nhà toán học Fegiơ Tot người Hung-ga-ri đã chứng minh được bất đẳng thức

$$R_1 . R_2 ... R_n \geqslant d_1 . d_2 ... d_n / \cos^n(\pi/n),$$

tức là

$M_o(R_1, R_2, ..., R_n) \geqslant M_o(d_1, d_2, ..., d_n)/\cos^n(\pi/n)$ trong đó R_i và d_i theo thứ tự là các khoảng cách từ một điểm ở trong một đa giác lồi n cạnh đến các đỉnh và các cạnh của đa giác đó. (Đẳng thức chỉ xảy ra khi đa giác đã cho là đều và điểm đã cho là tâm của đa giác đó).

Đồng thời Fegiơ Tot lại nêu lên giả thuyết

$M_k(R_1, R_2, ..., R_n) \geqslant M_k(d_1, d_2, ..., d_n)/\cos^n(\pi/n)$ với $k = 1$ và -1.

Trường hợp $k = 1$ đã được Folôrian và một số nhà toán học khác chứng minh là đúng.

Việc mở rộng những kết quả đã tìm được vào hình học không gian (cụ thể là vào tứ diện) cũng được các nhà toán học quan tâm. Người ta đã chứng minh được bất đẳng thức

$$R_a R_b R_c R_d \geqslant 81 d_a d_b d_c d_d$$

tức là

$M_o(R_a, R_b, R_c, R_d) > 3M_o(d_a, d_b, d_c, d_d)$ (trong đó R_a, ... và d_a, ... là các khoảng cách từ một điểm trong một tứ diện đến các đỉnh và các mặt của tứ diện đó). Tất nhiên người ta nghĩ đến việc thay M_o bằng M_k với k tùy ý, nhưng nhà toán học Mĩ Cadarinốp đã bác bỏ giả thuyết đó bằng những ví dụ cụ thể. Và tiếp theo đó, sự nghiên cứu của các nhà toán học Liên Xô V.L. Rabinôvich và J.U. Iagolôm đã dẫn đến kết quả đúng là

$M_k(R_a, R_b, R_c, R_d) \geqslant 3M_k(d_a, d_b, d_c, d_d)$ với mọi số k không âm.

Trên đây chúng ta đã thấy rằng việc phát hiện, chứng minh và phát triển bài toán của Ecđôsơ quả là một quá trình gay go phức tạp. Việc chứng minh những kết quả đã tìm được thì không khó lắm, mà thật ra chỉ đòi hỏi những kiến thức ở bậc phổ thông. Tuy nhiên loài người đã tốn bao nhiêu công sức, bao nhiêu thời gian, dò dẫm từng bước, dự đoán rồi khẳng định, người nọ tiếp sức cho người kia, thế hệ này kế tục thế hệ khác, cuối cùng mới tìm đến chân lí khoa học. Nhưng dẫu sao, chân lí đó vẫn chưa phải là đỉnh cuối cùng. Loài người luôn luôn suy nghĩ làm cho tầm mắt của mình càng mở rộng, vốn hiểu biết của mình ngày càng thêm phong phú, để đạt tới chân lí khoa học ở mức độ cao hơn.

LÀM QUEN MỘT CHÚT VỚI LIÊN PHÂN SỐ

HOÀNG CHÚNG

1. Ở lớp đầu cấp III, bạn đã học về căn số và biết rằng căn bậc hai của các số không chính phương là số vô tỉ và có thể biểu diễn bằng một *số thập phân vô hạn không tuần hoàn*. Tất nhiên, đối với số thập phân vô hạn không tuần hoàn ta chỉ có thể biết được một số chữ số thập phân của nó mà thôi. Thí dụ :

$\sqrt{2} = 1{,}41421...$ $\pi = 3{,}141592...$

Bạn chắc có lúc tự đặt vấn đề : làm thế nào để tìm các chữ số thập phân đó với số lượng mà ta muốn, nói cách khác : làm thế nào tìm một phân số hay một số thập phân hữu hạn biểu diễn gần đúng số vô tỉ đó, với độ chính xác cho trước ?

2. Trường hợp đơn giản nhất là với các căn bậc hai của các số, người ta đã tìm ra một thuật toán để giải quyết vấn đề trên (thuật toán khai phương các số). Tuy nhiên nhiều bạn có thể không biết thuật toán này, một số bạn khác có thể biết, nhưng không hiểu cơ sở lí luận của thuật toán và vì không dùng thường xuyên nên có thể không còn nhớ.

Bây giờ, nếu có người nhờ bạn : "viết giúp $\sqrt{3}$ gần đúng dưới dạng một phân số thường hay một số thập phân, với sai số không quá $1/10^5$", bạn có thể sử dụng kiến thức của lớp đầu cấp III thôi để trả lời được không ?

Sau đây là một cách rất đơn giản giúp bạn trả lời câu hỏi đó.

Chú ý rằng

$$1 < \sqrt{3} < 2 \qquad (1)$$

ta có thể đặt :

$\sqrt{3} = 1 + 1/a_1$ (a_1 nguyên dương)

do đó $a_1 = 1/(\sqrt{3} - 1) = (\sqrt{3} + 1)/2$

Do (1), nên có thể đặt :

$a_1 = (\sqrt{3} + 1)/2 = 1 + 1/a_2$ (a_2 nguyên dương) hay là

$a_2 = 2/(\sqrt{3} - 1) = \sqrt{3} + 1$

Do (1), nên có thể đặt :

$a_2 = \sqrt{3} + 1 = 2 + 1/a_3$ (a_3 nguyên dương) hay là $a_3 = 1/(\sqrt{3} - 1) = (\sqrt{3} + 1)/2$

Ta thấy $a_3 = a_1$, do đó có thể viết $a_3 = 1 + 1/a_4$ (với $a_4 = a_2$), $a_4 = 2 + 1/a_5$ (với $a_5 = a_3$) v.v...

Tóm lại ta có :

$$\begin{aligned}
\sqrt{3} &= 1 + 1/a_1\\
a_1 &= 1 + 1/a_2\\
a_2 &= 2 + 1/a_3\\
a_3 &= 1 + 1/a_4\\
a_4 &= 2 + 1/a_5\\
a_5 &= 1 + 1/a_6\\
&\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

trong đó tất cả các a_i đều là số nguyên dương.

Từ các kết quả trên đây, ta có thể tìm phân số biểu diễn gần đúng $\sqrt{3}$ với độ chính xác ngày càng cao. Chẳng hạn nếu ta lấy

$a_1 \approx 1$ thì $\sqrt{3} \approx 1 + 1/1 = 2$.

Nếu lấy

$a_2 \approx 2$ thì $\sqrt{3} \approx 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}} = \dfrac{5}{3}$.

$a_3 \approx 1$ thì $\sqrt{3} \approx 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1}}} = \dfrac{7}{4}$

(tính từ dưới lên : $2 + \frac{1}{1} = 3$, $1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$,

$1 + \frac{3}{4} = \frac{7}{4}$).

Nếu lấy $a_4 \approx 2$ thì được

$$\sqrt{3} \approx 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}} = \frac{19}{11}.$$

$a_5 \approx 1$ thì được

$$\sqrt{3} \approx 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1}}}}} = \frac{26}{15}$$

Các bạn có thể thấy rằng các phân số trên đây cho giá trị ngày càng chính xác của $\sqrt{3}$:

2, 5/3, 7/4, 19/11, 26/15, v.v...

Thực vậy, bình phương các số đó ta có các giá trị gần đúng bằng 3, với sai số ngày càng bé :

$2^2 = 4$, $(5/3)^2 = 25/9 = 2{,}77...$

$(7/4)^2 = 49/16 = 3{,}05...$

$(19/11)^2 = 361/121 = 2{,}98...$

$(20/15)^2 = 676/225 = 3{,}004...$

3. Các biểu thức như

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}},\quad 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1}}},\ \text{v.v...}$$

được gọi là các *liên phân số*. Một cách tổng quát, liên phân số *bậc k* là biểu thức dạng

$$a + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_k}}}}$$

trong đó a là *nguyên*, còn $a_1, a_2, ..., a_k$ là số *nguyên dương*. Liên phân số bậc k được kí hiệu gọn là

$$[a_o, a_1, a_2, ..., a_k...]$$

Qua các thí dụ ở trên, ta đã thấy có thể đổi một liên phân số thành một phân số thường. Người ta chứng minh rằng ngược lại, mỗi số hữu tỉ đều có thể biểu diễn duy nhất dưới dạng một liên phân số bậc k nào đó. Thí dụ :

$$\frac{37}{7} = 5 + \frac{2}{7} = 5 + \frac{1}{\frac{7}{2}} = 5 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2}} = [5, 3, 2]$$

$$\frac{256}{117} = 2 + \frac{22}{117} = 2 + \frac{1}{\frac{117}{22}} = 2 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{7}{22}}$$

$$= 2 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{\frac{22}{7}}} = 2 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{7}}} = [2, 5, 3, 7].$$

$$-\frac{37}{7} = -6 + \frac{6}{7} = -6 + \frac{1}{\frac{7}{6}} =$$

$$= -6 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6}} = [-6, 1, 6].$$

4. Nếu ta kéo dài mãi cách tìm căn bậc hai của $\sqrt{3}$ như đã làm ở trên thì ta đi đến một *liên phân số vô hạn* :

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + ...}}}}} = [1, 1, 2, 1, 2, 1, ...].$$

Người ta đã chứng minh rằng *mỗi liên phân số vô hạn biểu diễn một số vô tỉ, và ngược lại mỗi số vô tỉ được biểu diễn bởi một liên phân số vô hạn.*

Liên phân số vô hạn biểu diễn $\sqrt{3}$ là một liên phân số vô hạn *tuần hoàn, chu kì* là (1, 2). Ta viết :

$$\sqrt{3} = [1, \overline{1, 2}].$$

Các bạn dễ dàng tìm thấy rằng :

$$\sqrt{2} = [1, \overline{2}], \sqrt{5} = [2, \overline{4}], \sqrt{6} = [2, \overline{2, 4}].$$

Nhưng không phải bao giờ ta cũng có kết quả "đẹp" như vậy. Từ giữa thế kỉ XVIII, nhà toán học vĩ đại Ơ-le đã chứng minh rằng mọi số vô tỉ dạng $(a + b\sqrt{c})/d$ (a, b, c, d nguyên và $b, c, d \neq 0$) có thể viết dưới dạng liên phân số vô hạn tuần hoàn, và ngược lại mỗi liên phân số vô hạn tuần hoàn biểu diễn một số vô tỉ có dạng $(a + b\sqrt{c})/d$. Như vậy, liên phân số giúp ta thấy một nét bản chất của các số vô tỉ dạng này. Nói riêng, liên phân số vô hạn tuần hoàn

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + ...}}} = [1, \overline{1}] \text{ biểu diễn số}$$

$\varphi = (1 + \sqrt{5})/2$. Số φ xuất hiện trong "phép chia vàng" ; phép chia một đoạn thẳng thành hai phần x, y được gọi là một "phép chia vàng" (tức là một phép chia rất đẹp), nếu như $\frac{x + y}{x} = \frac{x}{y}$.

Lấy $y = 1$ thì $\frac{x + 1}{x} = \frac{x}{1}$ hay $x^2 - x - 1 = 0$.

Nghiệm dương của phương trình này chính là số φ. Từ thời thượng cổ, người ta đã thấy rằng một hình chữ nhật (hình dạng quyển sách, mặt bàn, khung cửa...) có hai cạnh tỉ lệ với x, y như trên thì được nhiều người ưa thích nhất, trông đẹp mắt nhất, do đó "phép chia vàng" được sử dụng rộng rãi trong đời sống.

Đối với số e (cơ số của lô-ga-rit tự nhiên), người ta tìm thấy rằng

e = [2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, 1, 10, 1, 1, ...]

Liên phân số vô hạn này không tuần hoàn, nhưng cũng được lập theo một quy luật : 1, 2, hai lần 1, 4, hai lần 1, 6, hai lần 1, 8... Đối với số π, người ta chưa tìm thấy một quy luật gì trong biểu diễn nó bằng liên phân số : π = [3, 7, 15, 1, 292, 11, ...].

5. Liên phân số là một công cụ có hiệu lực trong nhiều vấn đề toán học. Nói riêng, nó giúp biểu diễn xấp xỉ các số thực rất tiện lợi.

Cho số thực α biểu diễn bởi liên phân số

$$d = [a_o, a_1, a_2, ...]$$

Xét liên phân số

$$d_n = [a_o, a_1, ..., a_n].$$

Sau khi thực hiện các phép tính trong d_n (từ dưới lên), ta được một phân số P_n/Q_n. Ta gọi $d_n = P_n/Q_n$ là *giản phân bậc n* của d (nếu d có bậc là k thì $n \leq k$).

Trong thí dụ trên đây về tìm giá trị của $\sqrt{3}$:

$$\sqrt{3} = [1, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, ...]$$

ta đã tính các giản phân

$d_1 = [1, 1] = 2/1$, $d_2 = [1, 1, 2] = 7/4$,

$d_3 = [1, 1, 2, 1] = 19/11$, ...

Gọi $d_n = P_n/Q_n$ và $d_{n+1} = P_{n+1}/Q_{n+1}$ là các giản phân bậc n và bậc $n + 1$ của liên phân số d biểu diễn số α. Người ta chứng minh được rằng nếu dùng P_n/Q_n biểu diễn số α thì sai số mắc phải sẽ nhỏ hơn $1/(Q_n.Q_{n+1})$. Thí dụ nếu coi $d_3 = 19/11$ ($Q_3 = 11$) gần đúng bằng $\sqrt{3}$ thì, chú ý rằng $d_4 = 26/15$ ($Q_4 = 15$), ta mắc sai số nhỏ hơn $1/(11.15) < 0{,}007$, tức là nhỏ hơn 1/100. Tương tự như vậy, các bạn có thể kiểm tra lại rằng nếu ta biểu diễn số $\sqrt{2}$ bằng giản phân $[1, 2, 2, 2, 2, 2, 2] = 239/169$, thì sai số sẽ nhỏ hơn $1/10^4$; do đó nếu đổi sang số thập phân thì vì $239/169 = 1{,}41420...$, nên ta có thể viết $\sqrt{2} = 1{,}414$ cả ba chữ số thập phân đều chính xác).

Đối với số π, ta có $\pi = [3, 7, 15, 1, 292, 11, ...]$

nên $d_1 = [3, 7] = 22/7$,

$d_2 = [3, 7, 15] = 333/106$,

$d_3 = [3, 7, 15, 1] = 355/113$,

$d_4 = [3, 7, 15, 1, 292] = 103993/33102$.

Do đó, nếu lấy $\pi \approx 22/7$ thì sai số nhỏ hơn $1/(7.106) < 0{,}002$; vì $22/7 = 3{,}1428...$, nên có thể viết $\pi = 3{,}14$ (cả hai chữ số thập phân đều chính xác). Nếu lấy $\pi = 355/113$ thì sai số sẽ nhỏ hơn $1/(113.33102) < 0{,}0000003$, và vì $355/113 = 3{,}1415929...$ nên có thể viết $\pi = 3{,}14159$ (cả năm chữ số thập phân đều chính xác).

PHÉP NGHỊCH ĐẢO

PHẠM VĂN HOÀN

Báo "Toán học và tuổi trẻ" số 16 ra tháng 1 năm 1966 có đăng lời giải của đề thi hình học sau đây trong kì thi kiểm tra học sinh giỏi toán lớp 8 để vào lớp toán dự bị của trường Đại học Tổng hợp Hà Nội :

Cho một đường thẳng Δ và một điểm O cố định ở ngoài đường thẳng ấy. Ứng với mỗi điểm M chạy trên Δ người ta vẽ một điểm N trên nửa đường thẳng OM sao cho $\overline{OM}\,.\,\overline{ON} = 1$.

1) Chứng minh rằng quỹ tích của điểm N là một vòng tròn (C) đi qua O.

2) Cho A là một điểm cố định trên đường thẳng Δ. Người ta vẽ một vòng tròn bất kì đi qua O và A, cắt tại vòng tròn (C) (quỹ tích của giao ở một điểm thứ hai P (khác O) và cắt đường thẳng Δ ở một điểm thứ hai Q (khác A). Chứng minh rằng PQ đi qua một điểm cố định trên vòng tròn (C).

Các bạn học sinh lớp 8 đã được học về phép vị tự : cho O là một điểm cố định, k là một số không đổi, nếu M và N thẳng hàng với O và $\overline{ON}/\overline{OM} = k$ thì N gọi là điểm biến đổi (hay ảnh) của M trong phép vị tự tâm O, tỉ số k. Các bạn cũng đã biết :

"Qua một phép vị tự :

1) Một đường thẳng đi qua tâm biến thành chính nó.

2) Một đường thẳng không qua tâm biến thành một đường thẳng song song.

3) Một đường tròn biến thành một đường tròn".

Ta hãy xét trường hợp $ON.OM = k$, sử dụng kết quả sẽ đạt được để giải bài toán trên và nêu lên một số bài toán khác.

1. Định nghĩa.

Cho O là một điểm cố định, k là một số không đổi. Nếu M và N thẳng hàng với O và

$$\overline{ON}\,.\,\overline{OM} = k$$

thì N gọi là điểm biến đổi (hay ảnh) của M trong *nghịch đảo* tâm O, phương tích k, kí hiệu $I(O\ ;\ k)$.

Ta thấy ngay rằng nếu N là ảnh của M trong phép nghịch đảo $I(O\ ;\ k)$ thì M cũng là ảnh ? ? trong phép nghịch đảo đó.

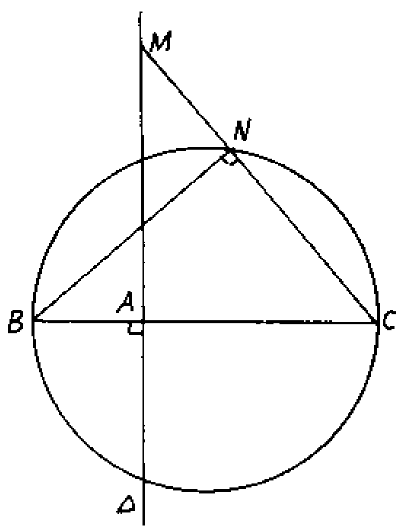
2. Ảnh của một đường thẳng

Định lí 1. Qua một phép nghịch đảo, một đường thẳng đi qua tâm biến thành chính nó, định lí này là hiển nhiên.

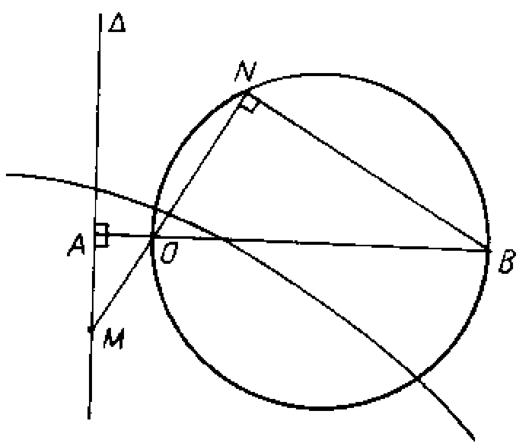
Định lí 2. Qua một phép nghịch đảo, một đường thẳng không đi qua tâm biến thành một đường tròn đi qua tâm nghịch đảo.

Chứng minh.

Từ tâm nghịch đảo O ta hạ OA vuông góc đường thẳng Δ đã cho. Gọi B là ảnh của M qua phép nghịch đảo $I(O\ ;\ k)$ và M là một điểm của Δ (hình 1 : $k > 0$; hình 2 : $k < 0$).



Hình 1



Hình 2

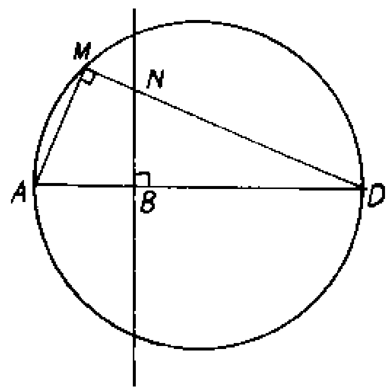
Muốn cho điểm N của đường thẳng OM là ảnh của M trong phép nghịch đảo $I(O\ ;\ k)$ điều kiện cần và đủ là :

$$\overline{ON}\,.\,\overline{OM} = k = \overline{OB}\,.\,\overline{OA}$$

tức là bốn điểm N, M, B, A ở trên cùng một đường tròn, tức là $\widehat{ONB} = \widehat{OMA} = 1$ vuông. Vậy quỹ tích của N là đường tròn đường kính OB.

3. Ảnh của một đường tròn

Định lí 3. Qua một phép nghịch đảo, một đường tròn đi qua tâm biến thành một đường thẳng vuông góc với đường kính xuất phát từ tâm nghịch đảo.



Hình 3

Chứng minh.

Giả sử O là tâm nghịch đảo, A là điểm của đường tròn đã cho đối xứng với O qua tâm của đường tròn, B là ảnh của A trong phép nghịch đảo $I(O\ ;\ k)$.

Gọi M là một điểm bất kì của đường tròn. Muốn cho điểm N của đường thẳng OM là ảnh của M trong phép nghịch đảo $I(O\ ;\ k)$ điều kiện cần và đủ là : $\overline{ON}\,.\,AM = k = \overline{OB}\,.\,\overline{OA}$

tức là bốn điểm N, M, A, B ở trên cùng một đường tròn, tức là : $\widehat{OBN} = \widehat{OMA} = 1$ vuông. Vậy quỹ tích của N là đường thẳng đi qua B và vuông góc với đường kính OBA.

Định lí 4. Qua một phép nghịch đảo, một đường tròn không đi qua tâm biến thành một đường tròn.

Chứng minh.

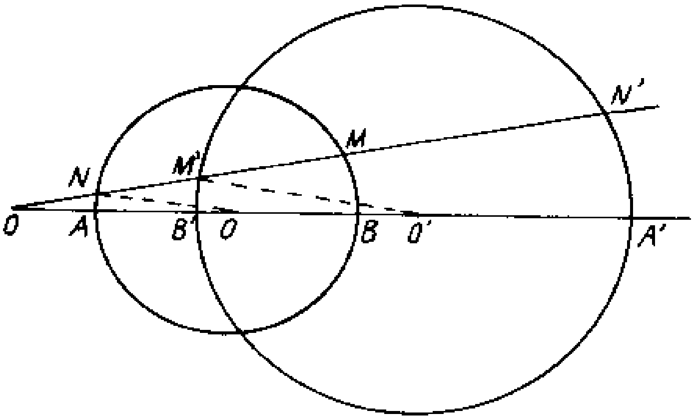
Giả sử O là tâm nghịch đảo, M là một điểm bất kì của đường tròn (C), $p = \overline{OM}\,.\,\overline{ON}$ là phương tích của điểm O đối với đường tròn (C) : ảnh của đường tròn (C) trong phép nghịch đảo $I(O\ ;\ p)$ chính là đường tròn (C).

Nếu M' là ảnh của M trong phép nghịch đảo $I(O\ ;\ k)$ thì ta có :

$$\overline{OM'}\,.\,\overline{OM} = k.$$

Ta suy ra :

$$\overline{OM'}/\overline{ON} = k/p$$



Hình 4

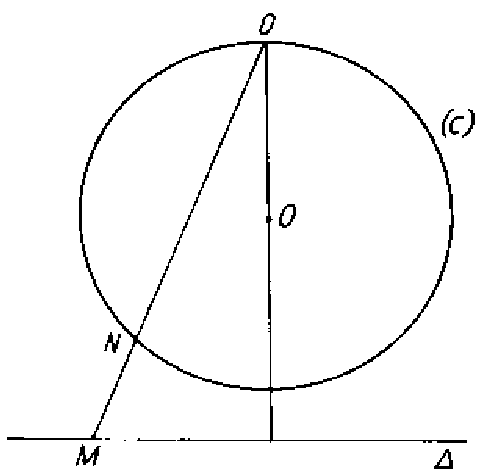
tức là M' là ảnh của N trong phép vị tự tâm O, tỉ số k/p. Đảo lại, nếu M' là ảnh của N trong phép vị tự tâm O, tỉ số k/p thì ta có :

$$\overline{OM'}/\overline{ON} = k/p,$$

do đó $$\overline{OM'}\,.\,\overline{OM}/ON\,.\,\overline{OM} = k/p,$$

vậy $$\overline{OM'}\,.\,\overline{OM} = k,$$

tức là M' là ảnh của M trong phép nghịch đảo $I(O\ ;\ k)$. Vậy ảnh của đường tròn (C) trong phép nghịch đảo $I(O\ ;\ k)$ là ảnh của đường tròn (C) trong phép vị tự tâm O, tỉ số k/p, tức là một đường tròn.



Hình 5

Ta hãy trở lại bài toán nêu từ đầu.

1) Ta có : $\overline{OM}\,.\,\overline{ON} = 1$ và O, M, N thẳng hàng. Vậy N là ảnh của M trong phép nghịch đảo $I(O\ ;\ 1)$. Theo định lí 2 quỹ tích của N là đường tròn (C) đi qua tâm nghịch đảo O.

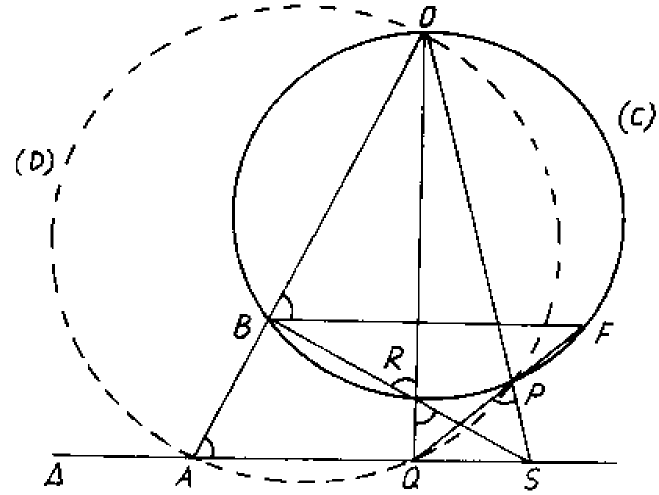
2) Gọi B, R là giao điểm của đường thẳng OA, OQ với đường tròn (C), S là giao điểm của đường thẳng OP với đường thẳng Δ, F là giao điểm của đường thẳng PQ với đường tròn (C) (hình 6).

Ta hãy xét phép nghịch đảo $I(O\ ;\ 1)$ biến đường thẳng Δ thành đường tròn (C) :

B là ảnh của A,

R là ảnh của Q,

P là ảnh của S.



Hình 6

Trong phép nghịch đảo đó, ảnh của đường tròn (D) đi qua tâm nghịch đảo O là đường thẳng BRS.

Vì $\overline{OB}\,.\,\overline{OA} = \overline{OR}\,.\,\overline{OQ} = \overline{OP}\,.\,\overline{OS} = 1$ nên tứ giác $RQSP$ nội tiếp, từ đó ta suy ra $\widehat{P} = \widehat{R}$ vì vậy $\overset{\frown}{OF} = \overset{\frown}{OB}$. Ta thấy F là một điểm cố định, B là một điểm cố định. Muốn xác định điểm F ta chỉ việc lấy giao điểm khác B của đường tròn (C) với đường tròn tâm O.

Ta cũng thấy rằng $BF \parallel \Delta$ vì $\widehat{B} = \widehat{A}$ do
$\widehat{B} = \widehat{P}$ góc nội tiếp trong đường tròn (O)
$\widehat{B} = \widehat{R}$ trong tứ giác nội tiếp $RQSP$,
$\widehat{R} = \widehat{A}$ trong tứ giác nội tiếp $BAQR$.

Các bạn học sinh lớp 8 có thể vận dụng phép nghịch đảo để giải các bài toán sau đây (các bài toán này các bạn cũng có thể chỉ dùng các kiến thức được học ở lớp 8 để giải).

Bài 1. Cho ba điểm A, B, C trên một đường thẳng. Qua A, B và một điểm E biến thiên của đường trung trực Δ của AB ta dựng một đường tròn. Đường thẳng CE cắt đường tròn đó ở M. Tìm quỹ tích của M khi E chạy trên Δ.

Bài 2. Cho ba điểm cố định A, B, C trên một đường thẳng. Một đường tròn biến thiên tiếp xúc với đường thẳng ABC tại điểm C. Tiếp tuyến thứ hai xuất phát từ A chạm đường tròn tại điểm T. Đường thẳng BT cắt đường tròn đó tại M. Tìm quỹ tích của M.

Bài 3. Cho một đường tròn (O) cố định, tâm O, một đường kính AB biến thiên của đường tròn đó, P là một điểm cố định của mặt phẳng. Gọi A', B' là giao điểm của các đường thẳng PA, PB với đường tròn (O). Chứng minh rằng :

1) Đường thẳng $A'B'$ đi qua một điểm cố định.

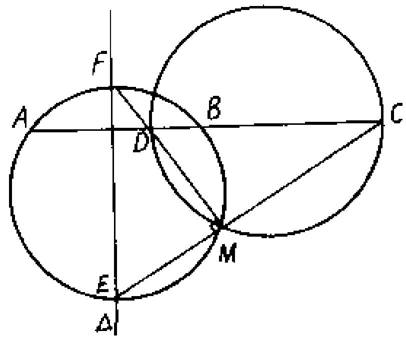
2) Đường tròn $(PA'B')$ cũng đi qua một điểm cố định thứ hai.

SƠ LƯỢC CÁCH GIẢI
CÁC BÀI TOÁN ĐÃ NÊU

Bài 1.

a) Ta thấy điều kiện cần và đủ để 4 điểm A, B, M, E cùng nằm trên một đường tròn là :

$$\overline{CM}\,.\,\overline{CE} = \overline{CA}\,.\,\overline{CB}$$



Hình 7

Vậy, quỹ tích của M là ảnh của Δ trong phép nghịch đảo $I(C, k)$ với $k = \overline{CA}\,.\,\overline{CB}$. Đó là đường tròn đường kính CD, sao cho $CD.CI = k$ (hình 7).

b) Có thể chứng minh trực tiếp như sau. Nối FM, đường này cắt AB ở D. Ta có : $\widehat{FME} = 1$ vuông, tức là $\widehat{DMC} = 1$ vuông

$\overline{CD}\,.\,\overline{CI} = \overline{CM}\,.\,\overline{CE}$ (vì tứ giác $IDME$ nội tiếp). $\overline{CB}\,.\,\overline{CA} = \overline{CM}\,.\,\overline{CE}$ (vì tứ giác $ABME$ nội tiếp). Ta suy ra : $\overline{CD}\,.\,\overline{CI} = \overline{CB}\,.\,\overline{CA}$, vậy D là một điểm cố định (có thể chứng minh rằng D là liên hiệp điều hòa của C đối với A, B).

Như vậy, M nằm trên đường tròn đường kính CD, xác định bởi $\overline{CD}\,.\,\overline{CI} = \overline{CB}\,.\,\overline{CA}$.

Đảo lại, trên đường tròn đó, lấy một điểm M bất kì. Nối CM, đường này cắt Δ ở E.

Ta có :

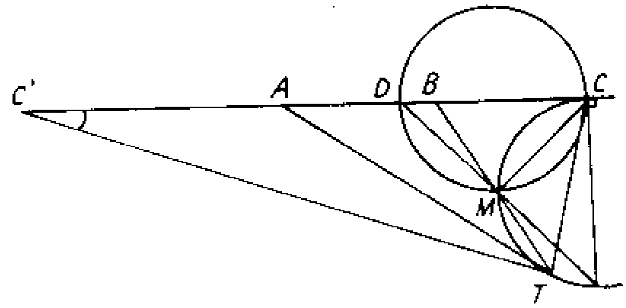
$\overline{CD}\,.\,\overline{CI} = \overline{CM}\,.\,\overline{CE}$ (vì tứ giác $IDME$ nội tiếp) Vậy : $\overline{CB}\,.\,\overline{CA} = \overline{CM}\,.\,\overline{CE}$, điều này chứng tỏ A, B, M, E cùng nằm trên một đường tròn.

Ta suy ra quỹ tích của M là đường tròn đường kính CD, sao cho $\overline{CD}\,.\,\overline{CI} = \overline{CB}\,.\,\overline{CA}$ (C, D là vị trí giới hạn của M khi E ra xa ∞ hoặc dần tới I trên Δ).

Bài 2.

a) Ta thấy điều kiện cần và đủ để AT tiếp xúc với đường tròn (C) là :

$$\overline{BM}\,.\,\overline{BT} = \overline{BC}^2,\ \overline{AT} = \overline{AC}$$



Hình 8

Ta thấy quỹ tích của T là đường tròn (A) tâm A, bán kính AC và quỹ tích của M là ảnh của đường tròn (A) trong phép nghịch đảo $I(B.\overline{BC}^2)$. Đó là đường tròn đường kính CD, C' là một điểm trên đường thẳng ABC được xác định bởi : $\overline{BD}\,.\,\overline{BC'} = \overline{BC}^2$. ($C'$ là điểm đối xứng của C đối với điểm A).

b) Có thể chứng minh trực tiếp như sau. Nối ME, đường này cắt AB ở D. Ta có :

$\widehat{CME} = 1$ vuông, tức là $CMD = 1$ vuông.

$\widehat{C'} = \widehat{C}$ (góc nhọn có cạnh tương ứng vuông góc : $CE \perp C'C$; $C'T \perp CE$ vì tam giác $C'TC$ có trung tuyến AT bằng nửa cạnh $C'C$ là tam giác vuông.

$\widehat{C} = \widehat{M}$ (góc nội tiếp trong đường tròn cùng chắn một cung $\overset{\frown}{TE}$).

Ta suy ra : $\widehat{C'} = \widehat{M}$, tức là tứ giác $C'TMD$ nội tiếp.

Vậy : $\overline{BD}\,.\,\overline{BC'} = \overline{BM}\,.\,\overline{BT}$

Mặt khác, $\overline{BM}\,.\,\overline{BT} = \overline{BC}^2$

Do đó : $\overline{BD}\,.\,\overline{BC'} = \overline{BC}^2$, vậy D là một điểm cố định. Như vậy, M nằm trên đường tròn đường kính CD mà D được xác định bởi $\overline{BD}\,.\,\overline{BC'} = \overline{BC}^2$.

Đảo lại, trên đường tròn đó lấy một điểm M bất kì, nối BM, rồi trên BM lấy điểm T sao cho :

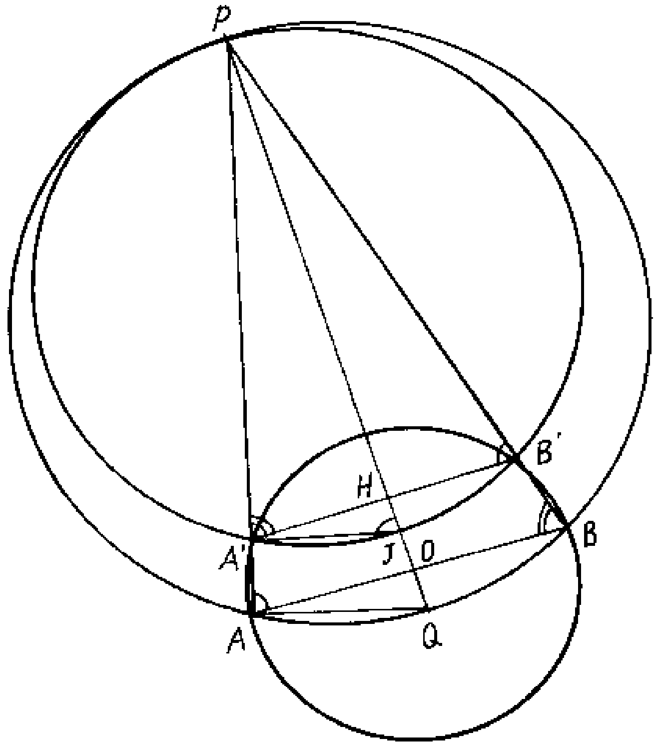
$$\overline{BM}.\overline{BT} = \overline{BC}^2$$

Đi ngược lại phần chứng minh thuận, dễ dàng chứng minh được rằng C, M, T nằm trên đường tròn (C) tiếp xúc với ABC ở C và AT tiếp xúc với (C). Ta suy ra quỹ tích của M là đường tròn đường kính CD xác định như trên (C, D là vị trí giới hạn của M).

Bài 3.

a) Ta xét đường tròn đi qua P và A, B, và gọi Q là giao điểm của PO với đường tròn.

Ta có : $\overline{OP}.\overline{OQ} = \overline{OA}.\overline{OB}$



Hình 9

tức là $\overline{OP}.\overline{OQ} = -R^2$ (R là bán kính của đường tròn O đã cho) :

Như vậy đường tròn PAB đi qua một điểm cố định thứ hai là Q (Q nằm trên OP và được xác định bởi $\overline{OP}.\overline{OQ} = -R^2$).

Ta xét phép nghịch đảo $I(P\ ;\ k)$, k là phương tích của điểm P đối với đường tròn (O) :

$$\overline{PA}.\overline{PA'} = \overline{PB}.\overline{PB'} = k$$

Trong phép nghịch đảo này, ảnh của đường tròn (PAB) là đường thẳng $A'B'$ và ảnh của đường tròn $(PA'B')$ là đường thẳng AB. Vậy ta suy ra :

– $A'B'$ đi qua điểm cố định H là ảnh của Q trong phép nghịch đảo $I(P\ ;\ k)$.

– Đường tròn $(PA'B')$ đi qua điểm cố định J là ảnh của O trong phép nghịch đảo $I(P\ ;\ k)$

b) Có thể chứng minh trực tiếp như sau.

Ta có :

$\widehat{A'} = \widehat{B}$ (vì tứ giác $A'B'BA$ nội tiếp),

$\widehat{B} = \widehat{Q}$ (góc nội tiếp trong đường tròn PAB cùng chắn cung PA).

Vậy, $\widehat{A'} = \widehat{Q}$, từ đó suy ra tứ giác $A'HQA$ nội tiếp và :

$\overline{PH}.\overline{PQ} = \overline{PA'}.\overline{PA} = k$.

Ta cũng có :

$\widehat{B'} = \widehat{A}$ (vì tứ giác $A'B'BA$ nội tiếp).

$\widehat{B'} = \widehat{J}$ (góc nội tiếp trong đường tròn $PA'B'$ cùng chắn cung PA').

Vậy : $\widehat{J} = \widehat{A}$, từ đó suy ra tứ giác $A'JOA$ nội tiếp và :

$$\overline{PJ}.\overline{PO} = \overline{PA'}.\overline{PA} = k.$$

MỞ RỘNG KHÁI NIỆM ĐƯỜNG TRÒN ƠLE VÀ ĐƯỜNG THẲNG ƠLE CHO ĐA GIÁC NỘI TIẾP

LÊ THỐNG NHẤT

Các bạn thân mến !

Khái niệm đường tròn Ơle và đường thẳng Ơle đã được xây dựng đối với tam giác. Dưới góc độ của vectơ, ở bài này tôi xin giới thiệu một cách mở rộng các khái niệm này đối với đa giác nội tiếp. Trước hết ta hãy nhìn lại trường hợp tam giác ở góc độ này.

Đối với tam giác $A_1A_2A_3$, các bạn dễ dàng chứng minh được ngay hai tính chất sau đây :

Tính chất 1 : Điều kiện cần và đủ để M là trọng tâm của tam giác $A_1A_2A_3$ là :

$$\overrightarrow{OM} = (1/3)(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3}) \qquad (1)$$

với O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $A1_A2_A3$.

Tính chất 2 : Điều kiện cần và đủ để H là trực tâm của tam giác $A_1A_2A_3$ là :

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3} \qquad (2)$$

với O là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác $A_1A_2A_3$.

Ngoài ra nếu gọi H_1, H_2, H_3 lần lượt là các tâm đối xứng của O qua A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 thì sẽ có tính chất :

Tính chất 3 : Các đường tròn có tâm lần lượt là H_1, H_2, H_3, và bán kính bằng án kính của đường tròn ngoại tiếp của tam giác $A_1A_2A_3$ sẽ cắt nhau tại một điểm chung H chính là trực tâm của tam giác $A_1A_2A_3$.

(Các bạn hãy tự chứng minh ba tính chất trên)

Bây giờ gọi E là điểm giữa của OH, thế thì :

$$OE = (1/2)(\overrightarrow{OA}_1 + \overrightarrow{OA}_2 + \overrightarrow{OA}_3) \qquad (3)$$

Các bạn đã biết đường tròn tâm E bán kính bằng nửa bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_1A_2A_3$ đi qua các trung điểm M_1, M_2, M_3 của các cạnh A_2A_3, A_1A_3, A_1A_2 : các trung điểm C_1, C_2, C_3 của các đoạn thẳng HA_1, HA_2 HA_3 ; các chân đường vuông góc B_1, B_2, B_3 hạ từ các đỉnh A_1 A_2 A_3 xuống các cạnh đối diện. Đường tròn này được gọi là *đường tròn 9 điểm,* hay còn gọi là *đường tròn Ole* của tam giác $A_1A_2A_3$.

Ngoài ra, do (1), (2), (3) nên 4 điểm *O, M, H, E* là thẳng hàng và đường thẳng đi qua 4 điểm này gọi là đường thẳng Ole của tam giác $A_1A_2A_3$.

Bước đầu ta thử mở rộng các khái niệm trên cho một tứ giác nội tiếp.

Giả sử ta có tứ giác nội tiếp $A_1A_2A_3A_4$, đường tròn S có tâm O, bán kính R là đường tròn ngoại tiếp tứ giác này.

Bằng một cách nhìn tương tự các đẳng thức (1), (2), (3), ta định nghĩa :

Định nghĩa 1 : Trực tâm H của tứ giác $A_1A_2A_3A_4$ nội tiếp trong đường tròn S, tâm O, bán kính R là điểm thỏa mãn :

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA}_1 + \overrightarrow{OA}_2 + \overrightarrow{OA}_3 + \overrightarrow{OA}_4 \qquad (2')$$

Định nghĩa 2 : Trọng tâm M của tứ giác $A_1A_2A_3A_4$ nội tiếp trong đường tròn S, tâm O, bán kính R là điểm thỏa mãn :

$$\overrightarrow{OM} = (\overrightarrow{OA}_1 + \overrightarrow{OA}_2 + \overrightarrow{OA}_3 + \overrightarrow{OA}_4) \qquad (1')$$

Định nghĩa này hoàn toàn phù hợp với khái niệm trọng tâm mà ta biết từ trước đến nay (các bạn tự chứng minh).

Định nghĩa 3 : Nếu H là trực tâm của tứ giác $A_1A_2A_3A_4$ nội tiếp trong đường trong S, tâm O, bán kính R thì đường tròn với tâm E là trung điểm của OH, bán kính $R/2$ được gọi là *đường tròn Ole* của tứ giác nội tiếp $A_1A_2A_3A_4$. Như vậy 4 điểm *O, M, E, H* sẽ nằm trên một đường thẳng, đường thẳng này gọi là *đường thẳng Ole* của tứ giác nội tiếp $A_1A_2A_3A_4$.

Bây giờ ta hãy nghiên cứu một vài tính chất của các khái niệm vừa mở rộng đối với tứ giác nội tiếp $A_1A_2A_3A_4$.

Tính chất 3 : Gọi H_1, H_2, H_3, H_4 lần lượt là trực tâm của các tam giác $A_2A_3A_4$, $A_3A_4A_1$, $A_4A_1A_2$, $A_1A_2A_3$; thế thì các đường tròn tâm là H_1, H_2, H_3, H_4 có cùng bán kính R (bán kính đường tròn ngoại tiếp) sẽ cắt nhau tại một điểm H chính là trực tâm của tứ giác.

Chứng minh : Ta có :

$$HH_4 = |\overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OH}_4| =$$
$$= |(\overrightarrow{OA}_1 + \overrightarrow{OA}_2 + \overrightarrow{OA}_3 + \overrightarrow{OA}_4) -$$
$$- (\overrightarrow{OA}_1 + \overrightarrow{OA}_2 + \overrightarrow{OA}_3) = |\overrightarrow{OA}_4| = R$$

Tương tự ta có : $HH_1 = HH_2 = HH_3 = R$.

Vậy 4 điểm H_1, H_2, H_3, H_4 nằm trên đường tròn tâm H bán kính R, ta có điều phải chứng minh.

Tính chất 4 : Bốn đường tròn Ole của các tam giác $A_2A_3A_4$, $A_3A_4A_1$, $A_4A_1A_2$, $A_1A_2A_3$ cắt nhau tạo một điểm E chính là tâm đường tròn Ole của tứ giác nội tiếp $A_1A_2A_3A_4$.

Chứng minh : Nếu gọi E_4 là tâm đường tròn Ole của tam giác $A_1A_2A_3$ thì :

$$EE_4 = |\overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OE}_4| =$$
$$= |(1/2(\overrightarrow{OA}_1 = \overrightarrow{OA}_2 + \overrightarrow{OA}_3 + \overrightarrow{OA}_4) \times$$
$$\times (1/2)\overrightarrow{OA}_1 + \overrightarrow{OA}_2 + \overrightarrow{OA}_3)| = (1/2)||\overrightarrow{OA}_4| = R/2.$$

Tương tự nếu gọi E_1, E_2, E_3, là tâm đường tròn Ole của các tam giác $A_2A_3A_4$, $A_3A_4A_1$, $A_4A_1A_2$, ta có :

$$EE_1 = EE_2 = EE_3 = R/2.$$

Như vậy các điểm E_1, E_2, E_3, E_4 nằm trên đường tròn Ole của tứ giác $A_1A_2A_3A_4$, hay các đường tròn Ole của các tam giác $A_2A_3A_4$, $A_3A_4A_1$, $A_4A_1A_2$, $A_1A_2A_3$ cắt nhau tại điểm E. Cuối cùng, các bạn hãy tự chứng minh tính chất sau đây :

Tính chất 5 : Gọi M_1, M_2, M_3, M_4 lần lượt là trọng tâm của các tam giác $A_2A_3A_4$, $A_3A_4A_1$, $A_4A_1A_2$, $A_1A_2A_3$ thì 4 đoạn thẳng A_1M_1, A_2M_2 A_3M_3, A_4M_4 sẽ cắt nhau tại một điểm M chính là trọng tâm của tứ giác nội tiếp $A_1A_2A_3A_4$ và : $A_iM/MA_i = 3$ (i = 1, 2, 3, 4) Không những thế, các bạn còn có thể chứng minh được ba tính chất rất thú vị nữa :

Tính chất 6 : Gọi M_{ij} là trung điểm đoạn A_iA_j ($i \neq j$) tại M là giao điểm chung của các đường thẳng $M_{ij}M_{kl}$ với (i, j, k, l) là một hoán vị của (1, 2, 3, 4).

Tính chất 7 : Các đoạn thẳng A_1H_1, A_2H_2, A_3H_3, A_4H_4 cắt nhau tại một điểm E

là tâm đường tròn Ơle của tứ giác nội tiếp $A_1A_2A_3A_4$.

Tính chất 8 : Sáu đường vuông góc hạ từ trung điểm của một cạnh (hay một đường chéo) tới cạnh đối diện (hay đường chéo còn lại) cũng cắt nhau tại tâm đường tròn Ơle của tứ giác nội tiếp $A_1A_2A_3A_4$. Như vậy các bạn sẽ hình dung ra cách mở rộng khái niệm đường tròn Ơle và đường thẳng Ơle cho một đa giác nội tiếp bất kỳ. Chúng ta định nghĩa bằng quy nạp : giả sử các khái niệm trên đã định nghĩa cho tất cả các đa giác nội tiếp có số cạnh nhỏ hơn n ; thế thì :

Định nghĩa 1 : Trực tâm H của n giác $A_1A_2A_3... A_n$ nội tiếp trong đường tròn S là điểm chung của n đường tròn bằng đường tròn S và có tâm tại các trực tâm của $(n - 1)$ – giác tạo bởi $(n - 1)$ đỉnh của n – giác $A_1A_2A_3... A_n$. Như vậy sẽ có :

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA}_1 + \overrightarrow{OA}_2 + ... + \overrightarrow{OA}_n$$

với O là tâm của đường tròn ngoại tiếp n – giác $A_1A_2... A_n$.

Định nghĩa 2 : Trọng tâm M của n – giác $A_1A_2... A_n$ nội tiếp đường tròn S là giao điểm chung của đoạn thẳng nối mỗi đỉnh của n giác với trọng tâm của $(n - 1)$ – giá tạo bởi các đỉnh còn lại. Như vậy ta sẽ có M chia trong các đoạn thẳng này theo tỉ số $(n - 1)$: 1 kể từ đỉnh của n – giác và :

$$\overrightarrow{OM} = (\overrightarrow{OA}_1 + \overrightarrow{OA}_2 + ... + \overrightarrow{OA}_n)/n.$$

Trường hợp $n = 2$, trọng tâm M của đoạn thẳng A_1A_2 là trung điểm của đoạn thẳng đó.

*Định nghĩa 3** : Đường tròn Ơle của n – giác $A_1A_2A_3 ... A_n$ nội tiếp đường tròn S là đường tròn đi qua tất cả các tâm của các đường tròn Ơle của các $(n - 1)$ – giác tạo bởi $(n - 1)$ đỉnh của n – giác. Như thế tâm E của đường tròn này thỏa mãn :

$$\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA}_1 + \overrightarrow{OA}_2 + ... + \overrightarrow{OA}_n)/2$$

Trường hợp $n = 2$, đường tròn Ơle của dây cung A_1A_2 của đường tròn S bán kính R là đường tròn bán kính $R/2$ có tâm tại trung điểm của dây cung A_1A_2. Bốn điểm O, M, H, E nằm trên một đường thẳng gọi là *đường thẳng Ơle của n* – giác $A_1A_2...A_n$.

Việc chứng minh tính tồn tại của các định nghĩa 1', 2', 3' là các bài toán dành cho các bạn tự giải.

Ngoài ra, các bạn có thể thấy thêm các tính chất :

*Tính chất 6** : Tất cả các đoạn thẳng nối trọng tâm của k – giác tạo bởi k đỉnh của n – giác với trọng tâm của $(n - k)$ – giác tạo bởi $(n - k)$ đỉnh còn lại đều đi qua trọng tâm M của n – giác.

*Tính chất 7** : Các đoạn thẳng nối mỗi đỉnh của n – giác với trực tâm của $(n - 1)$ – giác tạo bởi $(n - 1)$ đỉnh còn lại sẽ cắt nhau tại tâm đường tròn Ơle của n – giác, và bị tâm này chia thành 2 đoạn bằng nhau.

Hơn nữa : Tất cả các đoạn thẳng nối trực tâm của k – giác tạo bởi k đỉnh của n – giác với trực tâm của $(n - k)$ – giác tạo bởi $(n - k)$ đỉnh còn lại cũng đều đi qua tâm đường tròn Ơle của n – giác và bị tâm này chia thành 2 đoạn bằng nhau. (Ở đây ta hiểu trực tâm H_{ij} của đoạn A_iA_j là điểm thỏa mãn : $(\overrightarrow{OH}_{ij} = \overrightarrow{OA}_i + \overrightarrow{OA}_j)$.

*Tính chất 8** : n (n – 1)/2 đường vuông góc hạ từ tâm đường tròn Ơle của $(n - 2)$ – giác tạo bởi $(n - 2)$ đỉnh của n – giác tới đường thẳng nối 2 đỉnh còn lại cắt nhau tại một điểm chính là tâm đường tròn Ơle của n–giác.

Cuối cùng tôi xin gợi ra một hướng tổng quát hơn nữa khái niệm đường tròn Ơle và đường thẳng Ơle cho đa giác nội tiếp, các bạn hãy khai phá thêm.

Giả sử cho đa giác nội tiếp $A_1A_2A_3...A_n$ ta định nghĩa *đường tròn Ơle thứ k* của đa giác là đường tròn tâm là điểm $E^{(k)}$ thỏa mãn :

$$\overrightarrow{OE^{(k)}} = (\overrightarrow{OA}_1 + \overrightarrow{OA}_2 + ... + \overrightarrow{OA}_n)/k$$

và bán kính bằng R/k : trong đó O là tâm đường tròn ngoại tiếp n–giác $A_1A_2 ..A_n$, còn R là bán kính của đường tròn ngoại tiếp này.

Như vậy tâm của đường tròn Ơle thứ 1 là trực tâm, tâm của đường tròn Ơle thứ n là trọng tâm của n–giác, còn đường tròn Ơle thứ 2 chính là đường tròn Ơle ta đã gọi từ trước.

Các bạn hãy chứng minh các tính chất :

Tính chất 9 : Các tâm của các đường tròn Ơle thứ k của $(n-1)$–giác tạo bởi $(n-1)$ đỉnh nào đó của một n–giác nội tiếp sẽ cùng nằm trên đường tròn Ơle thứ k của n–giác này.

Tính chất 10 : Các đoạn thẳng nối tâm của đường tròn Ơle thứ i của k–giác tạo bởi k đỉnh nào đó của một n–giác nội tiếp với tâm của đường tròn Ơle thứ j của $(n-k)$ – giác tạo bởi $(n-k)$ đỉnh còn lại sẽ đi qua tâm

$E^{(i+j)}$ của đường tròn Ole thứ $(i+j)$ của n–giác nội tiếp đó và bị $E^{(i+j)}$ chia theo tỉ số $j:i$ kể từ tâm đường tròn Ole của k–giác.

Tính chất 11 : Các đường vuông góc hạ từ tâm đường tròn Ole thứ i của các $(n-2)$–giác tạo bởi $(n-2)$ đỉnh nào đó của một n–giác nội tiếp xuống đoạn thẳng nối 2 đỉnh còn lại sẽ cắt nhau tại tâm $E^{(i)}$ của đường tròn Ole thứ i của n–giác đó.

Các bạn thấy ngay là tất cả các tâm đường tròn Ole nằm trên một đường thẳng và đường thẳng này gọi là đường thẳng Ole.

Cuối cùng chúc các bạn có thêm nhiều phát hiện bổ ích hơn nữa.

BÍ MẬT CỦA NHỮNG SỐ HOÀN THIỆN VÀ THÂN MẬT

BÍCH HẠNH

L.T.S. Trong một vài số báo đã ra, Toán học và tuổi trẻ đã có dịp giới thiệu cùng bạn đọc khái niệm số hoàn thiện *và sơ lược lịch sử của nó. Để tiện theo dõi xin tóm tắt như sau : Số hoàn thiện là một số tự nhiên bằng tổng những ước số của nó (không kể bản thân số đó). Số hoàn thiện nhỏ nhất là* $V_1 = 6 = 1 + 2 + 3$, rồi đến $V_2 = 28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$. Cho đến nay người ta đã tìm được 24 số hoàn thiện. Tất cả những số đó đều có dạng $v_n = 2^{p-1}(2^p-1)$ trong đó p là một số nguyên tố.

Có lẽ chưa từng có một số nào lại có một lịch sử hấp dẫn như những *số hoàn thiện* và những số họ hàng gần gũi chúng – *số thân mật.*

Có thể nói rằng lí thuyết số hoàn thiện đã được xây dựng từ rất lâu. Cách đây khoảng 23 thế kỉ, Oclit đã nhận xét rằng nếu $2^p - 1$ là một số nguyên tố thì công thức $2^{p-1}(2^p - 1)$ cho ta một số hoàn thiện (Muốn $2^p - 1$ nguyên tố thì bắt buộc p phải nguyên tố, nhưng điều ngược lại không đúng).

Cách chứng minh của Oclit như sau. Giả sử 2^p-1 là một số nguyên tố. Thế thì các ước số của $2^{p-1}(2^p-1)$ không kể bản thân số đó là :

$$1,\ 2,\ 4, \ldots,\ 2^{p-1},\ 2^p-1,\ 2(2^p-1),$$
$$4(2^p - 1), \ldots,\ 2^{p-2}(2^p-1)$$

và tổng của chúng sẽ là

$$(1 + 2 + 4 + \ldots + 2^{p-1}) + (1 + 2 + 4 + \ldots + 2^{p-2})(2^p - 1) =$$
$$= (2^p-1) + (2^{p-1} - 1)(2^p-1) = 2^{p-1}(2^p-1)$$

Do đó $2^{p-1}(2^p-1)$ là một số hoàn thiện.

Hai nghìn năm sau, Lêôna Ole đã chứng minh rằng mọi số hoàn thiện chẵn đều có dạng $2^{p-1}(2^p-1)$, tức là công thức của Oclit thâu tóm được hết tất cả những số hoàn thiện chẵn. Nhưng cũng rất lạ là cho đến nay chưa ai tìm thấy một số hoàn thiện lẻ, và rất có thể là những số hoàn thiện lẻ không tồn tại chăng. Điều đó cho đến nay vẫn chưa ai giải đáp được. Do đó, *sau đây, nói đến số hoàn thiện, ta sẽ hiểu là số hoàn thiện chẵn.*

Công thức kì diệu của Oclit có liên hệ chặt chẽ đến cấp số nhân công bội 2 (1, 2, 4, 8, 16,...). Ta hãy nhớ lại câu truyện cổ tích giữa hoàng tử Ba–tư và người phát minh ra cờ tướng. Thích chí về trò chơi lí thú này, hoàng tử cho người phát minh tùy ý chọn phần thưởng theo sở thích của mình. Người này bèn nêu lên một đề nghị rất đơn giản : đặt vào ô thứ nhất của bàn cờ 1 hạt thóc, vào ô thứ hai 2 hạt, vào ô thứ ba 4 hạt, v.v... số hạt cứ gấp đôi khi chuyển sang ô tiếp sau, mãi cho đến hết bàn cờ. Hoàng tử đồng ý nhưng khi tính ra thì thấy không đủ thóc để thưởng. (Tính đúng thì số thóc phải đặt vào ô thứ 64 của bàn cờ là 9223 372 036 854 775 808 hạt và số thóc thưởng sẽ gấp đôi số đó trừ đi 1. Số lượng thóc đó, nếu đem trải khắp trên mặt trái đất thì được một lớp dày 9mm !)

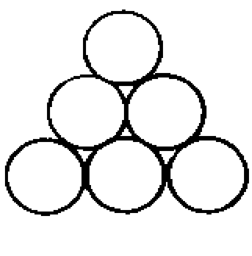
Trên hình 1 ghi số hạt thóc phải đặt ở mỗi ô của bàn cờ. Các số đó là những lũy thừa của 2. Ta khoanh tròn những số mà bớt đi một thì thành số nguyên tố. Những số nguyên tố như vậy có dạng $2^p - 1$ được gọi là *số nguyên tố Mec–xen* (*) (chú ý rằng p

2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7
2^8	2^9	2^{10}	2^{11}	2^{12}	2^{13}	2^{14}	2^{15}
2^{16}	2^{17}	2^{18}	2^{19}	2^{20}	2^{21}	2^{22}	2^{23}
2^{24}	2^{25}	2^{26}	2^{27}	2^{28}	2^{29}	2^{30}	2^{31}
2^{32}	2^{33}	2^{34}	2^{35}	2^{36}	2^{37}	2^{38}	2^{39}
2^{40}	2^{41}	2^{42}	2^{43}	2^{44}	2^{45}	2^{46}	2^{47}
2^{48}	2^{49}	2^{50}	2^{51}	2^{52}	2^{53}	2^{54}	2^{55}
2^{56}	2^{57}	2^{58}	2^{59}	2^{60}	2^{61}	2^{62}	2^{63}

Hình 1

cũng phải là số nguyên tố). Đem số nguyên tố đó nhân với số hạt thóc đặt ở đúng ngay trước, ta sẽ được một số hoàn thiện, đúng như công thức của Ole $2^{p-1}(2^p - 1)$. Trên bàn cờ có đánh dấu 9 ô, ứng với 9 số nguyên tố Mec-xen, tương ứng với 9 số hoàn thiện đầu tiên.

Các số hoàn thiện có một số tính chất hay. Thí dụ như tất cả các số hoàn thiện đều là những "số tam giác". Điều đó có nghĩa là nếu lấy một số vòng tròn bằng nhau với số lượng bằng một số hoàn thiện nào đó thì bao giờ cũng có thể xếp chúng thành hình một tam giác đều (hình 2). Nói cách khác mọi số hoàn thiện đều viết được dưới dạng tổng những số tự nhiên đầu tiên



Hình 2

$$1 + 2 + 3 + ... + n$$

Thật vậy, vì tổng trên bằng $n(n + 1)/2$ nên ta chỉ việc tìm một số tự nhiên n sao cho $n(n + 1)/2 = 2^{p-1}(2^p - 1)$, trong đó p là một số cho trước. Ta dễ dàng tìm thấy $n = 2^p - 1$.

Cũng có thể chứng minh rằng mọi số hoàn thiện, trừ số 6 đều là tổng lập phương của những số lẻ liên tiếp, tức là bằng

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + ...$$

Và đây, một tính chất nữa của các số hoàn thiện : Tổng các số đảo ngược của tất cả các ước số của một số hoàn thiện (kể cả 1 và bản thân số đó) luôn luôn bằng 2. Thí dụ với số 28 ta có

$$1/1 + 1/2 + 1/4 + 1/7 + 1/14 + 1/28 = 2$$

Cho đến ngày nay còn hai vấn đề lớn chưa có câu trả lời :

– Liệu có tồn tại những số hoàn thiện lẻ không ?

– Trong số những số hoàn thiện chẵn có số lớn nhất không ?

Về vấn đề thứ nhất, cho đến nay người ta vẫn không chứng minh được khả năng tồn tại hay không của những số đó. Vấn đề thứ hai phụ thuộc dãy số nguyên tố Mecxen là hữu hạn hay vô hạn vì mỗi số nguyên tố của dãy này cho ta một số hoàn thiện như Ole đã chứng minh. Người ta đã để ý rằng nếu trong công thức của số nguyên tố Mecxen $2^p - 1$ đem thay lần lượt p bằng 4 số Mecxen đầu tiên (3, 7, 31, 127) thì ta lại thu được những số nguyên tố Mecxen mới. Điều đó khiến cho nhiều nhà toán học nêu lên giả thuyết rằng quy luật đó đúng cho mọi số nguyên tố Mecxen và điều đó dẫn đến tính vô hạn của dãy số Mecxen cũng như của tập hợp các số hoàn thiện. Trong suốt 70 năm trời, nhiều nhà toán học nuôi hi vọng chứng minh giả thuyết đó. Song, năm 1953, máy tính điện tử đã làm họ thất vọng. Chỉ mới thử với số nguyên tố Mecxen thứ năm $2^{13} - 1 = 8191$, máy tính đã phát hiện rằng $2^{8191} - 1$ không phải là số nguyên tố. Như vậy là cho đến nay vấn đề dãy số Mecxen là vô hạn hay hữu hạn vẫn chưa có câu giải đáp.

Kể lại lịch sử con người đi tìm các số hoàn thiện cũng có nhiều điều lí thú. Nhà toán học Pi-te Bac-lâu khi phát hiện ra số hoàn thiện thứ chín, đã tuyên bố trong cuốn "số luận" của ông xuất bản năm 1811 rằng đây là số hoàn thiện lớn nhất và thách thức loài người tìm được số hoàn thiện lớn hơn, điều mà ông chắc chắn không thể xảy ra được. Nhưng đến năm 1876, nhà toán học Pháp Et-va Lu-ca-xơ đã phát hiện được số hoàn thiện thứ mười hai $2^{126}(2^{127}-1)$. Thừa số thứ hai $2^{127}-1$ là số nguyên tố mecxen lớn nhất được tính bằng khối óc của con người, không dùng máy tính. Sau đó, khi máy tính điện tử ra đời, dãy các số hoàn thiện ngày càng được bổ sung những số mới. Số lớn nhất trong dãy số hoàn thiện mà loài người đã biết là $2^{19936}(2^{19937}-1)$. Đây là số hoàn thiện thứ 24, do nhà toán học Ta-ke-man phát hiện hồi tháng 6 năm 1971. Số này nếu viết dưới dạng thập phân thì gồm 12003 chữ

(*) Mec-xen là một nhà toán học Pháp ở thế kỷ XVI người đầu tiên nghiên cứu những số nguyên tố dạng $2^p - 1$.

số. Nó được tính ra sau 40 phút trên một loại máy tính điện tử hiện đại.

Bảng ở bên ghi những số hoàn thiện mà cho đến nay loài người đã biết.

Người ta mở rộng khái niệm số hoàn thiện như sau. Ta hãy lấy một số tự nhiên a_i ; cộng tất cả các ước số của nó (trừ a_1) ta được một số a_2 ; cộng tất cả các ước số của a_2 (không kể a_2) ta lại được một số a_3 ; v.v.. cứ làm thế nhiều bước và có thể có một số a_n mà tổng các ước số của nó (trừ a_n) lại bằng a_1. Ta sẽ được một "vòng" số sắp thứ tự (a_1, a_2, ... a_n) có tính chất sau đây : nếu xuất phát từ bất cứ số nào trong "vòng" số đó và thực hiện phép lấy tổng các ước số của nó như trên thì sau n bước ta sẽ trở về chính số đó. Với $n = 1$, ta có số hoàn thiện. Nếu $n = 2$ thì cặp số thu được gọi là *Số thân mật*. Một cách vắn tắt, hai số gọi là thân mật nhau nếu mỗi số trong hai số đó bằng tổng các ước của số còn lại. Cặp số thân mật bé nhất là 220 và 284. Năm 1636, Phéc-ma tìm được cặp số thân mật thứ hai : 17296 và 18416. Độc lập với Phéc-ma, Đề-các cũng đã tìm được cặp số thân mật thứ ba là 9363584 và 9437056, Nhưng phải nói rằng việc định nghĩa cặp số thân mật đã được một nhà toán học A-rập nêu lên từ thế kỉ thứ IX. Đến thế kỉ thứ XVIII Ơ-le cho công bố một danh sách gồm 64 cặp số thân mật (sau này phát hiện ra có 2 trường hợp sai), và đến năm 1830 Lơ-giăng-đrơ lại tìm được một cặp số thân mật nữa. Nhưng đáng ngạc nhiên nhất là việc phát hiện ra cặp số thân mật 1180, 1210 của một thiếu niên 16 tuổi người Ý tên là Pa-ga-ni-ni năm 1867. Đây là cặp số thân mật *nhỏ thứ hai* mà không ai khám phá ra. Và mặc dầu Pa-ga-ni-ni đã có những thiếu xót trong phương pháp chứng minh, tên cậu vẫn mãi mãi được ghi vào lịch sử lý thuyết đó.

Cho đến nay loài người đã phát hiện được hơn 600 cặp số thân mật, trong đó có nhiều cặp gồm những số kéo dài trên 30 chữ số. Cặp cuối cùng được tìm ra năm 1964 bằng máy tính điện tử.

Sau đây là những cặp số thân mật trong phạm vi 0–100000

1) (220, 284) ;7) 12285, 14595) ;

2) (1184, 1210) ;8) (17296, 18416) ;

3) (2620, 2924) ;9) (630200, 76084) ;

4) (5020, 5564) ;10) (66928, 66992) ;

5) (6232, 6368) ;11) (67095, 71145) ;

6) (10744, 10856) ;12) (69615, 87633)

13) (79750, 88730).

Số TT	Công thức	Số hoàn thiện đã tìm được	Số chữ số
1	$2^1(2^2 - 1)$	6	1
2	$2^2(2^3 - 1)$	28	2
3	$2^4(2^5 - 1)$	496	3
4	$2^6(2^7 - 1)$	8128	4
5	$2^{12}(2^{13} - 1)$	33 550 336	
6	$2^{16}(2^{17} - 1)$	8 589 869 056	1
7	$2^{18}(2^{19} - 1)$	137 438 691 328	1
8	$2^{30}(2^{31} - 1)$		1
9	$2^{60}2^{61} - 1)$		3
10	$2^{88}(2^{89} - 1)$		5
11	$2^{106}(2^{107} - 1)$		6
12	$2^{126}(2^{127} - 1)$		7
13	$2^{520}(2^{521} - 1)$		31
14	$2^{606}(2^{607} - 1)$		36
15	$2^{1278}(2^{1279} - 1)$		77
16	$2^{2202}(2^{2203} - 1)$		132
17	$2^{2280}(2^{2281} - 1)$		137
18	$2^{3216}(2^{3217} - 1)$		19
19	$2^{4252}(2^{4253} - 1)$		25
20	$2^{4422}(2^{4423} - 1)$		26
21	$2^{9688}(2^{9689} - 1)$		58
22	$2^{9940}(2^{9941} - 1)$		59
23	$2^{11212}(2^{11213} - 1)$		67
24	$2^{19936}(2^{19937} - 1)$		120

Hầu hết những cặp số thân mật đều ch
một số ít là những cặp số lẻ. Chưa ai t
thấy một cặp số thân mật gồm một số ch
và một số lẻ và cũng chưa ai chứng m

được không tồn tại những cặp như vậy. Một vài nhà toán học đưa ra giả thiết là các số thân mật lẻ đều chia hết cho 3 và tổng hai số trong mọi cặp số thân mật chia hết cho 9. Nhưng một khi chưa biết công thức tổng quát của những số thân mật thì chưa thể nói gì đến những việc chứng minh những điều phỏng đoán trên, và tất nhiên cũng chưa biết được tập hợp các cặp số thân mật và hữu hạn hay vô hạn.

Trở lại "vòng" số (a_1, a_2... a_n) nói trên, năm 1918 nhà toán học Pháp Pu–lê đã tìm được một "vòng" gồm 5 số (12494, 14288, 15472, 14536, 14264) và một "vòng" khác gồm 28 số (bắt đầu từ số 14316). Còn những "vòng" gồm ba số thì cho đến nay vẫn chưa tìm thấy, mặc dầu đã vận dụng rộng rãi khả năng của máy tính điện tử. Việc tìm kiếm đó sẽ vẫn tiếp tục chừng nào chưa tìm được và chừng nào chưa có ai chứng minh được rằng một "vòng" như vậy không tồn tại.

Viết theo tư liệu của tạp chí Liên xô "Cơ–van–tơ" số 10/1973.

VỀ GIẢI MỘT LỚP PHƯƠNG TRÌNH HÀM

PHAN ĐỨC THÀNH

Giải phương trình hàm là xác định hàm số chưa biết trong phương trình. Chẳng hạn : Hãy xác định hàm số $f(x)$ thỏa mãn các phương trình hàm sau đây :

$2f(1 - x) + 1987 = xf(x)$

$f(x) + f(1988^2/(1988 - x)) = x$

$(x - 1)f(x) + f(1/x) = 1/(x - 1)$ v.v...

Trước khi trình bày một phương pháp giải cho một lớp phương trình hàm, chúng ta hãy làm quen với một vài khái niệm và phép toán cần thiết :

Giả sử $f(x)$ và $g(x)$ là các hàm số sao cho miền xác định của hàm số $g(x)$ chứa miền giá trị của hàm số $f(x)$. Ta gọi *chập* của các hàm f và g là hàm số, ký hiệu là $g{*}f$, được cho bởi công thức

$$(g_*f)^{(x)} = g(f(x))$$

Thí dụ : Hàm số $f(x) = \sin(1987x + 1)$ là chập của các hàm số $g(x) = 1987x + 1$ và $h(x) = \sin x$, tức là $f(x) = (h{*}g)(x)$. Chú ý rằng : nói chung, phép chập các hàm số không có tính chất giao hoán, tức là $f{*}g \neq g{*}f$, nhưng có tính chất kết hợp, tức là với mọi hàm f, g, h ta có

$$(f_*g)_*h = f_*(g_*h)$$

Phép chập $f{*}f$ được gọi là *phép lập* (2 lần) đối với hàm f và cho ta *hàm lập* (2 lần)

$$f_2(x) = (f_*f)(x) = f(f(x))$$

Mở rộng khái niệm đó ta định nghĩa được *hàm lập n lần* đối với hàm f ;

$$f_n(x) = (\underbrace{f_* \cdots {}_*f}_{n})(x) = \underbrace{f(f(\ldots f}_{n}(x)))$$

Thí dụ 1. Cho $f(x) = x/\sqrt{1 + x^2}$. Khi ấy

$$f_2(x) = f(f(x)) = x/\sqrt{1 + 2x^2}$$

Bằng quy nạp chứng minh được rằng

$$f_n(x) = x/\sqrt{1 + nx^2}$$

Thí dụ 2. Cho $f(x) = (x\sqrt{3} - 1)/(x + \sqrt{3})$ Tính hàm lập $f_{1988}(x)$.

Giải : Chú ý rằng chập của các hàm phân tuyến tính $h(x) = (ax + b)/(-bx + a)$ và $k(x) = (cx + d)/(-dx + c)$ dễ dàng tính được bởi

$$(h_*k)(x) = \frac{(ac - bd)x + (ad + bc)}{-(ad + bc)x + (ac - bd)}$$

do đó các hệ số của chập $h{*}k$ tương ứng như luật nhân các số phức $(a + ib)$ và $(a + id)$. Hàm đã cho

$$f(x) = (x\sqrt{3} - 1)/(x + \sqrt{3}) =$$
$$= (\sqrt{3}\,.x/2 - 1/2)/(x/2 + \sqrt{3}/2)$$

tương ứng với số phức

$$z = \sqrt{3}/2 - i/2 = \cos(-\pi/6) + i\sin(-\pi/6)$$

Do đó hàm số $f_{1988}(x)$ tương ứng với số phức

$$z^{1988} = \cos[1988(-\pi/6)] + i\sin[1988(-\pi/6)]$$

$= -1/2 + i\sqrt{3}/2$

tức là

$$f_{1988}(x) = (-x/2 + \sqrt{3}/2)/(-\sqrt{3}\,x/2 - 1/2) =$$
$$= (x - \sqrt{3})/(x\,.\,\sqrt{3} + 1)$$

Các thí dụ sau đây sẽ giới thiệu với bạn đọc phương pháp giải một lớp phương trình hàm.

Thí dụ 3. Tìm hàm số $f(x)$ sao cho :

$$xf(x) - 2f(1 - x) = 1.$$

Giả sử tồn tại hàm số $f(x)$ thỏa mãn phương trình trên. Thay x bởi $1 - x$ ta có phương trình

$$(1 - x)f(1 - x) - 2f(x) = 1$$

Ta nhận được hệ phương trình hai ẩn $f(x)$ và $f(1 - x)$. Giải ra ta được

$$f(x) = (x - 3)/(x^2 - x + 4)$$

Nhận xét : Nếu ta đặt $g_1 = x\,, g_2 = 1 - x$ thì việc thay x bởi $1 - x$ làm cho mỗi hàm số trong $[g_1\,, g_2]$ biến thành hàm số kia, tức là

$$g_1 \rightarrow g_2 \text{ và } g_2 \rightarrow g_1$$

Dễ dàng nhận thấy rằng các hàm số g_1 và g_2 có tính chất

$$g_1 * g_2 = g'_2 * g_1 = g_2$$
$$g_2 * g_2 = g_1\,, g_1 * g_1 = g_1$$

Ta bảo tập hợp $G = \{g_1\,, g_2\}$ là *đóng đối với phép chập.*

Ta nói rằng tập hợp các hàm số $G = \{g_i\}$ lập thành một *nhóm* đối với phép chập nếu :

1. Với mọi $g_1 \in G$, $g_j \in G$, thì $g_i * g_j \in G$.
2. Hàm số $g_1 = x \in G$
3. Với mỗi hàm $g_i \in G$ tồn tại hàm $g_i^{-1} \in G$ sao cho $g_i * g_i^{-1} = g_i^{-1} * g_i = g_1$

Trong thí dụ 3 : $G = \{g_1,\ g_2\}$ lập thành một nhóm đối với phép chập.

Thí dụ 4 : Tìm hàm $f(x)$ xác định với mọi $x \neq \pm\ 1/3$ và thỏa mãn

$$f(x) + f((x + 1)/(1 - 3x)) = x$$

Giải : Đặt $g_1 = x$, $g_2 = (x + 1)/(1 - 3x)$, $g_3 = g_2 * g_2 = (x - 1)/(3x + 1)$. Khi ấy $g_3 * g_2 = g_1$ Vậy nhóm G gồm có 3 phần tử

$$G = \{g_1 = x\,, g_2 = (x + 1)/(1 - 3x)\,,$$
$g_3 = (x - 1)/(3x + 1)\}$ với $x \neq \pm 1/3$. Với phép biến đổi $g_1 \rightarrow g_2$ thì $g_2 \rightarrow g_3$, $g_3 \rightarrow g_1$ từ phương trình hàm đã cho ta nhận được hệ

$$f(g_1) + f(g_2) = g_1,$$
$$f(g_2) + f(g_3) = g_2,$$
$$f(g_1) + f(g_3) = g_3.$$

Từ đó rút ra

$$f(g_1) = (g_1 + g_3 - g_2)/2 =$$
$$= (9x^3 + 6x^2 - x + 2)/(18x^2 - 2)$$

với $x \neq \pm 1/3$.

Thí dụ 5 : Giải phương trình hàm

$$xf(x) + 2f(x - 1)/(x + 1) = 1$$

Giải : Đặt

$g_1 = x\,, g_2 = (x - 1)/(x + 1)\,, (x \neq -1).$

$g_3 = g_2 * g_2 = -1/x$

$g_4 = g_2 * g_3 = g_3 * g_2 = (x + 1)/(1 - x)\,, (x \neq 1)$

Khi đó nhóm $G = \{g_1,\ g_2,\ g_3,\ g_4\}$.

Từ phương trình hàm đã cho nhờ phép biến đổi $g_1 \rightarrow g_2$ ta nhận được hệ

$$g_1f(g_1) + 2f(g_2) = 1$$
$$g_2f(g_2) + 2f(g_3) = 1$$
$$g_3f(g_3) + 2f(g_4) = 1$$
$$g_4f(g_4) + 2f(g_1) = 1$$

Giải ra ta được

$f(x) = (4x^2 - x + 1)/5x(x - 1)$

với $x \neq -1$, $x \neq 0$, $x \neq 1$

Thí dụ 6. Tìm hàm số $f(x)$ thỏa mãn

$$f(x) + f(1988^2/(1988 - x)) = x$$

Giải : Đặt $g_1 = x,$

$g_2 = 1988^2/(1988 - x)\ (x \neq 1988)$

$$g_3 = g_2 * g_2 = \frac{1988x - 1988^2}{x} (x \neq 0)$$

Trong trường hợp đang xét nhóm G có 3 phần tử $G = \{g_1,\ g_2,\ g_3\}$. Nhờ phép biến đổi $g_1 \rightarrow g_2$ từ phương trình hàm đã cho ta nhận được hệ : $f(g_1) + f(g_2) = g_1$

$$f(g_2) + f(g_3) = g_2$$
$$f(g_3) + f(g_1) = g_3$$

Giải ra ta có

$$f(g_1) = (g_1 + g_3 - g_2)/2 =$$
$$= (x^3 - 1988^2x + 1988^3)/2x(x - 1988)$$

với $x \neq 0$, $x \neq 1988$

Bây giờ mời các bạn hãy thử giải hai bài toán sau :

1. Giả sử $a \neq \pm 1$ là số thực, $\varphi(x)$ là hàm số cho trước xác định với mọi $x \neq 1$. Tìm hàm số $f(x)$ xác định với mọi $x \neq 1$ và thỏa mãn

$$f(x/(x-1)) = af(x) + \varphi(x)$$

2. Tìm hàm số $f(x)$ nếu biết rằng với mọi $x \neq 0$ thỏa mãn

$$(x+1)f(x) = 1 - f(1/x)$$

DÃY SỐ VÀ PHƯƠNG TRÌNH

VŨ VĂN THỎA

Cho $y = f(x)$ là hàm số liên tục của x. Ta xét phương trình dạng $x = f(x)$ (1), và dãy số $\{x_n\}$ (2) xác định như sau :

$x_1 = a$ cho trước : $x_{n+1} = f(x_n)$ với $n \geq 1$.

Rõ ràng là nếu dãy số $\{xn\}$ có giới hạn x^* : $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$ thì do tính liên tục của $f(x)$ ta cũng có $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x^*)$. Từ cách xách định của dãy số (2) ta suy ra $x^* = f(x^*)$. Như vậy, x^* là một nghiệm của phương trình (1).

Ngược lại, nếu phương trình (1) có nghiệm x^* thì ta có thể xác định một dãy số (2), với $x_1 = a$, đủ gần x^* để $x^* = \lim_{n\to\infty} x_n$. Khi đó x_n, $n = 1, 2, \ldots$ được gọi là các xấp xỉ của nghiệm x^*. Phương pháp tìm nghiệm x^* của phương trình (1) như vậy gọi là phương pháp xấp xỉ liên tiếp hay phương pháp lặp đơn.

Vậy, ta có thể nêu một nhận xét quan trọng sau đây về mối quan hệ đặc biệt giữa phương trình (1) và dãy số (2).

Nhận xét : Phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi tồn tại ít nhất một dãy số (2) có giới hạn và giới hạn đó chính là một nghiệm của phương trình (1).

Qua một số bài toán trình bày dưới đây các bạn sẽ thấy phương pháp vận dụng nhận xét trên để giải một số dạng bài toán hay gặp trong các kì thi học sinh giỏi mà đối với nhiều bạn là những dạng toán lạ và khó.

Bài toán 1. *Cho dãy số* $\{x_n\}$ xác định như sau :

$x_1 = 1$; $x_{n+1} = x_n + 1/x_n^4$ với $n \geq 1$.

Có tồn tại hay không một hằng số C sao cho với mọi $n \geq 1$ ta có $x_n \leq C$?

Giải : Theo bài ra ta có $x_{n+1} = x_n + 1/x_n^4 > x_n$ với $n \geq 1$. Do đó $\{x_n\}$ là dãy số đơn điệu tăng và $x_n \geq 1$ với mọi n. Giả sử tồn tại hằng số C sao cho $x_n \leq C$, $\forall n$. Khi đó $\{x_n\}$ có giới hạn x^* : $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$.

Mặt khác hàm số $f(x) = x + 1/x^4$ với $x \geq 1$ là một hàm số liên tục. Do đó theo nhận xét trên thì x^* là một nghiệm của phương trình $x = f(x)$. Nhưng phương trình $x = f(x) \Leftrightarrow x = x + 1/x^4 \Leftrightarrow 1/x4 = 0$: vô nghiệm.

Mâu thuẫn nhận được chứng tỏ không tồn tại hằng số C thỏa mãn điều kiện của bài toán.

Bài toán 2. *Cho dãy số thực* $\{x_n\}$ xác định theo quy luật $x_1 = 2{,}9$; $x_{n+1} = \sqrt{3} + x_n/\sqrt{x_n^2 - 1}$ với $n \geq 1$.

Hãy tìm một số thực nằm bên trái dãy con $\{x_1, x_3 \ldots\}$ và bên phải dãy con $\{x_1, x_4, \ldots\}$ của dãy số $\{x_n\}$.

(Bài ra trong kì thi chọn đội tuyển đi thi Toán quốc tế năm 1985).

Giải : Từ quy luật xác định của dãy số $\{x_n\}$ ta suy ra ngay $x_n \geq \sqrt{3}$, $\forall n \geq 1$. Yêu cầu của bài ra là phải tìm số thực a sao cho $x_{2k} < a < x_{2k-1}$ với $k = 1, 2, \ldots$ (3).

Ta dự đoán số a cần tìm chính là giới hạn của dãy $\{x_n\}$. Khi đó theo nhận xét trên, a sẽ là nghiệm của phương trình

$$x = \sqrt{3} + x/\sqrt{x^2 - 1} \text{ ; với } x \geq \sqrt{3} \quad (4)$$

Vì vậy trước hết ta đi giải phương trình (4).

Vì $x \geqslant \sqrt{3}$ nên $0 < 1/x < 1$. Gọi α là góc thỏa mãn $0 < \alpha < \pi/2$ và $\sin\alpha = 1/x$.

Khi đó (4) có dạng $1/\sin\alpha = \sqrt{3} + 1/\cos\alpha$ hay $\sin\alpha - \cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha\cos\alpha = 0$ (5)

Giải (5) bằng cách đưa vào ẩn số phụ $t = \sin\alpha - \cos\alpha$ ta nhận được $\sin\alpha = \sqrt{3}(\sqrt{5} - 1)/6$. Vậy với điều kiện $x \geqslant \sqrt{3}$ phương trình (4) có nghiệm duy nhất $x_o = 1/\sin\alpha = \sqrt{3}(\sqrt{5} - 1)/2$.

Xét hàm số $f(x) = \sqrt{3} + x/\sqrt{x^2 - 1}$ với $x \geqslant \sqrt{3}$. Ta có $f'(x) = -1/(\sqrt{x^2 - 1})^3 < 0$ với $x \geqslant \sqrt{3}$. Ta có $f'(x) = -1/(\sqrt{x^2 - 1})^3 < 0$ với $x \geqslant \sqrt{3}$

Do đó hàm số $y = f(x)$ là hàm nghịch biến trên khoảng $[\sqrt{3}, +\infty]$. Lấy $a = \sqrt{3}(\sqrt{5} + 1)/2$ ta chứng minh a thỏa mãn điều kiện (3) bằng phép quy nạp theo k.

Với $k = 1$ ta có $x_1 = 2{,}9 > \sqrt{3}(\sqrt{5} + 1)/2 = a$. Do $f(x)$ nghịch biến nên $x_2 = f(x_1) < f(a) = a$. Vậy $x_2 < a < x_1$; tức là (*) đúng với $k = 1$.

Giả sử (*) đúng với $k = n$, ta chứng minh đúng với $k = n + 1$. Thật vậy, theo giả thiết quy nạp ta có $x_{2n} < a < x_{2n-1}$. Khi đó $x_{2n+1} = f(x_{2n}) > f(a) = a$ và $x_{2n+2} = f(x_{2n+1}) < f(a) = a$. Từ đó ta có điều cần chứng minh là

$x_{2n+2} < a < x_{2n+1}$

Vậy (*) đúng với mọi k ; tức là

$a = \sqrt{3}(\sqrt{5} + 1)/2$ chính là số cần tìm.

Bài toán 3 : *Cho dãy số* $\{x_n\}$ xác định bởi

$$x_1 = 1/3 ; x_{n+1} = x_n^2/2 - 1.$$

Chứng minh dãy $\{x_n\}$ có giới hạn và tính giới hạn đó.

Giải : Trước hết ta có nhận xét rằng với mọi $n \geqslant 2$ thì $-1 < x_n < 0$. Do đó nếu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*$ thì x^* phải là nghiệm âm của phương trình $x = x^2/2 - 1$ (6). Giải phương trình (6) ta sẽ tính được $x^* = 1 - \sqrt{3}$.

Ta sẽ chứng minh $x^* = 1 - \sqrt{3}$ là giới hạn của dãy $\{x_n\}$. Ta có : $|x_{n+1} - x^*| =$

$= |x_n^2/2 - 1 - (x^{*2}/2 - 1)| = |x_n - x^*|\,|x_n + x^*|/2$

Vì $-1 < x_n < 0$ nên $|x_n + x^*| < |-1 + 1 - \sqrt{3}| = \sqrt{3}$. Vậy $|x_{n+1} - x^*| < \sqrt{3}|x_n - x^*|/2$ với mọi $n \geqslant 2$. Từ đó $|x_{n+1} - x^*| <$

$$< (\sqrt{3}/2)^{n-1}|x_2 - x^*| < (\sqrt{3}/2)^n.$$

Vì $0 < \sqrt{3}/2 < 1$ nên $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{3}/2)^n = 0$ và do đó $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1} - x^*) = 0$. Vậy $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^* = 1 - \sqrt{3}$.

Bằng các phương pháp tương tự các phương pháp đã trình bày ở trên các bạn có thể giải được các bài toán sau đây :

1. Cho dãy số $\{x_n\}$ xác định bởi : $x_1 = a > 0$; $x_{n+1} = x_n(x_n^2 + 3a)/(3x_n^2 + a)$ $(a \geqslant 0)$ với $n = 1, 2, \ldots$ Chứng minh dãy số $\{x_n\}$ có giới hạn và tìm giới hạn đó.

2. Cho dãy số $\{x_n\}$ được xác định như sau :

$$x_1 = a ; x_{n+1} = \cos x_n, \forall n \geqslant 1$$

Chứng minh rằng với mọi giá trị của a dãy số $\{x_n\}$ đều có cùng một giới hạn. 3. Cho dãy số $\{xn\}$ xác định bởi :

$$x_1 = 1 ; x_{n+1} = \sin x_n, \forall n \geqslant 1.$$

Chứng minh rằng $\lim\limits_{n\to\infty} x_n\sqrt{3/n} = 1$.

4. Xét dãy số $\{un\}$ sau đây : $u1 = 1$; $u_{n+1} = u_n - u_n^2/1988$ với $n \geqslant 1$. Tính giá trị của u_{1988} với sai số không vượt quá 1%.

BÀI TOÁN J. GARFUNKEL

HOÀNG ĐỨC TÂN

Vào năm 1960 nhà toán học Mỹ là J. Garfunkel đã thử làm một thí nghiệm thú vị sau đây : ông chọn một cách ngẫu nhiên 500 tam giác và quyết định dùng máy tính điện tử kiểm tra thử xem từ 500 tam giác đó liệu có rút ra được một quy luật chung nào giữa các yếu tố của tam giác (cạnh, trung tuyến, phân giác, đường cao v.v..) hay không ? Kết quả là ông đã tìm ra được một quy luật mà ông đã phát biểu thành bài toán sau đây.

Bài toán : [J. Garfunkel] : Giả sử a, b, c là các cạnh của ΔABC. Và giả sử h_a, m_b, t_c tương ứng là đường cao hạ xuống cạnh a, trung tuyến ứng với cạnh b và phân giác trong của góc C của tam giác ABC. Khi đó ta luôn có mối quan hệ sau đây :

$$h_a + m_b + t_c \leqslant (\sqrt{3}/2)(a + b + c) \qquad \text{(I)}$$

Vậy vấn đề là ta cần phải xét xem giả thuyết của J. Garfunkel là đúng hay sai ? Gần chục năm sau, năm 1975 thì C.S. Gardner (Mỹ) đã chứng minh được rằng khẳng định của Garfunkel là đúng đắn. Hơn thế nữa, đồng thời với Gardner thì Lo và Ting cũng đã thu được các kết quả tương tự sau đây : Trong tam giác bất kì ta uôn có :

$$1/2 \leqslant (t_a + m_b + t_c)/(a + b + c) \leqslant \sqrt{3}/2 \qquad \text{(II)}$$

$$1/4 \leqslant (h_a + m_b + t_c)/(a + b + c) \leqslant \sqrt{3}/2 \qquad \text{(III)}$$

$$3/8 \leqslant (h_a + m_b + m_c)/(a + b + c) \leqslant 1 \qquad \text{(IV)}$$

và trong đó các hằng số $1/2$, $\sqrt{3}/2$, $1/4$, $3/8$, 1 là tốt nhất tức là không thể thay chúng bằng một hằng số nào khác.

Dưới đây chúng tôi xin giới thiệu cách chứng minh bất đẳng thức (I) của CS Gardner. Do khuôn khổ bài báo nên trong chứng minh có dùng nhiều kết quả trung gian bạn đọc có thể dễ dàng tự kiểm tra). Mong các bạn thông cảm.

Bổ đề : Giả sử $a + b \leqslant 2c$. Khi ấy ta có : $m_a + m_b + t_c \leqslant (\sqrt{3}/2)(a + b + c)$ và đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Chứng minh : Đặt $a = u + x$, $b = u - x$, $= 2v$ trong đó $|x| < v$ và $v < u \leqslant 2v$. Khi đó :

(1) $t_c^2 = cb[1 - c/(a + b)^2] =$

$= (u^2 - x^2)(1 - v^2/u^2) \leqslant u^2 - v^2$

và đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 0$ (tức $a = b$).

Ta có : $2m_a = \sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2} =$

$= \sqrt{(3u^2 - x)^2 + 8v^2 - 8u^2} = f(x)$ và dễ thấy : $2m_b = f(-x)$. Vì rằng $f''(x) < 0$ nên $f(x)$ là hàm lồi. Áp dụng bất đẳng thức hàm lồi ta được :

(2) $m_a + m_b = (1/2)[f(x) +$

$+ f(-x)] \leqslant f(0) = \sqrt{u^2 + 8v^2}$

Để chứng minh bổ đề ta phải chứng minh rằng :

(3) $\sqrt{u^2 + 8v^2} + \sqrt{u^2 - v^2} \leqslant \sqrt{3}\,(u + v)$, và đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $u = 2v$.

Đặt $u/v = y$ và bình phương 2 vế (3), thì

(3) $\Leftrightarrow 2\sqrt{(y^2 + 8)(y^2 - 1} \leqslant 6y + y^2 - 4$.

Vì $1 < y \leqslant 2$ nên bất đẳng thức sau cùng lại tương đương với :

$4(y^2 + 8)(y^2 - 1) \leqslant (y^2 + 6y - 4)^2$ Hay là : $(2 - y)^3\,(2 + y) \geqslant 0$. Điều này là hiển nhiên (do $1 < y \leqslant 2$). Bổ đề được chứng minh.

Dễ dàng kiểm tra được rằng $h_a \leqslant t_a \leqslant m_a$ nên từ bổ đề ta suy ra được rằng :

(4) $h_a + m_b + t_c \leqslant (\sqrt{3}/2)(a + b + c)$ nếu $a + b \leqslant 2c$ hoặc $b + c \leqslant 2a$.

Để chứng minh rằng (I) là đúng đắn trong trường hợp tổng quát thì ta chỉ còn phải chứng minh rằng (4) cũng dúng trong trường hợp $a + b \geqslant 2c$ và $b + c \geqslant 2a$ là xong. Cộng vế với vế 2 bất đẳng thức đó lại ta nhận được :

$a + c \leq 2b$. Từ đó suy ra :

$4a + 2c \leq 2(b+c) + (a+b) = a + 3b + 2c$

$2a + 4c \leq (b+c) + 2(a+b) = 2a + 3b + c$

và ta thu được $a \leq b$ và $c \leq b$. Sử dụng kết quả đó ta lại suy ra : $b \leq 2a + 2c - b \leq 2a + (a+b) + b = 3a$ và tương tự là $b \leq 3c$.

Bây giờ ta sẽ chứng minh rằng :

(5) $h_a - h_b \leq m_a - m_b$

[Vì rằng, từ (5) và bổ đề trên ta nhận được : $h_a + m_b + t_c \leq m_a + h_b + t_c \leq m_a + t_b + m_c \leq (\sqrt{3}/2)(a+b+c)$ và đó chính là điều mà ta cần phải chứng minh. Do vậy bài toán được giải quyết]

Không giảm tổng quát ta có thể giả thiết $b = 1$. Khi đó ta sẽ có $1/3 \leq a \leq 1$; $1/3 \leq c \leq 1$; $2a \leq 1 + c$; $2c \leq 1 + a$; $a + c > 1$. Nếu ta gọi S là diện tích của tam giác thì :

$16S^2 = (1+a+c)(1+a-c)(c+1-a)(c-1+a) = 2(1+a^2)(c^2 - c^4(1-a^2)^2$ và biểu thức vế phải là 1 hàm tăng ngặt đối với biến c được xác định trong đoạn $1/3 \leq c \leq 1$. Bởi vậy nếu ta thay c bởi $(1+a)/2$ vào hàm đó ta sẽ có : $16S^2 \leq 3/16 \times (3-a)(3a-1)(1+a)^2$. Do đó :

(6) $h_a - h_b = 2S(1-a)/a \leq$

$\leq (\sqrt{3}/8)((1-a^2)/a)\sqrt{(3-a)(3a-1)}$.

Vì rằng $2m_a = (2 + 2c^2 - c^2)^{1/2}$,

$m_b = (2a^2 + 2c^2 - 1)^{1/2}$ và ta có :

$\sqrt{S} - \sqrt{t} \geq (S-t)/\sqrt{2(S+t)}\ \ \forall t,\ S > 0$.

Cho nên ta nhận được :

$m_a - m_b \geq (3/2)(1-a^2)/[2(a^2 + 4c^2 + 1)]^{1/2}$.

Thay c bởi $(1+a)/2$ vào vế phải của bất đẳng thức trên ta nhận được (do $2c \leq 1 + a$)

(7) $m_a - m_b \geq 3/4 \times (1-a^2)/(1+a+a^2)^{1/2}$

Nhận xét rằng với mọi a ta có :

$(1-a)^2(3a^2 - a + 3) \geq 0$ (*) và ta dễ kiểm tra được rằng bất đẳng thức (*) là tương đương với bất đẳng thức sau :

(8) $2\sqrt{3}.a \geq [(1+a+a^2)(3-a)(3a-1)]^{1/2}$.

Và rõ ràng từ các bất đẳng thức (6), (7) và (8) ta suy ra được bất đẳng thức (5).

Vậy ta đã hoàn thành việc chứng minh (5) đối với $a + b \geq 2c$ và $b + c \geq 2a$ (và do vậy cũng cả với (4) nữa). Do đó điều khẳng định của J. Garfunket là đúng đắn (đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$).

Vậy là lại thêm một điều "bí mật" đối với tam giác được khám phá. Ngoài các bất đẳng thức (I), (II), (III) và (IV) ra liệu còn có bất đẳng thức nào nữa không, các bạn hãy thử tìm xem. Chúc các bạn thành công !

HAI CHỮ SỐ CUỐI CÙNG CỦA SỐ CHÍNH PHƯƠNG

PHƯƠNG THẢO

Một số chính phương chỉ có thể tận cùng là 0, 1, 4, 5, 6, 9. Hay nói cách khác các số tận cùng là 2, 3, 7, 8 không phải là số chính phương. Một câu hỏi rất tự nhiên nảy ra là : hai chữ số cuối cùng của số chính phương có thể là những số nào ?

Giả sử A là số chính phương, tức là có thể biểu diễn A dưới dạng

$$A = (10a + b)^2$$

Ở đây a, b là các số nguyên không âm và $b \leq 9$. Vì $A = 20a(5a+b) + b^2$, mà số $20a(5a+b)$ có hàng đơn vị là 0 còn hàng chục là số chẵn nên tính chẵn lẻ của hai chữ số tận cùng của A trùng với tính chẵn lẻ của hai chữ số của số b^2. Điểm lại tất cả các giá trị có thể có được của b^2 : 00, 01, 04, 09, 16, 25, 36, 49, 64, 81 ta rút ra một số kết luận sau đây :

Tính chất 1 : Nếu hàng đơn vị của một số chính phương là 6 thì chữ số hàng chục phải là số lẻ.

Tính chất 2 : Nếu hàng đơn vị của một số chính phương khác 6 thì chữ số hàng chục phải là số chẵn.

Tính chất 3 : Không có số chính phương nào có tận cùng là hai số lẻ.

Tính chất 4 : Nếu hai chữ số cuối cùng của một số chính phương cùng chẵn, thì chữ số hàng đơn vị của số đó chỉ có thể là 0 hoặc 4.

Sử dụng các tính chất trên ta có thể giải một cách dễ dàng hàng loạt các bài toán liên quan tới số chính phương. Xin nêu một vài ví dụ điển hình.

Bài toán 1 : Chứng minh rằng không tồn tại số chính phương lớn hơn 10 mà tất cả các chữ số của nó đều giống nhau.

Giải : Giả sử $n = \overline{a \ldots aa}$ là số chính phương. Vì a không thể là số lẻ (theo tính chất 3) nên theo tính chất 4 ta rút ra $a = 4$. Mặt khác số 11....11 không chính phương (theo tính chất 3) nên số $n = 44 \ldots 44 = 4 \,.\, 11 \ldots 11$ cũng không thể chính phương được.

Bài toán 2 : Giả sử $A = 19^5$. Hãy điền vào đằng trước số A một số chữ số để số nhận được là số chính phương.

Giải : Dễ dàng kiểm tra được tận cùng của A là hai số lẻ, nên theo tính chất 3 không thể tồn tại cách điền sao cho số nhận được là số chính phương.

Bài toán 3 : Cho năm số chính phương có hàng chục đôi một khác nhau và hàng đơn vị là 6. Chứng minh rằng tổng tất cả các chữ số hàng chục của năm số trên cũng là số chính phương.

Giải : Theo tính chất 1 ta rút ra các chữ số hàng chục của năm số chính phương nói trên phải là 1, 3, 5, 7, 9. Rõ ràng $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$ là số chính phương.

Bài toán 4 : Tìm số chính phương có bốn chữ số dạng $\overline{abbb}$.

Giải : Theo tính chất 3 thì b không thể là số lẻ. Dễ thấy $b \neq 0$ nên theo tính chất 4 rút ra $b = 4$. Kiểm tra các giá trị của a ta thấy :

+) $a = 1$ ta được số $1444 = 38^2$

+) Với a là số chẵn (Tức là $a = 2, 4, 6, 8$) số $\overline{a444}$ không chính phương vì số

$\overline{a444} = 4\left(500 \,.\, \frac{a}{2} + 111\right)$ mà số $500 \,.\, \frac{a}{2} + 111$ có dạng $4k + 3$ không phải dạng của số chính phương.

+) 3444 và 9444 không chính phương do chúng chia hết cho 3 mà không chia hết cho 9.

+) Kiểm tra trực tiếp hai số còn lại 5444 và 7444 ta cũng nhận thấy chúng không chính phương.

Vậy bài toán có nghiệm duy nhất là 1444.

Bài toán 5 : Hãy tìm một số chính phương có tận cùng bằng bốn chữ số giống nhau khác không.

Giải : Giả sử tồn tại một số chính phương như vậy :

$A = \overline{a \ldots bcccc}$ với $c \neq 0$. Từ tính chất 3 và tính chất 4 ta rút ngay ra $c = 5$. Khi đó số A có thể viết dưới dạng :

$$\begin{aligned} A &= \overline{a \ldots b} \,.\, 10^4 + 4444 = \\ &= 4 \,.\, (\overline{a \ldots b} \,.\, 2500 + 1111) \\ &= 4(4m + 3) \end{aligned}$$

Do số $4m + 3$ không phải dạng của số chính phương nên A không thể chính phương. Nói cách khác không tồn tại số chính phương nào có tận cùng là bốn chữ số giống nhau, khác không.

Bài toán 6 : Ta viết các số tự nhiên từ 1 đến 100 liên tiếp nhau và thu được số 1234567891011...9899100. Hỏi số trên có phải là số chính phương hay không ?

Giải : Số trên không phải là số chính phương vì sau khi bỏ hai chữ số không cuối cùng đi ta nhận được số meli không chính phương (theo tính chất 3).

Để kết thúc bài báo này đề nghị các bạn tự giải bài toán sau đây :

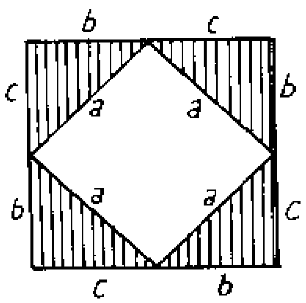
Bài toán 7 : Hãy tìm dạng tổng quát của các số chính phương có tận cùng là ba chữ số giống nhau khác không.

Chương III – BẠN ĐỌC TÌM TÒI

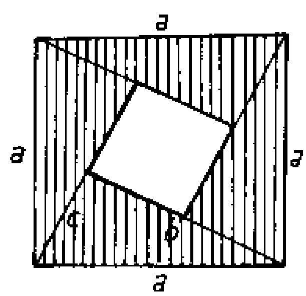
TÔI ĐÃ HỌC ĐỊNH LÍ PITAGO NHƯ THẾ NÀO

NGUYỄN VĂN KHÁNH
(Hà Giang)

Các bạn đều đã quen biết định lí Pitago. Không biết khi học định lí đó thì bạn có lấy gì làm hứng thú không ? Riêng tôi thì định lí đó đã để lại cho tôi những ấn tượng sâu sắc và lí thú, vì nó luôn luôn gợi cho tôi những suy nghĩ và tìm tòi, nó làm cho tôi học toán luôn luôn thấy say sưa và thú vị. Tôi muốn nêu ra đây quá trình tôi học tập định lí Pitago như thế nào và nhân đó rút ra vài kết luận muốn trao đổi cùng các bạn.



Hình 1



Hình 2

Chúng ta đều biết, ở lớp 7 đã chứng minh định lí Pitago bằng cách chắp hình : lấy 4 tam giác vuông bằng nhau rồi chắp thành hình 1 ta sẽ chứng minh được hệ thức $a^2 = b^2 + c^2$. Thật vậy, căn cứ hình (1) ta có :

$$(b + c)^2 = 4\frac{b \cdot c}{2} + a^2 \qquad (1)$$

Do đó $a^2 = b^2 + c^2$

Khi học cách chứng minh này ở nhà, tôi đã "bắt chước" cách chắp hình trên, sắp xếp lại các tam giác vuông... và bỗng tôi rất vui mừng khi tìm ra một cách chứng minh mới nữa nhờ cách chắp được vẽ ở hình (2) :

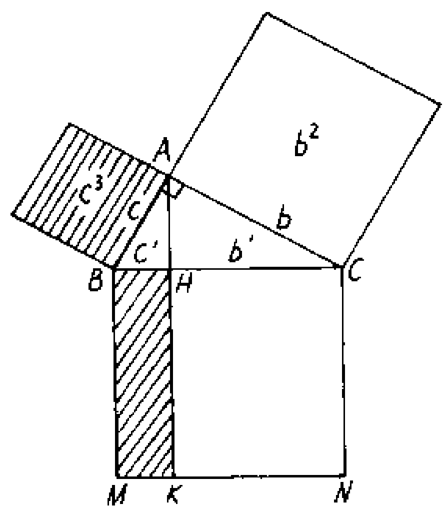
Thật vậy bằng cách cộng diện tích tôi có :

$$a^2 = 4.\frac{b.c}{2} + (b - c)^2 \qquad (2)$$

Do đó : $a^2 = b^2 + c^2$ (hình vuông trắng có cạnh là $b - c$).

Hai cách chứng minh trên gợi cho tôi một ý niệm khá sâu sắc : hình ảnh của $a^2, b^2, c^2, \ldots$ là diện tích các hình vuông cạnh $a, b, c \ldots$, còn các tích $b.c$, $x.y$ gợi cho tôi nghĩ đến diện tích của hình chữ nhật hay là tam giác. Chính vì thế, khi biết các hệ thức :

$b^2 = ab'$ và $c^2 = ac'$ (hình 3) thì tôi thấy ngay rằng diện tích hình vuông cạnh b bằng diện tích hình chữ nhật $CHKN$ và diện tích hình vuông cạnh c bằng diện tích hình chữ nhật $BHKM$ mà $S_{BHKM} + S_{CHKM} = a'$ (3)



Hình 3

Nên tôi lại có $a^2 = b^2 + c^2$

Về sau tôi có suy nghĩ nhiều về ba cách chứng minh trên và cũng khá vất và tôi mới nhận được rằng thực chất của ba kiểu chứng minh trên là ở chỗ đã biết dùng biểu thức cần tìm ($a^2 = b^2 + c^2$) biến đổi đi để được các biểu thức tương đương (1), (2) và (3) những biểu thức này chứng minh được một cách dễ dàng, bằng cách tìm ý nghĩa hình học của nó.

Thế là tôi bắt đầu thực hiện điều suy nghĩ đó. Tôi đã có các kiểu biến đổi sau đây, mà tôi cho rằng không khó khăn lắm các bạn cũng nghĩ ra được :

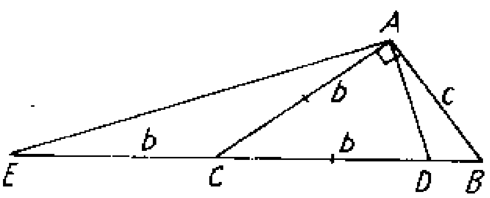
1) $a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow a^2 - b^2 =$

$= c^2 \rightarrow (a + b)(a - b) = c^2 \qquad (4)$

và

$$\frac{a+b}{c} = \frac{c}{a-b} \qquad (5)$$

Hệ thức (4) gợi cho tôi nhớ đến hệ thức lượng trong vòng tròn và (5) gợi cho tôi nghĩ đến những tam giác đồng dạng. Thế là tôi nghĩ đến cách dựng các đoạn $a + b$ và $a - b$ trên cạnh huyền của tam giác ABC, và hi vọng sẽ tìm ra những tam giác đồng dạng nào đấy. Tôi đã dựng được hình (4). Qua hình vẽ ta có :



Hình 4

Δ ADE vuông ở A vì $AC = \frac{1}{2}DE = b$; $\widehat{DAB} = 90^0 - \widehat{CAD} = 90^0 - \widehat{ADC} = \widehat{AEB}$; $\widehat{DAB}$ chung cho hai tam giác ABD và ABE, do đó hai tam giác này đồng dạng với nhau và có :

$$\frac{BE}{AB} = \frac{AB}{DB} \text{ hay } \frac{a+b}{c} = \frac{c}{a-b}$$

Do đó $\qquad a^2 = b^2 + c^2$

Nếu ta chú ý rằng AB là tiếp tuyến của vòng tròn ngoại tiếp tam giác ADE thì cũng thấy ngay rằng $AB^2 = BD \,.\, BE$

hay $c^2 = (a + b)(a - b)$. Do đó $a^2 = b^2 + c^2$.

2) $a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow a^2 = (b + c)^2 - 2bc \rightarrow$
$(b + c)^2 - a^2 = 2bc \rightarrow$
$(b + c + a)(b + c - a) = 2bc$.

Gọi p là nửa chu vi ta có :

$$2p \,.\, 2(p - a) = 2bc \,;\, p\,(p - a) = \frac{b\,.\,c}{2} \qquad (6)$$

Hệ thức (6) gợi tôi nhớ đến công thức tính diện tích của tam giác $S = p \,.\, r = \frac{b\,.\,c}{2}$. Và quả thật, đối với tam giác vuông thì đẳng thức (6) là đúng vì

$$r = (p - a)\, tg\frac{A}{s} = (p - a) \,.\, tg\frac{90^0}{2}$$

$r = p - c$. Do đó :

$$S = p \,.\, r = p(p - a) = \frac{b\,.\,c}{2}$$

Thế là tôi lại có một cách chứng minh mới của định lí Pitago.

3) $a^2 = b^2 + c^2$; $a^2 = (b - c)^2 + 2bc$

$a^2 - (b - c)^2 = (a - b + c)(a + b - c) = 2bc$

$(p - b)(p - c) = \frac{bc}{2}$. So sánh với (6) ta được $p(p - a) = (p - b)(p - c)$

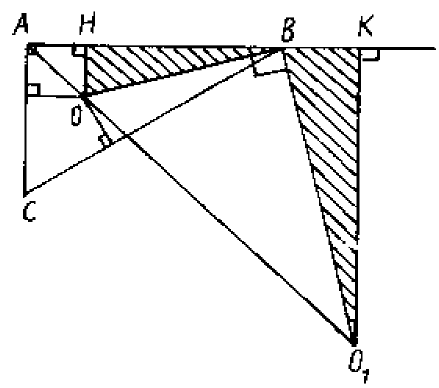
$$\frac{p}{p-b} = \frac{p-c}{p-a} \qquad (7)$$

Hệ thức (7) gợi cho tôi nghĩ đến những tam giác đồng dạng có các cạnh là p và $p - a$, $p - b$ và $p - c$. Song các hiệu $p - a$, $p - b$, $p - c$ gợi tôi nghĩ đến các bán kính vòng tròn nội tiếp và bàng tiếp. Tôi đã vẽ ra hình (5) và thấy rằng các tam giác OHB và BKO_1 đồng dạng với nhau, do đó :

$$\frac{O_1K}{HB} = \frac{BK}{OH}$$

Nhưng

$AH = p - a, HB = p - b$, $AK = O_1K = p$



Hình 5

Do đó

$$\frac{p}{p-b} = \frac{p-c}{p-a}$$

Biến đổi ngược lại tôi lại có

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Trên đây là vài điều suy nghĩ được của tôi về định lí Pitago, trong quá trình học tập nó. Những điều này có thể người ta đã biết lâu rồi, nhưng đó là điều không quan trọng. Cái quan trọng là ở chỗ, qua việc học tập nó, tôi rút ra được mấy điều :

– Tôi đã học định lí Pitago không phải chỉ qua 1, 2 giờ giảng của thầy trên lớp, 1 vài bài tập áp dụng nó, mà tôi học tập nó một cách thường xuyên : tìm ý nghĩa của nó, tìm các cách chứng minh, tìm các cách biểu hiện khác nhau của nó, luôn luôn suy nghĩ về định lí đó, suy nghĩ từ ngày này qua ngày khác, năm này qua năm khác.

– Mỗi khi học được một cái gì mới tôi luôn luôn có ý thức "dùng cái mới để soi sáng thêm cái cũ". Chính vì công việc có ít nhiều cái vẻ "khảo cổ này" tôi đã thu được nhiều điều bổ ích : hiểu chắc cái mới, hiểu sâu cái cũ và do đó làm cho tôi ngày càng ham thích học toán.

Đó là những kết luận tôi muốn trao đổi cùng các bạn.

CÁC ĐƯỜNG n TUYẾN CỦA MỘT TAM GIÁC

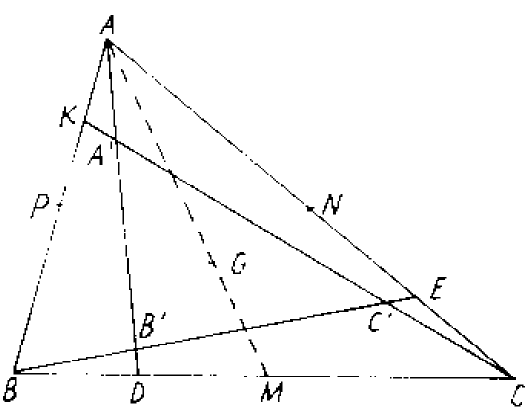
NGUYỄN ĐẠO PHƯƠNG

Trong chương trình toán phổ thông có nhiều kiến thức mới học qua tưởng như đơn giản. Nhưng nếu ta biết cách học, biết cách xem xét vấn đề dưới nhiều khía cạnh, biết mở rộng kiến thức thì ta sẽ thu được nhiều kiến thức mới, gây cho ta nhiều hứng thú trong học tập và giúp ta hiểu sâu sắc kiến thức cũ. Sau đây tôi xin giới thiệu với các bạn một vấn đề nhỏ : các đường n tuyến của một tam giác.

Trên các cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC ta lấy những điểm D, E, K sao cho :

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{AK}}{\overline{AB}} = \frac{1}{n} \text{ (} n \text{ là một số đại số)}$$

Những đường AD, BE, CK được gọi là các đường n tuyến của tam giác ABC.



Như vậy ta đã mở rộng khái niệm các đường trung tuyến. Các đường trung tuyến AM, BN, CP là trường hợp đặc biệt của các đường n tuyến khi $n = 2$. Ta hãy tìm hiểu những tính chất của các đường n tuyến.

Ta đã biết các đường trung tuyến của một tam giác đồng quy tại một điểm. Đó là trọng tâm G của tam giác.

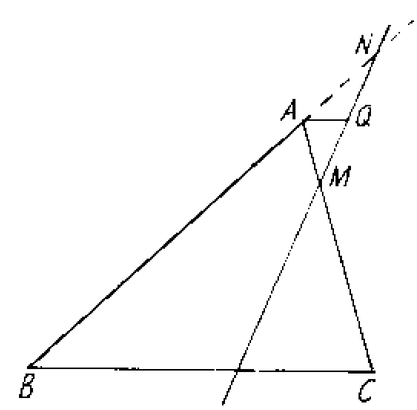
Bằng trực giác ta cũng thấy ngay các đường n tuyến không đồng quy (với $n \neq 2$) các bạn có thể chứng minh dễ dàng được điều đó. Chúng cắt nhau tại các điểm A' B' C'. Coi G là giao điểm của ba đường trung tuyến, *ta có thể coi G là một trường hợp đặc biệt của tam giác A' B' C' khi n = 2.*

2) Điều ta suy nghĩ tiếp là như vậy thì giữa G và các điểm A', B', C' có một tính chất giống nhau nào đó.

Ta đã biết G chia ba mỗi đường trung tuyến kể từ cạnh tương ứng. Vậy liệu các giao điểm A', B', C' của ba đường n tuyến có cùng chia mỗi đường n tuyến theo cùng một tỉ số không ?

Trước hết ta hãy xem A' chia n tuyến KC theo tỉ số nào.

Áp dụng định lí Mênêlaút (*) vào tam giác BKC, ứng với cát tuyến $AA'D$, ta được :



(*) *Định lí Mênêlaút phát biểu như sau : "Nếu một đường thẳng bất kì, không đi qua đỉnh của tam giác ABC và cắt các cạnh của tam giác tại các điểm tương ứng L, M, N thì ta có đẳng thức :*

$$\frac{\overline{BL}}{\overline{LC}} \cdot \frac{\overline{CM}}{\overline{MA}} \cdot \frac{\overline{AN}}{\overline{NB}} = -1"$$

Bạn đọc có thể chứng minh dễ dàng định lí này bằng cách kẻ AQ // BC rồi áp dụng định lí Talét.

$$\frac{\overline{CA'}}{\overline{A'K}} \cdot \frac{\overline{KA}}{\overline{AB}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} = -1$$

Nhưng $\dfrac{\overline{AK}}{\overline{AB}} = \dfrac{1}{n}$ và $\dfrac{\overline{DB}}{\overline{DC}} = \dfrac{1}{1-n}$

vì $\dfrac{\overline{BD}}{\overline{BC}} = \dfrac{1}{n}$ nên $\dfrac{\overline{A'C}}{\overline{A'K}} = n(1-n)$

Ta biến đổi như sau :

$$\frac{\overline{A'K}}{1} = \frac{\overline{A'C}}{n(1-n)} = \frac{\overline{A'K} - \overline{A'C}}{1-n(1-n)} = \frac{\overline{CK}}{n^2-n+1}$$

Từ đó ta có :

$$\frac{A'K}{KC} = \frac{1}{n^2-n+1}$$

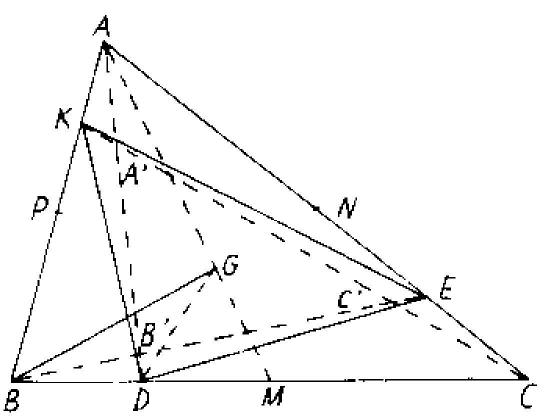
Vậy A' chia n tuyến KC, kể từ cạnh tương ứng, theo tỉ số là $\dfrac{1}{n^2-n+1}$. Chứng minh tương tự ta cũng có kết quả như vậy đối với các điểm B', C'.

Tóm lại A', B', C' chia mỗi đường n tuyến kể từ cạnh tương ứng theo cùng một tỉ số là $\dfrac{1}{n^2-n+1}$

Chú ý là với $n = 2$ thì $\dfrac{1}{n^2-n+1} = \dfrac{1}{3}$, ta có trường hợp của các đường trung tuyến.

3) Bây giờ ta chú ý đến tam giác DEK là tam giác có đỉnh là chân của các đường n tuyến. Khi $n = 2$ tam giác DEK có vị trí đặc biệt là tam giác MNP. Ta đã biết tam giác MNP và tam giác ABC có cùng trọng tâm G. Bởi vậy ta dự đoán là tam giác DEK và tam giác ABC cũng có trọng tâm trùng nhau.

Ta hãy chứng minh G là trọng tâm tam giác DEK.



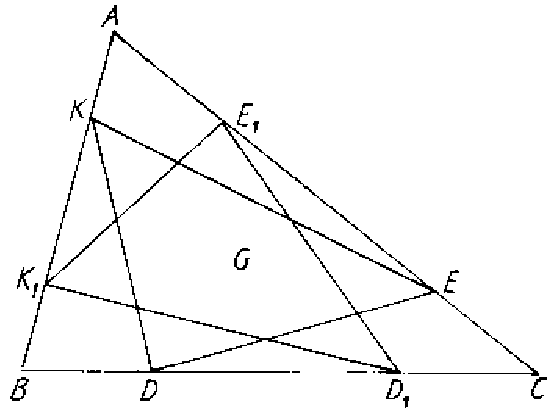
Ta phải chứng minh $\overrightarrow{GD} + \overrightarrow{GE} + \overrightarrow{GK} = 0$.

Ta có $\overrightarrow{GD} = \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{GB} + \dfrac{1}{n}\overrightarrow{BC}$

Tương tự $\overrightarrow{GE} = \overrightarrow{GC} + \dfrac{1}{n}\overrightarrow{CA}$

$$GK = \overrightarrow{GA} + \frac{1}{n}\overrightarrow{AB}$$

Vậy $\overrightarrow{GD} + \overrightarrow{GE} + GK = (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) + \dfrac{1}{n}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA})$



Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 0$, và $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = 0$

Do đó : $\overrightarrow{GD} + \overrightarrow{GE} + \overrightarrow{GK} = 0$

Điều này chứng tỏ G cũng là trọng tâm của tam giác DEK (đpcm).

Kết quả trên đây không phụ thuộc vào số n, nên ta đi đến điều lí thú sau : *Có vô số tam giác có đỉnh nằm trên cạnh của một tam giác cho trước mà có trọng tâm trùng với trọng tâm của tam giác cho trước :* đó là những tam giác có đỉnh là các điểm chia các cạnh của tam giác theo cùng một tỉ số.

4) Ở phần 1) ta đã coi G là một trường hợp đặc biệt của tam giác $A'B'C'$ khi $n = 2$. Như thế ta cũng có thể coi G như là một tam giác đặc biệt : "tam giác – điểm".

"Tam giác – điểm" G có trọng tâm trùng với chính nó, tức là trọng tâm của tam giác ABC.

Vậy ta cũng có thể dự đoán là tam giác $A'B'C'$ và tam giác ABC có trọng tâm trùng nhau. Muốn chứng minh dự đoán này ta phải chứng minh :

$$\overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GC'} = 0$$

Ta có :

$\overrightarrow{GA'} = \overrightarrow{GK} + \overrightarrow{KA'}$. Nhưng $\overrightarrow{KA'} = \dfrac{1}{n^2-n+1}\overrightarrow{KC}$

nên $\overrightarrow{GA'} = \overrightarrow{GK} + \dfrac{1}{n^2-n+1}\overrightarrow{KC}$

Tương tự $GB' = \vec{GD} + \dfrac{1}{n^2 - n + 1}\vec{DA}$

$$\vec{GC'} = \vec{GE} + \frac{1}{n^2 - n + 1}\vec{EB}$$

Cộng từng vế ta được :

$$\vec{GA'} + \vec{GB'} + \vec{GC'} = \underbrace{\vec{GD} + \vec{GE} + \vec{GK}}_{=0} +$$

$$+ \frac{1}{n^2 - n + 1}(KC + \vec{DA} + \vec{EB})$$

Ta lại có :

$$\vec{KC} = \vec{KA} + \vec{AC} = \frac{1}{n}\vec{BA} + \vec{AC}$$

tương tự $\quad \vec{DA} = \dfrac{1}{n}\vec{CB} + \vec{BA}$

$$\vec{EB} = \frac{1}{n}\vec{AC} + \vec{CB}$$

nên $\vec{KC} + \vec{DA} + \vec{EB} = \dfrac{n+1}{n}(\vec{AC} + \vec{CB} + \vec{BA} = 0$

Vậy :

$$\vec{GA'} + \vec{GB'} + \vec{GC'} = 0$$

Diều này chứng tỏ G *cũng là trọng tâm của tam giác* $A'B'C'$.

5) Ta còn có thể tìm thấy một số tính chất hay khác nữa của đường n tuyến.

Chẳng hạn nếu bạn đã học định lí Stiua thì bạn có thể chứng minh không khó khăn gì công thức :

$$d_a^2 + d_b^2 + d_c^2 = \frac{n^2 - n + 1}{n^2}(a^2 + b^2 + c^2)$$

trong đó d_a, d_b, d_c là độ dài các đường n tuyến ứng với các cạnh a, b, c. Trong trường hợp $n = 2$, công thức trên đây trở thành :

$$d_a^2 + d_b^2 + d_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$$

là công thức quen thuộc đối với các đường trung tuyến.

Đặt $\quad y = \dfrac{n^2 - n + 1}{n^2}$

có thể thấy (bằng cách dùng đạo hàm chẳng hạn) rằng y đạt *cực tiểu* khi $n = 2$.

Bạn còn có thể chứng minh rằng các tam giác $A'AC$, $B'BA$, $C'CB$ có diện tích bằng nhau.

MỘT PHƯƠNG PHÁP TÍNH TỔNG

NGUYỄN VĂN ĐIỀN

Trong toán học chúng ta thường gặp những bài toán tính tổng của hàng loạt số hạng được sắp xếp theo một quy luật nào đó. Cấp số cộng, cấp số nhân mà ta đã biết, việc tính tổng của chúng khá đơn giản. Một khi ta gặp bài toán tính tổng mà các số hạng không lập thành một cấp số như :

1) $S = 1/x(x + h)(x + 2h)(x + 3h) +$
$+ 1/(x + h)(x + 2h)(x + 3h)(x + 4h) + \dots$
$\dots + 1/(x + nh)[x + (n + 1)h]\times$
$\times[x + (n + 2)h][x + (n + 3)h]$

2) $\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \dots + \cos(2n - 1)x$

3) $1.2.3 + 2.3.4 + \dots + (n - 2)(n - 1)n$

thì chắc các bạn gặp nhiều khó khăn. Để giúp các bạn phần nào giải quyết khó khăn đó tôi xin giới thiệu cùng bạn đọc một phương pháp tính tổng sau. Giả sử $f(x)$ là một hàm số nào đó và $\varphi(x)$ là một hàm số khác được thỏa mãn :

$$f(x) = \varphi(x + h) - \varphi(x) \qquad (1)$$

trong đó h là một số nào đó.

Lần lượt thay x bằng dãy $x + h$; $x + 2h$; ... ; $x + nh$ vào đẳng thức (1) ta có :

$$f(x + h) = \varphi(x + 2h) - \varphi(x + h) \qquad (2)$$

$$f(x + 2h) = \varphi(x + 3h) - \varphi(x + 2h) \qquad (3)$$

. . . .

$$f(x + nh) = \varphi[x + (n + 1)h] - \varphi(x + nh)(n + 1)$$

Cộng từng vế các đẳng thức (1) (2) (3) ... (n + 1) lại ta có

$$f(x) + f(x + h) + f(x + 2h) + \dots + f(x + nh)$$

$= \varphi[x + (n + 1)h] - \varphi(x)$

Như thế muốn tổng có dạng

$f(x) + f(x + h) + f(x + 2h) + ... + f(x + nh)$ thực hiện được nếu ta chọn được một hàm số $\varphi(x)$ mà hàm $\varphi(x)$ được liên hệ với $f(x)$ theo đẳng thức (1) tức là

$$f(x) = \varphi(x + h) - \varphi(x)$$

Để làm sáng tỏ vấn đề này ta khảo sat ví dụ 1, 2 ở trên

1) Tính tổng :

$S = 1/x(x + h)(x + 2h)(x + 3h)$

$+ 1/(x + h)(x + 2h)(x + 3h)(x + 4h) + ...$

$... + 1/(x + nh)[x + (n + 1)h][x + (n + 2)h]$

$[x + (n + 3)h]$

Để xuất hiện hàm $f(x)$, sau khi thay x bằng dãy $x + h$; $x + 2h$; . . . ; $x + nh$ ta được các hàm

$f(x)$; $f(x + h)$; $f(x + 2h)$; ... ; $f(x + nh)$ là các số hạng trên, chúng ta xét hàm

$\varphi(x) = 1/x(x + h)(x + 2h)$

khi đó $\varphi(x + h) = 1/(x + h)(x + 2h)(x + 3h)$

và $\varphi(x+ h) - \varphi(x) = 1/(x+ h)(x+ 2h)(x+ 3h)$

$- 1/x(x + h)(x + 2h) = -3h/x(x + h) \times$

$(x + 2h)(x + 3h) = f(x)$

Từ đó suy ra

$f(x) + f(x + h) + f(x + 2h) + ... + f(x + nh) =$

$= -3h\{ 1/x(x+ h)(x+ 2h)(x+ 3h)+ 1/(x+ h) \times$

$(x + 2h)(x + 3h)(x + 4h)$

$+ ...+ 1/(x+ nh)[x+ (n+ 1)h][x+ (n+ 2)h]\times$

$[x + (n + 3)h]\}$

$= \varphi[x + (n + 1)h] - \varphi(x)$

$= 1/[x + (n + 1)h][x + (n + 2)h]$

$[x + (n + 3)h]$

$-1/x(x + h)(x + 2h)$

Vậy giá trị của tổng đã cho là :

$S = (1/3h) \{ 1/x(x + h) (x + 2h) -$

$- 1/[x + (n + 1)h][x + (n + 2)h] \times$

$\times [x + (n + 3)h]\}$.

2) Tính tổng

$S= \cos x+\cos 3x+ \cos 5x +...+ \cos(2n- 1)x$

Ta biết rằng

$\sin 2nx - \sin 2(n - 1)x = 2\cos(2n - 1)x\sin x$

Vậy ta chọn

$$\varphi(n) = \sin 2(n - 1)x$$

khi đó

$\varphi(n + 1) = \sin 2nx$

$\varphi(n + 1) - \varphi(n) = \sin 2nx - \sin 2(n - 1)x$

$= 2\sin x\cos(2n - 1)x = f(n)$

Thay n bằng dãy số tự nhiên 1, 2, 3, ...

Từ đó suy ra

$f(1) + f(2) + f(3) + ... + f(n) =$

$= 2\sin x[\cos x + \cos 3x + \cos 5x + ...$

$+ \cos(2n - 1)x]$

$= \varphi(n + 1) - \varphi(1)$

$= \sin 2nx - 0 = \sin 2nx.$

Vậy

$$S = \sin 2nx/2\sin x \text{ nếu } \sin x \neq 0$$

Mời các bạn hãy thử lại kết quả trên bằng quy nạp.

Tóm lại phương pháp tính tổng trên là một phương pháp có hiệu lực trong việc tính tổng hàng loạt các số hạng được sắp xếp theo thứ tự nhất định. Nhưng vấn đề khó đồng thời là mấu chốt của phương pháp này là chọn được hàm $\varphi(x)$ thỏa mãn đẳng thức (1). Một khi đã chọn được thích hợp thì bài toán coi như giải được.

Để kết thúc vấn đề này mời bạn đọc hãy áp dụng phương pháp này vào ví dụ 3 nêu ở trên và hai bài sau đây

1) $1.1\,! + 2.2\,! + 3.3\,! + ... + n.n\,!$

$(n\,! = 1.2.3... n)$

2) $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2$

"BA ĐỊNH LÍ TƯƠNG ĐƯƠNG"

TRẦN ĐÌNH TRƯỜNG
(Thanh Hóa)

Bài này tôi muốn nói với các bạn về sự tương dương và phương pháp chứng minh của ba định lí sau :

Dịnh lí I : *Trong một tam giác vuông, bình phương cạnh huyền bằng tổng các bình phương của 2 cạnh góc vuông* (Pitago).

Định lí II : *Bình phương của một cạnh, đối diện với góc nhọn (hay tù) của một tam giác, bằng tổng các bình phương của 2 cạnh kia trừ di (hay cộng thêm) 2 lần tích của một trong 2 cạnh ấy với hình chiếu của cạnh kia trên nó.*

Dịnh lí III : (Stinơ) *Cho 3 điểm ABC lần lượt nằm trên một đường thẳng. Với mọi điểm P ta đều có :*

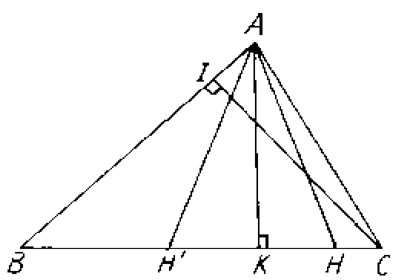
$$PA^2 . \overline{BC} + PB^2 . \overline{CA} + PC^2 . \overline{AB} + \\ + \overline{BC} . \overline{CA} . \overline{AB} = 0 \qquad (*)$$

1) Dùng đồng dạng chứng minh định lí I. Từ định lí I suy ra định lí II, các bạn xem chương III, sách hình học lớp 8.

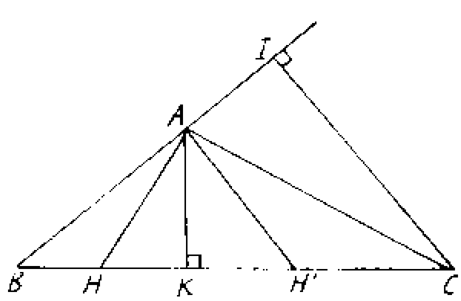
2) Chứng minh định lí II bằng cách khác :

a) Dùng đồng dạng :

Với mọi giá trị của A (nhọn hay tù) ta đều dựng dược H và H' trên BC sao cho $\widehat{AH'C} = \widehat{AHB} = \widehat{BAC}$ và H, C ở về 1 phía dối với B. H', B ở 1 phía đối với C. Theo cách dựng ta có :



Hình 1



Hình 2

$\Delta\ ABC \backsim \Delta HBA$ ($\widehat{B}$ chung ; $\widehat{BHA} = \widehat{BAC}$) Nên

$$AB/BC = HB/BA \rightarrow AB^2 = \overline{BC} . \overline{BH} \qquad (1)$$

(C, H về 1 phía của B)

$\Delta\ ABC \backsim \Delta H'AC$ ($\widehat{C}$ chung $\widehat{CH'A} = \widehat{BAC}$) Nên

$$AC/BC = H'C/AC \rightarrow AC^2 = \overline{BC} . \overline{H'C} \qquad (2)$$

(H', B về 1 phía của C).

$$BC/AB = AC/AH' \qquad (3)$$

$\Delta\ ACI \backsim \Delta H'AK$ ($\widehat{CIA} = \widehat{AKH} = 1v$; $\widehat{AH'K} = \widehat{CAI}$)

Nên $\qquad AC/AH' = AI/KH' \qquad (4)$

Cộng vế với vế của (1) và (2) ta có :

$$AB^2 + AC^2 = \overline{BC}(\overline{BH} + \overline{H'C}) =$$
$$= \overline{BC}(\overline{BH} + \overline{HH'} + \overline{H'C} + \overline{H'H})$$
$$= \overline{BC}(\overline{BC} + \overline{H'H})$$

Vậy : $AB^2 + AC^2 = BC^2 + \overline{BC} . \overline{H'H} \qquad (5)$

Từ (3) và (4) suy ra

$BC/AB = AI/KH' \Rightarrow \overline{BC} . KH' = \overline{AB} . \overline{AI}$

Mà

$$KH' = \ = 1/2\overline{HH'}$$

Nên

$$\overline{BC} . \overline{H'H} = 2\overline{AB} . \overline{AI} \qquad (6)$$

thay (6) vào (5) ta có :

$AB^2 + AC^2 = BC^2 + 2\overline{AB} . \overline{AI}$ hay

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\overline{AB} . \overline{AI}$

Khi $\widehat{A} < 90^0 \Rightarrow I$ và B ở về 1 phía của A nên $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB . AI$

Khi $\widehat{A} > 90^0 \Rightarrow I$ và B ở về 2 phía của A nên AB và AI ngược chiều. Do đó :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 + 2AB . AI$$

Từ dịnh lí này ta suy ra dịnh lí Pitago. Pitago chỉ là hệ quả của định lí này mà thôi.

(*) Đoạn thẳng có gạch trên chỉ độ dài đại số của đoạn thẳng đó (ví dụ $\overline{PA} = -\overline{AP}$).

Thật vậy khi $\widehat{A} = 90^o$ $I = \widehat{A}$ do đó $\overline{IA} = 0$ cho nên

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \,.\, O = AB^2 + AC^2$$

b) Dùng định lí III. Nếu có

$$PA^2.\overline{BC} + PB^2.\overline{CA} + PC^2.\overline{AB} + \overline{BC}.\overline{CA}.\overline{AB} = 0$$

thì ta sẽ suy ra được định lí II.

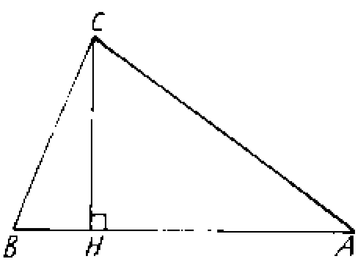
Theo Stinơ ta có

$$CB^2 \,.\, \overline{HA} + CH^2 \,.\, \overline{AB} + CA^2 \,.\, \overline{BH} + \\ + \overline{HA} \,.\, \overline{AB} \,.\, BH = 0 \qquad (7)$$

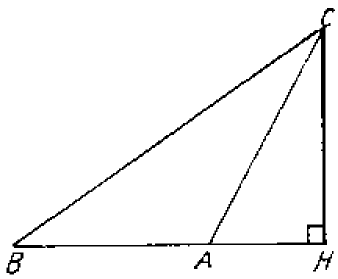
(trường hợp tù ta đổi dấu các số hạng thì cũng được đẳng thức (7).

Thay $CH^2 = CA^2 - AH^2$ vào (7) ta có

$$CB^2 \,.\, \overline{HA} + CA^2 \,.\, \overline{AB} + HA^2 \,.\, \overline{BA} + \\ + CA^2 \,.\, \overline{BH} + \overline{HA} \,.\, \overline{AB} \,.\, \overline{BH} = 0$$



Hình 3



Hình 4

hay : $CB^2 = (CA^2 \,.\, \overline{AB} + HA^2 \,.\, \overline{BA} + CA^2 \times \overline{BH} + \overline{HA} \,.\, \overline{AB} \,.\, \overline{BH}) : (\overline{AH})$

$$CB^2 = [CA^2(\overline{AB} + \overline{BH}) + \\ + \overline{HA} \,.\, \overline{BA}(\overline{HA} + \overline{HB})] : (\overline{AH})$$

$$CB^2 = [CA^2\overline{AH} + \overline{HA}.\overline{BA}(\overline{HA} + \overline{HB})] : (\overline{AH})$$

$$CB^2 = CA^2 + \overline{AB}(\overline{HA} + \overline{HB})$$

$$CB^2 = CA^2 + \overline{AB}(\overline{HA} + \overline{AB} + \overline{BH} + 2\overline{HB} + \overline{BA})$$

Vì $\overline{HA} + \overline{AB} + \overline{BH} = 0$ nên

$$CB^2 = CA^2 + \overline{AB}(2\overline{HB} + \overline{BA})$$

Mà

$$\overline{HB} = \overline{AB} - \overline{AH}$$

Nên :

$$CB^2 = CA^2 + \overline{AB}(2\overline{AB} - 2\overline{AH} + \overline{BA})$$

Vậy :

$$CB^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 - 2\overline{AH} \,.\, \overline{AB}$$

Khi $\widehat{A} < 90^0$ ta lấy dấu :

$CB^2 = AC^2 + AB^2 - 2AH \,.\, AB$ (H, B cùng phía với A).

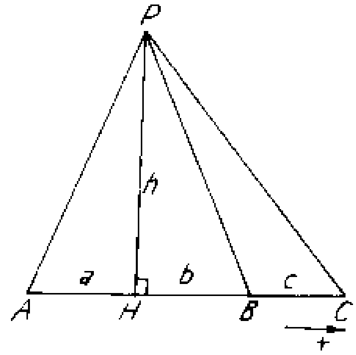
Khi $\widehat{A} > 90^0$ ta lấy dấu

$CB^2 = AB^2 + 2AH \,.\, AB$ (H và B ở 2 phía đối với A).

3) Chứng minh định lí III (Stinơ).

a) Dùng Pitago ;

Để đơn giản ta hãy kí hiệu hóa và làm mất dấu đại số bằng cách quy định chiều. Ta tính



Hình 5

$$PA^2 \,.\, \overline{BC} + PB^2 \,.\, \overline{CA} + \\ PC^2 \,.\, \overline{AB} + \overline{BC} \,.\, \overline{CA} \,.\, \overline{AB} = \\ = PA^2 \,.\, c + PC^2(a + b) - \\ - PB^2(a + b + c) - \\ - c(a + b + c)(a + b) \qquad (8)$$

Mặt khác

$$PA^2 = h^2 + a^2$$

$$PB^2 = h^2 + b^2$$

$$PC^2 = h^2 + (b + c)^2$$

Thay vào (8) ta có :

$$h^2 \,.\, c + a^2c + [h^2 + (b + c)^2](a + b) - \\ - (h^2 + b^2)(a + b + c) - c(a + b + c)(a + b) =$$

$$= h^2c + a^2c + h^2a + h^2b + b^2a + b^3 + 2bca + \\ + 2b^2c + ac^2 + bc^2 - h^2a - h^2b - h^2c - b^2a - \\ - b^3 - b^2c - a^2c - abc - abc - b^2c - ac^2 - bc^2$$

Ước lược ta thấy chúng triệt tiêu hết. Do đó :

$$PA^2 \,.\, \overline{BC} + PB^2 \,.\, \overline{CA} + PC^2 \,.\, \overline{AB} + \\ + \overline{BC} \,.\, \overline{CA} \,.\, \overline{AB} = 0$$

Ngược lại nếu có Stinơ ta cũng suy ra được định lí Pitago. Vì điều kiện không cho phép, tôi nhường các bạn suy nghĩ.

b) Dùng định lí II.

Theo định lí II ta có :

$$PA^2 = PB^2 + AB^2 + 2\overline{AB} \,.\, \overline{BH} \qquad (1)$$

$$PC^2 = PB^2 + BC^2 + 2\overline{CB} \,.\, \overline{BH} \qquad (2)$$

nhân 2 vế của (1) với $\overline{BC}$ và của (2) với $\overline{AB}$ ta có :

$$PA^2 \,.\, \overline{BC} = PB^2 \,.\, \overline{BC} + AB^2 \,.\, \overline{BC} +$$

$$+ 2\overline{AB}\,.\,\overline{BH}\,.\,\overline{BC}$$

$$PC^2\,.\,\overline{AB} = PB^2\,.\,\overline{AB} + BC^2\,.\,\overline{AB} + $$
$$+ 2\overline{CB}\,.\,\overline{BH}\,.\,\overline{AB}$$

cộng vế ta có :

$$PA^2\,.\,\overline{BC} + PC^2\,.\,\overline{AB} =$$
$$= PB^2(\overline{AB} + \overline{BC}) + \overline{AB}\,.\,\overline{BC}(\overline{AB} + \overline{BC})$$

nên $PA^2\,.\,\overline{BC} + PC^2\,.\,\overline{AB} + PB^2\,.\,\overline{CA} +$

$$+ \overline{AB}\,.\,\overline{BC}\,.\,\overline{CA} = 0$$

Vậy định lí đã được chứng minh.

Chú ý : khi $PABC$ thẳng hàng định lí II vẫn dúng song phương pháp trên không sử dụng được muốn chứng minh ta dùng hệ thức Salơ.

Tóm lại ta có sơ đồ sau :

$$\text{Pitago} \;\underset{\text{Stinơ}}{\overset{\text{Đồng dạng}}{\longrightarrow}}\; a^2 = b^2 + c^2 \pm 2b'c$$

(Các mũi tên tức là suy ra. Thí dụ đồng dạng suy ra Pitago).

Nhận xét :

– Ngoài ra còn nhiều phương pháp chứng minh khác nữa.

– Đây là 3 định lí cơ bản trong hệ thức lượng của các hình có vai trò bình đẳng như nhau.

– Định lí Stinơ có nhiều ứng dụng. Thí dụ : dùng Stinơ tính độ dài dường phân giác theo 3 cạnh thì rất nhanh và đơn giản.

MỘT VÀI DÃY SỐ ĐẶC BIỆT

LÊ XU
(Nam Hà cũ)

Ta biết rằng số hạng thứ n (u_n), $n \geqslant 2$, của một cấp số cộng có công sai d, được xác định bởi

$$u_n = u_{n-1} + d$$

Với cấp số nhân, có công bội q, thì

$$u_n = u_{n-1}\cdot q.$$

1) Ta hãy nghiên cứu một dãy số $\{u_n\}$ *tổng quát hơn*, được xác định như sau : mỗi số hạng u_n ($n \geqslant 2$) là một *hàm số bậc nhất* của số hạng dứng trước nó :

$$u_n = au_{n-1} + b \qquad (1)$$

trong đó a và b là những hằng số (khi $a = 1$, ta có cấp số cộng ; khi $b = 0$, ta có cấp số nhân).

a) Công thức của số hạng tổng quát (u_n) theo số hạng đầu (u_1) và a, b, n.

Từ công thức cua u_2, u_3, u_4 ta *dự đoán*

$$u_n = a^{n-1}u_1 + (a^{n-2} + a^{n-3} + ... + a + 1)b \qquad (2)$$

Thực vậy : (2) đúng với $n = 2$.

Nếu (2) đúng với $n = k$, thì (2) cũng đúng với $n = k + 1$, vì

$$n_{k-1} = au_k + b =$$
$$= a[a^{k-1}u_1 > (a^{k-2} + a^{k-3} + ... + a + 1)b] + b$$
$$= a^k u_1 + (a^{k-1} + a^{k-2} + ... + a + 1)b, \text{ đpcm.}$$

Trong (2), thay tổng $a^{n-2} + a^{n-3} + ... + a + 1$ bởi $(a^{n-1} - 1)/(a - 1)$, ta được

$$u_n = a^{n-1} - u_1 + (a^{n-1} - 1)b/(a - 1). \qquad (3)$$

b) Tính tổng $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$.

Ta có

$$u_2 + u_3 + ... + u_{n+1} =$$
$$= a(u_1 + u_2 + ... + u_n) + nb$$
$$u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_{n+1} =$$
$$= a(u_1 + u_2 + ... + u_n) + nb + u_1$$
$$u_{n+1} - nb - u_1 =$$
$$= (u_1 + u_2 + ... + u_n)(a - 1)$$
$$S_n = (u_{n+1} - nb - u_1)/(a - 1)$$

hay là, nếu thay u_{n+1} theo (3), ta được công thức của S_n theo u_1, a, b và n.

2) Ta hãy nghiên cứu tiếp dãy $\{u_n\}$, trong đó số hạng thứ n ($n > 2$) được xác định theo hai số hạng đứng trước nó như sau :

$$u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} \qquad (4)$$

trong đó a_1 và a_2 là hai hằng số cho trước.

Ta sẽ chứng minh rằng :

a) Nếu $\{r_n\}$ và $\{v_n\}$ là hai dãy thỏa mãn (4), tức là :

$$r_n = a_1 r_{n-1} + a_2 r_{n-2} \qquad (4a)$$

$$v_n = a_1 v_{n-1} + a_2 v_{n-2} \qquad (4b)$$

thì nhân (4a) với A, (4b) với B (A và B là hai số tùy ý) rồi cộng lại, ta được :

$Ar_n + Bv_n = a_1(Ar_{n-1} + Br_{n-2}) +$
$+ a_2(Av_{n-1} + Bv_{n-2})$, tức là dãy
$\{Ar_n + Bv_n\}$ cũng thỏa mãn (4).

b) Nếu x_1 là nghiệm của phương trình

$$x^2 = a_1 x + a_2 \qquad (5)$$

thì dãy $\{x_1^{n-1}\}$:

$$1, x_1, x_1^2, ..., x_1^{n-1}$$

thỏa mãn (4). Thật vậy, từ $x_1^2 = a_1 x + a_2$, suy ra được

$x_1^{n-1} = a_1 x_1^{n-2} + a_2 x_1^{n-3}$, đpcm.

c) Từ a) và b), suy ra rằng nếu x_1 và x_2 là *hai nghiệm khác nhau* của (5) thì dãy $\{u_n\}$, trong đó

$$u_n = C_1 x_1^{n-1} + C_2 x_2^{n-1} \qquad (6)$$

(C_1 và C_2 là hai số bất kì), thỏa mãn (4).

Ngược lại, mọi dãy thỏa mãn (4) đều có dạng (6). Thực vậy, một dãy như vậy là hoàn toàn xác định bởi hai số hạng đầu $u_1 = m$ và $u_2 = p$. Lúc đó, từ (6), ta được

$$\begin{cases} m = C_1 + C_2 \\ p = C_1 x_1 + C_2 x_2 \end{cases} \qquad (7)$$

và từ hệ này, *bao giờ cũng xác định được C_1 và C_2*:

$$C_1 = (p - mx_2)/(x_1 - x_2)$$
$$C_2 = (mx_1 - p)/(x_1 - x_2)$$

Dãy (6), với hai giá trị này của C_1 và C_2, chính là dãy thỏa mãn (4) và có $u_1 = m$, $u_2 = p$.

3) Áp dụng kết quả trên vào dãy Phibônaxi :

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2} \ (a_1 = a_2 = 1)$$

trong trường hợp $u_1 = 0$, $u_2 = 1$ (tức là dãy 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8 ...) Phương trình (5) có dạng $x^2 = x + 1$, do đó

$x_1 = (1 + \sqrt{5})/2$ và $x_2 = (1 - \sqrt{5})/2$, và (7) có dạng

$$\begin{cases} 0 = C_1 + C_2 \\ 1 = (C_1 - C_2)\sqrt{5}/2 \end{cases}$$

do đó $C_1 = -C_2 = 1/\sqrt{5}$, và theo (6), số hạng tổng quát của dãy Phibônaxi đó là

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

Điều đáng chú ý là biểu thức này *có giá trị nguyên với mọi số tự nhiên n !*

Có thể chứng minh rằng nếu (5) có nghiệm kép $x_1 = x_2$ thì $u_n = x_1^{n-1}(C_1 + C_2 n)$.

TỪ MỘT BÀI TOÁN

NGUYỄN TOÀN
(Trường nghiệp vụ Lâm nghiệp Quảng Ninh)

Trong "Toán học và Tuổi trẻ" có bài toán 29/65 : "*Chứng minh rằng nếu ta có $x^2 = y^2 + z^2$ với $x, y, z > 0$ thì ta có các bất đẳng thức sau :*

a) $x^k > y^k + z^k$ với $k > 2$
2) $x^k < y^k + z^k$ với $k < 2$"

Sau khi giải xong bài toán này, ta không thỏa mãn với kết quả đạt được, ta hãy đào sâu suy nghĩ nhằm khai thác ở bài toán này những điều mới mẻ.

Đầu tiên, ta nghĩ về bài toán tương tự :

(A)

Nếu $x = y + z$ *với* $x, y, z > 0$ *thì* $x^k > y^k + z^k$ *với* $k > 1$; $x^k < y^k + z^k$ *với* $k < 1$

Việc chứng minh bài toán này không khó lắm, ta dùng kết quả bài toán trên. Ta đặt $\frac{k'}{2} = k$, ta có : khi $k' > 2$ thì $k > 1$ và khi $k' < 2$ thì $k < 1$.

Từ $\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2 = \left(y^{\frac{1}{2}}\right)^2 + \left(z^{\frac{1}{2}}\right)^2$ theo bài toán trên ta có

$$x^{\frac{k'}{2}} > y^{\frac{k'}{2}} + z^{\frac{k'}{2}} \text{ với } k' > 2$$

$$x^{\frac{k'}{2}} < y^{\frac{k'}{2}} + z^{\frac{k'}{2}} \text{ với } k' < 2$$

tức là $x^k > y^k + z^k$ với $k > 1$

$x^k < y^k + z^k$ với $k < 1$ (đpcm)

Ta không dừng lại ở bài toán (A), vì nghĩ rằng ta có thể tổng quát hóa (A) :

(B)

Nếu $x = x_1 + x_2 + ... + x_n; x_1, x_2, ..., x_n > 0, n \geq 2$ thì $\begin{cases} x^k > x_1^k + x_k + ... + x_n^k \text{ với } k > 1 \\ x^k < x_2^k + x_2 + ... + x_n^k \text{ với } k < 1 \end{cases}$

Ta chứng minh bằng cách quy nạp theo n. $n = 2$, (B) trở thành (A) ta đã chứng minh.

Giả sử bài toán (B) đúng với $n - 1$, nghĩa là :

Nếu $x' = x_1 + x_2 + ... + x_{n-1}; x_1, x_2, x_{n-1} > 0$

thì $\begin{cases} (x')^k > x_1^k + x_2^k + ... + x_{n-1}^k \text{ với } k > 1 \\ (x')^k < x_1^k + x_2^k + ... + x_{n-1}^k \text{ với } k < 1 \end{cases}$

Ta viết :

$x = x' + x_n$, vì $x' > 0$ nên theo (A) ta có :

$x^k > (x')^k + x_n^k$ với $k > 1$

theo giả thiết :

$(x')^k > x_1^k + x_2^k + ... + x_{n-1}^k$ với $k > 1$

Cộng vế với vế ta có :

$$x^k > x_1^k + x_2^k + ... + x_n^k \text{ với } k > 1$$

tương tự $x^k < x_1 + x_2^k + ... + x_n^k$ với $k < 1$ (đpcm)

Việc chuyển từ bài toán (A) tới (B) là do sự tổng quát hóa đứng về khía cạnh số các số hạng trong tổng $x = y + z$. Bây giờ ta có thể tổng quát hóa (B) ở khía cạnh khác, chẳng hạn ở khía cạnh số mũ của các số hạng trong tổng

$$x = x_1 + x_2 + ... + x_n$$

Ta có bài toán sau :

(C)

Nếu $x^\alpha = x_1^\alpha + x_2^\alpha + ... + x_n^\alpha$ với $x_1, x_2, ..., x_n > 0, n \geq 2$; α là số thực bất kì Thì $x^k > x_1^k + x^k + ... + x_n^k$ với $k > \alpha$ $x^k < x_1^k + x_2^k + ... + x_n^k$ với $k < \alpha$

Ta hãy chứng minh (C) đúng :

Đặt : $x^\alpha = X, x_i^\alpha = X_i$ thế thì ta có :

$X = X_1 + X_2 + ... + X_n \qquad X_i > 0, n \geq 2$

Do (B) ta có : (r số thực)

$$X^r > X_1^r + X_2^r + ... + X_n^r \text{ với } r > 1$$

hay $x^{\alpha r} > x_1^{\alpha r} + x_2^{\alpha r} + ... + x_n^{\alpha r}$ với $r > 1$.

Đặt $a_r = k$ *thì điều kiện* $r > 1$ *có thể viết thành* $k > \alpha$ *và như thế ta có :*

$$x_k > x_1^k + x_2^k + ... + x_n^k \text{ với } k > \alpha$$

tương tự $x^k < x_1^k + x_2^k + ... + x_n^k$ với $k < \alpha$ (đpcm).

Dùng kết quả các bài toán trên, ta giải được một số các bài toán sau :

1) Một hình lập phương có thể tích lớn hơn tổng các thể tích các hình lập phương có tổng các diện tích toàn phần bằng diện tích toàn phần của nó.

2) Trong hình hộp chữ nhật với 3 cạnh a, b, c đường chéo d ta có :

$d^k > a^k + b^k + c^k$ neu $k > 2$

$d^k < a^k + b^k + c^k$ nếu $k < 2$

3) Cho ÷ $a_1, a_2, ..., a_n$ trong đó $a_i > 0$ và $n \geq 2$; α thực ta có :

$$\left[\frac{n}{2}(a_1 + a_n)\right]^\alpha > a_1^\alpha + a_2^\alpha + ... + a_n^\alpha$$

với $\alpha > 1$.

$$\left[\frac{n}{2}(a_1 + a_n)\right]^\alpha < a_1^\alpha + a_2^\alpha + ... + a_n^\alpha \text{ với } \alpha < 1.$$

Nhận xét :

1) Từ việc giải được một bài toán, bạn Toàn đã đào sâu suy nghĩ, bằng tổng quát hóa, đặc biệt hóa và tương tự, bạn đề xuất được những bài toán mới. Bạn Toàn đã tự đề xuất các bài toán (A) (B) và bạn cũng đã tự giải quyết được với lời giải đúng, gọn. Kết quả các bài toán (A), (B) cũng được phát huy để giải một loại các bài toán (1), (2), (3)...

Qua đây chúng ta thấy học tập được ý thức chủ động đề xuất vấn đề mới cần giải quyết sau khi suy nghĩ giải quyết được một vấn đề nào đó.

2) Tuy nhiên cũng cần chú ý rằng : khi tổng quát hóa bài toán hóa (B) có bài toán (C) bạn Toàn đã phạm một sai lầm : (C) không đúng với mọi α thực. Ví dụ :

Ta có : $\left(\frac{6}{5}\right)^{-1} = 2^{-1} + 3^{-1}$ là đúng, nhưng $\left(\frac{6}{5}\right)^{2} > 2^2 + 3^2$ là sai.

Ta hãy xem việc chứng minh bài (C) sai ở đâu ? Sai ở chỗ từ $r > 1$ suy ra $\alpha_r > \alpha$ với α, r thực. Đúng ra thì : từ $r > 1$ suy ra $\alpha_r > \alpha$ với $\alpha > 0$. Xin chữa lại bài toán (C) như sau :

Nếu $x^\alpha = x_1^\alpha + x_2^\alpha + ... + x_n^\alpha$; $x_i > 0, n \geq 2$ Thì : Nếu $\alpha > 0$ $\begin{cases} x^k > x_1^k + x_2^k + ... + x_n^k \text{ với } k > \alpha \\ x^k < x_1^k + x_2^k + ... + x_n^k \text{ với } k < \alpha \end{cases}$ Nếu $\alpha < 0$ $\begin{cases} x^k > x_1^k + x_2^k + ... + x_n^k \text{ với } k < \alpha \\ x^k < x_1^k + x_2^k + ... + x_n^k \text{ với } k > \alpha \end{cases}$

Chứng minh : Đặt $x^\alpha = X, x_i^\alpha = X_i$, ta có

$X = X_1 + X_2 + ... + X_n \qquad X_i > 0 \; n \geq 2$

theo (B) ta có $\begin{cases} X^r > X_1^r + X_2^r + ... + X_n^r \text{ với } r > 1 \\ X^r < X_1^r + X_2^r + ... + X_n^r \text{ với } r < 1 \end{cases}$

Hay là

$$\begin{cases} x^{\alpha r} > x_1^{\alpha r} + x_2^{\alpha r} + ... + x_n^{\alpha r} \text{ với } r > 1 \\ x^{\alpha r} < x_1^{\alpha r} + x_2^{\alpha r} + ... + x_n^{\alpha r} \text{ với } r < 1 \end{cases}$$

Giả sử $\alpha > 0$.

Nếu đặt $\alpha' = k$, ta có : khi $r > 1$ thì $k > \alpha$; khi $r < 1$ thì $k < \alpha$. Do đó ta có :

$$\begin{cases} x^k > x_1^k + x_2^k + ... + x_n^k \text{ với } k > \alpha \\ x^k < x_1^k + x_2^k + ... + x_n^k \text{ với } k < \alpha \text{ (đpcm)} \end{cases}$$

Trường hợp $\alpha < 0$, thì : khi $r > 1$ thì $k < \alpha$; khi $r < 1$ thì $k > \alpha$. Do đó, ta có :

$$\begin{cases} x^k > x_1^k + x_2^k + x_n^k \text{ với } k < \alpha \\ x^k < x_1^k + x_2^k + x_n^k \text{ với } k > \alpha \text{ (đ.p.c.m).} \end{cases}$$

TÔI ĐÃ GIẢI MỘT BÀI TOÁN NHƯ THẾ NÀO ?

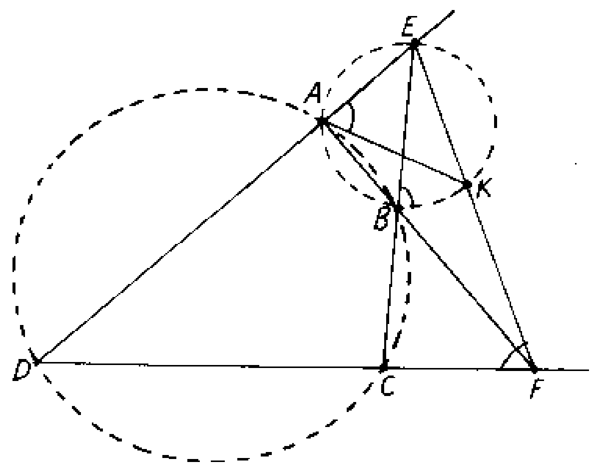
CAO LONG VÂN
(Lớp 10, ĐHSP Hà Nội 2)

Vừa qua, tôi được thầy giáo cho bài toán sau : "*Phần kéo dài các cạnh đối diện AB và CD, AD, và CB của tứ giác ABCD lần lượt cắt nhau ở E và E. Chứng minh rằng nếu : $\overline{EA}.\overline{ED} + \overline{FA}.\overline{FB} = EF^2$ thì tứ giác ABCD nội tiếp được trong một vòng tròn*".

Tôi đã giải bài toán này bằng nhiều cách rồi từ đấy đề xuất thêm một số bài toán khác. Sau đây xin trình bày vắn tắt những suy nghĩ của tôi.

Cách giải thứ nhất :

Dựng một vòng tròn qua A, B, E cắt EF ở K.



Hình 1

Ta có : $\overline{FA}\,.\,\overline{FB} = \overline{FK}\,.\,\overline{FE}$ (1)

theo giả thiết : $\overline{FA}\,.\,\overline{FB} = \overline{EA}\,.\,\overline{ED} = EF^2$ (2)

từ (1) và (2) ta có :

$$\overline{EA}\,.\,\overline{ED} = EF^2 - \overline{FK}\,.\,\overline{FE} =$$
$$= \overline{EF}(\overline{EF} + \overline{FK}) = \overline{EF}\,.\,\overline{EK} \qquad (3)$$

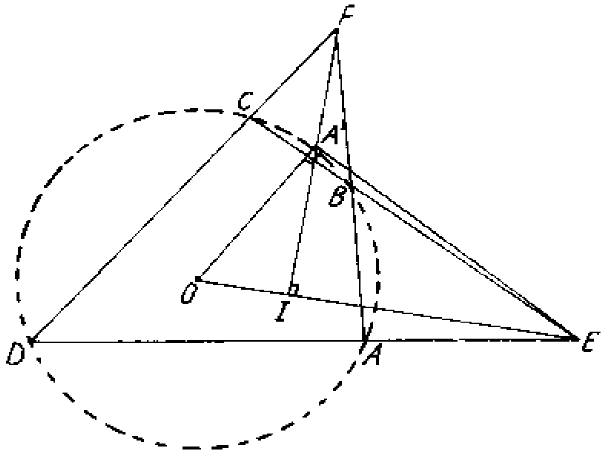
Do đó tứ giác $AKFD$ nội tiếp được $\widehat{EAK} = \widehat{DFK} \Rightarrow \widehat{EBK} = \widehat{DFK}$

$\Delta EBK \backsim \Delta EFC \Rightarrow \overline{EK}\,.\,\overline{EF} = \overline{EB}\,.\,\overline{EC}$ kết hợp với (3) có $\overline{EB}\,.\,\overline{EC} = \overline{EA}\,.\,\overline{ED}$ (4)

(4) chứng tỏ điều kiện để tứ giác $ABCD$ nội tiếp được một vòng tròn là :

$\overline{EA}\,.\,\overline{ED} + \overline{FA}\,.\,\overline{FB} = \overline{EF}^2$ (đpcm).

Cách giải thức hai :



Hình 2

Trong quá trình làm toán, một điều tôi thường nghĩ là điều ngược lại có đúng không ? Tôi đã chứng minh được đối với bài toán đã cho, điều ngược lại cũng đúng (hình 2).

Trước tiên ta thấy F luôn ở ngoài vòng tròn (O) (do tứ giác $ABCD$ lồi), mặt khác ta có E, F là hai điểm liên hợp với nhau đối với vòng tròn (O) nên : $\overline{FI} \times (O) \equiv A'$ thì EA' là tiếp tuyến của vòng tròn (O)

$FE^2 = EI^2 + IF^2 = EA'^2 - A'I^2 +$

$+ FO^2 - OI^2 = EA'^2 + FO^2 - R^2 =$

$\mathcal{P}E/(O) + \mathcal{P}F/(O) = \overline{EA}\,.\,\overline{ED} + \overline{FA}\,.\,\overline{FB}$ (đpcm)

Dựa vào đây ta có thể chứng minh bài toán bằng phản chứng.

Cách thứ 3 : Ta chứng minh dễ dàng bổ đề : Điều kiện cần và đủ để hai điểm E và F là liên hợp với nhau đối với (O) là $\overrightarrow{OE}\,.\,\overrightarrow{OF} = R^2$ [R bán kính vòng tròn (O)]. Áp dụng điều này. Dựng vòng tròn (O) qua A, B, D (hình 3), ta có :

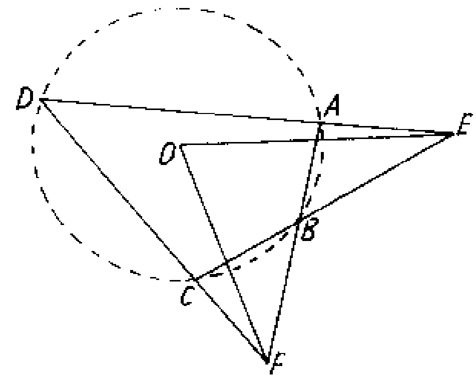
$$\overline{EA}\,.\,\overline{ED} = OE^2 - R^2 \,;$$
$$\overline{FA}\,.\,\overline{FB} = OF^2 - R^2$$

Như vậy theo giả thiết :

$$OE^2 + OF^2 - 2R^2 = (\overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OF})^2$$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OE}\,.\,\overrightarrow{OF} = R^2$

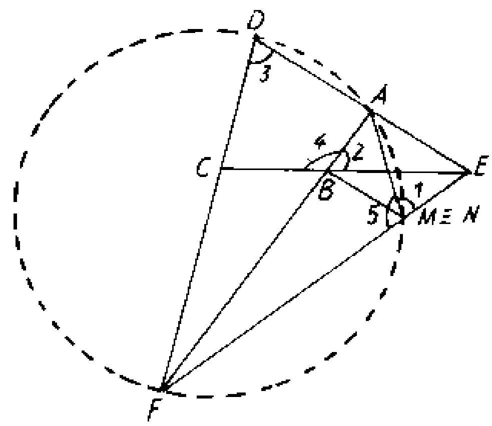
$\Leftrightarrow E$ và F là hai điểm liên hợp đối vớ vòng tròn (O) bằng phản chứng để dàn chứng minh tứ giác $ABCD$ nội tiếp (hình 3)



Hình 3

Cách thứ 4 : Dựng hai vòng tròn $(ABE$ và (DAF), giả sử chúng lần lượt cắt EF ở điểm M, N. Như vậy ta có :

$$\overline{EA}\,.\,\overline{ED} + \overline{FA}\,.\,\overline{FB} = \overline{EN}\,.\,\overline{EF} + \overline{EF}\,.\,\overline{MF}$$
$$= \overline{EF}(\overline{EN} + \overline{MF}).$$



Hình 4

Mặt khác theo giả thiết ta có :

$\overline{EA}\,.\,\overline{ED} + \overline{FA}\,.\,\overline{FB} = \overline{EF}^2 = \overline{EF}(\overline{EN} + \overline{N}$

vậy : $\overline{EF}(\overline{EN} + \overline{MF}) = \overline{EF}(\overline{EN} + \overline{NF})$

$\Leftrightarrow \overline{MF} = \overline{NF} \Leftrightarrow M \equiv N.$

Từ đây $\hat{1} = \hat{2} \rightarrow \hat{5} = \hat{4}$

mặt khác $\hat{3} + \hat{5} = 2V$ nên : $\hat{3} + \hat{4} = 2V$ (đpc (hình 4)

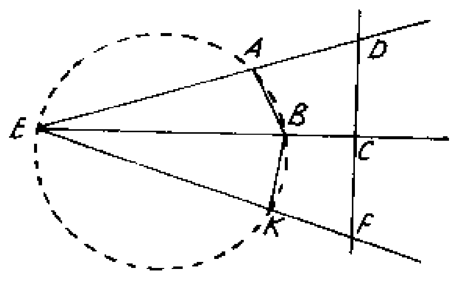
Ở đây tôi không muốn chỉ nêu lên vi giải một bài toán bằng nhiều cách mà mu từ các cách giải một bài toán đề xuất và gi những bài toán khác.

a) Từ cách 1 và 2 : Cách 2 cho thấy điều kiện đầu bài đã cho còn là điều kiện cần. Liên hệ các đẳng thức (3) và (4) với nhận xét D, C, F thẳng hàng ta có :

Bài toán 1 : Cho tứ giác $EABK$, trên EA, EB, EK lần lượt lấy D, C, F sao cho :

$$\overline{EA}\,.\,\overline{ED} = \overline{EB}\,.\,\overline{EC} = \overline{EK}\,.\,\overline{EF}$$

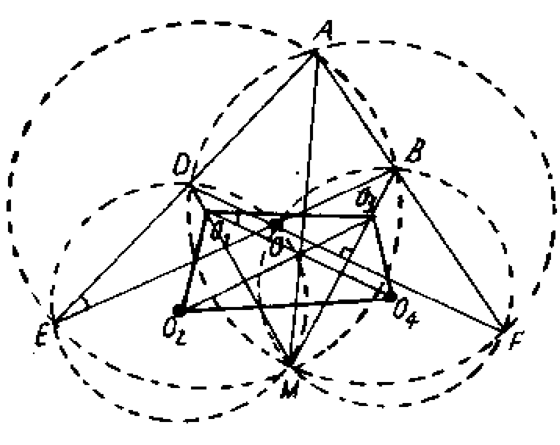
Chứng minh rằng điều kiện át có và đủ để tứ giác $ABKE$ nội tiếp trong vòng tròn là D, C, F thẳng hàng (hình 5).



Hình 5

b) Từ cách 4 : ta thấy $M \equiv N$, gợi ý : $\widehat{MBE} = \widehat{MAE} = \widehat{MFD}$ tứ giác $FCBM$ nội tiếp hay vòng tròn ngoại tiếp tam giác FCB qua M. Tương tự có vòng tròn ngoại tiếp ΔDFA cũng qua M. Từ đây ta có :

Bài toán 2 : Chứng minh rằng trong một tứ giác toàn phần các vòng tròn ngoại tiếp 4 tam giác đồng quy ở một điểm. Các bạn thử chứng minh điều này (coi M là giao điểm hai vòng trong BCE và CDF rồi xét các tứ giác nội tiếp (hình 6).



Hình 6

Đặt các tâm vòng tròn O_1, O_2, O_3, O_4. Ta thấy cứ nối đỉnh bất kì của tứ giác toàn phần với M thì sẽ có 1 đường O_iO_j ($i \neq j$; $i, j = 1,..., 4$) vuông góc với đường nối đó. Cho nên ta thử áp dụng góc có cạnh tương ứng vuông góc để tìm thêm các tính chất xem sao.

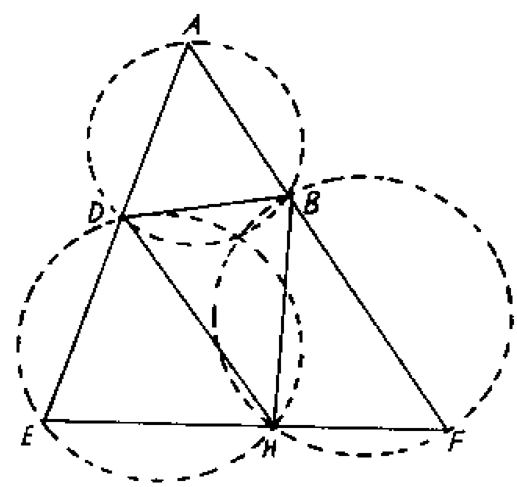
Ta có :

$O_1O_3 \perp AM$, $O_1O_4 \perp MB \Rightarrow \widehat{O_3O_1O_4} = \widehat{AMB}$

mà $\widehat{AMB} = \widehat{AEB} \Rightarrow \widehat{O_3O_1O_4} = \widehat{AEB}$, tương tự $\widehat{O_3O_2O_4} = \widehat{AEB}$. Từ đây tứ giác $O_1O_2O_3O_4$ có thể nội tiếp được. Vậy có :

Bài toán 3 : Chứng minh rằng trong 1 tứ giác toàn phần tâm 4 đường tròn ngoại tiếp 4 tam giác nằm trên một đường tròn (hình 6).

c) Ta nhìn vào hình 1 dưới một khía cạnh khác. Ta có các vòng ngoại tiếp các tam giác DEM, BFM, ADB cùng qua C. Trên cơ sở này ta có thể đề ra bài toán : (hình 7).



Hình 7

Bài toán 4 : Cho một tam giác AEF. Trên AE, EF, FA lấy lần lượt các điểm D, M, B. Chứng minh rằng các vòng tròn ngoại tiếp các tam giác DEM, BFM, ADB đồng quy ở một điểm.

Nói chung các bài toán trên không có gì mới nhưng đã làm cho tôi rất thú vị và chắc các bạn hiểu được rằng tại sao tôi rất yêu thích toán.

MỞ RỘNG MỘT BÀI TOÁN

PHAN ĐĂNG CẦU
(Thanh Hóa)

Trong hình học phẳng, ta có định lí :

Cho hai điểm A, B. Quỹ tích những điểm M sao cho

$$\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 = k^2$$

là vòng tròn tâm O, điểm giữa của AB, và bán kính là $OM = \frac{1}{2}\sqrt{2k^2 - a^2}$.

Xem O là trọng tâm của hai điểm A, B, tôi đã chứng minh quỹ tích này bằng cách khác và nhờ đó đã đi đến bài toán tổng quát :

1. Cho n điểm $A_1, A_2, ..., A_n$ (cùng một mặt phẳng) và n số thực bất kì $a_1, a_2, ..., a_n$. Tìm quỹ tích những điểm M sao cho

$$\sum_{i=1}^{n} a_i MA_i^2 = k$$

(k là số thực bất kì $\sum_{i=1}^{n} a_i \neq 0$).

Học về khái niệm trục đẳng phương của hai vòng tròn, tôi cũng mở rộng ra và giải được bài toán tổng quát :

2. Cho n vòng tròn $C_1, C_2, ..., C_n$ (thuộc một mặt phẳng) và n số thực bất kì $a_1, a_2, ..., a_n$. Tìm quỹ tích những điểm M sao cho

$$\sum_{i=1}^{n} a_i P(M, C_i) = k$$

trong đó $P(M, C_i)$ là phương tích của M đối với vòng tròn C_i, k là số bất kì cho trước, $\sum_{i=1}^{n} a_i \neq 0$.

Để giải hai bài toán trên, tôi dùng đến hai bổ đề :

Bổ đề 1. Cho n điểm $A_1, A_2, ..., A_n$ và n số thực $a_1, a_2, ..., a_n$ với $\sum_{i=1}^{n} a_i \neq 0$; dựng được duy nhất một điểm O sao cho

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{OA_i} = 0 \qquad (1)$$

Bổ đề 2. Nếu có O xác định bằng (1) thì với mọi điểm M, ta đều có

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{MA_i} = \sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{MO} \qquad (2)$$

và ngược lại, nếu có (2) thì cũng có (1), nghĩa là (1) và (2) tương đương với nhau.

Chứng minh bổ đề 2. Với mọi điểm M và O bất kì, ta đều có

$$a_i\overrightarrow{MA_i} = a_i\overrightarrow{MO} + a_i\overrightarrow{OA_i} \ (i = 1, 2, ..., n)$$

do đó ta có

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{MA_i} = \sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{MO} + \sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{OA_i}$$

Từ đây, ta thấy ngay rằng nếu (1) đúng thì (2) cũng đúng và ngược lại (đpcm).

Chứng minh bổ đề 1, bằng quy nạp :

1) Với $n = 1$ (có a_1 và A_1). Lấy $O \equiv A_1$.

2) Giả sử dựng được O cho hệ $n - 1$ điểm, tức là có O mà $\sum_{i=1}^{n-1} a_i\overrightarrow{OA_i} = 0$ (3). Do bổ đề 2, cần và đủ để có O' cho hệ n điểm là

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{OA_i} = \sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{OO'} \qquad (4)$$

Thay (3) vào (4), có

$$a_n . \overrightarrow{OA_n} = \sum_{i=1}^{n} a_i . \overrightarrow{OO'}$$

hay $$\overrightarrow{OO'} = \frac{a_n}{\sum_{i=1}^{n} a_i} . \overrightarrow{OA_n} \ (\text{vì } \textstyle\sum a_i \neq 0)$$

do đó $\overrightarrow{OO'}$ hoàn toàn xác định và duy nhất. Ta dựng được duy nhất điểm O' thỏa mãn (4), tức là có

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{O'A_i} = 0 \ (\text{đpcm})$$

Bây giờ ta đi vào giải hai bài toán tổng quát.

1. Gọi O là điểm có tính chất $\sum a_i OA_i = O$(*). Giả sử đã có điểm M mà

$$\sum a_i\overline{MA_i^2} = k. \quad (5)$$

Nối MO. Từ A_i, hạ $A_iH_i \perp MO$ $(i = 1, 2,..., n)$. Theo định lí về bình phương một cạnh trong tam giác, ta có

$$a_i\overline{MA_i^2} = a_i\overline{MO^2} + a_i\overline{OA_i^2} - 2\overline{OM}\,.\,a_i\overline{OH_i}$$

$(i = 1, 2,..., n)$

do đó

$$\sum a_i\overline{MA_i^2}=(\sum a_i)\overline{MO^2}+\sum a_i\overline{OA_i^2}-2\overline{OM}(\sum a_i\overline{OH_i}) \quad (6)$$

Ta nhận xét rằng : OH_i là hình chiếu của OA_i, nên

$$\sum a_i\overrightarrow{OA_i} = 0 \Rightarrow \sum a_i\overline{OH_i} = 0$$

(vì mọi đẳng thức véctơ đều chiếu được).

Thay $\sum a_i\overline{OH_i}= 0$, $\sum a_i\overline{MA_i^2}= k$ vào (6) ta có

$$\overline{MO^2} = \frac{k - \sum a_i\overline{OA_i^2}}{a_1 + a_2 + ... + a_n}$$

với $\quad (k - \sum a_i\overline{OA_i^2})\sum a \geqslant 0.$

Ta có $\overline{MO}=\sqrt{\dfrac{k-\sum a_i\overline{OA_i^2}}{\sum a_i}}$ = không đổi (6')

Ta dễ thấy rằng các phép biến đổi trên đây đều tương đương, vì vậy ta không cần xét phần đảo nữa.

Kết luận : Quỹ tích những điểm M sao cho $\sum a_i\overline{MA_i^2} = k$ với $(k - \sum a_i\overline{OA_i^2})\sum a_i \geqslant 0$ (O là điểm có tính chất $\sum a_i\overrightarrow{OA_i} = 0$) là một vòng tròn tâm O, bán kính

$$OM = \sqrt{\frac{k - \sum a_i\overline{OA_i^2}}{\sum a_i}}$$

2. Ta gọi tâm các vòng trong $C_1, C_2,..., C_n$ là $A_1, A_2,... A_n$ và O là điểm có tính chất $\sum a_i\overrightarrow{OA_i} = 0$. Giả sử đã có điểm M.

$\sum a_i P(M , C_i) = k$ (1). Theo công thức tính phương tích ta có : $\sum a_i P(M , C_i) =$
$= a_1(\overline{MA_1^2}-r_1^2)+a_2(\overline{MA_2^2}-r_2^2)+...+a_n(\overline{MA_n^2}-r_n^2)$

Thay $\sum a_i P(M, C_i)=k \Rightarrow \sum a_i\overline{MA_i^2}=\underbrace{k+ \sum a_i r_i}_{K}$ (2)

Ta chú ý rằng phép biến đổi trên là tương đương ((1) ∽ (2)). Áp dụng kết quả bài toán 1, ta đi đến kết luận :

Quỹ tích những điểm M sao cho $\sum a_i P(M, C_i)= k$ với $(k+\sum a_i r_i^2- \sum a_i\overline{OA_i^2})\sum a_i \geqslant 0$ (O là điểm có tính chất $\sum a_i\overrightarrow{OA_i}= 0$) là một vòng tròn tâm O, bán kính

$$OM = \sqrt{\frac{k + \sum a_i r^2 - \sum a_i\overline{OA_i^2}}{\sum a_i}}.$$

Chú ý : Các bài toán : Tìm quỹ tích những điểm M sao cho hiệu các bình phương tới hai điểm A, B, cho trước bằng k không đổi hoặc khái niệm trục đẳng phương có thể xem là trường hợp đặc biệt của hai quỹ tích trên đây khi tâm vòng tròn xa vô tận, song lí luận chứng minh có khác trước.

Mở rộng bổ đề 1 và 2 : Lí luận tương tự trong hình học phẳng ta cũng đi đến kết luận :

Cho n điểm $A_1, A_2, ..., A_n$ trong không gian và n số thực $a_1, a_2,..., a_n$ sao cho $\sum a_i \neq 0$ ta luôn luôn dựng được duy nhất một điểm O sao cho $\sum a_i\overrightarrow{OA_i} = 0$.

Mở rộng bài toán 1. Ta giữ nguyên bài toán mà chỉ thay n điểm trong mặt phẳng, bằng n điểm trong không gian.

Ta sẽ thấy rằng lí luận từ phẳng sang không gian vẫn không có gì thay đổi. Đi đến kết luận :

Quỹ tích là một mặt cầu tâm O, bán kính

$$OM = \sqrt{\frac{k - \sum a_i\overline{OA_i^2}}{\sum a_i}}$$

(tất nhiên O vẫn đóng vai trò $\sum a_i\overrightarrow{OA_i} = 0$) với $(k - \sum a_i\overline{OA_i^2})\sum a_i \geqslant 0$.

Mở rộng bài toán 2 : Tương tự bài toán 1, khi mở rộng sang không gian, thay n vòng tròn bằng n mặt cầu bất kì thì lí luận chứng minh không thay đổi, ta cũng đi đến kết luận : Quỹ tích là một mặt cầu tâm O bán kính

$$OM = \sqrt{\frac{k - \sum a_i r_i^2 - \sum a_i\overline{OA_i^2}}{\sum a_i}}$$

O đóng vai trò $\sum a_i\overrightarrow{OA_i} = 0$

với $\quad (k + \sum a_i r_i^2 - \sum a_i\overline{OA_i^2})\sum a_i \geqslant 0.$

(*) Để tiện cho ấn loát, chúng tôi viết Σ thay cho $\sum\limits_{i=1}^{n}$

VÀI KINH NGHIỆM GIẢI TOÁN

PHAN ĐỨC CHÍNH

Một điều đáng tiếc cho nhiều bạn học toán là các bạn rất vất vả trong việc giải toán. Có bạn đã khổ tâm nhiều khi không làm được những bài toán thầy cho về nhà, nhất là các bài toán ra trong lần thi hoặc kiểm tra, trong điều kiện thời gian hạn chế. Tự kiểm điểm bạn ấy thấy rằng đã hết sức cố gắng học toán, tin tưởng là mình đã nắm vững các kiến thức cơ bản, đã hiểu các bài học đã xoay bài toán đủ mọi cách nhưng cuối cùng vẫn bế tắc không tìm ra lời giải. Về sau xem lời giải những bài toán bế tắc ấy, thì thấy rằng ở đây không có gì khó khăn lắm về mặt nguyên tắc vì sử dụng toàn những kiến thức cơ bản mà mình đã biết, bài giải nhiều khi rất đơn sơ, nhưng chỉ tại mình hoặc thiếu sót chút ít, hoặc không nghĩ đến cách giải ấy.

Các bạn học sinh, các bạn đã suy nghĩ thật chín chắn chưa, rằng vì sao lại xảy ra những hoàn cảnh "éo le" như vậy ?

Ai cũng thấy rằng : học thuộc bài học hoàn toàn không đủ, mà phải biết vận dụng những kiến thức ấy và rèn luyện kĩ năng trong việc giải toàn, chuẩn bị cho việc áp dụng các kiến thức toán vào thực tiễn công tác sau này. Số các bài toán nhiều không kể xiết, mỗi bài mỗi vẻ, thời gian học tập lại hạn chế, do đó cần biết rèn luyện phương pháp suy nghĩ đúng đắn và biết đúc rút kinh nghiệm : chúng tôi muốn trao đổi với các bạn vài kinh nghiệm như vậy.

Thật ra những kinh nghiệm ấy vô cùng phong phú, nhiều không kể xiết cũng như số các bài toán. Cách đây mấy năm, Nhà xuất bản Giáo dục có dịch cuốn "Giải một bài toán như thế nào" của nhà toán học và sư phạm Polya. Trong cuốn sách đó tác giả đã tổng kết nhiều ý kiến, nhiều kinh nghiệm và nêu lên nhiều suy nghĩ riêng, với mục đích gợi ý các bạn học sinh – cùng tất cả những người khác, làm thế nào phát huy óc toán học, phát huy khả năng nghiên cứu toán và sáng tạo toán.

Trong khuôn khổ bài báo này chúng tôi chỉ đề cập hai vấn đề sau đây, liên quan đến việc giải toán :

1) Rèn luyện óc phân tích một bài toán.

2) Biết nắm vững tính đặc thù của bài toán.

Các vấn đề ấy khá hiển nhiên và chắc chắn được mọi người thừa nhận. Nhưng vận dụng được vào từng hoàn cảnh cụ thể, từng bài toán, lại là một việc hết sức khó. Vì vậy chúng tôi nghĩ rằng tốt nhất là nêu lên một số ví dụ minh họa. Cần nói rằng do chuyên môn của chúng tôi, những ví dụ đưa ra ở đây chủ yếu lấy trong đại số và lượng giác. Trong hình học và số học những ví dụ ấy chắc càng phong phú hơn nữa, rất mong được bạn đọc trao đổi thêm.

I – RÈN LUYỆN ÓC PHÂN TÍCH MỘT BÀI TOÁN

Nhìn vào một bài toán, điều trước tiên đặt ra là : nên dùng những phương pháp nào để thử giải bài ấy ? muốn vậy, phải biết phân tích bài toán, xác định bài toán ấy có thể thuộc loại nào, có liên quan gì đến những bài toán đã biết, từ đó mới quyết đoán được rằng có thể sử dụng được những kiến thức nào để mò mẫm cách giải. Nhất là đối với các bài toán thực tế : ở đây người ta mô tả một số hiện tượng, nêu lên những số liệu cần thiết và yêu cầu chúng ta tìm lời giải. Khi đó ta phải biết phân tích đúng đắn và chính xác bài toán để đặt được bài toán thực tế dưới dạng toán học, sau đó mới có cơ sở để đi tìm lời giải.

Hãy nêu một ví dụ, dựa theo một bài toán ra trong một kì thi ở Liên–xô.

Ví dụ 1 : Tôi có một tờ giấy to và xé nó ra làm 9 mảnh. Sau đó lấy một số mảnh, xé mỗi mảnh làm 9 mảnh nhỏ, rồi trộn vào với các mảnh cũ. Tôi lại lấy một số mảnh trong đống ấy xé mỗi mảnh làm 9 mảnh rồi lại trộn vào với các mảnh cũ và cứ thế tiếp tục. Lúc sau tôi dừng lại và nhờ bạn tôi đếm số mảnh giấy đã được, anh nói : 1968. Hãy chứng minh rằng anh ấy đếm... sai !.

Thoạt nhìn bài toán này, chắc các bạn cảm thấy vấn đề ở đây quá rắc rối, vì người ta không cho biết mỗi lần xé thì lấy bao nhiêu mảnh giấy xé và cũng không cho biết bao nhiều lần xé như vậy. Thành thử chắc chắn rằng không thể biết cuối cùng tổng cộng có bao nhiêu mảnh giấy mà lại phải chứng minh rằng đếm sai.

Nhưng chúng ta hãy bình tĩnh để hình dung và phân tích kĩ quá trình "xé giấy" trong bài toán : mỗi lần từ đống giấy lấy lên một mảnh, xé nó làm 9, rồi lại bỏ vào đống giấy thì rõ ràng số mảnh giấy tăng lên 8. Bắt đầu có một mảnh giấy, như vậy cuối cùng số mảnh giấy xé được sẽ là $1 + 8k$, với k nguyên dương. Vì số 1968 không có dạng $1 + 8k$, nên anh bạn trên đếm sai !

Có thể kể ra nhiều ví dụ khác để minh họa phần này, nhưng để bài báo khỏi quá dài, ta dừng lại ở đây. Vả lại như đã nói, vấn đề này liên quan chặt chẽ đến các vấn đề sau, nên trong các ví dụ sau, chúng ta còn có dịp đề cập tới. Trước khi chuyển sang vấn đề thứ hai, chúng tôi đề nghị các bạn hãy thử suy nghĩ cách giải bài toán sau :

Bài toán 1. **Cho một trăm số nguyên dương a_i thỏa mãn điều kiện :**

$$1 \leq a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_{100} \leq 1000$$

Chứng minh rằng trong tất cả các hiệu số $a_i - a_j$ $(i > j)$ phải có một số gặp ít nhất sáu lần.

2 - BIẾT NẮM VỮNG TÍNH ĐẶC THÙ CỦA BÀI TOÁN

Tuy rằng chúng ta có thể xếp các bài toán ra từng loại một, ứng với từng loại có một số phương pháp điển hình để giải, nhưng nếu cứ máy móc đánh đồng loạt như vậy, nhiều khi cách giải luộm thuộm, thậm chí có thể vì quá phức tạp, nên không đi đến kết quả cuối cùng. Hãy nêu ở đây hai ví dụ :

Ví dụ 2. **Giải phương trình**

$$\sin x(1 - \cos^4 x) = 1 \qquad (1)$$

Chúng tôi đã gặp một bạn làm như sau :

$1 = \sin x(1 - \cos^2 x)(1 + \cos^2 x) = \sin^3 x(2 - \sin^2 x) = 2\sin^3 x - \sin^5 x$. Vậy để giải phương trình (1) ta phải giải phương trình đại số

$$X^5 + 2X^3 + 1 = 0 \qquad (2)$$

Vì không có công thức giải phương trình bậc 5 nên bạn này chỉ có thể khẳng định rằng phương trình (2) có một nghiệm $X = 1$, ngoài ra không dám quyết đoán rằng phương trình (2) còn có nghiệm nào khác nữa không, do đó không làm được trọn vẹn bài toán.

Rõ ràng ở đây bạn đó chưa nhìn kĩ bài toán vì :

$$|\sin x| \leq 1 \text{ và } 0 \leq 1 - \cos^4 x \leq 1$$

nên phương trình (1) chỉ có một nghiệm

$$\sin x = 1 \text{ tức là } x = \pi/2 + 2k\pi \ (k \text{ nguyên})$$

Ví dụ 3. **Giả thử $a < b < c < d$. Chứng minh rằng với mọi giá trị của m $(m \neq -1)$ đa thức bậc hai.**

$$f(x) = (x - a)(x - c) + m(x - b)(x - d)$$

có hai nghiệm phân biệt.

Theo cách suy nghĩ thông thường của các bạn lớp 8 và lớp 9 thì phải chứng minh rằng đa thức $f(x)$ có biệt số $\Delta > 0$ nhưng tính ra :

$$\Delta = [(a + c) + m(b + d)]^2 + 4(1 + m)(ac + mbd)$$

thì nhiều bạn không biết làm thế nào để chứng minh nổi $\Delta > 0$!

Tuy rằng chịu khó biến đổi thì đi đến

$$\Delta = \left\{ (d - b)m + [(a + c)(b + d) - 2(bd + ac)]/(d - b)\right\}^2 + (b - a)(c - b)(d - a)(d - c)/(d - b)^2$$

nhưng phải tính toán khá phức tạp dễ nhầm lẫn.

Ở trình độ lớp 8 có thể giải quyết bài này một cách nhẹ nhàng hơn, bằng cách để ý rằng :

$$f(b) = (b - a)(b - c) < 0 ;$$

$$f(d) = (d - a)(d - c) > 0$$

như vậy hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là một đường parabôn vừa nằm ở nửa mặt phẳng trên vừa nằm ở nửa mặt phẳng dưới như các bạn đã học trường hợp này chỉ xảy ra khi $f(x)$ có hai nghiệm phân biệt.

Có những bài toán lạ, khó mà xếp vào loại cụ thể nào, do đó trong trường hợp này lại càng cần phải lưu ý đến tính đặc thù của bài toán để tìm ra cách giải.

Ví dụ 4. **Hãy tìm tất cả các nghiệm nguyên x, y của phương trình :**

$$\sqrt{25x + \sqrt{16x + \sqrt{9x + \sqrt{4x + \sqrt{x}}}}} = y \qquad (3)$$

Nếu ở đây ta cho rằng có thể gắng sức lũy thừa bậc hai 5 lần để khử căn, sau đó bấu víu lấy phương trình tìm được mà nghĩ cách giải, thì chắc chắn việc thực hiện chương trình ấy sẽ thất bại, vì khi đó trước hết ta sẽ đi đến :

$$x = (\{[(y^2 - 25x)^2 - 16x]^2 - 9x\}^2 - 4x)^2$$

và các bạn cũng như tôi, ít ai thích tính cụ thể vế phải viết trên.

Có thể giải gọn gàng phương trình (3) như sau : Trước hết để ý rằng $x = y = 0$ là một nghiệm. Ta hãy giả thử $x > 0$ (nhớ rằng x và y nguyên). Bình phương hai vế của phương trình (3) ta thấy rằng :

$$\sqrt{16x + \ldots} = y^2 - 25x \qquad (4)$$

Vậy vế phải là một số nguyên dương. Gọi u là số ấy, và bình phương hai vế của phương trình (4) ta lại có :

$$\sqrt{9x + \ldots} = u^2 - 16x$$

và cứ tiếp tục thế, ta thấy rằng

$\sqrt{4x + \sqrt{x}} = p$ với p nguyên, (dương),

do đó $\sqrt{x} = p^2 - 4x = q$ với q nguyên (dương) tức là ta đi đến đẳng thức

$$p^2 + 4q^2 + q \qquad (5)$$

Vì $(2q)^2 = 4q^2 < 4q^2 + q < 4q^2 + 4q + 1 = (2q + 1)^2$ nên đẳng thức (5) không thể xảy ra với các số nguyên dương p, q.

Thành thử phương trình đã cho chỉ có một nghiệm nguyên $x = y = 0$.

Tóm lại đối với các bài toán "*không tầm thường*" cần hết sức chú trọng đến tính đặc thù của bài toán ấy, vấn đề này yêu cầu một sự suy nghĩ linh hoạt, và sáng tạo mà ta sẽ đề cập tới trong một dịp khác.

Để kết thúc, chúng tôi đề nghị các bạn thử giải bài toán sau đây.

Bài toán 2. **Với những giá trị nào của m thì phương trình**

$$\sqrt{x^2 + m} + 2\sqrt{x^2 - m} = x$$

có nghiệm. Hãy xác định nghiệm ấy.

MỘT KINH NGHIỆM GIẢI BÀI TOÁN HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

ĐÀO THẾ HƯNG

Có lẽ phần lớn học sinh chúng ta đều cho rằng giải toán hình học không gian khó hơn nhiều so với giải toán hình học phẳng ; nó khó ngay từ khâu nhận thức đề bài, vẽ hình, hình dung được vấn đề. Một điều dễ thừa nhận là hình học không gian liên quan chặt chẽ với hình học phẳng và nếu đã có kiến thức vững vàng, có óc suy luận tốt đối với các bài toán phẳng thì cũng sẽ dễ dàng làm quen và chóng tiến bộ trong việc giải toán không gian. Trong bài này xin đề cập tới một khía cạnh : để giải toán không gian, ta tìm cách giải quyết bài toán phẳng tương ứng rồi từ đó vận dụng kết quả và có khi cả phương pháp giải bài toán phẳng để giải quyết bài toán không gian đó.

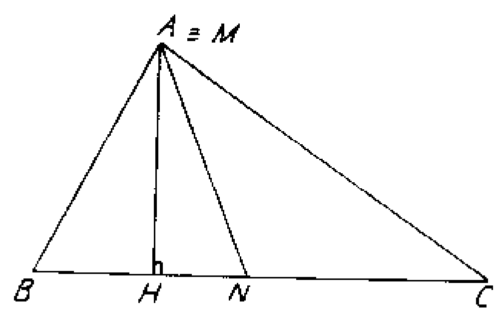
Chúng ta cùng nhau xét mấy bài toán sau :

I. BÀI TOÁN 1

Chứng minh rằng cạnh dài nhất của một hình tứ diện là khoảng cách lớn nhất giữa 2 điểm thuộc tứ diện.

Trước tiên ta xét bài toán tương ứng : "Chứng minh rằng trong tam giác, cạnh dài nhất chính là khoảng cách lớn nhất giữa 2 điểm thuộc tam giác".

Cách giải quyết cũng đơn giản, ta dùng phương pháp đặc biệt hóa. Gọi 2 điểm bất kì thuộc tam giác là M, N.



Hình 1

* Nếu M và N trùng với hai đỉnh của tam giác ta có ngay :

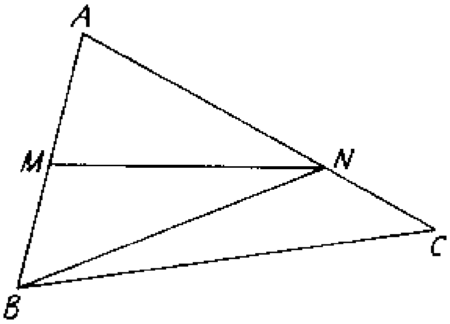
$$MN \leqslant \max\,(AB, BC, CA)$$

* Nếu M hoặc N trùng với 1 đỉnh của tam giác. Giả sử $M \equiv A$ thì :

Nếu $N \in AB$ hoặc $N \in AC$ thì ta có ngay lời giải. Nếu $N \in BC$ thì tùy theo vị trí của N so với chân đường cao H, ta kết luận được $MN < AB$ hoặc $MN < AC$ và do đó $MN <$ max (AB, BC, CA).

* Nếu M và N không trùng với đỉnh nào của tam giác. Ta đưa về trường hợp trên bằng cách nối NB, ta có

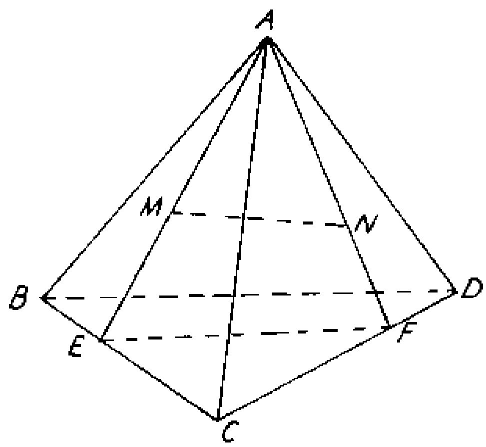
$MN <$ max $(AB, BN, NA) \leq$ max (AB, BC, CA)



Hình 2

Bài toán phẳng được giải quyết, ta sử dụng kết quả để giải bài toán không gian.

Xét khoảng cách giữa M và N là 2 điểm bất kì thuộc tứ diện $ABCD$. Bao giờ cũng dựng được một tam giác có 3 cạnh thuộc các mặt của tứ diện và chứa M, N (chỉ cần dựng 1 mặt phẳng chứa MN và 1 đỉnh của tứ diện) như hình 2. Nối AM và AN cắt BC tại E, cắt CD tại F.



Hình 3

Theo kết quả bài toán phẳng :

$MN \leq$ max (AE, EF, FA)

mà $AE \leq$ max (AB, BC, CA)

$EF \leq$ max (BC, CD, DB)

$AF \leq$ max (AC, CD, DA).

Từ đó suy ra : max $(AE, EF, FA) \leq$ max (AB, AC, AD, BC, CD, DA) tức là MN không lớn hơn cạnh lớn nhất của tứ diện.

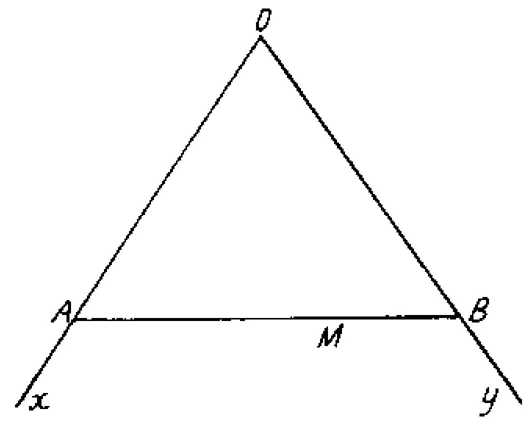
II. BÀI TOÁN II

Cho một góc nhị diện có các mặt là P và Q và 3 điểm A, B, C ở bên trong nhị diện đó. Chứng minh rằng nếu tổng các khoảng cách từ mỗi điểm đó đến 2 mặt P và Q của nhị diện là bằng nhau đối với cả 3 điểm A, B, C thì tổng đó cũng lấy cùng 1 giá trị đối với mọi điểm của mặt phẳng ABC giới hạn ở bên trong nhị diện đã cho.

Dễ dàng thấy rằng lời giải bài toán trên phụ thuộc vào lời giải bài toán sau.

Bài toán 2. Tìm quỹ tích của những điểm M có tổng các khoảng cách đến 2 mặt P và Q của một nhị diện là một số không đổi k. Để giải quyết (2') ta lại xét bài toán phẳng tương ứng. "Tìm quỹ tích của những điểm M có tổng các khoảng cách đến 2 cạnh của góc xoy là một số không đổi k".

(Lưu ý rằng ta chỉ xét bài toán (2') và bài toán phẳng trong trường hợp M nằm bên trong góc nhị diện và góc phẳng).



Hình 4

Lời giải bài toán phẳng là : quỹ tích là cạnh đáy AB của tam giác cân OAB trong đó $A \in Ox$, $B \in Oy$, A cách Oy và B cách Ox đều một khoảng bằng k.

Các bạn có thể tự kiểm tra kết quả này với nhận xét rằng : trong tam giác cân, mọi điểm thuộc đáy đều có tổng khoảng cách đến hai cạnh bên bằng đường cao thuộc cạnh bên.

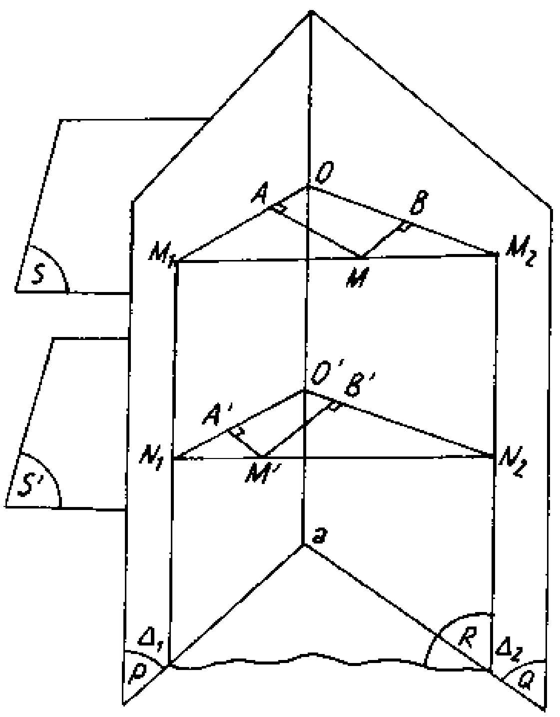
Lấy kết quả này để giải bài toán (2').

Thuận : Giả sử cho M là 1 điểm trong nhị diện PaQ, hạ $MA \perp P$, $MB \perp Q \Rightarrow MA + MB = k$.

Dựng mặt phẳng S chứa M, A, B cắt a tại O. Xét trong S, dựa vào bài toán phẳng, ta có M thuộc cạnh đáy tam giác cân OM_1M_2, trong đó M_1 trên OA, M_2 trên OB và M_1 cách OA bằng k. Từ đó cũng suy ra dễ dàng M_1 cách Q và M_2 cách P đều 1 khoảng bằng k.

Dựng mặt phẳng S chứa M_1M_2 và song song với a, cắt P và Q theo 2 giao tuyến Δ_1 và Δ_2.

Ta có Δ_1 chứa M_1 và $// a$; Δ_2 chứa M_2 và $// a$ đồng thời Δ_1 cách Q và Δ_2 cách P đều khoảng bằng k, do đó Δ_1 và Δ_2 cố định trên P và Q, suy ra M thuộc mặt phẳng R cố định.



Hình 5

Đảo : Lấy điểm M' bất kì thuộc R (phần trong nhị diện). Hạ $M'A' \perp P$, $M'B' \perp Q$. Phải chứng minh $M'A' + M'B' = k$.

Dựng mp $S'(M', A', B')$ cắt a tại O', cắt Δ_1 và Δ_2 tại N_1 và N_2, ta có N_1, M', N_2 thẳng hàng (giao tuyến của S' và R). N_1 và N_2 lại có tính chất như M_1 và M_2 tức là : N_1 cách Q và do đó cũng cách $O'N_2$ một khoảng k ; N_2 cách P và do đó cũng cách $O'N_1$ một khoảng k. Suy ra $\Delta O'N_1N_2$ cân và theo kết quả bài toán phẳng ta có : $M'A' + M'B' = k$.

Như vậy ta được quỹ tích của M là phần mặt phẳng R nằm trong góc nhị diện.

Kết quả này chứa đựng lời giải của bài toán 2 nói trên.

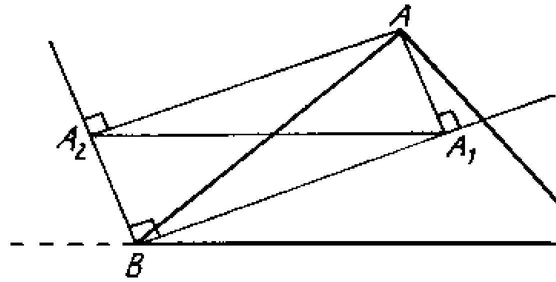
III. BÀI TOÁN 3

Chứng minh rằng các hình chiếu vuông góc của đỉnh A của tứ diện $ABCD$ trên các mặt phẳng phân giác trong và ngoài của các nhị diện cạnh BC, CD, DB là 6 điểm đồng phẳng.

Bài toán này quả là khó nếu ta giải trực tiếp. Song nếu ta theo hướng giải quyết đề ra trong bài này thì có thể "gỡ mối" được.

Bài toán phẳng tương ứng là : "chứng minh rằng các hình chiếu vuông góc của đỉnh A của tam giác ABC trên các đường phân giác trong và ngoài của góc B và C là 4 điểm thẳng hàng".

Gọi hình chiếu của A trên phân giác trong và ngoài của góc B là A_1 và A_2.



Hình 6

Dễ dàng thấy AA_1BA_2 là hình chữ nhật. Từ đó chứng minh dễ dàng $A_1A_2 // BC$ và A_1A_2 đi qua điểm giữa của BA tức là A_1A_2 cách đều A và đường thẳng BC.

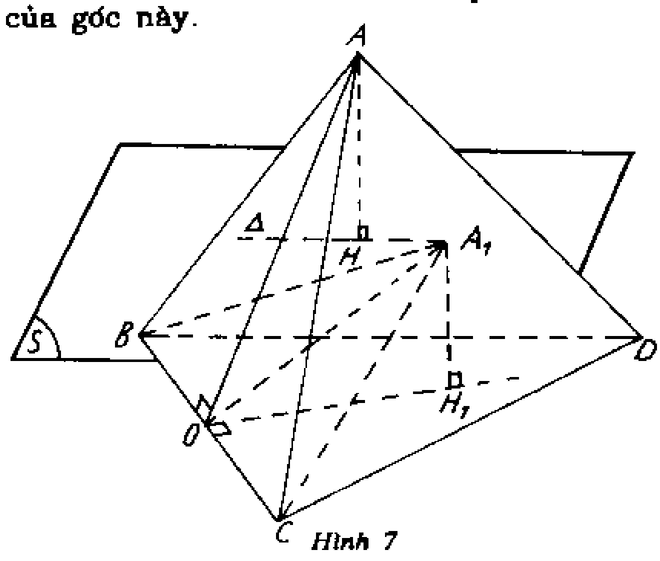
Chứng minh tương tự đối với đường thẳng nối 2 hình chiếu của A trên phân giác trong và ngoài của góc C. Cuối cùng ta được cả 4 điểm nằm trên đường thẳng.

Ta sẽ sử dụng cả kết quả và phương pháp chứng minh bài toán phẳng trên để giải quyết bài toán 3. Để cho gọn ta lưu ý rằng ở bài toán phẳng chỉ cần chứng minh cho một trong 4 hình chiếu của A (chẳng hạn A_1) nằm trên 1 đường thẳng cách đều A và đường thẳng BC là đủ, vì các điểm còn lại chứng minh tương tự.

Gọi hình chiếu của A trên mặt phẳng phân giác trong của nhị diện cạnh BC là A_1 : $AA_1 \perp$ mp (BCA_1). Dựa vào kết quả bài toán phẳng, hướng chứng minh của ta là chứng minh A_1 thuộc mặt phẳng cách đều A và mặt phẳng BCD.

Hạ $A_1H_1 \perp$ mp (BCD). Dựng mp chứa AA_1H_1 cắt BC tại O.

Ta có : $BC \perp AA_1$ và $BC \perp A_1H_1$, nên $BC \perp$ mp (AA_1H_1). Vậy AOH_1 là góc phẳng của nhị diện cạnh BC và OA_1 là phân giác của góc này.



Hình 7

Qua A_1 dựng mp S // mp (BCD), cắt mp (AA_1H_1) theo 1 giao tuyến là Δ. Hạ $AH \perp \Delta$. Vì Δ // OH_1 (giao tuyến của mp thứ 3 với 2 mp song song) nên theo chứng minh của bài toán phẳng ta có $AH = A_1H_1$. Vì mp $(AA_1H_1) \perp$ mp (BCD) và mp S // mp BCD nên mp $(AA_1H_1) \perp$ mp S theo giao tuyến Δ mà $AH \perp \Delta$ nên $AH \perp S$. Suy ra mp S cách đều điểm A và mp (BCD). Chứng minh tương tự ta cũng được các hình chiếu của A trên 5 mặt phẳng phân giác còn lại đều thuộc mp S và bài toán giải quyết xong.

Các bạn thân mến, trên đây là một vài suy nghĩ nhỏ có tính chất kinh nghiệm, mong rằng có giúp ích được phần nào cho các bạn đang lúng túng nhiều khi giải toán không gian.

KINH NGHIỆM CHỨNG MINH PHẦN ĐẢO BÀI TOÁN QUỸ TÍCH

NGUYỄN HỮU LƯƠNG

Giải một bài toán quỹ tích thường dùng phương pháp sau đây :

Sau khi ta đoán nhận được quỹ tích của những điểm M có tính chất T đã cho là một đường d nào đó thì ta chứng minh :

Phần thuận : Mọi điểm M có tính chất T đã cho thì ở trên đường d (xác định bằng cách nào đó).

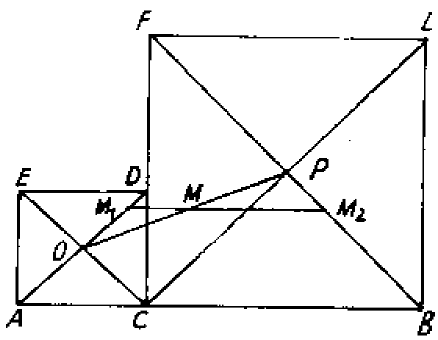
Phần đảo : Một điểm M' bất kì ở trên đường d ấy thì có tính chất T đã cho (a).

Bài này nêu kinh nghiệm chứng minh phần đảo của phương pháp này.

Thông thường đặt vấn đề để chứng minh (tức là nêu được mệnh đề (a) trên) thì dễ, nhưng bắt tay vào chứng minh thì gặp khó khăn. Chính vì vậy mà trong nhiều bài toán quỹ tích người ta thường miễn việc chứng minh phần đảo, nhưng nếu ta biết cách vượt được khó khăn đó thì thú vị biết mấy. Qua ví dụ sau đây ta sẽ thấy khó khăn ở chỗ nào và tìm cách giải quyết ra sao ? Từ đó rút ra quy tắc suy nghĩ chung cho loại toán này.

Ví dụ 1. Cho một điểm c bất kì trên đoạn AB cho trước. Dựng về cùng một phía với đoạn thẳng đó 2 hình vuông có cạnh AC và CB. Tìm quỹ tích những điểm M là điểm giữa của đoạn nối tâm 2 hình vuông đó khi c di động trên AB.

Trong phần thuận ta chứng minh được rằng M sẽ chuyển động trên đoạn M_1M_2 // AB, cách AB một khoảng $AB/4$, với M_1 và M_2 có hình chiếu trên AB cách A và B một khoảng $AB/4$ (hình 1)



Hình 1

Phần đảo ta phải chứng minh rằng :

"Lấy một điểm M' bất kì trên M_1M_2, ta phải chứng minh rằng *M' là điểm giữa của đoạn nối tâm 2 hình vuông có cạnh nối tiếp nhau trên AB, dựng về cùng phía với AB và tổng 2 cạnh của chúng bằng AB*" (1).

Ta coi việc chứng minh phần đảo là một bài toán phụ, trong đó giả thiết là :

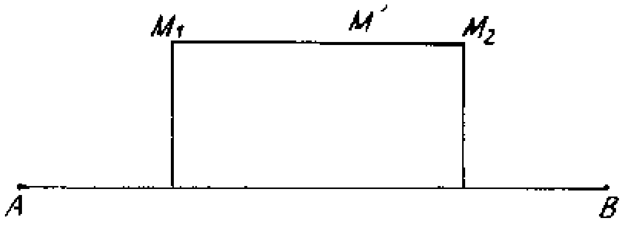
– 1 đoạn AB cố định

– 1 đoạn M_1M_2 (// AB cách AB một khoảng $AB/4$ và hình chiếu hai đầu mút của nó ở trên AB cách A và B một khoảng $AB/4$).

– 1 điểm M' bất kì trên M_1M_2 } (2)

và kết luận của nó là phần chữ nghiêng trong mệnh đề (1).

Căn cứ vào đó thì hình vẽ của ta chỉ có như ở (hình 2).



Hình 2

Bài toán phụ này khác với bài toán chứng minh hình học thông thường ở chỗ nào ?

Một bài toán thông thường thì căn cứ vào những điều đã cho trong bài toán ta đã vẽ được một hình hoàn chỉnh để tìm cách chứng minh. Nếu cần thì ta phải vẽ thêm một số đường phụ nữa để tìm ra các kết luận phụ, làm căn cứ mới cho kết luận chính của bài toán.

Đằng này những điều nói trong bài toán phụ này (như các hình vuông cạnh AC', $C'B$, đoạn nối tâm hai hình vuông...) chưa thể hiện được lên hình vẽ. Ta còn phải tiếp tục vẽ thêm hình, nhưng không phải là sáng tạo ra đường phụ mà phải tìm cách thể hiện những hình đã nói đến trong bài toán. Tức là trên cơ sở hình gốc (hình 2) ta phải dựng thêm hình thỏa mãn các yêu cầu trong phần kết luận của mệnh đề (1)

Cụ thể ta phải đứng trước một bài toán dựng hình (theo vị trí) như sau :

Giả thiết của bài toán dựng hình là giả thiết (2) nói trên.

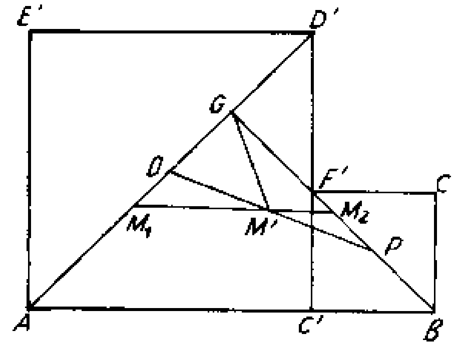
Kết luận là : Dựng 2 hình vuông về cùng phía với AB. Có hai cạnh nối tiếp nhau trên AB và tổng của chúng bằng AB sao cho M' là điểm giữa của đoạn nối tâm hai hình vuông đó.

Phân tích : (hình 3). Muốn dựng được 2 hình vuông, ta chỉ cần dựng một trong hai hình : chỉ cần tìm được một trong 2 tâm O' hoặc P', chẳng hạn tâm O'.

O' phải ở trên cạnh bên của tam giác vuông cân AGB. Vì M' phải là điểm giữa của $O'P'$ nên trong tam giác vuông $GO'P'$ ta có $M'O' = M'P' = GM'$.

Vậy O' là giao của AG và đường tròn (M', $M'G$), trong đó M' và $M'G$ đã xác định.

Sau khi biết cách dựng, ta dựng hình vuông $AE'D'C'$ có tâm là O' ; P' là giao của $O'M'$ kéo dài với GB. Ta phải chứng minh P' là tâm của hình vuông có cạnh là BC'.



Hình 3

Bạn hãy dùng giả thiết 2 và cách dựng các hình đó làm giả thiết và áp dụng tam giác đồng dạng để chứng minh kết luận của mệnh đề (1).

Ta sẽ trình bày lời giải của phần đảo như sau : "Dựng tam giác vuông cân AGB. Lấy 1 điểm M' bất kì trên M_1M_2 làm tâm quay 1 cung bán kính $M'G$ cắt AG tại O', $M'O'$ cắt BG tại P'. Kéo dài AO' một đoạn $O'D'$ = $O'A$. Dựng các hình chữ nhật $AC'D'E$ và $BC'F'L'$. Ta sẽ chứng minh rằng các hình chữ nhật đó là hình vuông nhận O' và P' làm tâm và M' là điểm giữa của $O'P'$...".

Tiếp theo ta sẽ chứng minh điều đó.

Như vậy là trong phần đầu của việc chứng minh phần đảo ta đã dùng toán dựng hình để sáng tạo ra một bài toán mới – Giả thiết của bài toán này không những chỉ có giả thiết (2) mà còn thêm những yếu tố do ta mới dựng lên ($GM' = M'O'$; $AO' = O'D$; hai hình chữ nhật cạnh AC' và $C'B$). Còn kết luận là phần còn lại phải chứng minh sau khi dựng ($AE'D'C'$ và $G'F'L'B$ là hình vuông có tâm là O' và P' ; $O'M = M'P'$).

Bài toán mới này giả thiết đã tăng lên còn kết luận thì giảm đi so với giả thiết (2) và kết luận (1).

Ta rút ra nguyên tắc chung là : trong phần đảo ta phải chứng tỏ rằng :

"*Với hình gốc* (tạm dùng để chỉ những yếu tố cố định đã cho) *và với bất kì một điểm M' nào ở trên đường d* (hoặc một phần của đường *d* đã xác định trong phần thuận) *ta cũng dựng được 1 hình thỏa mãn các tính chất của điểm M* (là điểm ta phải tìm quỹ tích)".

Và quy tắc suy nghĩ chung là :

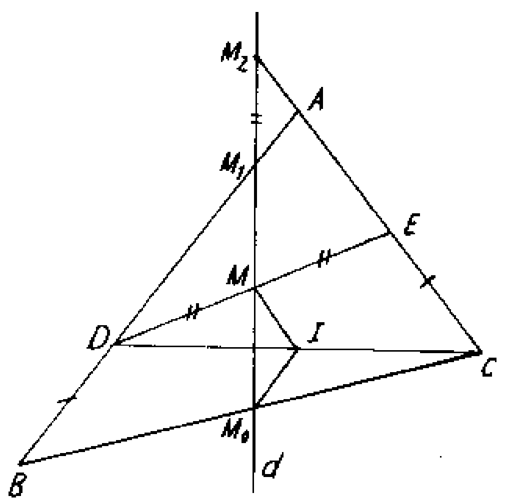
Dựa vào hình gốc, đường *d* đã tìm được trong phần thuận *và điểm M đã xác định* (một cách bất kì) *ở trên d để dựng một hình sao cho thỏa mãn tính chất của M. Sau đó* *căn cứ vào cách dựng để xem chi tiết nào đã thỏa mãn, chi tiết nào còn phải chứng minh thêm".*

Rõ ràng cách suy nghĩ như vậy giống như là cách suy nghĩ của 1 bài toán dựng hình.

Còn lời giải của phần đảo ta trình bày : *Cách xác định các hình đó như thế nào, dựng như thế thì chi tiết nào trong tính chất của điểm M đã thỏa mãn và ta còn chứng minh chi tiết còn lại nào ? Sau đó ta tiến hành chứng minh.*

Hãy áp dụng quy tắc đó để chứng minh phần đảo của bài toán sau đây :

Ví dụ 2 : Cho ΔABC, trên hai cạnh AB và AC ta lấy theo thứ tự các điểm D và E sao cho $BD = CE$. Tìm quỹ tích những điểm giữa của đoạn DE khi D và E chuyển động trên AB và AC.



Hình 4

Với chú ý kẻ thêm $MI \parallel AC$ cắt DC ở I và M_o là điểm giữa của BC (hình 4) bạn hãy tự chứng minh phần thuận để tự kết luận rằng : M' ở trên đường thẳng d đi qua M_o cố định và làm với M_oC một góc $\widehat{MM_oC} = 180^o - (C + A/2)$ (C và A là góc trong của ΔABC).

Bây giờ ta suy nghĩ để chứng minh phần đảo :

Phần đảo ta phải chứng minh rằng :

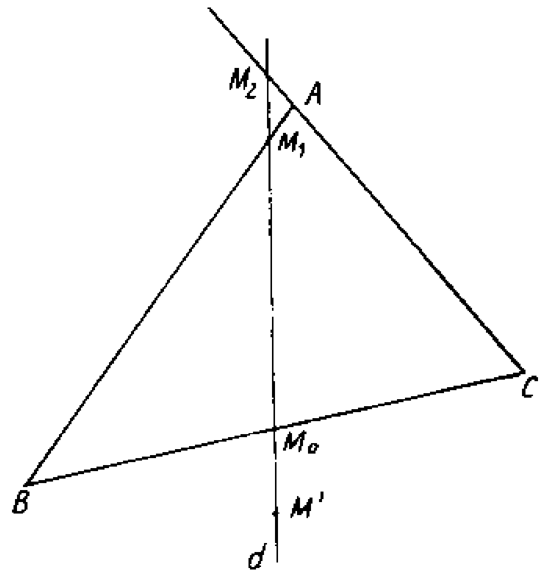
Lấy một điểm M' bất kì trên d, ta phải chứng minh rằng M' là điểm giữa của đoạn $D'E'(D' \in AB,\ E' \in AC)$ mà $BD = CE'$.

Thoạt tiên ta chỉ có hình vẽ như trên hình 5. Bây giờ ta phải xác định điểm D' và E' như trên.

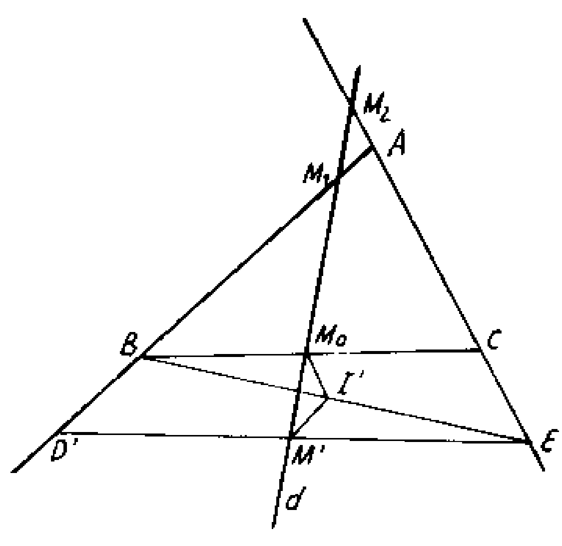
Rõ ràng D', E' phải tùy thuộc M', ta không thể xác định D' tùy ý rồi lấy $CE' = BD'$ hay ngược lại ; cũng không thể qua M' kẻ 1 đoạn $D'E'$ bất kì được. Ta phải sử dụng công cụ toán dựng hình để suy nghĩ :

Phân tích : Ta chỉ cần xác định một trong hai điểm D' hoặc E'. Ở phần thuận ta đã lợi dụng $\Delta\ MM_oI$. Ở đây nếu ta xác định được I' thì ta có thể xác định được D' (hoặc E') là giao của CI' với AB (hoặc DI' với AC), mà I' thì có thể xác định được : là giao của 2 đường thẳng kẻ từ M_o và M' lần lượt song song với AC và AB.

Như vậy ta có lời giải phần đảo như sau : "Lấy một điểm M' bất kì trên d', kẻ $M'I' \parallel AC$, $M_oI' \parallel$ AC. Nối BI' và kéo dài cắt AC (kéo dài ở E' ; $E'M'$ kéo dài cắt AB ở D'. Ta phải chứng minh rằng $BD' = CE'$ và $D'M' = M'E'$...". tiếp theo ta chứng minh điều đó.



Hình 5



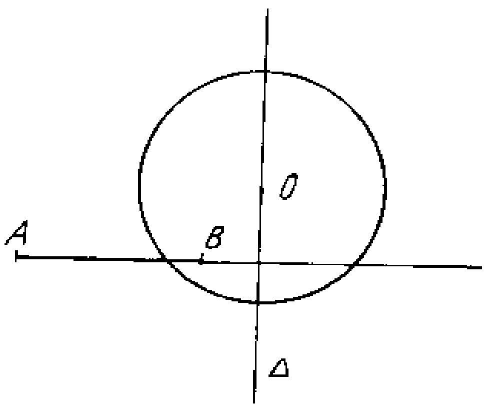
Hình 6

Một ví dụ về phạm sai lầm trong việc chứng minh phần đảo sau đây sẽ giúp ta rút thêm kinh nghiệm.

Ví dụ 3. Cho hai điểm cố định A và B và một đường tròn thay đổi sao cho mỗi điểm A và B đều có phương tích không đổi đối với đường tròn này. Tìm quỹ tích tâm O của đường tròn đó.

Sau đây là lời giải trong sách bài tập hình học lớp 8 :

"*Thuận*. Giả sử A và B có phương tích P_A và P_B đối với đường trong (O, R) và $P_A > P_B$.



Hình 7

Ta có $P_A = OA^2 - R^2$

$$P_B = OB^2 - R^2$$

suy ra $\quad OA^2 - OB^2 = P_A - P_B$

P_A và P_B không đổi nên $OA^2 - OB^2$ không đổi. Vậy O nằm trên đường thẳng Δ vuông góc với đường thẳng AB, quỹ tích những điểm I mà hiệu bình phương các khoảng cách đến A và B bằng $P_A - P_B$.

Đảo lại : Mọi đường tròn (O', R') có tâm nằm trên đường thẳng này đều cho ta :

$$O'A^2 - O'B^2 = P_A - P_B \qquad (1)$$

hay $\quad O'A^2 - P_A = O'B^2 - P_B = R'^2 \qquad (2)$

Từ đó suy ra

$$P_A = O'A^2 - R'^2$$

và $\quad P_B = O'B^2 - R'^2 \qquad (3)$

Như vậy là A và B đều có phương tích không đổi đối với mọi đường tròn có tâm O' nằm trên Δ..."

Sau đó là kết luận.

Phần đảo như vậy là sai ! Theo cách chứng minh đó thì trong giả thiết của phần đảo P_A và P_B không phải xác định trước mà chỉ khi rút ra các hệ thức (3) thì từ đó mới kết luận P_A và P_B không đổi.

Nhưng khi đã xác định O' trên Δ thì $O'A$ và $O'B$ cũng đã xác định, lúc đó P_A và P_B hoàn toàn phụ thuộc R'. Mà ở đây R' thì lại lấy tùy ý (vì không chỉ rõ xác định R' như thế nào) nên P_A và P_B đều thay đổi theo R' mặc dầu $P_A - P_B$ không đổi (theo (1)). Chúng chỉ có thể giữ nguyên phương tích đã cho trước nếu lấy R' thích hợp.

Đúng ra ta phải làm như sau.

Đặt giả thiết phương tích của A và B đối với (O, R) là m^2 và n^2 không đổi. Trong phần thuận ta chứng minh được $OA^2 - OB^2 = m^2 - n^2$, suy ra $O \in \Delta$.

Đảo : lấy O' bất kì trên Δ, xác định $R' = \sqrt{O'A^2 - m^2}$ (4). Dựng đường tròn (O', R'). Như vậy phương tích của A đối với đường tròn này bằng m^2 cho trước. Ta phải chứng minh rằng phương tích của B đối (O', R') cũng bằng n^2 cho trước.

Ta có :

$$O'A^2 - O'B^2 = m^2 - n^2 \text{ (vì } O' \in \Delta)$$

suy ra :

$$O'A^2 - m^2 = O'B^2 - n^2 \qquad (5)$$

mà $\quad O'A^2 - m^2 = R'^2$ (suy ra từ (4)) $\qquad (6)$

nên $\quad O'B^2 - n^2 = R'^2$ (so sánh (5) và (6)).

Do đó $O'B^2 - R'^2 = n^2$ (đ.p.c.m)

Một trong những sai lầm trong ví dụ này là không tuân theo nguyên tắc nói trên : Đáng lẽ từ hình gốc (2 điểm A, B), đường Δ và điểm O' đã chọn (một cách tùy ý) trên Δ, ta phải đặt câu hỏi là dựng đường tròn tâm O' bán kính như thế nào để có phương tích của A và B đối với đường tròn này đều bằng giá trị cho trước. Từ chỗ không nói rõ cách xác định R' dẫn đến sự mập mờ về giá trị của P_A và P_B.

Tóm lại, trong phần đảo việc xây dựng bài toán phụ cần phải tuân theo nguyên tắc của toán dựng hình. Các yếu tố do ta xây dựng để thể hiện tính chất của điểm quỹ tích cần chỉ rõ chúng được xác định như thế nào.

SỐ SIÊU VIỆT VÀ BÀI TOÁN THỨ 7 CỦA HIN - BE

HOÀNG CHÚNG

Ở lớp 8, các bạn đã làm quen với số vô tỉ, và biết rằng các số hữu tỉ và các số vô tỉ lập thành tập hợp số thực. Các bạn cần biết thêm rằng : số thực có thể là *số đại số* hoặc là *số siêu việt.*

1) Chúng ta vẫn thường gặp các *số đại số*, chẳng hạn các số $3/5$, $\sqrt{2}$ $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt{2+3\sqrt[3]{3}}$ v.v....

Một cách tổng quát, số đại số là mọi số x, nghiệm của một phương trình có dạng.

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_o = 0 \quad (1)$$

trong đó n là số tự nhiên ≥ 1, các hệ số a_n, a_{n-1}, .., a_o đều là số nguyên ($a_n \neq 0$). Phương trình (1) *là phương trình đại số với hệ số nguyên.*

Thí dụ : các số $3/5$ $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt{2+\sqrt[3]{3}}$ là các số đại số, vì $3/5$ là nghiệm của phương trình $5x - 3 = 0$, $\sqrt[3]{5}$ là nghiệm của phương trình $x^3 - 5 = 0$, $\sqrt{2+\sqrt[3]{3}}$ là nghiệm của phương trình $x^6 - 6x^4 + 12x^2 - 11 = 0$, và các phương trình này đều có dạng (1)

Chú ý rằng mọi số, có được từ những số tự nhiên nhờ bốn phép tính số học (cộng, trừ, nhân, chia) và phép lấy căn (như các số $3/5$ $\sqrt[3]{5}$ ...) đều là số đại số. Nhưng không phải mọi số đại số đều có dạng ấy ; chẳng hạn các nghiệm số của phương trình .

$$x^2 - 3x + 3 = 0$$

là số đại số, nhưng không thể biểu thị được dưới dạng căn thức (người ta nói rằng phương trình $x^2 - 3x + 3 = 0$ không giải được bằng căn thức).

2) Những số không phải là số đại số được gọi là *số siêu việt*. Nói cách khác, số siêu việt là số không nghiệm đúng bất kì một phương trình nào có dạng (1).

Số siêu việt rất quen thuộc với chúng ta là số π. Khi lấy logarit thập phân của các số dương, chúng ta được hầu hết là số siêu việt (mà giá trị gần đúng được cho trong bảng số).

Đã từ lâu, các số siêu việt được nhiều nhà toán học quan tâm nghiên cứu. Nhà toán học Li-u-vin là người đầu tiên chứng minh được (năm 1844) rằng số siêu việt là có thật và chỉ ra được cách xây dựng những thí dụ về số siêu việt (cuối bài này, sẽ trình bày ý trong chứng minh của Li-u-vin). Năm 1873. Ec-mit chứng minh rằng số e là số siêu việt (số e xấp xỉ 2,7, là một số có vai trò rất quan trọng trong toán học, vật lí, kĩ thuật...) Năm 1882, Lin-dơ-nam phát triển phương pháp của Ec-mit và chứng minh được rằng số π là số siêu việt. Đây là một kết quả rất lí thú của toán học, vì qua đó giải quyết được một bài toán nổi tiếng đã thu hút tâm trí của biết bao thế hệ các nhà toán học từ hàng nghìn năm : Lin-dơ-man đã chứng minh được rằng không thể cầu phương được hình tròn, tức là không thể dựng được, chỉ với thước và com-pa, một hình vuông có diện tích bằng hình tròn cho trước.

3) Năm 1900, nhà toán học Hin-be đã nêu lên bài toán sau đây :

Những số có dạng a^b, trong đó a là số đại số, $\neq 0$ và $\neq 1$, và b là số vô tỉ đại số – chẳng hạn số $2^{\sqrt{2}}$ – có phải là những số siêu việt hay ít ra là số vô tỉ ?

Đây là bài toán thứ 7 trong 23 bài toán nổi tiếng của Hin-be, những bài toán mà "thế kỉ thứ XIX thách thức thế kỉ thứ XX". Năm 1748, Ơ le cũng đã đề ra bài toán tương tự, nhưng ở dạng đặc biệt hơn).

Trong suốt gần 30 năm, bài toán trên đây vẫn chưa có lời giải. Cho đến năm 1929, nhà toán học Xô viết trẻ tuổi Ghen-phông đã giải được bài toán trong một trường hợp riêng. Năm 1930, Cu-dơ-min, áp dụng phương pháp của Ghen-phông đã chứng minh được rằng số $a^{\sqrt{p}}$ (a là số đại số $\neq 0$ và $\neq 1$, p dương và không phải là số chính phương) là số siêu việt ; nói riêng , số $2^{\sqrt{2}}$ là số siêu việt. Đồng thời với Ghen-phông, nhà toán học Đức Di-ghen đã chứng minh tính chất siêu việt của nhiều số có ý nghĩa trong toán học. Cuối cùng, năm 1934, Ghen-phông đã giải trọn vẹn bài toán của Hin-be bằng cách chứng minh rằng các số có dạng a^b nói trên là số siêu việt. Việc giải bài toán này, đúng như dự kiến của Hin-be, đã "đưa đến những phương pháp mới và những quan điểm mới về bản chất của những số vô tỉ và siêu việt đặc biệt".

Từ định lí này của Ghen-phông có thể suy ra được rằng logarit thập phân của số hữu tỉ phải là số hữu tỉ (như lg 100 = 2) hoặc là số siêu việt. Chẳng hạn ta chứng minh lg2 là số siêu việt Thực vậy, lg2 không thể bằng số hữu tỉ p/q, vì nếu $lg\ 2 = p/q$ (p, q là số tự nhiên) thì $10^{p/q} = 2$, hay $10^p = 2^q$; đẳng thức này không thể có được, vì 10p bao giờ cũng tận cùng bằng 0, còn 2^q lại tận cùng bằng 2, 4, 6, hoặc 8. Như vậy lg 2 phải là số vô tỉ. Nhưng lg 2 không thể là số vô tỉ đại số, vì nếu lg 2 là số vô tỉ đại số thì theo định lí Ghen-phông, với $a = 10$, $b = lg\ 2$, ta được $a^b - 10^{lg2}$ là số siêu việt ; điều này không đúng vì $10^{lg2} = 2$. Vậy lg 2 phải là số siêu việt.

4) Bây giờ, ta trở lại tìm hiểu cách xây dựng những số siêu việt đầu tiên trong lịch sử toán học, với Li-u-vin.

Ta gọi số x là *số đại số bậc n* nếu x thỏa mãn phương trình dạng (1), bậc n, nhưng không thỏa mãn phương trình có cùng dạng mà có bậc thấp hơn n. Thí dụ số $\sqrt{2}$ là nghiệm của một phương trình bậc hai ($x^2 - 2 = 0$), và không thể là nghiệm của một phương trình bậc nhất, do đó $\sqrt{2}$ là số đại số bậc 2 ; số $\sqrt[3]{5}$ là nghiệm của phương trình bậc ba $x^3 - 5 = 0$ và có thể chứng minh được rằng $\sqrt[3]{5}$ không thể là nghiệm của bất kì một phương trình bậc hai hay bậc nhà nào, do đó $\sqrt[3]{5}$ là số đại số bậc ba... Chú ý rằng số đại số bậc $n > 1$ không thể là số hữu tỉ, vì số hữu tỉ p/q là số đại số bậc 1 (p/q là nghiệm của phương trình bậc nhất $qx - p = 0$.

Ta biết rằng mỗi số vô tỉ x có thể biểu thị gần đúng, với độ chính xác tùy ý, bằng một số hữu tỉ ; nói cách khác, có thể chỉ ra một dãy số hữu tỉ p/q :

$$p_1/q_1, p_2/q_2, \dots, p_m/q_m, \dots \qquad (2)$$

(*với mẫu số q tăng vô hạn* biểu thị giá trị gần đúng ngày càng chính xác của số x (chính xác hơn là dãy (2) có giới hạn là x). Thí dụ vô số vô tỉ $\sqrt{2}$, ta có dãy giá trị hữu tỉ gần đúng

$$1,\ 14/10\ (=1{,}4),\ 141/100\ (1{,}41),\ 1414/1000\ (1{,}414),\dots \qquad (3)$$

Định lí Liu-vin nói rằng nếu *x là số vô tỉ đại số* (tức là số đại số có bậc $n > 1$) thì trong dãy (2) với mẫu số q đủ lớn, nhất định sẽ xảy ra bất bằng thức.

$$|x - p/q| > 1/q^{n+1} \qquad (4)$$

Thí dụ với số $\sqrt{2}$ (số đại số bậc $n = 2$), thì trong dãy (3) với $q \geqslant 10$, ta sẽ có (4) :

$$\sqrt{2} - 14/10 = 0{,}0141 > 1/10^3$$

Dùng định lí Liu-vin, ta sẽ chứng minh rằng số x sau đây là số siêu việt :

$$x = 1/10 + 1/10^{2!} + 1/10^{3!} + \dots + 1/10^{m!} + 1/10^{(m+1)!} + \dots = 0{,}11\,0001\,000\,000\,000\,000\,000\,001\,000\dots$$

(trong đó n ! chỉ tích 1.2... n).

Thực vậy, gọi x_m là số

$$x_m = 1/10 + 1/10^{2!} + \ + 1/10^{m!}$$

Sau khi lấy mẫu số chung là $10^{m!}$, ta tìm được $x_m = p/10^{m!}$ và có

$$|x - x_m| = 1/10^{(m+1)!} + 1/10^{(m+2)} + \dots + \dots < 10/10^{(m+1)!}.$$

Giả sử x là một số đại số bậc n. Thế thì thay vào bất đẳng thức (4) số $p/q = x_m = p/10^n$ ta có

$$|x - x_m| > 1/10^{m!(n+1)} \qquad (6)$$

với m đủ lớn. So sánh (5) và (6), ta được :

$1/10^{m!(n+1)} < 10/10^{(m+1)!} = 1/10^{(m+1)!-1}$ do đó

$$m!(n+1) > (m+1)! - 1$$

với m đủ lớn. Nhưng bất đẳng thức này không đúng với những giá trị của m lớn hơn n. Điều mâu thuẫn này chứng tỏ rằng x không phải là số đại số, nghĩa là x là số siêu việt.

BÀN VỀ LỜI GIẢI MỘT BÀI TOÁN

HỎI : –Đề nghị giải hộ bài toán sau đây :

Chứng minh rằng nếu ở phía ngoài của một tứ giác lồi ta dựng bốn hình vuông nhận bốn cạnh của tứ giác làm cạnh thì tâm của 4 hình vuông đó là đỉnh của một tứ giác có hai đường chéo vuông góc.

NHIỀU BẠN ĐỌC

ĐÁP : Để giải bài toán này, ta sử dụng bài tập sau đây thường cho ở cuối lớp sáu :

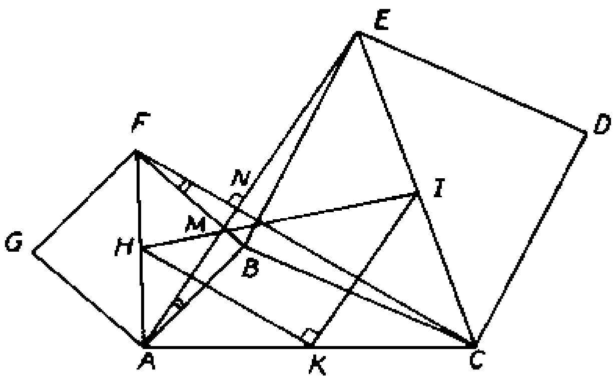
"Chứng minh rằng nếu ở phía ngoài của một tam giác ta dựng hai hình vuông nhận hai cạnh nào đó của tam giác làm cạnh thì đoạn thẳng nối tâm của hai hình vuông đó sẽ là đáy của một tam giác vuông cân mà đỉnh là trung điểm của cạnh thứ ba trong tam giác đã cho ".

Trên hình 1 ta có : $\Delta\, FBC = \Delta\, ABE$ *(cgc)*. do đó : $AE = FC$.

$\Delta\, FMN$ và ΔAMB đồng dạng *(gg)* do đó góc N vuông tức.

$$AE \perp FC$$

$$HK \overset{/\!/}{=} \frac{1}{2}FC\ ,\ IK \overset{/\!/}{=} \frac{1}{2}AC,\ \text{do đó}\ HK \overset{\perp}{=} IK$$

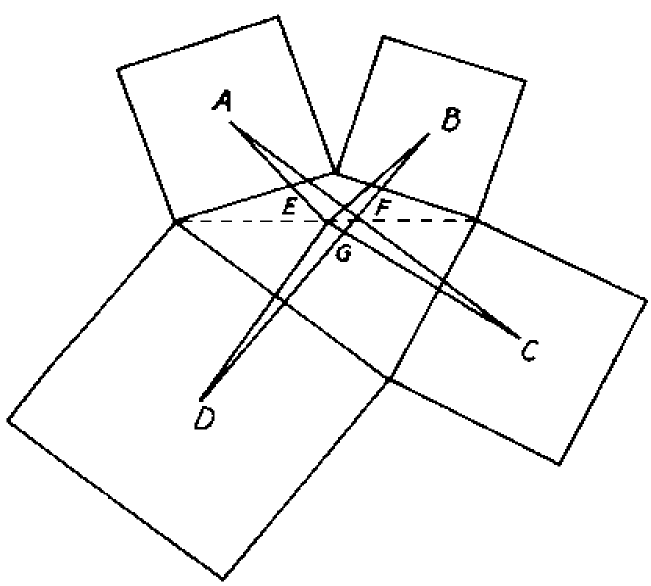


Hình 1

Bây giờ ta giải bài toán cho trên đây. Ở hình 2, ta có $AE \overset{\perp}{=} BE\ ,\ DE \overset{\perp}{=} EC$

do đó : $\Delta\, DEB = \Delta\, CEA$ (cgc)

Vậy $AC = DB$



Hình 2

$\Delta\, DEG$ và $\Delta\, CFG$ đồng dạng (gg) do đó góc F vuông tức $AC \perp DB$.

Nguyễn Mạnh Khanh

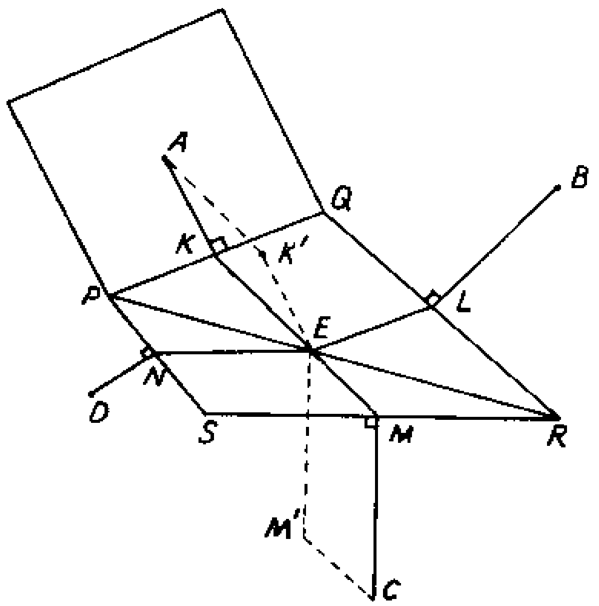
Sinh viên năm thứ III – Khoa Toán – Đại học Sư phạm Hà Nội

Lời bàn thêm : Đồng chí Khanh đưa ra cách giải trên đây nhưng không phân tích lí do của các bước chứng minh. Để giúp độc giả rèn luyện tư duy toán học, chúng tôi xin đưa ra một cách giải có phân tích mà về thực chất không khác cách giải của đồng chí Khanh mấy tí.

Mới thoạt nhìn, ta thấy bài toán có vẻ khó vì tứ giác đã cho không có gì đặc biệt. Hai tâm A, C quan hệ với hai cạnh đối diện PQ, RS còn hai tâm B, D quan hệ với hai cạnh đối diện QR, SP (hình 3). Câu hỏi đầu tiên sẽ là làm thế nào bắc được một cái "cầu" nối liền hai cặp cạnh đối diện đó. Muốn vậy, trước hết ta phân tích cụ thể hơn quan hệ giữa mỗi tâm và cạnh tương ứng : muốn dựng tâm tương ứng với cạnh nào thì lấy trên trung trực của cạnh đó (về phía ngoài tứ giác) một điểm cách cạnh đó một khoảng bằng nửa cạnh. Sự phân tích này làm ta chú ý đến vai trò các trung điểm của các cạnh. Mà ở đây lại là một bài toán về phương các đường thẳng (chứng minh rằng hai đường thẳng vuông góc với nhau), nên bất cứ cái gì có thể liên quan đến khái niệm "song song", "vuông góc" cũng khiến ta phải quan tâm. "Trung điểm" của các cạnh gợi ngay cho ta "đường trung bình" của một tam giác. Ta đi vào khai thác ý này. Ta hãy lấy trung điểm K của đoạn PQ. Nên nối K với điểm nào ? – Nối với trung điểm L của cạnh QR chăng ? Như vậy thì ta được một đường thẳng song song với PR mà PR thì không liên quan gì tới những điều ta muốn xét. Bởi vậy ta nghĩ đến việc nối K với trung điểm E của PR. Như vậy ta được đoạn $KE \overset{\perp}{=} BL$. Thế là ta đã thấy được cách xây dựng cái "cầu" nối liền hai cặp cạnh đối diện của tứ giác đã cho : *bốn trung điểm của bốn cạnh PQ, QR, RS, SP và đặc biệt điểm E* sẽ là năm "trụ" của cái cầu đó. Như vậy thì bây giờ ta được hai đường gấp khúc $AKEMC$ và $BLEND$ trong đó :

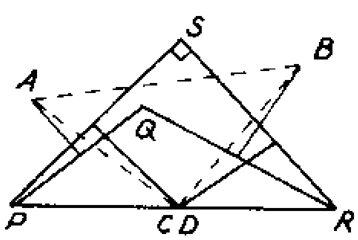
$$AK \overset{\perp}{=} LE,\ KE \overset{\perp}{=} BL\ ,\ EM \overset{\perp}{=} ND,\ MC \overset{\perp}{=} EN.$$

Nhưng các đoạn tương ứng của hai đường gấp khúc đó lại sắp theo thứ tự không giống nhau. Ta dựng hai hình bình hành *AKEK'* và *CMEM'* (hình 3). Như vậy thì hai đường gấp khúc *AK'EM'C* và *BLEND* có các cạnh tương ứng vuông góc và bằng nhau. Do đó suy ra dễ dàng $AC \overset{\perp}{=} BD$.

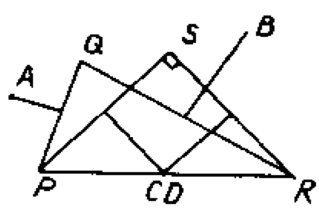


Hình 3

Đến đây, bạn dọc nào tinh ý một chút (do thường ngày, hay có thói quen phê phán, nhận xét) sẽ thấy ngay rằng trong giả thiết ở trên thì giả thiết "lối" hình như không được dùng đến. Thật ra, nó có được dùng, nhưng dùng không hết. Có thể thay thế nó bằng giả thiết yếu hơn sau đây : quay đỉnh *Q* xung quanh *K* cho đến trùng với tâm *A* thì ta quay ngược kim đồng hồ, quay đỉnh *R* xung quanh *L* cho đến trùng với *B* cũng vậy, và *S* đến trùng với *C* (xung quanh *M*), *P* trùng với *D* (xung quanh *N*) cũng thế. Với điều kiện đó thì dù tứ giác trên có lõm, có chéo hay có suy biến thành tam giác (tứ giác có hai đỉnh trùng nhau) định lí vẫn đúng. Ví dụ : đem áp dụng vào tứ giác chéo, hoặc lõm *PQRS* ở hình 4 (*a* và *b*) trong đó tam giác *PRS* là vuông cân thì ta lại tìm thấy kết quả của bài toán lớp 6 mà đồng chí Khanh đã sử dụng để giải bài toán này.

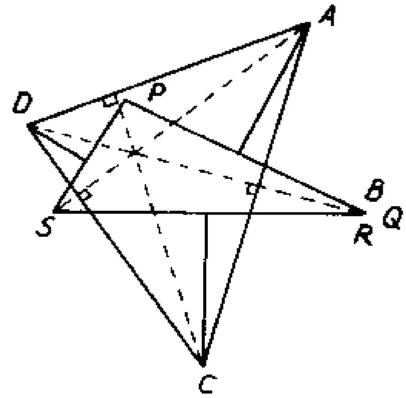


Hình 4a



Hình 4b

Nếu đem áp dụng vào một tam giác (hình 5) thì có ngay định lí sau đây : nếu ở phía ngoài một tam giác ta dựng ba hình vuông trên ba cạnh thì tâm của ba hình vuông đó sẽ là đỉnh của một tam giác mới có ba đường cao đi qua ba đỉnh của tam giác đã cho. Ba cạnh của tam giác mới theo thứ tự bằng các đoạn nối các đỉnh của tam giác đã cho với tâm hình vuông tương ứng.



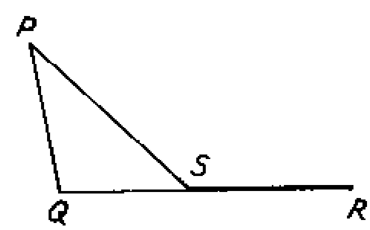
Hình 5

Thậm chí định lí vẫn áp dụng dược vào những tứ giác suy biến thành đoạn thẳng (hình 6)

Hình 6

hay có một đỉnh nằm trên một cạnh (hình 7), nói một cách tổng quát là dù cho vị trí của bốn điểm P, Q, R, S nằm trong mặt phẳng như thế nào thì định lí vẫn đúng. Các bạn cứ thử xem và rất có thể tìm ra được những điều hay hay.

Đấy, các bạn thấy không, nếu có óc nhận xét thì chẳng cần những kiến thức cao xa, chúng ta đã có thể làm việc một cách sáng tạo và hứng thú chứ không phải là chỉ biết bảo gì làm nấy.



Hình 7

NGUYỄN CẢNH TOÀN

GIẢI ĐẠI SỐ BẰNG CÔNG CỤ HÌNH HỌC

NGUYỄN PHƯƠNG MAI
(Nghệ An)

Lâu nay trong quá trình học tập chúng ta rất hay dùng công cụ đại số để giải hình học, nhưng việc giải đại số bằng công cụ hình học thì còn ít. Học tập ở trường chúng tôi rất thích dùng công cụ hình học để giải đại số, bởi vì nhiều bài toán đại số mà chỉ đơn thuần dùng công cụ đại số để giải thì rất khó, nhưng khi đã chuyển nó sang dạng hình học thì rất đơn giản. Trong bài báo này tôi muốn giới thiệu với các bạn vài bài toán đại số và dùng hình học để giải.

Bài I. Chứng minh bất đẳng thức.

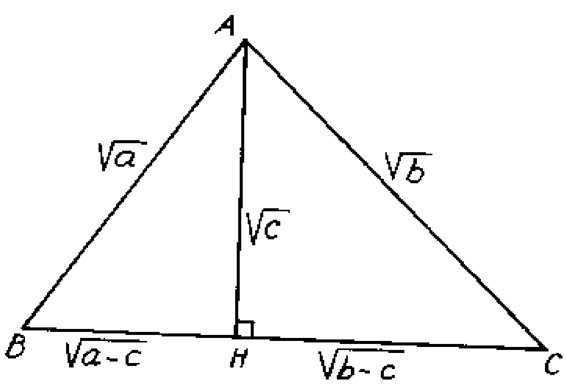
$$\sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} \leq \sqrt{ab}$$

(bài thi vào đại học năm 1980)

Ta dựng tam giác ABC có $AB = \sqrt{a}$, $AC = \sqrt{b}$, đường cao $AH = \sqrt{c}$. Theo định lí Pi-ta-go ta có ngay

$$BH = \sqrt{a-c}\ ;\ CH = \sqrt{b-c}$$

Như vậy vế trái của bất đẳng thức cần chứng minh chính bằng hai lần tổng diện tích của hai tam giác AHB *và* AHC, tức là bằng hai lần diện tích tam giác ABC. Mặt khác, hai lần diện tích tam giác ABC không lớn hơn tích $AB \cdot AC = \sqrt{a}$. Bất đẳng thức được chứng minh.



Bài 2. Tìm giá trị bé nhất của hàm số

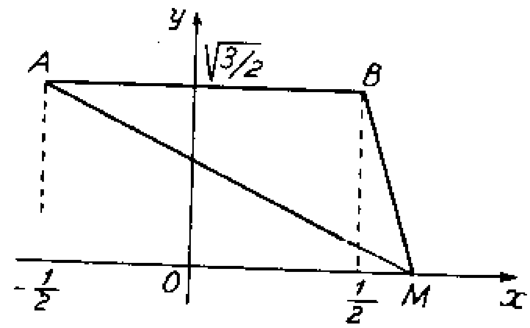
$$y = \sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt{x^2 + x + 1}$$

Ta biến đổi

$$y = \sqrt{(x - 1/2)^2 + (3/2)^2} + \sqrt{(x + 1/2)^2 + 3/2)^2}$$

Trong hệ trục tọa độ xOy ta lấy các điểm $A(-1/2, \sqrt{3}/2)$, $B(1/2, \sqrt{3}/2)$ $M(x, 0)$, thì ta có

$$y = BM + AM$$



Bài toán của ta trở thành bài toán hình học : Cho tam giác ABM có các đỉnh A và B cố định, còn đỉnh M chạy trên đường thẳng song song với cạnh AB. Tìm vị trí của M để chu vi tam giác ABM nhỏ nhất. Bài toán này rất đơn giản, chu vi tam giác AMB đạt nhỏ nhất khi tam giác MAB cân $\Rightarrow x = 0 \Rightarrow y_{min} = 2$

Bài 3. Cho a, b, c, d là các số thực sao cho

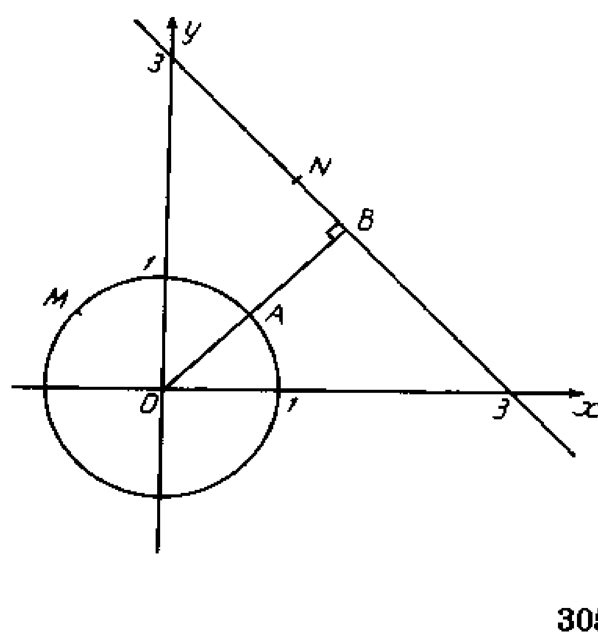
$$a^2 + b^2 = 1\ , \qquad (1)$$

$$c + d = 3. \qquad (2)$$

Chứng minh bất đẳng thức

$$ac + bd + cd\ (9 + 6\sqrt{2})/4$$

Đây là bài toán nếu giải bằng đại số thì khó, bởi vì vế trái bất đẳng thức không đối xứng và vế phải là số phức tạp. Bây giờ ta giải bằng hình học.



Quỹ tích những điểm $M(a, b)$ thỏa mãn (1) là đường tròn tâm O bán kính 1.

Quỹ tích những điểm $N(c, d)$ thỏa mãn (2) đường thẳng $y = -x + 3$

Mặt khác bất đẳng thức đã cho tương đương với

$(20 - 11 + 6\sqrt{2})/4 \geqslant ac + bd + cd \Leftrightarrow$

$10 - 2(ac + bd + cd) \geqslant (11 - 6\sqrt{2})/2 \quad (3)$

Thay $a^2 + b^2 = 1$

$9 - 2cd = c^2d^2$ vào (3) ta có :

$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2ac - 2bd \geqslant (3 - \sqrt{2})^2/2$

$\Leftrightarrow (a - c)^2 + (b - d)^2 \geqslant (3 - \sqrt{2})^2/2$

$\Leftrightarrow \sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2} \geqslant (3 - \sqrt{2})/\sqrt{2}$

Vế trái của bất đẳng thức là đoạn MN với M thuộc đường tròn. N thuộc đường thẳng. Vế phải là đoạn AB. Ta luôn có $MN \geqslant AB$, suy ra điều phải chứng minh.

Bài 4. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x = \sqrt{y^2 - a^2} + \sqrt{z^2 - a^2} \\ y = \sqrt{z^2 - b^2} + \sqrt{x^2 - b^2} \\ z = \sqrt{x^2 - c^2} + \sqrt{y^2 - c^2} \end{cases}$$

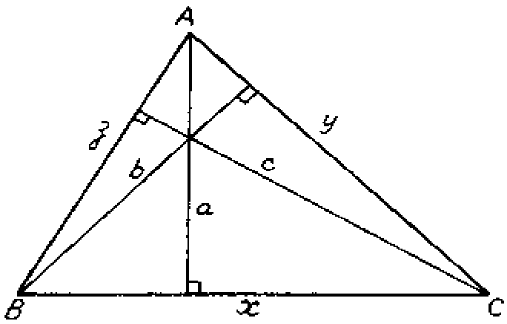
Cho a, b, c lớn hơn không và $1/a + 1/b > 1/c$, $1/b + 1/c > 1/a$, $1/c + 1/a > 1/b$. Dựng tam giác ABC có $AC = y$, $BC = z$, đường cao hạ từ C bằng a. Theo phương trình (1), ta có $AB = x$. Dựng tam giác $A_1B_1C_1$ có $A_1B_1 = x$, $C_1B_1 = z$, đường cao hạ từ B_1 bằng b. Theo phương trình (2), ta có $A_1C_1 = y$. Dựng tam giác $A_2B_2C_2$ có $A_2B_2 = x$. $C_2A_2 = y$, đường cao hạ từ A_2 bằng c. Theo phương trình (2) thì B_2C_2 bằng z

Các tam giác ABC, $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ bằng nhau nên chúng có diện tích bằng nhau.

$$ax = by = cz = 2S \qquad (*)$$

(S là diện tích mỗi tam giác).

Ba tam giác nói trên được ghép lại thành tam giác ABC có các cạnh x, y, z và các đường cao tương ứng với các cạnh đó là a, b, c. Ta tính các cạnh của tam giác theo a, b, c.



Theo công thức Hêrông, ta có.

$$S = \sqrt{p(p - x)(p - y)(p - z)}$$

Mà $\quad p = (x + y + z)/2 = S(1/a + 1/b + 1/c)$ do $(*)$ nên

$$S = S^2\sqrt{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right)}$$

$$\Rightarrow \qquad S = 1/\sqrt{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right)}$$

Ta tìm được $x = 2S/a$, $y = 2S/b$, $z = 2S/c$, S được tính bằng công thức trên :

Bài 5. Cho p, q là các số thực sao cho phương trình $x^2 + px + q = 0$ có hai nghiệm thực có trị tuyệt đối không vượt quá 1. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức.

$$P = p^2(p^2 + 2q^2 - 3) + q^2(q^2 - 3)$$

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2 + px + q = 0$. Theo giả thiết, ta có $|x_1| \leqslant 1. |x_2| \leqslant 1$. Vậy

$$-1 \leqslant (x_1 - x_2)/2 = -p/2 \leqslant 1$$

và $\quad f(1) \geqslant 0,\ f(-1) \geqslant 0$

Vì phương trình có hai nghiệm thực, nên $\Delta \geqslant 0$. Hệ điều kiện được viết lại là

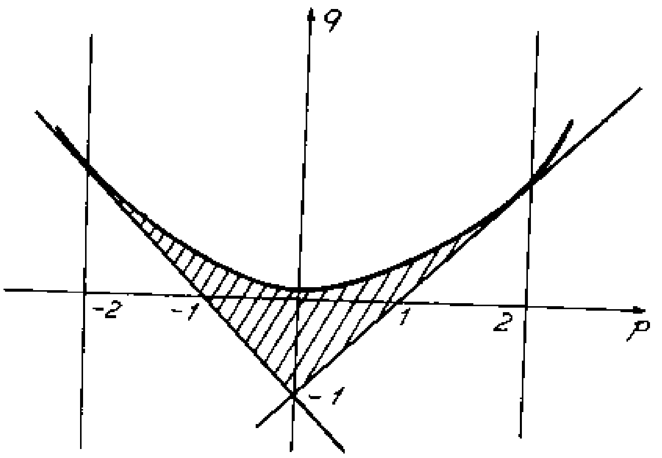
$$\begin{cases} p^2 - 4q \geqslant 0 \\ -2 \leqslant p \leqslant 2 \\ 1 + p + q \geqslant 0 \\ 1 - p + q \geqslant 0 \end{cases}$$

Ta biểu diễn miền nghiệm của hệ trên mặt phẳng pOq. Phần mặt phẳng bị gạch kể cả biên là miền nghiệm của hệ.

Ta có thể viết

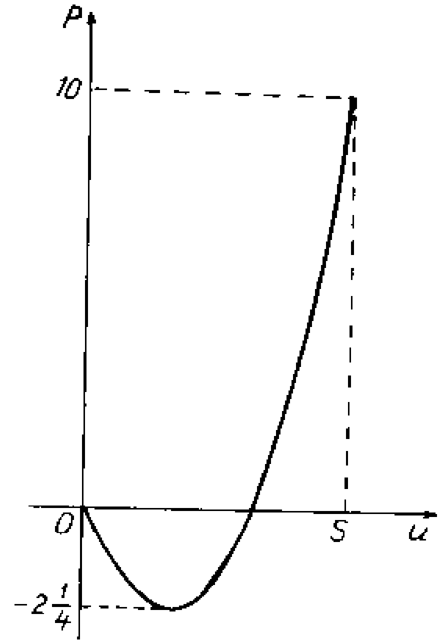
$$P = (p^2 + q^2)^2 - 3(p^2 + q^2)$$

Đặt $u = p^2 + q^2$. Đây là phương trình đường tròn có tâm là O và bán kính biến thiên trên miền nghiệm của hệ trên. Nhìn trên đồ thị ta thấy u_{max} khi đường tròn đi qua hai điểm (– 2, 1) và (2, 1) $\Rightarrow \sqrt{u} = \sqrt{5}$ $\Rightarrow$ u = 5 và u_{min} khi $u = 0$.



Ta cần tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P = u^2 - 3u$ với $0 \leq u \leq 5$. Ta vẽ đồ thị của hàm số $P = u^2 - 3u$. trên đoạn [0, 5]. Nhìn vào đồ thị, ta thấy giá trị lớn nhất của P bằng 10 và giá trị nhỏ nhất của P bằng 2,25.

Do khuôn khổ bài báo, tôi chỉ xin trình bày mấy bài toán nhỏ vậy thôi. Mong các bạn trong quá trình học hãy làm quen với phương pháp này, chắc chắn rằng các bạn sẽ thu được nhiều điều thú vị và bổ ích.



Bây giờ xin tặng các bạn hai bài toán.

1. Cho a, b, c, d là các số sao cho

$$|a - b| + |a + b| = 2, \quad c + d = 3$$

Chứng minh rằng

$$11- |a^2 - b^2| - 2\,(cd + ac + bd) \geq 1/2.$$

2. Khảo sát số nghiệm của hệ phương trình theo a

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ (x - a)^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Chương IV – BƯỚC ĐẦU TÌM HIỂU TOÁN HỌC HIỆN ĐẠI

BÀI TOÁN THỨ MƯỜI CỦA HINBE ĐÃ ĐƯỢC GIẢI QUYẾT

PHAN ĐÌNH DIỆU

"Có ai trong chúng ta lại không muốn vén bức màn đang che kín tương lai của chúng ta, để dù chỉ một thoáng nhìn thấy được những thành tựu mai sau của kiến thức loài người và những bí mật phát triển của nó trong những thế kỉ sắp tới ? Những mục tiêu đặc biệt nào mà những trí tuệ toán học chủ đạo của thế hệ tương lai sẽ tự đặt ra cho mình ? Những phương pháp mới và những sự kiện mới nào sẽ được phát minh vào thế kỉ tới trong lĩnh vực rộng rãi và phong phú của tư duy toán học ?"

Bằng những lời đẹp đẽ đó, nhà toán học Hinbe đã mở đầu bài phát biểu nổi tiếng của mình tại Đại hội toán học quốc tế lần thứ hai ở Pari năm 1900, năm cuối cùng trước khi bước sang thế kỉ 20 với những thành tựu huy hoàng của khắp các lĩnh vực khoa học kĩ thuật mà chúng ta đang được chứng kiến ngày nay. Nhưng Hinbe không phải chỉ muốn vén bức màn tương lai, mà với trí tuệ uyên bác, với nhãn quan sắc sảo của mình, Hinbe đã phần nào tiên đoán được hướng phát triển tương lai của toán học và đã góp phần cống hiến to lớn trong việc vạch đường cho sự phát triển đó. Trong bài phát biểu nói trên, Hinbe đã đề ra một loạt 23 bài toán lớn trong hầu khắp các lĩnh vực toán học, mà việc nghiên cứu giải quyết chúng từ đó đến nay đã thu hút sự cố gắng của rất nhiều những tài năng toán học lỗi lạc và thực sự đã có ảnh hưởng lớn đến toàn bộ sự phát triển của toán học trong thế kỉ 20 này.

Bảy mươi năm đã trôi qua, nhiều bài toán Hinbe nêu ra đã được lần lượt giải quyết, và cũng có những bài chưa được giải quyết đầy đủ. Trong bài báo nhỏ này, tôi xin giới thiệu với các bạn một trong những bài toán đó, bài toán thứ mười, là bài toán vừa được giải quyết trong năm 1970 này, và đặc biệt người giải quyết bài toán đó là một nhà toán học còn rất trẻ của Liên xô, Machiaxiêvich, năm nay mới vừa 23 tuổi.

Đây là một bài toán số học. Ta hãy xét các phương trình số học dạng $P(x, y, ..., u) = 0$, trong đó P là một đa thức với hệ số nguyên của các ẩn $x, y, ..., u$. Những phương trình như vậy được gọi là phương trình Điôphăng. Thí dụ :

$$x^4 + y^4 - 5 = 0 \quad (1)$$

$$x^2 - y + 4 = 0 \quad (2)$$

$$x^4 + y^4 - z^4 = 0 \quad (3)$$

là những phương trình Điôphăng. Phương trình (1) có một số hữu hạn nghiệm nguyên là $(x, y) = (\pm1, \pm2), (\pm2, \pm1)$; phương trình (2) có vô số nghiệm nguyên như các cặp (1, 5), (2, 8), (3, 13), v.v... Còn phương trình (3) không có nghiệm nguyên. Vậy trong các phương trình Điôphăng, có những phương trình có nghiệm nguyên và có những phương trình không có. Trong danh sách các bài toán mà Hinbe nêu ra, bài toán thứ mười phát biểu như sau :

Giả sử cho một phương trình Điôphăng với các ẩn số tùy ý và với hệ số nguyên. *Hãy nêu một phương pháp, theo đó sau một số hữu hạn phép toán có thể khẳng định được là phương trình đã cho có nghiệm nguyên hay không.*

Bài toán nêu ra khá dễ hiểu, nhưng việc giải quyết nó thực không phải là đơn giản. Vấn đề phương trình Điôphăng trong hàng chục thế kỉ đã thu hút sự chú ý của các nhà toán học của mọi thời đại, và cho đến nay vẫn còn để lại những bài toán hóc búa, như bài toán Phecma nổi tiếng (hãy chứng minh phương trình $x^n + y^n = z^n$, với $n > 2$ không có nghiệm nguyên !) chẳng hạn. Việc nghiên cứu các phương trình Điôphăng đã có ảnh hưởng lớn đến sự phát triển của số học, đại số học và các ngành toán học khác.

Ta trở lại với bài toán Hinbe. Như vậy là Hinbe đòi hỏi nêu ra một *phương pháp chung*, để với mọi phương trình Điôphăng cho trước, dùng phương pháp đó đoán nhận được nó có nghiệm nguyên hay không. Dường như là phương pháp đó có thật, và trong mấy chục năm đầu của thế kỉ 20, người ta cố gắng đi tìm phương pháp đó. Không tìm được phương pháp chung cho mọi phương trình Điôphăng thì tìm cho các lớp riêng nào đó của phương trình Điôphăng cũng được.

Các nhà toán học đi tìm phương pháp chung mà Hinbe đòi hỏi, *nhưng có thể chăng cái phương pháp chung đó không có ?* Trước những năm ba mươi của thế kỉ này, một sự hoài nghi kiểu như vậy chưa có cơ sở. Bởi vì suốt mấy nghìn năm nay, các nhà toán học đã tìm ra được vô vàn các phương pháp để giải các bài toán loại này loại khác, nhưng chưa ai chứng minh được (thậm chí nghĩ đến việc chứng minh) rằng *không có phương pháp để giải một bài toán nào đó.*

Muốn chứng minh được không có phương pháp, thì trước hết phải hiểu được một cách chính xác *thế nào là phương pháp ?* Vào khoảng 1935, 1936 về sau, với công trình của nhiều nhà toán học lỗi lạc như Turing, Gơden, Klin, Sóc, v.v..., trong toán học đã xuất hiện các khái niệm chính xác về thuật toán, lần đầu tiên người ta đã chứng minh được *không có thuật toán* để giải một loạt các bài toán trong lôgic (Sót), trong đại số học (Post, Mackôv, Nôvikôv, v.v...) và trong nhiều ngành toán học khác.

Và trên cơ sở đó, người ta bắt đầu nghĩ đến việc chứng minh *không có phương pháp* mà Hinbe đòi hỏi đối với các phương trình Điôphăng.

Với mục đích giải quyết vấn đề đó, bền bỉ trong nhiều năm nghiên cứu, đến năm 1961, các nhà toán học Mĩ Đêvis, Putman, và Rôbinxơn đã chứng minh được rằng : *không có thuật toán để với một phương trình Điôphăng mũ bất kì cho trước, khẳng định được nó có nghiệm nguyên hay không*. Một phương trình Điôphăng mũ là một phương trình có dạng $P(x, y, ..., u) = 0$, trong đó ngoài phép lũy thừa, trong P có thể chứa phép mũ (thí dụ $2x^2 + 5^y + xy^z = 0$ là một phương trình như vậy). Chỉ cần bỏ được chữ mũ nói trên là chứng minh được không có phương pháp mà Hinbe đòi hỏi. Tiến thêm một bước nữa, cũng các nhà toán học nói trên, năm 1963, đã chứng minh được rằng : *không có phương pháp mà Hinbe đòi hỏi, nếu tìm được một quan hệ R (u, v) giữa các số nguyên u, v, thỏa mãn hai tính chất :*

1) nếu $R(u, v)$ đúng, thì $v \leqslant u^u$.

2) với mọi k, có u và v sao cho R (u, v) đúng và $u^k < v$.

Một sự dẫn dắt kì lạ và kết quả thu được thật là xuất sắc ! Nhưng rồi vẫn chưa ai tìm được một quan hệ R như vậy ! Và người ta lại đã bắt đầu nghĩ đến những cách khác để giải quyết bài toán Hinbe.

Cho đến năm 1970 này, đúng 70 năm sau khi Hinbe nêu ra bài toán, Machiaxiêvich, nhà toán học 23 tuổi ở Lêningơrát, người mà mấy năm vừa qua đã chú ý nghiên cứu bài toán thứ mười của Hinbe, bằng những sáng tạo thông minh và độc đáo, đã tìm ra được một quan hệ R rất đơn giản thỏa mãn hai tính chất nói trên. Ta xét dãy số Fibônaxi :

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots$$

(mỗi số bằng tổng của hai số đứng liền trước nó). Gọi f_n là số Fibônaxi thứ n, ta có $f_1 = 1, f_2 = 1, f_3 = 2$, v.v... Bây giờ ta định nghĩa quan hệ R như sau : $R(u, v)$ khi và chỉ khi $v = f_{2u}$, tức là v là số Fibônaxi thứ $2u$. Như vậy, chẳng hạn $R(1, 1), R(2, 3), R(3, 8)$,... là đúng. Machiaxievich chứng minh được quan hệ R đó thỏa mãn các tính chất 1) và 2). Và do đó đã hoàn thành việc chứng minh *không có phương pháp chung để với mọi phương trình Điôphăng cho trước, khẳng định được nó có nghiệm nguyên hay không.* Và như vậy, bài toán thứ mười của Hinbe được giải quyết một cách phủ định, trái với dự kiến của chính Hinbe !

Tháng 9 năm 1970 vừa qua, kết quả này đã được báo cáo tại Đại hội toán học quốc tế họp ở thành phố Nixơ nước Pháp.

Giới thiệu lại quá trình nghiên cứu bài toán thứ mười của Hinbe nhân dịp bài toán đó được giải quyết, chúng ta thấy một bài toán lớn có thể mở ra những chân trời rộng lớn đến thế nào cho việc phát triển toán học, và trên con đường giải quyết bài toán đó, toán học đã thu lượm được biết bao kết quả rực rỡ trước khi đến kết quả rực rỡ cuối cùng ! Đồng thời sự táo bạo trong nghiên cứu có thể đưa lại cho ngay những nhà toán học rất trẻ tuổi những vinh dự to lớn biết bao !

Vấn đề là làm sao cho, như lời của chính Hinbe, "trong lòng chúng ta luôn luôn vang lên lời kêu gọi bất diệt của sự thôi thúc : đây là những bài toán, anh hãy tìm cách giải quyết chúng !". Chúng sẽ hấp dẫn anh bằng những khó khăn và những hứa hẹn, và sau đó sẽ đến công anh bằng niềm hạnh phúc của những kết quả sáng tạo.

ĐẾM ĐƯỢC VÀ KHÔNG ĐẾM ĐƯỢC

NGÔ VIỆT TRUNG

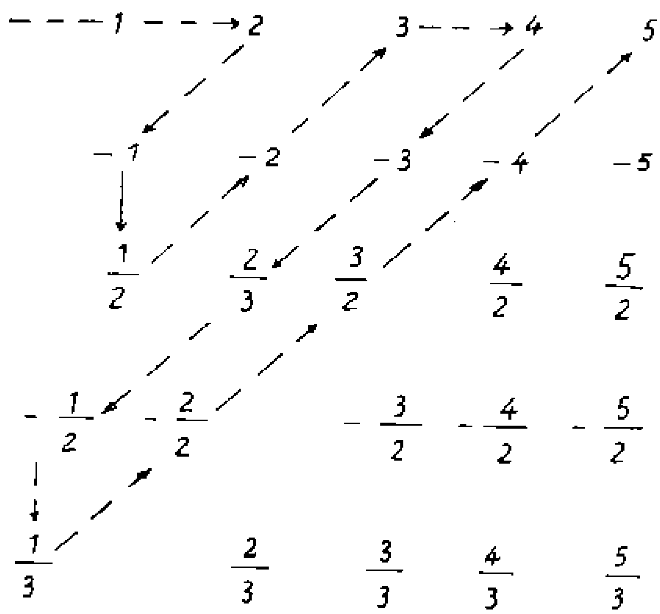
Khi giải một phương trình các bạn thường đi đến một kết luận là phương trình có hữu hạn nghiệm. Nhưng đã có ai nghĩ rằng "hữu hạn" là gì chưa ? Nếu có người hỏi, chắc bạn sẽ trả lời rằng một tập hợp hữu hạn là một tập hợp đếm được. Nhưng nếu có người hỏi tiếp "đếm được" là gì thì chắc bạn sẽ lúng túng. Cũng có thể có bạn trả lời liều rằng đếm được có nghĩa là có thể dùng đến các ngón tay (và khi cần cả ngón chân) để đếm cho đến hết. Trả lời như thế vẫn có phần đúng.

Trong toán học, người ta hiểu một tập hợp X là hữu hạn nếu số các phần tử của X có thể biểu thị được bởi một số nguyên dương n nào đó. Điều này có nghĩa là người ta có thể thiết lập một sự tương ứng giữa các phần tử của X và các số từ 1 đến n sao cho mỗi phần tử của X ứng với một số duy nhất và ngược lại mỗi số chỉ ứng với một phần tử của X. Một sự tương ứng như vậy còn được gọi là một sự tương ứng 1 – 1. Về mặt bản chất, đó chính là một quá trình đếm giống như khi ta dùng ngón tay để đếm đồ vật.

Các vật cụ thể (không phải là sản phẩm suy nghĩ của con người) thường là hữu hạn. Nhưng không phải lúc nào người ta cũng đếm được chúng theo nghĩa thông thường. Ví dụ như tập hợp các hạt cát trên trái đất là hữu hạn. Có thể cam đoan rằng bạn chưa hề nghĩ đến việc chứng minh điều này. Ở đây ta phải xuất phát từ điều kiện các hạt cát không thể bé như các nguyên tử và do đó chúng có một thể tích nhất định. Vì vậy, nếu các hạt cát là vô hạn thì thể tích trái đất cũng sẽ là vô hạn và ta có một sự mâu thuẫn. Rõ ràng là chúng ta đã không đếm mà vẫn biết tập hợp các hạt cát là hữu hạn.

Một quá trình đếm bao giờ cũng cho ta một số phần tử cụ thể. Trong định nghĩa tập hợp hữu hạn ở trên, n chính là số phần tử của X. Mở rộng khái niệm số phần tử, người ta gọi hai tập hợp là có cùng lực lượng nếu có một sự tương ứng 1 – 1 giữa các phần tử của chúng. Rõ ràng là hai tập hợp hữu hạn có cùng lực lượng khi và chỉ khi chúng có cùng số phần tử. Vì vậy, một tập hợp hữu hạn không bao giờ có cùng lực lượng với một tập con thật sự của nó. Điều này không còn đúng nữa đối với một tập vô hạn. Ví dụ như các số tự nhiên và các số dương chẵn có cùng lực lượng thông qua sự tương ứng n đến $2n$. Tổng quát hơn, mỗi một tập vô hạn bao giờ cũng chứa một tập hợp con có cùng lực lượng với tập các số tự nhiên. Thật vậy, cho trước n phần tử khác nhau $a_1, \dots a_n$ của một tập vô hạn Y, người ta luôn luôn có thể tìm thấy một phần tử a_{n+1} của Y khác với các phần tử trên. Điều này cho phép ta xây dựng một dãy vô hạn các phần tử khác nhau $a_1, a_2, a_3 \dots$, của Y. Dãy này có cùng lực lượng với tập các số tự nhiên thông qua sự tương ứng n đến a_n. Như vậy, ta có thể coi các số tự nhiên có lực lượng nhỏ nhất trong các tập vô hạn.

Một tập hợp có cùng lực lượng với tập hợp các số tự nhiên được gọi là *tập hợp đếm được*. Lí do là bằng một phép đếm thông thường người ta có thể đạt đến mọi phần tử của nó (mặc dù không thể đếm hết toàn bộ). Điều này còn được thể hiện qua việc có thể sắp xếp các phần tử của một tập hợp đếm được thành một dãy vô hạn a_1, a_2, a_3 ..., với chỉ số là các số tự nhiên. Với một sự sắp xếp như vậy, các bạn có thể nghĩ rằng một tập hợp đếm được trên đường thẳng thực sẽ là một tập điểm rời rạc. Điều này không phải lúc nào cũng đúng. Mọi người đều biết rằng các điểm hữu tỉ trù mật trên đường thẳng thực (bất kì một đoạn thẳng nào, dù nhỏ đến đâu cũng chứa vô số điểm hữu tỉ) và chúng ta sẽ thấy tập các số hữu tỉ là đếm được. Theo định nghĩa một số hữu tỉ là một phân số của hai số nguyên. Hãy xếp các phân số có cùng mẫu số trên một dòng theo thứ tự của tử số (Ở đây ta giả thiết tử số là một số nguyên dương). Sau đó xếp các dòng này theo thứ tự của mẫu số bắt đầu là 1, –1, 2, –2, 3, ... Bằng cách đặt $a_1 = 0$; $a_2 = 1$; $a_3 = 2$; $a_4 = -1$; $a_5 = 1/2$; $a_6 = -2$; $a_7 = 3$; $a_8 = 4$; ... theo thứ tự của các đường



chéo ta có thể sắp xếp các số hữu tỉ thành một dãy vô hạn với chỉ số là các số tự nhiên.

Các bạn cũng có thể hỏi tập hợp tất cả các số thực có phải là một tập hợp đếm được hay không. Câu trả lời sẽ là không. Thật vậy, giả sử ta có thể sắp xếp tất cả các số thực thành một dãy vô hạn u_1, u_2, u_3 ... Hãy biểu diễn các số thực dưới dạng các phân số thập phân vô hạn

$$u_1 = n_1 + 0,\ \overline{c_{11}c_{12}c_{13}\cdots}$$
$$u_2 = n_2 + 0,\ \overline{c_{21}c_{22}c_{23}\cdots}$$
$$u_3 = n^3 + 0,\ \overline{c_{31}c_{32}c_{33}\cdots}$$

ở đây n_1, n_2, n_3,... là các số nguyên. Ta sẽ kí hiệu c_n là chữ số nhỏ nhất khác với c_n và 9. Phân số thập phân vô hạn

$$u = 0,\ \overline{c_1c_2c_3\cdots}$$

là một số thực không có chữ số 9 sau dấu thập phân. Rõ ràng là $u \neq u_n$ với mọi n. Điều này không thể xảy ra được vì u phải xuất hiện trong dãy số u_1, u_2, u_3... Như vậy ta đã chứng minh tập hợp các số thực là không đếm được.

Một vấn đề mới nảy ra là các tập hợp điểm không đếm được trên đường thẳng thực có cùng lực lượng với các số thực hay không. Vấn đề này còn biết được dưới tên gọi *giả thuyết continuum*. Năm 1964, nhà toán học Mĩ Cohen đã đưa ra một lời giải ngạc nhiên về vấn đề này. Ông ta đã chứng minh rằng có thể công nhận hoặc phủ nhận giả thuyết continuum mà vẫn không nhận được bất kì một sự mâu thuẫn nào với các tiên đề của lí thuyết tập hợp. Như vậy, tùy theo sự lựa chọn, chúng ta có thể coi hoặc không coi tập hợp các số thực là tập hợp có lực lượng nhỏ nhất trong tất cả các tập hợp không đếm được.

CÂU CHUYỆN VỀ LÍ THUYẾT ĐỘ ĐO

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Không thể xác định được chính xác vào lúc nào loài người có nhu cầu phải xác định diện tích các hình và thể tích các vật thể. Chỉ biết rằng cách đây 4000 năm người Ai Cập đã biết đo diện tích. Đất đai hai bên bờ sông Nin rất phì nhiêu nhưng cứ sau mỗi trận lụt thì biên giới giữa các khoảng đất bị xóa nhòa. Người Ai Cập đã tìm được cách đo lại diện tích các khoảnh đất và do đó mà hình thành và phát triển môn hình học (Danh từ hình học "geometrie" nguồn gốc Hi Lạp có nghĩa là đo đạc đất đai). Các công trình kiến trúc cổ Ai Cập như kim tự tháp là một bằng chứng cho thấy cách đây 3000 năm loài người đã biết tính thể tích của một số khối đa diện. Các nhà toán học Hi Lạp Asimet (Archimede), Hêrông (Heron) sống ở thế kỉ 3 trước công nguyên đã có nhiều đóng góp trong việc tìm diện tích các hình và thể tích các vật thể. Các công thức về diện tích và thể tích hình cầu và nhiều vật tròn xoay phức tạp khác đều do Asimet nêu ra. Đối với mỗi một vật thể, Asimet phải sáng tạo ra một phương pháp mới có khi là những phương pháp rất khôn khéo. (Trong những phương pháp đó đã chứa đựng mầm mống của phép tính tích phân sau này).

Sự phát triển của khoa học và kĩ thuật ở thế kỉ 16, 17 đã dẫn đến những bài toán tính thể tích của những vật thể và diện tích của những hình rất phức tạp, giới hạn ở giữa những đường cong hay những mặt cong. Phép tính tích phân do hai bộ óc vĩ đại nhất của thế kỉ 17 là Niutơn (Newton) và Laibơnit (Leibnitz) sáng tạo ra, đã cho một phương pháp đơn giản và tổng quát để giải những bài toán đó. Tuy nhiên, phép tính tích phân còn chưa cho phép xác định diện tích (hay thể tích) của một số hình "kì quặc", chẳng hạn diện tích một hình gồm những điểm (x, y) với các tọa độ hữu tỉ nằm trong một hình vuông nào đó là bao nhiêu ?

Đến cuối thế kỉ 19 với sự phát triển của toán học, các nhà toán học thường gặp phải bài toán đo diện tích (hay thể tích) của những hình "kì quặc" như vậy. Nhưng có phải bất kì hình nào (vật thể nào) cũng đều có diện tích (thể tích) hay không ? Và nói chung diện tích (thể tích) của một hình (một vật thể) là cái gì ?

Có lẽ đa số các bạn (cũng như các nhà toán học trước thế kỉ 20) đều quan niệm rằng diện tích (thể tích) là một thuộc tính vốn có của mỗi một hình, (một vật thể) là một số đo khách quan biểu thị sự "chiếm chỗ" của hình (vật) trong mặt phẳng (trong không gian). Một định nghĩa trực quan, "ngây thơ" như vậy không thỏa mãn những yêu cầu chặt chẽ của toán học hiện đại. Người ta thấy rằng cần phải đưa ra một định nghĩa *có tính chất tiên đề*, nghĩa là sẽ chỉ ra những tính chất "hiển nhiên" mà một diện tích (thể tích) cần phải có.

Giả sử X là một tập hợp điểm nào đó (trong mặt phẳng hay trong không gian). Hai tập con A và B của X được gọi là toàn đẳng với nhau nếu chúng ta có thể nhận được tập này từ tập kia bằng phép tịnh tiến, phép quay hay phép chiếu gương. Điều kiện cần và đủ để các tập A và B toàn đẳng là giữa các điểm của chúng có tồn tại phép tương ứng một – một bảo toàn khoảng cách tức là nếu a_1, a_2 là hai điểm tùy ý của A và b_1, b_2 là hai điểm tương ứng của B thì khoảng cách giữa a_1 và a_2 bằng khoảng cách giữa b_1 và b_2. Để biểu thị hai tập A và B toàn đẳng ta viết $A \simeq B$.

Ta nói rằng trên X có xác định một độ đo m nếu với mỗi tập con A của X được gán cho một số $m(A) \geqslant 0$ gọi là độ đo của tập A sao cho các điều kiện (tiên đề) sau được thỏa mãn :

1) Nếu A được phân hoạch thành n tập con rời nhau

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n.$$

thì $m(A) = m(A_1) + m(A_2) + ... + m(A_n)$

2) Nếu $A \simeq B$ thì $m(A) = m(B)$.

3) Có một tập E nào đó có độ đo bằng 1, $m(E) = 1$. Các điều kiện 1) 2) 3) là các tính chất hiển nhiên của diện tích và thể tích.

Nếu X là mặt phẳng hoặc là một đa tạp hai chiều (như mặt cầu, mặt xuyến...) thì độ đo của tập $A \subset X$ gọi là diện tích của A. Nếu X là không gian ba chiều thì độ đo của A gọi là thể tích của A. Nhà toán học kiệt xuất của Balan (Banắc) (S. Banach) đã chứng minh rằng một độ đo như vậy trên mặt phẳng là tồn tại. Độ đo của mỗi tập A chính là diện tích của tập A hiểu một cách trực quan trước đây. Tuy nhiên nhà toán học Đức Hauxđooc (F. Hausdorff) đã làm sửng sốt giới toán học đương thời bằng việc chỉ ra rằng, *không thể gán diện tích cho một bộ phận của mặt cầu*. Phát hiện của ông dựa trên một ví dụ kì lạ sau đây (do ông xây dựng) : Tồn tại một phép chia mặt cầu thành 3 phần rời nhau A, B, C sao cho $A \simeq B \simeq C$ và $A \simeq B \cup C$. Khi đó nếu tồn tại độ đo m trên mặt cầu thì $m(A) = m(B) = m(C) = 4\pi R^2/3$ (R là bán kính mặt cầu. Mặt khác vì $A \simeq B \cup C$ nên $m(A) = 4\pi R^2/2$. Mâu thuẫn.

Mặt đất chúng ta đang sống là mặt cầu, vậy trên mặt đất có tồn tại những phần không có diện tích ! Đối với trường hợp X là không gian 3 chiều, hai nhà toán học Balan, Banắc và Tacxki (Tarski), đã chứng minh một mệnh đề rất kì lạ, dường như không thể tin được gọi là nghịch lí Banắc – Tarxki như sau : Giả sử ta có hai quả cầu S_1 và S_2. Quả cầu S_1 rất lớn, lớn như mặt trời còn quả cầu S_2 thì bé tí xíu như hạt đậu. Tuy nhiên có tồn tại một cách phân hoạch S_1 và S_2 làm n phần

$$S_1 = A_1 \cup A_2 ... \cup A_n$$

$$S_2 = B_1 \cup B_2 ... \cup B_n$$

sao cho $A_1 \simeq B_1, A_2 \simeq B_2, ..., A_n \simeq B_n$.

Nghĩa là, qua một phép phân hoạch hữu hạn rồi xếp đặt lại mà vẫn giữ nguyên khoảng cách (không nén lại), một vật thể lớn như mặt trời có thể nhét được vào túi áo (!)

Từ định lí này của Banắc – Tarxki ta suy ra *trong không gian có những vật thể không có thể tích*. Thật vậy nếu có thể gán thể tích cho các tập A_i và B_i trong phân hoạch nêu trên thì ta có $m(S_1) = m(S_2)$ hay $R_1 = R_2$ (!) (R_1, R_2 là bán kính của mặt trời và hạt đậu). Điều này vô lí.

Câu chuyện về lí thuyết độ đo còn dài và lí thú song chúng ta tạm dừng ở đây. Nếu các bạn quan tâm, chúng ta sẽ tiếp tục trong những số báo sau.

LÀM QUEN VỚI CÁCH GIẢI TOÁN BẰNG ĐỒ THỊ

ĐẶNG VIỄN

Trong báo Toán học và Tuổi trẻ số 153 (1–1987) bạn Đỗ Bá Khang đã giới thiệu với bạn đọc "Một số khái niệm và bài toán của lí thuyết đồ thị". Trong bài này chúng tôi muốn giới thiệu với bạn đọc một số cách giải một bài toán bằng phương pháp luận của lí thuyết đồ thị.

Bài toán : Một cơ quan cần tuyển 3 người để lập thành một nhóm có đủ năng lực biên dịch các tài liệu từ 6 thứ tiếng Anh, Pháp, Nga, Đức, Trung Quốc và Bồ Đào Nha sang tiếng Việt. Có 7 người đến dự tuyển, trong đó mỗi người đều biết 2 và chỉ 2 trong 6 thứ tiếng đó và bất cứ hai người nào cũng cùng biết nhiều nhất một thứ tiếng chung trong 6 thứ tiếng đó. Biết rằng thứ tiếng nào cũng có ít nhất hai người biết, hỏi có thể xảy ra trường hợp không thể tuyển chọn được như yêu cầu đã nêu không, tại sao ?

(Đề thi học sinh giỏi toán lớp 11 Hà Nội 1987 – 1988)

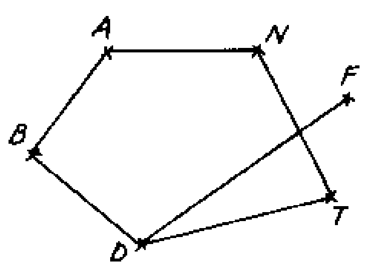
Lời giải. Chuyển sang bài toán đồ thị :

"Cho đồ thị đơn 6 đỉnh (A, F, N, D, T, B) và 7 cạnh, bậc của mỗi đỉnh đều không nhỏ hơn 2. Có thể xảy ra trường hợp không có ba cạnh nào đôi một không kề nhau hay không, tại sao ?"

Ta sẽ trả lời phủ định, nghĩa là luôn luôn tìm được ba cạnh đôi một không kề nhau. Không làm mất tính tổng quát, với mỗi một trường hợp ta chỉ cần nêu một đồ thị đại diện.

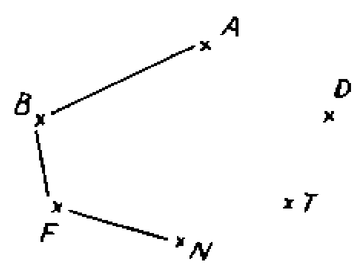
Cách 1. Xét đường đi dài nhất $\mathscr{C}$ (tồn tại, vì đồ thị này hữu hạn). Vì chỉ có 6 đỉnh và đỉnh nào cũng có bậc ≥ 2 nên độ dài l của $\mathscr{C}$ phải thỏa mãn $2 \leq l \leq 5$.

1) $l = 5$. Chỉ việc chọn cạnh thứ nhất, thứ ba, thứ năm. Chẳng hạn, với $\mathscr{C} = AFBDNT$, ta có nghiệm hình là AF, BD, NT.



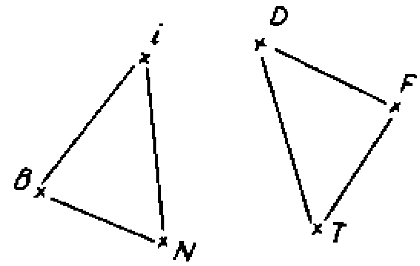
Hình 1

2) $l = 4$. Xét đồ thị h.1 với $\mathscr{C} = NABDT$. Vì $\mathscr{C}$ là đường đi dài nhất nên N, T không kề với đỉnh còn lại F. Hơn nữa, bậc của N, T... đều ≥ 2 (*) nên nếu N, T không kề nhau thì cần thêm ít nhất hai cạnh kề N (hoặc T) mà không kề F và hai cạnh khác kề F. Số cạnh ít nhất là : $4 + 2 + 2 = 8$ (> 7) (!). Vậy N, T kề nhau. Ta chỉ việc chọn một cạnh kề F và hai cạnh thuộc chu trình $NABDTN$ không kề với cạnh vừa chọn. Trong đồ thị h.1 ta có nghiệm hình : FD, BA, NT.



Hình 2

3) $l = 3$. Xét đồ thị h.2 với $\mathscr{C} = ABFN$. Vì A, N không kề với D, T nên có ít nhất một cạnh không thuộc $\mathscr{C}$ kề với A, N. Ngoài ra, nếu D không kề T, cần thêm 4 cạnh kề với D, T và số cạnh ít nhất là $3 + 1 + 4 = 8$ (> 7) (!). Vậy D, T phải kề nhau ; và ta có nghiệm hình : DT, AB, FN.



Hình 3

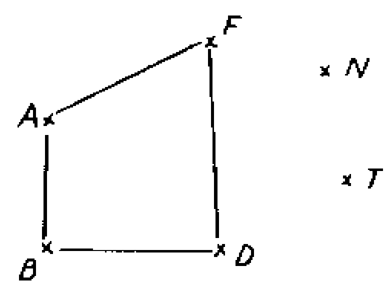
4) $l = 2$. Xét đồ thị h.3 với $\mathscr{C} = ABN$. Để $d(A), d(N) \geq 2$, phải có cạnh AN. Nếu trong các đỉnh còn lại D, F, T mà có đỉnh kề đỉnh nào đó trong A, B, N thì sẽ có đường đi với độ dài ≥ 3, trái điều kiện 4). Vậy ba đỉnh này chỉ nối với nhau và nhiều nhất được 3 cạnh, do đó tổng số cạnh nhiều nhất là 6 (< 7) (!). Vậy không xảy ra.

Và, bài toán đã được giải xong.

Cách 2. Xét chu trình $\mathscr{C}$ với độ dài lớn nhất l (tồn tại, vì số đỉnh nhỏ hơn số cạnh). Ta có : $3 \leq l \leq 6$.

1) $l = 6$. Chỉ việc chọn theo một chiều nhất định các cạnh thứ nhất, thứ ba, thứ năm. Chẳng hạn, với $\mathscr{C} = ABDTNFA$, ta chọn nghiệm hình : AB, DT, NF.

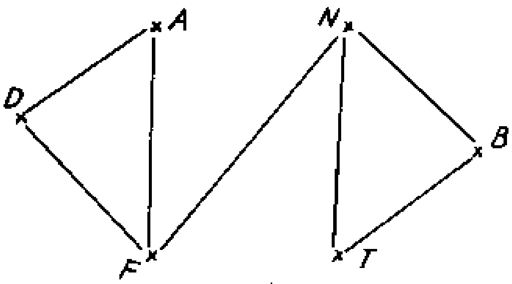
2) $l = 5$. Chỉ việc chọn cạnh kề với đỉnh ngoài chu trình và hai cạnh không kề nó thuộc chu trình. Trong đồ thị h.1, ta có nghiệm : FD, BA, NT.



Hình 4

3) $l = 4$. Xét đồ thị h.4 với $\mathscr{C} = AFDBA$. Nếu N, T không kề nhau thì phải có 4 cạnh kề chúng và số cạnh ít nhất là $4 + 4 = 8$ (> 7) (!). Vậy phải có cạnh NT và ta có nghiệm hình : NT, AF, BD.

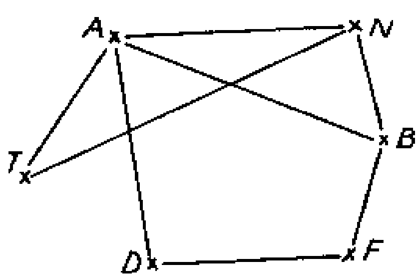
(*) điều này về sau ta không nhắc lại nữa trong các trường hợp tương tự.



Hình 5

4) $l = 3$. Xét đồ thị h.5 với $\mathcal{C} = ADFA$. Nếu có đỉnh nào trong các đỉnh còn lại N, T, B mà kề với hai trong A, D, F thì sẽ tồn tại một chu trình độ dài 4, trái điều kiện 4), do đó, mỗi một trong N, T, B phải kề với ít nhất một trong hai đỉnh còn lại, vì vậy giữa chúng phải có ít nhất hai cạnh, giả sử đó là NT, NB. Nếu B, T không kề thì chúng phải nối với các đỉnh trong A, D, F và tạo ra chu trình với độ dài $\geqslant 4$, trái với điều kiện 4). Vậy phải có cạnh BT và số cạnh đã xét là $3 + 3 = 6$. Còn lại 1 cạnh nối hai đỉnh tương ứng thuộc hai chu trình đã xét. Ta chọn cạnh đó và hai cạnh không kề nó lần lượt thuộc 2 chu trình đó. Trong h.5, ta có nghiệm hình FN, DA, BT. Và bài toán đã được giải xong.

Cách 3. Vì $7 \times 2 = 14 = 6.2 + 2$ nên phải có một đỉnh bậc 4 (hoặc hai đỉnh bậc 3) còn lại toàn đỉnh bậc hai. Hơn nữa, đồ thị này liên thông (ngược lại, nó có ít nhất hai thành phần liên thông, mỗi thành phần có ít nhất 3 đỉnh để mỗi đỉnh có bậc $\geqslant 2$; và số cạnh lớn nhất là $3 + 3 = 6$ (< 7) (!). Xảy ra :

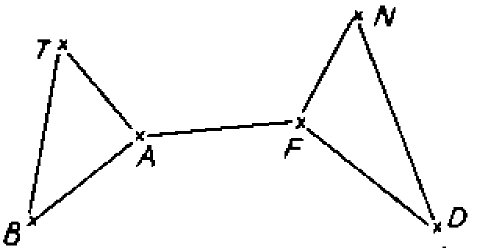


Hình 6

1) Có một đỉnh bậc 4. Trong đồ thị h.6, $d(A) = 4$ với các đỉnh kề A là T, D, B, N. Như thế, đỉnh F không kề A mà kề với 2 trong N, T, D, B và hai đỉnh còn lại phải kề nhau. Chẳng hạn, có FD, FB, NT. Ta chọn nghiệm : NT, AD, FB.

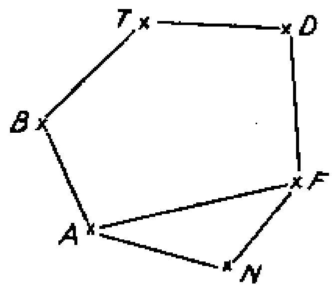
2) Có hai đỉnh bậc ba. Trong các đồ thị h.7, h.8, h.9 ta có $d(A) = d(F) = 3$. Vì đồ thị liên thông nên có ít nhất một đường đi từ A đến F. Tạm bỏ đường đi đó (trừ các đỉnh A, F), có thể xảy ra :

a) Đồ thị không liên thông nữa. Như trên đã nêu, nó phải gồm bởi hai tam giác phân biệt, và đường đi tạm bỏ chỉ gồm bởi 1 cạnh. Ta chọn cạnh đó và 2 cạnh không kề nó lần lượt thuộc hai tam giác trên. Trong h.7, ta có nghiệm AF, BT, ND.

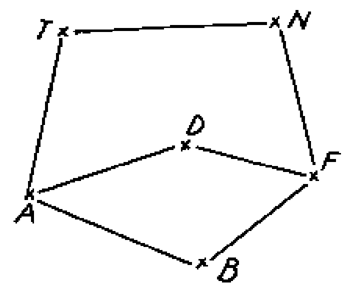


Hình 7

b) Đồ thị vẫn liên thông. Và đó là một chu trình (vì mỗi đỉnh đều bậc 2). Như vậy, có 3 đường đi từ A đến F (1 theo đường tạm bỏ, 2 theo chu trình). Trong ba đường đi này, đường ngắn nhất phải có độ dài 1 (h.8) hoặc



Hình 8



Hình 9

2 (h.9). Trong h.8 ta có chu trình độ dài 6 : $NABTDFN$, chỉ việc chọn theo một chiều nhất định các cạnh thứ nhất, thứ ba, thứ năm và có nghiệm hình : NA, BT, DF. Trong h. 9, ta có chu trình độ dài 5 là $ATNFBA$. Chỉ việc chọn một cạnh thuộc đường đi ngắn nhất và hai cạnh không kề nó thuộc chu trình, chẳng hạn : DA, TN, FB.

Và, bài toán đã được giải xong.

Cách 4. Trước hết, phải có ít nhất một cặp cạnh không kề nhau (ngược lại, ứng với một cạnh A_iA_j nào đó, 4 đỉnh còn lại không nối với nhau mà nối với A_i, A_j bằng 8 cạnh (> 7) (!)). Xảy ra :

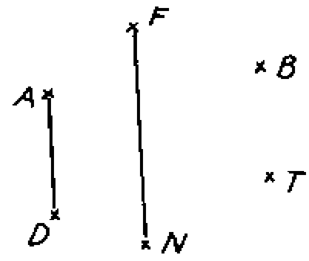
1) Hai đỉnh còn lại kề nhau, ta có ngay nghiệm hình là cạnh kề hai đỉnh này và hai cạnh kia.

2) Hai đỉnh còn lại không kề nhau. Xét đồ thị h.10 với hai cạnh không kề AD, FN. Vì B, T không kề nhau nên có thể xảy ra :

a) B, T tương ứng kề với các đỉnh thuộc cùng 1 cạnh trong AD, FN chẳng hạn, có các cạnh BF, TN, ta chọn 2 cạnh này và cạnh còn lại AD.

b) Không xẩy ra trường hợp 2 a). Giả sử có BF, suy ra không có TN. Vì chỉ có 3 khả năng là TF, TA, TD nên trong hai cạnh kề T phải có ít nhất một trong TA, TD. Giả sử có TD.

α) Có TA. Suy ra không có BD, hơn nữa, không có BA (vì có TD). Vậy phải có BN, và ta có hai tam giác phân biệt BNF, TAD với 6 cạnh. Còn lại 1 cạnh phải nối hai đỉnh nào đó của 2 Δ này. Ta chọn cạnh đó và hai cạnh không kề nó lần lượt thuộc hai tam giác kia. Chẳng hạn, có cạnh AF thì nghiệm hình là : AF, BN, DT.



Hình 10

β) Không có TA. Suy ra có TF, do đó không có BN, mà không có BA (vì có TD) nên phải có BD. Khi này còn một cạnh nữa phải nối hai đỉnh N, A. Ta chọn cạnh NA này và hai cạnh không kề nó là BD, TF.

Và, bài toán đã được giải xong.

SỰ PHÂN BỐ SỐ NGUYÊN TỐ VÀ GIẢ THUYẾT RIMAN

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Số nguyên tố đóng một vai trò quan trọng bậc nhất trong bộ môn số học. Chính vì mọi số tự nhiên đều được phân tích duy nhất thành tích các số nguyên tố nên số nguyên tố được coi như những viên gạch xây nên tòa lâu đài các số, như những hạt cơ bản trong vật lí và những nguyên tố trong hóa học.

Sau khi nhà toán học vĩ đại Ơclit (thế kỉ 3 trước công nguyên) chứng minh rằng có vô số các số nguyên tố, nhiều câu hỏi xung quanh các số nguyên tố đã được nêu ra. Một số các câu hỏi đó (mặc dầu được phát biểu rất đơn giản) đã trở thành những bài toán nổi tiếng trong lịch sử toán học cho đến nay vẫn chưa có lời giải trọn vẹn.

Bài toán nổi tiếng nhất và quan trọng nhất có lẽ là bài toán về sự phân bố các số nguyên tố trong dãy số tự nhiên. Theo dõi dãy số nguyên tố 2, 3, 5, 7, ... các bạn dễ dàng nhận thấy càng đi xa các số nguyên tố càng được gặp thưa thớt hơn. Có những khoảng dài tùy ý trong đó ta không gặp một số nguyên tố nào. Thật vậy với số tự nhiên k bất kì $k - 1$ số liên tiếp $k! + 2, k! + 3, ..., k! + k$ đều là hợp số. Tất nhiên chúng ta phải đi rất xa mới gặp một khoảng dài 1 tỉ gồm toàn những hợp số. Mặt khác các bạn có thể tự chứng minh được trong đoạn $[n, n! + 1]$ có ít nhất một số nguyên tố. Năm 1892 nhà toán học Nga Tsebesep đã chứng minh rằng trong khoảng $[n, 2n]$ chắc chắn có ít nhất một số nguyên tố. Người ta lại thấy có nhiều cặp số nguyên tố cách nhau 2 đơn vị (1, 2 đứng cạnh nhau). Ví dụ (5, 7), (11, 13), 29, 31), (1000000009649, 1000000009651), ... Những cặp này được gọi là cặp số nguyên tố sinh đôi ? Có bao nhiêu cặp số nguyên tố sinh đôi ? Có phải có vô số cặp số nguyên tố sinh đôi không ? Câu hỏi này cho đến nay vẫn chưa được trả lời. Một giải thưởng 25 vạn đôla đang chờ đợi người nào giải được câu đố này.

Như vậy, sự phân bố các số nguyên tố rất phức tạp có vẻ không tuân theo một quy luật nào. Tuy vậy, các nhà toán học của nhiều thời đại vẫn cố gắng hi vọng nắm bắt được một thứ trật tự nào đó trong thế giới các số nguyên tố.

Kí hiệu $\pi(n)$ là số các số nguyên tố không vượt quá n. Trên cơ sở nghiên cứu bảng các số nguyên tố, nhà toán học lỗi lạc Đức Gauss (1777 – 1855) đã dự đoán rằng $\pi(n)$ xấp xỉ bằng $n/\log n$ (ở đây $\log n$ là logarit của n theo cơ số e) tức là $\lim_{n \to \infty} [\pi(n) \log n]/n = 1$.

Dự đoán thiên tài này đã được hai nhà toán học Pháp J.Hadamard và L.V. Poussin chứng minh sau đó vào năm 1896. Chứng minh phải sử dụng đến những công cụ phức tạp của lí thuyết hàm số biến số phức. Thật là một điều lạ lùng ? Các số nguyên tố lại có mối liên hệ chặt chẽ với các số phức và hàm số phức.

Năm 1859, trong một bài báo nhan đề : "Về số các số nguyên tố bé hơn một giá trị đã cho" nhà toán học Đức B.Riman (1826 – 1866) đã đưa ra hàm số đêta $\zeta(s)$ xác định trên tập hợp các số phức. Khi s là số thực lớn hơn 1 thì $\zeta(s)$ có thể viết dưới dạng chuỗi :

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \dots$$

Riman đã chỉ ra rằng có một sự liên hệ chặt chẽ giữa hàm deta và các số nguyên tố. Dáng điệu của hàm deta nói cho ta rất nhiều điều về sự phân bố các số nguyên tố.

Các số phức s mà tại đó $\zeta(s) = 0$ được gọi là các không điểm của $\zeta(s)$. Riman nhận thấy rằng các không điểm mà ông tìm được đều có phần thực là 1/2 (tức là đều có dạng $1/2 + b_i$)

Từ đó ông đã dự đoán rằng điều này phải đúng cho tất cả các không điểm của hàm deta (số không điểm của $\zeta(s)$ là vô hạn). Đó là giả thuyết Riman nổi tiếng. Tại hội nghị toán học thế giới ở Pari năm 1900 Hilbert, nhà toán học vĩ đại nhất lúc bấy giờ, đã đưa giả thuyết Riman vào danh sách 23 bài toán khó nhất của thế kỉ 19 thách thức thế kỉ 20.

Liên quan tới giả thuyết của Riman là giả thuyết Mertens. Gọi $M(n)$ là hiệu giữa số các số tự nhiên bé hơn n là tích của một số chẵn các số nguyên tố khác nhau và số các số tự nhiên bé hơn n là tích của một số lẻ các số nguyên tố khác nhau. Chẳng hạn $M(16) = 1$. Với máy tính bỏ túi các bạn có thể dễ dàng tính được giá trị của $M(n)$ với n đã cho. Nhà toán học Đức Mertens sau khi tính 10000 giá trị của $M(n)$ đã thấy rằng mặc dù dáng điệu của $M(n)$ thay đổi rất lung tung nhưng $M(n)$ luôn bé hơn $\sqrt{n}$. Từ đó ông dự đoán rằng $M(n) < \sqrt{n}$ với mọi n. Đến năm 1963 bằng máy tính người ta đã xác nhận giả thuyết Mertens là đúng cho tất cả n bé hơn 10 tỉ và đã tìm thấy 300 triệu không điểm của hàm dêta, tất cả đều có phần thực là 1/2. Người ta cũng chứng tỏ rằng giả thuyết Mertens đúng sẽ kéo theo giả thuyết Riman đúng.

Mùa xuân năm 1984, 2 nhà toán học A. Odlyzko (Mĩ) và H. Riele (Hà Lan) đã bác bỏ giả thuyết Mertens bằng cách chỉ ra sự tồn tại của một số n mà $M(n) > \sqrt{n}$. *Sự kiện này dẫn tới việc nghi ngờ giả thuyết Riman có thể sai. Nhưng đến tháng 9 năm ấy, một tin vui đã đến với các nhà toán học. Tại trường đại học Tổng hợp Pari nhà toán học Nhật Bản H. Matsumoto đã loan báo rằng ông đã chứng minh thành công được dự đoán của Riman. Như vậy dự đoán thiên tài của Riman sau 125 năm tồn tại đã được xác nhận là đúng. Dư luận Toán học đều nhất trí đánh giá đây là thành tựu toán học lớn nhất của năm 1984.*

HÌNH LỤC GIÁC THẦN KÌ

NGÔ VIỆT TRUNG

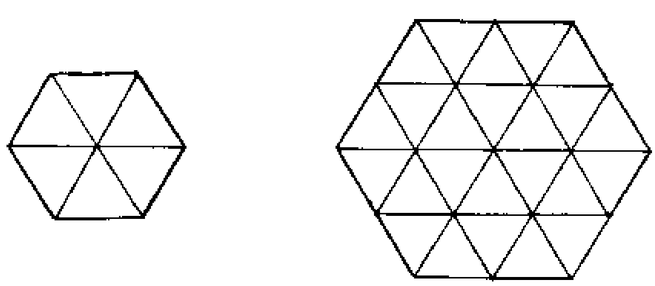
Có lẽ ai yêu thích toán đều biết đến những *hình vuông thần kì*. Đó là những hình vuông gồm $n \times n$ ô vuông nhỏ được đánh số từ 1 đến n^2, sao cho tổng các số trong một dòng, một cột hoặc một đường chéo đều như nhau. Ví dụ như hình vuông sau :

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Hình 1

Nhưng ít người biết đến một khái niệm tương tự là *hình lục giác thần kì*. Thay cho hình vuông ta hãy xét một hình lục giác đều được xếp lại bởi các ô tam giác đều giống nhau và kí hiệu nó là L_n nếu số đỉnh của các ô tam giác trên một cạnh của lục giác là $n + 1$.

Các tam giác nằm hẳn bên trong L_n lại tạo ra một hình lục giác L_{n-1}. Vì vậy, nếu ta gọi a_n là số đỉnh các ô tam giác của L_n thì do $6n$ là số đỉnh nằm trên chu vi của L_n nên $a_n = a_{n-1} + 6n$. Từ đây suy ra



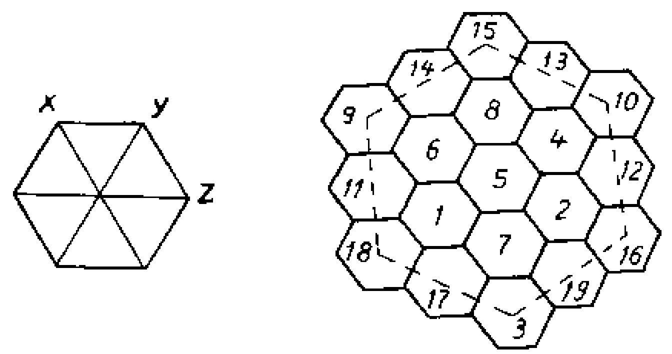
Hình 2

$$a_n = 1 + 6(1 + \ldots + n)$$

$$= 1 + 6\frac{n(n+1)}{2} = 3n^2 + 3n + 1.$$

Vấn đề bây giờ là hãy đánh số các đỉnh của các tam giác từ 1 đến $3n^2 + 3n + 1$ sao cho tổng các số trên các đường thẳng đều như nhau. Một hình lục giác L_n được đánh số như vậy được gọi là một hình lục giác thần kì.

Người đầu tiên nghĩ đến lục giác thần kì có lẽ là C.W. Adams, một nhân viên đường sắt người Anh. Ông bắt đầu tìm một hình lục giác thần kì L_2 từ năm 1910. Trường hợp $n = 1$ không có lời giải vì nếu x, y, z là 3 số ở 3 đỉnh gần nhau của L_1 thì ta phải có $x + y = y + z$ và do đó $x = z$. Thời gian đầu các cố gắng của Adams đã không đạt được kết quả. Ông đã làm 19 quân cờ lục giác con bằng gỗ đánh số từ 1 đến 19 tượng trưng cho 19 đỉnh tam giác của L_2 để có thể dễ dàng sắp xếp thay cho việc điền số.



Hình 3

Ông nghỉ hưu và dành hầu hết thời gian rỗi để tính toán hay nói đúng hơn để xếp sắp các quân cờ lục giác con. Một lần bị ốm và phải đi mổ ở bệnh viện. Tất nhiên ông không quên mang theo các quân cờ của mình. Khi vừa bình phục, ông chơi với các quân cờ và bỗng phát hiện ra một hình lục giác thần kì như trong hình 3. Lúc đó là năm 1957. Ông đã ghi lời giải vào một mảnh giấy, nhưng khi rời bệnh viện ông không nhớ được mình để mảnh giấy ở đâu. Thế là lại bắt đầu một quá trình tìm tòi mới. Có lẽ câu chuyện này sẽ không có, nếu Adams không tìm được mảnh giấy của mình 5 năm sau đó. Một phát minh như vậy không thể để bị lãng quên được. Adams liền gửi ngay lời giải của mình cho M. Gardner, người sáng lập nổi tiếng của một tờ tạp chí khoa học phổ thông. Tất nhiên là Gardner biết đến những hình vuông thần kì cùng vô số các lời giải của chúng (có 880 hình vuông thần kì 16 ô khác nhau). Ông cho rằng lời giải của Adams chỉ là một trong số nhiều lời giải bài toán tìm hình lục giác thần kì mà thôi, nhưng ông không tìm thấy trong các tài liệu toán học bất kì một cái gì nói đến bài toán này. Vì vậy ông đã gửi thư cho C.W. Trigg là một người chuyên về toán học giải trí. Ông này đã tính toán lại và đã chứng minh được rằng chỉ trong trường hợp $n = 2$ mới có hình lục giác thần kì và cũng chỉ có một lời giải trong trường hợp này và đó chính là lời giải của Adams.

Trigg đã thông báo về sự phát hiện của Adams trong tạp chí Toán học giải trí năm 1964. Ngay sau đó người ta biết thêm là có một người Đức đã phát hiện hình lục giác thần kì từ năm 1940 nhưng không công bố kết quả của mình và hình lục giác thần kì đã xuất hiện trong một tạp chí khác năm 1958 mà không kèm theo một lời bình luận nào.

Sau đây là một lời giải đơn giản của một học sinh Mĩ về tính duy nhất của trường hợp $n = 2$. Hãy gọi S là tổng các số trên một đường thẳng của một hình lục giác thần kì L_n. Chú ý rằng có $2n + 1$ đường thẳng song song theo một hướng nào đó và đỉnh các tam giác của L_n lần lượt nằm trên các đường thẳng này, ta có :

$$(2n + 1)S = 1 + 2 + ... + (3n^2 + 3n + 1)$$
$$= \frac{1}{2}(3n^2 + 3n + 1)(3n^2 + 3n + 2)$$

Từ đây suy ra $2n + 1$ là ước của $(3n^2 + 3n + 1) \times (3n^2 + 3n + 2)$ và do đó cũng là ước của $n^2(n^2 + 1)$ vì :

$$3n^2 + 3n + 1 = (2n + 1)(n + 1) + n^2$$

Mặt khác, n^2 và $2n + 1$ là các số nguyên tố cùng nhau vì

$$4n^2 - (2n + 1)(2n - 1) = 1.$$

Do đó $2n + 1$ là ước của $n^2 + 1$. Từ đẳng thức

$$4(n^2 + 1) = (2n + 1)(2n - 1) + 5$$

suy ra $2n + 1$ là ước của 5 và vì vậy ta phải có $n = 2$.

Để chứng minh rằng chỉ có một hình lục giác thần kì trong trường hợp $n = 2$, người ta bắt buộc phải tiến hành thử các cách điền số khác nhau. Tất nhiên có thể giảm số lần thử bằng cách tìm ra một số quy tắc nào đó. Các bạn hãy thử suy luận để chứng minh rằng các điểm ở chu vi của hình lục giác L_2 không bao giờ nhận giá trị 1 hoặc 2 và tâm điểm của điểm L_2 phải nhận một giá trị nhỏ hơn 9. Với những quy tắc như vậy, cũng em học sinh Mĩ nói trên đã quy bài toán tìm một hình lục giác thần kì L_2 về việc xét 70 kiểu sắp số khác nhau và đã đưa cho máy tính thử các kiểu sắp xếp đó. Sau 17 giây máy tính đã đưa ra một lời giải duy nhất và đó là lời giải mà Adams đã phải mất 47 năm mới tìm ra được.

ĐỊNH LÍ BRAOE VỀ ĐIỂM BẤT ĐỘNG

HOÀNG ĐỨC TÂN

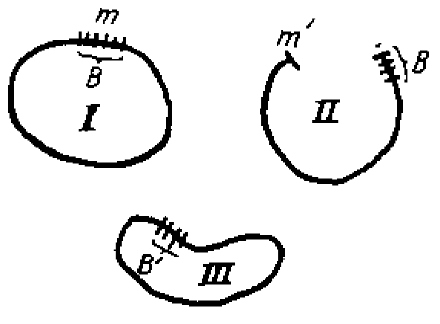
Trong phạm vi bài báo này, chúng tôi xin giới thiệu với bạn đọc báo Toán học và tuổi trẻ một định lí nổi tiếng, mà nó có rất nhiều ứng dụng trong toán học. Trước hết, chúng ta hãy làm quen với một số khái niệm cần thiết !

1) Một *ánh xạ* từ hình A vào hình A' là quy luật mà theo đó mỗi một điểm m của hình A được ứng với một điểm m' xác định của hình A'. Điểm m' được gọi là *ảnh* của m, còn m được gọi là *tạo ảnh* của m'.

2) Ánh xạ hình A vào hình A' được gọi là liên tục tại điểm $m \in A$, nếu như một tập hợp điểm bất kì của A chứa các điểm khá gần điểm m được chuyển thành tập hợp điểm của hình A' cũng chứa các điểm khá gần điểm m'. Một ánh xạ toàn bộ hình A vào hình A' được gọi là liên tục, nếu như nó liên tục tại mọi điểm của hình A.

Xét một ví dụ minh họa cho khái niệm 2). Có 1 vòng dây cao su (I) chứa điểm m, và bộ phận B (phần gạch gạch) là gần điểm m. Ánh xạ là một phép biến dạng vòng dây (I). Phép biến đổi từ (I) sang (III) là liên tục tại m (vì sau phép biến dạng thì tập B' vẫn gần m'), còn phép biến đổi từ (I) sang (II) là không liên tục tại m (vì sau phép biến dạng đó vòng dây cao su (I) đã bị đứt tại điểm m và do đó tập hợp B' không còn gần điểm m' nữa).

Sau đây ta sẽ xét tới một kết quả quan trọng của giải tích toán học.



Hình 1

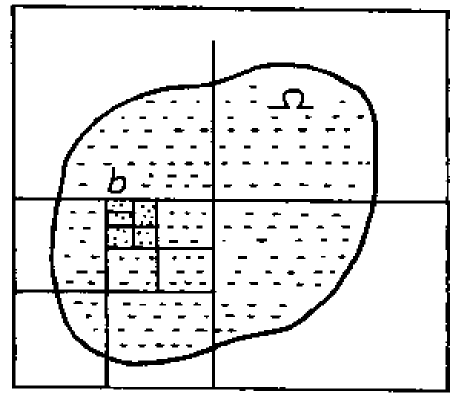
Bổ đề Vaiectrass :

Giả sử ứng với mỗi điểm của miền hữu hạn Ω nào đó của mặt phẳng, kể cả biên của miền Ω (chẳng hạn, một hình tròn) có một đại lượng f nào đấy hoàn toàn xác định, và thêm nữa nếu ta lấy một điểm a bất kì trong số các điểm của miền Ω thì dù cho η là một số dương nhỏ thế nào đi chăng nữa ta vẫn tìm được một số $\varepsilon > 0$ khá bé sao cho hiệu số hai giá trị của f tại các điểm a và b ($\in \Omega$) bất kì sát với a một khoảng cách ε, về giá trị tuyệt đối là thỏa mãn điều kiện : $|f_a - f_b| < \eta$ (ở đây kí hiệu fx là giá trị của f tại điểm x). Khi đó ta sẽ nói rằng đại lượng f là hàm liên tục của các điểm trong miền kín Ω. Với khái niệm đó, Vaiectrass đã kết luận rằng :

Bổ đề : Nếu trên Ω đại lượng f khắp nơi không âm và trên Ω f là tùy ý bé thì thế nào cũng tồn tại một điểm $a \in \Omega$ mà tại đó f đúng bằng 0.

Chứng minh : Vì Ω là miền hữu hạn, kín nên ta có thể phủ được Ω bởi một hình vuông nào đó. Ta chia hình vuông đó thành 4 hình vuông con bằng nhau (xem hình 2).

Thế nào cũng có một trong các hình vuông con chứa các điểm thuộc Ω mà tại đó f là bé tùy ý, bởi vì nếu không có các điểm như vậy ở mỗi trong các hình vuông con thì chúng sẽ không tồn tại trên cả hình vuông to và vì thế trong cả miền Ω và điều đó là trái với giả thiết. Bây giờ ta lấy một cái nào đó



Hình 2

trong các hình vuông con mà có chứa các điểm như vậy và ta lại chia nó thành 4 hình vuông con bằng nhau nhỏ hơn nữa v.v... Và như vậy là ta nhận được một dãy vô hạn các hình vuông con ngày càng bé dần đi, và mỗi hình vuông con là được chứa trong tất cả các hình vuông trước nó và mỗi hình vuông trong dãy đều chứa những điểm mà tại đó f là tùy ý bé. Dãy các hình vuông này sẽ thu dần về điểm b của miền Ω. Ta sẽ chứng minh rằng tại điểm b thì $f = 0$. Thật thế, vì $b \in \Omega$ nên tại b thì f_b hoàn toàn xác định, theo giả thiết $f_b \geqslant 0$ (vì f khắp nơi không âm trên Ω). Giả sử rằng $f_b > 0$. Khi đó theo lập luận ở trên trong một hình vuông rất bé chứa điểm b sẽ có những điểm mà tại đó f là tùy ý bé, giả thử 1 điểm trong số các điểm đó là $c \in \Omega$ sao cho $f_c = (1/2)f_b$ chẳng hạn, khi đó $|f_b - f_c| = (1/2)f_b > 0$ là 1 số dương xác định, không phải bé tùy ý và điều đó là mâu thuẫn với tính chất liên tục của hàm f trên các điểm của miền kín Ω. Vì thế mà ta phải có $f_b = 0$.

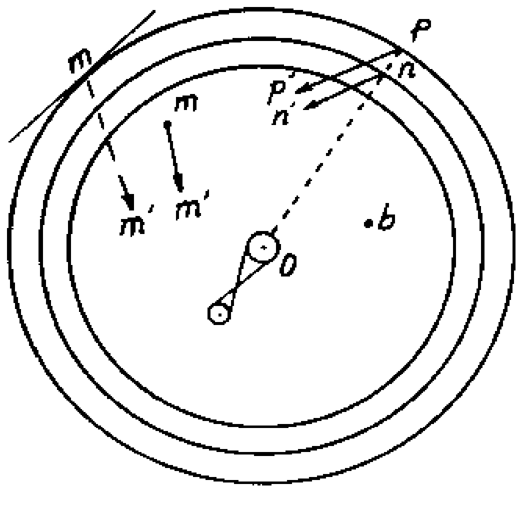
Bổ đề được chứng minh xong.

Bây giờ ta sẽ chứng minh định lí nổi tiếng của Brao.

Định lí Braoe (năm 1913) : Khi ánh xạ liên tục tập hợp tất cả các điểm của hình tròn (gồm cả các điểm ở trên biên) lên các điểm của cả hình tròn hoặc một phần của hình tròn, thế nào cũng có một điểm ở nguyên chỗ cũ, tức là được ánh xạ lên chính nó (hình 3).

Chứng minh :

Giả sử m là các điểm của hình tròn và m' là các ảnh của chúng. Ta xét các vectơ rời chỗ $\overrightarrow{mm'}$. Nếu chúng ta chứng minh được



Hình 3

rằng trong số các vectơ $\overrightarrow{mm'}$ có những véctơ ngắn tùy ý thì định lí Braoe được chứng minh. Thật vậy, do tính chất liên tục của ánh xạ mà chiều dài của các véctơ $\overrightarrow{mm'}$ thay đổi một cách liên tục khi các điểm m chuyển động liên tục trong hình tròn (bởi vì khi đó cả điểm m' cũng di chuyển liên tục). Ứng với mỗi điểm m ta cho độ dài f của véctơ dịch chuyển $\overrightarrow{mm'}$. Ta thấy giống như trường hợp của bổ đề Vaiectrass : f là hàm liên tục của điểm m, mọi f đều không âm và có những f tùy ý bé. Khi đó sẽ tồn tại điểm b mà ứng với nó $f = 0$, tức là độ dài của $\overrightarrow{mm'}$ bằng 0. Và vì thế trong phép ánh xạ mà ta xét điểm b được ánh xạ lên chính nó và định lí đã được chứng minh xong.

Vậy ta phải chứng minh : trong số các véctơ $\overrightarrow{mm'}$ có những véctơ ngắn tùy ý. Điều đo tức là phải chứng minh rằng : chiều dài của tất cả các véctơ $\overrightarrow{mm'}$ không thể lớn hơn bất kì một hằng số dương ε nào là đủ. Giả thử ta có điều trái lại, tức là tất cả các véctơ $\overrightarrow{mm'}$ đó đều có chiều dài lớn hơn ε. Ta chứng minh rằng điều này là không thể xảy ra được.

Ta cho điểm m đi một vòng trên vòng tròn biên của hình tròn. Véctơ $\overrightarrow{mm'}$ sẽ đi từ điểm m tới điểm m' nào đó thuộc hình tròn, tức là lúc nào dó cũng nằm về một phía của tiếp tuyến với đường tròn tại điểm m mà cả hình tròn cũng nằm về phía đó. Do dó khi m di vòng quanh như vậy trên dường tròn của hình tròn thì véctơ $\overrightarrow{mm'}$ (có độ dài không nhỏ thua ε), góc của nó hợp với tiếp tuyến sẽ biến đổi một cách liên tục và cho tới khi nó trở về tới vị trí ban đầu thì nó đã quay tất cả là 360°. Vẫn quan sát trên hình 3. Bây giờ ta cho điểm m đi vòng tròn đường tròn đồng tâm mà bán kính của nó bé hơn bán kính đường tròn rất ít.

Gọi p là điểm nằm trên đường tròn trước sao cho p, n và tâm ϕ của hình tròn là thẳng hàng. Khi đó do tính chất liên tục của ánh xạ (và độ dài của véctơ dịch chuyển không nhỏ thua ε (mà góc của véctơ $\overrightarrow{mm'}$ hợp với pp' tương ứng sẽ thay đổi một cách liên tục và rất ít (do p và n rất gần nhau), và do đó tức là khi trở về vị trí ban đầu thì $\overrightarrow{nn'}$ đã quay một góc 360°. Chuyển liên tiếp như vậy sang các vòng tròn đồng tâm liền gần và bé hơn, ta cũng thấy rằng những véctơ ứng với điểm n sau khi đi đủ một vòng sẽ quay một góc 360°. Thêm nữa, nếu xung quanh tâm của hình tròn ta lấy 1 đường tròn rất bé (bán kính nhỏ hơn ε rất nhiều) thì khi điểm n di một vòng trên đường tròn này rõ ràng nó được quay một góc bằng 0, bởi vì điểm gốc của nó luôn luôn nằm trên vòng tròn bé nhỏ này và do độ dài véctơ dịch chuyển $\overrightarrow{nn'}$ không nhỏ thua ε nên đầu mút của nó trong một miền bé ở phía hên ngoài của vòng tròn bé nhỏ đó. Đó là điều mâu thuẫn. Vì thế các độ dài f của tất cả các véctơ dịch chuyển không thể lớn hơn hằng số $\varepsilon > 0$ bất kì được. Tức là trong chúng có những véctơ ngắn tùy ý. Chính vì thế mà định lí Braoe đã được chứng minh.

Định lí Braoe đã cho ta một kết luận kì diệu về tính chất hình học, nếu bạn đọc coi hình tròn là một màng cao su và ánh xạ liên tục là phép biến dạng liên tục màng cao su đó (màng cao su không có những lỗ thủng) một cách tùy tiện miễn là không được làm rách màng hay làm chúng dính lại, khi đó vẫn có kết luận của định lí (chú ý là màng cao su và cả phép biến dạng là phải làm trên cùng một mặt phẳng).

Có rất nhiều cách chứng minh cho định lí kì lạ này, song có lẽ cách chứng minh giới thiệu ở đây là đơn giản và dễ hiểu nhất.

VÀI SUY DIỄN TỪ BẤT ĐẲNG THỨC CÔ SI

TẠ VĂN TỰ

Với n số thực không âm $a_1, a_2, ..., a_n$ ta có bất đẳng thức sau :

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n} \qquad (1)$$

Bất đẳng thức (1) quen thuộc được gọi là bất đẳng thức Côsi cho n số không âm. Bây giờ ta gọi P_k là tích tất cả các tổng k số hạng từ n số $a_1, ... a_n$. Khi đó ta có : $P_1 = a_1 a_2 ... a_n$; $P_2 = (a_1 + a_2) ...$ $(a_1 + a_n)(a_2 + a_3) ... (a_{n-1} + a_n)$; ... ; $P_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$. Với các kí hiệu này, bất đẳng thức (1) được viết dưới dạng : $P_n/n \geqslant \sqrt[n]{P_1}$, và biểu thị mối liên hệ giữa hai số P_1s với P_n. Từ đó, nảy ra vấn đề rộng hơn là nghiên cứu mối liên hệ giữa các số P_i, $i = 1, 2, ..., n$, với nhau ! Để giải quyết vấn đề này, trước tiên ta xét mối quan hệ giữa P_k và P_{k-1} với $k = 2, 3, ..., n$ và mối quan hệ cần tìm được chỉ ra ở định lí dưới đây.

Định lí : Với n số không âm $a_1, a_2, ..., a_n$ ta có bất đẳng thức :

$$\left(\frac{k-1}{k}\right)^{C_n^k} P_k \geqslant P_{k-1}^{\frac{n-k+1}{k}}$$

trong đó C_n^k là tổ hợp chập k của n $(C_n^k = \frac{a!}{k!(n-k)!}$ và $2 \leqslant k \leqslant n$.

Chứng minh : Theo định nghĩa về P_k ta thấy P_k có C_n^k thừa số, mỗi thừa số là 1 tổng k số hạng mà tập hợp k số hạng này là một tập hợp con k phần tử trong n phần tử $a_1, a_2, ..., a_n$. Với tập hợp con thứ i là $\left\{a_{i_1}, ..., a_{i_k}\right\}$ của tập hợp $\left\{a_1, ..., a_n\right\}$ ta đặt $T_i = a_{i_1} + a_{i_2} + ... + a_{i_k}$ và viết được $P_k = T_1 T_2 ... T_N$ với $N = C_n^k$. Gọi H_j^i là tổng $k - 1$ số hạng thu được từ tổng T_i bỏ đi số hạng a_{i_j} với $j = 1, 2, ..., k$. Ta dễ dàng có $H_1^i + H_2^i + ... + H_k^i = (k-1) \times$ $\times (a_{i_1} + ... + a_{i_k} = (k-1)T_i$. Nhưng theo bất đẳng thức Côsi :

$$H_1^i + H_2^i + ... + H_k^i \geqslant k \sqrt[k]{H_1^i H_2^i ... H_k^k}$$

nên $T_i \geqslant \frac{k}{k-1} \sqrt[k]{H_1^i H_2^i ... H_k^i}$. Vậy

$$P_k = T_1 T_2 ... T_N \geqslant \prod_{i=1}^{N} \left(\frac{k}{k-1} \sqrt[k]{H_1^i H_2^i ... H_k^i}\right)$$

$$= \left(\frac{k}{k-1)}\right)^N \prod_{i=1}^{N} \sqrt[k]{H_1^i H_2^i ... H_k^i}, \text{ tức là có}$$

$$\left(\frac{k-1}{k}\right)^{C_n^k} P_k \geqslant \prod_{i=1} \sqrt[k]{H_1^i H_2^i ... H_k^i} \qquad (3)$$

trong đó kí hiệu $\prod_{i=1}^{m} x_i = x_1 x_2 ... x_m$. Trước khi chứng minh tiếp định lí ta chứng minh bổ đề sau :

Bổ đề : 1) Thừa số bất kì của P_{k-1} là phần tử của tập hợp các tổng H_j^i với $i = 1, 2, ..., N$ và $j = 1, 2, ..., k$.

2) Thừa số bất kì của P_{k-1} xuất hiện $(n - k + 1)$ lần trong tập hợp các tổng H_j^i ở trên.

Thực vậy, gọi $B = al_1 + ... + al_{k-1}$ là thừa số bất kì của P_{k-1}. Với số al_k khác, ta lập tổng :

$S = al_1 + al_2 + ... + al_{k-1} = B + al_k$. Do các số $al_1, ..., al_k$ là tập hợp gồm k phần tử trong n số $a_1, ..., a_n$, nên tổng S là một thừa số của P_k. Vậy, theo định nghĩa của H_j^i, hiển nhiên B là một phần tử của tập hợp $\left\{H_j^i\right\}$, $i = 1, ..., N$; $j = 1, 2, ..., k$ và phần 1 của bổ đề được chứng minh.

Lại xét với thừa số bất kì $B = al_1 + ... + al_{k-1}$ của P_{k-1}. Rõ ràng thừa số B xuất hiện đúng 1 lần và chỉ xuất hiện trong các tổng H_j^i được xây dựng từ các tổng S được xác định như trên. Nhưng do có $n - (k-1) = n - k + 1$ số al_k khác các số $al_1, al_2, ..., al_{k-1}$ trong n số $a_1, a_2, ..., a_n$ nên có thể có $(n-k+1)$ tổng S có dạng trên. Vì thế thừa số B được xuất hiện đúng $(n-k+1)$ lần trong các tổng H_j^i, $i = 1, 2, ..., N$ và $j = 1, ..., k$. Bổ đề đã được chứng minh xong.

Trở lại việc chứng minh định lí. Theo bổ đề và với chú ý số thừa số của P_{k-1} là C_n^{k-1} và ? ? ? hệ thức $k C_n^k = (n-k+1)\, C_n^{k-1}$ do đó tập hợp $\{H_j^i\}$ nói trên chỉ chứa các thừa số của P_{k-1} nên ta có :

$$H_1^i H_2^i \dots H_k^i = P_{k-1}^{n-k+1}$$

và theo (3) ta có

$$\left(\frac{k-1}{k}\right)^{C_n^k} P_k \geqslant P_{k-1}^{\frac{n-k+1}{k-1}}$$

và định lí cũng được chứng minh xong.

Từ định lí ta suy ra được mối quan hệ giữa các P_k, $k = 1, ..., n$ với nhau. Chẳng hạn cần so sánh P_k và P_{k-2}. Từ (2) suy ra :

$$P_k \geqslant \left(\frac{k}{k-1}\right)^{C_n^k} P_{k-1}^{\frac{n-k+1}{k}}$$

và tương tự ta có

$$P_{k-1} \geqslant \left(\frac{k-1}{k-2}\right)^{C_n^{k-1}} P_{k-2}^{\frac{n-k+2}{k-1}}. \text{ Vậy}$$

$$P_k \geqslant \left(\frac{k}{k-1}\right)^{C_n^k} \left(\frac{k-1}{k-2}\right)^{\frac{n-k+1}{k} C_n^{k-1}} P_{k-2}^{\frac{(n-k+1)(n-k+2)}{k(k-1)}}.$$

Do $\frac{n-k+1}{k} C_n^{k-1} = C_n^k$ nên

$$P_k \geqslant \left(\frac{k}{k-2}\right)^{C_n^k} P_{k-2}^{\frac{(n-k+1)(n-k+2)}{k(k-1)}}$$

Tương tự, giữa P_k và P_{k-3} ta có

$$P_k \geqslant \left(\frac{k}{k-3}\right)^{C_n^k} P_{k-3}^{\frac{(n-k+1)(n-k+2)(a-k+3)}{k(k-1)(k-2)}}$$

giữa P_k và B_1 ta có :

$$B_k \geqslant k^{C_n^k} P_1^{C_n^k/n}$$

Lại so sánh P_k với P_{k+1}. Từ (2) thay k ? ? ? $(k+1)$ và chú ý :

$$\frac{k+1}{n-k} C_n^{k+1} = C_n^k, \text{ ta có}$$

$$\left(\frac{k}{k+1}\right)^{C_k^k} P_{k+1}^{\frac{k+1}{n-k}} \geqslant P_k.$$

Kéo dài quá trình tương tự này, giữa P_k và P_n ta có :

$$\left(\frac{k}{n}\right)^{C_n^k} P_n^{C_n^k} \geqslant P_k. \qquad (5)$$

Kết hợp (4) với (5) ta thu được kết quả sau :

$$\left(\frac{k}{n}\right)^{C_n^k} P_n^{C_n^k} \geqslant P_k \geqslant k^{C_n^k} P_1^{C_n^k/n}$$

Từ đó ta đi đến :

$$\frac{1}{n} P_n \geqslant \frac{1}{k} P_k^{1/C_n^k} \geqslant P_1^{1/n}$$

hay rõ hơn :

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geqslant \frac{1}{k} P_k^{1/C_n^k} \geqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}. \qquad (6)$$

Do bất đẳng thức Côsi được ứng dụng hiệu quả cho nhiều bài toán nên có vấn đề đặt ra là cần tìm các bất đẳng thức biểu thị mối quan hệ chặt chẽ hơn bất đẳng thức Côsi với hi vọng các bất đẳng thức mới này cho ứng dụng hiệu quả hơn, mạnh hơn so với bất đẳng thức Côsi. Một điều rất thú vị là, từ (6) rõ ràng ta có ngay hai bất đẳng thức :

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geqslant \frac{1}{k} P_k^{1/C_n^k}$$

và $$\frac{1}{k} P_k^{1/C_n^k} \geqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$$

với mọi $k = 1, 2, ..., n$, biểu thị mối quan hệ chặt chẽ hơn bất đẳng thức Côsi cho n số không âm.

KHÁI NIỆM XÁC SUẤT

TRẦN VINH HIỀN
Đại học Tổng hợp

Trên thực tế chúng ta thường gặp trường hợp là sau khi thực hiện một số các điều kiện nào đó thì có thể thu được kết quả này hoặc kết quả khác mà ta không tài nào đoán trước được. Thí dụ : khi ta tung ngẫu nhiên một đồng xu thì ta không biết trước được mặt nào của đồng xu sẽ nằm trên, vì điều đó phụ thuộc vào vô số các yếu tố mà ta không biết hoặc không thể nào tính đến được, chẳng hạn, chuyển động của tay lúc tung đồng xu, ảnh hưởng của không khí, vị trí đồng xu khi sắp được tung ra, v.v... Kết quả của một cuộc xổ số có thể trúng vào một vé bất kì ; trong phép đo nhiều lần một đại lượng vật lí ta phạm những sai số khác nhau ; trong sự sản xuất hàng loạt, các sản phẩm không bao giờ trùng nhau hoàn toàn (thí dụ trong việc sản xuất bóng đèn đêm, thời gian dùng được của mỗi bóng đèn khác nhau) ; khi ta bắn bia khó lòng mà tất cả các viên đạn đều trúng đúng vào tâm. Trên đây là những thí dụ về hiện tượng ngẫu nhiên ; có thể dẫn ra vô số thí dụ tương tự như vậy.

Nếu khi thực hiện một nhóm các điều kiện nhất định, một biến cố nào đó có thể xảy ra hoặc không xảy ra thì biến cố ấy được gọi là biến cố ngẫu nhiên. Có phải chăng giữa biến cố ngẫu nhiên và nhóm các điều kiện được thực hiện không có một mối liên hệ có tính quy luật nào cả ? Đã từ lâu người ta nhận thấy rằng nếu tung khá nhiều lần đồng xu (không méo) thì tỉ số lần xuất hiện mặt ngửa trên tổng số lần tung khá ổn định và xấp xỉ $\frac{1}{2}$. Nói chung, trong rất nhiều trường hợp khi thực hiện nhiều lần một nhóm các điều kiện nhất định, *tần số*[1] xuất hiện biến cố ngẫu nhiên có khuynh hướng tụ tập chung quanh một số p nào đó, khuynh hướng ấy càng rõ khi n càng tăng. Trong những trường hợp như vậy đối với biến cố ngẫu nhiên A ta không những chỉ có thể nói đến tính ngẫu nhiên của nó mà còn có thể đánh giá khả năng xuất hiện của nó bằng số p gọi là "*xác suất* xuất hiện biến cố A, khi thực hiện nhóm các điều kiện nói trên".

Trong môn toán học xác suất khái niệm xác suất được xem là một khái niệm cơ bản mà không định nghĩa, nó chỉ được xác định qua một hệ thống tiên đề giống như khái niệm đường thẳng trong hình học vậy. Ở đây, nói cho đúng hơn, chỉ cho một sự hình dung thực tế về khái niệm xác suất toán học, chẳng khác gì ta hình dung đường thẳng là một sợi chỉ (không có bề dày) được căng ra và kéo dài ra vô hạn.

Giả thiết về sự tồn tại xác suất (tức là con số mà tần số nói chung có khuynh hướng tụ tập dần đến nó khi n tăng) được xác nhận trên một số rất lớn những hiện tượng. Những hiện tượng như thế được gọi là những *hiện tượng xác suất* và môn toán học nghiên cứu các quy luật chi phối các hiện tượng xác suất được gọi là môn xác suất.

Mặt khác, sự tồn tại xác suất p đối với từng trường hợp riêng biệt cần được kiểm nghiệm thích đáng. Nghiên cứu phương pháp kiểm nghiệm đó là một trong những nhiệm vụ của môn *toán học thống kê*. Tuy nhiên việc kiểm nghiệm đó thường rất cồng kềnh, trong nhiều trường hợp giả thiết về sự tồn tại xác suất p của biến cố ngẫu nhiên được đưa ra dựa trên cơ sở sự hình dung về "tính đối xứng", về sự "đồng khả năng". Thí dụ : Tính đối xứng của đồng xu (không méo) cho ta cơ sở để giả thiết rằng xác suất xuất hiện mặt ngửa của nó bằng $\frac{1}{2}$.

Rõ ràng xác suất là một số không âm và không lớn hơn 1, xác suất càng lớn thì khả năng xuất hiện của biến cố càng tăng ; xác suất của biến cố không thể xảy ra thì bằng không và xác suất của biến cố chắc chắn xảy ra bằng 1 (chú ý là ở đây mệnh đề ngược lại nói chung không đúng).

Việc nghiên cứu những hiện tượng chịu sự chi phối của quy luật xác suất là một yêu cầu bức thiết của đời sống và khoa học. Lí thuyết xác suất ngày nay đang được phát triển rất mạnh trên nhiều nước, đặc biệt là những nước có nền khoa học kĩ thuật tiên tiến. Nó được ứng dụng rất có hiệu quả trong kinh tế (để tổ chức quá trình sản xuất, kiểm tra sản phẩm điều tra thiên nhiên và dân cư, dự báo thời tiết, v.v...), trong quân sự (lí thuyết bắn, lí thuyết thông tin v.v...). Kinh tế ngày càng phát triển, sự sản xuất hàng loạt và kĩ thuật tự động ngày càng phổ biến thì vai trò của lí thuyết xác suất ngày càng quan trọng. Lí thuyết xác suất đã là công cụ rất mạnh mẽ và không thể thiếu được của vật lí học, hóa học khi các khoa học đó đi sâu vào thế giới đầy sự ngẫu nhiên của phân tử, nguyên tử v.v... Lí thuyết xác suất cũng đã giúp cho y học, sinh vật học hiện đại cùng nhiều ngành khoa học khác đạt được những thành tựu xuất sắc.

Trong phạm vi bài báo này chỉ có thể sơ bộ giới thiệu với các bạn về khái niệm xác suất chứ không thể nào nói lên được nội dung phương hướng (dù chỉ là những điểm chủ yếu) và những ứng dụng to lớn của môn toán học phong phú như lí thuyết xác suất.

Bài toán săn thú.

a) Hai người đi săn độc lập với nhau đồng thời bắn vào một con thú. Giả thiết rằng : với khoảng cách như vậy, thông thường mỗi một trong hai người bắn trúng thú một trong ba trường hợp. Tính xác suất để con thú bị bắn trúng trong trường hợp này.

b) Giải bài toán với trường hợp ba người đi săn.

c) Giải bài toán với trường hợp n người đi săn.

(Nếu ở đây thay người đi săn bằng chiến sĩ phòng không và con thú bằng chiếc máy bay địch thì ta có bài toán săn máy bay).

Lời giải :

a) Để tính xác suất ta có thể thay hai người đi săn bằng hai người rút vé. Có hai chiếc hộp, mỗi hộp đựng 2 vé có ghi chữ S (S là viết tắt chữ sai) và 1 vé ghi chữ T (trúng). Hai người rút hú họa một cách độc lập với nhau từ trong hai hộp ra một chiếc vé. Chữ T tương ứng với trường hợp con thú bị bắn trúng, còn chữ S tương ứng với trường hợp ngược lại. Ta kết hợp 3 "kết cục có thể" *) (hai kết cục cho chữ S và một kết cục cho chữ T) của người thứ nhất với 3 "kết cục có thể" của người thứ hai, ta sẽ có tất cả 9 kết cục sau**) :

SS	*SS*	*ST*
SS	*SS*	*ST*
TS	*TS*	*TT*

Rõ ràng là 9 kết cục này có khả năng xảy ra đồng đều như nhau (không thiên vị một kết cục nào). Mà trong 9 "kết cục có thể" đó chỉ 5 kết cục có chứa chữ T (tức 5 kết cục ứng với trường hợp con thú bị bắn trúng) như vậy xác suất phải tìm là $\frac{5}{9}$.

b) Xét trường hợp ba người đi săn – ta cũng thay ba người đi săn bằng ba người rút vé, trường hợp này có tất cả 27 kết cục có thể và đồng khả năng (kết hợp 9 kết cục trên với 3 "kết cục có thể" của người thứ ba). Ta tính số kết cục có chứa chữ T. Số kết cục có chứa chữ T trong hai chữ đầu là $5 \times 3 = 15$ (kết hợp 5 kết cục chứa chữ T trong phần a) với 3 kết cục có thể của người thứ ba) còn số kết cục mà chữ T chỉ đứng sau cùng là 4 (kết hợp 4 kết cục không chứa chữ T trong phần a) với kết cục T của người thứ ba). Vậy trong 27 "kết cục có thể" và đồng khả năng ở trên có 15 + 4 kết cục ứng với trường hợp con thú bị bắn trúng. Xác suất phải tìm là $\frac{19}{27}$.

c) Trong trường hợp có n người đi săn cùng bắn một lúc vào con thú, cũng tương tự như các trường hợp a, b ta dễ dàng thấy là có 3^n "kết cục có thể" và đồng khả năng. Tuy nhiên việc tính số các kết cục có chứa chữ T sẽ phức tạp hơn nhiều. Ta có thể làm một cách đơn giản hơn là tính số các kết cục

(1) Giả sử ta thực hiện n lần nhóm các điều kiện nói trên. Ta kí hiệu số lần xuất hiện biến cố ngẫu nhiên A – biến cố mà ta theo dõi – là n_A, khi đó $\frac{n_A}{n}$ được gọi là tần số xuất hiện biến cố A. Thí dụ nếu ta tung một đồng xu (không méo) 100 lần mà mặt ngửa xuất hiện 54 lần thì ta nói tần số xuất hiện mặt ngửa là 54/100.

*) Ở đây trong mỗi hộp có 3 chiếc vé, mỗi chiếc vé đều có thể được rút ra, vì vậy kết quả rút vé của mỗi người có thể rơi vào một trong ba trường hợp : hai trường hợp cho chữ S và một trường hợp cho chữ T. Ta gọi ba trường hợp đó là 3 "kết cục có thể" trong việc rút vé của mỗi người riêng biệt.

**) Ở đây ta xét việc rút vé của cả hai người, chữ *ST* chẳng hạn là ứng với kết cục trong đó người thứ nhất rút trúng chữ S, người thứ hai rút trúng chữ T.

ứng với việc cả ba người đều bắn sai. Trong 3^n "kết cục có thể", rõ ràng số kết cục ứng với người thứ nhất bắn sai bằng $\frac{2}{3}.3^n = 2.3^{n-1}$. Trong 2.3^{n-1} trường hợp mà người thứ nhất bắn sai ấy thì có $\frac{2}{3}2.3^{n-1}$ trường hợp người thứ hai cũng bắn sai. Trong $2^2.3^{n-2}$ trường hợp cả hai người đầu bắn sai này thì có $\frac{2}{3}2^2.3^{n-2}$ trường hợp người thứ ba cũng bắn sai nốt. Tiếp tục lí luận đó ta sẽ có 2^n kết cục trong 3^n "kết cục có thể" ứng với việc cả n người đều bắn sai. Vậy số kết cục ứng với việc con thú bị bắn trúng (tức là ít nhất có một người bắn trúng) bằng $3^n - 2^n$. Xác suất phải tìm bằng

$$\frac{3^n - 2^n}{3} = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

Bằng cách dùng chiếc que mà xác định được gần đúng số π !

Ta biết rằng số π (bằng tỉ số giữa chu vi vòng tròn và đường kính của nó) là một số vô tỉ, hơn nữa nó không thể được biểu diễn dưới dạng một biểu thức đại số hữu hạn. Tuy nhiên, có nhiều cách biểu diễn nó được dưới dạng một biểu thức đại số vô hạn, nhờ đó có thể tính gần đúng số π với độ chính xác tùy ý. Thí dụ sau đây là một vài công thức cổ điển đối với số π.

Công thức Viét (1540 – 1603) :

$$\frac{\pi}{2} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \times \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}}}} \dots$$

Công thức Ole :

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots$$

Công thức Lâynit (1646 – 1716)

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

Công thức Valit (1616 – 1703)

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\dots$$

v.v...

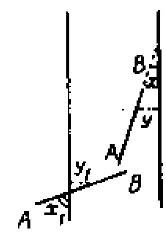
Sau đây sẽ đưa ra một cách xác định gần đúng số π bằng phương pháp xác suất. Phương pháp đó sẽ rút ra ngay được từ lời giải của một bài toán xác suất được gọi là bài toán Bupphông (1707 – 1788).

Trên mặt phẳng kẻ hai đường thẳng song song cách nhau một khoảng $2a$. Tung hú họa xuống mặt phẳng một chiếc que nhỏ có độ dài $2a$. Chứng minh rằng xác suất để que cắt một trong hai đường thẳng song song bằng $\frac{2}{\pi} \approx 0,637$.

Chú ý : Chữ tung hú họa ở đây phải hiểu theo nghĩa :

1) Tâm của que rơi hú họa trên đoạn thẳng $2a$ vuông góc với hai đường thẳng song song đã cho và kèm giữa chúng.

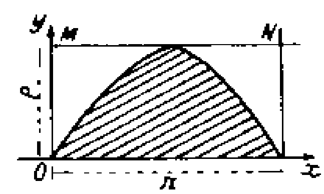
2) Góc x là góc lập bởi que với phương các đường thẳng song song lấy hú họa giá trị trong đoạn $[0, \pi]$ (một cách độc lập với vị trí tâm của que).



Hình 1

Lời giải : ta kí hiệu khoảng cách từ tâm của que đến đường thẳng gần nhất trong hai đường thẳng song song là y (hình 1).

Theo hai điều kiện 1), 2) ta thấy $0 \le x \le \pi$, $0 \le y \le a$, tất cả các kết cục có thể xảy ra được biểu thị bởi cặp số (x, y) trong đó x lấy hú họa giá trị trong đoạn $[0, \pi]$, còn y độc lập với x lấy hú họa giá trị trong đoạn $[0, a]$. Tập hợp tất cả các "kết cục có thể" đó có thể minh họa bằng tập hợp tất cả các điểm lấp đầy hình chữ nhật $OMNP$ có các cạnh $OM = a$ $OP = \pi$ (hình 2) và điểm (x, y) sẽ rơi hú họa (không thiên về vị trí nào) trên hình chữ nhật đó. Theo giả thiết về tính "đồng khả năng" này ta có xác suất để điểm (x, y) rơi vào một phần nào đó của hình chữ nhật sẽ bằng tỉ số diện tích của phần ấy trên diện tích hình chữ nhật $OMNP$.



Hình 2

Điều kiện cần và đủ để cho que cắt một trong các đường thẳng song song là $y \le a\sin x$. Vì vậy xác suất p phải tìm chính là xác suất để

điểm (x, y) rơi vào phía dưới đường cong $y = a\sin x$. Diện tích hình chữ nhật $OMNP$ bằng $a\pi$ còn diện tích phần nằm phía dưới đường cong $y = a\sin x$ bằng $2a$. Vậy :

$$p = \frac{2a}{a\pi} = \frac{2}{\pi} \approx 0{,}637.$$

Từ sự trình bày khái niệm xác suất ở phần đầu ta biết rằng có thể xác định gần đúng xác suất p (tức cũng là xác định gần đúng số π) nhờ tần số, vì vậy ta suy ra ngay tức khắc cách làm thế nào để tung chiếc que nhiều lần mà xác định được gần đúng số π. Nhớ rằng trong việc làm đó phải cố gắng chú ý đảm bảo hai điều kiện 1), 2). Cũng cần nói rõ với các bạn : bạn nào muốn chơi trò chơi này thì hãy xem lại lòng kiên tâm của mình đấy, vì để xác định số π với độ chính xác lớn thì nói chung cần phải tung rất nhiều lần. Thí dụ người ta đã tung 5000 lần và xác định được giá trị gần đúng $\pi \approx 3{,}159$.

KHÁI NIỆM VỀ LÍ THUYẾT NHẬN DẠNG

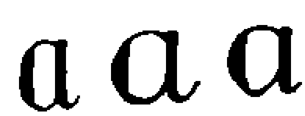
ÁNH DƯƠNG

Ta hãy vào thăm một lớp vỡ lòng. Cô giáo viết lên bảng chữ *a*, chữ *e*, chữ *i* đọc to cho các em nghe. Mỗi chữ cô giáo đều viết nhiều lần. Chữ cô thật là nắn nót, tuy vậy các chữ *a* cô viết cũng không thể hoàn toàn giống nhau (xem hình 1) các chữ *e* cũng vậy. Mặc dù như thế các em vẫn dần dần phân biệt được các mẫu chữ *a* với các mẫu chữ *e*, chữ *i*, v.v..

Giai đoạn học đã xong, bây giờ các em thi. Cô giáo (hoặc một thầy giáo khác) viết lên bảng một chữ *a* chữ này không hoàn toàn giống các mẫu chữ *a* mà cô giáo đã viết, nhưng còn giống chúng hơn các chữ khác. Do đó các em dễ dàng đọc được *a*.

Lớn lên, các em làm quen dần với các mẫu chữ *a* do nhiều người viết, có khi viết rất ngoáy. Tuy không giống với những mẫu chữ *a* do cô giáo đã dạy, nhưng chúng vẫn được các em phân biệt với các chữ khác.

Rõ ràng khi trông thấy một mẫu chữ *a* mới, các em tuy có so sánh nó với những mẫu chữa đã học, nhưng không cần trông thấy hai hình trùng khít với nhau mới kết luận rằng đó là chữ *a*. Thực ra các em chỉ làm một phép phân loại các mẫu chữ đã học ra thành các lớp chữ *a*, chữ *e*, chữ *i* v.v.. Sau đó các em không cần nhớ từng mẫu chữ a đã học, mà dường như chỉ cần nhớ một khái niệm chung, một "mẫu đại diện" đối với mỗi lớp. Gặp một mẫu chữ mới, dường như các em chỉ làm một phép so sánh với những "mẫu đại diện" đó, rồi trên cơ sở sự gần giống (chứ không phải là giống hẳn) mà xếp mẫu mới vào một lớp nào đó.



Hình 1

Bộ óc con người có khả năng phân loại các mẫu chữ đã học và nhận biết một mẫu mới nên xếp vào lớp chữ nào cho đúng. Đó là khả năng nhận dạng. Khả năng này thể hiện rất rộng rãi. Con người không phải chỉ nhận dạng chữ viết, mà có thể nói : sở dĩ nhận thức được muôn vàn sự vật quanh mình, chính là nhờ khả năng nhận dạng.

Thí dụ như việc phân biệt chó với mèo, lợn, gà,.. Khi em bé được bố mẹ trỏ cho trông thấy mấy con chó vàng, vện đầu tiên đang rỡn chơi với mấy chú mèo đen, mèo tam thể..., thì trong óc em đã hình thành sự phân loại khái niệm về chó và mèo. Sau này em trông thấy mèo mướp và chó mực, tuy chẳng giống hoàn toàn những con chó, con mèo đã gặp, nhưng em vẫn nhận dạng được chúng.

Từ ngữ "nhận dạng" không chỉ hó hẹp trong phạm vi những hình dạng có thể nhìn thấy. Người ta có thể "nhận dạng" cả âm thanh chẳng hạn, như dễ dàng phân biệt tiếng đàn và tiếng sáo, tiếng bom và tiếng súng, v.v..

Loài người đã từng băn khoăn tự phân tích khả năng "nhận dạng" của bộ óc mình. Người ta nhận dạng bằng cách nào ? Đó là câu hỏi thật khó giải đáp.

Như trên đã nói, để nhận dạng, bộ óc không bao giờ yêu cầu mang mẫu mới ra so sánh với từng mẫu cũ đã học cho tới khi trùng khít nhau giữa mẫu mới với mẫu cũ nào đó. Bộ óc chỉ làm công việc so sánh để phân loại mà thôi. Trong quá trình học, bộ óc phân loại các mẫu do người dạy đưa cho xem (hoặc nghe, ngửi, sờ v.v..). Trong giai đoạn thi, bộ óc xếp mẫu mới vào một trong những loại đã được phân trước đây.

Phải chăng việc phân loại đó thực hiện được là nhờ người dạy đã miêu tả các mẫu cho bộ óc nắm được tiêu chuẩn của từng loại mẫu ? Chẳng hạn cô giáo đã dạy các em phân tích các nét chữ :

"*i* tờ giống móc cả hai

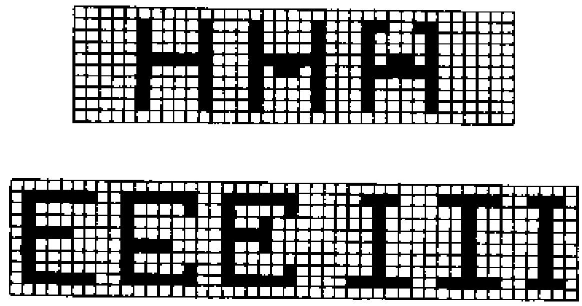
i ngắn có chấm, tờ dài có ngang"

Bố mẹ muốn dạy các em phân biệt con chó với con mèo có thể nói đến cái mõm dài, cái thân hình to lớn hơn và đôi mắt không tròn to xanh biếc, tiếng sủa không êm ái như tiếng kêu meo meo.

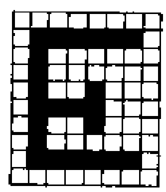
Đúng là việc phân tích tiêu chuẩn của hai mẫu có nhiều khi giúp cho việc phân loại và nhận dạng dễ dàng hơn. Nhưng sự vật nhiều khi phức tạp lắm, phân tích tiêu chuẩn không đủ đi sâu vào các khía cạnh phân biệt các loại mẫu. Biết bao nhiêu chữ cái không thể miêu tả tỉ mỉ được và chắc không phải là cô giáo hễ viết một chữ cái như h, g, r, s, v.v.. lại phải nêu hình ảnh móc câu, cái mũ, cái cột, cái gáo, v.v.. để miêu tả từng chữ. Dường như bộ óc có khả năng phân biệt được những hình ảnh đó mà không cần đến những tiêu chuẩn chặt chẽ và tỉ mỉ để phân loại cho chính xác. Chẳng thế mà không những óc phân biệt được những chữ cái với nhau, mà còn phân biệt được nét chữ do người này hoặc do người khác viết. Khi bố mẹ đến cổng trường đón các em thì trong hàng trăm giọng nói của học sinh, bố mẹ vẫn nhận ngay được tiếng con mình mà chẳng cần phân biệt âm sắc, âm giai gì chặt chẽ cả.

Do đó, các nhà triết học duy tâm cho rằng bộ óc nhận dạng được là do trực giác, nói xa hơn nữa, là do thượng đế phú cho con người khả năng bẩm sinh đó, cảm thông trực tiếp với sự vật mà nhận thức ngay được bản chất. Nhưng cái thứ lập luận duy tâm ấy đã phá sản hoàn toàn trước những thành tựu của khoa học, dùng máy tính điện tử để nhận dạng. Quá trình nhận dạng của bộ óc đã được phân tích và mô hình hóa tới một chừng mực nào đó trên máy tính điện tử, nhờ đó người ta dần dà đi sâu khám phá thêm cơ chế làm việc khá tinh vi của bộ óc.

Người ta đã áp dụng trên máy tính điện tử nhiều thuật toán nhận dạng. Sau đây, ta hãy xét một thuận toán đơn giản nhất.



Hình 2a



Hình 2b

Giả sử máy đã học 3 loại chữ *H, E, I* trên những mẫu trong hình 2a. Những mẫu này cùng kích cỡ do đó ta có thể đặt chúng lên những hình chữ nhật bằng nhau, giả sử mỗi chữ nhật chia làm 6 × 8 = 48 ô vuông. Ta cho mỗi chữ nhật mang hình chữ cái tương ứng với một mã 48 chữ số 0 hoặc 1 theo quy ước sau đây :

– Ô vuông nào có nét chữ đi qua tương ứng với chữ số 1, ô vuông nào để trắng tương ứng với chữ số 0.

– Các chữ số 0 và 1 được viết liền nhau từ trái sang phải, tương ứng với các ô vuông từ hàng trên xuống hàng dưới và từ trái sang phải

Như vậy chữ *H* đầu tiên sẽ tương ứng với mã

100001.100001.100001.111111.100001.100001.
.100001.100001

Chữ *H* thứ 3 tương ứng với mã

110011.100001.100001.101101.111111.
100001.100001.100001

Chữ E thứ nhất tương ứng với mã
111111.100000.100000.111100.100000.100000.
100000.111111

Ta dễ dàng viết được mã tương ứng với những chữ khác (việc mã hóa ở đây tương tự như việc mã hóa đã nói trong bài "Máy tính điện tử với các bài toán phi số" đăng báo Toán học và tuổi trẻ số 7-8-1972).

Bây giờ giả sử cho một mẫu mới, như hình 2b. Cần đoán nhận xem đó là mẫu chữ gì.

Trước hết, ta viết mã tương ứng với mẫu mới :

111111.100000.100000.100100.111100.
.100100.100000.111111

Bây giờ ta đếm chữ số không giống nhau ở những vị trí tương ứng trong mã mẫu mới và mã các mẫu chữ đã học. Ta kí hiệu những số đếm được là $d_{h_1}, d_{h_2}, d_{h_3}, d_{e_1}, d_{e_2}, d_{e_3}, d_{i_1}, d_{i_2}, d_{i_3}$ và gọi là khoảng cách giữa mẫu mới với các mẫu chữ h thứ 1, thứ 2, thứ 3, chữ e thứ 1, thứ 2, thứ 3 v.v..

Ta có : $d_{h_1} = 21$, $d_{h_3} = 15$, $d_{e_1} = 6$.

Tương tự như vậy, ta có thể đếm được $d_{h_2} = 19$, $d_{e_2} = 4$, $d_{e_3} = 8$, $d_{i_1} = 20$, $d_{i_2} = 19$, $d_{i_3} = 21$

Ta tính khoảng cách trung bình d_h giữa mẫu mới với các mẫu chữ h :

$$d_h = (d_{h_1} + d_{h_2} + d_{h_3})/3 = 55/3 = 18,3$$

Tương tự như vậy, ta tính khoảng cách trung bình d_e giữa mẫu mới với các mẫu chữ e.

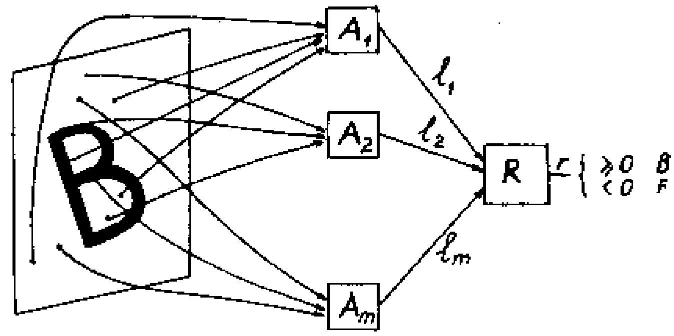
$$d_e = (d_{e_1} + d_{e_2} + d_{e_3})/3 = 18/3 = 6$$

Ta cũng tính được $d_i = 60/3 = 20$.

So sánh 3 khoảng cách ta thấy d_e nhỏ nhất, chứng tỏ mẫu mới gần chữ e nhất. Do đó máy sẽ đoán nhận mẫu mới là chữ e.

Thuật toán trên đơn giản, nên kết quả nhận dạng chỉ đúng chừng 70%. Cải tiến thêm, có thể thu kết quả đúng tới 90 – 95%. Nhưng thuật toán của máy nhận hình (còn gọi là pec-xep-tơ-rôn) còn có hiệu quả cao hơn.

Hãy xét một máy nhận hình đơn giản hóa (xem hình 3) gồm một tấm màn in hình S, một bộ phần tử gọi là phần tử kết hợp A và một phần tử phản ứng R. Máy này phân biệt được 2 loại hình dạng khác nhau, chẳng hạn chữ B và chữ E.



Hình 3

Màn S chia ra n ô vuông, mỗi ô đều có tế bào quang điện và được nối một cách ngẫu nhiên tới một trong các phần tử kết hợp. Số phần tử kết hợp bằng $m \ll n$, do đó mỗi phần tử kết hợp đều được nối với ít nhất một ô vuông nào đó. Mỗi phần tử kết hợp A_i tương ứng với một hệ số l_i cho trước, l_i có thể dương hoặc âm. Khi ta in một hình nào đó, chẳng hạn hình chữ E lên màn S, thì những ô vuông có nét chữ đi qua bị kích thích (do tế bào quang điện đã chuyển ánh sáng thành dòng điện và truyền tín hiệu tới phần tử kết hợp tương ứng. Phần tử A_i nào nhận được ít nhất k tín hiệu (k là một số cố định cho trước) thì sẽ bị kích thích và truyền sang phần tử R số l_i nói trên. Như vậy với một hình ảnh nhất định (chẳng hạn chữ E) thì R nhận được một tổng số $r = l_{i_1} + l_{i_2} + ... + l_{i_j}$, trong đó $i_1, i_2 ... i_j$ là số hiệu các phần tử A_i bị kích thích. Nếu $r \geqslant 0$ thì quy ước máy trả lời là chữ B, ngược lại $r < 0$ thì máy trả lời là chữ E.

Trong quá trình dạy cho máy học, người ta làm thay đổi các hệ số l_i, dựa trên kết quả phản ứng của R. Nếu chiếu lên màn S chữ B mà R phản ứng là $r < 0$ (tức là máy nhận dạng nhầm chữ B ra chữ E. Khi đó, phải tăng các l_i ứng với các A_i bị kích thích, để lần sau nếu chiếu chữ B cũ đó lên màn S, thì máy thu được $r \geqslant 0$. Ngược lại, nếu chiếu lên màn S chữ E mà thu được $r \geqslant 0$ thì ta phải giảm các l_i tương ứng với các A_i bị kích thích. Cứ như vậy, dần dà ta sẽ có 1 hệ thống l_i sao cho $r \geqslant 0$ đối với hình các chữ B và $r < 0$ đối với E.

Thuật toán này cải tiến thêm sẽ cho phép ta phân biệt không phải chỉ 2 chữ, mà một số chữ tùy ý. Mức độ chính xác đạt từ 95% đến 99%. Tốc độ làm việc cực kì nhanh chống, chẳng hạn muốn dạy cho máy học 26 chữ cái, chỉ cần phóng lên màn S trung bình một vài chục mẫu chữ cho mỗi chữ cái. Máy sẽ tính toán để điều chỉnh các hệ số l_i với tốc độ điện tử (hàng vạn phép tính một giây). Như vậy, máy có thể thuộc mặt chữ cả bộ chữ cái trong vòng mấy phút, thậm chí mấy giây. Không những thế, máy còn có khả năng "rút kinh nghiệm" ngay trong giai đoạn thi. Thật thế, khi thi nếu máy đoán nhầm, thì sau khi "người coi thi" báo cho máy biết là nhầm máy sẽ tự động sửa các hệ số l_i như trong giai đoạn "học".

Máy nhận hình, cũng như mọi máy nhận dạng khác, đều có thể thay thế bởi một máy tính điện tử thông thường, có gắn thêm một số thiết bị phụ, chẳng hạn như một bộ phận thu nhận hình ảnh tương tự như màn S. Vì vậy, máy tính điện tử có thể dùng để nhận dạng. Trong lĩnh vực ứng dụng quan trọng này, con người đã đạt được những thành tựu kì diệu mà ta sẽ nói đến trong dịp khác.

GIẢI PHƯƠNG TRÌNH LÔGIC

HOÀNG CHÚNG

Khi giải các bài "phân phối vé bóng đá" và "ghép tên họ" trong báo "Toán học và tuổi trẻ" số 2 (mục "Giải trí toán học"), chắc không mấy ai trong các bạn nghĩ rằng đó là một *bài toán*, có thể giải được bằng cách đặt *phương trình*, vì nói đến toán, thường các bạn chỉ nghĩ đến cái gì có *hình* hoặc có *số* rõ ràng.

Sau đây, xin giới thiệu với các bạn một đại số mới, có nhiều điều giống mà cũng có nhiều điều khác với đại số mà các bạn đang học ở trường, giúp các bạn giải được những "bài toán" như các bài nói trên.

1. *Mệnh đề* : Mệnh đề là một câu nói có tính chất hoặc *đúng* hoặc *sai*. Thí dụ : các câu sau đây là mệnh đề :

1) Số π lớn hơn 2 (đúng)

2) Quả đất vuông (sai).

3) Hình chữ nhật có một góc vuông (đúng).

Nhưng các câu như : "Số x lớn hơn 2", "Hôm nay là thứ mấy ?" không phải là mệnh đề, vì không thể nói các câu đó đúng hay sai được.

Trong số học, ta dùng chữ thay số. Ở đây, ta dùng chữ thay cho mệnh đề. Chẳng hạn ta gọi mệnh đề 1) trên đây là a, mệnh đề 2) là b, mệnh đề 3) là c. Nếu một mệnh đề p là đúng thì ta viết $p = 1$ (*p có giá trị chân lí là 1)*, nếu p sai thì viết $p = 0$ (*p có giá trị chân lí là 0)*. Trong ba mệnh đề trên thì $a = 1$, $b = 0$, $c = 1$.

2. Ta có thể *nối* các mệnh đề đơn giản lại để được các mệnh đề phức tạp. Chẳng hạn từ hai mệnh đề "Hôm nay là ngày chủ nhật" (a), "Hôm nay là ngày lễ" *(b)*, ta có thể lập mệnh đề : "Hôm nay là ngày chủ nhật *và* (hôm nay) là ngày lễ", và kí hiệu mệnh đề này bằng a & b (đọc : a và b) ; là một *hội* của a và b.

Rõ ràng là hội a & b trên đây chỉ đúng (= 1) khi cả a lẫn b cùng đúng ($a = b = 1$), tức là nếu hôm nay đúng là ngày chủ nhật ($a = 1$), mà cũng đúng là ngày lễ ($b = 1$), a & b sai (= 0) trong mọi trường hợp khác : a & b sai nếu hôm nay là ngày chủ nhật ($a = 1$), nhưng không phải là ngày lễ ($b = 0$) hoặc hôm nay là ngày lễ ($b = 1$) nhưng không phải là ngày chủ nhật ($a = 0$), hoặc hôm nay không phải là chủ nhật ($a = 0$), hoặc hôm nay không phải là chủ nhật ($a = 0$) mà cũng không phải là ngày lễ ($b = 0$).

Sự phụ thuộc của giá trị chân lí của a & b vào giá trị chân lí của a và của b được ghi trong bảng 1, gọi là *bảng chân lí của phép hội*.

Từ hai mệnh đề a và b ở trên, ta cũng có thể lập mệnh đề : "Hôm nay là ngày chủ nhật *hay là* hôm nay là ngày lễ". Ta kí hiệu

a	b	$a \& b$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Bảng 1

a	b	$a \vee b$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Bảng 2

mệnh đề này bằng $a \vee b$ (đọc : a hay là b) và gọi đây là một *tuyển* của a và b ; $\vee$ gọi là *phép tuyển. Bảng chân lí của phép tuyển* là bảng 2 : tuyển $a \vee b$ đúng khi *ít nhất một* trong 2 mệnh đề a và b là đúng, sai khi cả a lẫn b cùng sai (hôm nay không phải là chủ nhật, mà cũng không phải là ngày lễ).

3. Có thể chứng minh dễ dàng các "công thức" sau đây :

$$a \vee b = b \vee a \quad (1)$$

$$a \& b = b \& a \quad (2)$$

$$(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c) \quad (3)$$

$$(a \& b) \& c = a \& (b \& c) \quad (4)$$

$$(a \vee b) \& c = (a \& c) \vee (b \& c) \quad (5)$$

Muốn chứng minh các công thức này, ta lập bảng chân lí của mệnh đề ở vế phải và mệnh đề ở vế trái, và thấy rằng hai mệnh đề đó luôn luôn có cùng giá trị chân lí, với mọi giá trị của a, b và c.

a	b	$a \vee b$	$b \vee a$
1	1	1	1
1	0	1	1
0	1	1	1
0	0	0	0

Bảng 3

Chẳng hạn công thức (1) được chứng minh bằng bảng 3.

So sánh các công thức trên với các công thức trong đại số :

$$a + b = b + a \quad (1')$$

$$a \times b = b \times a \quad (2')$$

$$(a \times b) + c = a + (b + c) \quad (3')$$

$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c) \quad (4')$$

$$(a + b) \times c = (a \times (c) + (b \times c) \quad (5')$$

ta thấy rằng *phép tuyển* ($\vee$) *có tính chất giống phép cộng* (+) *và phép hội* (&) *giống phép nhân* ($\times$) : phép tuyển và hội có tính giao hoán [các công thức (1) và (2)] và tính kết hợp [(3) và (4)], phép hội có tính phân phối đối với phép tuyển (5). Vì vậy người ta cũng gọi $a \vee b$ là một "tổng", $a \& b$ là một tích, và viết $a.b$ hay ab thay cho a và b.

Do các công thức (1) – (5) mà trong "đại số mệnh đề" ta có thể thực hiện các phép biến đổi như bỏ dấu ngoặc, đặt thành "thừa số" chung, v.v.. như trong đại số thông thường.

Trong "đại số mệnh đề" ta cũng có các công thức

$a \vee 0 = 0 \vee a = 0$ (tương tự $a + 0 = 0 + a = a$)

$a.\ 1 = 1.a = a$ (tương tự $a.1 = 1.a = a$ trong đại số thông thường).

$a.0 = 0.a = 0$ (tương tự $a.0 = 0.a = 0$ trong đại số thông thường).

4. Nhưng trong đại số mệnh đề, có những công thức đặc biệt mà trong đại số thông thường không có, chẳng hạn :

$$a \vee a = a. \quad \underbrace{a. \vee a. \vee a.}_{\text{n lần } a} \dots \vee .a = a$$

$$a.a = \underbrace{a.\ a.a\dots a}_{\text{n lần } a} = a$$

Các công thức này có thể chứng minh dễ dàng, dựa vào bảng 1 và 2 : nếu $a = 0$ thì $a \vee a = 0 \vee 0 = 0 = a$.

$a.a = 0.0 = 0 = a$, nếu $a = 1$ thì $a \vee a = 1 \vee 1 = 1 = a$, $a.a = 1.1 = 1 = a$, nghĩa là với mọi giá trị của a, ta luôn luôn có $a \vee a = a$, $a.a = a$.

Nhờ các công thức đặc biệt này mà việc tính toán trong đại số mệnh đề đơn giản hơn trong đại số thông thường nhiều. Ta áp dụng để giải bài toán sau :

Trong một cuộc thi đấu bóng bàn giữa bốn vận động viên An, Bắc, Chính, Dũng có mấy người xem dự đoán như sau :

1) Bắc đoạt giải nhất, An nhì.

2) Bắc chỉ nhì thôi, Dũng thứ ba.

3) Chính nhì, Dũng tư.

Hỏi kết quả xếp hạng như thế nào, biết rằng mỗi dự đoán trên đây đều nói đúng được về một người.

Giải : Gọi mệnh đề "Bắc nhất" là b_1, "An nhì" là a_2 "Bắc nhì" là b_2, "Dũng ba" là d_3, v.v..

Trong dự đoán thứ nhất có hai mệnh đề : b_1 và a_2 trong đó có một mệnh đề đúng (dự đoán đúng về một người), do đó tuyển $b_1 \vee a_2$ phải đúng, nghĩa là ta có phương trình" :

$$b_1 \vee a_2 = 1, \qquad (1)$$

Với dự đoán thứ hai và thứ ba, có các phương trình :

$$b_2 \vee d_3 = 1, \qquad (2)$$

$$c_2 \vee d_4 = 1, \qquad (3)$$

Nhân từng vế phương trình (1) và (2), có hay là

$$(b_1 \vee a_2)(b_2 \vee d_3) = 1.$$

$$b_1b_2 \vee b_1d_3 \vee a_2b_2 \vee a_2d_3 = 1.$$

Nhưng $b_1b_2 = 0$ (vì không thể có đồng thời $b_1 = b_2 = 1$, tức "Bác nhất và Bác nhì" được), cũng như $a_2b_2 = 0$ (vì An và Bác không thể cùng nhì), do đó còn lại :

$$b_1d_3 \vee a_2d_3 = 1$$

Lại nhân từng vế phương trình này với phương trình (3), có :

$$b_1d_3c_2 \vee a_2d_3c_2 \vee b_1d_3d_4 \vee a_1d_3d_4 = 1$$

mà vì $a_2d_3c_2 = b_1d_3d_4 = a_2d_3d_4 = 0$, nên $b_1d_3c_2 = 1$ tức $b_1 = d_3 = c_2 = 1$. Bác nhất, Chính nhì, Dũng ba, do đó An phải thứ tư. Thử lại thấy đúng.

Bây giờ, mời các bạn hãy giải các bài "Phân phối vé bóng đá" và "Ghép tên, họ" trong báo "Toán học và tuổi trẻ" số 2 (mục giải trí), bằng cách đặt phương trình lôgic.

Trên đây có thể xem là phần mở đầu rất đơn giản để giới thiệu với các bạn về đại số Bun (Boole) và lôgic toán, một ngành toán rất quan trọng và có nhiều ứng dụng thực tế. Chắc các bạn đều đã đọc tiểu thuyết nổi tiếng *"Ruồi trâu"* ; tác giả cuốn sách này là nữ văn sĩ E.Vôinitsơ, con gái của nhà toán học Anh Bun (G. Boole, 1815 - 1864).

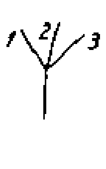
CÂY

TẠ QUANG BỬU

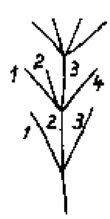
Trong tờ báo số 1 các bạn đã giải một bài toán về cây. Đồng chí Lê Văn Thiêm đã cho cây mọc theo một quy luật nhất định. - đó là quy luật của dãy "Fibônasi" (Fibonacci) nổi tiếng.

Nhất định các bạn sẽ đặt cho mình nhiều câu hỏi. Ví dụ : nếu cây nói trên đẻ nhánh theo quy luật đó thì nó có thể đẻ nhánh theo quy luật khác không ? các quy luật đẻ nhánh của cây có dạng như thế nào ? Những quy luật đẻ nhánh đó có tác dụng lí luận và thực tiễn gì không ? Một câu hỏi khó trả lời nhưng không ngây thơ lắm là : cây cối ta gặp trong tbiên nhiên khi đẻ nhánh có theo quy luật nào không ? và nếu có thì dạng của quy luật đó như thế nào ?

Nhiều vấn đề nêu lên trên đây rất quan trọng nhưng rất mới. Nó thuộc một ngành



Hình 1

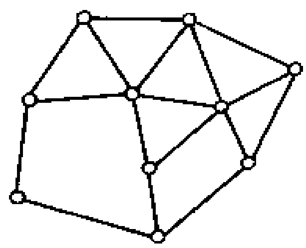


Hình 2

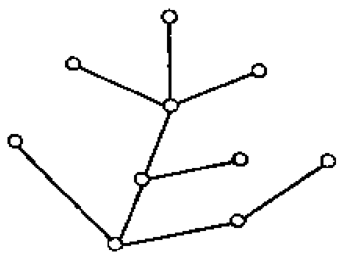
toán học lí thú : Lí thuyết đồ thị tức Tôpô tổ hợp. Trong bài này, vì trình độ có hạn của người viết và do tuổi trẻ của người đọc, nên chỉ xin gợi ý một số điểm.

1. Từ ngày cách mạng thành công ta làm chủ vận mệnh nước ta và làm chủ bản thân mình nên mỗi khi giải quyết vấn đề gì, ta phải tính toán xem có bao nhiêu khả năng, mỗi khả năng có lợi có hại như thế nào, có triển vọng (xác suất) xẩy ra ít hay nhiều rồi mới quyết định lấy một khả năng (ví dụ lấy khả năng 2 trong hình 1). Nhưng cuộc đời là một dãy quyết định. Sau quyết định vừa rồi lại phải tính toán có bao nhiêu khả năng, rồi lại chọn một khả năng (ví dụ khả năng 3 trong hình 2). Sau đó lại chọn tiếp v.v... như vậy ta được một con đường, có thể gọi là con đường đời.

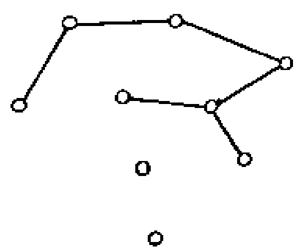
Nếu các khả năng đó có tính chất lôgic (tức là sự việc chỉ có thể xẩy ra theo các khả năng đó không thể xẩy ra cách khác), thì con đường đó là con đường lôgic, và lí thuyết cây có thể dùng trong lôgic học. Nếu các khả năng đó có là con đường ngẫu nhiên. Do đó lí thuyết cây cũng có ích cho lí thuyết xác suất và lí thuyết các quá trình ngẫu nhiên. Có nhiên trong cuộc đời phải khéo phối hợp lôgic với quy *luật* của ngẫu nhiên.



(a)
Mạng



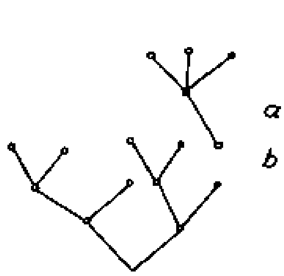
(b)
Cây



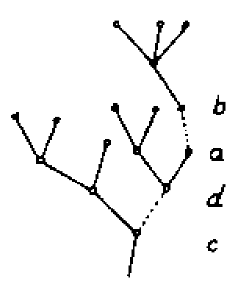
(c)
Cô–cây

2. Trong việc tính toán các mạng lưới phức tạp, các kĩ sư điện thường thay những mạng điện (a) bởi cái *cây* (b) và *mạng bổ sung* (c) mà người ta cũng gọi là *cô–cây.*

Các bạn có thể thử nghiệm dễ dàng rằng một mạng với n nút sẽ có một cây với $n - 1$ nhánh.



2 – *cây*
bởi bỏ nhánh a b



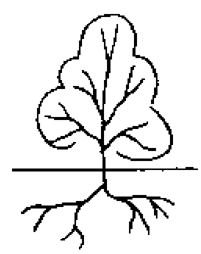
3 – cây
bởi bỏ nhánh *ab và cd*

Trong những bài toán phức tạp hơn có khi phải dùng những 2 – *cây*, có được từ một cây bằng việc bỏ đi một nhánh, *n– cây*, có được từ một cây bằng bỏ đi (*n – 1*) nhánh. Nhiều tài liệu gọi *n– cây* với *n* bất kì là một *rừng toán học*.

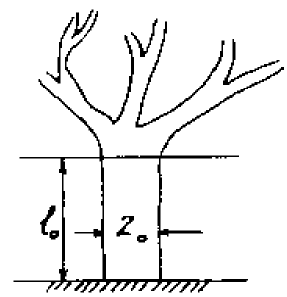
Trên đây là một vài ứng dụng của lí thuyết cây làm cơ sở cho các phương pháp áp dụng tôpô tổ hợp vào kĩ thuật, được phát triển mạnh trong mấy năm gần đây từ những công trình rất đặc sắc của kĩ sư Gabrien Krôn (Gabriel Kron).

3. Bây giờ ta hãy trả lời câu hỏi hắc búa thuộc về vật lí sinh học. Các cây thiên nhiên mọc theo cách nào ? Sau đây tôi xin giới thiệu giả thuyết của trường phái Rasepxki (Rashevsky), để các bạn tham khảo.

Cây không có chân tay, không thể chạy kiếm thức ăn được nên cần diện tích rộng để lấy thức ăn từ ngoại giới. Do đó phải có nhiều nhánh và nhiều rễ, vậy về mặt toán học một cây gồm hai cây : một cây hướng về trời, một cây hướng về lòng quả đất (hình 3). Sau đây, ta chỉ chú ý cây hướng về trời.



Hình 3



Hình 4

Nếu cho l_o, r_o là độ dài và bán kính của thân ; l, r độ dài và bán kính trung bình của nhánh ; n tổng số nhánh và δ là tỉ trọng trung bình thì tổng khối là :

$$M = \pi\delta(l_o r_o^2 + n l_1^2) \qquad (1)$$

Gọi q là sự trao đổi chất (matabolit) mỗi đơn vị khối ta có : qM tỉ lệ với tổng số lá tức là tỉ lệ diện tích cây (xem lá là nhánh cuối cùng).

$$qM = Klnr \qquad (2)$$

nhánh không thể dài quá vì quá dài thì cây gãy, do đó l phụ thuộc vào r và δ.

$$l = f(r, \delta) \qquad (3)$$

Thân phải khỏe, do đó l_o phải phụ thuộc r_o và δ.

$$l_o = f_o\,(r_o, \delta.\ M)\ ; \qquad (4)$$

đồng thời r_o phải đủ cho luồng trao đổi chất

$$r_o = f_1(qM,)\ \delta \qquad (5)$$

và r cũng vậy :

$$r = f_1\ \left(\frac{qM}{n}, \delta\right). \qquad (6)$$

Ta có 6 phương trình để tính l_o, r_o n, l, r, δ từ M và q.

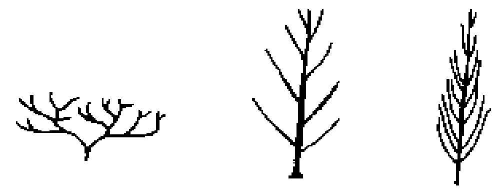
Nhưng 5 đại lượng l_o, r_o, r, l, δ cũng đủ để xác định được dạng cây. Có 3 dạng như sau :

l_o, r_o nhỏ, n lớn là loại bụi (a)

l_o nhỏ, r_o to n nhỏ và l lớn thì (b)

l_o, r_o, n to và l, n nhỏ thì (c)

Dùng các dạng thích hợp cho f, f_o, f_1 ta có thể được các dạng cây làm hàm số của M và q.



(a) *(b)* *(c)*

Tóm lại sự phát triển của một cây thiên nhiên rõ ràng là một *chương trình động*. Trong hoàn cảnh của từng cây, có thể nói mỗi cây là một *lời giải tối ưu.*

CẤU TRÚC ĐẠI SỐ

HOÀNG XUÂN SÍNH

Làm đại số có thể nói chủ yếu là tính toán. Một thí dụ cụ thể : Bốn phép toán : cộng, trừ, nhân, chia trên các con số. Như vậy là ta đã lấy một tập hợp đối tượng toán học nào đó (trong thí dụ vừa rồi là tập hợp các số) rồi ta thực hiện một số phép toán trên các đối tượng đó. Một thí dụ khác : giải hệ phương trình :

$$2x + y = 3 \qquad (1)$$

$$3x - y = 2 \qquad (2)$$

Cộng vế với vế hai phương trình (1) và (2) ta được

$(2x + y) + (3x - y) = 3 + 2$ hay $5x = 5$

do đó $x = 1, y = 1$.

Ta nhận thấy để giải hệ phương trình, ta đã lấy $2x + y$ cộng với $3x - y$. Nếu ta gọi là dạng tuyến tính mọi biểu thức $ax + by$ trong đó a, b là hai số cho trước, thì ta đã vừa làm một việc là thực hiện một phép cộng trên hai dạng tuyến tính $2x + y$ và $3x - y$. Qua thí dụ này ta thấy là người ta làm các phép toán không những chỉ trên các con số mà còn trên các đối tượng toán học không phải là số. Ta còn vô vàn thí dụ khác trong một giáo trình toán học cao cấp về những phép toán thực hiện trên một đối tượng không phải là số. Qua thực tiễn đó, con người đã đi tới nguyên lí chủ đạo của toán học hiện đại. *Điều quan trọng đối với nhà toán học không phải là bản thân các đối tượng toán học trên đó người ta nghiên cứu, nghĩa là điều quan trọng không phải là các đối tượng đó là các số hay các dạng tuyến tính, mà điều quan trọng là các tính chất của các phép toán thực hiện trên các đối tượng đó.* Đại số học là một ngành của toán học đã đạt được trình độ trừu tượng đó trước mọi ngành toán học khác. Đã từ lâu người ta đã quen coi Đại số như một bộ môn toán chuyên nghiên cứu các phép toán đại số trên các tập hợp mà các phần tử đã rời bỏ mọi tính chất riêng tư là số hay là dạng tuyến tính v.v.., mà ta thường kí hiệu bằng các chữ a, b, c...

Thực hiện một phép toán đại số mà ta có thể kí hiệu bằng $+$, $\times$, $*$, $\perp$, T ... trên hai phần tử a, b của cùng một tập hợp E, là cho tương ứng với cặp (a, b) một phần tử thứ ba xác định c của tập hợp E. Phần tử đc được kí hiệu $c = a + b$, $a \times b$, $a * b$, $a \perp$, a T b,... tùy theo cách ta kí hiệu phép toán. Nói một cách khác, cho một phép toán đại số là cho một ánh xạ của tập hợp tích $E \times E$ vào tập hợp $E^{(*)}$. Chẳng hạn cộng hai số 2 và 3 là cho tương ứng với cặp số (2, 3) số 5, nhân hai số đó là cho tương ứng với cặp số (2, 3) số 6. Ta còn có thể nói : hợp số 2 với số 3 bằng phép cộng thì ta được số 5 ; hợp số 2 và số 3 bằng phép nhân thì ta được số 6. Tóm tắt lại một phép toán đại số xác định trên một tập hợp E là một ánh xạ của tập hợp tích $E \times E$ vào E ; người ta còn gọi một phép toán đại số trên E là một luật hợp thành trong trên E. – Vì ta nói 2 hợp với 3 bằng phép cộng thì thành số 5 ; 2 hợp với 3 bằng phép nhân thì thành số 6. Cho nên đương nhiên các phép toán còn được gọi là luật hợp thành.

Bên cạnh các luật hợp thành trong, ta còn có một luật hợp thành khác mà ta gọi là luật hợp thành ngoài (việc xét các luật hợp thành ngoài là do thực tiễn hình học thúc đẩy). Kí hiệu của luật hợp thành ngoài cũng như luật hợp thành trong đều do ta chọn một cách tùy ý. Kí hiệu thường dùng là dấu chấm (.), hay có thể bỏ dấu chấm đi cũng như tích của hai số a. b được kí hiệu $a.b$ hay ab. Tất nhiên khi có nhiều luật hợp thành thì nên kí hiệu bằng những dấu khác nhau để tránh nhầm lẫn. Đó là một luật hợp thành mà bên cạnh một tập hợp E ra ta còn có một tập hợp phụ Ω gọi là miền toán tử. Luật hợp thành cho phép ta từ cặp (α, a) – gồm có phần tử α thuộc Ω, mà ta gọi là một toán tử, và phần tử a thuộc E – được một phần tử thứ hai b thuộc E. Ta còn có thể nói phần tử α tác dụng trên phần tử a, biến phần tử a thành một phần tử xác định b. Nếu luật hợp thành được kí hiệu bằng dấu chấm (.), thì phần tử b được kí hiệu $b = \alpha.a$, hay nếu bỏ dấu chấm đi $b = \alpha a$. Vì nói α tác dụng trên a, nên α có tên là toán tử. Vậy một luật hợp thành ngoài là một ánh xạ của tập hợp tích $\Omega \times E$ vào E. Chẳng hạn trong thí dụ giải phương trình ở trên, để khử x, ta có thể nhân phương trình (1) với 3, phương trình (2) với −2, rồi cộng vế với vế. Như vậy ta nói là ta đã thực hiện một luật hợp thành ngoài trên tập hợp các dạng tuyến tính $ax + by$ mà miền toán tử là tập hợp các số. Ứng với cặp $(3, 2x + y)$ gồm có số 3 và dạng tuyến tính $2x + y$ ta có dạng tuyến tính $6x + 3y$.

Một ví dụ khác : E là tập hợp các điểm trong mặt phẳng, miền toán tử là tập hợp các số, một phép vị tự có tâm O cho trước, cho tương ứng với mỗi cặp gồm một số k và một điểm A của mặt phẳng, một điểm A' của mặt phẳng. Đó là một luật hợp thành ngoài trên E.

O ——— A' ——— A $\quad OA' = | k | OA$

Trang bị cho một tập hợp E, một cấu trúc đại số nghĩa là cho trên E một hay nhiều luật hợp thành trong hoặc ngoài. Công việc của người làm đại số là nghiên cứu các cấu trúc đại số. Việc nghiên cứu các cấu trúc đại số giúp ta tăng năng suất gấp bội. Có nhiều tập hợp mà các phần tử không có gì giống nhau về các tính chất riêng của chúng, chẳng hạn một số nguyên với một đa thức thì về bản chất là khác nhau, đồng thời các phép toán trên các tập hợp đó cũng khác nhau về quy tắc, nhưng chúng có các tính chất cơ bản như nhau, do đó cũng thuộc vào

---

(*) Trong bài "lí thuyết tập hợp" đăng ở số báo trước, chúng ta đã định nghĩa thế nào là một tập hợp tích và thế nào là một ánh xạ của một tập hợp vào một tập hợp.

Ở đây chúng ta hãy nhắc lại định nghĩa của các khái niệm đó. Ta gọi là tích của hai tập hợp A và B, tập hợp các cặp phần tử (x, y) với $x \in A$ và $y \in B$, và tập hợp tích được kí hiệu bằng $A \times B$. Chú ý là giữa A và B ta đã đặt cái dấu × giống như dấu nhân × các số. Sự thực ra, đây là vấn đề quy ước, ta có thể dùng dấu × hay bất kì một dấu khác, chẳng hạn ⊥, ? ?, ∗, ×, v.v.. Vì chúng ta đã gọi tập hợp mà ta vừa mới xác định từ hai tập hợp A, B là tích, nên ta dùng dấu ×, tuy phép nhân hai tập hợp không một chút nào giống phép nhân hai số. Qua đây ta được thêm một ví dụ về một phép toán trên các đối tượng không phải là số. Nếu ta lấy tập hợp A là tập hợp ba chữ a, b, c. $A = \{a, b, c\}$ và tập hợp B là tập hợp hai số 1, 2, $B = \{1, 2\}$, thì tập hợp tích, theo như định nghĩa trên, là tập hợp $A \times B = \{(a, 1), (b, 1), (c, 1), (a, 2), (b, 2), (c, 2)\}$. Như vậy là trên các tập hợp ta có một phép toán mà ta đặt tên là phép nhân và kí hiệu là ×, cho phép ta từ hai tập hợp A và B lập thành một tập hợp mới. Nếu bây giờ ta lấy tập hợp A và tập hợp B và tập hợp N các số 0, 1, 2, 3..., n, ... thì tập hợp tích $N \times N$ là tập hợp các cặp số (a, b), trong đó $a \in N$, $b \in N$, chẳng hạn các cặp (1, 3), (0, 4), (5, 2), v.v..

Ta gọi là ánh xạ φ của một tập hợp A vào một tập hợp B một quy tắc cho phép ta từ mỗi phần tử $a \in A$ được một phần tử xác định $b \in B$. Có thể nói như thế này : một ánh xạ là một phép mà bằng phép đó ta có thể biến mỗi phần tử $a \in A$, thành một phần tử xác định $b \in B$. Thí dụ $A = N \times N$, tập hợp tích vừa xác định ở trên, $B = N$ và ánh xạ φ là ánh xạ cho phép ta biến mỗi cặp số (a, b) thành số a × b. Vậy cặp số (2, 5) biến thành số 7, cặp số (9, 0) biến thành số 9. Nếu vẫn lấy $A = N \times N$, $B = N$ và ánh xạ φ' là ánh xạ cho phép ta biến mỗi cặp số (a, b) thành số ab, thì ta lại được một thí dụ thứ hai về ánh xạ.

một loại cấu trúc, và chỉ cần nghiên cứu cấu trúc đó. Có nhiều loại cấu trúc đại số đặc trưng bởi các luật hợp thành, và các tính chất mà ta đòi hỏi các luật hợp thành phải có gọi là tiên đề của cấu trúc. Tất nhiên là các tính chất đó không phải chọn một cách tùy ý, mà đó là các tính chất thuộc vào một phần lớn các luật hợp thành có ứng dụng trong thực tiễn, chẳng hạn tính giao hoán, tính kết hợp, v.v.. ; đồng thời các tính chất đó phải là các tính chất sao cho mọi tính chất khác của phép toán đều suy ra từ chúng. Các cấu trúc quan trọng của đại số là nhóm, vành, mà cấu trúc trường là một trường hợp đặc biệt, nhóm với toán, tử và vành với toán tử. Cấu trúc môđun là một cấu trúc nhóm với toán tử, cấu trúc này ngày càng chiếm một vị trí đặc hiệt quan trọng trong toán học, nhất là sau những phát minh mới mẻ tốt đẹp của lí thuyết phạm trù.

Toán học ngày nay là một bộ môn khoa học mà một phần chủ yếu là nghiên cứu các cấu trúc toán học trong đó cấu trúc đại số là một cấu trúc cơ sở. Cho nên chúng ta không thể nào không biết thế nào là một cấu trúc đại số nếu ta muốn làm quen với toán học hiện đại. Vì vậy, trong những bài báo sau, chúng ta hãy đi vào thế giới của đại số hiện đại, làm quen với một số cấu trúc quan trọng của đại số.

TRÒ CHƠI "OẢN TÙ TÌ" VÀ LÍ THUYẾT TRÒ CHƠI

NGUYỄN TRƯỜNG

Nhiều khi trong cuộc sống sản xuất và chiến đấu hàng ngày chúng ta hay phải giải quyết vấn đề "Làm thế nào cho tốt hơn ?". Một ví dụ cụ thể sau đây cho ta thấy rõ điều đó. Trong cuộc lùng bắt một tên địch, tình hình xẩy ra là một anh du kích vượt được lên trước anh biết rằng nếu tên địch kịp chạy thoát ra khỏi khu rừng này nó sẽ đến một cái suối lớn ; để nó chạy sang phía bên kia suối thì việc lùng bắt nó sẽ khó khăn hơn nhiều. Qua con suối có những hai cái cầu, mỗi cái cách nhau khá xa, chạy nhanh từ cầu nọ đến cầu kia mất đến 4 phút mà mỗi phút bây giờ rất quý. Nếu trước khi ra khỏi khu rừng anh du kích nhìn thấy hút tên địch chạy về phía chiếc cầu nào thì anh chỉ việc chạy thật nhanh về phía cầu đó để tóm cổ nó. Nhưng anh không biết rõ thằng địch chạy về phía chiếc cầu nào. Vậy bây giờ nên thế nào, đuổi về hướng nào để có lợi nhất đỡ thiệt nhất ; Câu trả lời đến ngay với chúng ta là nên chạy về phía giữa hai chiếc cầu, vì như thế chúng ta chỉ thiệt mất hai phút (có điều là bây giờ trong tất cả các trường hợp ta đều mất 2 phút, nhưng vì ta không muốn chọn hướng liều để có thể bị thiệt nhiều nhất mất những 4 phút !).

Sự chọn hướng đuổi về phía giữa hai cầu có thể coi như một "hỗn hợp vật lí", của hai cách chọn : chọn hướng về phía chiếc cầu phải và chọn hướng về phía chiếc cầu trái. Trong thí dụ này ta thấy cái "hỗn hợp vật lí" vừa nói đến ở trên có thể thực hiện được không những thế, đó là cách giải quyết tốt nhất (trong khoa học người ta gọi là cách *giải quyết tối ưu).* Nhưng có nhiều khi trong thực tế, hỗn hợp vật lí không thể thực hiện được. Ví dụ như một người phụ trách thiết kế một cái máy phức tạp, người đó trình bày cho ta 4 phương án để ta chọn lấy 1. Mỗi phương án đều có điểm yếu, điểm mạnh, thông thường thì ta mong muốn như sau : giá mà đem cái rẻ tiền của phương án thứ nhất cộng thêm quá trình công nghệ tốt của phương án thứ hai, lại cộng thêm được cái tiết kiệm được vật liệu quý của phương án thứ ba, cùng với độ an toàn lớn của phương án thứ tư thì có phải là... cũng có khi cách suy luận đó đưa đến cách giải quyết về kĩ thuật mới mẻ và bất ngờ. Nhưng nếu, hỗn hợp vật lí đó không thể thực hiện được vì không thực tế hay vì lí do nào khác thì sao ? Làm thế nào bây giờ ? Giải quyết thế nào cho tốt hơn ? Giá mà biết kĩ càng cả hiệu quả sau khi chế tạo cái máy phức tạp đó thì có thể quyết định được một cách tốt nhất, tìm được giải đáp tối ưu. Nhưng không biết đầy đủ thì làm thế nào cho đỡ thiệt nhất ?

Câu hỏi tương tự như vậy thường luôn được đặt ra từ lâu, từ thượng cổ, và có lẽ cách giải quyết cũng đã được người ta sử dụng từ lâu. Một chuyện cổ tích mà các bạn đã đọc hay được nghe là : có một chàng trai từ giã gia đình đi tìm hạnh phúc. Đến ngã ba đường anh không biết đi đường nào thì sẽ gặp may, anh bèn lấy một đồng tiền ra gieo sấp hai lần thì đi bên trái, ngửa hai lần thì đi bên phải, còn sấp một lần ngửa một lần thì đi theo con đường giữa. Chàng trai đó gieo tiền như vậy, vì anh nghĩ rằng trời hay vị thần tiên nào đó góp ý cho anh qua sự xếp đặt đồng tiền. Nhưng thực ra anh đã tìm cách quyết định dựa trên cơ sở kết quả của một *thí nghiệm ngẫu nhiên*, (tức là hoàn toàn tình cờ).

Trực giác kì lạ của con người đã đưa anh đến biện pháp tìm giải đáp tối ưu (tức tốt nhất) trong điều kiện hiểu biết không được đầy đủ về tình huống bằng cách thực hiện những hành động ngẫu nhiên. Chàng trai mà ta nói đến ở trên sẽ ngạc nhiên biết bao nếu anh ta biết rằng hàng trăm năm sau, ở thế kỉ thứ 20 chúng ta, sự cầu cứu đến việc gieo tiền được nghiên cứu kĩ lưỡng và được coi là biện pháp tốt nhất, là hành động tối ưu để xử lí đối với lớp rất lớn các tình huống.

Ta lại xét một vài ví dụ nữa khi người ta cần phải quyết định trong những điều kiện không được xác định (có nghĩa là trong đó có những cái gì đó chưa rõ ràng) : Người chỉ huy mặt trận có khi phải ra các mệnh lệnh ngay cả trong các trường hợp lực lượng và cách bố phòng của đối phương chỉ được biết một vài nét chung chung. Người thầy thuốc vừa tiếp nhận bệnh nhân bị chấn thương cấp tính cần phải xử lí khi chưa hoàn toàn hình dung được rõ tình huống và bó buộc phải hành động trước khi nhận được đầy đủ kết quả điều tra và xét nghiệm. Người nói chuyện trước một hội trường không quen biết và thuyền trưởng thuyền đánh cá chỉ biết gần đúng nơi tụ tập và hướng di chuyển của đoàn cá mà người đó muốn đánh ; cả hai người đều ở trong tình trạng tương tự như trên.

Trong các thí dụ nêu ở trên, ta thấy các người phụ trách công việc đều cần giải đáp câu hỏi "làm thế nào để được tốt hơn", nhưng nếu không biết được rõ, nên thế nào mà vẫn cần phải hành động, phải làm cái gì đó, thì làm thế nào ? Tình trạng như vậy hầu như gặp phải ở mỗi bước đi, vì thế cần có một lí thuyết cho bất kì người nào đó cũng có thể theo để tìm những giải đáp tối ưu trong những điều kiện không xác định mà không phải dựa vào trực giác, vào kinh nghiệm, vào trí nhớ hay vào lí trí, về trực giác có thể sai lầm, kinh nghiệm có khi không có, trí nhớ không thể vô hạn và lí trí có thể không đủ sáng suốt.

Lí thuyết đó cần phải đủ minh bạch, và chỉ ra được cách xử lí tối ưu chẳng những trong các tình huống đơn giản mà còn cả trong các tình huống rối ren nữa. Lí thuyết đó cần phải là lí thuyết định lượng (có nghĩa là phải thể hiện được bằng những con số), vì không phải bao giờ ta cũng có thể chấp nhận cách đánh giá thô sơ kiểu như : thế này tốt, thế kia xấu, không tốt. Cần phải đưa vào cách đánh giá định lượng đối với các hệ quả do cách giải quyết này hay nọ đưa đến. Tóm lại, lí thuyết đó phải là một lí thuyết toán học. Hiện nay lí thuyết toán học đó đã được xây dựng và phát triển mạnh mẽ, nó được gọi là *lí thuyết trò chơi*.

Chắc các bạn có thể thắc mắc rằng tại sao lại lấy cái tên "đùa bỡn" như thế để gọi một môn toán học khó, phức tạp và có nhiều ứng dụng trong các lĩnh vực hoạt động khác nhau của con người. Đó là vì nhiều khái niệm và nguyên tắc của lí thuyết này có thể minh họa và giải thích một cách thuận tiện bằng thí dụ các trò chơi có hai hay nhiều người tham dự.

Trong mỗi trò chơi, cũng như trong việc giải quyết hàng loạt các vấn đề thực tế (trong kinh tế, trong quân sự v.v.., như các thí dụ nêu trên chẳng hạn) người ta thường xuyên phải phân tích các tình huống mà ở đó mỗi người tham dự (hay mỗi nhóm người) theo đuổi những mục đích khác nhau, thường thì là các mục đích đối lập nhau, do đó những người tham dự lập thành những phe đối địch. Vì vậy, nói chung các phe cần phải giữ bí mật với đối phương các ý đồ, các số liệu của mình. Bởi thế mỗi phe luôn luôn phải có những quyết định trong những điều kiện có sự không rõ ràng, không xác định. Trong những trò chơi, hay trong những vấn đề thực tế mà ở đó có các phe đối địch, có một điều đặc trưng là kết quả của chuỗi hành động của một phe phụ thuộc vào việc chọn các hành động của đối phương. Những tình huống loại như vậy trong lí thuyết trò chơi được gọi là những tình huống xung đột : Lí thuyết trò chơi chính là công cụ toán học để phân tích và xử lí những tình huống loại như vậy, cho nên còn có thể gọi nó là *lí thuyết toán học các tình huống xung đột*. Mục đích của lí thuyết này là đưa ra được những đề án các cách giải quyết hợp lí và tốt nhất cho mỗi phe trong quá trình của tình huống xung đột.

Mỗi tình huống xung đột lấy trực tiếp ở thực tế ra rất phức tạp, và việc phân tích rất khó khăn vì sự có mặt của nhiều phần tử phụ. Để có thể phân tích tình huống bằng công cụ toán học, cần phải bỏ qua những nhân tố thứ yếu và xây dựng lại một tình huống đơn giản hơn, gọi là mô hình của tình huống thực. Mô hình như vậy được gọi là *trò chơi*. Trò chơi khác với tình huống xung đột ở chỗ nó diễn biến theo những *quy tắc* hoàn toàn xác định. *Trò chơi* trong lí thuyết trò chơi được hiểu là hệ thống các biện pháp bao gồm hàng loạt hành động của các phe tham dự.

Trong trò chơi chỉ có hai phe đối lập gọi là *trò chơi tay đôi* : trò chơi tay đôi trong thực tế có nhiều ý nghĩa hơn cả. Để cho có thể dùng toán học phân tích trò chơi, cần phải đề xuất một cách chính xác những quy tắc của trò chơi. Những *quy tắc* của trò chơi ở đây được hiểu là hệ thống các điều kiện quy định những phương án khả dĩ (tức có thể có) của các hành động các phe, khối lượng các điều hiểu biết của mỗi phe về cách đối xử của phe khác, trình tự thay đổi các "nước đi" (tức các quyết định riêng rẽ được dùng trong quá trình diễn biến trò chơi), và kết quả do tập hợp các "nước đi" dẫn đến. Cái kết quả này ("được" hoặc "thua") không phải bao giờ cũng có biểu thức định lượng, nhưng thường ra, nếu thiết lập được một biểu xích đo lường nào đó, ta có thể biểu thị kết quả đó bằng con số xác định, chẳng hạn như trong trò chơi cờ có thể quy ước trò "được" bằng số +1, "thua" bằng số −1, "hòa" bởi số 0.

Thường thì việc quyết định (tức sự chọn) mỗi nước đi được chấp nhận trong khi tiến hành trò chơi và tùy thuộc vào tình huống cụ thể đã thành hình. Nhưng về phương diện lí thuyết mọi sự sẽ không thay đổi gì nếu tất cả các cách quyết định đó được chấp nhận *từ trước khi chơi*. Muốn vậy người chơi phải lập sẵn bảng liệt kê tất cả các tình huống có thể có trong quá trình trò chơi và dự đoán trước cách quyết định cho từng tình huống một. Về nguyên tắc mà nói, điều này có thể làm được cho bất kì trò chơi nào. Nếu hệ thống các quyết định đã được chấp nhận, người ta nói rằng người chơi *đã có một chiến lược xác định*.

Khi đã chọn chiến lược rồi, người chơi có thể tự mình không tham dự vào trò chơi, mà thay thế sự tham dự của mình, bằng bản kê các quy tắc để một người nào đó áp dụng, người này có thể là người không quan tâm gì đến kết cục của cuộc chơi cả. Chính vì thế mà hiện nay người ta đã đưa chiến lược cho các máy tự động dưới dạng các chương trình xác định để chúng thực hiện. Một ví dụ cụ thể là các máy tính điện tử đã tham gia chơi được cờ "*đam*" (1 loại cờ tướng của châu Âu).

Sau khi đã nói chuyện sơ bộ về lí thuyết trò chơi, vai trò của nó trong đời sống con người, ta chuyển sang minh họa bằng một trò chơi đơn giản mà các bạn trẻ hay chơi từ thuở nhỏ, đó là trò chơi "oẳn tù tì". Quy tắc trò chơi này rất đơn giản hai người tham dự cuộc chơi cùng một lúc dùng bàn tay để giơ ra cái búa, tờ giấy hay cái kéo. "Búa" sẽ được "kéo" (ta quy ước ghi "*được*" bằng + 1) nhưng thua "giấy" (ta quy ước ghi "thua" bằng −1) mà "giấy" lại thua "kéo". Nếu hai người cùng ra một thứ, ta có "hòa" (ghi bằng số 0), có nghĩa là số điểm được của mỗi người bằng 0. Trò chơi này là trò chơi tay đôi (có 2 người tham dự), để tiện ta gọi là em *A* và em *B*. Ta có thể mô tả kết quả chơi của em *A* bằng bảng sau :

		Em B ra		
		Búa	Giấy	Kéo
Em A ra	Búa	0	− 1	1
	Giấy	1	0	− 1
	Kéo	− 1	1	0

Ở đây mỗi người chơi có ba chiến lược. Do kết quả của sự chọn chiến lược, có thể xuất hiện một trong $3 \times 3 = 9$ tình huống. Những kết quả của em *A* trong tất cả 9 tình huống được biểu thị trên bảng. Nếu người chơi biết trước được chiến lược của đối phương trong cuộc chơi sắp đến, thì sự chọn chiến lược tốt nhất của anh ta rất đơn giản : ra "giấy" để chơi với "búa", hoặc "kéo" để chơi với "giấy", hoặc "búa" để chơi với "kéo" nhưng trong thực tế không biết được đối phương sẽ ra cái gì.

Trong 3 chiến lược của mình, mỗi người về khách quan mà xét, không thể nói rằng chiến lược này tốt hơn chiến lược khác, vì "búa" thắng "kéo" nhưng lại thua "giấy", còn "giấy" lại thua "kéo".

Ba chiến lược đó có vai trò như nhau (theo cách nói khoa học là chúng ở trong những điều kiện như nhau, khả năng như nhau. Để có lợi nhất, tức để cho kết quả cuộc chơi được tốt nhất, theo lí thuyết trò chơi ta phải chọn chiến lược một cách ngẫu nhiên, mà ở đây mỗi chiến lược có thể xẩy ra một cách ngẫu nhiên với xác suất là 1/3 (có nghĩa trong ba chiến lược, chiến lược nào cũng có khả năng xẩy ra như nhau). Muốn tìm chiến lược một cách ngẫu nhiên như thế ta hãy dùng thí nghiệm sau : cho vào thùng kín 9 quả bóng y hệt nhau và đánh số từ 1 đến 9 ; từ 1 đến 3 ta quy ước ghi cho "búa", từ 4 đến 6 ghi cho "giấy" còn từ 7 đến 9 ghi cho kéo", xong rồi ta xáo trộn lắc đều. Mỗi lần thò tay vào lấy xong lại lắc và xáo trộn là mỗi lần thử ; mà mỗi lần thử như vậy ta lấy ra được quả bóng nào là 1 sự việc hoàn toàn ngẫu nhiên tình cờ. Cái khả năng xuất hiện 1 chiến lược ở đây xẩy ra 1 cách hoàn toàn ngẫu nhiên, là $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$, hay ta nói ; việc chọn chiến lược ở đây xẩy ra 1 cách ngẫu nhiên với *xác suất như nhau và bằng* 1 : 3 ta thử kiểm lại xem chọn chiến lược bằng cách ngẫu nhiên như thế thì sẽ ra sao. Giả sử xét 1 ván chơi có 3 lần ra quân (tức ba lần oản tù tì em *A* chọn 3 chiến lược của mình bằng 3 lần chọn ngẫu nhiên và độc lập với nhau ở mỗi lần ra quân nếu em *B* ra "búa" thì em *A* sẽ được 1 : 3 ván khi sự chọn ngẫu nhiên chỉ cho em phải ra "giấy" ; em *A* sẽ thua 1 : 3 ván khi sự chọn ngẫu nhiên chỉ cho em phải ra "kéo" ; và "hòa" ở 1 : 3 ván còn lại. Ta thấy, trong ván 3 lần ra quân này sự thắng cuộc trung bình của em *A* bằng 0. Nếu bây giờ em *B* không ra "búa" mà chọn 1 trong 2 chiến lược còn lại (tức hoặc ra "giấy" hoặc ra "kéo") thì tình hình thua được của em *A* vẫn lí luận như trên và sự thắng cuộc trung bình của em *A* vẫn bằng 0.

Ta thấy rằng, em *A* nhờ cách chọn hành động của mình theo cách ngẫu nhiên mà được bảo đảm không bao giờ bị thua liên miên cả. Nếu cứ mỗi lần ra quân em *A* lại chọn chiến lược của mình một cách ngẫu nhiên như thế thì không bao giờ em *B* có thể thắng được cả. Bây giờ giả sử là em *A* chọn các chiến lược của mình với 3 sác xuất khác nhau. Ví dụ trong 9 quả cầu ở thí nghiệm trên, ta quy cho "búa" là số từ 1 đến 5 và cho "giấy" từ số 6 đến số 8, còn số 9 thì ghi cho "kéo", như thế thì sác xuất lần sử dụng chiến lược "búa" là $\frac{5}{9} = 0{,}555...$, sác xuất số lần sử dụng chiến lược "giấy" là $\frac{3}{9} = 0{,}3333...$, của chiến lược "kéo" là $\frac{1}{9} = 0{,}1111...$ theo cách chọn này, chiến lược "búa" sẽ được dùng nhiều hơn.

Thế thì nếu em B áp dụng chiến lược "giấy" em A sẽ thua nhiều hơn được, nhưng nếu em A hãy giờ đổi chiến lược dùng chiến lược "giấy" hay "kéo" thì em A sẽ được nhiều hơn thua.

Ta thấy, sự chọn chiến lược với một xác suất như nhau đối với em A không những là việc làm đúng, mà còn là khả năng duy nhất để tránh thua, em A không còn chiến lược nào khác nữa.

Tất cả những điều vừa nói ở trên đối với em A cũng đúng cho đối phương là em B. nếu em B cũng muốn có kết quả như em A thì em đó cũng phải chọn 3 chiến lược của mình mỗi cái với xác suất như nhau và bằng 1 : 3.

Vấn đề còn lại là : trong thực tế làm thế nào, để thực hiện phép chọn ngẫu nhiên mà ta nói đến ở trên, làm thế nào để có cái gợi ý cho trình tự ngẫu nhiên các chiến lược ? Ở trên, tôi đã nói đến một cách, ở đây lại xin đưa ra một cách nữa : các bạn hãy lấy bất kì vé xe lửa vé xe điện hay vé xem hát nào cũ rồi sử dụng số của nó làm cách chỉ dẫn cho ta trình tự ngẫu nhiên của chiến lược. Muốn thế ta cũng làm như trên, trò các số từ 1 đến 3 là chiến lược "búa" từ 4 đến 6 là chiến lược "giấy", từ 7 đến 9 là chiến lược "kéo" nếu gặp số 0 ta bỏ qua và dùng số tiếp sau cạnh đó... Ví dụ vé xe lửa cũ của bạn tình cờ tìm thấy trong túi có mang số là 79132, nó sẽ cho ta trình tự chiến lược như sau "kéo" "kéo", "búa", "búa", "búa" có thể có bạn thắc mắc là làm như thế phức tạp quá, đơn giản hơn là cứ "nghĩ bừa" ra một con số nào đó có phải hơn không ? Không được đâu, các bạn ạ, vì muốn thực hiện một trình tự ngẫu nhiên các chiến lược các bạn sẽ vô tình sắp xếp trình tự đó theo một quy luật nào đó và do đó một đối phương tinh ý có thể tóm được chiến lược của bạn và dùng biện pháp đối lại, bạn sẽ thua.

Trong thực tế, khi áp dụng lí thuyết trò chơi ta luôn luôn cần đến hành động ngẫu nhiên, vì thế người ta đã đem in những bảng các số ngẫu nhiên. Ví dụ một dòng của một trong những bảng đó như sau :

15 77 01 64 69 58 40 81 16 60 20 00 84 22 28 26 46 66 36

ở dòng này ta thấy có những 9 con số là số 6, đó chẳng qua là ngẫu nhiên mà thôi.

Nếu những con số ngẫu nhiên cần dùng trong máy tính điện tử, thì thường cái trình tự hỗn loạn các số đó được lập ra ngay trên máy đó bằng những chương trình đặc biệt...

THỬ HOÀI NGHI MỘT CHÚT

PHAN ĐÌNH DIỆU

Người ta thường nói : "Chính xác như toán học". Và trong chúng ta, khi học toán, có lẽ ít ai hoài nghi các định lí toán học, mà tính chân lí của chúng luôn được chứng minh chặt chẽ dường như không thể chối cãi được. Tôi nói "ít ai", bởi vì không phải là không có những người, lúc này hay lúc khác, hoài nghi một điều này hay điều nọ của toán học. Lôbasepski đã từ chỗ hoài nghi tính "chân lí" tuyệt đối của tiên đề Ơcơlít về đường song song mà sáng tạo ra hình học Ơcơlít nổi tiếng. Ở đây, tôi muốn nói đến một sự hoài nghi loại khác :

Khi học đại số lớp 9, ta đã biết định lí : *Mọi dãy số thực không giảm và bị chặn đều có giới hạn*. Lên năm thứ nhất đại học, định lí đó đã được chứng minh rất chặt chẽ. Phải chăng trong cái "chân lí" rõ ràng đó có điều gì đáng ngờ ? Xin trình bày một thí dụ : Như ta biết, cho đến nay toán học vẫn chưa giải được bài toán Gônbátsơ nổi tiếng ; nghĩa là chưa biết được rằng mệnh đề "*mọi số chẵn lớn hơn 2 đều là tổng của hai số nguyên tố*" là đúng hay không. Ta xác định một dãy số thực $\{a_n\}$ như sau :

$a_n = 1 - \frac{1}{n}$, nếu mọi số chẵn lớn hơn 2 và bé hơn $n + 4$ đều là tổng của hai số nguyên tố ; $a_n = 2$, nếu ngược lại, nghĩa là nếu có một số chẵn lớn hơn 2, bé hơn n + 4 và không phải là tổng của hai số nguyên tố ; Dãy $\{a_n\}$ như vậy là hoàn toàn xác định, không hề có một điều gì đáng ngờ. Và cũng không có gì đáng ngờ rằng : *dãy $\{a_n\}$ là không giảm và bị chặn*. Từ định lí trên suy ra : *dãy $\{a_n\}$ có giới hạn !* Cái đáng ngờ là ở đây. Chắc bạn sẽ bảo : rõ ràng rằng nếu "mọi số chẵn lớn hơn 2 đều là tổng của hai số nguyên tố" thì dãy $\{a_n\}$ có giới hạn là 1, nếu mệnh đề trên không đúng thì dãy $\{a_n\}$ có giới hạn là 2, như vậy thì kết luận "dãy $\{a_n\}$ có giới hạn" là hoàn toàn hợp lí ! Nhưng bạn sẽ bất lực nếu người ta hỏi bạn : anh nói dãy $\{a_n\}$ có giới hạn, thì xin cho biết giới hạn đó cụ thể là số nào, là 1 hay là 2 ? Phải chăng anh có quyền nói rằng giới hạn là có, khi anh không biết rõ giới hạn đó là số nào, và cũng không biết một phương pháp thiết thực nào để tìm ra cái giới hạn (!) mà anh bảo là có đó ? Cái "có" của anh quả thực là đáng ngờ, hoàn toàn đáng ngờ ! Bạn có thể sẽ trả lời : anh hãy chờ đấy, khi nào toán học giải quyết xong bài toán Gônbátsơ, tôi sẽ bảo cho anh biết cụ thể giới hạn đó là 1 hay là 2. Nhưng xin nói trước, nếu một trăm năm nữa, bài toán Gônbátsơ được giải quyết và bạn trả lời được điều cụ thể trên, thì vấn đề về cơ bản cũng vẫn chưa giải quyết, vì khi đó lại có thể xây dựng một thí dụ tương tự thí dụ của dãy $\{a_n\}$ dựa trên một bài toán chưa giải quyết khác. Mà dù cho sau nghìn vạn năm *toán học bao giờ cũng sẽ có những bài toán chưa giải được !*

Cũng xin thú nhận một điều : cái thí dụ nói trên quả thực cũng có những điều đáng phê phán, vì thực ra phần nào nó cũng mang tính chất chủ quan. Tiếc rằng để xây dựng được những thí dụ có tính chất thuyết phục hơn thì đòi hỏi phải có sự chuẩn bị chu đáo hơn, nên trong phạm vi bài này không thể trình bày được.

Nhưng dù sao, thí dụ nói trên cũng có thể giúp ta đặt vấn đề hoài nghi : cái gọi là "có" trong một số định lí toán học như định lí trên có đáng tin hay không ? Và trong toán học, thế nào mới đáng gọi là "có". Quan niệm về cái "có" trong toán học có cần phải thay đổi hay không, và nếu thay đổi thì thay đổi như thế nào ?

Ở đây, sự hoài nghi cũng đã dẫn đến sự sáng tạo. Để trả lời những câu hỏi đó, ngày nay đã có một thứ toán học tương đối thỏa đáng, tên gọi của nó là : *toán học kiến thiết*. Nếu những hoài nghi loại nói trên thôi thúc và dằn vặt bạn, thì chắc chắn sẽ có lúc, bạn tìm đến với toán học kiến thiết.

NÓI CHUYỆN VỀ SỐ NGUYÊN TỐ

LẠI ĐỨC THỊNH

LTS : Trong mục này, chúng tôi sẽ giới thiệu sơ lược về các ngành của toán học hiện đại, và nhất là các khái niệm quan trọng của toán học hiện đại, cố gắng liên hệ với kiến thức toán học phổ thông. Để đáp ứng yêu cầu nhiều mặt của bạn đọc, đồng thời không làm cho nội dung quá nặng nề, mỗi bài giới thiệu nội dung sẽ thu gọn trong một hai trang báo, có thể chỉ đề cập đến một khía cạnh nào đó của một vấn đề, mà không yêu cầu giới thiệu vấn đề một cách hoàn chỉnh, có hệ thống và liên tục trong nhiều số báo.

Vấn đề số nguyên tố là một trong những vấn đề quan trọng bậc nhất trong lí thuyết về số tự nhiên. Thêm nữa các bài toán về số nguyên tố cũng như nhiều bài toán khác về số luận rất đơn giản về hình thức song lại rất khó về nội dung và rất hấp dẫn. Vì vậy mà rất nhiều nhà toán học thiên tài từ bao đời nay đã góp nhiều công sức làm phong phú nội dung của vấn đề này. Mặc dầu vậy các vấn đề đề ra và chưa được giải quyết ngày càng nhiều, và có những bài toán từ thế kỉ này qua thế kỉ khác đã làm đau đầu nhiều nhà toán học nổi tiếng mà vẫn chưa giải được [(1)]. Trong bài này chúng tôi trình bày với các bạn đọc một vài vấn đề trong lí thuyết số nguyên tố, kết hợp giải đáp thắc mắc của một số bạn đọc về vấn đề này.

(1) Siêpinski nhà toán học lỗi lạc hiện nay, người Ba lan, đã có lần nói rằng : "Số các bài toán chưa giải được càng ngày càng tăng lên vì số các bài toán mới đề ra thì nhiều hơn là số các bài toán giải được". Khi đó có một giáo sư toán nói rằng : "Như thế thì có những bài toán sẽ không bao giờ giải được cả". Siêpinski đã trả lời rằng điều đó hoàn toàn có thể xảy ra, song nếu loài người tồn tại vĩnh viễn thì lại có thể ngược lại ; mặc dầu số các bài toán chưa giải được tăng thường xuyên và vô hạn, nhưng mỗi bài toán đều sẽ được giải đúng lúc. Giả thử rằng mỗi năm đề ra được 10 bài toán mà chỉ giải được có một như thế rõ ràng là số bài toán chưa giải được sẽ tăng vô hạn. Song nếu ta đánh số các bài toán đề ra và giả thử mỗi năm sẽ giải được bài toán mang số nhỏ nhất thì bài toán thứ n sẽ giải được sau n năm, và như thế là mỗi bài toán đặt ra đều được giải đúng lúc của nó.

Trước hết ta nhắc lại định nghĩa của số nguyên tố.

Số nguyên tố là số tự nhiên khác 1 và không có ước nào khác ngoài số 1 và chính nó. Với định nghĩa đó của số nguyên tố thì ta chứng minh được định lí cơ bản sau đây : "*Mọi số tự nhiên lớn hơn 1 đều biểu diễn được một cách duy nhất thành tích các thừa số nguyên tố*". Đến đây đương nhiên đặt ra vấn đề "có bao nhiêu số nguyên tố". Cách đây hơn hai nghìn năm Ơclid đã trả lời được vấn đề này bằng định lí : "có vô số số nguyên tố". Để đi sâu hơn nữa người ta xét sự phân bố các số nguyên tố trong dãy số tự nhiên. Ta gọi $\pi(x)$ là số các số nguyên tố không lớn hơn x, ví dụ $\pi(5) = 3$. Vì có ba số nguyên tố là 2, 3, 5 là không lớn hơn 5. Bài toán về phân bố số nguyên tố chủ yếu là so sánh $\pi(x)$ với x. Vì số các số nguyên tố là vô hạn nên $\pi(x)$ tăng vô hạn cùng với x, tuy vậy cũng lại đã chứng minh được rằng khi x khá lớn $\pi(x)$ là rất nhỏ so với x, hay nói bằng ngôn ngữ của lí thuyết giới hạn là tỉ số $\frac{\pi(x)}{x}$ dần tới không khi mà x tăng lên vô hạn. Việc chứng minh mệnh đề này không khó lắm. Người ta muốn được những kết quả tốt hơn nữa, nên đã cố gắng đi tìm một hàm số quen thuộc mà nó xấp xỉ bằng $\pi(x)$ tại các giá trị khá lớn của x. Đã từ lâu người ta dự đoán hàm số đó có thể là $\frac{x}{lnx}$ (lnx là logarit cơ số e của x, $e = 2,71828...$). Phải trải qua hơn một thế kỉ với sự đóng góp của nhiều nhà toán học thiên tài như Lơgiangđrơ, Gaoxơ, Sêbưsep, Riman... mãi đến năm 1896 Adama và Đờ La Valê Pútsanh, đồng thời và độc lập với nhau, mới giải quyết được vấn đề trên, chứng minh được rằng tỉ số $\pi(x) : \frac{x}{lnx}$ có giới hạn là 1 khi x trở nên vô cùng. Việc chứng minh định lí này phải dựa và lí thuyết hàm số phức và người ta đã có ý nghĩ cho rằng không thể chứng minh được định lí này mà không dùng đến lí thuyết hàm số phức. Nhưng đến năm 1948 thì Selbéc đã chứng minh được định lí này bằng phương pháp sơ cấp nghĩa là không phải sử dụng lí thuyết hàm số phức vào việc chứng minh. Cần phải nói rằng chứng minh định lí trên là rất khó, ở đây chúng tôi chỉ giới thiệu vấn đề để mong giải đáp cho một số bạn đọc về vấn đề phân bố số nguyên tố.

Một vấn đề thứ hai cũng được đề ra đã từ lâu là tìm một biểu thức đơn giản phụ thuộc vào một biến số tự nhiên mà tất cả các giá trị đều là số nguyên tố. Trước hết người ta nghĩ đến một đa thức nguyên, nhưng vấn đề này được giải quyết ngay : để chứng minh được rằng không có một đa thức nguyên nào mà tất cả các giá trị của nó ứng với giá trị tự nhiên của biến số đều là nguyên tố cả. Tuy nhiên người ta cũng đã thấy tam thức $x^2 + x + 41$ lấy các giá trị nguyên tố (khác nhau) với $x = 0, 1, ..., 39$, và tam thức $x^2 - 79x + 1601$ lấy các giá trị nguyên tố (không phải là tất cả đều khác nhau) với $x = 0, 1,...,79$. Cũng đã này ra vấn đề là có hay không một đa thức nguyên lấy vô số giá trị nguyên tố. Đối với nhị thức bậc nhất thì có thể chứng minh được rằng mọi nhị thức $ax + b$ với $(a, b) = 1$ đều lấy vô số giá trị nguyên tố, song người ta chưa biết được một đa thức nào bậc cao hơn 1 mà có tính chất đó. Về vấn đề biểu thức cho số nguyên tố Fecma đã phát biểu rằng các số $F_n = 2^{2^n} + 1 (n = 0, 1,...)$ đều là số nguyên tố, và đã thử thấy rằng : $F_o = 3$, $F_1 = 5$, $F_2 = 17$, $F_3 = 257$, $F_4 = 65537$ đều là các số nguyên tố. Đến năm 1732 Ơle tìm ra rằng số $F_5 = 2^{2^5} + 1 = 4294967297$ là một hợp số mà chia hết cho 641. Bây giờ người ta biết khá nhiều số Fecma (số F_n được gọi là số Fecma) là hợp số. Các số nguyên tố Fecma có điều rất bổ ích là nó liên quan mật thiết đến bài toán chia vòng tròn thành những phần đều nhau bằng thước và compa. Nhân đây xin giới thiệu ý nghĩ của bạn *Trần Mai Chí*, cho rằng số $2^{2^n} + 3^{2^n}$ là nguyên tố với mọi n. Thử lại thì ta thấy với $n = 0, 1, 2$ biểu thức trên cho các số nguyên tố lần lượt là 5, 13 và 97, song với $n = 3$ ta có

$2^{2^3} + 3^{2^3} = 6817 = 17 \times 401$ là một hợp số. Bạn *Nguyễn Toàn* hỏi rằng công thức $f(n)$ nào để cho với n ta tính được số nguyên tố thứ n hay không ($f(1) = p_1 = 2$, $f(2) = p_2 = 3$, ..., $f(n) = p_n$...) câu trả lời là không. Còn như muốn nói $f(n)$ là một hàm số thì đẳng thức $f(n) = p_n$ là một hàm số hoàn toàn xác định vì dãy các số nguyên tố 2, 3, 5, 7, 11,... thì được coi là đã biết đầy đủ. Một loại số nguyên tố nữa thường được nói đến nhiều là số nguyên tố Mensen có dạng $M_p = 2^p - 1$, với p là nguyên tố. Số Mensen có một ý nghĩa quan trọng vì nó có vai trò đặc biệt trong bài toán về số hoàn chỉnh. Về vấn đề biểu thức cho số nguyên tố còn có nhiều biểu thức khác nữa chúng ta không thể trình bày hết ở đây được. Cần phải nói rằng người ta đã chứng minh được rằng có số vô tỉ A sao cho $[A^{3^x}]$ ($[y]$ là phần nguyên của y nghĩa là số nguyên lớn nhất mà không lớn hơn y) lấy các giá trị nguyên tố với mọi giá trị tự nhiên của x. Song vấn đề này chỉ có ý nghĩa lí thuyết mà thôi vì thực tế thì tính cụ thể các số nguyên tố đó ra là việc không phải bao giờ cũng làm được. Người ta cũng đã chứng minh được rằng có số thực $\alpha = \alpha_0$ mà tất cả các số $[2^{\alpha_0}]$, $[2^{\alpha_1}]$,..., với α_n xác định quy nạp bởi công thức $\alpha_n = 2^{\alpha_{n-1}}$, đều là số nguyên tố. Kết quả này cũng như kết quả trên chỉ có ý nghĩa lí thuyết mà thôi. Liên hệ với vấn đề này bạn *Trần Mai Chí* cho rằng các số $A_n = p_2p_3\cdots\ p_n - 2$, $B_n = p_2p_3\cdots p_n - 4$ và $C_n = p_1p_2\cdots\ p_n - p_{n+1}$ đều là số nguyên tố với $n > 2$ (p_i là số nguyên tố thứ i trong thứ tự quen thuộc $p_1 = 2$, $p_2 = 3$...) chỉ cần thử lần lượt với $n = 3, 4, ..., 7$ ta thấy rằng $B_3 = 11$, $B_4 = 101$, $B_5 = 1151$ là nguyên tố, nhưng $B_6 = 3.5.7.11.13 - 4 = 15011 = 17.883$ là một hợp số.

$C_3 = 23$, $C_4 = 199$, $C_5 = 2297$, $C_6 = 30013$ đều là số nguyên tố, nhưng $C_7 = 510491 = 41.12451$ là một hợp số.

Đối với A_n thì cũng bằng cách thử ta thấy rằng các số A_3, A_4, A_5, A_6, A_7 đều là nguyên tố. Tuy nhiên như vậy không có cơ sở nào để khẳng định rằng A_n là nguyên tố với mọi $n > 2$. Có lẽ bằng cách thử với một vài giá trị nữa của n ta có thể được một hợp số A_n nào đó. Còn nếu dự đoán của bạn *Chí* là đúng thì cũng có nhiều chắc chắn rằng việc chứng minh mệnh đề đó là rất khó, và nếu như nó chưa có được ý nghĩa lí thuyết nhất định nào đó. Cũng cần phải nói rằng việc kiểm tra xem một số khá lớn có là nguyên tố hay không là một việc giải được về nguyên tắc, nhưng cũng khó vì phải làm nhiều phép tính. Tuy nhiên đối với các số không lớn lắm thì bằng các máy tính hiện nay việc đó không phải khó khăn lắm. Đối với các số mà bạn *Chí* nêu ra thì để kiểm tra A_8, ta cần làm khoảng trên 300 phép chia và đối với A_9 cần khoảng 1300 phép chia, và như thế có thể mất vài buổi làm tính.

Bây giờ chúng ta chuyển sang một vấn đề khác là vấn đề khoảng cách giữa hai số nguyên tố. Ta xét hiệu $p_{n+1} - p_n$. Có thể chứng minh được rằng trong dãy số tự nhiên có đoạn lớn tùy ý không chứa một số nguyên tố nào. Thật vậy cho trước K, thì trong K số tự nhiên liên tiếp $(K + 1)! + 2$, $(K + 1)! + 3$,..., $(K + 1)! + (K + 1)$ (K ! là tích k số tự nhiên đầu tiên) không có một số nguyên tố nào. Song một mặt khác lại gặp rất nhiều cặp số nguyên tố liên tiếp (gọi là số nguyên tố sinh đôi) mà hiệu của chúng bằng 2 (hiển nhiên là chỉ có một cặp duy nhất hai số nguyên tố 2, 3 là hai số tự nhiên liên tiếp). Có giả thuyết cho rằng có vô số cặp số nguyên tố sinh đôi. Cặp số nguyên tố sinh đôi lớn nhất người ta biết là $p = 1000000009649$ và $p + 2$. Vấn đề này được mở rộng thành vấn đề "Mỗi số chẵn có thể biểu diễn được bằng vô số cách thành hiệu của hai số nguyên tố hay không ?". Người ta cũng thấy có nhiều "bộ bốn số nguyên tố liên tiếp" gồm hai cặp số nguyên tố sinh đôi, nghĩa là p, $p + 2$, $p + 6$, $p + 8$ đều là nguyên tố, ví dụ 11, 13, 17, 19 hay 3251, 3253, 3257, 3259. Bộ bốn số như thế lớn nhất mà người ta biết là $p = 2863\ 308\ 731$ và $p + 2$, $p + 6$ $p + 8$. Cũng có giả thuyết cho rằng có vô số bộ bốn số nguyên tố như vậy.

LÍ THUYẾT NHÓM

HOÀNG XUÂN SÍNH

Cấu trúc nhóm là một cấu trúc đại số quan trọng vào bậc nhất. Nó thâm nhập vào hầu hết mọi ngành của Toán học : trong Đại số, trong Hình học, trong lí thuyết Phương trình vi phân,... ; ngoài ra nó có các ứng dụng quan trọng trong các ngành khoa học quan trọng khác như : Vật lí học, Cơ học lượng tử, Hóa học, Tinh thể học...

Khái niệm nhóm ra đời vào khoảng đầu thế kỉ 19 với các công trình của Côsi về các phép thế, của Aben về một lớp phương trình giải được bằng đại số. Nhưng phải nói Ga-loa là người nhận thấy liên hệ sâu sắc giữa nghiệm của các phương trình đại số và tập hợp các phép thế mà Ga-loa gọi là nhóm các phép thế (1830). Và cũng chính Ga-loa là người nhìn thấy tầm quan trọng của khái niệm nhóm là ở cấu trúc của nó chứ không phải ở tính chất của các phần tử lập thành nhóm. Như vậy ở nửa đầu thế kỉ thứ 19, lí thuyết nhóm phát triển qua lí thuyết nhóm các phép thế. Tới nửa cuối thế kỉ 19, các nhà toán học cho chúng ta khái niệm nhóm các phép dời chỗ và tổng quát hơn, nhóm các phép biến hình. Khái niệm nhóm các phép biến hình đã giúp Cơ-lai thống nhất được các hình học đang phát triển mạnh mẽ ở thời đó. Cơ-lai đã phân loại các hình học theo nhóm các phép biến hình. Các tính chất của một không gian bất biến qua một nhóm biến hình lập thành một hình học.

Sau khi đã tách được "cấu trúc nhóm" qua một số các nhóm cụ thể (nhóm các phép thế, nhóm các phép biến hình...) các nhà toán học đã đi tới định nghĩa nhóm trừu tượng và phát triển một cách độc lập lí thuyết nhóm. Ở đây ta lại được một thí dụ về sự cố gắng không ngừng của toán học để đi từ cụ thể tới trừu tượng và tổng quát, do đó cho phép các ứng dụng rộng rãi mà ta đã thấy trong toán học ngày nay.

Bây giờ chúng ta hãy đi vào định nghĩa một nhóm.

Giả sử N là một tập hợp bất kì không rỗng mà các phần tử kí hiệu là a, b, c... Giả sử trên N ta đã xác định một luật hợp thành trong, nghĩa là một quy tắc cho phép ta từ hai phần tử bất kì $a, b \in N$ thành lập một phần tử c xác định cũng thuộc N. Nếu ta kí hiệu luật hợp thành trong bằng dấu * thì c kí hiệu $c = a * b$ (thường thường trong toán học ta dùng dấu + và., do đó c kí hiệu theo thứ tự $c = a + b$, $c = a.b$.

Nếu ta dùng kí kiệu + thì luật hợp thành gọi là phép cộng, nếu dùng kí hiệu . thì luật hợp thành gọi là phép nhân. Tập hợp N với luật hợp thành trong kí hiệu * gọi là một nhóm nếu luật hợp thành * có các tính chất sau đây :

N_1) Luật hợp thành có *tính chất kết hợp* nghĩa là $a * a * c) = (a * b) * c$ với mọi a, b, c, $\in N$.

N_2) Luật hợp thành có *phần tử trung hòa*, nghĩa là có một phần tử $e \in N$ sao cho $e * a = a * e = a$ với mọi $a \in N$. Phần tử e gọi là phần tử trung hòa.

N_3) Mọi phần tử $a \in$ N đều có *phần tử đối xứng* $a' \in N$, nghĩa là $a * a' = a' * a = e$.

N_4) Luật hợp thành có tính chất giao hoán nghĩa là $a * b = b * a$ với mọi $a, b \in N$ thì nhóm N gọi là một nhóm giao hoán hay nhóm *aben* (do tên nhà toán học Aben).

Trong trường hợp luật hợp thành kí hiệu bằng dấu + thì nhóm N gọi là nhóm cộng (người ta thường dùng kí hiệu + cho các nhóm giao hoán), phần tử trung hòa e kí hiệu 0 gọi là *phần tử không*, phần tử đối xứng a' của phần tử a gọi là phần tử đối của phần tử a, kí hiệu $-a$. Trong trường hợp luật hợp thành kí hiệu bằng dấu . thì nhóm N gọi là nhóm nhân, phần tử trung hòa e gọi là phần tử đơn vị và kí hiệu 1, phần tử đối xứng a' của phần tử a gọi là phần tử nghịch đảo của phần tử a, kí hiệu a^{-1}.

Ta hãy lấy một số ví dụ về những nhóm : Xét tập hợp T^* các số thực dương, phép nhân các số thông thường là một luật hợp thành trong xác định trên T^*.

Thật vậy, nếu a và b là hai số thực dương thì tích $a.b$ cũng là một số thực dương, nghĩa là nếu a và $b \in T^*$ thì $c = a.b \in T^*$. Ta hãy thử xem T^* với phép nhân có thỏa mãn ba tính chất N_1), N_2), N_3) không. Tính chất N_1) thì đương nhiên được thỏa mãn vì phép nhân các số có tính chất kết hợp. Vì số $1 \in T^*$ nên N_2) cũng được thỏa mãn. Cuối cùng cho một số thực dương a, nghịch đảo a^{-1} cũng là một số thực dương, cho nên N_3) được thỏa mãn. Vậy tập hợp các số thực dương lập thành một nhóm đối với phép nhân các số thông thường. Ta gọi nhóm đó là nhóm nhân các số thực dương. Dễ dàng thấy rằng đó là một nhóm *aben*.

Nếu ta lấy tập hợp T các số thực (không nhất thiết là dương nữa) với luật hợp thành là phép cộng các số thông thường, thì cũng làm như ở trên, ta thấy ngay T lập thành một nhóm giao hoán đối với phép cộng mà ta gọi là nhóm cộng các số thực.

Bây giờ ta hãy đưa vào một số ví dụ mà các phần tử của nhóm không phải là những số và luật hợp thành không phải là phép cộng hay phép nhân thông thường như các số.

Ta hãy xét ba vật tùy ý mà ta kí hiệu là A, B, C. Có sáu phép mà ta gọi là phép thế để trao đổi ba vật A, B, C với nhau. Ta hãy đặt tên cho sáu phép thế đó là I, J, K, R, S, T và viết các phép thế đó bằng cách viết các vật A, B, C sau đó bên phải mỗi vật A, B, C viết vật mà vật đó trở thành sau phép thế ; chẳng hạn

$$I = \begin{pmatrix} A & A \\ B & B \\ C & C \end{pmatrix} J = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \\ C & A \end{pmatrix} K = \begin{pmatrix} A & C \\ B & A \\ C & B \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} A & A \\ B & C \\ C & B \end{pmatrix} S = \begin{pmatrix} A & C \\ B & B \\ C & A \end{pmatrix} T = \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \\ C & C \end{pmatrix}$$

phép thế T biến vật A thành vật B, vật B thành vật A, vật C thành vật C ; phép thế I không làm thay đổi vật nào cả, người ta gọi là phép thế đồng nhất.

Như vậy ta được một tập hợp mà ta kí hiệu G_3 gồm sáu phần tử I, J, K, R, S, T.

Bây giờ ta hãy xác định trên G_3 một luật hợp thành trong mà ta gọi là phép nhân. Chẳng hạn ta hãy thực hiện lần lượt hai phép thế J, R trên A, B, C.

$A \qquad A \xrightarrow{J} B \xrightarrow{R} C$

$B \xrightarrow{J} C \xrightarrow{R} B$

$C \xrightarrow{J} A \xrightarrow{R} A$

Kết quả là A biến thành C
B biến thành B
C biến thành A

Như vậy thực hiện lần lượt hai phép thế J, R cho ta cùng kết quả như thực hiện phép thế S. Ta định nghĩa tích của hai phép thế J, R, kí hiệu IR là phép thế S.

Ta cũng tiến hành tương tự như vậy để định nghĩa tích các phép thế khác. Ta chú ý $RJ = T$, do đó phép nhân ở đây không giao hoán (đây là một điều cần chú ý vì phép nhân và phép cộng các số là giao hoán, cho nên ta có xu hướng cho mọi phép toán là giao hoán).

Phép nhân các phép thế không giao hoán nhưng nó kết hợp, có phần tử trung hòa I mà ta gọi là phần tử đơn vị. Cuối cùng cho một phép thế bất kì, ta đều tìm thấy phần tử nghịch đảo của nó. Chẳng hạn phần tử nghịch đảo của J là K, của R là R vì

$$J.\,K = K.\,J = I$$
$$R.\,R = I$$

Kết luận tập hợp G_3 lập thành một nhóm đối với phép nhân các phép thế. Nhóm G_3 gọi là nhóm các phép thế của ba phần tử. Ta có thể lập bảng nhân như sau :

	I	J	K	R	S	T
I	I	J	K	R	S	T
J	J	K	I	S	T	R
K	K	I	J	T	R	S
R	R	T	S	I	K	J
S	S	R	T	J	I	K
T	T	S	R	K	J	I

Các phép quay chung quanh một trục cố định trong không gian lập thành một nhóm giao hoán (tích của hai phép quay có góc quay là α và α' là một phép quay có góc là $\alpha + \alpha'$). Tổng quát hơn, các phép dời hình trong không gian lập thành một nhóm.

Nhóm các phép biến hình cho phép các nhà hình học phân loại các hình học. Chẳng hạn hình học không gian Ơclit nghiên cứu các tính chất bất biến qua các phép dời hình Ơclit.

Bây giờ chúng ta hãy giới thiệu một công cụ đắc lực dùng trong lí thuyết nhóm, đó là khái niệm đẳng cấu (phải nói không phải chỉ lí thuyết nhóm mới dùng công cụ này, mà toàn bộ toán học ngày nay). Ta tưởng tượng có hai nhóm, như hai lâu đài toán học bề ngoài không có gì giống nhau. Nhưng khi nghiên cứu thật kĩ ta thấy chúng cùng "kiến trúc", ta bảo hai nhóm đó là hai mô hình cụ thể của một nhóm trừu tượng, ta bảo chúng đẳng cấu với nhau.

Chúng ta hãy định nghĩa một cách chính xác thế nào là hai nhóm đẳng cấu với nhau. Ta hãy xét một nhóm N với phép toán kí hiệu . và một nhóm thứ hai N'_3 với phép toán kí hiệu +, Ta ? ? nhóm N và nhóm N' đẳng cấu với nhau nếu :

1) Có một sự tương ứng một đối một φ giữa N và N', nghĩa là ứng với một phần tử $a \in N$ là một và chỉ một phần tử $a \in N'$ kí hiệu φ (a), và với một phần tử bất kì b' $\in$ N' ta tìm thấy một phần tử $b \in N$ sao cho $b' = \varphi(b)$. Người ta gọi sự tương ứng một đối một φ là một song ánh. Từ tương ứng một đối một φ ta dễ dàng thấy rằng nếu N hữu hạn thì N' cũng hữu hạn và hai tập hợp có cùng số phần tử.

2) Song ánh φ biến phép nhân trong N thành phép cộng trong N', nghĩa là :

$$\varphi\ (a,\ b) = \varphi\ (a) + \varphi\ (b).$$

Ta lấy một thí dụ cụ thể để hiểu khái niệm đẳng cấu và đồng thời nhìn thấy tầm quan trọng to lớn của khái niệm đó.

Chúng ta đều biết rằng cộng hai số với nhau thì dễ hơn nhân hai số với nhau, nhất là trong trường hợp số lớn, chẳng hạn cộng hai số 68975314 và 95143687 thì thoải mái hơn là nhân hai số đó với nhau nhiều. Trong thiên văn học các khoảng cách trong vũ trụ đều được đo bằng năm ánh sáng. Để có một khái niệm về các khoảng cách trong vũ trụ, chúng ta hãy nhớ rằng một năm ánh sáng bằng 9.460.800.000.000 km. Tóm tắt lại các nhà thiên văn phải sử dụng những con số rất lớn để tính toán, và ta phải nhớ rằng ở thế kỉ 15, 16 người ta chưa có máy tính như ngày nay. Đứng trước tình hình đó, để có thể nhân những số lớn, người ta đã tìm cách biến phép nhân thành phép cộng bằng khái niệm logarit của một số. Khái niệm này cho ta một thí dụ về hai nhóm đẳng cấu với nhau.

Thật vậy ta hãy xét nhóm nhân các số thực dương T^* và nhóm cộng các số thực T.

1) $a \in T^* \xrightarrow{\varphi} \varphi(a) = \log a \in T$, φ rõ ràng là một tương ứng một đối một.

2) $a.b \xrightarrow{\varphi} \varphi(a.b) = \log(a.b) =$

$= \log a + \log b = \varphi(a) + \varphi(b)$

Ta bảo song ánh φ biến phép nhân thành phép cộng. Để biết kết quả của tích hai số a và b, ta lấy $\log a$ cộng với $\log b$, do đó biết log (ab). Biết $\log(ab)$ ta được ab. Như vậy ta chỉ phải cộng hai số $\log a$ và $\log b$ và tránh được việc nhân hai số a và b.

Qua thí dụ trên chúng ta cũng hình dung được một phần nào tầm quan trọng của khái niệm đẳng cấu : ta có hai nhóm đẳng cấu với nhau, nếu việc tính toán trong nhóm này phức tạp ta chuyển sang tính toán ở nhóm đẳng cấu với nó mà trong đó tất nhiên việc tính toán đơn giản hơn. Đó là một việc làm thường xuyên của người làm đại số hiện đại. Muốn nghiên cứu một nhóm, nếu việc nghiên cứu thuận lợi người ta nghiên cứu ngay trong nhóm đó, nếu không người ta nghiên cứu trong một nhóm đẳng cấu với nhóm đó, với điều kiện là nhóm đẳng cấu cho ta nhiều điều kiện nghiên cứu dễ dàng hơn. Nhờ khái niệm đẳng cấu, Cơlai đã đưa việc nghiên cứu nhóm của một đa diện đều về nhóm của một phương trình bậc năm, Poăngcarê đã đưa việc nghiên cứu các hàm Phúc–sơ về việc nghiên cứu nhóm các phép dời hình trong mặt phẳng Lôbatrepski. Và ta còn vô vàn ví dụ tương tự như vậy vì làm Đại số hiện đại là như thế.

Trong thiên nhiên không phải chỉ có cấu trúc nhóm, còn có nhiều cấu trúc khác nữa, nhưng cấu trúc nhóm là cấu trúc khá đơn giản cho nên ta gặp nó trong nhiều địa hạt của khoa học. Do đó mà nó chiếm một địa vị khá quan trọng trong toán học cũng như trong một số lớn ngành khoa học khác.

TỪ BÀN TÍNH GẢY ĐẾN MÁY TÍNH ĐIỆN TỬ

VŨ SƠN

Ngay từ thời thượng cổ để đếm đúng số súc vật săn bắn được hoặc đếm số người trong bộ lạc, con người đã lấy những đốt xương sống của súc vật lồng vào một cái que và gảy dần từng đốt lên một đầu que mỗi khi đếm một đơn vị. Công cụ đó dần dần giúp cho các "nhà toán học" thô sơ của chúng ta biết phép tính cộng và sau này đã phát triển thành bàn tính gảy của Trung Quốc và của Âu châu.

Có tài liệu nói rằng bàn tính Trung Quốc đã xuất hiện gần 6000 năm nay, và ít nhất ta cũng có thể khẳng định được rằng công cụ này đã được sử dụng rộng rãi từ đời Nguyên (thế kỉ 13). Bàn tính gảy du nhập vào Âu châu qua nước Nga vào thời đại phục hưng, hình dáng hơi khác bàn tính Trung quốc ở chỗ không có then ngang và mỗi cột có đủ 10 viên bi. Hiện nay ở Trung Quốc các công xã đều dùng bàn tính. Còn ở Liên Xô mặc dù rất nhiều máy tính hiện đại, người ta vẫn không quên bàn tính. Thí dụ như ở trường Lômônôxôp, ai cũng trông thấy các bà bán hàng một tay gảy bàn tính, một tay bấm nút trên một máy tính điện tự động ! Vì vậy, các bạn chớ coi thường bàn tính gảy, nhất là các bạn cấp hai, trong chương trình có dạy bàn tính gẩy, các bạn cố học cho cẩn thận sử dụng cho thành thạo.

Nói chung bàn tính gảy có thể làm được mọi phép cộng trừ nhân chia và khai căn, nhưng thông dụng nhất vẫn là cộng trừ. Bàn tính gảy đã phần nào đáp ứng được nhu cầu tính toán, về nông nghiệp như tính toán ruộng đất, chia hoa mầu, thu chi các khoản đơn giản v.v.. Bàn tính và một số dụng cụ tính toán thô sơ khác đã góp phần vào việc xây dựng những ngôi đền bằng đá đầu tiên ở một số thành phố Nga ngày xưa như Kiép, Nốpgôrót v.v..

Nhưng sang thế kỉ thứ 16 - 17 công nghiệp và thương mại phát triển đòi hỏi thêm công cụ tính toán. Năm 1617 Nêpe phát minh những "cây đũa" giúp cho làm phép nhân khá tiện lợi, năm 1942, Pátcan mới 17 tuổi, đã giúp cho ông bố làm công tác tài chính đỡ vất vả, đã sáng chế ra một máy tính cộng có thể tự động chuyển được số nhớ từ hàng dưới lên hàng trên. Năm 1694, Lépnít đã xây dựng thành công chiếc máy tính cơ khí đầu tiên thực hiện được đủ 4 phép tính số học. Như vậy đi đôi với cuộc cách mạng kĩ thuật cơ giới hóa, các công cụ tính toán cũng đã dần dà sử dụng nguyên tắc cơ khí như bánh xe răng cưa, khấc hình bậc thang v.v.. chứ không phải chỉ nhờ ngón tay gẩy như ở bàn tính. Cuộc cách mạng kĩ thuật càng đẩy mạnh, thì các công cụ tính toán đó càng phát triển nhất là từ thế kỉ thứ 19. Năm 1874 Ốtne sáng chế ra máy tính gài số trên hình trục, sau này cải tiến thành những chiếc máy kiểu Phêlixơ của Liên Xô hoặc Phi mã của Trung Quốc, mà hiện nay ở ta vẫn thường dùng.

Từ khi cao trào điện khí hóa bắt đầu, những máy tính cơ khí đã dần dà trở thành những máy tính bấm điện như những loại Ascota và Nisa của Tiệp rất thông dụng ở ta.

Đồng thời những máy tính sử dụng bìa đục lỗ cũng ra đời. Ngay từ năm 1801 Lácca đã sáng chế ra một máy dệt điều khiển bằng những tấm bìa đục lỗ để dệt ra các loại vải khác nhau. Nhưng phải đợi ngót một thế kỉ sau mới đủ điều kiện cơ khí và điện khí hóa để thành hình một loạt loại máy sử dụng bìa đục lỗ như : máy đục lỗ, máy kiểm tra, máy lập bảng v.v.. Cho đến nay, các máy này vẫn đang phục vụ đắc lực trong các cơ quan thống kê, tài chính, ngân hàng, thương mại. Một số máy như máy đục lỗ, máy kiểm tra, máy đục kết quả được tham gia vào làm một bộ phận của máy tính điện tử chữ số vạn năng. Vì thế đôi khi các em nghe nói về loại máy này, có thể tưởng lầm đó là máy điện tử. Sự thực loại máy này chủ yếu chỉ sử dụng điện hoặc điện từ. Gần đây có một số máy cũng sử dụng bìa đục lỗ xây dựng với kĩ thuật điện tử và đóng vai trò trung gian giữa loại máy trên và máy tính điện tử chữ số. Từ khoảng cuối thế kỉ 19 đầu thế kỉ 20 trở đi còn dần dà thành hình loại công cụ tính toán mô hình như thước tính Lôgarit, điện tích kế, tích phân kế và máy tính điện tử mô hình. Bước đường tiến triển của loại máy tính này cũng đi từ thấp đến cao : diện tích kế chỉ gồm những bộ phận cơ giới đơn giản như bánh xe răng cưa và chỉ dùng để tính được tích phân những hàm số mà ta vẽ được đồ thị, trong khi đó máy tính điện tử mô hình sử dụng kĩ thuật điện tử, giải được một số lớp phương trình vi phân khá rộng.

Nhưng, như ta đã biết, những máy này khác xa máy tính điện tử chữ số vạn năng về nguyên tắc cấu tạo. Máy mô hình chỉ giải được một số bài toán nhất định với một độ chính xác chừng 3, 4 số lẻ, trong khi máy tính điện tử chữ số vạn năng giải được bất kì loại bài toán nào có thuật toán, với độ chính xác tùy ý. Máy tính điện tử chữ số vạn năng cũng khác xa với các loại máy tính cơ khí, hoặc điện khí nói trên, ở chỗ trong máy tính điện tử mức độ tự động hóa không dừng lại trong phạm vi từng phép tính, mà tự động hóa toàn bộ quá trình tính toán, kể cả khâu chuyển tiếp từ phép tính này sang phép tính khác, dù việc chuyển tiếp đó phụ thuộc vào sự suy luận lôgic lắt léo hoặc vào điều kiện xung quanh tác động phức tạp đến mức nào cũng được. Vì vậy, máy tính điện tử có khả năng sử dụng không những như một công cụ tính toán, mà còn như một công cụ điều khiển tự động. Chính vì vậy, máy tính điện tử chỉ có thể ra đời và bắt buộc phải ra đời trong cuộc cách mạng kĩ thuật về tự động hóa...

Tất nhiên, đã có những thiên tài thấy trước từ lâu một số nguyên tắc vĩ đại của máy tính điện tử chữ số vạn năng, Bêbitgiơ (Babbedge) một giáo sư người Anh, ngay từ năm 1833 đã đề ra một phương án máy tính, trong đó trình bày đầy đủ các nguyên tắc địa chỉ và lưu trữ chương trình, các phép tính lôgic, phép chia nhanh v.v.. Nhưng Babbedge không thể vượt quá thời đại của mình trong việc thực hiện, vì dùng cơ khí như thời đó thì những bánh xe răng cưa cồng kềnh phức tạp sẽ không chuyển động được với tốc độ và mức chính xác thực tế. Vì vậy chẳng bao lâu, công trình của Babbedge đã bị lãng quên, mặc dầu mấy chục năm sau, con cháu ông đôi lần vẫn nhắc đến nó.

Phải đợi đến đầu thế kỉ 20, những khái niệm cực kì mới mẻ về toán học hiện đại dẫn đến sự hình thành lí thuyết, thuật toán (khoảng năm 20) và lí thuyết máy tự động, đặc biệt là máy Turinh (Turing) (năm 30) khi đó lí thuyết về máy tính điện tử mới được xây dựng lại trên cơ sở mới.

Nhưng lần này các tiền đề cần thiết cho sự ra đời của máy tính điện tử chữ số vạn năng đã chín mùi :

– Về nhu cầu kinh tế, sản xuất thì sự kiến thiết quy mô trên toàn thế giới đòi hỏi phải tính nhanh, nhiều và chính xác. Nhu cầu về tự động hóa sản xuất đòi hỏi máy tính tham gia đắc lực vào khâu tự động hóa. Một nhu cầu trực tiếp là nhu cầu về pháo binh phòng không (xem Toán học và Tuổi trẻ số tháng 7-1967) đã tập hợp một số nhà toán học từ năm 1940 để chế ra máy tính hiện đại.

– Về cơ sở kĩ thuật thì công nghiệp điện và điện tử đã đạt mức độ cao, đáp ứng được nhu cầu chế tạo các bộ phận này.

– Về cơ sở toán học, nhất là lôgic học đã đủ tinh vi để phục vụ cho cấu trúc luận lí của máy tính hoàn toàn tự động hóa.

Tuy vậy, việc nghiên cứu còn nhiều khó khăn trở ngại. Từ năm 1940, trong một số phòng thí nghiệm về điện thoại và ở trường Đại học Hacvarơ, người ta đã chế ra một số máy tính dùng rơle điện từ, như máy Mark – 1 và Mark – 2 nhưng đều thất bại. Phải đợi đến năm 1945, máy Eniac ra đời, dùng bóng đèn điện tử bấy giờ mới bắt đầu thành công trong việc xây dựng máy tính điện tử chữ số.

Do nhu cầu thực tiễn sản sinh ra, nên máy tính điện tử cũng trở lại phục vụ thực tiễn rất đắc lực như trong mấy bài báo trước đã giới thiệu và sau này sẽ giới thiệu thêm. Chỉ xin bổ sung một điểm : Ngay sau khi mới ra đời, máy tính điện tử đã giải một bài toán về vật lí hạt nhân và một bài toán về quỹ đạo thiên thể là những bài toán thực tế không thể giải được nếu thiếu máy tính điện tử. Máy tính điện tử không ngừng cải tiến và ngày càng phát triển trên khắp thế giới. Các nước xã hội chủ nghĩa cũng rất chú trọng đến ngành này. Ngay từ năm 1953, Liên Xô đã chế tạo được máy БЭCM là máy tính mạnh nhất châu Âu hồi đó và ngày nay đã sản xuất được máy tính nhanh hàng triệu phép tính một giây. Trung Quốc đã phát động được nhiều trường Đại học và cả trường Trung học chuyên nghiệp chế tạo lấy máy tính điện tử của mình. Ba Lan, Cộng hòa dân chủ Đức, Bungari, v.v.. cũng đã sản xuất được máy tính điện tử. Và chắc hẳn, trong số các em thế nào cũng có nhiều em trở thành các nhà khoa học về máy tính điện tử của nước ta !

NẾU TƯỚC MẤT CHỮ "KHÔNG" TRONG NGÔN NGỮ

PHAN ĐÌNH DIỆU

Bạn thử tưởng tượng xem, nếu bây giờ cấm bạn dùng chữ "không" trong cuộc sống hàng ngày thì chắc sẽ xảy ra lắm điều phiền phức. Thí dụ đến bữa có người mời bạn ăn cơm, vì lí do nào đó bạn không muốn ăn, tất nhiên câu trả lời đơn giản là "tôi *không* ăn". Nếu cấm bạn dùng chữ "không", thì thực cũng khó tìm được cách trả lời. Tùy từng trường hợp, bạn có thể thay câu trả lời nói trên bằng những câu đại loại như "tôi no rồi", "tôi vừa mới ăn xong" v.v.. nhưng rõ ràng là những câu đó cũng không thể diễn đạt nổi cái nội dung đầy đủ của câu "tôi không ăn", những câu thay thế sẽ hoặc thừa hoặc thiếu. Có thể nói, cấm dùng chữ "không " là tước mất một nửa khả năng nhận thức và diễn đạt. Trong bài này, tôi không dám bàn đến chữ "không" nói chung, mà sẽ chỉ nói chút ít về chữ "không " trong toán học thôi.

Ta bắt đầu bằng một vài thí dụ đơn giản : khi học về số thực ta phát biểu định lí : Phương trình $x^2 + 1 = 0$ *không* có nghiệm thực. Và chứng minh như sau : Giả thử có số thực x sao cho $x + 1 = 0$. Khi đó $x^2 = -1$. Một số không âm (x^2) bằng một số âm ! Vô lí. Vậy *không* có số thực x nào nghiệm đúng $x^2 + 1 = 0$. Ta có thể thay cả đoạn đó bằng một đoạn với nội dung tương đương mà hoàn toàn mất chữ "không" : Định lí : Với mọi số thực x, $x^2 + 1$ là một số khác 0. Chứng minh : x là số thực, vậy x^2 là số dương hoặc 0, cộng thêm 1 được số $x^2 + 1$, số này là dương, vậy $x^2 + 1$ khác 0.

Bạn có thể đồng ý rằng hai câu "phương trình $x^2 + 1 = 0$ *không* có nghiệm thực" và "với mọi số thực x, $x^2 + 1$ là một số *khác* 0" có nội dung tương đương, nhưng chắc chắn rằng bạn có thể thắc mắc : Tránh dùng chữ "không" thì lại phải dùng chữ "khác", nào có hơn gì ? Một số *khác* 0 chẳng phải được định nghĩa như là một số *không bằng* 0 là gì ? Muốn giải quyết được thắc mắc đó, ta phải tìm cách định nghĩa khái niệm "khác" mà tránh dùng chữ không, tức là "khác" được định nghĩa độc lập với "không bằng". Có thể làm như sau : Chẳng hạn nếu x và y là những số nguyên, thì ta có thể định nghĩa "*x lớn hơn y* nếu có số dương u sao cho $x = y + u$" và sau đó "*x khác y* nếu hoặc x lớn hơn y, hoặc y lớn hơn x". Với trường hợp số thực, thì có phiền phức hơn chút ít. Ta biết rằng mỗi số thực x đều có một cách biểu diễn thành phân số thập phân vô hạn :

$$x = a_o, a_1 a_2 \dots a_n \qquad (*)$$

Nếu ta không kể những phân số thập phân mà từ một lúc nào đó trở đi mọi chữ số đều là 9 thì mọi số thực có một cách biểu diễn duy nhất thành phân số thập phân vô hạn (thí dụ ta không viết $\frac{1}{2} = 0{,}4000\dots$ mà chỉ viết $\frac{1}{2} = 0{,}5000\dots$)

Giả thử số thực y có cách biểu diễn : $y = b_o b_1 b_2 \dots b_n \dots$ Ta định nghĩa "*x khác y* nếu có một chỉ số n nào đó sao cho a_n khác b_n" (vì a_n và b_n là số nguyên, nên khái niệm "a_n khác b_n" coi như đã biết).

Lấy thêm vài thí dụ : Bạn có thể thay những định lí sau đây :

1) Số 2 *không* có căn bậc hai là số hữu tỉ ;

2) *Không* có hình chữ nhật nào là hình tròn cả ;

3) Trong những hình có chu vi p cho trước thì hình vuông *không* phải là hình có diện tích lớn nhất v.v..

Chẳng hạn bằng những định lí có nội dung tương tự như sau :

1) Với mọi số hữu tỉ a, luôn luôn a^2 khác 2 ;

2) Với mọi hình chữ nhật P và mọi điểm A luôn luôn có thể tìm trên chu vi của P hai điểm B và C sao cho AB có độ dài khác AC.

3) Với mọi hình vuông có chu vi p, luôn luôn có một hình với chu vi p và có diện tích lớn hơn diện tích của hình vuông đó.

(*) *Trong cách biểu diễn đó, a_o là số nguyên : $a_1, a_2 \dots$ là những số nguyên lấy những giá trị từ 0 đến 9.*

Nói vài điều như vậy để nếu bạn đồng ý thì đề nghị bạn thử làm một việc như sau : Khi đọc một khái niệm, một định lí hay một chứng minh nào, nếu trong đó có chữ "không" thì bạn thử tập tìm một cách diễn đạt khác cho khái niệm, định lí hay chứng minh đó mà đừng dùng chữ "không". Làm như thế cũng là một cách tập dượt tư duy lôgic của bạn, và chắc hẳn cũng không phải là một việc vô ích, viển vông. Từ nông đến sâu, bạn có thể làm việc đó trong phạm vi một định lí, một chứng minh, rồi đi ngược lên, làm việc đó cho những định lí đã có trước. Và cao hơn hết là bạn sẽ đi đến ý nghĩ làm việc đó cho toàn bộ toán học ! Dĩ nhiên việc vứt chữ "không" không phải bao giờ cũng làm được dễ dàng đâu.

Nhân đây xin nói thêm một tí. Cái ý định xây dựng một thứ toán học hoàn toàn không có chữ "không" cũng đã được một số nhà toán học chú ý. Người đề xướng và tích cực làm việc này là Griss. Ông ta cho rằng mọi khái niệm, chứng minh có dính dáng đến chữ "không" đều là mơ hồ. Ví dụ cái câu "*không có* hình chữ nhật nào tròn" là rất mơ hồ. Nào có ai biết "hình chữ nhật tròn" là cái gì. Nếu khẳng định "không có hình chữ nhật nào tròn" thế thì anh phải biết "hình chữ nhật tròn" là cái gì nếu như nó có chứ ? Đối với chứng minh cũng vậy. Thí dụ khi chứng minh rằng "phương trình $x^2 + 1 = 0$ không có nghiệm thực", ta giả thử rằng có số thực x sao cho $x^2 + 1 = 0$ rồi đi đến vô lí, từ đó ta quả quyết phương trình $x^2 + 1 = 0$ không có nghiệm thực. Đã không có x sao cho $x^2 + 1 = 0$ thì sao lại có quyền giả thử rằng nó có ! Thế là vô vấn. Từ một điều vô vấn suy ra một điều vô vấn rồi tung ra một định lí. Như vậy không được ! Nhưng thôi xin dừng ở đây vì người viết cũng không có ý định tuyên truyền cho tư tưởng của Giss. Bản thân người viết không phải là môn đồ của thuyết toán Griss và cũng mong các bạn sẽ không là môn đồ của thuyết toán đó. Vì nói cho cùng, chữ "không" đối với chúng ta vẫn đáng quý lắm. Viết bài này chỉ có mỗi một mục đích là giới thiệu với các bạn một cách để tập dượt tư duy lôgic khi học toán mà thôi, chứ tuyệt đối không muốn các bạn vì một vài lập luận có tính chất bài bác trên kia của Griss mà coi thường những phương pháp lôgic chúng ta vẫn dùng trong toán học.

PHƯƠNG PHÁP XẤP XỈ LIÊN TIẾP

HỒ THUẦN
(Hà Nội)

Như các bạn đều thấy, việc giải một phương trình đại số bậc nhất một ẩn

$$ax + b = 0 \qquad (1)$$

là một việc hết sức đơn giản.

Lại nữa, đối với phương trình bậc hai

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (2)$$

ta có những công thức rất đẹp để tìm nghiệm

$$x_{1,2} = (b \pm \sqrt{b^2 - 4ac})/2a$$

Đến như phương trình bậc ba

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \qquad (3)$$

thì việc tìm nghiệm đã phức tạp hơn nhiều. Bằng phép thế ta đưa được (3) về dạng

$$y^3 + py + q = 0 \qquad (4)$$

Đối với (4) ta có công thức giải có dạng

$$y = \sqrt[3]{-q/2 + \sqrt{q^2/4 + p^3/27}} + $$
$$+ \sqrt[3]{-q/2 + \sqrt{q^2/4 + p^3/27}}$$

Ở đây ta hiểu đối với một phương trình nào đó có công thức giải nếu như có thể biểu thị các nghiệm của phương trình đó theo các đại lượng có mặt trong phương trình nhờ vào các phép tính số học (cộng, trừ, nhân, chia), phép khai căn, các hàm lũy thừa, hàm lôga và các hàm số vòng thuận và ngược. Với phương trình bậc bốn ta vẫn còn có công thức để giải nhưng hết sức phức tạp.

Một câu hỏi hết sức tự nhiên là : thế còn đối với phương trình bậc năm và phương trình bậc cao hơn thì sao ? Năm 1826 nhà toán học Na uy Nin Henric Abel (và sau đó là nhà toán học Pháp Galoa) đã chứng minh rằng với $n \geqslant 5$ thì nói chung không có công thức biểu diễn nghiệm của phương trình đại số

$$a_1x^n + a_2x^{n-1} + ... + a_n = 0$$

nhờ vào các phép tính số học và phép khai căn. Đối với hầu hết các phương trình siêu việt, chẳng hạn

$$e^x + e^{-x} = 2/\cos x \ (e = 2{,}71828...)$$

thì tình hình cũng như vậy.

Tuy nhiên điều đó hoàn toàn không có nghĩa là chúng ta chịu bó tay trước những phương trình loại đó. Trong quá trình nghiên cứu cách giải các phương trình, các nhà toán học đã xây dựng được một phương pháp tổng quát để giải các phương trình được gọi là phương pháp xấp xỉ liên tiếp (hay phương pháp lặp) mà ý cơ bản là như sau :

Giả sử phải giải phương trình

$$f(x) = 0 \qquad (5)$$

Ta viết lại phương trình (5) dưới dạng

$$x = \varphi(x) \qquad (6)$$

Nói chung có nhiều cách viết (5) dưới dạng (6). Sau đó ta chọn một giá trị gần đúng ban đầu x_o (việc chọn này nói chung là tùy ý) và thế vào vế phải của phương trình (6), để tính giá trị gần đúng thứ nhất

$$x_1 = \varphi(x_o).$$

Một cách tổng quát, một khi có giá trị gần đúng thứ n là x_n, thì giá trị gần đúng tiếp theo x_{n+1} được xác định theo công thức

$$x_{n+1} = \varphi(x_n) \qquad (7)$$

Như vậy ta xây dựng được dãy số $x_o, x_1, x_2, ..., x_n, ...$ và trong trường hợp dãy số đó hội tụ.

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \xi$$

thì ξ chính là nghiệm của phương trình $x = \varphi(x)$. (Ở đây ta giả thiết $\varphi(x)$ là hàm liên tục, có nghĩa $\lim\limits_{x \to \alpha} \varphi(x) = \varphi(\alpha)$)

Thực vậy, xét đẳng thức (7) ta thấy khi n tiến tới vô cùng vế trái tiến tới ξ còn vế phải do $\varphi(x)$ là hàm liên tục nên tiến tới $\varphi(\xi)$. Từ đó $\xi = \varphi(\xi)$. Điều đó có nghĩa ξ là nghiệm của phương trình $x = \varphi(x)$.

Trong thực tế ta tiến hành như sau. Giả sử sau một số bước ta có $x_n \approx x_{n+1}$ với độ chính xác cho trước. Khi đó vì $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ nên ta cũng có $x_n \approx \varphi(x_n)$ với độ chính xác cho trước. Do đó có thể lấy x_n là giá trị gần đúng của nghiệm của phương trình $x = \varphi(x)$.

Ta lấy một ví dụ : Giải phương trình

$$10x - 1 - \cos x = 0 \qquad (8)$$

với độ chính xác tới 0,001.

Ta viết lại (8) dưới dạng sau

$$x = (1 + \cos x)/10 \qquad (9)$$

Chọn $x_o = 0$ và thay vào vế phải của (9), ta có

$$x_1 = (1 + \cos 0/10) = 0{,}2$$

Lại thay $x = 0{,}2$ vào vế phải của (9), ta có

$$x_2 = (1 + \cos 0{,}2)/10 \approx (1 + 0{,}98)/10 = 0{,}198$$

Tiếp tục ta có

$$x_3 = (1 + \cos 0{,}198)/10 = 0{,}198$$

Ta thấy đẳng thức $x_2 = x_3$ được thỏa mãn với độ chính xác tới 0,001. Điều đó có nghĩa là số $x_2 = 0{,}198$ là nghiệm với độ chính xác tới 0,001 của phương trình

$$x = (1 + \cos x)/10.$$

Trên đây đã trình bày bản chất của phương trình xấp xỉ liên tiếp để giải phương trình $f(x) = 0$. Vấn đề còn tồn tại là hàm $\varphi(x)$ trong (6) phải như thế nào để quá trình lặp hội tụ (tức dãy $\{x_n\}$ hội tụ) và khi đó cần đánh giá tốc độ hội tụ của quá trình lặp (tức dãy các giá trị gần đúng $x_o, x_1, x_2, ...$ tiến tới nghiệm của phương trình $x = \varphi(x)$ nhanh chậm ra sao). Để giải quyết các vấn đề đó ta cần đưa vào khái niệm ánh xạ co. (Vì chỉ xét trên trục số thực nên ở đây ta có thể hiểu ánh xạ là hàm số thông thường).

Cho hàm $\varphi(x)$ xác định trên đoạn $[a, b]$. Đó là một quy tắc làm ứng với mỗi $x \in [a, b]$[1] một giá trị hoàn toàn xác định và duy nhất $\varphi(x)$. Quy tắc đó được gọi là ánh xạ. Nếu $\varphi(x) \in [a, b]$ với mọi $x \in [a, b]$ thì ta nói $\varphi(x)$ là ánh xạ từ $[a, b]$ vào chính nó.

---

(1) *$x \in [a, b]$ đọc là "x thuộc $[a, b]$", có nghĩa x là một điểm của $[a, b]$*

Ánh xạ $\varphi(x)$ từ $[a, b]$ vào chính nó được gọi là ánh xạ co nếu nó làm giảm khoảng cách giữa hai điểm bất kì $x_1, x_2 \in [a, b]$ ít nhất M lần, với $M > 1$. Nói cách khác có tồn tại một số q sao cho $0 < q < 1$ và với hai điểm bất kì $x_1, x_2 \in [a, b]$ đều thỏa mãn bất đẳng thức

$$|\varphi(x_2) - \varphi(x_1)| \leq q|x_2 - x_1|^{(1)}$$

(ở đây $q = 1/M$).

Dễ thấy là nếu $\varphi(x)$ là ánh xạ co trên toàn trục số thì bao giờ cũng tìm được một đoạn thẳng mà qua phép ánh xạ $\varphi(x)$ lại biến thành một bộ phận của chính đoạn đó.

Thực vậy, lấy a là điểm bất kì. Đặt $b = \varphi(a)$. Chọn số q_1 sao cho $q < q_1 < 1$. Lấy $R = |b - a|/(1 - q_1)$. Ta sẽ chứng tỏ đoạn $[a - R, a + R]$ chính là đoạn phải tìm.

Lấy một điểm bất kì $x \in [a - R, a + R]$. Khi đó $|x - a| \leq R$. Ta có

$$|\varphi(x) - b| = |\varphi(x) - \varphi(a)| \leq q|x - a| \leq qR$$

Nhưng mặt khác

$$|\varphi(x) - a| = |\varphi(x) - b + b - a| \leq |\varphi(x) - b| + |b - a| \leq$$

$$\leq qR + |b - a| = qR + (1 - q_1)R =$$

$$= (1 + q - q_1)R < R$$

Điều đó chứng tỏ mọi điểm thuộc đoạn $[a - R, a + R]$ qua ánh xạ $\varphi(x)$ lại biến thành điểm của chính đoạn đó.

Người ta đã chứng minh được điều kiện đủ cho sự hội tụ của quá trình lặp (7) như sau :

Định lí 1. Giả sử $\varphi(x)$ là ánh xạ co từ $[a, b]$ vào chính nó. Khi đó với mọi điểm x_o thuộc $[a, b]$, dãy số $x_o, x_1, ..., x_n, ...$ trong đó $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ hội tụ tới nghiệm ξ của phương trình $x = \varphi(x)$ (ξ là nghiệm duy nhất của phương trình $x = \varphi(x)$ nằm trên đoạn $[a, b]$).

Để đánh giá tốc độ hội tụ của phương pháp xấp xỉ liên tiếp, ta có :

$$|x_n - \xi| < q|x_{n-1} - \xi| < q^2|x_{n-2} - \xi| <$$

$$< ... < q^n|x_o - \xi|.$$

Điều đó có nghĩa sai số $|x_n - \xi|$ khi n tăng, giảm ít nhất cũng với tốc độ của cấp số nhân có công bội $q < 1$.

Bây giờ ta đưa ra một số ví dụ áp dụng định lí 1.

Ví dụ 1. Giải phương trình

$$x^3 + 4x - 1 = 0 \quad (10)$$

Ta viết (10) dưới dạng

$$x = 1/(4 + x^2) \quad (11)$$

Ở đây $\varphi(x) = 1/(4 + x^2)$.

Với hai điểm bất kì x_1, x_2, ta có

$$|\varphi(x_2) - \varphi(x_1)| = |1/(4 + x_2^2) - 1/(4 + x_1^2)| =$$

$$= |x_1^2 - x_2^2|/(4 + x_2^2)(4 + x_1^2) =$$

$$= |x_1 + x_2|/(4 + x)(4 + x)|x_2 - x_1|.$$

Nhưng theo bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân ta có :

$$|x| = (1/2)\sqrt{4x^2} \leq (4 + x^2)/4$$

Do đó

$$|x_1 + x_2| \leq |x_1| + |x_2| \leq$$

$$\leq [(4 + x^2) + (4 + x_2^2)]/4 = 2 + (x_1^2 + x)/4 \leq$$

$$\leq 2 + (x + x)/2 + (x_1^2 x_2)/8 = (1/8) \times$$

$$\times (4 + x_1^2)(4 + x_2^2)$$

Từ đó $|\varphi(x_2) - \varphi(x_1)| \leq (1/8)|x_2 - x_1|$

Điều đó chứng tỏ $\varphi(x)$ là ánh xạ co trên toàn trục số. Ta tìm một đoạn thẳng mà qua phép ánh xạ $\varphi(x)$ lại biến thành một bộ phận của chính nó theo cách nêu trên.

Lấy $a = 0$, $b = \varphi(0) = 1/4$. Vì $q = 1/8$ ta lấy $q_1 = 1/2$.

Khi đó $R = |b - a|/(1 - q_1) = 1/2$ Đoạn $[-1/2, 1/2]$ là đoạn phải tìm. Trên đoạn đó, theo định lí 1, có duy nhất một nghiệm của phương trình (11). Để tìm nghiệm đó, trên $[-1/2, 1/2]$ ta lấy một điểm x_o tùy ý, chẳng hạn $x_o = 0$. Áp dụng phương pháp lặp ta có

$$x_1 = 1/4 = 0{,}25$$

$$x_2 = 1/[4 + (0{,}25)^2] = 1/4{,}0625 = 0{,}2461$$

$$x_3 = 1/[4 + (0{,}2461)^2] = 0{,}2463$$

$$x_4 = 1/[4 + (0{,}2463)^2] = 0{,}2463$$

Ta có $x_3 = x_4$ với độ chính xác tới 0,0001. Có nghĩa là nghiệm của phương trình (11)

---

(1) *Vì trên trục số thực, $[x_2 - x_1]$ chính là khoảng cách giữa hai điểm x_1 và x_2.*

nằm trên $[-1/2, 1/2]$, với độ chính xác tới 0,0001 bằng 0,2463.

Vì $\varphi(x)$ là ánh xạ co trên toàn trục số nên phương trình (11) không còn nghiệm thực nào khác.

Ví dụ 2. Thử xem có thể áp dụng phương pháp xấp xỉ liên tiếp để giải phương trình sau đây được không ?

$$f(x) \equiv x^3 - x - 2 = 0 \qquad (12)$$

Nếu ta viết (12) dưới dạng $x = x^3 - 2$ (13)

Ở đây $\varphi(x) = x^3 - 2$; $\varphi(1) = -1 < 1$; $\varphi(2) = 6 > 2$, nên phương trình có nghiệm trên đoạn [1, 2] (vì nghiệm của phương trình $x = \varphi(x)$ chính là giao điểm của hai đồ thị $y = x$ và $y = \varphi(x)$). Nhưng ánh xạ $x^3 - 2$ không là co trên đoạn [1, 2] vì không biến (ánh xạ) đoạn [1, 2] thành một bộ phận của chính nó.

Tuy nhiên nếu ta viết phương trình (12) dưới dạng :

$$x = \sqrt[3]{x+2} \qquad (14)$$

ta sẽ có ở đây $\varphi(x) = \sqrt[3]{x+2}$ và với

$$x_1, x_2 \in [1, 2]$$

$$|\varphi(x_2) - \varphi(x_1)| = [\sqrt[3]{x_2+2} - \sqrt[3]{x_1+2}] =$$

$$= |(x_2 - x_1)/\sqrt[3]{(x_2+2)^2} + \sqrt[3]{(x_1+2)(x_2+2)} +$$

$$+ \sqrt[3]{(x_1+2)^2}| \leq |x_2 - x_1|/3\sqrt[3]{9}$$

(vì với $x_1, x_2 \in [1, 2]$ ta có $x_1 \geq 1, x_2 \gg 1$)

Thành thử $\varphi(x) = \sqrt[3]{x+2}$ là ánh xạ co trên [1, 2]. Lấy $x_o = 1$ ta có

$$x_1 = \sqrt[3]{3} = 1,442$$

$$x_2 = \sqrt[3]{3,442} = 1,510$$

$$x_3 = \sqrt[3]{3,510} = 1,520$$

$$x_4 = \sqrt[3]{3,520} = 1,521$$

$$x_5 = \sqrt[3]{3,521} = 1,521$$

Như vậy với độ chính xác tới 0,001, nghiệm của phương trình (12) trên đoạn [1, 2] bằng 1,521. Phương trình (12) không còn nghiệm thực nào khác (dễ dàng chứng minh).

Qua hai ví dụ trên cũng thấy được tiêu chuẩn hội tụ của phương pháp lặp nêu ra ở định lí 1 không tiện dùng lắm vì phải chứng minh khá nhiều bất đẳng thức phức tạp. Định lí sau đây cho ta một tiêu chuẩn về sự hội tụ của phương pháp xấp xỉ liên tiếp đơn giản hơn nhiều.

Định lí 2. Giả sử $\varphi(x)$ là ánh xạ từ $[a, b]$ vào chính nó và thỏa mãn trên $[a, b]$ bất đẳng thức

$$|\varphi'(x)| \leq q < 1$$

Khi đó với mọi $x_o \in [a, b]$, dãy $x_o, x_1, ..., x_n, ...$ trong đó $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ hội tụ tới nghiệm của phương trình $x = \varphi(x)$ nằm trên $[a, b]$.

Định lí 2 chính là hệ quả của định lí 1. Với định lí 2 ta thấy ngay phương trình

$$x = (\cos x + \sin x)/4 \qquad (15)$$

là giải được bằng phương pháp lặp.

Thực vậy, ở đây $\varphi(x) = (\cos x + \sin x)/4$

do đó $\varphi'(x) = (-\sin x + \cos x)/4$

Vì $|\sin x| \leq 1, |\cos x| \leq 1$, ta có

$$|\varphi'(x)| = |(-\sin x + \cos x)/4| \leq$$

$$\leq (|\sin x| + |\cos x|)/4 \leq 1/2.$$

Để kết luận cần chứng minh rằng phương pháp xấp xỉ liên tiếp là một trong những phương pháp tổng quát nhất để giải phương trình. Nhiều phương pháp khác như phương pháp dây cung, phương pháp Niu tơn (còn gọi là phương pháp tiếp tuyến), tuy là những trường hợp riêng nhưng trong nhiều trường hợp lại tỏ ra rất có hiệu lực. Mong sẽ có dịp trình bày với các bạn những phương pháp đó.

Cuối cùng, để nắm chắc phương pháp xấp xỉ liên tiếp trình bày trên, đề nghị các bạn tự giải những phương trình sau (bằng phương pháp lặp).

1. $x - 4 + 2^x = 0$
2. $(1/2)\text{arctg}x - x + 1 = 0$
3. $x = 1 + \sqrt[3]{x}$
4. Tính $\sqrt[3]{970}$ với độ chính xác tới 0,001
5. Tìm phương pháp tính $\sqrt[k]{a}$ (k nguyên dương, $a > 0$).
6. $10^x - 2 - x = 0.$

MỘT SỐ THÀNH TỰU TRONG LĨNH VỰC NHẬN DẠNG

VŨ SƠN

Trong một số báo trước (số 7-8-1972) chúng ta đã làm quen với lí thuyết nhận dạng. Ngành khoa học non trẻ này đã phát triển mạnh mẽ và có nhiều ứng dụng rộng rãi trong các lĩnh vực khác nhau. Có ứng dụng đã được đưa vào thực tiễn sản xuất và chiến đấu trong các nước tiên tiến. Có những kết quả mới đạt được trong giai đoạn thí nghiệm, nhưng mở ra nhiều triển vọng vô cùng tốt đẹp.

Trước hết, lí thuyết nhận dạng giúp ích ngay cho việc sử dụng máy tính điện tử. Thật thế, máy tính điện tử làm các phép tính cộng trừ nhân chia với tốc độ hàng vạn, hàng triệu phép tính một giây, nhưng tốc độ đưa thông tin vào máy quá chậm, lại phải qua khâu chuẩn bị rất lâu. Làm thế nào cho máy tính trực tiếp đọc được chữ viết đó là ước mơ của những người công tác máy tính. Chính lí thuyết nhận dạng đang giúp cho người ta thực hiện được ước mơ đó. Thật vậy, chỉ cần viết bằng một thứ mực nhiễm từ để chỗ nào có nét chữ đi qua tương ứng với chữ số 1, ngược lại là 0. Những nét chữ nhiễm từ đó sẽ làm thay đổi điện từ trường do máy đọc tạo ra ở xung quanh, nhờ đó thông tin được đưa vào trong máy, sau khi được xử lí bằng thuật toán nhận dạng, sẽ được máy tính nhận rõ đó là chữ gì.

Máy có thể đọc chữ một cách nhanh chóng và tiện lợi hơn nữa, nhờ tác dụng của tế bào quang điện. Ta chỉ cần viết chữ bằng mực thường rồi dùng một luồng ánh sáng mạnh chiếu vào chữ, thế là những điểm trắng và điểm đen trên giấy sẽ được biến thành những điểm có dòng điện hoặc không có dòng điện, tức là số 1 và số 0.

Tuy nhiên, hiện nay chủ yếu người ta chỉ mới cho máy đọc được các chữ đánh máy, có kích cỡ như nhau và hình dạng tương đối chính quy, chỉ có một vài nét sai lệch chút ít. Dù sao, đọc được chữ in hoặc chữ đánh máy cũng đã có tác dụng thực tế là nâng cao gấp nhiều lần tốc độ đưa thông tin vào máy. Nhờ đó có thể đưa trực tiếp cả một trang sách vào cho máy tính điện tử phiên dịch được nhanh chóng sang tiếng nước khác.

Máy nhận dạng cũng giúp cho bưu điện đọc được các địa chỉ đánh máy trên các phong bì thư.

Đối với chữ viết tay, việc nhận dạng có khó hơn. Tuy nhiên, máy đã có thể nhận dạng được các chữ số và chữ cái viết bình thường. Người ta dự kiến sẽ dùng máy nhận dạng để đọc nhanh cả những bản ghi tốc kí, tức là những nét chữ viết rất tháu. Trong một số thí nghiệm, máy cũng đã tập phân biệt được chữ do người này viết với chữ do người khác viết.

Máy cũng đã nhận dạng tiếng nói có kết quả. Người ta đã trực tiếp đọc cho máy tính nghe những số bao gồm các chữ số 0, 1, 2, ...,9 và cả một số tín hiệu khác nữa như : chấm, phẩy, dừng lại, cộng, trừ, x, y, v.v.... Kết quả thu được khá tốt. Chẳng hạn, nếu một người đọc 10 chữ số cho máy "học và thi" thì máy "quen giọng" người này nên đã nghe hiểu đúng tới 99,7%. Nếu có tới 20 người đọc cho máy nghe thì kết quả non hơn, khoảng 97,9%. Đó là kết quả phân biệt các từ khác nhau. Còn đối với việc phân biệt giọng nói của những người khác nhau cùng đọc một từ, thì kết quả còn non hơn. Chẳng hạn, trong một thí nghiệm, máy đã phân biệt được giọng nói của 3 người khác nhau với độ tin cậy 77%.

Tiếng nói truyền đi xa tới 7km theo đường dây điện thoại thông thường cũng đã được nhận dạng với kết quả tương đối khả quan : nếu chỉ dùng 4 từ thì đúng gần 100%, nếu dùng 10 từ (10 chữ số) thì đúng 75 – 80%. Việc phân loại các hình dạng khác nhau nhiều khi đạt tới mức độ tinh vi khá cao. Trong y học, để chẩn đoán bệnh tim, các bác sĩ thường cho áp vào ngực một máy điện để đo những dao động của tim và ghi hình ảnh đó trên giấy gọi là điện tâm đồ. Lẽ tất nhiên, điện tâm đồ của người khỏe và của những người mắc các bệnh tim khác nhau đều có những đặc điểm riêng, các bác sĩ nhìn quen có thể phân biệt được. Máy nhận dạng có thể bắt chước bác sĩ mà phân loại được các điện tâm đồ để nhận dạng được các điện tâm đồ của người ốm. Cụ thể, trong một thí nghiệm, người ta đã cho máy học xem 107 điện tâm đồ sau đó cho thi : Máy được xem 57 điện tâm đồ mới và cho chẩn đoán bệnh tim, kết quả đúng chừng 80%.

Việc chẩn đoán bệnh bằng phương pháp nhận dạng còn được tiến hành trong nhiều trường hợp khác. Để giúp cho việc chẩn đoán người ta thường lập cho mỗi bệnh nhân một hồ sơ bệnh án, trong đó các triệu chứng khám thấy, hoặc các kết quả xét nghiệm thu được đều có thể ghi bằng số hoặc mã hóa (như nhiệt độ đo được, số hồng cầu đếm được, lượng an-bu-min lắng đọng trong nước tiểu khi yếu thận, v.v...). Bác sĩ có kinh nghiệm phân tích bệnh án sẽ phân loại được các bệnh án theo các bệnh thường gặp và khi nghiên cứu một bệnh án mới, sẽ xếp bệnh án đó vào đúng loại bệnh. Nội dung công việc này thực chất là một bài toán nhận dạng, vì vậy người ta có thể dùng máy tính điện tử làm việc theo thuật toán nhận dạng để phân loại bệnh án và chẩn đoán bệnh. Nhiều bệnh viện ở nước ngoài đã thí nghiệm để máy nhận dạng trợ lực thêm cho thầy thuốc, kết quả tương đối tốt.

Máy nhận dạng không những chẩn đoán được cho người mà còn chẩn đoán bệnh của máy móc nữa, ta gọi đó là chẩn đoán kĩ thuật. Không phải đợi đến khi máy liệt hẳn mới đoán xem nó hỏng ở bộ phận nào mà ngay khi một cỗ máy đang chạy, người ta ghi vào một hồ sơ các thông tin thu được xung quanh cỗ máy, như tiếng máy chạy, dòng điện máy phát ra, chấn động máy gây ra, v. v... Nghiên cứu và phân loại các hồ sơ, có thể đúc rút được kinh nghiệm xem ứng với hồ sơ như thế nào thì cỗ máy bị hỏng ở bộ phận nào. Đây cũng là bài toán nhận dạng, tất nhiên có thể giao cho máy tính điện tử giải quyết được.

Việc phân tích phân loại các tư liệu không phải chỉ áp dụng đối với các bệnh án hoặc hồ sơ máy, mà còn áp dụng trong nhiều lĩnh vực như khí tượng, địa chất, v.v...

Người ta đã thử tập hợp các số liệu về khí tượng từ tháng 1-1961 đến tháng 4-1961 ở một địa phương và giao cho máy tính điện tử phân tích. Thời tiết vùng này trong khoảng thời gian đó (cuối đông, đầu xuân) luôn luôn biến đổi, khó dự đoán ngay cả đối với những nhà khí tượng học có kinh nghiệm. Vậy mà người ta đã dùng những tư liệu đó dạy cho máy tính học được, rút được kinh nghiệm dự báo. Sau đó người ta cho máy tính thi, thử dự báo thời tiết cho 18 ngày. Kết quả nói chung tốt, thậm chí máy tính đã rút ra được một vài kết luận giúp cho các nhà khí tượng sau này dựa vào đó dự báo đúng hơn trước.

Máy nhận dạng còn giúp các nhà địa chất phán đoán được sự phân bố các quặng. Chẳng hạn khi khoan giếng dầu lửa, cần dựa vào các số liệu địa chất đo đạc được để phân biệt các lớp nước và lớp dầu. Dùng một phương pháp riêng biệt nào đó để phán đoán thì chưa đủ chắc chắn. Cần phải thu thập tất cả các số liệu đo được lập thành một bảng tổng hợp cho mỗi trường hợp và phân tích so sánh các bảng tổng hợp ứng với các trường hợp có dầu và không có dầu. Người ta đã thử dùng máy nhận dạng phân loại các bảng tổng hợp như vậy, kết quả trong 180 trường hợp chỉ sai có 1 trường hợp.

Trong lĩnh vực quân sự, lí thuyết nhận dạng được áp dụng vào công tác tình báo – do thám. Đã có những thí nghiệm dùng máy nhận dạng để phân tích các bức ảnh do máy bay hoặc vệ tinh chụp được, nhằm phát hiện mục tiêu, hoặc dùng máy nhận dạng để tìm tầu ngầm của đối phương.

Trong lĩnh vực thông tin, máy nhận dạng giúp ta phân biệt được tiếng ồn (tạp âm) với những âm thanh mang thông tin thực sự, do đó làm tăng thêm nhiều lần khả năng của các kênh truyền tin.

Xem như vậy đủ thấy lí thuyết nhận dạng có khả năng giúp ích rất nhiều trong thực tiễn sản xuất và chiến đấu. Tuy nhiên, những ứng dụng trong lĩnh vực lí luận – học thuật cũng không kém phần quan trọng.

Khả năng nhận dạng của máy cũng là khả năng máy rút kinh nghiệm để tự tổ chức sao cho ngày càng tốt hơn. Đây cũng là vấn đề tương tự với việc dùng máy tính để đánh cờ ngày càng giỏi hơn, làm thơ ngày càng hay hơn v.v... và các công việc khác mô hình hóa các chức năng của bộ óc. Vấn đề này liên quan chặt chẽ với bài toán tự tổ chức của các hệ thống điều khiển học. Nhà bác học Léc–ne đã nói về bài toán đó như sau :

"Về mặt khó giải quyết và về những ảnh hưởng đối với khoa học và thực tiễn, việc tấn công vào bài toán tự tổ chức có thể so sánh với việc tấn công vào bí mật hạt nhân nguyên tử. Và nếu nửa đầu của thế kỉ 20 sẽ bước vào lịch khoa học như một giai đoạn các phát minh cơ bản trong lĩnh vực vật lí hạt nhân, thì nửa sau của thế kỉ ta bi vọng sẽ được đánh dấu bởi sự giải quyết bài toán trung tâm của điều khiển học : bài toán tự tổ chức".

Muốn thấy rõ hơn khả năng nhận dạng của máy tính, nhiều khi mang tính chất tương tự như khả năng phát minh, sáng tạo của bộ óc, ta hãy xét thí dụ cụ thể sau đây :

Cho một bảng số

a	b	c
5	4	100
2	12	48
3	8	72
8	2	128
7	3	147
10	1	100

Biết rằng giữa 3 số a, b, c có một hệ thức chỉ gồm các phép tính cộng trừ nhân chia, hãy tìm hệ thức cụ thể đó.

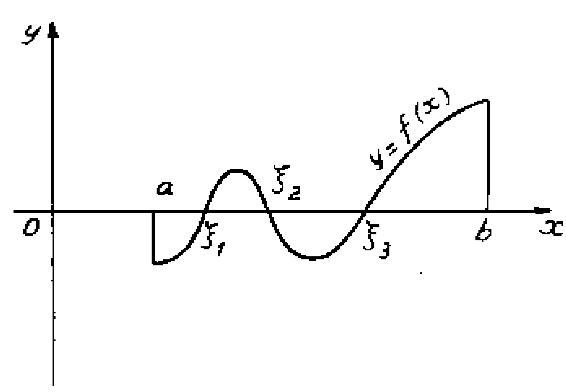
Bài toán này cũng là một bài toán nhận dạng, cụ thể là nhận dạng hệ thức giữa các số a, b, c. Bạn thử giải xem, nếu lúng túng thì máy tính sẽ trả lời hộ : đó là hệ thức $b = c/a^2$. Bạn chớ ngạc nhiên, chẳng qua lí thuyết nhận dạng chỉ mới đạt được một số kết quả ban đầu mà đã kì diệu như vậy, những thành tựu lớn lao hơn nữa còn đang chờ tương lai, và có lẽ chờ các bạn trẻ của chúng ta nữa đấy !

PHƯƠNG PHÁP DÂY CUNG

HỒ THUẦN

Trong báo Toán học và tuổi trẻ số 58, tôi đã giới thiệu với các bạn về phương pháp xấp xỉ liên tiếp. Đó là một trong những phương pháp tổng quát nhất để giải gần đúng các phương trình. Trong bài này sẽ trình bày về phương pháp dây cung là một trường hợp riêng của phương pháp lặp.

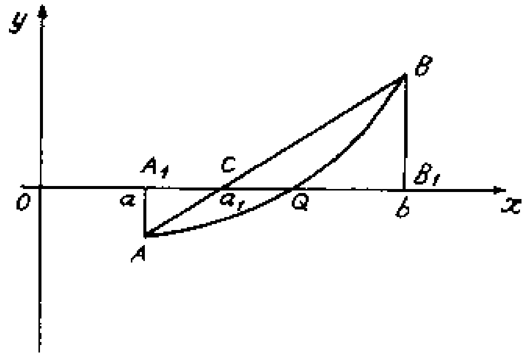
Giả sử ta cần giải phương trình $f(x) = 0$. Rõ ràng là bài toán này tương đương với bài toán tìm các giao điểm của đồ thị của hàm $y = f(x)$ với trục hoành Ox. Giả thiết hàm $f(x)$ liên tục và tại các điểm a và b hàm $f(x)$ lấy những giá trị khác dấu (tức $f(a) . f(b) < 0$). Khi đó, do tính chất liên tục của hàm $f(x)$, đồ thị của hàm $y = f(x)$ sẽ cắt đoạn $[a, b]$ ít nhất một lần, tại điểm ξ chẳng hạn (nói chung đồ thị của hàm $y = f(x)$ có thể cắt đoạn $[a, b]$ tại một số điểm ξ như vậy) (hình 1).



Hình 1

$f(x)$ là hàm liên tục

$f(a) < 0$, $f(b) > 0$



Hình 2

Tuy nhiên nếu giả thiết thêm là $f(x)$ đơn điệu trên $[a, b]$ thì giao điểm ξ của đồ thị với đoạn $[a, b]$ sẽ là duy nhất. Trong trường hợp này ξ chính là nghiệm duy nhất trên $[a, b]$ của phương trình $f(x) = 0$. Để tìm gần đúng điểm ξ đó, ý của phương pháp dây cung là : trên đoạn $[a, b]$ thay cung của đường cong $y = f(x)$ bằng dây cung AB tương ứng và tìm giao điểm C của dây cung đó với trục Ox (hình 2).

Muốn vậy xét hai tam giác đồng dạng AA_1C và BB_1C. Ta có ngay $A_1C/AA_1 = CB_1/B_1B$.

Mặt khác theo hình 2 có :

$$A_1C = a_1 - a\ ;\ CB_1 = b - a_1\ ;$$

$$AA_1 = -f(a)\ ;\ BB_1 = f(b).$$

Trong đó a_1 là hoành độ của giao điểm C của dây cung AB với trục Ox. Do đó : $(a_1 - a)/-f(a) = (b - a_1)/f(b)$

Giải phương trình đó ta được :

$$a_1 = [af(b) - bf(a)]/[f(b) - f(a)]$$

Dễ thấy là đẳng thức đó còn có thể viết dưới dạng

$$a_1 = b - f(b)(b - a)/[f(b) - f(a)] \quad (1)$$

hay

$$a_1 = a - f(a)(b - a)/[f(b) - f(a)] \quad (2)$$

Số a_1 được xác định theo (1) hoặc (2) chính là giá trị gần đúng của nghiệm phương trình $f(x) = 0$ nằm trên đoạn $[a, b]$. Hai trường hợp có thể xảy ra :

Trường hợp $f(a) \cdot f(a_1) < 0$ (tức $f(a)$ và $f(a_1)$ trái dấu nhau), áp dụng công thức (1) cho đoạn $[a, a_1]$ ta tính được giá trị gần đúng tiếp theo

$$a_2 = a_1 - f(a_1)(a_1 - a)/[f(a_1) - f(a)] \quad (3)$$

Trường hợp $f(a_1) \cdot f(b) < 0$, áp dụng công thức (2) cho đoạn $[a_1, b]$ ta tính được

$$a_2 = a_1 - f(a_1)(b - a_1)/[f(b) - f(a_1)] \quad (4)$$

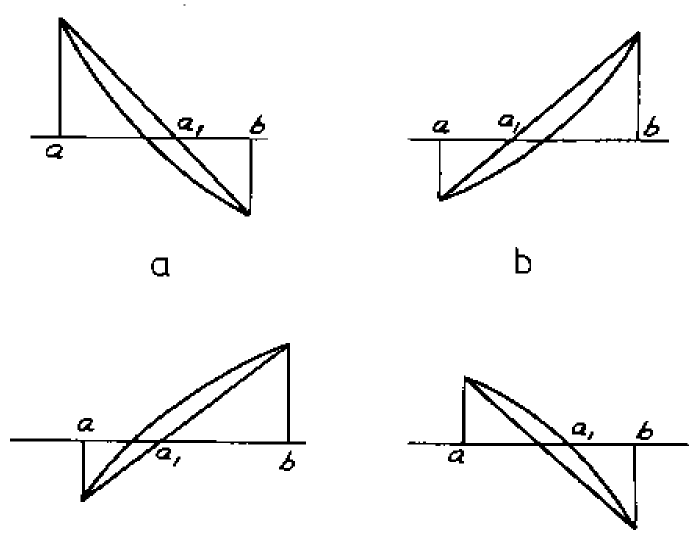
Tìm được giá trị a_2 tùy theo dấu của $f(a_2)$ ta áp dụng công thức (1) cho đoạn $[a, a_2]$ (hay công thức (2) cho đoạn $a_2, b)$ sẽ tìm được giá trị gần đúng a_3. Một cách tổng quát, khi đã tìm được giá trị gần đúng a_n thì giá trị gần đúng tiếp theo được tính theo công thức :

$$a_{n+1} = a_n - f(a_n)(b_n - a)/[f(a_n) - f(a)] \quad (5)$$

hay theo công thức

$$a_{n+1} = a_n - f(a_n)(b - a_n)/[f(b) - f(a_n)] \quad (6)$$

Áp dụng công thức (5) hay (6) để tính a_{n+1} là tùy theo $f(a_n)$ khác dấu với $f(a)$ hay không. Cắt nghĩa bằng hình học, ta thấy nếu đường cong quay hướng lõm lên trên thì ta phải nối các điểm của đường cong với một trong hai đầu mút A hoặc B mà tại đó hàm lấy giá trị dương (hình 3*a* và 3*b*). Trường hợp đường cong quay hướng lên xuống dưới thì phải nối các điểm của đường cong với đầu mút tại đó hàm lấy giá trị âm (hình 3*c* và 3*d*).



Hình 3

Từ đó rõ ràng có định lí sau :

Định lí. Giả sử trên đoạn [a, b] hàm f(x) liên tục, đơn điệu, có hướng lõm không đổi và tại hai đầu mút của đoạn thẳng, hàm f(x) lấy các giá trị trái dấu. Khi đó với cách chọn đúng đắn công thức xấp xỉ, phương pháp dây cung cho ta dãy điểm hội tụ về nghiệm của phương trình f(x) = 0.

Bây giờ ta tìm mối quan hệ giữa phương pháp dây cung và phương pháp lặp tổng quát. Giả sử $f(a) \neq 0$. Khi đó phương trình $f(x) = 0$ tương đương với phương trình

$$x = x - f(x)(x - a/[f(x) - f(a)] \quad (7)$$

Thực vậy nếu $f(\xi) = 0$ thì

$$\xi = \xi - f(\xi)(\xi - a)/[f(\xi) - f(a)] \quad (8)$$

Ngược lại nếu $\xi \neq a$ và thỏa mãn đẳng thức (8) thì $f(\xi) = 0$.

Nhưng phương trình (7) có dạng $x = \varphi(x)$, trong đó

$$\varphi(x) = x - f(x)(x - a)/[f(x) - f(a)] =$$
$$= [af(x) - xf(a)]/[f(x) - f(a)]$$

Đặt $x_o = b$ và áp dụng phương pháp lặp. Ta lại thu được chính dãy số $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ có được với phương pháp dây cung :

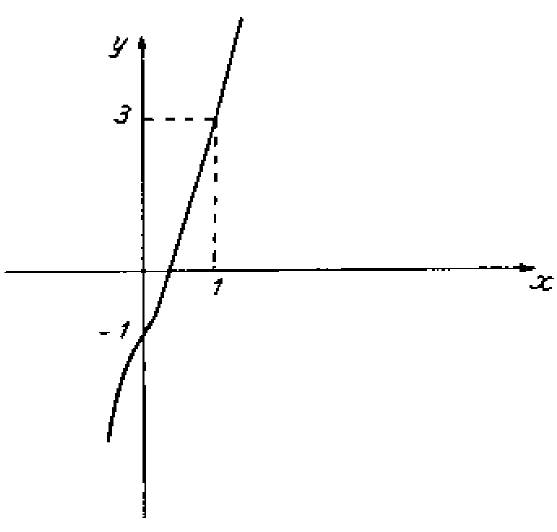
$$a_{n+1} = a_n - f(a_n)(a_n - a)/[f(a_n) - f(a)]$$

Thành thử rõ ràng phương pháp dây cung chỉ là một trường hợp riêng của phương pháp lặp.

Để làm ví dụ, ta sẽ giải bằng phương pháp dây cung phương trình sau :

$$x^3 + 3x - 1 = 0 \quad (9)$$

Ở đây $f(x) = x^3 + 3x - 1$. Ta lại có $f(0) = -1$, $f(1) = 3$. Mặt khác, đạo hàm $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$, điều đó có nghĩa hàm $f(x)$ tăng đơn điệu trên toàn trục số và nói riêng trên [0, 1]. Đạo hàm cấp hai $f''(x) = 6x$ chứng tỏ trên đoạn [0, 1] đồ thị của hàm $y = x^3 + 3x - 1$ có hướng lõm quay lên trên (*hình 4*).



Hình 4

Các điều kiện của định lí nêu trên được thỏa mãn, và vì trên [0, 1] hướng lõm quay lên trên nên ta áp dụng công thức (1).

Theo công thức (1), xấp xỉ thứ nhất của nghiệm ξ của phương trình $x^3 + 3x - 1 = 0$ trên [0, 1] bằng $x_1 = b - f(b) \times$

$$(b - a)/[f(b) - f(a)] =$$
$$= 1 - 3.(1 - 0)/[3 - (-1)] = 0,25$$

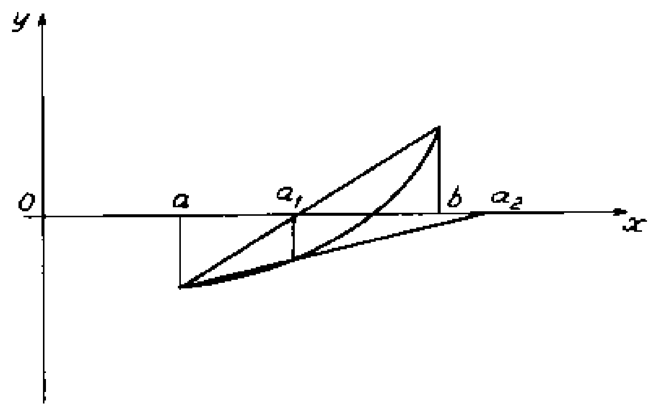
Xấp xỉ thứ hai được tính theo công thức

$$x_2 = b - f(b)(b - x_1)/[f(x) - f(x_1)] =$$
$$= 1 - 3 . (1 - 0,25)/(3 + 0,23) = 0,31$$

Tiếp tục ta có

$$x_3 = 1 - 3 . (1 - 0,31)/(3 + 0,040) = 0,319,$$
$$x_4 = 1 - 3.(1 - 0,319)/(3 + 0,010) = 0,322,$$
$$x_5 = 1 - 3.(1 - 0,322)/(3 + 0,0006) = 0,322$$

Như vậy nghiệm của phương trình nằm trên đoạn [0, 1] bằng 0,322 với độ chính xác tới 0,001.



Hình 5

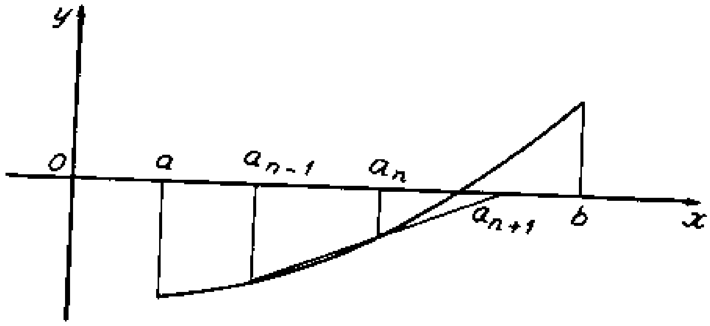
Qua phần trình bày và ví dụ trên ta thấy ý của phương pháp dây cung khá đơn giản và dễ tính toán. Tuy nhiên cần lưu ý các bạn một số điểm sau :

a) Việc chọn đúng đắn các công thức (5) hay (6) để dùng là rất quan trọng, vì nếu không, phương pháp dây cung sẽ không hội tụ ngay cả khi các điều kiện của định lí được thỏa mãn. Chẳng hạn, như trong hình 5 điểm a_2 chạy ra ngoài đoạn $[a, b]$.

b) Rõ ràng là trong trường hợp phương pháp dây cung hội tụ, thì tốc độ hội tụ cũng chính là tốc độ hội tụ của phương pháp lặp : sai số của giá trị của nghiệm giảm như một cấp số nhân. Để tăng tốc độ hội tụ ta có thể cải tiến phương pháp dây cung như sau : thay cho việc ở mỗi bước dùng một trong hai đầu mút của đoạn $[a, b]$ và xấp xỉ mới thu được để tính xấp xỉ tiếp theo như ở phương pháp dây cung thông thường, trong phương pháp dây cung cải tiến ta sẽ dùng hai xấp xỉ mới nhất đã có để tính xấp xỉ tiếp theo, vì những xấp xỉ đó thường gần với nghiệm phải tìm hơn là các đầu mút của đoạn $[a, b]$.

Cụ thể là

$$a_{n+1} = a_n - f(a_n)(a_n - a_{n-1})/[f(a_n) - f(a_{n-1})] \quad (9)$$



Hình 6

Để minh họa, ta trở lại ví dụ trên : giải phương trình $x^3 + 3x - 1 = 0$ bằng phương pháp dây cung cải tiến.

Các xấp xỉ đầu tiên $a_1 = 0{,}25$ và $a_2 = 0{,}31$ cũng giống như ở phương pháp dây cung thông thường.

Xấp xỉ tiếp theo được tính theo công thức

$a_3 = a_2 - f(a_2)(a_2 - a_1)/[f(a_2) - f(a_1)] =$

$= 0{,}31 + 0{,}040(0{,}31 - 0{,}25)/[0{,}040 - 0{,}234]$

$= 0{,}3223$

Ta có $f(0{,}3223) = 0{,}0004$.

Rõ ràng $x = 0{,}3223$ cho ta nghiệm phải tìm với độ chính xác tới 0,0001.

Điểm cuối cùng cần nói là, nếu áp dụng công thức (9) để tính mà a_{n+1} lại ở ngoài đoạn $[a, b]$ thì ở bước tiếp sau thay cho a_{n+1} ta lấy đầu mút nào của đoạn $[a, b]$ gần với nó hơn.

PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

NGUYỄN ĐÌNH TRÍ

Từ khi xuất hiện khái niệm đạo hàm, các phương trình cũng được dùng để mô tả các quá trình động, biến đổi theo thời gian. Giải phương trình, ta không những tính được giá trị của các đại lượng, mà còn có thể tìm được quan hệ hàm giữa chúng.

Trước hết ta nhắc lại vài điều về đạo hàm. Giả sử cho hàm số $x = x(t)$ xác định trong (a, b). Lấy $t \in (a, b)$. Nếu tồn tại giới hạn

$$\lim \Delta t \to 0 \, \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

thì giới hạn ấy được gọi là đạo hàm (cấp một) của hàm số $x(t)$ tại t và được kí hiệu là $x'(t)$. Đạo hàm của $x'(t)$ được gọi là đạo hàm cấp hai của $x(t)$ và được kí hiệu là $x''(t)$. Nếu $s = s(t)$ là phương trình chuyển động của một chất điểm chuyển động trên đường thẳng, thì vận tốc tức thời của nó ở thời điểm t là $v(t) = s'(t)$, còn gia tốc của nó ở thời điểm t là $a(t) = v'(t) = s''(t)$. Ta biết rằng $(\sin t)' = \cos t$, $(\cos t)' = -\sin t$, $(e^t) = e^t$. Ngoài ra, nếu $x = x(u)$, trong đó $u = u(t)$ thì $x'(t) = x'(u) \,.\, u'(t)$. Chẳng hạn nếu α là hằng số thì

$$(0) \begin{cases} \text{với } x(t) = \sin\alpha t, \text{ ta có } x'(t) = \alpha\cos\alpha t, \\ \qquad\qquad x''(t) = \alpha^2\sin\alpha t \\ \text{với } x(t) = \cos\alpha t, \text{ ta có } x'(t) = -\alpha\sin\alpha t, \\ \qquad\qquad x''(t) - \alpha^2\cos\alpha t \\ \text{với } x(t) = e^{\alpha t}, \text{ ta có } x'(t) = \alpha e^{\alpha t}, \\ \qquad\qquad x''(t) = \alpha^2 e^{\alpha t}. \end{cases}$$

Bây giờ ta xét một chất điểm chuyển động trên đường thẳng dưới tác dụng của các lực xác định. Ta biết rằng chuyển động của các vật tuân theo định luật sau : cường độ của lực bằng tích của khối lượng của vật với gia tốc mà vật thu được dưới tác dụng của lực ấy (định luật thứ hai của Niu-tơn).

Giả sử ngoại lực là lực cản của môi trường trong đó chất điểm chuyển động. Nếu vận tốc v của chất điểm không lớn, lực cản tỉ lệ thuận với vận tốc ấy, tức là bằng $-kv$, k là hệ số tỉ lệ. Gọi m là khối lượng của chất điểm, ta có $mv' = -kv$ hay với $\alpha = k/m$.

$$v' = -\alpha v \qquad (1)$$

Giả sử chất điểm chuyển động dưới tác dụng của lực đàn hồi. Theo định luật Húc, khi ta biến dạng một vật, thì lực đàn hồi sinh ra tỉ lệ thuận với độ lệch của vật so với vị trí cân bằng (điều đó đúng với những biến dạng nhỏ). Nếu x là độ lệch của chất điểm so với vị trí cân bằng thì lực đàn hồi bằng $-kx$, trong đó k là hệ số đàn hồi. Vậy $mx'' = -kx$ hay với $\omega^2 = k/m$.

$$x'' = -\omega^2 x \qquad (2)$$

Nếu chất điểm chuyển động dưới tác dụng của lực đàn hồi và của ngoại lực $f(t)$, ta có $mx'' = -kx + f(t)$ hay với $\omega^2 = k/m$.

$$x'' + \omega^2 x = \frac{1}{m} f(t) \qquad (3)$$

Các phương trình (1), (2), (3) chứa hàm phải tìm là $v(t)$ hoặc $x(t)$ và các đạo hàm của nó. Người ta gọi đó là các *phương trình vi phân*. Giải một phương trình vi phân là tìm các nghiệm của nó, tức là các hàm sao cho khi thế chúng vào phương trình ấy thì ta được một đồng nhất thức. Giải các phương trình (1), (2), (3) ta sẽ biết được chất điểm chuyển động như thế nào trong từng trường hợp.

Bây giờ ta giải phương trình (1). Ta cần tìm một số $v(t)$ sao cho đạo hàm của nó bằng $v(t)$ nhân với $-\alpha$. Từ (0) dễ thấy rằng $v(t) = e^{-\alpha t}$. Diều này đáng chú ý là mọi hàm có dạng

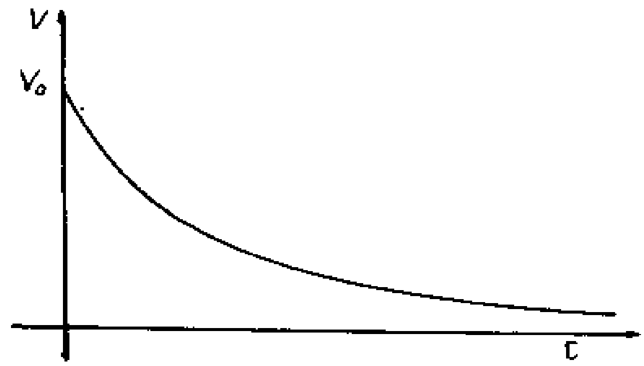
$$v(t) = Ae^{-\alpha t}, \qquad (4)$$

trong đó A là một hằng số tùy ý, đều là nghiệm của phương trình (1). Người ta gọi (4) là *nghiệm tổng quát* của (1). Với mỗi giá trị xác định của A ta được một nghiệm xác định của phương trình (1), mà người ta gọi là *nghiệm riêng* của nó. Khi giải các bài toán thực tiễn, ta thường phải tìm một nghiệm riêng xác định của phương trình. Muốn thế, ngoài phương trình (3), ta còn phải đặt thêm một điều kiện, chẳng hạn cho biết vận tốc v_o của chất điểm ở thời điểm $t = 0$.

$$v(0) = v_o \qquad (5)$$

Điều kiện ấy gọi là *điều kiện ban đầu*. Thế nó vào (4), ta được $A = v_o$, vậy

$$v(t) = v_o e^{-\alpha_t} \qquad (6)$$



Đó là nghiệm của phương trình (1) thỏa mãn điều kiện (5). Đồ thị của nó là hình 1. Từ đồ thị ấy ta thấy rằng vận tốc của chuyển động giảm dần, nhưng không khi nào bằng không. Theo tính chất của hàm mũ với lũy thừa âm, nếu ta chia trục hoành bởi các điểm $t_1, t_2, t_3, \ldots$ cách nhau những khoảng bằng δ thì giá trị của v tại các điểm ấy là $v_1 = v(t_1), v_2 = v(t_2), v_3 = v(t_3), \ldots,$ lập thành một cấp số nhân lùi. Hơn nữa, khoảng cách mà chất điểm đi được trong khoảng thời gian t_i đến t_{i+1} không lớn hơn $v_i(t_{i+1} - t_i) = v_i \cdot \delta$. Do đó khoảng cách mà chất điểm đi được trong khoảng thời gian từ t_1 đến $+\infty$ không lớn hơn tổng của cấp số nhân lùi vô hạn $\sum_{i=1}^{\infty} v_i \cdot \delta$. Vậy dù chất điểm có chuyển động bao lâu, nó cũng không vượt quá một điểm xác định, trong khi nó không khi nào dừng lại.

Chuyển sang phương trình (2). Ta cần tìm hàm $x(t)$ sao cho đạo hàm cấp hai của nó bằng $x(t)$ nhân với $-\omega^2$. Từ (0) ta thấy rằng các hàm $\cos\omega t$ và $\sin\omega t$ đều thỏa mãn phương trình đó. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình (2) là :

$$x(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t, \qquad (7)$$

trong đó A, B là các hằng số tùy ý. Muốn được một nghiệm riêng xác định, ta phải đặt hai điều kiện, chẳng hạn cho biết $x(0) = x_o$ và $v(0) = v_o$, hai điều kiện ấy cho ta xác định A, B. Ta biết rằng nghiệm (7) có thể viết thành

$$x(t) = C\sin(\omega t + \varphi), \qquad (8)$$

trong đó $C = \sqrt{A^2 + B^2}, tg\varphi = A/B$. Công thức (8) chứng tỏ rằng trong trường hợp này chất điểm sẽ dao động, vì hàm sin là tuần hoàn. Chu kì dao động là $2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{m/k}$.

Nhận xét hàng ngày cũng cho ta thấy rằng nếu khối lượng của vật đàn hồi càng lớn thì dao động càng chậm, còn nếu hệ số đàn hồi của vật càng lớn thì dao động càng nhanh. Nhưng chỉ sau khi giải phương trình (2) ta mới tìm được biểu thức chính xác của chu kì dao động.

Bây giờ ta giải phương trình (3). Ta xét một trường hợp đặc biệt nhưng quan trọng trong ứng dụng : $f(t) = D\sin\omega_o t$. Người ta thường gọi $f(t)$ là lực cưỡng bức. Đặt $D/m = E$, phương trình (8) trở thành

$$x'' + \omega^2 x = E\sin\omega t. \qquad (9)$$

Giả sử $\omega_o \neq \omega$. Dễ thấy rằng $x(t)$ có dạng $G\sin\omega_o t$. Thật vậy, thế vào (9) ta có

$$(-\omega_o + \omega^2)G\sin\omega_o t = E\sin\omega_o t$$

$$\Rightarrow G = E/(\omega^2 - \omega_o^2)$$

Và $\quad x(t) = E\sin\omega_o t/(\omega^2 - \omega_o^2) \qquad (10)$

Ta lại biết rằng nếu thế hàm (8) vào vế trái của phương trình (9) ta được (0), vậy mọi hàm có dạng

$$x(t)= C\sin(\omega t+ \varphi)+ N\sin\omega_o t/(\omega^2- \omega_o) \quad (11)$$

trong đó C, φ là những hằng số tùy ý, đều là nghiệm của (11). Đó là nghiệm tổng quát của (11). Điều đáng chú ý là biên độ của dao động (10) càng lớn nếu ω_o càng gần ω. Nếu $\omega = \omega_o$ hiện tượng sẽ thế nào ? Phương trình (9) khi ấy viết thành.

$$x'' + \omega^2 x = E\sin\omega t. \qquad (12)$$

Các hàm $x(t) = \cos\omega t$, $x(t) = \sin\omega t$ đều không thỏa mãn phương trình (12), vì chúng đều làm cho vế trái của (12) bằng không. Dễ thấy rằng hàm $x(t) = Ft\cos\omega t$ thỏa mãn phương trình (12). Thật vậy

$$x'(t) = F\cos\omega t - F\omega t\sin\omega t$$

$$x''(t) = -2F\omega\sin\omega t - F\omega^2 t\cos\omega t.$$

Thế vào (12) ta được :

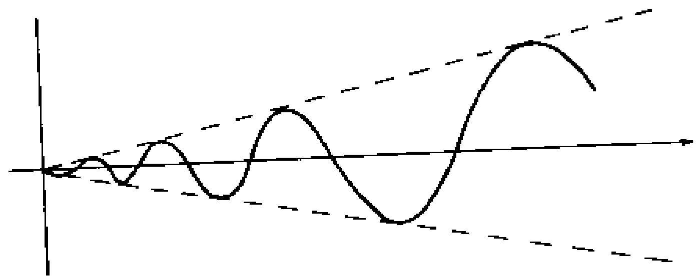
$$-2F\omega\sin\omega t = E\sin\omega t \Rightarrow F = -F/2\omega.$$

Vậy

$$x(t) = -\frac{E}{2\omega}t\cos\omega t. \qquad (13)$$

Đồ thị của nó là hình 2. Ta thấy rằng biên độ của dao động tỉ lệ với t, nên có thể lớn bao nhiêu tùy ý, miễn là t khá lớn. Nghiệm tổng quát của (12) là

$$x(t) = C\sin(\omega t + \varphi) - \frac{E}{2\omega}t\cos\omega t$$



Hình 2

Qua các ví dụ trên, ta thấy rằng phương trình vi phân là một công cụ tính toán khá quan trọng. Nhưng điều quan trọng hơn là nhờ giải phương trình vi phân và phân tích kĩ nghiệm của nó, ta sẽ được những thông tin không những về mặt định lượng, mà cả về mặt định tính của các hiện tượng mà nó mô tả.

Đối với các phương trình vi phân, ngoài việc giải chúng, một phương hướng nghiên cứu khá quan trọng khác là nghiên cứu các tính chất của nghiệm của chúng không thông qua việc giải chúng, chẳng hạn tìm dáng điệu của nghiệm của một phương trình vi phân mà không phải giải nó. Ta xét một ví dụ. Khi giải các bài toán đối với phương trình vi phân nẩy sinh từ các vấn đề thực tiễn, các hằng số chẳng hạn như điều kiện ban đầu đều được xác định do kết quả đo thực nghiệm, do đó không tránh khỏi mắc phải sai số. Nếu những biến thiên nhỏ của điều kiện ban đầu chỉ kéo theo những biến thiên nhỏ của nghiệm thì nghiệm ấy được gọi là ổn định, trong trường hợp trái lại nghiệm là không ổn định. Lí thuyết ổn định là một lí thuyết khá quan trọng về mặt lí thuyết và có nhiều ứng dụng quan trọng trong thực tiễn, trong điều khiển học kĩ thuật.

Chương V – TOÁN HỌC VÀ ĐỜI SỐNG

GIỚI HẠN CỦA PHẠM VI NGHE ĐƯỢC MÁY BAY PHẢN LỰC SIÊU THANH

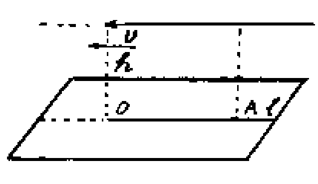
TRẦN VĂN NHO

Máy bay phản lực siêu thanh là loại máy bay chạy bằng động cơ phản lực với tốc độ lớn hơn tốc độ truyền của âm thanh.

Giả sử có một máy bay phản lực siêu thanh đang bay ở độ cao h với tốc độ v. Thử xem vào thời điểm cho trước, trong miền nào trên mặt đất, người ta đã và đang nghe tiếng máy bay phản lực ?

Giả thiết rằng mặt đất nằm dưới vùng trời của máy bay đang bay là một mặt phẳng và độ cao h, tốc độ v là những đại lượng không đổi.

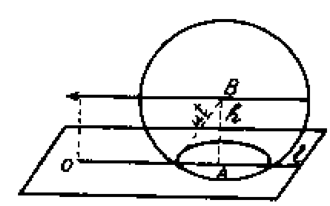
Lấy gốc thời gian là 0. Ở mỗi thời điểm t, máy bay ở vào vị trí tương ứng với điểm chiếu thẳng đứng của nó trên mặt đất. Điểm chiếu ấy cũng di chuyển theo tốc độ v của máy bay và vạch nên đường thẳng l song song với đường bay trong không gian (giả thiết rằng máy bay bay theo đường thẳng từ phải sang trái) (hình 1).



Hình 1

Giả sử chúng ta cần biết vùng nghe được tiếng máy bay khi máy bay đang ở vào vị trí tương ứng với điểm chiếu 0 của nó trên mặt đất của đường thẳng l. Cách đó t giây máy bay ở tại điểm B tương ứng với điểm chiếu A của nó. Rõ ràng đoạn OA = vt và độ cao BA = h.

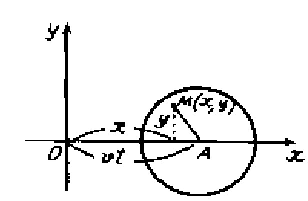
Khi đi qua B máy bay phát ra tiếng động và từ đó nó được truyền theo mọi hướng. Tốc độ truyền của tiếng động là u. Như thế trong khoảng thời gian t giây sau khi rời điểm B, tiếng động được truyền ra mọi phía một khoảng cách là ut. Nói cách khác, trong thời gian ấy tiếng động truyền trong hình cầu tâm B bán kính ut. Nếu bán kính của hình cầu lớn hơn độ cao của máy bay tức là $ut > h$ thì tiếng động đã truyền đến mặt đất và vùng nghe được tiếng động sẽ là tiết diện của hình cầu ấy và mặt đất. Tiết diện này là hình tròn K_A có tâm A, bán kính bằng $\sqrt{u^2t^2 - h^2}$ (hình 2) : đó là vùng nghe được tiếng động của máy bay phát ra cách đây t giây (lúc nó ở B).



Hình 2

Muốn cho một điểm M nào đó trên mặt phẳng thuộc vùng nghe được thì điều kiện cần và đủ là tìm được một vị trí B của máy bay để làm sao cho tiếng động phát ra từ đó kịp truyền đến điểm M tức là làm sao cho điểm M thuộc về một vòng tròn K_A nói trên. Nói cách khác tập hợp những vòng tròn như thế ứng với tất cả các vị trí có thể được của máy bay làm thành toàn thể vùng nghe được.

Vấn đề trên phát biểu theo toán học như sau : cho nửa đường thẳng xuất phát từ O và 3 số dương u, v, h (trong đó $u < v$). Giả sử t là một số dương, A là một điểm bất kì của nửa đường thẳng l sao cho đoạn OA bằng vt. Gọi K_A là vòng tròn tâm A bán kính $\sqrt{u^2t^2 - h^2}$. Tìm miền của mặt phẳng phủ bởi tất cả các vòng tròn K_A ứng với mọi giá trị khác nhau của t.



Hình 3

Xét hệ tọa độ gốc O, trục hoành trùng

với nửa đường thẳng l, trục tung thẳng góc với l. Điểm A, theo trên, nằm trên l và cách O một đoạn OA = vt (hình 3). Muốn điểm M có tọa độ x, y nằm trong vòng tròn K_A tâm A bán kính $\sqrt{u^2t^2 - h^2}$ thì điều kiện cần và đủ là độ dài đoạn MA không vượt quá bán kính :

$$\overline{MA}^2 \leqslant u^2t^2 - h^2$$

tức là :

$$(vt - x)^2 + y^2 \leqslant u^2t^2 - h^2 \qquad (1)$$

hay :

$$(v^2 - u^2)t^2 - 2vxt + (x^2 + y^2 + h^2) \leqslant 0 \qquad (2)$$

Bởi vì tất cả những hình tròn K_A phủ vừa đúng toàn bộ miền nghe được nên điểm M nằm trong miền nghe được khi và chỉ khi tồn tại một số dương t thỏa mãn bất đẳng thức (2).

Muốn tìm những điều kiện thỏa mãn bất đẳng thức (2) các bạn hãy chứng minh mệnh đề sau đây :

Cho tam thức bậc 2 $at^2 + bt + c$ trong đó các hệ số a và c đều dương. Để có một số dương t thỏa mãn bất đẳng thức $at^2 + bt + c \leqslant 0$ điều kiện cần và đủ là :

1) $b < 0$.

2) Biệt số của tam thức phải không âm tức là :

$$\Delta = b^2 - 4ac \geqslant 0$$

Theo mệnh đề trên, muốn cho bất đẳng thức (2) được thỏa mãn với $t > 0$, điều kiện cần và đủ là :

1) $-2vx < 0$

2) $\Delta' = (vx)^2 - (v^2 - u^2)(x^2 + y^2 + h^2) \geqslant 0$

Điều kiện 1) cho ta :

$vx > 0$ và vì $v > 0$ nên $x > 0$.

Điều kiện 2) cho ta :

$u^2x^2 - (v^2 - u^2)y^2 - (v^2 - u^2)h^2 \geqslant 0$ hay :

$$x^2 - \frac{v^2 - u^2}{u^2}y^2 - \frac{v^2 - u^2}{u^2}h^2 \geqslant 0$$

$$\frac{x^2}{\frac{v^2 - u^2}{u^2}h^2} - \frac{y^2}{h^2} \geqslant 1$$

Thay

$$c = \frac{v}{u}h$$

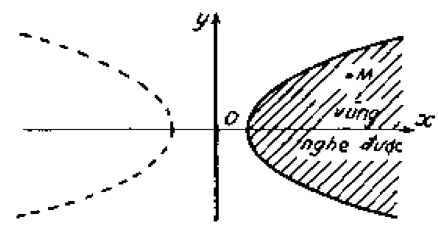
ta có :

$$\frac{x^2}{c^2 - h^2} - \frac{y^2}{h^2} \geqslant 1$$

Toàn thể các điểm có tọa độ x, y nghiệm đúng phương trình :

$$\frac{x^2}{c^2 - h^2} - \frac{y^2}{h^2} = 1$$

là một đường hypebol (hình 4).



Hình 4

Như thế vùng nghe được tiếng máy bay phản lực là một miền nằm bên phải trục Oy (điều kiện 1) : $x > 0$) và giới hạn bởi một nhánh hypebol (đường hypebol vẽ liền nét ở hình 4). Khi cho $y = 0$ trong phương trình trên ta có $x = \frac{h}{u}\sqrt{v^2 - u^2}$. Vậy lúc máy bay đã đến trên đầu ta thì nơi gần ta nhất nghe được tiếng máy bay cách ta một khoảng bằng $\frac{h}{u}\sqrt{v^2 - u^2}$. Nói cách khác khi ta bắt đầu nghe được tiếng động thì máy bay đã cách ta $\frac{h}{u}\sqrt{v^2 - u^2}$ và nhánh hypebol nói trên chính là giới hạn của miền nghe được tiếng động.

NÓI CHUYỆN VỀ TOÁN HỌC VÀ CƠ HỌC

NGUYỄN TRƯỜNG

Cơ học là môn học của Vật lí, còn được gọi là Vật lí cổ điển, vì trước thế kỉ thứ 20 các hiện tượng thiên nhiên khác nhau đều giải thích bằng cơ học (hay cố gắng đưa về giải thích bằng cơ học). Ta xét môn Cơ học ở đây không phải là tình cờ, mà trước thế kỉ thứ 20 Cơ học chính là mảnh đất phát triển cho Toán học, ngay cả thế kỉ chúng ta đang sống nó cũng là một trong những mảnh đất chính. Vậy Cơ học là gì ?

Cơ học là khoa học về dạng chuyển động đơn giản nhất của vật chất, tức chuyển động cơ học (chuyển động này là biểu hiện sự thay đổi theo thời gian khoảng cách giữa các vật trong không gian và về sự tác dụng lẫn nhau gắn liền với chuyển động đó của các vật (hay của các phân tử chúng)).

Bất kì ở đâu chung quanh ta, trong kĩ thuật, trong kĩ nghệ ta chỉ thấy các vật chuyển động và tác dụng lẫn nhau : nhà ở, đê đập, xe đạp, máy bay, ôtô, tên lửa, nước sông chảy, không khí chuyển động, con tàu vũ trụ, con quay, hòn bi v.v..., nên người ta thường nói : Cơ học là một trong những nền tảng khoa học chủ yếu của kĩ thuật.

Để làm nhiệm vụ của mình Cơ học đã dùng Toán học làm công cụ chủ yếu như người thợ nguội dùng cưa, kìm, búa, dũa... Phương pháp mà cơ học dùng để khảo sát chuyển động và sự tác dụng lẫn nhau thì cũng như phương pháp của vật lí nói chung, có nghĩa là có ba bước :

1) Phản ánh những quy luật của chuyển động và sự tác dụng lẫn nhau vào trong lĩnh vực trừu tượng các con số.

2) Nhờ những phép toán thuần túy hình thức làm với các con số đó ta sẽ thu được những kết quả toán học nhất định.

3) Những kết quả toán học đó lại đem trở về thế giới vật chất dùng để diễn giải các hiện tượng cơ học và từ đó rút ra những quy luật tổng quát để dự đoán trước được những hiện tượng cơ học, những diễn biến của chuyển động.

Để thực hiện bước 1 người ta đơn giản hóa vật chuyển động thành những khái niệm trừu tượng. Ví dụ như muốn mô tả đường bay của viên đạn, của vệ tinh, máy bay, tên lửa... xem chúng bay nhanh chậm ra sao ta có thể xem mỗi cái như 1 điểm có khối lượng mà trong cơ học gọi là *chất điểm*. Thế là ta đã làm xuất hiện trong cơ học một khái niệm trừu tượng có thể đối chiếu được với khái niệm *điểm* trong toán học và do đó đối chiếu được với số – khái niệm cơ bản của toán học để mô tả thiên nhiên –.

Cách đơn giản hóa như trên để phân tích nghiên cứu chuyển động cho dễ dùng hơn, chẳng qua là ta bỏ qua các khía cạnh khác của hiện tượng mà chỉ tập trung sự chú ý vào khía cạnh được coi là chủ yếu trong giai đoạn nào đó của công việc khảo sát thiên nhiên (ở trên, ta muốn khảo sát vị trí tốc độ, đường đi của viên đạn, vệ tinh, máy bay, tên lửa) phương pháp đó chính là phương pháp căn bản để đi dần đến chỗ hiểu được thế giới khách quan quanh ta.

Trong giai đoạn nghiên cứu khác, chẳng hạn như ta muốn cho viên đạn khi bắn ra khỏi nòng súng thì đường bay phải vững vàng và khi đập vào đâu phải đập đầu đạn vào trước thì coi viên đạn như một điểm không được nữa rồi, mà phải coi nó như một vật có kích thước. Tương tự như thế, khi xét chuyển động của vệ tinh quanh trái đất, hay chuyển động của trái đất quanh mặt trời, ta có thể coi chúng như một điểm được, nhưng khi vệ tinh có người ngồi trong mà ta muốn xem chuyển động của vệ tinh ảnh hưởng đến người ra sao, hay khi muốn khảo sát chuyển động của quả đất quay quanh trục của nó thì coi nó như một điểm không được nữa phải coi chúng như những vật có kích thước. Thế là chúng ta đã làm xuất hiện trong cơ học một khái niệm trừu tượng mới, đó là *vật thể rắn* tức là vật lập thành bởi nhiều điểm và khoảng cách giữa các điểm không đổi. Vật thể rắn có thể đem đối chiếu với tập hợp các điểm trong toán học và từ đó cho ứng được với tập hợp các số.

Trong thực tế, vật nào cũng biến dạng được (tức thay đổi được kích thước) nên trong giai đoạn nghiên cứu nào đó phải đưa vào khái niệm *môi trường liên tục và biến dạng được ;* vật chất ở môi trường này phân bố một cách rộng khắp, chỗ nào cũng có, như tập hợp của nhiều điểm mà khoảng cách giữa các điểm có thể thay đổi được. Chẳng hạn như ở thí dụ trên, muốn biết khi viên đạn đang bay sức cản của không khí làm nó méo mó như thế nào thì không thể coi viên đạn là vật rắn được nữa mà phải coi nó là vật biến dạng được. Đối với các ví dụ khác cũng tương tự như vậy. Nhờ khái niệm môi trường liên tục mà cơ học có thể xét được chuyển động của chất lỏng và chất khí (xét chuyển động các chất này là việc rất cần khi thiết kế và tính toán tàu thủy, tuốcbin, canô, tàu thủy có cánh, máy bay, tên lửa, vệ tinh, con tàu vũ trụ, đế đập v.v...).

Ba khái niệm trừu tượng trên (chất điểm, vật thể rắn và môi trường liên tục) là ba khái niệm cơ bản mà cơ học dùng để đem đối chiếu các hiện tượng cơ học với các số.

Có những khái niệm cơ bản để đối chiếu với Toán học rồi, Cơ học không hạn chế và không thể hạn chế ở chỗ mô tả hiện tượng bằng lời nói được (tức mô tả định tính). Cơ học đem diễn đạt những quy luật diễn biến của các vật khác nhau (vật thể rắn, lỏng và khí) trong những điều kiện vật lí và hóa học khác nhau dưới dạng các hệ thức toán học biểu thị những định luật vật lí khởi đầu (chẳng hạn như dưới dạng hệ phương trình). Nếu bài toán toán học đặt ứng với bài toán cơ học một cách đúng đắn, ta có thể tin chắc rằng kết quả của lời giải bài toán đó xác định đúng trạng thái cơ học của vật. Ngoài kiến thức cơ học ra, muốn đặt được bài toán toán học đúng đắn cho phù hợp với hiện tượng cơ học cần phải có kiến thức toán học sâu sắc.

Trong Cơ học, Toán học được sử dụng không những để giải trực tiếp bài toán hoặc để khảo sát vấn đề đã được diễn đạt dưới dạng toán học mà thôi, mà còn để phát hiện các quy luật cơ học và để kiểm tra lại sự đúng đắn của việc đặt bài toán cơ học. Ví dụ khi một quả đạn cao xạ nổ trên không, người ta có thể dùng cơ học và toán học ước đoán trước được các mảnh sẽ văng đi các phía nào hoặc nhờ tính toán mà người ta biết được rằng khi con quay quay nhanh nó có khuynh hướng giữ hướng trục của chuyển động quay không cho thay đổi, do đó nếu ta đem giá đỡ của con quay quay nhanh gắn chặt vào tên lửa hay vào máy bay không người lái thì ta sẽ có căn cứ để đo độ sai lệch và hướng của vật bay, nhờ đó có số liệu để điều khiển cuộc bay, hoặc nhờ quan sát phương trình toán học mô tả hiện tượng cơ học mà ta có thể giải thích tại sao con mèo bao giờ khi ngã cũng cho được bốn chân xuống trước (đó là nhờ nó ngoáy đuôi ; các con vật như khỉ, vượn..., leo trèo, nhảy, bám cây giỏi không ngã nhờ có đuôi dài) v.v... Nếu bài toán cơ học đặt ra có chỗ sai thì nhờ lời giải toán học ta cũng có thể kiểm tra được, ví dụ ta có phương trình toán học mô tả 2 quả cầu va vào nhau, ta thu được lời giải cho biết rằng sau khi va chúng văng đi hai phía trái ngược nhau, nhưng khi thí nghiệm ta thấy chúng sau khi va chạm chạy về một phía, sự khác nhau giữa kết quả thu được nhờ toán học và kết quả đo kiểm tra bằng thí nghiệm chỉ ra bằng bài toán cơ học đặt ra có bỏ sót cái gì đấy, thế là nhờ Toán học mà người nghiên cứu có thể kiểm tra lại cách đặt bài toán cơ học của mình.

Bài toán cơ học có thể coi được đặt ra đúng khi lời giải của các phương trình (đặt ra để mô tả chuyển động của hệ cơ học) đưa đến những kết quả trùng với thí nghiệm. Do đó ta thấy bước ba trong công việc nghiên cứu bằng toán học rất cần.

Tất cả những điều trình bày trên cho ta thấy Toán học cần cho Cơ học như thế nào, nên trong các trường đại học tổng hợp trên thế giới việc chuẩn bị kiến thức toán học cho người học cơ học và học toán không khác nhau mấy.

Cơ học là một trong các ngành khoa học hiện đại, nó có gần 300 năm lịch sử. Vì nó gắn liền với kĩ thuật nên nó cũng phát triển với kĩ thuật. Đặc biệt ở nửa đầu thế kỉ vừa qua cơ học gắn liền với kĩ thuật hàng không, hơn chục năm qua nó gắn liền với kĩ thuật điều khiển tự động và tự động hóa, trong tương lai sau này cơ học sẽ có quan hệ mật thiết với kĩ thuật du hành vũ trụ.

Viết bài này tôi muốn giới thiệu với các bạn trẻ yêu toán trào lưu toán học hóa đang nở rộ trong khoa học, đồng thời nêu ra cho các bạn trẻ yêu toán thấy một ngành khoa học – môn Cơ học – có thể sử dụng được năng khiếu về Toán học của mình, vì toán học, như trên đã thấy, là một trong những công cụ căn bản của cơ học. Nếu bạn nào chỉ thích toán thôi, bạn đó sẽ tìm thấy những khả năng vô tận trong các lĩnh vực lí thuyết của Cơ học. Bạn nào yêu toán mà có thích thú nghiên cứu về Vật lí thì Cơ học cũng làm toại nguyện bạn vì nó là một bộ phận của Vật lí. Nếu bạn lại thích làm việc nghiên cứu trong phòng thí nghiệm thì bạn sẽ có chỗ sử dụng tài năng của mình trong những nghiên cứu dùng những phòng thí nghiệm lớn, phức tạp mà trong Cơ học ngày càng nhiều. Cuối cùng, nếu ngoài năng khiếu về Toán và Vật lí bạn lại có thích thú công việc của kĩ sư nữa thì bạn đó thật đủ tiêu chuẩn để trở thành chuyên gia về Cơ học.

MỘT ỨNG DỤNG CỦA HÌNH HỌC VÀ LƯỢNG GIÁC

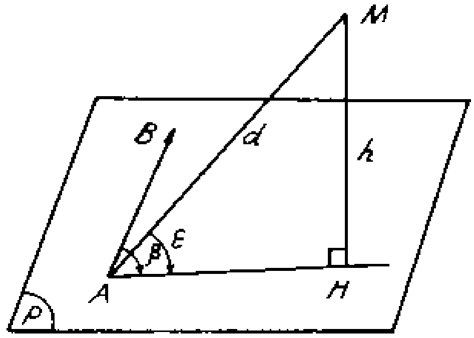
HÀ CHÂU

Trong bài này chúng tôi dẫn ra một ứng dụng của hình học và lượng giác sơ cấp để xác định nhanh và chính xác phần tử bắn với một vài tham số không đầy đủ ban đầu.

1. Phần tử bắn

Để xác định vị trí của máy bay, người ta cần ba tham số : *góc phương vị* kí hiệu là β, *góc tà* kí hiệu là ε, và *độ cao h* của nó. Muốn định nghĩa các tham số đó, ta xét hình vẽ sau :

Trên hình 1 : Điểm M dùng để kí hiệu vị trí máy bay ; điểm A dùng để kí hiệu vị trí đài quan sát ; vec tơ AB dùng để chỉ hướng bắc, H là hình chiếu vuông góc điểm M xuống mặt phẳng nằm ngang P chứa điểm A (thường được xem là mặt đất). Khi đó



Hình 1

– Góc β tạo bởi hai véc tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AH}$ theo chiều kim đồng hồ được gọi là góc phương vị.

– Góc ε tạo bởi AM với AH được gọi là góc tà.

– Khoảng cách HM chính là độ cao h của máy bay.

Rõ ràng vị trí máy bay (điểm M) hoàn toàn được xác định nếu biết bộ ba (β, ε, h). Bộ ba đó được gọi là *phần tử bắn*. Cần nói thêm nếu kí hiệu khoảng cách AM là d, khoảng cách AH là d' thì các bộ ba (β, ε, d) và (β, ε, d') đôi khi cũng được gọi là phần tử bắn, vì ba bộ ba này tương đương nhau : từ một bộ ba ta suy ra các bộ ba còn lại không khó.

2. Bài toán thực tế để xác định phần tử bắn

Trong thực tế, bằng đài quan sát, (do nhiễu) người ta chỉ có thể xác định được 2 tham số β và ε, còn tham số độ cao h không thể nào xác định được. Như vậy chỉ mới xác định được hướng AM, còn điểm M ở đâu trên hướng đó thì hoàn toàn chưa biết.

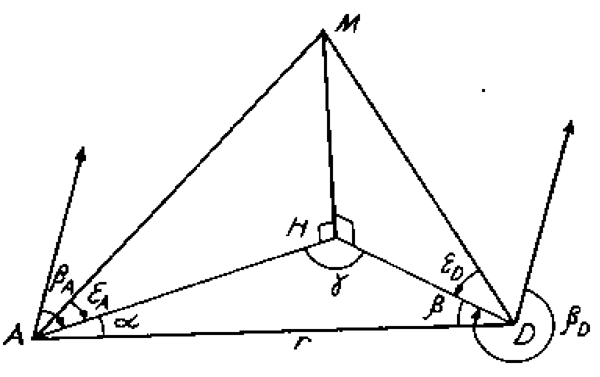
Vấn đề đặt ra ở đây là trên cơ sở các tham số ε và β ; hãy xác định tham số h một cách nhanh nhất.

Đó là bài toán thực tế để xác định phần tử bắn rất được quan tâm. Sau đây là một cách giải quyết mà chắc nhiều bạn cũng nghĩ được như vậy.

3. Phương pháp giao hội để xác định h

Ngoài đài quan sát A, ta dùng thêm một đài quan sát D khác. Gọi β_A, ε_A là phương vị và tà của đài A xác định được ; tương tự gọi β_D, ε_D là phương vị và tà của đài D xác định được.

Chúng ta xây dựng hình 2 bằng phương pháp sau : Căn cứ vào các tham số $\beta_A = \widehat{B_1AH}$, $\varepsilon_A = \widehat{MAH}$ ta dựng góc $\widehat{MAH}$ (chú ý các điểm M và H là chưa xác định được). Căn cứ vào những tham số $\beta_D = \widehat{B_2DH}$, $\varepsilon_D = \widehat{MDH}$ ta dựng được góc $\widehat{MDH}$. Dĩ nhiên vì cả 2 đài A và D cùng quan sát 1 mục tiêu M nên 2 góc vừa dựng cắt nhau theo giao tuyến MH, trong đó M là vị trí máy bay, còn H là hình chiếu của M lên mặt phẳng P (được xem là mặt đất) chứa 2 điểm A, D. Từ đây ta nhận được tứ diện $MHAD$ trong đó MH là đường cao của nó và cũng là tham số chiều cao của máy bay đang cần được xác định.



Hình 2

Bây giờ chắc nhiều bạn đã xác định được h. Ta xem hai hướng bắc (từ A và D) là song song với nhau ; đấy cũng là điều phù hợp ; gọi r là khoảng cách DA, ta xác định được r vì 2 đài A, D là hoàn toàn xác định. Khi đó, trên hình 2 :

$\widehat{HAD}$ kí hiệu là $\alpha \Rightarrow \alpha = \widehat{B_1AD} - \beta$

$\widehat{HDA}$ kí hiệu là $\beta \Rightarrow \beta = \widehat{B_2DA} + \beta_D - 2\pi$

$\widehat{AHD}$ kí hiệu là $\gamma \Rightarrow \gamma = \pi - (\alpha + \beta)$

Kẻ $AI \perp DH$

Dễ thấy $AI = r \sin\beta$

$AH = AI/\sin\gamma = r \sin\beta/\sin\gamma$

$h = HM = AH \operatorname{tg}\varepsilon_A = r(\sin\beta/\sin\gamma)\operatorname{tg}\varepsilon_A$

Tóm lại $h = r \operatorname{tg}\varepsilon_A \sin\beta/\sin\gamma^{(*)}$

Công thức$^{(*)}$ cho ta biểu thức tính tham số h. Phải chăng đến đây bài toán đặt ra trong mục 2 đã được giải quyết ? các bạn chớ vội thỏa mãn, đó là thói quen không hay. Công thức $^{(*)}$ tính được h, đó là điều dĩ nhiên, song liệu nó có cho được đáp số một cách nhanh chóng không ? Chắc chắn là không, dù có dùng đến máy tính điện tử. Cũng cần lưu ý thêm rằng công thức$^{(*)}$ chỉ mới xây dựng cho một trường hợp riêng (hình 2), các trường hợp còn lại chưa được xây dựng.

Như vậy đến đây (mà thực ra là ngay từ đầu mục 3 này) ta đã xác định được h. Một vấn đề còn lại nữa là làm sao để xác định giá trị của nó cực nhanh ? Chúng ta chuyển sang vấn đề này.

4. Phương pháp đồng dạng để xác định giá trị h.

a) Dĩ nhiên tứ diện $MHAD$ đồng dạng với tứ diện xảy ra trong thực tế. Ta gọi hệ số đồng dạng là k. Khi đó rk là khoảng cách thực sự của AD và hk là độ cao thực sự của máy bay. Có thể nghĩ rằng thiết kế một mô hình cơ khí sao cho với các tham số β_A, ε_A, β_D, ε_D ta có thể dựng được ngay một tứ diện $MHAD$, hệ số đồng dạng k với tứ diện xảy ra trong thực tế. Sau đó đo h, và hk là giá trị phải tìm. Nhưng một mô hình cơ khí như vậy chúng ta cũng chưa thỏa mãn.

b) Hãy "trải" tứ diện $MHAD$ ra trên mặt phẳng P, bằng cách xẻ dọc theo đường cao MH, ta được hình 3.

Trên hình 3 tất nhiên các tam giác M_1HA và M_2HD là những tam giác vuông tại H.

$$M_1H = M_2H = h.$$

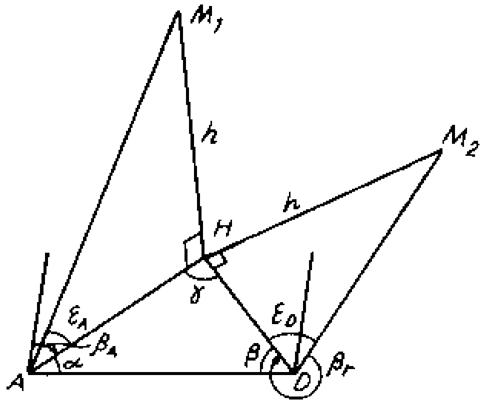
Hình 3 là hình phẳng, vì vậy không cần mô hình cơ khí chúng ta cũng có thể thực hiện dựng hình đơn giản để xác định h.

1) Nhờ β_A, β_D ta dựng được tam giác HAD, do đó mà xác định được điểm H, các cạnh AH, DH.

2) Nhờ ε_A ta xác định được tam giác vuông M_1AH vuông tại H do đó mà tìm được độ dài h.

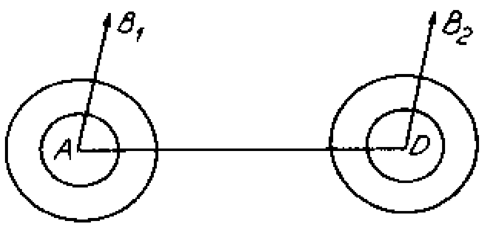
3) Căn cứ hệ số đồng dạng k (chọn tùy ý) ta tìm được độ cao thực tế của máy bay là hk.

Chú ý thêm là phép dựng trên chỉ có thể đạt tới tốc độ thỏa mãn nếu các góc β_A, β_D, ε_A xác định được nhanh và hệ số đồng dạng k chọn thích hợp : không quá bé để việc đo ít bị sai số, và tích hk dễ tính. Và chăng đến



Hình 3

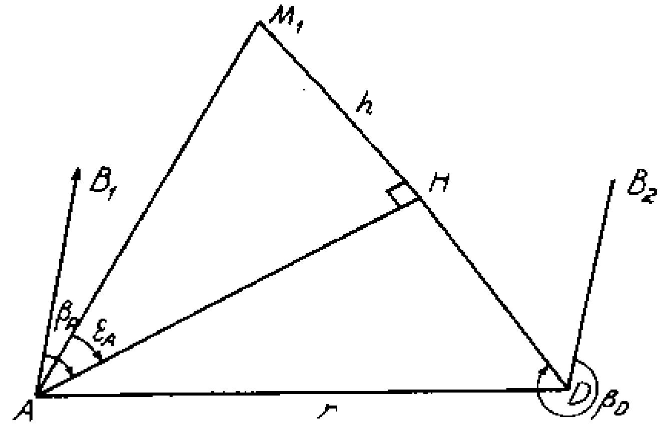
đây công việc của người làm toán đã xong, nhưng với ý nghĩa của bài toán, điều nói thêm sau đây cũng không kém thú vị.



Hình 4

Tại mỗi điểm A và D ta vẽ 2 vòng tròn đồng tâm. Việc định số đo góc trên các vòng tròn này là xuất phát từ hướng bắc và cùng chiều quay kim đồng hồ ; với quy ước vòng tròn trong dùng để đo tà, vòng tròn ngoài dùng để đo phương vị (xem hình 4).

Để tìm h ta thực hiện các phép dựng như đã nói trên đây mà có thể mô tả đơn giản lại ở hình 5.



Hình 5

Chúng tôi tạm dừng tại đây. Chắc chắn còn nhiều điều thú vị chưa đề cập tới, ví dụ xác định độ cao h để làm gì ? có người nghĩ rằng mục tiêu nằm trên hướng AM (hình 1, chú ý là M chưa xác định được) chỉ cần điều khiển quả đạn đi theo hướng đó, nghĩa là sao cho đài quan sát A, quả đạn và mục tiêu nằm trên một đường thẳng (phương pháp điều khiển đó được gọi là phương pháp 3 điểm). Như vậy không cần xác định h vẫn có thể điều khiển quả đạn đến mục tiêu ! nghĩ như vậy có được không ? mời các bạn trả lời.

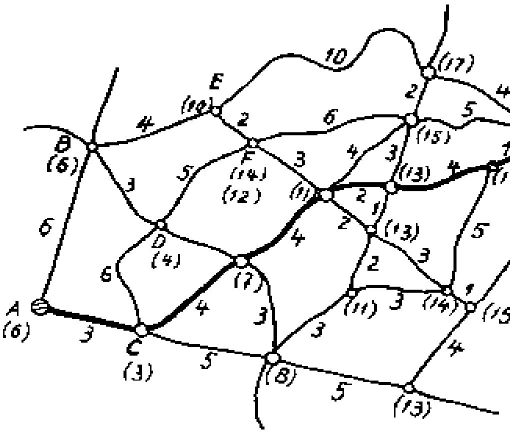
ĐƯỜNG ĐI NÀO LÀ NHANH NHẤT ?

TRẦN VŨ THIỆU

Trong các số báo trước, các bạn đã biết toán học có thể vận dụng trong việc phân phối và vận chuyển hàng hóa để tiết kiệm chi phí chuyên chở. Tuy nhiên, trong thực tế không phải lúc nào cũng chỉ yêu cầu vận chuyển rẻ nhất. Có những thứ hàng như : hoa quả, rau tươi, thịt cá, v.v... cần phải được vận chuyển nhanh chóng đến các nơi tiêu thụ, lúc đó yêu cầu lại chính là vận chuyển thế nào cho nhanh nhất. Yêu cầu vận chuyển nhanh còn là chủ yếu trong nhiều việc như : tiếp tế lương thực, vũ khí, đạn dược, chuyển quân, v.v... nhất là trong giai đoạn hiện nay cả nước ta đang tiến hành cuộc kháng chiến chống Mĩ cứu nước thì vấn đề đó lại càng quan trọng và có ý nghĩa.

Chẳng hạn, xét mạng lưới giao thông như ở hình vẽ dưới đây : các số ghi bên cạnh mỗi đoạn đường là thời gian cần thiết để đi trên đoạn đường ấy (thời gian đi từ A tới B tốn 6 giờ, từ A đến C tốn 3 giờ, v.v...). Ta cần vận chuyển hàng từ địa điểm A tới địa điểm N. Nên đi theo những đoạn đường nào thì sẽ nhanh nhất ?

Có bạn nghĩ rằng vấn đề chẳng có gì khó, chỉ việc tìm ra tất cả các đường đi có thể từ



A tới *N*, rồi so sánh thời gian đi trên các đường ấy với nhau là có ngay đường đi nhanh nhất. Nhưng cách đó chỉ có thể dùng cho những mạng lưới giao thông đơn giản ; còn với những mạng lưới phức tạp, nhiều đường đi lối lại thì liệu cách đó có còn thiết thực không ? Bạn làm sao tìm được tất cả các đường đi mà không nhầm lẫn ? Và nếu có tìm được thì sẽ mất bao nhiêu thời giờ, bao nhiêu công phu ?

Phương pháp sau đây sẽ giúp giải quyết vấn đề đó một cách rất đơn giản và có thể áp dụng cho cả những mạng lưới có hàng nghìn đường đi khác nhau mà vẫn cho kết quả khá nhanh chóng : Ta hãy gọi các ngã ba, ngã tư, v.v... là những "nút" và gán cho mỗi nút một số gọi là "thế vị" như sau : ta cho thế vị của *A* bằng 0 ; sau đó gán cho mỗi nút kề *A* (tức là *B* hoặc *C*) một thế vị bằng thời gian đi trên đoạn đường từ *A* tới nút ấy : thế vị của *B* bằng 6, của *C* bằng 3 ; rồi cho mỗi nút kề *B* (mà chưa có thế vị) một thế vị bằng thế vị của *B* cộng với thời gian đi trên đoạn đường từ *B* tới nút ấy : thế vị của *D* là 6 + 3 = 9, của *E* là 6 + 4 = 10 ; v.v... và cứ theo cách đó tiếp tục ; chẳng hạn, *F* kề *D* nên thế vị của *F* bằng 9 + 5 = 14 ; v.v... Nói chung, một nút chưa có thế vị mà kề một nút đã có thế vị rồi thì được gán cho một thế vị bằng thế vị của nút này cộng thêm thời gian đi trên đoạn đường từ nút này tới nút nói trên. Làm như vậy cho tới khi mọi nút đều có thế vị. Sau đó điều chỉnh các thế vị theo quy tắc : nếu hiệu số các thế vị của hai nút kề nhau (ví dụ *F* và *E*) lớn hơn thời gian đi trên đoạn đường nối hai nút ấy (14 − 10 > 2) thì ta bớt thế vị lớn để cho hiệu số nói trên vừa đúng bằng thời gian này (ở đây ta bớt 14 còn 12 để có 12 − 10 = 2). Chừng nào còn điều chỉnh được thì cứ điều chỉnh, cho tới khi nào không điều chỉnh được nữa thì thế vị của mỗi nút chính là thời gian ngắn nhất để đi từ *A* tới nút ấy ; nói riêng thế vị của nút *N* sẽ là thời gian ngắn nhất để đi từ *A* tới *N*. Lúc đó trên mạng lưới sẽ có một đường đi từ *A* tới *N* mà thời gian đi trên mọi đoạn của nó đều bằng hiệu số các thế vị ở hai đầu (đường nét đậm trên hình vẽ) : đó chính là đường đi nhanh nhất từ *A* tới *N*.

Có lẽ bạn sẽ ngạc nhiên : tại sao có thể khẳng định đó là đường đi nhanh nhất ? Lí do rất đơn giản bạn ạ ! Để tiện việc lí luận ta hãy gọi các nút của mạng lưới là $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (với $a_1 = A$, $a_n = N$) và thế vị (sau khi điều chỉnh xong) của các nút a_i là v_i ; nếu có đường nối hai nút a_i, a_j với nhau thì ta gọi $t(a_ia_j)$ là thời gian đi trên đoạn đường ấy. Giả sử đường nét đậm (từ a_1 tới a_n) qua các nút $a_1 = a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{1_p} = a_n$, đường này có tính chất như sau :

$$\begin{cases} v_{i_2} - v_{i_1} = t(a_{i_1}, a_{i_2}) \\ v_{i_3} - v_{i_2} = t(a_{i_2}, a_{i_3}) \\ v_{i_p} - v_{i_{p-1}} = t(a_{i_{p-1}}, a_{i_p}) \end{cases}$$

Từ đó, ta tính được thời gian đi trên đoạn đường nét đậm này là :

$$t(a_{i_1}, a_{i_2}) + t(a_{i_2}, a_{i_3}) + \ldots + t(a_{i_{p-1}}, a_{i_p}) = v_{i_p} - v_{i_1} = v_n - v_1 = v_n - 0 = v_n$$ (= thế vị của đỉnh $an = N$) (1)

Mặt khác, nếu có một đường đi bất kì từ a_1 tới a_n qua các nút $a_1 = a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_q} = a_n$, thì theo cách xác định các thế vị v_j, ta có :

$$\begin{cases} v_{j_2} - v_{j_1} \leqslant t(a_{j_1}, a_{j_2}) \\ v_{j_2} - v_{j_2} \leqslant t(a_{j_2}, a_{j_3}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ v_{j_q} - v_{j_{q-1}} \leqslant t(a_{j_{q-1}}, a_{j_q}) \end{cases}$$

Từ đó, ta tính được thời gian đi trên đoạn đường bất kì này là :

$$t(a_{j_1}, a_{j_2}) + t(a_{j_2}, a_{j_3}) + \ldots + t(a_{j_{q-1}}, a_{j_q}) \geqslant v_{jq} - v_{j_1} = v_n - v_1 = v_n - 0 = n$$ (= thế vị của đỉnh $a_n = N$ (2)

So sánh (1) và (2) có thể kết luận rằng đường nét đậm (có tính chất đã nêu) chính là đường đi nhanh nhất từ *A* tới *N* !

Chú thích : (của Hoàng Tụy) Bài toán này nội dung rất đơn giản và thiết thực, nhưng chỉ mới được phát hiện và giải quyết cách đây chưa đầy 10 năm ! Đó cũng là thêm một bằng chứng để nói rằng toán học không phải là một khoa học đã hoàn chỉnh rồi, ở đó khó có phát minh gì mới nữa, mà trái lại toán học hiện nay – và có lẽ mãi mãi sau này – vẫn luôn luôn phát hiện ra nhiều vấn đề mới mẻ, có khi rất đơn giản và thiết thực như vấn đề trên đây. Cũng cần nói thêm một khía cạnh khác : Giả sử bạn cần truyền một tin tức bí mật từ một đơn vị A tới một đơn vị N. Tin tức truyền đi phải qua một mạng lưới thông tin liên lạc gồm nhiều khâu : ở mỗi khâu đều có một phần nguy cơ tin tức bị lộ, và nguy cơ đó ở mỗi khâu có thể khác nhau, cho nên tùy theo cách chọn đường truyền tin mà tin tức được bảo đảm an toàn nhiều hay ít ; Thế thì bạn làm sao chọn được đường truyền tin an toàn nhất để tin tức có thể truyền đến nơi đến chốn mà không bị lộ ? Bài toán này cũng có ý nghĩa rất thiết thực, và điều đáng chú ý hơn là về nội dung toán học có thể chứng minh rằng nó hoàn toàn trùng với bài toán tìm đường đi nhanh nhất ở trên, và do đó có thể giải bằng phương pháp đã trình bày ! Cái kì diệu của sự khái quát toán học chính là ở chỗ đó : bằng một công cụ mà giải quyết được hàng loạt vấn đề có khi tưởng rất xa nhau !

CÁI NGẪU NHIÊN CŨNG CẦN TÍNH TOÁN

HOÀNG TỤY

Trong đời sống, hễ nói tới ngẫu nhiên thì hình như có nghĩa : Không có quy luật gì. Ấy thế mà các nhà toán học từ mấy trăm năm nay vẫn tính toán được với cái ngẫu nhiên và tìm ra các quy luật của nó để xây dựng nên cả một khoa học phong phú gọi là lí thuyết xác suất(1).

Thật ra thì không phải chỉ có những nhà toán học mới tính toán với cái ngẫu nhiên. Bạn thử tưởng tượng rằng cả tổ của bạn được phân phối một vé văn công và anh em trong tổ quyết định rút thăm để chọn người được nhận vé ấy : mỗi người bỏ vào mũ một thăm sau đó rút may rủi trúng thăm của ai thì người ấy được vé. Nếu bây giờ có người tự đề nghị mình được bỏ vào mũ hai thăm, thì anh em khác sẽ nghĩ như thế nào ? Rõ ràng ai cũng nghĩ rằng anh bạn ấy chủ quan vì tuy việc rút trúng thăm là ngẫu nhiên, và không chắc đâu anh bạn có hai thăm sẽ trúng, nhưng anh được ưu đãi hơn người khác vì có gấp đôi phần chắc (xác suất) được vé hơn người khác. Như thế tức là trong chừng mực nhất định mọi người đã biết so sánh, đánh giá các xác suất, và nếu là việc tốt thì ai cũng biết rằng xác suất càng lớn càng có lợi cho đương sự. Biết tính toán cái ngẫu nhiên là một việc rất có ích trong đời sống, trong các hoạt động sản xuất và chiến đấu.

Nói nôm na thì xác suất của một sự kiện là một số (giữa 0 và 1) để đánh giá khả năng sự kiện ấy xảy ra là nhiều hay ít. Chẳng hạn bảo rằng một đồng chí tự vệ bắn súng với xác suất trúng đích 0,8, tức là : trung bình cứ bắn 10 phát thì trúng 8 phát, cho nên khi bắn một phát thì "10 phần, chắc trúng 8". Xác suất càng sát 1 (tức 10/10) thì sự kiện càng có nhiều phần chắc xảy ra.

Có những xác suất rất dễ xác định : ví dụ, rút thăm giữa 5 người thì xác suất rút trúng thăm của mỗi người là 1/5. Nhiều xác suất khác dựa trên cơ sở thống kê một số lớn trường hợp : chẳng hạn theo số liệu điều tra hàng trăm năm trong nhiều nước, người ta nhận thấy tỉ lệ số con trai mới đẻ so với

(1). Xem bài "Khái niệm xác suất" của bạn Trần Vinh Hiển.

tổng số trẻ con mới đẻ bao giờ cũng vào khoảng 0,516, cho nên xác suất đẻ con trai là 0,516 (lớn hơn xác suất đẻ con gái ! – "trọng nam khinh nữ" thật quả là không đúng). Có những xác suất phải trải qua suy luận tinh vi mới tính được : chẳng hạn nếu bạn kẻ trên mặt bàn những đường thẳng song song cách đều nhau a cm và lấy một chiếc que nhỏ, dài $\frac{a}{2}$ cm tung lên thì có thể chứng minh rằng xác suất để chiếc que rơi đè lên một đường đã kẻ là $\frac{1}{\pi}$ (thành thử nếu bạn tung rất nhiều lần và lấy số lần que đè lên một đường thẳng chia cho tổng số lần tung thì nói chung bạn sẽ được một số sấp xỉ $\frac{1}{\pi}$ – đó là một cách tính số π rất độc đáo vậy !). Ngoài ra nhiệm vụ của người khoa học chính là từ những xác suất hiển nhiên hoặc đã biết mà suy ra những xác suất khác mình cần dùng đến.

Sau đây là một ví dụ để chứng tỏ rằng biết tính toán cái ngẫu nhiên rất có lợi trong thực tế.

Giả sử trong một trận đánh ta cần diệt m mục tiêu (chẳng hạn m máy bay địch), quan trọng ngang nhau. Để diệt các mục tiêu đó ta có n phương tiện (chẳng hạn n súng hoặc pháo), mỗi phương tiện chỉ có thể cùng một lúc diệt được một mục tiêu, và xác suất diệt được mục tiêu là như nhau đối với mọi phương tiện. Ta nên phân công bao nhiêu phương tiện phụ trách từng mục tiêu, để có hi vọng diệt được nhiều mục tiêu nhất ?

Trừ trường hợp đơn giản mỗi phương tiện chắc chắn diệt ngay được mục tiêu mà nó phụ trách, còn thì ta đứng trước mâu thuẫn : nếu dồn nhiều phương tiện vào một mục tiêu thì sẽ tăng phần chắc diệt được mục tiêu này, nhưng lại không diệt được những mục tiêu khác, còn nếu phân tán các phương tiện để phụ trách được nhiều mục tiêu thì khả năng diệt từng mục tiêu sẽ giảm. Giải quyết mâu thuẫn đó như thế nào chính là nội dung của vấn đề đặt ra.

Trước hết hãy xét trường hợp đơn giản $m = n = 2$ (có 2 phương tiện để diệt 2 mục tiêu) và giả sử xác suất để mỗi phương tiện diệt một mục tiêu là $p = \frac{1}{2}$. Có hai cách phân công khác nhau :

Cách 1 : Phân công *đều* cho mỗi phương tiện phụ trách một mục tiêu. Khi ấy, vì xác suất $p = \frac{1}{2}$ nói lên tỉ lệ số mục tiêu diệt được, mà cả thảy có 2 mục tiêu, nên trung bình sẽ diệt được $2 \times \frac{1}{2} = 1$ mục tiêu.

Cách 2 : Dồn cả hai phương tiện vào một mục tiêu thôi. Khi ấy xác suất diệt được mục tiêu này là 0,75 : thật vậy, trong 100 phần thì chắc $100 \times \frac{1}{2} = 50$ phần nó bị diệt bởi phương tiện thứ nhất, và trong 50 phần còn lại thì chắc $50 \times \frac{1}{2} = 25$ phần nó bị diệt bởi phương tiện thứ hai, tức là tất cả 100 phần thì chắc 75 phần nó bị diệt. Còn mục tiêu thứ hai thì chắc chắn thoát. Vậy tổng cộng sẽ diệt được trung bình 0,75 mục tiêu.

So sánh hai cách ta thấy rằng cách thứ nhất tốt hơn. Vậy cách phân công *đều* là cách tốt nhất.

Bây giờ ta xét trường hợp tổng quát (m mục tiêu, n phương tiện). Gọi r và s là số thương và số dư trong phép chia n cho m, tức là $n = m \times r + s (0 < s \leq m - 1)$. Cách phân công đều nhất dĩ nhiên là : giao mỗi mục tiêu cho r phương tiện, còn thừa lại s phương tiện thì phân phối thêm vào s mục tiêu nào đó cũng được (mỗi mục tiêu thêm một phương tiện).

Có thể chứng minh rằng đó cũng là cách phân công tốt nhất. Thật vậy, nếu phân công theo cách khác thì ắt phải có hai mục tiêu A và B mà số phương tiện tập trung vào A nhiều hơn số phương tiện tập trung vào B ít nhất là 2 (chẳng hạn : A là mục tiêu bị dồn nhiều mục tiêu nhất, B là mục tiêu bị dồn ít phương tiện nhất). Ta hãy rút bớt 1 trong 2 phương tiện này đưa sang phụ trách B : như thế tức là 2 phương tiện này trước kia tập trung vào A thì nay một cái nhằm A. một cái nhằm B. Theo lập luận trong trường hợp riêng $m = n = 2$ ở trên thì phân phối lại như vậy làm tăng số mục tiêu hi vọng diệt được. Vậy bất cứ cách phân công nào khác cách phân công *đều* cũng còn có thể sửa lại để tăng thêm số mục tiêu hi vọng diệt được. Cho nên cách phân công *đều* là cách tốt nhất.

Thật ra, còn một cách bố trí khác nữa là : không phân công cụ thể, mà cứ để mặc cho mỗi phương tiện chọn lấy ngẫu nhiên một mục tiêu để bắn. Cách bố trí này thực chất không khác gì là chọn ngẫu nhiên một trong các cách phân công khác nhau có thể có. Giả sử có tất cả N cách phân công khác nhau và số mục tiêu hi vọng diệt được theo cách thứ i là a_i. Khi đó số mục tiêu trung hình có thể diệt được theo cách bố trí ngẫu nhiên là $b = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_N}{N}$, nhưng theo trên mỗi số a_i đều không quá số mục tiêu hi vọng diệt được theo cách phân công đều, cho nên b cũng không thể vượt quá số này ; hơn nữa vì có những số a_i nhỏ hơn số này ; nên b cũng phải nhỏ hơn số này. Thành thử cách bố trí ngẫu nhiên kém hơn cách phân công đều.

Chẳng hạn nếu có 5 người bắn giỏi ngang nhau mà gặp 3 máy bay thì tốt nhất là nên bố trí : 2, 2, 1 tức là 2 người bắn máy bay thứ nhất, 2 người nữa bắn máy bay thứ hai và người sau cùng bắn máy bay thứ ba. Nếu xác suất bắn trúng của mỗi người là 0,1 chẳng hạn thì cách bố trí đó có hi vọng trúng 0,48 chiếc : trong khi đó cách bố trí ngẫu nhiên chỉ hi vọng trúng 0,45 chiếc, còn nếu dồn cả 5 người vào 1 chiếc thì chỉ hi vọng trúng 0,41 chiếc.

Trong thực tế, xác suất bắn trúng của mỗi người có thể khác nhau. Khi ấy cách tốt nhất là chia nhóm, mỗi nhóm phụ trách một mục tiêu, sao cho tổng số xác suất bắn trúng trong các nhóm tương đối đều nhau.

CON ONG GIỎI TOÁN

NGUYỄN BÁ CHU
(Vĩnh Phúc)

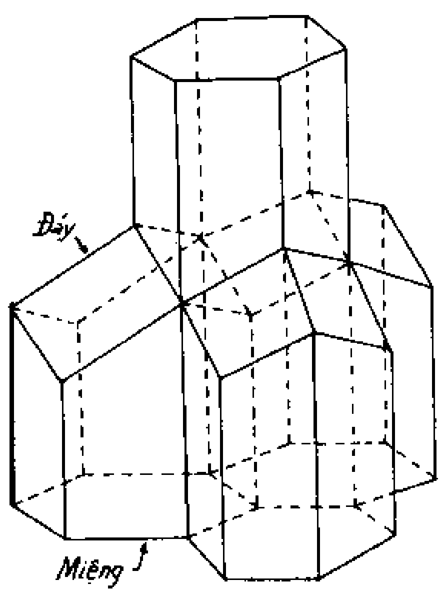
Ai cũng biết rằng ong là loài vật có tổ chức rất cao, biết hợp quần, biết trọng nghĩa "vua, tôi", biết cần kiệm. Trong cuộc kháng chiến chống đế quốc Mĩ ở miền Nam vừa rồi, ong cũng đã trở thành những chiến sĩ diệt Mĩ rất dũng cảm. Ong mật còn biết đổi những chất ở hoa ra mật và sáp ; ngoài ra ong còn là một kĩ sư hóa học tinh xảo, nhà kiến trúc thông minh và một bậc toán học biệt tài.

Quan sát tổ sáp ong, ta thấy hai mặt vô số lỗ hình 6 góc nằm kế cạnh nhau và đều ngăn ngắt. Những lỗ ấy đáy ở giữa. Mỗi miếng tổ sáp gồm có 2 lớp ống hình 6 mặt, đáy chung ở giữa, xem cho kĩ thì thấy cửa ra 2 mặt không đối nhau và đáy không phẳng.

Mỗi ống hình lăng trụ lục giác, thiết diện thẳng là lục giác đều. Mặt ngoài phẳng : đó là cửa ra vào. Mặt trong gồm có 3 hình thoi ghép với nhau thành ra đáy nhọn và 6 mặt bên thành hình thang vuông góc.

Đỉnh đáy ống trên không tiếp với đỉnh đáy lớp dưới, cho nên đáy của 2 lớp tuy là chung nhưng 3 hình thoi của một ống lớp trên lại ăn vào đáy của 3 ống khác nhau ở lớp dưới (Hình 1).

Mỗi cạnh hình lục giác ở mặt ngoài đo được 2,7mm các góc của hình thoi đáy đo được 109°28' và 70°32'.



Hình 1

Ong ở nơi nào cũng làm như vậy, kích thước không đổi (vì vậy ngày trước có ý kiến cho rằng nên lấy tổ ong mà làm căn cứ để định ra đơn vị dài !).

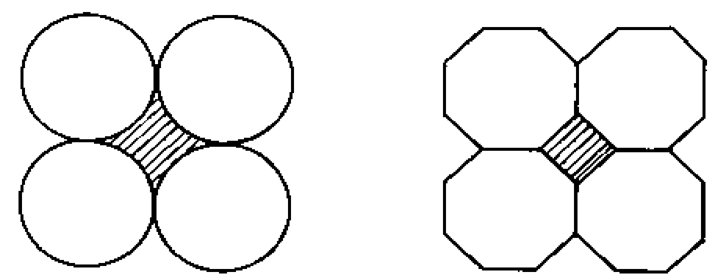
Tại sao ong lại có tổ dạng ấy, kích thước ấy ?

Mỗi ống là một phòng riêng trước để dựng mật sau để ong non nở ra và sinh trưởng ở đó. Vấn đề đặt ra cho kiến trúc ong là : làm sao cho dùng khỏi *phí* chỗ, tốn ít vật liệu : *sáp ?*

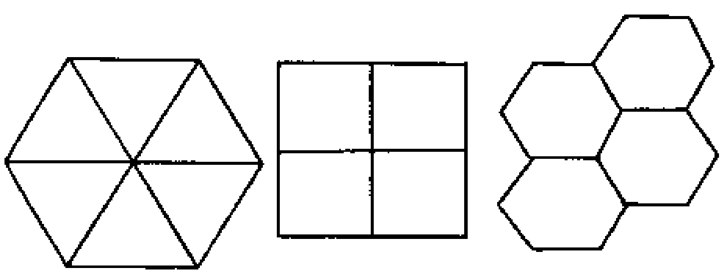
Ta hãy xét từng phần sau đây :

1. Miệng lỗ

Thoạt tiên, ta tưởng mình ong "tròn" thì nó sẽ làm ống tròn cho khỏi phí chỗ vì tất cả những hình trụ (có góc hay không) có cùng một thể tích thì hình trụ tròn xoay có diện tích xung quanh bé nhất (bài toán cực đại cực tiểu lớp 10) như thế thì dùng ống tròn ít tốn sáp hơn cả. Ta nghĩ như vậy có lí nhưng mới được một chiều vì không phải chỉ làm có 1 ống mà thôi. Nếu ống tròn thì xếp cạnh nhau không khít mọi bề được. Muốn không hở phải dùng ống có góc, mặt thiết diện là một đa giác đều. Nhưng chỉ có 3 loại đa giác đều ghép nhau không hở : tam giác đều, hình vuông và lục giác đều. (Hình 2)



Ghép hở



Ghép không hở

Hình 2

Thật vậy : trong một hình có n góc, tổng các góc ở chu vi là 2(n − 2) vuông. Ở chu vi cả thảy có n góc, mỗi góc đó bằng $\frac{2(n-2)}{n}$ vuông. Bây giờ khéo ghép những hình này xung quanh một điểm. Muốn cho không có chỗ hở thì phải làm sao cho mỗi góc ở chu vi phải là một phần của 4 vuông (tức 360°) nghĩa là 4 phải chia hết cho $\frac{2(n-2)}{n}$. Chia thì được $\frac{2n}{n-2}$ hay $2 + \frac{4}{n-2}$.

Số ấy phải nguyên : 4 phải chia đúng cho $n - 2$.

Như thế ta phải có :

$n - 2 = 1 \rightarrow n = 3$: tam giác đều

$n - 2 = 2 \rightarrow n = 4$: hình vuông

$n - 2 = 4 \rightarrow n = 6$: lục giác đều

Với tam giác đều, phải ghép 6 hình xung quanh 1 điểm.

Với hình vuông phải ghép 4 hình xung quanh 1 điểm.

Với lục giác đều phải ghép 3 hình xung quanh 1 điểm.

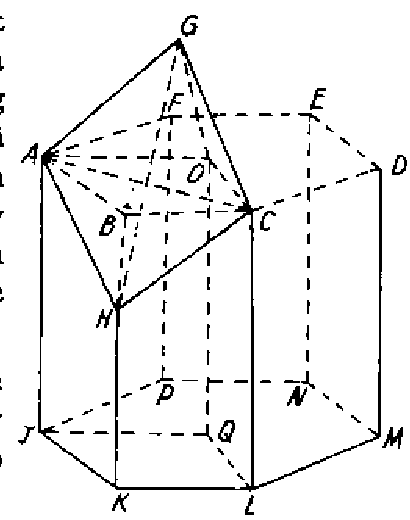
Trong 3 hình này, tại sao ong lại chọn hình 6 góc ?

So sánh chu vi của 3 hình có cùng diện tích $20mm^2$ ta có $p_3 \approx 20{,}4mm$; $p_4 \approx 17{,}9$ mm ; $p_6 \approx 16{,}6mm$. Thế là có thể tiết kiệm được 20% đối với hình tam giác, 7% đối với hình vuông.

Một lí do thứ hai là mình ong tròn, lỗ phải làm sao cho ong có thể nằm vừa vào trong. Mỗi lỗ phải đựng trong lòng vừa một hình tròn mà đường kính ≈ 4,8 mm. Tính ra thì lục giác đều phải có chu vi 16,6mm mà hình vuông thì phải có chu vi 18.7mm và tam giác đều phải có chu vi 24,4mm. Vậy thực ra thì dùng lục giác đối với hình vuông có lợi 11% với tam giác có lợi 32% (gọi R là bán kính vòng tròn nội tiếp thì $R = \frac{c_3\sqrt{3}}{3}$; $R = \frac{c_4}{2}$; $R = \frac{c_6\sqrt{3}}{2}$ trong đó *c* là cạnh).

2 – ĐÁY LỖ

Bây giờ ta xét xem vì sao mà đáy lỗ lại không phẳng. Ong đã nghĩ ra cách làm 2 lớp lỗ chung đáy kế ra đã là khôn như thế bớt được một tầng đáy.



Hình 3

Mới nghĩ qua thì tưởng làm đáy phẳng ít tốn sáp hơn là đáy ghềnh. Thế mà lại trái ngược ! Có thể chứng minh bằng toán rằng : nếu có nhiều ống hình lục giác chung một thể tích và chung một miệng thì lỗ đáy phẳng tốn sáp hơn lỗ đáy gồm 3 hình thoi và muốn tốn sáp ít nhất phải dùng loại hình thoi mà ong đã phát minh ra. Dùng đáy ghềnh thì từng cái tốn sáp hơn đáy phẳng nhưng có thể bớt được chiều cao của ống, thành thử lợi hơn.

Năm 1712, nhà khảo cứu Maraldi người Ý đã đo góc ở tổ ong và đã tìm thấy rằng hình thoi ở đáy có 2 góc là 109°28' và 70°32'.

Nhà toán học Koenig dùng phép tính vi phân mà tính làm sao cho diện tích toàn phần của tổ ong bé nhất thì ông tìm thấy kết quả đúng những con số nói trên.

Ví dụ xem hình 3 :

Hình lăng trụ *ABCDEF. JKLMNP* có thể tích là $V \approx 226\text{mm}^3$.

$$V_{ABCOJKLQ} = \frac{1}{3}V$$

Lấy $BH = OG$.$AHCG$ là hình thoi. Thay đáy nằm ngang *ABCO* bởi đáy nghiêng *AHCG*, thể tích lăng trụ *ABCO.JKLQ* không đổi vì thể tích thêm lên *ACOG* lại bớt đi *ACBH* bằng *ACOG* (các bạn có thể chứng minh thể tích hai hình chóp đó bằng nhau !), nhưng diện tích thì có đổi : Bỏ đi S_{ABCO} ; S_{ABH} ; S_{CBH} mà thay bằng S_{AHCG}

Gọi $BH = x$.$S_{\text{ABCO}} = \dfrac{c^2\sqrt{3}}{2}$;

$$S_{\text{ABH}} = S_{\text{CBH}} = \frac{cx}{2} ;$$

$$S_{\text{AHCG}} = \frac{c\sqrt{3(c^2 + 4x^2)}}{2}$$

$$y = S_{ABCO} + S_{ABH} + S_{CBH} - S_{AHCG} =$$

$$= \frac{c^2\sqrt{3}}{2} + cx - \frac{c\sqrt{3(c^2 + 4x^2)}}{2}$$

(y là phần diện tích bớt đi). Tính đạo hàm của y ta được :

$$y' = c\left[1 - \frac{2\sqrt{3}x}{\sqrt{c^2 + 4x^2}}\right] ;$$

$$y' = 0 \textit{ khi } x = \frac{c\sqrt{2}}{4}$$

x	0	$\frac{c\sqrt{2}}{4}$	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$
y	↗	$c^2\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2}$	↘

Như vậy thay đáy nhọn có lợi hơn đáy phẳng, tức $y > 0$ là có lợi.

$y = 0$ có 2 nghiệm.

$x = 0$ và $x = \dfrac{c\sqrt{3}}{2} \approx 0,866c$.

Vậy lấy $BH < 0,866c$ thì có lợi, lợi nhất là

$BH = \dfrac{c\sqrt{2}}{4} \approx 0,353c$.

Với số ấy ta tính được $IH = \dfrac{c\sqrt{6}}{4}$.

$$\text{tg } \widehat{ICH} = \frac{IH}{IC} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\widehat{ICH} = 35°16' \Rightarrow \widehat{HCG} = 70°32'$$

phần lợi là 18% so với đáy phẳng.

Còn một lí do cuối cùng là đuôi con ong nhọn vậy nằm trong ống đáy nhọn thì ít phí chỗ.

Kết luận : Xem đó thì con ong mà ta thường cho là "vật vô tri" đã giải được mấy bài toán khó, nó giải một cách rất hoàn toàn và đúng như toán học đã chứng minh.

Ta phải lấy làm kinh ngạc mà tự hỏi vì sao vậy ? Đó bởi ngẫu nhiên chăng ? chắc là không. Miệng lỗ hình 6 góc còn nói là một sự vì tình cờ hay kinh nghiệm mà làm ra, chứ lớp đáy hình thoi thì thật là thần diệu.

Phải chăng trời đã phú cho loài ong một lượng năng chắc chắn và dị kì khiến cho không thước đo, không giấy vẽ chỉ với miệng cùng chân mà ong có thể kiến trúc như người kĩ sư thông minh hợp với sức người thợ chuyên môn làm việc bằng những khí cụ tinh xảo.

VÀI BÀI TOÁN VẬN TRÙ

NGÔ DUY NINH

Bài này giới thiệu với các bạn vài bài toán ứng dụng trong đời sống.

Bài toán 1. *Với ý thức tiết kiệm vật liệu, anh hay chị hãy tính xem cần chừng bao nhiêu thanh sắt mỗi thanh dài 7,4m để cắt thành 1000 đoạn, mỗi đoạn dài 0,7m, và 2000 đoạn mỗi đoạn dài 0,5m. Anh hay chị có chứng tỏ được rằng cách tính của anh chị là tiết kiệm nhất không ?*

(Thi vào đại học Phú Thọ, thành phố Hồ Chí Minh, 1976).

Lời giải. Ta nhận thấy muốn tiết kiệm vật liệu thì cần phải cắt mỗi thanh 7,4m thành a đoạn 0,7m và b đoạn 0,5m mà không có dư.

Tức là cần giải phương trình nguyên : $0,7a + 0,5b = 7,4$ hay : $7a + 5b = 74$ với a, b nguyên không âm (1)

Từ (1) $\rightarrow 74 = 7a + 5b \geqslant 7a \rightarrow 0 \leqslant a \leqslant 10$ và $b = \dfrac{74-7a}{5} = 15 - a - \dfrac{1+2a}{5} \rightarrow 1 + 2a \vdots 5$. mà $1 \leqslant 1 + 2a \leqslant 21$ và $(1 + 2a)$ lẻ nên suy ra :

$1 + 2a = 5$ hoặc $1 + 2a = 15$.

Do đó hoặc $a = 2 \rightarrow b = 12$ hoặc $a = 7 \rightarrow b = 5$.

Vậy ta có hai cách cắt một thanh 7,4m lợi nhất :

1) Cắt thành 2 đoạn 0,7m và 12 đoạn 0,5m.

2) Cắt thành 7 đoạn 0,7m và 5 đoạn 0,5m.

Gọi x thanh được cắt theo kiểu thứ nhất và y thanh cắt theo kiểu thứ hai (ở đây thanh 7,4m) ; như vậy số đoạn 0,7m được cắt là $2x + 7y$ và số đoạn 0,5m được cắt là $12x + 5y$: mà ta cần phải cắt 1000 đoạn 0,7m và 2000 đoạn 0,5m nên có phương trình.

$$\begin{cases} 2x + 7y = 1000 \\ 12x + 5y = 2000 \end{cases} \qquad (2)$$

Nhưng hệ (2) không có nghiệm nguyên nên ta chỉ cần lấy phần nguyên các nghiệm của hệ (2) là đủ.

Như vậy $x = 121$ và $y = 108$.

Vậy ta đã cắt được $2x + 7y = 998$ đoạn 0,7m và $12x + 5y = 1992$ đoạn 0,5m nên chỉ cần cắt thêm 2 đoạn 0,7m và 8 đoạn 0,5m. Ta chỉ cần cắt thêm 1 thanh 7,4 m theo kiểu thứ nhất nữa.

Vậy đã dùng tất cả là : $121 + 108 + 1 = 230$ thanh 7,4m.

Ta còn phải chứng tỏ cách cắt trên là tiết kiệm nhất.

Thật vậy, ta thấy tổng số độ dài của 1000 đoạn 0,7m và 2000 đoạn 0,5m là $0,7.1000 + 0,5.2000 = 1700$m : vậy phải dùng ít nhất là $1700/7,4 + 1$ thanh 74,m hay 230 thanh 7,4m (đpcm).

Tóm lại ta chỉ cần cắt 122 thanh 7,4m theo kiểu thứ nhất và 108 thanh 7,4m theo kiểu thứ hai là xong.

Mời các bạn giải bài toán sau :

Bài toán 2. *Cần cắt ít nhất bao nhiêu thanh sắt dài 3,5m thành 1000 đoạn mỗi đoạn dài 0,4m và 3300 đoạn mỗi đoạn dài 0,6m.*

Bài toán 3. (Lập kế hoạch sản xuất).

Có một xí nghiệp sản xuất ra 2 loại sản phẩm A và B. Những sản phẩm này được chế tạo từ 3 loại nguyên liệu I, II và III. Dự trữ từng loại nguyên liệu và số lượng từng loại nguyên liệu dùng để sản xuất ra một sản phẩm được ghi trong bảng sau. Biết một sản phẩm A lãi 5 đồng. 1 sản phẩm B lãi 7 đồng. Nên sản xuất bao nhiêu sản phẩm mỗi loại để lãi nhiều nhất.

Loại nguyên liệu	Dự trữ	Số lượng đơn vị nguyên liệu chi phí cho một đơn vị sản phẩm	
		A	*B*
I	8	2	1
II	14	3	2
III	25	4	6

Lời giải. Gọi x và y là số sản phẩm loại A và B được sản xuất. Ta cần tìm x, y để :

$z = 5x + 7y$ đạt giá trị lớn nhất, và x, y không thể tăng tùy ý vì số lượng dự trữ nguyên liệu có hạn.

Nhìn vào bảng ta thấy số lượng nguyên liệu I để sản xuất x sản phẩm A và y sản phẩm B là : $2x + y$, số lượng này không vượt quá số lượng dự trữ, tức là $2x + y \leq 8$.

Tương tự dự trữ nguyên liệu II và III cho ta điều kiện :

$$3x + 2y \leq 14,\ 4x + 6y \leq 25.$$

Ngoài ra, còn có điều kiện tự nhiên nữa là x, y đều nguyên không âm. Vậy cần tìm Max $(z = 5x + 7y)$ với điều kiện :

$$(I)\quad \begin{cases} 2x + y \leq 8 & (1) \\ 3x + 2y \leq 14 & (2) \\ 4x + 6y \leq 25 & (3) \\ x, y \geq 0 \text{ nguyên} \end{cases}$$

Từ (1) và $y \geq 0 \Rightarrow x \leq 4$. Từ (3) và $x \geq 0 \Rightarrow y \leq 4$,

Từ (1) ta có : $6x + 3y \leq 24 \Rightarrow 6x + 4y = 6x + 3y + y \leq 24 + y \leq 28 \Rightarrow 3x + 2y \leq 14$. Tức là từ (1) $\Rightarrow$ (2).

Nhận thấy phương trình $4x + 6y = 25$ không có nghiệm nguyên (vì vế trái là số chẵn còn vế phải là số lẻ). Nên (3) $\Leftrightarrow 4x + 6y \leq 24$ hay $2x + 3y \leq 6x + 3y = 2x + 3y + 4x \leq 12 + 4x \leq 24$ nếu $x < 4$, tức là nếu $x < 4$ thì (3) $\Rightarrow$ (1) ; còn nếu $x = 4$ thì phải có $y = 0$.

Vậy hệ (I) tương đương với hệ :

$$\begin{cases} 2x + 3y \leq 12 \\ x \leq 3, y \leq 4. \\ x = 4 \text{ thì } y = 0 \\ x,\ y \geq 0 \text{ nguyên.} \end{cases}$$

Khi $x = 4 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow z = 20$.

$x = 3 \Rightarrow y \leq 2 \Rightarrow z \leq 15 + 14 = 29$.

$x = 2 \Leftrightarrow y \leq 2 \Leftrightarrow z \leq 10 + 14 = 24$

$x = 1 \Rightarrow y \leq 3 \Rightarrow z \leq 5 + 21 = 26$.

$x = 0 \Rightarrow y \leq 4 \Leftrightarrow z \leq 28$.

Vậy ta suy ra Max $(z = 5x + 7y) = 29$ khi $x = 3$ và $y = 2$.

Do đó phải sản xuất 3 sản phẩm loại A và 2 sản phẩm loại B, khi ấy tiền lãi sẽ nhiều nhất là 29 đồng.

Bài toán 4. *Tại một kho có chứa n loại hàng có trọng lượng mỗi loại là* $a_1, a_2, \dots, a_n$. *Cần chuyên chở các loại hàng này đến n địa điểm, biết rằng mỗi địa điểm chỉ nhận một loại hàng và cước phí chuyên chở một đơn vị hàng đến địa điểm thứ i là* b_j. *Hãy tìm cách chuyên chở như thế nào để tổng các cước phí là nhỏ nhất.*

Lời giải. Không mất tính tổng quát ta có thể giả thiết

$$b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n \,;\, a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$$

Ta thấy loại hàng thứ i được chở đến địa điểm thứ j sẽ có cước phí là $a_i b_j$. Do đó tổng số cước phí chuyên chở n loại hàng đến n địa điểm là $\sum a_i b_j$ trong đó tổng $\sum a_i b_j$ gồm n số hạng và các chỉ số của a_i đều khác nhau, các chỉ số của b_j đều khác nhau.

Gọi $\{c_i\}$ $i = 1, \dots n$ là một hoán vị của dãy $\{a_i\}$ $i = 1, 2, \dots n$ theo một thứ tự nào đó.

Như vậy vấn đề đặt ra là tìm các $\{c_i\}$ sao cho $\sum_{i=1}^{n} b_i c_i$ (1) đạt giá trị nhỏ nhất.

Nhận xét rằng, nếu $i > j$ và $c_i \geq c_j$ thì (vì $b_i \geq b_j$) $(c_i - c_j)(b_i - b_j) \geq 0$ hay $c_i b_i + c_j b_j \geq c_i b_j + c_j b_i$. Vì vậy ứng với hoán vị c_1, c_2, ... c_n có $c_i \geq c_j$ với $i > j$ ta có hoán vị c'_1, c'_2 ... c'_n trong đó $c'_i = c_j$, $c'_j = c_i$ $c'_k = c_k$ với $k \neq i$, $k \neq j$ thì :

$$\sum_{i=1}^{n} b_i c_i \geq \sum_{i=1}^{n} b_i c'_i.$$

Điều này chứng tỏ tổng (1) đạt giá trị nhỏ nhất khi $c_1 \geq c_2 \geq \dots \geq c_n$, tức là $c_i = a_i$ với mọi i bằng $1, 2, \dots, n$.

Vậy tổng (1) đạt giá trị lớn nhất là $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i$

Từ đây suy ra thuật toán để lập kế hoạch chuyên chở.

Ta lập bảng có 2 hàng và 2 cột ; ghi vào hàng đầu tất cả các giá trị của cước phí theo giá trị tăng dần từ trái sang phải, hàng thứ hai xếp các loại hàng có trọng lượng giảm dần từ trái sang phải, thì tương ứng loại hàng ở cột chứa b_i sẽ được chở đến địa điểm thứ i.

Thí dụ : có 4 loại hàng khối lượng mỗi loại $a_1 = 5$, $a_2 = 20$, $a_3 = 7$, $a_4 = 18$ và cước phí vận chuyển mỗi đơn vị hàng đến địa điểm thứ i là b_1, $b_i = 25$, $b_2 = 30$, $b_3 = 5$, $b_4 = 9$.

Ta lập bảng :

i	3	4	1	2
b_i	5	9	25	30
a_i	20	18	7	5
j	2	4	3	1

Vậy phải chuyển loại hàng thứ nhất đến địa điểm thứ 2, loại hàng thứ 2 đến địa điểm 3, loại hàng thứ 3 đến địa điểm 1 và loại hàng thứ 4 đến địa điểm thứ 4.

Bạn hãy giải bài toán sau :

Bài toán 5. *Có a kiện hàng cùng loại có khối lượng a_1, a_2 ..., a_n, cần bán cho n địa điểm, biết rằng ở mỗi địa điểm chỉ mua 1 kiện hàng và ở địa điểm thứ i người ta chịu mua với giá b_i đồng mỗi đơn vị hàng ; vậy phải bán như thế nào để lãi nhiều nhất ; (cước phí chuyên chở mỗi đơn vị hàng đến các địa điểm như nhau).*

Bài toán 6. *Một máy bay có tải trọng M. Có n loại hàng để xếp lên máy bay đó. Trọng lượng loại hàng i là α_i và giá β_i đồng, cần xếp mỗi loại hàng bao nhiêu đơn vị để trọng lượng tổng cộng không vượt quá M và có tổng giá trị lớn nhất.*

Lời giải. Gọi x_i là trọng lượng loại hàng thứ i được xếp lên máy bay. Theo đề bài ta có :

$0 \leqslant x_i \leqslant \alpha_i$, $x_1 + x_2 + ... + x_n \leqslant M$.

Giá mỗi đơn vị hàng loại i là β_i/α_i đồng, nên tổng giá trị hàng chất lên máy bay sẽ là :

$$\sum_{i=1}^{n} (\beta_i/\alpha_i)x_i$$

Vậy vấn đề đặt ra là :

Tìm Max ($z = \sum_{1=i}^{n} (\beta_i/\alpha_i)\, x_i$) sao cho

$$\begin{cases} 0 \leqslant x_i \leqslant \alpha_i \quad i = 1, 2, ..., n \\ \sum_{i=1}^{n} x_i \leqslant M \end{cases}$$

Đặt $\gamma_i = \beta_i/\alpha_i$ thì đưa về :

Tìm : $(z = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i x_i)$

với điều kiện $\begin{cases} 0 \leqslant x_i \leqslant \alpha_i \quad i = 1, 2, ..., n \\ \sum_{i=1}^{n} x_i \leqslant M \end{cases}$

Nếu $M \geqslant \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$ ta chỉ cần chất tất cả các loại hàng lên máy bay là xong, nên từ đây để giải bài toán ta chỉ giả thiết $M < \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$.

Không mất tính tổng quát ta có thể giả thiết $\gamma_1 \geqslant \gamma_2 \geqslant ... \geqslant \gamma_n$.

Dễ thấy rằng để z đạt Max thì phải có

$$\sum_{1=i}^{n} = M$$

Vì vậy bài toán đưa về :

Tìm Max ($z = \sum_{1=i}^{n} \gamma_i x_i$) với điều kiện

$$\begin{cases} 0 \leqslant x_i \leqslant \alpha_i \quad i = 1, 2, ..., n \\ \sum_{i=1}^{n} = M \\ \gamma_1 \geqslant \gamma_2 \geqslant ... \geqslant \gamma_n \geqslant 0 \end{cases}$$

Ta chứng minh nghiệm x_i của bài toán sau cùng này thỏa mãn :

$\sum_{i=1}^{n} x_i = \text{Min}\left(M, \sum_{i=1}^{n} \alpha_1\right)$ với mọi j = 1, 2 ..., n.

Ta chứng minh điều kiện bằng quy nạp theo số ẩn số n.

Rõ ràng khi $n = 1$ bài toán đúng. Ta giả thiết kết luận của bài toán trên cũng đúng với $(n - 1)$ ẩn số.

Xét bài toán trên khi có n ẩn số.

Ta có :

$$z = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i x_i =$$

$$= \gamma_n \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_n} x_1 + ... + \frac{\gamma_n - 1}{\gamma_n} x_{n-1} + x_n \right)$$

$$= \gamma_n \left[\sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{\gamma_i}{\gamma_n} - 1 \right) x_i \right]$$

$$= \gamma_n M + \sum_{i=1}^{n-1} (\gamma_i - \gamma_n) x_i$$

Nên bài toán đưa về :

Tìm Max$(z - \gamma_n M = \sum_{i=1}^{n-1} (\gamma_i - \gamma_n) x_i)$

với điều kiện :

$$\begin{cases} 0 \leqslant x_i \leqslant \alpha_i \quad i = 1, ..., n \\ \sum_{i=1}^{n-1} x_1 = M - x_n \\ \gamma_i \geqslant \gamma_2 \geqslant ... \geqslant \gamma_n \geqslant 0 \end{cases}$$

Nhận thấy vì biểu thức $z - \gamma_n M$ không chứa ẩn x_n nếu để $z - \gamma_n M$ đạt Max thì $M - x_n$ phải đạt Max :

tức là $\quad M - x_n = \sum_{i=1}^{n-1} x_1 = \text{Min}\,(M, \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i)$

Đặt $z - \gamma_n M = z'$,

$\gamma_i - \gamma_n = \gamma_i'$ $i = 1, 2, ..., n-1$, $M - x_n = M'$ thì bài toán tương đương với :

Tìm Max ($z' = \sum_{i=1}^{n-1} \gamma_i' x_i$) với điều kiện :

$$\begin{cases} 0 \leqslant x_i \leqslant \alpha_i \quad i = 1, 2, ..., n-1 \\ x_1 + ... + x_{n-1} = M' \\ \gamma \geqslant \gamma_2' \geqslant ... \geqslant \gamma_{n-1}' \geqslant 0 \end{cases}$$

Đây chính là bài toán với $(n - 1)$ ẩn số

Vậy theo giả thiết quy nạp thì :

$$\sum_{i=1}^{j} x_i = \text{Min}\,(M', \sum_{i=1}^{j} \alpha_i)$$

với mọi $j = 1, 2..., n - 1$.

Nhưng $\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \geqslant \sum_{i=1}^{j} \alpha_i \; \forall j = 1, ..., n-1$

nên

$$\text{Min}\,(\text{Min}\,(M, \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i) \,.\, \sum_{i=1}^{j} \alpha_i) =$$

$$= \text{Min}\,(M, \sum_{i=1}^{j} \alpha_i) \; \forall j = 1, ... n-1$$

Tức là :

$$\text{Min}\,(M'. \sum_{i=1}^{j} \alpha_i) = \text{Min}\,(M. \sum_{i=1}^{j} \alpha_i) \quad \forall j = 1, ..., n-1.$$

Do đó ta có :

$$\sum_{i=1}^{j} x_i = \text{Min}\,(M. \sum_{j=1}^{j} \alpha_i) \; \forall j = 1, ..., n-1$$

Kết hợp với

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = M = \text{Min}(M, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i)$$

ta được :

$$\sum_{i=1}^{j} x_i = M\,(M, \sum_{i=1}^{j} \alpha_1) \; \forall j = 1, ..., n \text{ (đpcm)}$$

Từ đây ta suy ra thuật toán để chất hàng như sau :

Lập bảng gồm 2 hàng và n cột.

Hàng đầu ghi giá tiền của mỗi đơn vị của từng loại hàng tức là tỉ số β_i/α_i sao cho nó giảm từ trái sang phải.

Hàng thứ hai ghi trọng lượng của loại hàng tương ứng với giá tiền đó.

Gọi i là cột nhỏ nhất có tính chất : Tổng số các trọng lượng hàng ở cột 1, 2,... $i - 1$ bé hơn M còn tổng số các trọng lượng hàng ở cột 1, 2, ..., i không bé hơn M.

Khi ấy tất cả các lượng hàng ở các cột 1, 2, ... $i - 1$ được chất hết lên máy bay, và chỉ chất thêm loại hàng ở cột i một lượng bằng hiệu số giữa M và tổng các lượng hàng ở các cột 1, 2, ..., $i - 1$.

Còn nếu không có cột i nào thỏa mãn tính chất trên thì ta chất tất cả các loại hàng lên máy bay.

Thí dụ : cho $\alpha_1 = 5$, $\alpha_2 = 7$, $\alpha_3 = 2$, $\alpha_4 = 10$, $\beta_1 = 7$, $\beta_2 = 4$, $\beta_3 = 8$, $\beta_4 = 20$ và $M = 22$.

Lập bảng :

Cột	1	2	3	4
i	3	4	1	2
β_i/α_i	8/2 = 4	20/10=2	7/5	4/7
α_i	2	10	5	7

Ta có : $\alpha_3 < M$, $\alpha_3 + \alpha_4 < M$, $\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_1 < M$ và $\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_1 + \alpha_2 > M$

Vậy chất tất cả các loại hàng thứ 1, 3, 4 có được và thêm $22 - 17 = 5$ trọng lượng hàng hóa thứ 2 lên máy bay.

Khi đó tổng số giá trị sẽ lớn nhất là :

$(8/2).2 + (20/10).10 + (7/5).5 + (4/7).2 =$

$= 36\frac{1}{7}$ đồng

BÀI TOÁN KIỂM TRA SẢN PHẨM BẰNG PHƯƠNG PHÁP XÁC SUẤT THỐNG KÊ

ĐẶNG HẤN

Bạn muốn vạch một đường thẳng chính xác nhưng chiếc thước kẻ lại cong. Bạn muốn quay một đường tròn đều đặn nhưng chiếc compa xộc xệch nên chỉ được một đường... méo ! Chất lượng kém của chiếc thước kẻ hay cái compa đã làm bạn khó chịu lắm rồi. Nhưng tác hại của một vật dụng chất lượng kém ở đây còn ít, vì nhiều khi chứng minh một bài toán, bạn còn vạch một đường kín kì dị hơn nhiều mà bạn vẫn gọi là "đường tròn", rồi bài toán vẫn cứ ra. Thiệt hại sẽ lớn hơn nhiều nếu sản phẩm có chất lượng kém là mặt hàng đắt, những dụng cụ sản xuất, thuốc chữa bệnh hay một phụ tùng ôtô mà sự hỏng hóc của nó có thể đưa đến thiệt hại lớn, có thể dẫn đến tai nạn chết người ! Nó cũng gây thiệt hại cho người sản xuất như hao phí nguyên vật liệu, mất uy tín kinh doanh, không đạt chỉ tiêu chất lượng...

Vậy kiểm tra hạn chế việc để lọt những lô hàng xấu ra thị trường là cực kì cần thiết. Nó có tác dụng thúc đẩy nâng cao chất lượng, làm tăng năng suất lao động, làm lợi nhiều cho nền kinh tế quốc dân.

Muốn biết đích xác một lô hàng là tốt hay xấu, lẽ ra ta phải kiểm tra toàn bộ. Nhưng thường ta chỉ kiểm tra một bộ phận của lô hàng. Trên cơ sở phân tích những sản phẩm kiểm tra này mà đánh giá chất lượng toàn bộ. Phương pháp này gọi là "phương pháp mẫu". Khó có thể biết mầm mống của nó nẩy sinh ra từ bao giờ. Ta hãy hình dung ngày xửa ngày xưa nào đó có hai bộ lạc A và B. A trồng được nhiều dừa nước ngon, còn B thì nấu rượu rất chúa. Họ cần trao đổi với nhau. A giao cho B mấy sọt quả dừa. Tất nhiên người nhận chỉ đập ra một số quả để kiểm tra chứ nếu đập toàn bộ ra thì thật nguy to. Còn B giao cho A một loạt lọ rượu. Tất nhiên người nhận chỉ nếm mấy lọ vì nếu nếm mãi thì người nếm say đến và không còn cảm giác để nhận xét rượu tốt hay xấu nữa !

Từ thí dụ trên ta thấy hai vấn đề : kiểm tra toàn bộ là không thể được khi nó có tính chất phá hoại (kiểm tra đồ hộp, đạn,...), kiểm tra toàn bộ phải kéo dài nhiều khi thiếu chính xác hơn là kiểm tra một số ít trên cơ sở phân tích kĩ lưỡng.

Nhưng ưu điểm chủ yếu của phương pháp mẫu là nó rất tiết kiệm. Với nền công nghiệp phát triển, sản xuất ra hàng loạt sản phẩm thì kiểm tra toàn bộ sẽ rất tốn kém, tăng giá thành sản phẩm rất nhiều.

Vấn đề đặt ra là lấy mẫu bao nhiêu và xử lí như thế nào ? Để giải quyết vấn đề đó ta phải đề cập đến mấy kiến thức về "xác suất". Trong báo T. H. T. T. số 9, 11 và 47, anh Trần Vinh Hiển đã giúp các bạn bước đầu làm quen với khái niệm này. Xin nhắc lại vài nét phục vụ cho mục đích của chúng ta ở đây.

Xác suất của một biến cố là một con số p nào đó ($0 \leq p \leq 1$). Nó cho biết biến cố đó trong nhiều phép thử sẽ xảy ra "thường xuyên" đến mức nào ? Ta nói xạ thủ X bắn trúng bia với xác suất 90% tức là nếu X bắn nhiều lần (mỗi lần 100 viên) thì về trung bình mỗi lần X bắn trúng bia 90 viên. Ta nói xác suất xuất hiện mặt sấp khi gieo đồng tiền là 1/2, vì trong một loạt dài các lần gieo đồng tiền, tỉ lệ số lần xuất hiện mặt sấp xấp xỉ 1/2.

Thường để tính xác suất của một biến cố ta hay dựa vào những biến cố "đồng khả năng" tức là chúng xảy ra với "mức độ thường xuyên" như nhau. Nếu trong một cái hòm kín chứa N hòn bi gồm M hòn đỏ và $N - M$ hòn xanh. Ta lấy hú họa ra một hòn thì xác suất lấy được một hòn cố định bất kì là $1/N$. Ở đây ta có N biến cố đồng khả năng. Còn xác suất của biến cố D : "lấy được hòn bi đỏ" là M/N (bằng tỉ số giữa số biến cố thuận lợi cho D và tổng số biến cố đồng khả năng có thể có).

Ta hãy xét bài toán phức tạp hơn : lấy từ hòm trên n hòn bi ($n < N$). Tính xác suất của biến cố A : "trong n hòn bi đó có m hòn bi đỏ".

Số các biến cố đồng khả năng có thể có ở đây là số cách lấy khác nhau n hòn bi ra khỏi N hòn bi (không kể thứ tự lấy). Số đó là tổ hợp chập n của N phần tử : $C_N^n = N!/n!(N-n)!$ Còn số biến cố thuận lợi cho A là số cách lấy từ M hòn bi đỏ ra m hòn đồng thời với việc lấy từ $N - M$ hòn bi xanh ra $n - m$ hòn.

Tức là bằng $C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}$. Vậy xác suất của biến cố A là :

$$P(A)=P_n(m) = \frac{C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$$

Nếu gọi B là biến cố : "trong n hòn bi lấy ra có không quá m_o hòn đỏ" (hoặc có O hòn đỏ, hoặc có 1 hòn đỏ..., hoặc có m_o hòn đỏ) thì xác suất của biến cố B sẽ là

$$P(B) = P_n(m \leq m_o) = P_n(O) + P_n(1) + \ldots P_n(m) = \sum_{i=o}^{m_o} (C_M^i C_{N-M}^{n-i}/(C_N^n) \qquad (1)$$

($P_n(i)$ là xác suất trong n hòn bi lấy ra có i hòn đỏ).

Bây giờ hãy trở lại vấn đề chất lượng sản phẩm.

Ta có lô gồm N sản phẩm, trong đó có M phế phẩm và $N - M$ chính phẩm. Khi chưa kiểm tra toàn bộ ta chưa biết M. Ta quy ước lô có quá M_o phế phẩm là lô xấu và không muốn nhận lô như vậy. Ta tiến hành kiểm tra như sau : từ lô lấy ra n sản phẩm và kiểm tra. Gọi số phế phẩm trong đó là m. Nếu $m > m_o$ ta loại lô, nếu $m \leq m_o$ ta nhận lô. Hãy tính n và m_o thế nào để trung bình 90% những lô xấu đều bị loại (tức là nó chỉ được nhận với xác suất 10%). Ta kí hiệu phương án là $(n - m_o)$.

Nếu coi lô sản phẩm như hòm đựng bi ở trên còn phế phẩm là bi đỏ thì biến cố B ở trên chính là biến cố : "lô hàng N sản phẩm với M phế phẩm sẽ được chấp nhận qua kiểm tra mẫu n sản phẩm" (vì ta đã quy ước nếu trong n sản phẩm không có quá m_o phế phẩm thì ta nhận lô, mà B là biến cố : "lấy n hòn bi có không quá m_o hòn bi đỏ). Nếu trong (1) ta thay $M = M_o$ và đặt bằng 10% ta có phương trình để xác định n và m_o trong phương án kiểm tra

$$\sum_{m=o}^{m_o} (C_{M_o}^m C_{N-M_o}^{n-m}/C_N^n) = 10\% \qquad (2)$$

(Vì (2) có nghĩa là lô có đúng M_o phế phẩm sẽ được nhận với xác suất đúng bằng 10%. Tất nhiên lô có càng nhiều hơn M_o phế phẩm thì xác suất chấp nhận lại càng nhỏ đi).

Ta có một phương trình để xác định hai ẩn số nên cho trước một n_i ta có một m_{oi} và do vậy ta có nhiều phương án (n_o, m_{oo}), (n_1, m_{o1}), cùng đảm bảo yêu cầu là nếu lô có quá M_o phế phẩm thì sẽ bị bác bỏ qua kiểm tra mẫu với xác suất > 90%. Muốn xác định duy nhất một cặp (n, m_o) ta phải đặt thêm những điều kiện khác. Chẳng hạn ta chọn n nào nhỏ nhất để phải kiểm tra ít nhất. Hay ta đặt thêm điều kiện : lô có không quá M_1 (< M_o) phế phẩm ta coi là lô tốt và muốn quá 95% lô như vậy phải được chấp nhận. Ta có phương trình mới

$$\sum_{i=1}^{m_o} C_{M_1}^i C_{N-M_1}^{n-i} / C_N^n) = 95\% \qquad (3)$$

(2) và (3) cho ta hệ hai phương trình để xác định duy nhất (n, m_o).

Giải hệ phương trình (2) và (3) rất phức tạp ; thường người ta giải bằng máy tính điện tử và cho bảng sẵn. Khi biết kích thước N của lô và yêu cầu đặt ra, ta tra được n và m_o thích hợp. Đôi khi người ta cũng giải xấp xỉ (chẳng hạn có thể xấp xỉ (2) bằng :

$$\sum_{i=o}^{m_o} C_n^i \, (M_o/N)^i \, (1 - M_o/N)^{n-1} = 10\%$$

nhưng ngay cả khi đó cũng khá phức tạp).

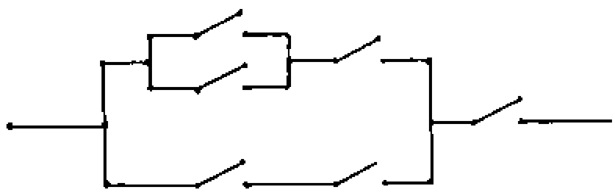
Trên đây mới chỉ là vài nét phác họa để các bạn thấy được cơ sở toán học của một trong những khía cạnh áp dụng toán học xác suất thống kê vào việc quản lí chất lượng. Mong có dịp trao đổi thêm cùng các bạn những vấn đề tinh tế hơn.

MỘT ỨNG DỤNG CỦA ĐẠI SỐ BUL TRONG THIẾT KẾ CÁC SƠ ĐỒ ĐIỆN

T.A.

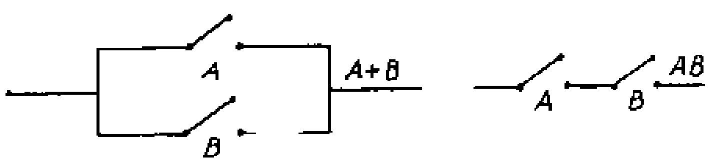
Các khái niệm về đại số Bul, bạn đọc có thể tìm đọc bài "Đại số Bul" ở mục giới thiệu toán học hiện đại trong số báo 80, tháng 9-10-1974.

Sau đây ta xét các "sơ đồ bật tắt", tức là các sơ đồ điện có mắc các "núm bật tắt điện", thí dụ như hình 1.



Hình 1

Bây giờ ta định nghĩa các phép toán trên các "sơ đồ bật tắt" như sau : Giả sử A, B hai "sơ đồ bật tắt". Cộng (hoặc nhân) sơ đồ A với sơ đồ B, kí hiệu $A + B$ (trường hợp nhân, ký hiệu AB) là mắc song song (trường hợp nhân là mắc nối tiếp) hai sơ đồ A, B với nhau. Thí dụ A, B là các sơ đồ chỉ gồm một "núm bật tắt" thì $A + B$ và AB có dạng như hình 2.



Hình 2

Bởi vì chức năng duy nhất của các "sơ đồ bật tắt" là điều khiển dòng điện đi qua, nên hai "sơ đồ bật tắt" cùng số "núm bật tắt" (có thể mắc khác nhau) và cùng cho, hoặc cùng không cho dòng điện đi qua khi các "núm" ở mỗi sơ đồ đóng mở như nhau ta sẽ coi là tương đương.

Bạn sẽ thấy ngay các quy luật sau :

$A + B = B + A$ và $AB = BA$

$(A + B) + C = A + (B + C)$ và $(AB)C = A(BC)$

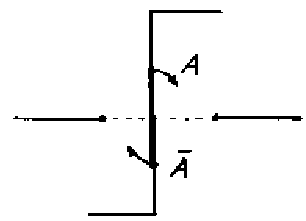
$(A + B)C = AC + BC$ và $AB + C = (A + C)(B + C)$.

Nếu kí hiệu I là "núm bật tắt" luôn luôn đóng và O là "núm bật tắt" luôn luôn mở (hình 3), ta sẽ có :

$$A + O = A \text{ và } A + I = I$$
$$AI = A \text{ và } AO = O.$$

Hình 3

Kí hiệu A và $\overline{A}$ là cặp "núm bật tắt" đối ngẫu, tức là khi A đóng thì $\overline{A}$ sẽ mở và A mở thì $\overline{A}$ sẽ đóng. Về kĩ thuật có thể thực hiện cặp "núm" đối ngẫu như thế như hình 4.



Hình 4.

Dễ thấy rằng :

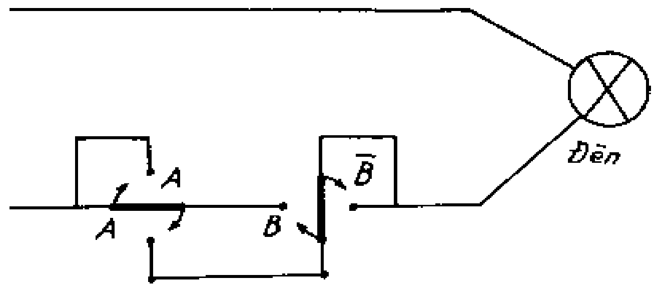
$$\overline{\overline{A}} = A, \overline{I} = 0, \overline{O} = 1$$
$$\overline{A + B} = \overline{A}\,\overline{B}, \overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}$$

Như vậy tập tất cả các "sơ đồ bật tắt" với các phép toán định nghĩa như trên, lập thành một đại số Bul. Mặt khác, tập tất cả các mệnh đề với các phép toán "hoặc", "và", "phủ định", cũng lập thành một đại số Bul, do đó chúng cùng cấu trúc toán học, và ta có thể chuyển một bài toán cụ thể trên các "sơ đồ bật tắt" sang bài toán tương đương trên các mệnh đề hoặc ngược lại. Điều này được ứng dụng trong thiết kế các "sơ đồ bật tắt" thỏa mãn các điều kiện cho trước. Sau đây là một thí dụ đơn giản : Hãy thiết kế hệ thống điện cho một chiếc đèn ở cầu thang sao cho đèn có thể được bật tắt ở hai đầu cầu thang.

Kí hiệu A, B là hai "núm bật tắt" ở hai đầu cầu thang. Nhiệm vụ của ta là thiết kế một tổ hợp điện giữa các "núm bật tắt" A, B (có thể thêm cả $\overline{A}, \overline{B}$) sao cho sự thay đổi trạng thái bật tắt của bất kì núm nào trong hai núm A, B sẽ làm thay đổi trạng thái bật tắt của đèn. Kí hiệu a, b là các mệnh đề "núm A bật", "núm B bật". Chuyển sang ngôn ngữ các mệnh đề, bài toán trở thành : thiết lập một tổ hợp c giữa các mệnh đề a và b, sao cho khi thay đổi giá trị đúng, sai của một trong hai mệnh đề a, b sẽ làm thay đổi giá trị đúng sai của mệnh đề c. Điều kiện trên được thỏa mãn, khi c là mệnh đề có tính chất : c đúng khi cả hai a, b đều đúng hoặc đều sai và c sẽ sai trong các trường hợp còn lại (t. l. khi có một mệnh đề đúng, một mệnh đề sai), tức là :

$$c = ab + \bar{a}\bar{b},$$

Khi chuyển ngược lại, "sơ đồ bật tắt" cần thiết kế sẽ có dạng.



Hình 5

$$C = AB + \overline{A}\,\overline{B}$$

và có thể thực hiện, như ra trên hình 5.

Bằng phương pháp tương tự như vậy, trong kĩ thuật người ta có thể thiết kế các sơ đồ mạch điện thỏa mãn các yêu cầu cho trước phức tạp hơn nhiều.

MẠNG ĐƯỜNG TỐI ƯU

VŨ ĐÌNH HÒA

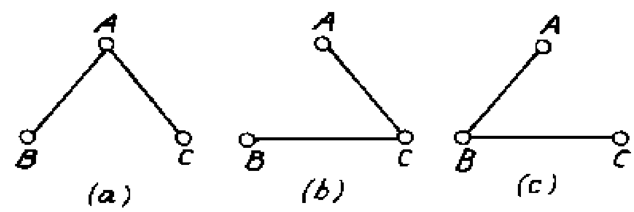
1. Mở đầu

Từ cổ xưa toán học đã cho người ta biết rằng con đường ngắn nhất nối 2 điểm trên mặt phẳng là đoạn thẳng nối chúng. Mọi con đường khác nối 2 điểm này đều có độ dài lớn hơn. Nếu như chúng ta muốn tổng quát hóa tìm con đường có độ dài nhỏ nhất nối ba, bốn hoặc nhiều điểm hơn trên mặt phẳng thì vấn đề nhanh chóng trở nên phức tạp. Tuy nhiên, những vấn đề trên lại hay xuất hiện khi chúng ta phải xây dựng những mạng lưới đường liên tỉnh, hoặc phải kiến thiết một hệ thống kênh phục vụ việc cung cấp nước hoặc các nguồn vật tư cho một số địa điểm nào đó, mà phí tổn bỏ ra tỷ lệ với độ dài của kênh đào. Một mạng đường nối nhiều điểm trên mặt phẳng, có tổng độ dài nhỏ nhất được gọi là *mạng đường tối ưu*.

Trong bài này, khi khảo sát những hệ thống đường như vậy, chúng ta luôn giả thiết rằng chúng gồm các đoạn thẳng hợp thành. Một đoạn đường cong trong thực tế có thể đưa vào lí thuyết là một đoạn thẳng có độ dài bằng độ dài của đoạn đường cong ấy.

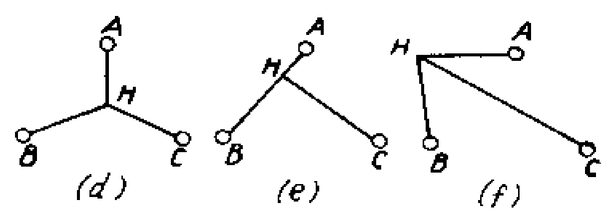
2. Bài toán 3 xã :

Nếu có 3 xã A, B và C thì mạng lưới đường ngắn nhất nối chúng có độ dài là bao nhiêu ? Chúng ta có thể thấy ngay rằng phương án xây dựng đường liên xã này có thể nghĩ tới không chỉ là ba khả năng sau :



Hình 1

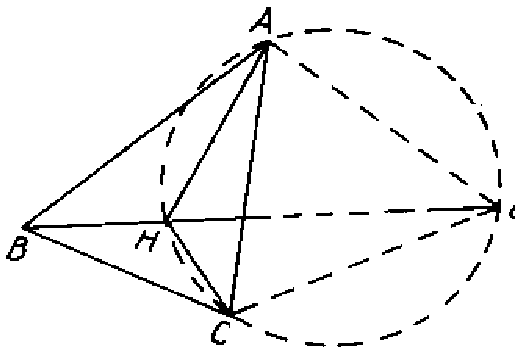
mà còn có thể là những phương án như trong hình 2 :



Hình 2

Trong những phương án ở hình 2, chúng ta thấy mạng đường của chúng ta có thêm một điểm H là ngã ba của mạng đường liên xã. Dễ thấy trong *(e)* nếu chọn H là chân đường cao hạ từ C xuống AB thì phương án trong *(e)* tốt hơn phương án trong *(a)* và *(e)*. Với lí do tương tự thì cả ba phương án *(a)*, *(b)* và *(c)* rõ ràng chưa phải tối ưu.

Trong ba phương án *(d)*, *(e)* và *(f)* thì bài toán cần giải là phải tìm một điểm H trong mặt phẳng tam giác ABC sao cho tổng $HA + HB + HC$ là nhỏ nhất có thể được. Vận dụng bài toán quen thuộc : *"Độ dài của các khoảng cách từ một điểm trên mặt phẳng tới 3 đỉnh của tam giác đều luôn thỏa mãn bất đẳng thức tam giác. Đẳng thức chỉ xảy ra khi điểm được xét nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác đều đã cho"*, thì điểm cần tìm H phải là điểm nhìn ba cạnh của tam giác ABC dưới ba góc bằng nhau, bằng 120^o, nếu như tam giác ABC có ba góc bé hơn 120^o. Trong trường hợp $\widehat{BAC} \geq 120^o$, chẳng hạn, thì chính A là điểm cần tìm.



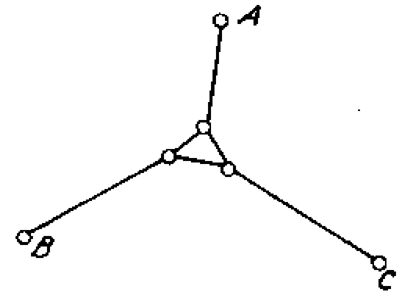
Hình 3

Thực vậy, nếu $\widehat{A} < 120^o, \widehat{B} < 120^o$ và $\widehat{C} < 120^o$ thì $HA + HB + HC \leq BD$, ở đây D là đỉnh của tam giác đều ACD. Đẳng thức chỉ xảy ra khi điểm H là giao của BD với đường tròn ngoại tiếp tam giác ACD, tức là tại vị trí nhìn ba cạnh của tam giác ABC dưới cùng một góc bằng 120^o.

Bài tập 1 : *Cho tam giác ABC có $\widehat{A} \geq 120^o$. Chứng minh rằng $AB + AC \geq HA + HB + HC$ với mọi điểm H tùy ý trong mặt phẳng tam giác ABC.*

Suy nghĩ thêm một chút ta sẽ tự hỏi rằng tại sao ta không có thể xây dựng thêm một vài ngã ba để được một hệ thống đường tốt hơn ? Nhỡ một mạng đường như hình 4 lại ngắn hơn mạng đường liên xã một ngã ba của chúng ta thì sao ?

Để thấy rằng một suy nghĩ như vậy cũng có cơ sở, chúng ta khảo sát bài toán tiếp.



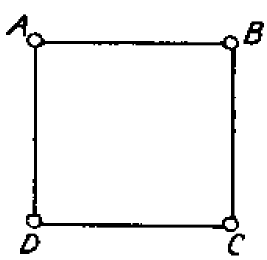
Hình 4

3. Bài toán 4 xã :

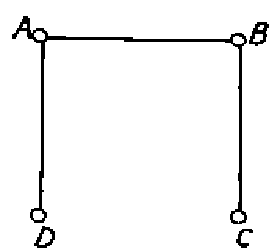
Có 4 xã A, B, C, D nằm trên 4 đỉnh của một hình vuông cạnh $10km$. Hỏi rằng độ dài của mạng đường liên xã tối ưu bằng bao nhiêu ?

Trước hết chúng ta thấy rằng có nhiều phương án xây dựng mạng đường liên xã. Chúng ta xem xét 3 phương án sau đây :

a) Đường liên xã không có ngã k ($k \geq 3$). Khi đó mạng đường của chúng ta gồm các đoạn đường nối trực tiếp từ xã này tới xã khác và không cắt nhau. Có thể kiểm tra trực tiếp để thấy rằng mọi phương án đều cho chúng ta mạng đường có ba đoạn nối trực tiếp. Do đường nối trực tiếp của hai xã lớn hơn hoặc bằng $10km$, cho nên độ dài ngắn nhất) sẽ là $30km$. Một phương án như vậy được cho ở hình 6.



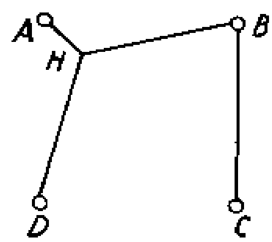
Hình 5



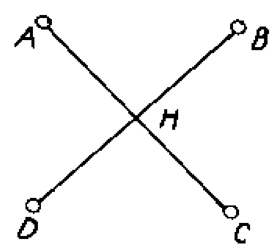
Hình 6

b) Đường liên xã có một ngã k đường :

Ví dụ của một phương án như vậy được trình bày ở hình 7, và H ở đây là điểm nhìn AB, BD, AD dưới góc 120^o. Lẽ dĩ nhiên một



Hình 7



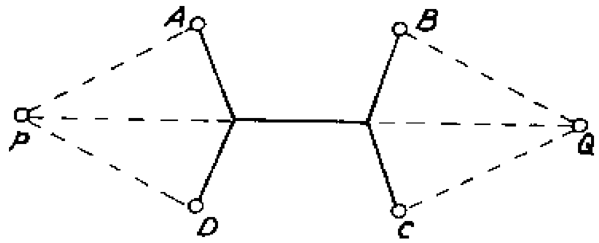
Hình 8

phương án khác có một ngã tư đường được trình bày ở hình 8 cho ta nghiệm tối ưu của phương án có duy nhất một ngã tư đường.

Bạn đọc có thể nhanh chóng thấy độ dài tối ưu của phương án này là $20\sqrt{2}km$.

c) Đường liên xã có hai ngã ba đường :

Theo phương án này mạng đường cần tìm sẽ có dạng như trong hình 9. Dựng hai tam giác đều *ADP* và *BQC*, ta có thể thấy độ dài tối ưu là *PQ* và điểm cụ thể của hai ngã ba có thể xác định được là giao của *PQ* với hai đường tròn ngoại tiếp các tam giác *ADP* và *BQC*. Lúc này mạng đường tối ưu dài $10 + 10\sqrt{3}km$.



Hình 9

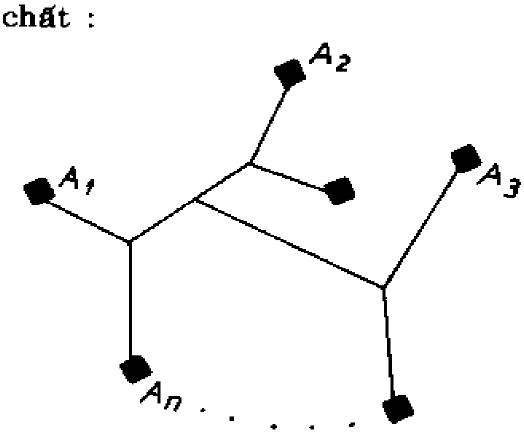
So sánh ba phương án *a), b),* và *c)* ta có nghiệm tối ưu là $10 + 10\sqrt{3}$ và mạng đường cần dựng được xác định như đã mô tả trong *c)*.

Bài tập 2. *Hãy chứng minh rằng mạng đường ở hình 7 dài hơn mạng đường ở hình 8.*

Điều bất ngờ đối với chúng ta là ở trong bài toán 4 xã này, mạng đường tối ưu có nhiều ngã ba hơn là ở bài toán ba xã. Điều đó khiến chúng ta phải xem xét xây dựng lí luận chính xác để loại trừ khả năng chúng ta bỏ qua các phương án tối ưu khác.

4. Bài toán tổng quát n xã :

Trên mặt phẳng có *n* xã. Hỏi rằng mạng đường tối ưu liên xã có độ dài bằng bao nhiêu ? Chúng ta có thể thấy rằng một mạng đường tối ưu *T* nối *n* xã với nhau có tính chất :



Hình 10

1) Từ một đỉnh (một xã, hoặc một ngã *k* nào đấy) của *T* ta luôn có thể đi tới mọi đỉnh khác của *T (T liên thông).*

2) Giữa hai đỉnh bất kì của *T* chỉ có một con đường duy nhất (dọc theo *T*) nối chúng với nhau (Tức là *T* không có một đường vòng khép kín nào cả.

Một mạng đường như vậy được gọi là *một cây*. Hình ảnh rất gần gũi của cây là mạng đường dây tải điện hoặc mạng đường ống dẫn nước.

Bài tập : *Chứng minh rằng nếu T là một cây có $n \geq 2$ đỉnh thì T có 2 đỉnh treo, tức là 2 nhánh cụt, đi vào không thể đi tiếp được.*

Với tính chất vừa được nêu ta có thể thấy ngay, bằng quy nạp, rằng một cây có *k* đỉnh thì có $k - 1$ cạnh. Gọi số ngã *k* của *T* là *t*, khi đó tổng số các cạnh xuất phát từ các đỉnh của *T* (từ các ngã *k* có lớn hơn hoặc bằng 3 cạnh, từ các xã có nhiều hơn hoặc bằng 1 cạnh) không ít hơn $3t + n$. Do mỗi cạnh được tính đúng hai lần, nên tổng này bằng $2(t + n - 1)$ (do *T* có $t + n$ đỉnh) Suy ra :

$$2(t + n - 1) \geq 3t + n,$$

hay là :

$$n - 2 \geq t$$

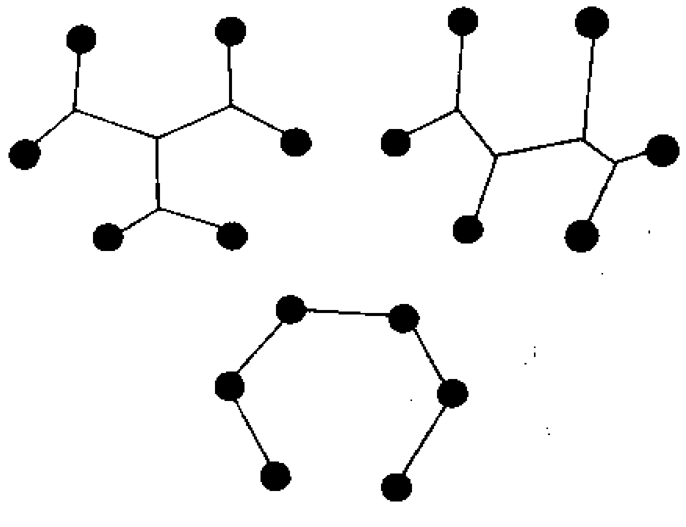
Đẳng thức chỉ xảy ra khi mọi đỉnh thêm vào chỉ là ngã ba (có đúng ba cạnh xuất phát) và các xã đều là đỉnh treo.

Bài tập 4 : *Chứng minh rằng với một sai số nhỏ tùy ý, mọi cây đều đưa về dạng cây chỉ có đúng ngã ba và đỉnh treo mà thôi.*

Với kết luận này, ta thấy rằng khi khảo sát chúng ta chỉ cần khảo sát các mô hình tối ưu có đúng $n - 2$ ngã ba và các xã là các đỉnh treo mà thôi. Hai thắc mắc trước của chúng ta được giải quyết. Trong trường hợp tam giác, chỉ có thể có thêm một ngã ba mà thôi ; trong trường hợp tứ giác thì mạng đường có 2 ngã ba...

5. Quy tắc góc 120° :

Qua lời giải của bài toán 3 xã và 4 xã, ta thấy rằng các đoạn rẽ tuân theo quy luật quay 120°. Ngoài ra, kết luận này cũng đã được kiểm tra bằng thí nghiệm cơ học đơn giản. Lưu ý rằng nếu gọi một cây liên xã thỏa mãn điều kiện là mỗi khi tới ngã ba ta phải quay 120° để đi tiếp, là một cây tối ưu, thì nghiệm thực sự của bài toán mạng đường



Hình 11

liên xã là một cây tối ưu. Vì một hệ thống n xã đã cho có thể có nhiều cây tối ưu. Như trường hợp $n = 8$ và các xã được bố trí trên đỉnh của lục giác đều ta thấy có các cây tối ưu cần khảo sát là :

Bài tập 5 : *Hãy giải bài toán mạng đường liên xã ngắn nhất cho 6 xã nằm ở 6 đỉnh của một lục giác đều cạnh 10 km.*

Người ta đã chứng minh được rằng mọi nghiệm tối ưu cho bài toán mạng đường liên xã ngắn nhất đều thỏa mãn :

1) Mọi ngã k đường đều có đúng 3 cạnh xuất phát.

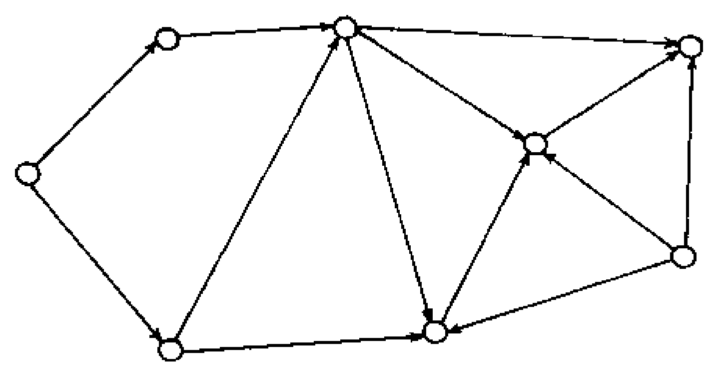
2) Mọi xã có ít hơn hoặc 3 đường xuất phát.

Trong thực tiễn nhiều khi phí tổn xây dường không chỉ phụ thuộc vào độ dài oclit của 2 điểm trên mặt phẳng. Chẳng hạn như khi đi từ điểm A ở thấp lên điểm B cao hơn bằng cầu thang hoặc thang mày thì khoảng cách được tính theo tổng hai tọa độ của đoạn AB. Khi đó phạm vi nghiên cứu đã đi ra khỏi nội dung bài báo này để bước vào một lĩnh vực khác đầy kết quả thú vị.

ĐƯỜNG ĐI NÀO DÀI NHẤT ?

TRẦN VŨ THIỆU

Trong các số báo trước (xem THTT số 13 tháng 10 năm 1965 và số 141 tháng 1–1985), các bạn đã làm quen với bài toán tìm đường đi ngắn nhất giữa hai điểm cho trước trên một mạng lưới đường giao thông đã cho. Tuy nhiên, trong thực tế không phải lúc nào cũng chỉ yêu cầu tìm đường đi ngắn nhất (nhanh nhất), mà có khi lại cần tìm đường đi dài nhất, xa nhất đấy các bạn ạ ! Chẳng hạn, khi cần phải hoàn thành một dự án nào đó (ví dụ, xây dựng một ngôi nhà cao tầng), bao gồm nhiều công việc được làm kế tiếp nhau theo một trình tự nhất định (công việc này chỉ có thể bắt đầu khi một số công việc khác đã hoàn thành) thì thời hạn sớm nhất có thể để hoàn thành toàn bộ dự án chính là độ dài của đường đi dài nhất gồm dãy các công việc kế tiếp nhau, bắt đầu từ lúc khởi công đến khi hoàn thành dự án. Bài toán cho những tình huống tương tự được đặt ra như sau. Cho trước một mạng lưới đường đi (mạng có hướng), trên mỗi cạnh của mạng chỉ rõ chiều đi (chiều mũi tên) và thời gian cần thiết để đi trên đoạn đường đó (xem hình vẽ). Chẳng hạn thời gian đi từ A tới B tốn 5 giờ, từ A tới C tốn 6 giờ v.v... Đỉnh A gọi là nguồn và đỉnh Z gọi là đích. Hãy tìm một đường đi dài nhất từ nguồn A tới đích Z.



Có bạn nghĩ rằng vấn đề này cũng chẳng có gì khó, chỉ việc tìm ra tất cả các đường đi có thể từ A tới Z, rồi so sánh thời gian đi trên các đường ấy với nhau là có ngay đường di dài nhất. Tất nhiên, với mạng đơn giản thì cách làm này có thể thực hiện được (Bạn hãy thử làm với mạng vẽ ở trên xem sao : có cả thảy 13 cách đi khác nhau từ A tới Z). Nhưng với những mạng phức tạp thì cách đó không còn thích hợp nữa, vì nó mất rất nhiều thời gian và không có gì bảo đảm tránh khỏi nhầm lẫn, sai sót.

Phương pháp sau đây sẽ giúp giải quyết vấn đề đặt ra một cách khá đơn giản và có thể áp dụng cho cả những mạng lưới phức tạp có hàng nghìn đường đi khác nhau mà vẫn cho kết quả khá nhanh chóng. Ta hãy gán cho mỗi đỉnh (ngã ba ngã tư, v.v...) của mạng một số gọi là "thế vị" như sau : ta có thế vị của A (đỉnh nguồn) bằng 0 : sau đó gán cho mỗi đỉnh kề A (tức là đỉnh có mũi tên đi từ A tới cụ thể ở đây là B và C) một thế vị bằng thời gian đi trên đoạn đường từ A tới đỉnh ấy : thế vị của B bằng 5, của C bằng 6, rồi cho mỗi đỉnh kề B (mà chưa có thế vị) một thế vị bằng thế vị của B cộng với thời gian đi trên đoạn đường từ B tới đỉnh ấy : thế vị của D là $5 + 4 = 9$, v.v... và cứ theo cách đó tiếp tục. Nói chung, một đỉnh chưa có thế vị mà kề một đỉnh đã có thế vị rồi thì được gán cho một thế vị bằng thế vị của đỉnh này cộng thêm thời gian đi trên đoạn đường từ đỉnh này tới đỉnh phải gán thế vị. Làm như vậy cho tới khi mọi đỉnh đều có thế vị. Sau đó điều chỉnh các thế vị theo quy tắc ; nếu hiệu số thế vị của đỉnh ở cuối mũi tên và thế vị của đỉnh ở gốc mũi tên, (ví dụ D và C) nhỏ hơn thời gian đi trên đoạn đường nối hai đỉnh ấy ($9 - 6 < 8$) thì ta tăng thế vị của đỉnh ở cuối mũi tên (đỉnh D) để cho hiệu số nói trên vừa đúng bằng thời gian này (ở đây ta tăng 9 thành 14 để có $14 - 6 = 8$). Chừng nào còn điều chỉnh được thì cứ điều chỉnh, cho tới khi nào không điều chỉnh được nữa thì thế vị của mỗi đỉnh (số ghi trong ngoặc cạnh mỗi đỉnh) chính là thời gian dài nhất để đi từ A tới đỉnh ấy ; nói riêng thế vị của đỉnh Z sẽ là thời gian dài nhất để đi từ A tới Z. Lúc đó trên mạng sẽ có một đường đi từ A tới Z mà thời gian đi trên mỗi đoạn của nó đều bằng hiệu số các thế vị ở hai đầu (đường nét đậm trên hình vẽ) : đó chính là đường đi dài nhất từ A tới Z (với tổng độ dài bằng 36 giờ).

Có lẽ bạn sẽ thắc mắc : tại sao có thể khẳng định đó là đường đi dài nhất : Câu giải đáp rất đơn giản. Để tiện việc lí luận ta hãy gọi các đỉnh của các mạng lưới là a_1, a_2, ..., a_n với $a_1 = A$, $a_n = Z$) và thế vị (sau khi đã điều chỉnh xong) của đỉnh a_i là v_i ; nếu có đường (mũi tên) đi từ đỉnh a_i tới đỉnh a_j thì ta gọi t_{ij} là thời gian đi trên đoạn đường ấy. Giả sử đường nét đậm (từ a_1 tới a_n) qua các nút $a_i = a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_p} = a_n$, đường này có tính chất như sau :

$$\begin{cases} v_{i_2} - v_{i_1} = t_{i_1,\,i_2} \\ v_{i_3} - v_{i_2} = t_{i_2,\,i_3} \\ v_{i_p} - v_{i_{p-1}} = t_{i_{p-1},\,i_p} \end{cases}$$

Từ đó ta tính được thời gian đi trên đường nét đậm này là :

$$t_{i_1,i_2} + t_{i_2,i_3} + \dots + t_{i_{p-1},i_p} = v_{i_p} - v_{j_1} = v_n - v_1 = v_n - 0 = v_n$$

(bằng thế vị của đỉnh $a_n = Z$).

Mặt khác, nếu có một đường đi bất kì từ a tới a_n qua các đỉnh $a_1 = a_{j_1}, a_{j_2}, \dots, a_{j_q} = a_n$ thì theo cách xác định các thế vị v_j ta có :

$$\begin{cases} v_{j_2} - v_{j_1} \geqslant t_{j_1,j_2} \\ v_{j_3} - v_{j_2} \geqslant t_{j_2,j_3} \\ \dots\dots\dots \\ v_{j_q} - v_{j_{q-1}} \geqslant t_{j_{q-1},j_q} \end{cases}$$

Từ đó, ta tính được thời gian đi trên đường đi bất kì này là :

$$t_{j_1,t_2} + t_{j_2,j_3} + \dots + t_{j_{q-1},j_q} \leqslant v_{j_q} - v_{j_1} = v_n - v_1 = v_n - 0 = v_n$$ (bằng thế vị của đỉnh $a_n = Z$).

So sánh (1) và (2) có thể kết luận rằng đường nét đậm (có tính chất đã nêu) chính là đường đi dài nhất từ A tới Z.

Chương VI – TIỂU SỬ CÁC NHÀ TOÁN HỌC

GIĂNG ĐALĂMBE

(1717 – 1783)

Sớm ngày 17 tháng 10 năm 1717, trời rất lạnh. Hơi thở buốt giá của mùa đông bao trùm lên mọi cảnh vật. Như thường lệ, người đánh chuông của nhà thờ lớn lên tháp chuông để báo một ngày mới đang lên. Ở lối vào nhà thờ, trên cầu thang ông nhìn ra một vật gì lạ, bọc trong một chiếc khăn ấm.

– Quỉ quái gì thế này ? – Người đánh chuông phân vân suy nghĩ.

Sau khi nhìn quanh, ông ta tò mò và sợ sệt trở lại chỗ chiếc khăn và kinh hãi nhận ra chiếc khăn bọc một đứa trẻ sắp chết cóng. Đứa trẻ được đem đến cho một người đàn bà có nhiều con, là vợ của người thợ lắp kính, họ Rútxô. Bà đã tự nhận nuôi đứa trẻ và hứa dạy dỗ cẩn thận, giúp nó sau này có thể sống tự lập.

Bà gọi tên đứa bé là Giăng Lêrôn để kỉ niệm nhà thờ, ở đó người ta đã tìm thấy nó. Đứa trẻ được mang tên đó cho tới khi lớn mới tự thêm cho mình họ là Đalămbe.

Ở nhà ông bà Rútxô, Giăng sống rất tốt, nó được đối xử bình đẳng như những đứa con trong nhà. Vợ người thợ kính quý mến Giăng với cả tấm lòng của người mẹ đối với con đẻ của mình. Mặc dù vậy, Giăng vẫn là một đứa trẻ ốm yếu, thân thể gầy gò do trí thông minh và óc quan sát phát triển quá sớm.

Nhìn thấy năng khiếu phát triển sớm của Giăng, ông bà Rútxô đã cho đứa bé bốn tuổi đến học ở một nhà trường riêng. Đứa bé đã ở đó cho tới năm mười hai tuổi. Khi Giăng 10 tuổi, nhà trường đã khẩn khoản đề nghị ông bà Rútxô đưa nó về nhà, vì nó đã nắm vững tất cả, không còn gì để dạy nữa ! Nhưng theo nhiệt tình đề nghị của Rútxô, do sức khỏe của Giăng, Giăng được ở lại trường hai năm nữa.

Nên nhớ là ở nhà trường đó người ta chỉ dạy có Văn học còn không chú ý gì đến Toán học cả. Giăng bắt đầu nghiên cứu toán từ năm 13 tuổi, khi rời nhà trường về nhà tự học. Đa Lămbe đã ghi về những năm đó : "Không có thầy giáo, hầu như không có sách và thậm chí không có bạn để trao đổi về những khó khăn thắc mắc. Tôi đến thư viện, đọc vội vàng và tìm được một kiến thức nào đó, về nhà tôi tự tìm cách chứng minh, cách giải ; thường là tôi đạt được kết quả. Bằng cách đó tôi nghĩ được những định lí quan trọng mà tôi cho là rất mới. Nhưng sau đó tôi lại rất buồn phiền khi tìm ra nó trong một cuốn sách trước đó tôi chưa biết. Tuy nhiên tôi cũng cảm thấy hài lòng".

Ông bà Rútxô không vui lòng về sự ham mê Toán của Giăng :

– Này, con học toán để làm gì nếu ngoài đồng lương rẻ mạt người thầy giáo, nó chẳng cho cái gì hơn cả ? – Con hãy đi học Y ; ngoài lương cao của bác sĩ lại còn có nhiều tiền chữa bệnh ở nhà nữa.

Cuối cùng Giăng đã chiều ý bố mẹ nuôi đi học nghề mà mình không thích. Để cho những cuốn sách toán khỏi làm phiền mình, Giăng đã mang chúng đến gửi ở nhà bạn, nghĩ bụng, sẽ lấy các sách đó về sau khi học xong nghề thuốc và trở thành bác sĩ. – Những cuốn sách toán sẽ giúp ta khám và điều trị bệnh – Giăng nghĩ. Nhưng việc học thuốc làm anh rất buồn và anh cứ lấy dần những cuốn sách toán về để "giải khuây", rút cuộc đã lấy tất cả sách toán về. Lúc này Đalămbe đã hoàn toàn thấy rằng không thể nào bỏ được chí hướng của mình. Từ đó Đalămbe đã bỏ hẳn nghề thuốc và – theo lời nhà bác học Côngđécxơ – "ham mê toán và sự nghèo khổ". Nhưng khi nghiên cứu toán, Giăng đã quên hết mọi sự khổ sở và cảm thấy mình là người hạnh phúc nhất trên đời.

Như đã nói ở trên, bà mẹ nuôi của Giăng rất yêu quý Giăng và chỉ muốn anh được sống sung sướng. Bà không nghi ngờ rằng Giăng của bà đang đứng trên ngưỡng cửa của sự quang vinh trên toàn thế giới. Nhưng bà không thể hiểu được ý nghĩa của công việc mà con bà đang làm ; bà chỉ thấy một điều là Giăng làm việc quá nhiều và hình như chẳng được lợi lộc gì từ công việc đó. Một lần bà hỏi :

– Chắc anh sẽ trở thành nhà triết học chứ ?

– Thế nhà triết học là thế nào ? – Giăng thích thú hỏi.

– Là người điên, luôn hành hạ mình suốt đời, để sau khi chết đi người ta mới nói về mình ! – bà ta buồn bã trả lời.

Giăng Lơrôn Dalămbe là một nhà bác học Pháp vĩ đại của thế kỉ XVIII. Ông đã cùng Điđơrô lập nên 20 tập "Bách khoa toàn thư về khoa học, nghệ thuật và công nghiệp", trong đó ông viết những phần về vật lí và toán học. Ông còn viết bài mở đầu với đầu đề "Vài nét về sự phát triển của khoa học", cho ta những tài liệu có ý nghĩa thực tế quý báu và sự phân loại rất đặc sắc của tất cả các khoa học.

Ông đã đưa ra "nguyên lí Đalămbe" được trình bày trong tất cả các sách mở đầu về cơ học lí thuyết. Đalămbe là một trong những người đặt nền móng cho môn "Vật lí lí thuyết", trong đó ông thiết lập và giải phương trình chuyển động ngang của dây đàn. Ông cũng đóng góp rất nhiều cho việc thiết lập môn lí thuyết hàm biến phức.

Dalămbe còn có nhiều công trình về Triết học và có nhiều công trình đặc biệt về lí thuyết Âm nhạc và Thẩm mĩ học.

TƯƠNG QUAN

KACLƠ GAUXƠ

(1777 - 1855)

Tôi đã học tính trước khi học nói – Kaclơ Fridơrich Gauxơ thường nói như vậy đó.

Người được mệnh danh là "ông vua toán học" này sinh tại Brau–sơvày nước Đức, trong gia đình người sửa ống nước kiêm nghề làm vườn. Hồi nhỏ cậu đã biểu hiện một khả năng kì lạ về tính nhẩm. Khi vừa học nói, cậu đã hành hạ những người xung quanh bằng những câu hỏi :

– Cái gì đây ? Thế còn cái này ? ... Cầm cuốn sách trong tay, nhìn những kí hiệu và hỏi

– Mẹ ơi ? Cái gì đây ?

– Chữ đấy

– Để làm gì ?

– Để đọc

– Ờ, thế mẹ đọc đi

Gauxơ rất ngạc nhiên : Từ những "chữ cái" lập thành "từ", từ những "từ" thành "câu" và những câu đó lại có thể kể về bao nhiêu chuyện thú vị !

– Mẹ dạy con đọc đi.

– Không được đâu, nhóc ạ ! Đợi ít nữa mẹ dẫn vào trường, ở đó tha hồ mà tập đọc.

Nhưng Gauxơ không chịu đợi. Bằng cách hỏi han cậu học thuộc lòng những chữ cái, và chẳng cần người lớn giúp, cậu học đọc.

Người ta còn kể một câu chuyện như sau : Cha Gauxơ thường nhận thầu khoán công việc để cải thiện đời sống. Ông thường thanh toán tiền nong vào chiều thứ bảy. Lần ấy ông vừa đọc xong bảng thanh toán thì từ phía giường trẻ có tiếng Gauxơ :

– Cha ạ, cha tính sai rồi, phải thế này mới đúng... Mọi người không tin nhưng cứ kiểm tra lại thì người đúng quả là Gauxơ.

Bảy tuổi Gauxơ đến trường. Nhục hình thân thể là một "quốc sách" hồi đó. Thầy giáo Biutnhe luôn cầm trong tay chiếc roi ngựa và chiếc roi vẫn "nhảy múa" trên lưng những học sinh biếng nhác, đôi khi nó cũng được tặng cho cả Gauxơ vì lúc đầu cậu không có gì phân biệt với các trò khác.

Nhưng tình hình thay đổi khác hẳn khi ở trường bắt đầu dạy môn số học. Ngay từ giờ đầu tiên Gauxơ đã vượt hẳn lên trước con mắt của người thầy giáo nghiêm khắc. Một lần thầy giáo cho tìm tổng của tất cả các số nguyên từ 1 đến 100. Khi thầy giáo vừa đọc và phân tích xong đầu bài thì đã nghe giọng Gauxơ

– Em giải xong rồi.

Thầy giáo dạo quanh các bàn và không hề để ý đến Gauxơ, nói một cách chế nhạo :

– Kaclơ, chắc em sai rồi đấy : Không thể giải quá nhanh bài toán khó như vậy được đâu.

– Thầy tha lỗi cho em ! Em giải rất đúng

– Nào, chúng ta thử xem nó đúng đến mức nào ! Nhưng nếu nó sai ? – Thầy giáo đập đập chiếc roi một cách đe dọa.

Nhưng vị giáo viên hết sức ngạc nhiên khi kiểm tra thấy Gauxơ giải bài toán một cách hoàn toàn đúng đắn mà cách giải lại cực kì độc đáo.

– Kaclơ ! Em nói cho cả lớp nghe về cách giải của em đi ! – Thầy giáo ôn tồn nói.

– Nếu chú ý một chút thì bài toán rất đơn giản. Em nhận thấy ở đây số này các tổng hai số của từng cặp số đứng cách đều phía đầu và phía cuối đều bằng nhau. Sử dụng tính chất đó, em cộng từng cặp :

$$100 + 1,\ 99 + 2,\ 98 + 3,\ \text{v.v...}$$

Mỗi tổng đều là 101. Có 50 tổng như vậy nên kết quả sẽ là :

$$101 \times 50 = 5050.$$

Có thời kì Gauxơ còn mê cả triết học. Nhưng vào năm 19 tuổi ông đã quyết định trở thành nhà toán học. Khi ấy Gauxơ vừa học xong năm đầu ở trường đại học Tổng hợp Gốttinghen, đã giải được phương trình $x^{17} - 1 = 0$ và đã đưa ra cách dựng đa giác đều 17 cạnh bằng thước kẻ và compa (Phát hiện này rất quan trọng nên sau này người ta đã khắc trên mộ ông một đa giác đều 17 cạnh nội tiếp trong một hình tròn, theo di chúc của ông).

Gauxơ luôn chú ý cải tiến kĩ thuật tính toán và tài tính nhẩm của ông nhiều người phải phát ghen. Nhờ có nghệ thuật tính toán cao mà Gauxơ đã phát hiện ra một hành tinh mới, chỉ cần chịu khó gọt bút chì, chuyện đó thật thú vị :

Vào đầu thế kỉ thứ XIX, một nhà thiên văn học người Ý đã phát hiện ra một hành tinh mới gọi là Xêrera. Ông quan sát được nó không lâu, sau đó nó dịch gần lại mặt trời và lẫn vào những tia sáng mặt trời. Những thí nghiệm của chính nhà thiên văn này và các nhà thiên văn khác không đạt kết quả nữa. Họ không nhìn thấy được nó ở chỗ mà theo dự đoán nó phải ở. Các viễn kính đều bất lực ! Sử dụng những số liệu quan sát ban đầu, Gauxơ đã tính được quỹ đạo của hành tinh mới này, chỉ ra vị trí của nó với một độ chính xác cao. Khi các nhà thiên văn hướng ống kính vào đó, quả thấy Xêrera. Về sau, theo cách này, người ta tìm ra rất nhiều hành tinh mới khác.

Sau công trình thiên văn học kiệt xuất này Gauxơ bắt đầu được xem như một nhà toán học vĩ đại của thế giới và được tôn là "cây đại thụ" của trường đại học tổng hợp Gốttinghen.

Gauxơ cũng là người đi tiên phong trong hình học phi Ơcơlit. Khó có thể chỉ ra một ngành nào của toán học lí thuyết cũng như thực hành mà ở đó lại không có những đóng góp của Gauxơ.

Gauxơ không phải chỉ là biểu hiện của một thiên tài bẩm sinh mà là sự kết hợp chặt chẽ giữa thiên tài đó với tinh thần lao động cần cù, say mê, liên tục.

ĐẶNG HẤN

ĐÔMINIC ARAGÔ

(1786 - 1853)

Đôminic, Aragô là nhà toán học, nhà vật lí, nhà thiên văn học nổi tiếng người Pháp. Thuở bé Aragô rất ham thích văn học, cậu say sưa đọc sách văn học. Nhưng một sự việc bất ngờ đã làm đảo lộn sở thích của cậu. Một hôm, dạo chơi ở ngoại ô thành phố, cậu gặp một viên sĩ quan đang chỉ huy một đội công binh sửa chữa pháo đài. Sĩ quan rất trẻ. Trong bộ quân phục mới tinh viên sĩ quan trông đẹp như một người ở trong tranh vậy. Aragô dừng chân đứng xem đội công binh làm việc hết sức tấp nập dưới sự chỉ huy của viên sĩ quan trẻ tuổi trẻ này. Cậu rất thích.

Lấy hết can đảm, Aragô bước lại gần viên sĩ quan và hỏi :

– Thưa ông, làm sao ông có thể trở thành sĩ quan sớm như vậy ?

– Tôi tốt nghiệp trường Bách Khoa – viên sĩ quan vui vẻ trả lời.

Aragô hỏi viên sĩ quan về trường Bách Khoa, về điều kiện vào trường này. Sau khi được biết trong thư viện của trường mình có bản quy chế tuyển sinh của trường Bách Khoa, Aragô cảm ơn viên sĩ quan, rồi chạy thẳng một mạch đến thư viện trường. Ở đây cậu đã đọc ngấu nghiến bản quy chế ấy. Trong phần đầu bản quy chế nói rằng Trường Bách Khoa do nhà bác học vĩ đại Pháp Mônggiơ tổ chức ra, và những giáo sư ưu tú nhất của nước Pháp giảng dạy ở đây(*).

Từ đó Aragô mất ăn mất ngủ. Cậu đặt quyết tâm vào học ở trường Bách Khoa. Hứng thú say mê văn học không còn để lại một dấu vết gì nữa. Ở trường, Aragô chăm chú lắng nghe những giờ toán học. Song cậu Aragô trẻ tuổi biết rằng những bài học này hình như chưa được đầy đủ. Khối lượng kiến thức mà trường Bách Khoa yêu cầu còn rộng lớn hơn rất nhiều. Aragô quyết định tự học. Cậu tìm đọc những cuốn sách trong chương trình có nói tới và tự mình nghiên cứu những sách đó, không có sự giúp đỡ của thầy.

Khi đọc những tác phẩm của Lơgiăngđrơ, của Lacơroa và những tác giả khác, Aragô có lúc đã gặp khá nhiều khó khăn. Những lúc đó cậu chạy đến gặp Râynai – một người rất yêu thích toán học, bao giờ cũng giành thì giờ nhàn rỗi của mình để đọc sách toán. Cậu nhờ Râynai giải đáp cho những thắc mắc những chỗ khó hiểu. "Con người tuyệt vời này bao giờ cũng giúp tôi bằng những lời chỉ bảo rất quý báu, – Aragô viết – nhưng thật ra người thầy giáo thực sự của tôi là tờ bìa cuốn "Đại số" của Garne. Đó là một tờ bìa màu xanh da trời, ở phía sau tờ bìa đó tôi tìm thấy lời khuyên sau đây của Đalămbe, giành cho các bạn trẻ gặp những khó khăn trong khi học toán : "Bạn hãy tiến bước, hãy tiếp tục đi lên, rồi bạn sẽ có được niềm tin".

Những chữ này làm tôi nẩy ra ý nghĩ : Mình không bao giờ được chùn bước trước những khó khăn gặp phải, và tôi áp dụng nó như một chân lí bất di bất dịch, tôi tiếp tục tiến bước, và thật kì lạ thay, ngày hôm sau tôi hoàn toàn hiểu được tất cả những gì mà ngày hôm trước đối với tôi còn mù mịt".

Sau một năm rưỡi Aragô đã nắm vững tất cả các môn mà điều kiện nhập học trường Bách Khoa yêu cầu.

Cuối cùng, ngày thi đã đến. Aragô cùng đi thi với một người bạn, người này cũng rất khao khát được học ở trường Bách Khoa như Aragô. Bạn của Aragô được vào thi trước, song vì rút rát anh này đâm ra ấp úng, nhầm lẫn, phát biểu sai và thế là bị hỏng. Ngay sau đó Aragô được gọi lên bảng. Aragô bình tĩnh, dũng cảm trả lời những câu hỏi của giám khảo. Giữa giám khảo và người thi đã xảy ra đoạn đối thoại kì lạ sau đây :

Giám khảo : Nếu anh sẽ trả lời như bạn của anh, thì tôi có hỏi anh cũng chỉ phí sức thôi.

Aragô : Bạn tôi biết nhiều hơn những gì anh ta đã trả lời. Tôi hi vọng sẽ gặp may hơn và tôi sẽ trả lời được những câu hỏi của ông, nếu như tôi không bị mất tinh thần vì những câu hỏi đó.

---

* Trường Bách Khoa là trung tâm khoa học của nước Pháp lúc bấy giờ.

Giám khảo : Kẻ dốt nát bao giờ cũng vin vào có mất tinh thần. Để khỏi làm anh xấu hổ, tôi đề nghị anh sẽ không dự thi nữa.

Aragô : Tôi lấy làm xấu hổ vì ý kiến của ông về tôi. Ông cứ hỏi tôi. Đó là nghĩa vụ của ông.

Giám khảo : Anh hơi làm cao quá đấy ! Được, bây giờ chúng ta hãy xem anh có quyền đó không.

Aragô : Tôi sẵn sàng chờ đợi những câu hỏi của ông.

Giám khảo đưa ra một câu hỏi hình học, Aragô trả lời rất tốt và đã làm thay đổi định kiến của giám khảo. Câu hỏi sau về đại số : giải một phương trình bằng số. Aragô đã đọc tác phẩm của Lagơrăng và nắm rất chắc. Anh phân tích tất cả những phương pháp đã biết và giải thích ưu điểm và nhược điểm của những phương pháp đó : phương pháp Niutơn, phương pháp dãy số tăng, phương pháp liên phân số. Anh trả lời suốt một giờ.

Thấy rõ sự chuẩn bị kĩ càng về toán của Aragô, giám khảo từ chỗ nghi ngờ chuyển sang có thiện cảm, ông lớn tiếng nói :

– Bây giờ tôi có thể coi như việc hỏi thi đã xong, nhưng tôi muốn nghe anh trả lời câu hỏi nữa.

Một câu lấy ở cuốn "Lí thuyết giải tích hàm số" của Lagơrăng, còn câu hỏi kia lấy ở cuốn "Cơ khí giải tích" của cùng tác giả. Aragô đã trả lời cả hai câu hỏi rất xuất sắc.

Aragô đứng trên bảng suốt hai giờ mười lăm phút. Giám khảo bước đến ôm chặt anh và trịnh trọng tuyên bố :

– Tên anh sẽ được xếp hàng đầu trong danh sách trúng tuyển !

Aragô học tập ở trường Bách Khoa rất kết quả. Đặc biệt những kiến thức toán học của anh rất sâu sắc. Điều này có thể thấy rõ qua một kì thi cuối học kì. Lần này giám khảo là nhà hình học nổi tiếng Lơgiăngđrơ, những bài giảng hình học của Lơgiăngđrơ được phổ biến rộng rãi không những ở nước Pháp mà còn ở nhiều nước khác, riêng ở Nga cho đến tận nửa đầu thế kỉ XIX vẫn được dùng làm sách giáo khoa.

Aragô bước vào phòng thi đúng lúc người ta khiêng từ đó ra một sinh viên vừa bị ngất. Aragô đoán rằng tình hình này có lẽ phần nào sẽ làm giảm bớt nhiệt tình hỏi thi của ông Lơgiăngđrơ, song sự việc xẩy ra ngược lại.

Cuộc thi bắt đầu. Lơgiăngđrơ đưa ra một câu hỏi đòi hỏi kiến thức về tích phân bội. Khi Aragô bắt đầu trả lời câu hỏi này thì Lơgiăngđrơ liền ngắt lời anh và nói :

– Anh dùng một phương pháp mà giáo sư của anh không nói tới. Vậy anh đã đọc phương pháp đó ở đâu ?

– Ở một trong các cuốn sách của ông – Aragô bình tĩnh trả lời.

– Anh hãy nói rõ tại sao anh chọn phương pháp đó ? Chắc không phải để làm vui lòng tôi và đem lại lợi ích cho anh chứ ?

– Không, tôi hoàn toàn không nghĩ như vậy. Tôi sử dụng phương pháp này, bởi vì tôi nghĩ đó là phương pháp tốt nhất.

– Nếu anh không giải thích rõ phương pháp đó tốt ở chỗ nào, thì tôi sẽ cho anh điểm xấu, ít nhất là vì tính nết của anh.

Aragô đi vào chi tiết và chứng minh rằng phương pháp của Lơgiăngđrơ về mọi mặt rõ ràng hơn và hợp lí hơn phương pháp của Lacờroa trong bài giảng trên lớp.

Lơgiăngđrơ rất hài lòng về câu trả lời của Aragô và cuối cùng Lơgiăngđrơ đặt một câu hỏi về cơ khí.

– Câu hỏi này tôi coi là dễ, Aragô tuyên bố.

Được, tôi sẽ làm nó trở nên khó hơn. Anh hãy giải bài toán với những điều kiện bổ sung sau đây.

Nhưng ngay cả với những điều kiện bổ sung, bài toán vẫn được giải tốt. Rốt cuộc Aragô đã giành được thiện cảm của vị giám khảo khó tính.

Từ đó Lơgiăngđrơ rất mến cậu học sinh dũng cảm và coi Aragô như một người bạn gần gũi.

Cuộc đời hoạt động khoa học say mê liên tục, tác phong học tập nghiên cứu hết sức sâu sắc, tinh thần bền bỉ nhẫn nại vượt khó của Aragô là một tấm gương sáng cho chúng ta học tập.

LÊ PHONG

CÁC NHÀ NỮ TOÁN HỌC THẾ GIỚI

Chúng ta được nghe kể chuyện về nhiều nhà toán học, nhưng riêng về các nhà nữ toán học thì chúng ta biết rất ít.

Nhân dịp kỉ niệm ngày phụ nữ quốc tế chúng tôi xin giới thiệu với các bạn tiểu sử, các công trình nghiên cứu, các hoạt động của một số nhà nữ toán học thế giới.

Nếu tìm hiểu kĩ lịch sử toán học thì ta biết được : số nhà nữ toán học rất nhiều, ở nhiều nước, ở các thời đại.

Có thể nói nhà nữ toán học đầu tiên là *Ghipachia*[*], người Hy Lạp sống ở thành Alexandơri từ năm 370 đến năm 415, *Ghipachia* là con nhà khoa học *Zêôn Alexandơriixkii*, *Ghipachia* nghiên cứu nhiều ngành : toán học, thiên văn học, y học, triết học. Bà đã viết bình luận về tác phẩm "Số học" của *Điôphăngtơ* và tác phẩm "Thiết diện cônic" của *Appolôniút*.

Nửa đầu thế kỉ 18, ở Pháp có *Emilơ dơ Sátlơ*. Bà đã dịch từ tiếng La-tinh ra tiếng mẹ đẻ tác phẩm nổi tiếng của *Niutơn* "Những nguyên lí toán học của triết học tự nhiên". Tác phẩm này nghiên cứu về sự hấp dẫn của vũ trụ và những nguyên tắc về cơ học cổ điển. Bản dịch này rất được hoan nghênh và được bổ sung thêm lời bình luận của nhà toán học nổi tiếng người Pháp là *A. Klêrô*.

Người phụ nữ Pháp thứ hai nghiên cứu nhiều về toán ở thế kỉ 18 là *Maria Lanlandơ*. Bà đã cộng tác với chồng và em mình lập nên bảng lượng giác được mang tên là "*Bảng Lanlandơ*".

Về phương pháp tính toán thì phải kể đến một người phụ nữ Pháp nữa là *Góctendia Lơpốt*.

Ở Ý thì có *Maria Goetana Anedi* (1718 – 1799) là người phụ nữ đầu tiên trên thế giới được phong là giáo sư toán ở trường đại học. Bà đã viết : "Giáo trình giải tích dùng cho thanh niên Ý", trong đó bà đưa phương pháp chứng minh độc đáo về nhiều định lí. Tên bà được vinh dự đặt tên cho một loại đường cong gọi là *đường cong Anêdi*.

Nhà nữ toán học người Anh là *Meri Xômecvin* (1780 – 1872) vẫn thường liên lạc thư từ với các nhà toán học xuất sắc, trong đó có *Galilê, Laplaxơ, Aragô*, v.v... bà có viết một số sách về thiên văn, vật lí học và dịch ra tiếng mẹ đẻ tác phẩm nổi tiếng của *Laplaxơ* về "Cơ học các thiên thể". Học trò của bà là *Aba Bairôn* (1815 – 1852), con gái độc nhất của nhà thơ nổi tiếng người Anh *Bairôn*, cũng trở thành nhà nữ toán học đặc biệt nghiên cứu về máy tính.

Sang thế kỉ 19, ta chú ý đến ba nhà nữ toán học : *Xôphia Giécmen* (1776 – 1831), *Xôphia Côvalepxcaia* (1850 – 1891) Emmi Nête (1882 – 1935).

Xôphia Côvalepxcaia[**], nhà nữ toán học người Nga đã có những công trình nghiên cứu quan trọng về lí thuyết các phương trình đạo hàm riêng, về việc đưa tích phân ABen loại ba về các tích phân Elíptic, nghiên cứu và nhận xét bổ xung công trình của *Laplaxơ* về dạng của vành sao Thổ. Với các công trình này bà đã được trường Đại học Gớttinghen cấp bằng tiến sĩ hạng ưu. Ngoài ra bà còn nghiên cứu cả vật lí và văn học.

Emmi Nête sinh ngày 23-3-1882 ở Aclanghen và bảo vệ luận án tại đó năm 1907. Năm 1916, *Nête* dời về Gơttinghen, thành phố nổi tiếng của nước Đức, một thời kì được xem là trung tâm toán học. Nête nghiên cứu phương hướng mới về "Đại số đại cương và Trìu tượng" từ năm 1920.

Năm 1922 – 1923 Nête là giáo sư của trường Đại học Gớttinghen. Nête là một nhân vật có sức cảm hóa mọi người, giao thiệp rất rộng. Trong khoảng 10 năm *Nête* đã cộng tác chặt chẽ, có quan hệ hữu nghị với các nhà toán học Xô-viết. Năm học 1928 đến 1929, bà viết giáo trình cho trường Đại học Matscơva. Đến năm 1933, dưới chính quyền phản động của Hítle, *Nête* và một số lớn nhà toán học có tiếng tăm của Gớttinghen đã bị thải khỏi các trường Đại học và bị trục xuất ra nước ngoài.

---

* Xem báo Toán học tuổi trẻ số 26, tháng 11–1966.

** Xem Toán học tuổi trẻ số 4 tháng 1 – 1965.

Nête phải sang Mĩ và mất tại đấy ngày 14-4-1935.

Nữ toán học Pháp *Xôphia Giecmen* là ân nhân của nhà toán học Đức vĩ đại *Gaoxơ* (1777 - 1855)

Xôphia hơn *Gaoxơ* một tuổi. Họ không gặp nhau bao giờ và *Xôphia* đã mất ở Pari trước khi trường Đại học Góttinghen tặng *Xôphia* học vị tiến sĩ danh dự do *Gaoxơ* đề nghị cho bà.

Xôphia nghiên cứu nhiều về âm học, lí thuyết toán học về sự đàn hồi, số học cao cấp. *Xôphia* đều có công trình quan trọng về các lĩnh vực trên.

Khâm phục tác phẩm "Nghiên cứu về số học" của *Gaoxơ, Xôphia* thường liên lạc với *Gaoxơ* bằng thư về những nhận xét của mình đối với môn số học. Vì "sợ" rằng *Gaoxơ,* nhà toán học vĩ đại có thành kiến của xã hội đương thời đối với người phụ nữ nghiên cứu toán chăng (!), nên khi gửi thư cho *Gaoxơ, Xôphia* thường kí tên là người đàn ông (M. Lơbơ lăng). *Gaoxơ* nhận các thư này rất coi trọng *M. Lơbơlăng* mãi sau người ta mới biết rằng *M. Lơbơlăng* là tên giả của *Xôphia,* khi *Xôphia* có dịp sang Đức để cứu giúp cho *Gaoxơ.*

Lúc ấy, quân Pháp đến chiếm Hanôvơrơ mà *Gaoxơ* còn ở đấy. Bà không muốn lịch sử toán phải ghi một thảm họa thứ hai, bà không muốn *Gaoxơ* bị giết khi quân Pháp chiếm Hanôvơrơ ; như trước đây, *Acsimét,* nhà toán học cổ Hy Lạp bị quân La Mã giết ở Xiracuyt năm 212 trước công nguyên ; bà đã xin vị đại tướng Pháp tha cho *Gaoxơ.*

Biết như vậy, *Gaoxơ* rất khâm phục về hành động của *Xôphia* và ghi nhớ sâu sắc mãi ân huệ ấy.

Trong bức thư ngày 30-4-1807, *Gaoxơ* cám ơn *Xôphia* vô cùng và đặc biệt ca ngợi lí thuyết số của *Xôphia.*

Qua tiểu sử và cống hiến của *Ghipachia' Côvalepxcaia, Nête, Giécmen* v.v... chúng ta thấy khả năng của phụ nữ trước đây cũng rất to lớn.

Giai đoạn toán học hiện đại lại càng có rất nhiều nhà nữ toán học. Ta có thể kể tên một số nhà nữ toán học ngày nay : Ở Ý có *Maria Pácxtôri* (nghiên cứu về giải tích tenxơ) và *Maria Sicuini Sêborariô* (về phương trình vi phân).

Ở Pháp có *Giacolina Lêlông–Phecran* (về lí thuyết hàm phức).

Ở Thụy Điển có *Xôphia Picarơ* (về lí thuyết nhóm).

Ở Anh có *Ghana Nêiman* (về lí thuyết nhóm).

Ở Rumani có *Vêra Lêbêdep Minlê* (lí thuyết hàm) v.v...

Ở Liên Xô gần đây và hiện nay có nhiều nhà nữ toán học nổi tiếng : Nữ giáo sư *Bêra Jôxiphốpna Sip* và *Ecatêrina Alexêepna Narút–Kina* (1895–1940), viện sĩ nghiên cứu các vấn đề toán học thực nghiệm với các công trình liên quan đến thủy động học và sự thẩm thấu ; nữ giáo sư *Nina Caclôpna Bari* (1901 - 1961) nghiên cứu lí thuyết hàm thực và các chuỗi lượng giác. *Liutmila Vxevôlodôpna Kendutsơ* nghiên cứu về lí thuyết hàm và tôpô. *Onga Alexandơrôpna Ladusenxcaia* là nữ giáo sư trường đại học Lêningrat chuyên nghiên cứu về phương trình vi phân ; nữ giáo sư *Ônga Acxenepna Ôlêinic,* nữ giáo sư *Xôphia Alexandơrôpna Jnôpxcaia* có những công trình nghiên cứu về lịch sử và triết học trong toán học v.v...

Như vậy, chúng ta thấy các nhà nữ toán học ở thế giới rất nhiều, ở nhiều thế kỉ. Ngoài toán học, họ còn hoạt động ở nhiều ngành khác nữa (vật lí, thiên văn, triết học, văn học v.v...). Riêng trong toán học, họ nghiên cứu nhiều ngành khác nhau, ngành nào cũng có phụ nữ nghiên cứu. Tất cả nói lên khả năng to lớn của phụ nữ trong việc nghiên cứu khoa học nói chung và toán học nói riêng.

Dưới chế độ cổ xưa, chế độ phong kiến và tư bản, xã hội còn coi thường phụ nữ như cấm phụ nữ học và dạy ở các trường đại học, không tạo điều kiện cho phụ nữ làm công tác nghiên cứu khoa học.

Nhưng dưới chế độ xã hội chủ nghĩa của chúng ta, nam nữ được hoàn toàn bình quyền, bình đẳng. Đảng và Chính phủ rất động viên phụ nữ đi sâu vào nghiên cứu khoa học kĩ thuật.

Đó là những điều kiện rất thuận lợi cho phụ nữ chúng ta trong việc học tập, nghiên cứu, hoạt động cho khoa học nói chung và toán học nói riêng.

Chỉ cần có một hoài bão lớn về toán học, có một quyết tâm cao, có sự tu dưỡng mạnh mẽ, các bạn nữ sinh có thể đạt được ước mơ trở thành người nghiên cứu toán học, góp phần phục vụ tích cực cho Tổ quốc, cho nền toán học nước ta.

QUỐC TRINH

MỘT CHIẾN CÔNG CỦA Ý CHÍ

Một cậu bé chưa biết đọc A, B, C, nhưng đã biết tính cộng, rồi vào trường, cậu say mê toán học, ao ước muốn được học nhiều toán, đọc nhiều sách toán. Nhưng bỗng một tai nạn đến với cậu, cậu bé bị mù cả hai mắt.

Đó là vào năm 1922... và cậu bé đó là Pôntriagin, khi ấy mới 14 tuổi. Làm thế nào bây giờ ? Cậu bé rất say mê và tha thiết muốn được tiếp tục học toán ? Chúng ta cũng đã từng biết có những người mù trở thành nhà văn, nhà thơ, trở thành nhạc sĩ. Nhưng còn trở thành một nhà toán học ?

Thế rồi, với một nghị lực và ý chí phi thường, cậu thiếu niên Pôntriagin tiếp tục đến lớp nghe giảng, và về nhà tự học với sự giúp đỡ của mẹ. Năm 1925, sau 4 năm bị mù, Pôntriagin vào học khoa toán trường đại học Lômônôxốp.

Trong thời kì sinh viên, Pôntriagin đã tỏ ra xuất sắc. Pôntriagin có thể nhớ được những bài giảng, những công thức phức tạp nhất. Tập trung tư tưởng nghe ở lớp, nhớ lấy, và nhớ lại một lần ở nhà vào buổi tối, đó là cách học của Pôntriagin. Trong thời gian này, bà mẹ của Pôntriagin đã hoàn toàn thay thế cho đôi mắt của con, đóng vai trò thư kí cho con. Với một giọng êm nhẹ, bà đọc các tài liệu, các tạp chí chuyên môn cho con nghe, viết hộ con, và chính bà, một người thợ may bình thường, để làm được công việc này, đã phải gian khổ trong nhiều năm, học nhiều tiếng nước ngoài để phục vụ con.

Vào năm 1927, khi mới 19 tuổi, Pôntriagin đã có 2 công trình nghiên cứu. Sau khi tốt nghiệp đại học. Pôntriagin về công tác tại Viện toán Stêklốp, đồng thời giảng dạy tại trường Đại học Lômônôxốp. Sau đó Pôntriagin đã bảo vệ luận án tiến sĩ toán lí của mình một cách xuất sắc. Năm 30 tuổi, Pôntriagin được bầu làm viện sĩ thông tấn của viện hàn lâm khoa học Liên–xô, và 20 năm sau, ông trở thành viện sĩ chính thức.

Pôntriagin đã nghiên cứu rất nhiều lĩnh vực khác nhau của toán học và đã đặt nền móng cho nhiều phương hướng mới của toán học. Một đặc điểm nổi bật là viện sĩ Pôntriagin không chỉ bó hẹp hoạt động của mình trong các vấn đề lí thuyết. Tất cả các công trình nghiên cứu của ông đều có liên quan chặt chẽ với sản xuất và những vấn đề do nó đặt ra. Chính các công trình của ông trong lĩnh vực điều khiển tự động đã được sử dụng trong nhiều ngành kĩ thuật, trong việc điều khiển tên lửa. Năm 1962, do những thành tựu suất sắc của ông trong lĩnh vực điều khiển tự động, Pôntriagin đã được trao tặng giải thưởng Lênin, giải thưởng khoa học cao nhất hàng năm của Liên–xô.

Trong 40 năm liền, Pôntriagin giảng dạy tại trường đại học Lômônôxốp, và đã đào tạo được một số lớn các nhà toán học trẻ tuổi, nhiều khả năng.

Để làm công tác nghiên cứu và giảng dạy, người ta thấy Pôntriagin ngồi suy nghĩ hàng buổi, bên cạnh máy đánh chữ nổi và máy ghi âm. Trong khi lên lớp, với một khả năng kì diệu, Pôntriagin đã giảng bài, nhấn mạnh các chỗ cần nhấn mạnh, đưa ra các lập luận táo bạo, và một cộng tác viên của ông giúp ông viết những điều cần viết lên bảng.

Pôntriagin là một trong những nhà toán học suất sắc nhất của Liên–xô.

Các bạn trẻ ! các bạn là những người ham thích toán học, muốn được học nhiều, ao ước có nhiều điều kiện để học toán. Tất nhiên trong số các bạn, cũng có người gặp khó khăn này, gặp trở ngại khác : khó khăn vì phải mất nhiều thời giờ giúp đỡ gia đình, khó khăn vì thiếu sách, thiếu thầy, hoặc vì bệnh tật, đau ốm. Nhưng xin hỏi nhỏ các bạn : các bạn đã quyết tâm vượt qua các khó khăn đó chưa ? có bao giờ các bạn tự hỏi, các khó khăn của mình có thể so sánh với các khó khăn của Pôntriagin không nhỉ ? Và chúng ta đã cố gắng đến mức độ nào so với các cố gắng của Pôntriagin ?

Các bạn trẻ, nếu các bạn thật sự ham thích toán học và có một quyết tâm thì các bạn sẽ có rất nhiều sáng kiến khắc phục mọi khó khăn, và không có trở ngại nào lại không thể vượt qua được.

PHẠM TRÀ ÂN

(Theo tạp chí Khoa học và đời sống)

GOTTRIT VINHEM LEPNIT

(1646 - 1716)

Hồi thế kỉ thứ 17, ở châu Âu có cuộc tranh luận lớn, vượt ra ngoài phạm vi một nước về một phát minh toán học. Ai là người đầu tiên phát minh ra phép tính vi phân và tích phân ? * Niutơn hay Lépnit ? Đó là vấn đề được tranh cãi hết sức sôi nổi trong nhiều năm và còn tiếp diễn trong những năm của thế kỉ sau nữa. Tham gia cuộc tranh cãi này không chỉ có các nhà khoa học, nhiều người thuộc các giới khác cũng nhiệt tình không kém. Ngày nay, người ta đều thống nhất rằng : Niutơn và Lépnít – độc lập với nhau – đều là tác giả của phát minh nổi tiếng trên. Niutơn sớm hơn Lépnít, nhưng cách giải nhiều vấn đề của toán học cao cấp rõ ràng hơn, kí hiệu, ngôn ngữ sáng sủa hơn lại là công lao của Lépnít. Danh từ "vi phân", "tích phân", kí hiệu $y' = \frac{dy}{dx}$* (đạo hàm của $y(x)$)... chính là do Lépnít nêu ra.

Lépnít sinh ở Lépdích (Đức) ngày 1-7-1646 (trẻ hơn Niutơn 4 tuổi) và mất ngày 14-11-1716 ở Hanôvrơ.

Lépnít là con một giáo sư trường Đại học Lépdích, nhưng mồ côi cha từ năm lên 6. Mẹ ông, một người đàn bà thông minh tháo vát đã đảm nhận việc nuôi dạy ông với ý chí quyết tâm nuôi dạy con thành bác học. Ngay sau khi chồng chết bà xin cho con học ở một trong những trường tốt nhất ở Lépdích. Chính ở đây, khả năng sáng tạo–xuất hiện khá sớm ở Lépnít – đã được bồi dưỡng phát huy đầy đủ.

Mặc dù mồ côi cha từ nhỏ, Lépnít cũng đã kịp thừa hưởng ở cha lòng ham học. Ngay từ nhỏ, ngoài giờ học ở trường cậu bé Lépnít miệt mài đọc sách trong thư viện của cha. Lépnít tự học tiếng Latinh đến năm 12 tuổi thì làm được thơ bằng thứ tiếng "hóc búa" này. Và cũng từ đó chuyển sang tự học tiếng Hylạp. Khi còn là một cậu bé 14 tuổi Lépnít đã suy nghĩ liên miên về những vấn đề của lôgich, và ngay từ hồi đó đã đi đến kết luận rằng bài toán chân thực nhất của lôgich là phân loại tư duy của con người. Trong những năm còn ngồi trên ghế trường phổ thông Lépnít đã mơ ước xây dựng một "ngôn ngữ" chung cho mọi khoa học. Ước mơ táo bạo này đã đưa Lépnít sống vượt thời đại mình hai thế kỉ. Ông đã đặt những viên gạch đầu tiên cho lôgich toán hiện đại.

Lépnít vốn là một nhà luật học. Năm 1666 khi Niutơn đang đắm chìm trong

---

* Tính vi phân và tính tích phân là hai phần chủ yếu của bộ môn giải tích toán học – một trong các bộ phận cơ bản của toán học cao cấp. Để các bạn có thể hình dung được môn này xin giới thiệu các khái niệm sau đây :

Định nghĩa 1 – Vi phân của một hàm số là tích của đạo hàm của hàm số đó với số gia của biến số độc lập. Tức là

$$dy = y'\,\Delta x$$

Trong dy kí hiệu vi phân của hàm số y. Vì đạo hàm của x bằng 1 nên $dx = \Delta x$, và do đó $dy = y'dx$ hay $y' = \frac{dy}{dx}$

Định nghĩa 2 – Tích phân là phép tính ngược của phép tính vi phân.

Tính vi phân và tính tích phân nghiên cứu cách tính, các tính chất và ứng dụng của vi phân và tích phân của các loại hàm số.

những suy nghĩ không dứt, thai nghén cho sự ra đời của phép tính vi tích phân và định luật vạn vật hấp dẫn thì Lépnít viết luận án chuẩn bị thi tiến sĩ luật. Nhưng ông còn trẻ quá ! Đó là lí do người ta nêu ra để từ chối cấp học vị tiến sĩ cho Lépnít. Song nguyên nhân thực sự của việc thi trượt lại chính vì ông biết luật nhiều hơn một số đông giáo sư luật của trường Đại học Lépđích.

Trong những năm đầu của thời kì sinh viên, Lépnít đọc rất nhiều sách triết, và ông nhận ra rằng để hiểu triết học "tự nhiên" của Kêple, Galilê và Đềcác thì không thể không biết toán học. Cho nên ông đã nghe giảng toán. Song ông chỉ thật sự học toán từ năm 1672, dưới sự hướng dẫn của Huyghen (1629 - 1695)**, và cũng từ đó thiên tài của Lépnít mới bắt đầu thật sự biểu lộ trong toán học. Ngay trong những năm đầu sáng tạo toán học, Lépnít đã làm ra máy tính và máy tích phân gần đúng***.

Phép tính vi tích phân là công trình lớn nhất của Lépnít. Chính bằng các phương pháp của phép tính này Lépnít đã giải quyết hàng loạt vấn đề mà các bác học khác cùng thời không làm nổi.

Những người cùng thời kể lại rằng, Lépnít người tầm thước gầy và xấu trai. Ông thường đeo bộ tóc giả mầu đen, và vì vậy đã xanh càng thêm xanh. Và, như người ta thường nói, ông không có "tướng" bác học. Một lần, lúc còn ở Pari, khi Lépnít hỏi mua một tác phẩm triết ở một hiệu sách thì người bán hàng ngắm ông từ đầu đến chân rồi hỏi : "Ông mua để làm gì ? Phải chăng ông đọc được sách này ?". Lépnít chưa kịp trả lời thì, ngẫu nhiên, tác giả quyển sách ấy bước vào và lớn tiếng : "Kính chào Lépnít vĩ đại !". Người bán sách vô cùng ngạc nhiên. Anh ta không sao ngờ được rằng người đàn ông gầy gò xấu xí này lại chính là Lépnít, người được các bác học Pari hết lòng khâm phục.

Có thể nói, nhiệt tình tự học và lòng say mê phát minh là những nét đặc trưng lớn của Lépnít. Chính ông đã viết "Có hai điều đem lại cho tôi lợi ích nhất. Trước hết, thẳng thắn mà nói, tôi đã tự học mọi khoa học. Điều thứ hai là tôi luôn luôn lao vào tìm kiếm những điều mới mẻ ngay lúc vừa mới hiểu được những khái niệm đầu tiên của mỗi khoa học...".

Bất kì ở đâu, bất kì lúc nào và bất kể trong những điều kiện như thế nào Lépnít cũng vẫn đọc, viết và suy nghĩ sáng tạo không ngừng. Ông đã viết phần lớn tác phẩm toán học ngay trên chiếc xe ngựa chạy dọc những con đường "bò đi" của châu Âu ở thế kỉ thứ 17. Và kết quả của sự lao động không ngừng ấy để lại cho đời sau những công trình bất hủ.

Lépnít không chỉ là một nhà toán học vĩ đại. Ông còn là luật gia, nhà thơ, nhà văn, sử gia...

VŨ TUẤN

CĂNGTO (1845 - 1918)

(Ferdinand louis Philippe Cantor)

Căngto là nhà toán học cuối thế kỉ thứ 19 đã có nhiều cống hiến trong việc xây dựng cơ sở cho toán học hiện đại.

Căngto sinh ngày 3 tháng 3 năm 1845 tại tỉnh Xanh Pêtexbua (Nga).

Gia đình Căngto là một gia đình nghệ sĩ – Bà mẹ là nghệ sĩ, em trai Căngto chơi dương cầm có tiếng, em gái Căngto là hoạ sĩ. Căngto có chịu ảnh hưởng của gia đình nhưng vẫn có nhiều ước mơ về môn toán và triết học.

Thuở bé, Căngto say sưa học tập nên tiến bộ rất chóng và rất giỏi toán. Tài năng và lòng say mê toán học ở Căngto phát triển rất sớm.

** Christian Huyghens (1629 - 1695) - Nhà vật lí hòa lan lớn nhất thời bấy giờ. Công trình nổi tiếng của ông là lí thuyết về sự truyền sóng của ánh sáng và lí thuyết về con lắc. Ông cũng là một nhà toán học.

*** Chiếc máy tính đầu tiên, do Đềcác chế tạo năm 1614, chỉ cộng trừ được các số. Năm 1694 Lépnít làm ra máy tính, thực hiện được cả 4 phép tính số học.

Sau khi học riêng với một thầy giáo dạy tư thì Căngto theo học một trường tiểu học ở Pêtexbua. Khi gia đình rời sang Đức, Căngto theo học các trường tư thục ở Franfo, Đacxtat rồi ở Vâyecbađen.

Căngto ôm ấp hoài bão sẽ đi sâu vào toán học. Nhưng cha Căngto biết vậy bèn can ngăn và ép buộc Căngto phải hướng học tập để sau này trở thành kĩ sư, vì theo ý ông (một thương gia) nếu con mình là kĩ sư thì ông sẽ thu được nhiều lợi nhuận hơn.

Năm 1860, ông viết thư cho Căngto nhắc lại với Căngto hi vọng lớn lao của ông và của tất cả cô, bác, nội, ngoại của Căngto ở Đức, ở Đan Mạch và ở Nga ý như sau : "... Họ hàng ta không mong gì hơn là mong con trở thành một kĩ sư, và có thể về sau, nếu chúa ban phước lành, con sẽ là ngôi sao sáng trên bầu trời sán lạn dành cho các kĩ sư". Căngto không đồng ý với tham vọng của gia đình.

Năm 17 tuổi, Căngto học xong bậc trung học và tỏ ra rất xuất sắc, đặc biệt là về môn toán.

Bấy giờ thì cha Căngto đã suy nghĩ kĩ hơn và bằng lòng cho Căngto tiếp tục học sâu về toán. Căngto viết thư cho cha ý như sau : "Con rất sung sướng với cha đồng ý cho con theo đuổi hoài bão của con. Tâm hồn con, cơ thể con sống theo hoài bão ấy.

Cha ạ khi người ta đã muốn thực hiện một điều gì và đã có sự thúc giục ở nội tâm thì người ta sẽ đạt được điều đó – con hứa với cha như vậy !".

Căngto bắt đầu học đại học tại trường đại học Durich năm 1862. Rồi năm sau, Căngto về học ở Beclin. Tại đây, Căngto chuyên đi sâu về toán học, triết học và vật lí học. Căngto học toán với các giáo sư Kumme, Vâyextrat và Krônecke.

Ở Beclin, lúc ấy khuynh hướng toán học thiên về số học nên Căngto cũng làm luận án tiến sĩ về môn số học.

Luận án này rất xuất sắc. Lúc ấy Căngto mới 22 tuổi.

Năm 24 tuổi, Căngto dạy ở trường Đại học Halơ. Ba năm sau ông được phong làm phụ giảng và đến năm 1879 thì ông được nhận là giáo sư chính thức.

Căngto bắt đầu công bố các công trình của mình năm 29 tuổi.

Trước tiên, Căngto rất say sưa về lí thuyết số của Gaoxơ và nghiên cứu lí thuyết về các chuỗi lượng giác.

Năm 1874, Căngto công bố công trình của mình về lí thuyết các nhóm vô hạn. Nhờ kết quả này, người ta thấy ở Căngto một nhà toán học có tài.

Căngto có công nhiều trong việc xây dựng nên lí thuyết tập hợp, một lí thuyết rất quan trọng đối với cơ sở của toán học.

Chính sự ra đời của lí thuyết tập hợp và phương pháp tiên đề trừu tượng[1] đánh dấu thời kì đầu của giai đoạn toán học hiện đại.

Môlôtsi đã nhận định như sau : "Đẻ ra do nhu cầu có tính chất nội bộ của toán học là xây dựng cơ sở cho môn giải tích lí thuyết tập hợp đã tỏ ra là một phương pháp nghiên cứu có hiệu lực và dần dần xâm nhập vào tất cả các lĩnh vực của toán học. Cũng nhờ lí thuyết tập hợp người ta đã xây dựng được một phương pháp xử lí mới đối với toán học là phương pháp tiên đề trừu tượng"[2].

Cũng chính lí thuyết tập hợp là mầm mống nẩy nở mạnh mẽ sự phát triển của môn lôgic toán (đã có tầm quan trọng về lí thuyết và thực tiễn trong mấy chục năm nay).

Các công trình nghiên cứu của Căngto cũng thể hiện sự đấu tranh tích cực của Căngto cho sự phát triển của toán học.

Nửa cuối thế kỉ thứ 19, những học thuyết của nhà thờ và của những nhà toán học đi theo những lí luận đó đã tìm cách ngăn cản Căngto hoàn thiện lí thuyết tổng quát về tập hợp. Họ đã cố gắng làm tạm ngừng lại những công trình nghiên cứu của Căngto mà họ cho là rất "có hại" đối với họ. Nhưng thấy rằng lí thuyết tập hợp của mình rất cần thiết cho sự phát triển sau này của toán học, Căngto cương quyết phản đối "những lời khuyên"của các nhà thần học ấy để đi sâu vào lí thuyết của mình.

Chính Căngto vẫn nói "Đặc tính của toán học thể hiện ở sự tự do của nó". Căngto đã đấu tranh cho sự tự do phát triển của toán học. Căngto đã thành công mĩ mãn.

---

(1) Muốn hiểu thêm thì xem sách "Phương pháp tiên đề là gì" của Nguyễn Cảnh Toàn – Nhà xuất bản Giáo dục.

(2) Một số vấn đề triết học về cơ sở của toán học (Môlôtsi).

Từ năm 40 tuổi (1884), Căngto bị bệnh tinh thần nên có những thời kì phải điều dưỡng. Nhưng Căngto vẫn tiếp tục sáng tạo – Một trong những công trình quan trọng của ông về lí thuyết của vô hạn đã thành công giữa thời gian của hai cơn đau.

Căngto mất ngày 6 tháng 1 năm 1918 tại bệnh viện điều dưỡng về bệnh tinh thần ở Halơ, thọ 73 tuổi.

Chúng ta học tập ở Căngto rất nhiều điều.

Căngto rất ham học, say sưa với hoài bão về toán của mình từ bé và quyết tâm thực hiện hoài bão ấy.

Mặc dù lúc đầu không được gia đình đồng ý cho mình đi sâu học toán và sau này bị những kẻ tôn sùng tôn giáo cản trở, bệnh tật dày vò, Căngto vẫn đấu tranh và vượt tất cả để đạt tới những kết quả lớn trong những công trình sáng tạo.

Lịch sử toán học ghi nhớ mãi những cống hiến quan trọng đặc biệt của Căngto về lí thuyết tập hợp, một lí thuyết sáng tạo và lí thuyết cơ sở cho toán học hiện đại.

QUỐC TRINH

ACSIMET

Ở thế kỉ thứ 3 trước công nguyên, trên đảo Xixin (bây giờ thuộc nước Ý), có một nhà toán học thiên tài. Ngày nay, đã hơn hai nghìn năm rồi, mà bất cứ bạn học sinh nào cũng biết tên tuổi của ông. Đó là Acsimet, nhà hình học, nhà cơ học, nhà kĩ sư quân sự lỗi lạc.

Cha Acsimet là một nhà thiên văn và nhà toán học nổi tiếng thời bấy giờ. Thời đó các gia đình giàu sang thường chăm lo cho con cái có một nền học vấn toàn diện, mà trọng tâm là triết học và văn chương, còn toán học thì được coi là môn phụ. Thường họ chỉ học toán vì cần toán để học triết học. Song Acsimet lại được giáo dục một cách đặc biệt, cha ông đã đưa ông đi sâu vào toán và thiên văn, là những lĩnh vực mà sau này ông có những sáng tạo vĩ đại nhất.

Acsimet đã đến Alếcxangđri – một thành phố nổi tiếng nhất thời ấy của Hi-lạp, một trung tâm kinh tế, chính trị và văn hóa, nơi tập trung các nhà bác học nổi tiếng nhất. Ở đây Acsimet tiếp tục được bồi dưỡng về toán, thiên văn, đồng thời ông cũng chú ý nhiều đến cơ học. Sau một thời gian ở Alếcxangđri, khi tài năng đang độ phát triển , ông quay về Xiracudơ, thành phố quê hương, để phục vụ Tổ quốc cho đến lúc chết.

Acsimet đã có nhiều phát minh lớn về toán học. Ông để lại nhiều tác phẩm như : "Về hình cầu và hình trụ", "Về độ đo các cung", "Về việc cầu phương parabon", "Về các đường xoắn"... Học hình học ở lớp 8, chúng ta đã biết tiên đề liên tục để đo đoạn thẳng (tiên đề Acsimet). Acsimet là một trong những người đầu tiên đã chứng minh rằng số liệt tự nhiên là vô hạn, và tìm ra phương pháp viết, đọc bất cứ số nào dù lớn bao nhiêu. Acsimet đã tính được diện tích nhiều hình, thể tích nhiều vật thể, bằng một phương pháp đặc biệt, chứng tỏ rằng Acsimet đã có khái niệm khá rõ về phép tính vi tích phân, một bộ phận quan trọng của toán học hiện đại. Về mặt này, Acsimet đã đi trước thời đại hàng 20 thế kỉ : mãi đến thế kỉ 17, phép tính vi tích phân mới thực sự hình thành và phát triển với Lepnit và Niutơn. Chính vì vậy, mà có nhà toán học nổi tiếng đã nói : "Nếu ai bảo tôi kể tên một nhà toán học vĩ đại nhất của tất cả các thời đại, thì tôi không do dự mà trả lời rằng người đó là Acsimét".

Acsimet còn là một nhà cơ học vĩ đại. Rất nhiều sáng chế và phát minh cơ học của Acsimet nổi tiếng khắp nơi. Chẳng hạn : cái vít Acsimet, hệ thống đòn bẩy, ròng rọc và đinh vít để nâng và chuyển các vật có trọng lượng lớn, xác định thành phần hợp kim bằng cách nhúng vật vào nước, v.v... Học vật lí ở lớp 6, chúng ta đã biết nguyên lí Acsimet về vật nổi. Các công trình lí thuyết về cơ học được nhiều người biết đến là : "Về sự cân bằng của các hình phẳng", "Về các vật nổi", "Sách về điểm tựa"... Các công trình sáng tạo của Acsimet đều gắn liền với yêu cầu của công cuộc xây dựng, bảo vệ tổ quốc, với yêu cầu của thực tiễn. Ông đã giải quyết được nhiều vấn đề khó nhất của thời đó về khoa học và kỹ thuật.

Nhiều câu chuyện lí thú về ông đã được truyền lại tới ngày nay. "Cho tôi một điểm tựa, tôi sẽ nâng cả quả đất lên". Câu nói đượm hương vị truyền thuyết đó mà người ta kể lại là của Acsimet khi ông phát minh ra đòn bẩy. Người ta thường kể lại câu chuyện về việc Acsimet tìm ra định luật về vật nổi : Có một quốc vương yêu cầu Acsimet tìm cách kiểm tra lại một chiếc đồ vàng mà nhà vua thuê đúc có thật là nguyên chất hay không. Ông suy nghĩ đã nhiều mà chưa tìm được cách kiểm tra. Một lần đang tắm ông chú ý đến sức đẩy của nước lên người mình. Thế là quên cả mặc quần áo, ông vùng chạy lên và kêu : "Ơ rê ca" (có nghĩa là tìm ra rồi). Sức đẩy của nước lên người ông đã gợi cho ông cách giải bài toán, và từ đó ông đã tìm ra định luật mang tên ông.

Bên cạnh những phát minh về toán và cơ học, ông cũng đã có nhiều phát minh lớn về thiên văn.

Acsimet là người yêu nước thiết tha. Trong giai đoạn cuối đời mình, ông đã tham gia bảo vệ quê hương chống bọn xâm lược La Mã. Ông đã lãnh đạo việc xây dựng các công trình kĩ thuật phức tạp và sáng chế vũ khí kháng chiến. Nhà văn cổ Hi-lạp *Plutarơ* đã tả lại việc quân đội La Mã bị đánh trả ở thành phố Xiracudơ như sau : "Khi quân La Mã bắt đầu những cuộc tiến công từ trên đất liền cũng như trên biển, nhiều người dân Xiracudơ cho rằng khó có thể chống lại một đội quân hùng mạnh như vậy. Acsimet liền cho mở các máy móc và vũ khí đủ các loại do ông sáng tạo ra. Thế là những tảng đá lớn bay đi với tốc độ nhanh phi thường, phát ra những tiếng động khủng khiếp, tới tấp giáng xuống đầu các đội quân đi bằng đường bộ. Cùng lúc đó có những thanh xà nặng uốn cong giống hình chiếc sừng được phóng từ pháo đài ra, liên tiếp rơi xuống tàu địch... Tướng La Mã phải ra lệnh rút lui. Nhưng bọn xâm lược vẫn không thoát khỏi tai họa. Khi các đoàn tàu địch chạy gần đến khoảng cách một mũi tên bay, thì ông già Acsimet ra lệnh mang đến tấm gương sáu mặt, cách tấm gương này một khoảng ông đặt các tấm gương khác nhỏ hơn, quay trên các bản lề. Ông đặt tấm gương giữa các tia sáng của mặt trời mùa hè. Các tia sáng từ gương chiếu ra đã gây nên một đám cháy khủng khiếp trên các con tầu. Đoàn tầu biến thành đám tro tàn...".

Câu chuyện này trước đây vẫn bị coi là câu chuyện hoang đường, cho mãi đến năm 1777 nhà toán học nổi tiếng Bu-phông mới chứng minh được rằng điều đó rất có thể xảy ra. Bằng 168 chiếc gương, trong ngày nắng tháng tư, ông đã đốt cháy một cây to và làm nóng chảy chì ở cách xa 45 mét.

Acsimet còn là một công trình sư, một người đóng tàu thủy đầy sáng tạo. Nhà văn cổ Hy-lạp Aphi-nê đã tả quang cảnh công trường đóng tàu thủy của Acsimet như sau : "Nhà hình học Acsimet được giao đóng một chiếc tàu to bằng 64 chiếc tàu thường. Tất cả mọi thứ cần thiết, các loại gỗ quý được chở từ khắp nơi đến. Nhiều thợ đóng tàu cũng được triệu đến đây. Mọi việc được tiến hành rất nhanh chóng, có quy củ, nên chỉ sau sáu tháng đã làm xong một nửa tàu... Riêng việc hạ thủy phần tàu này cũng làm cho mọi người bàn cãi rất nhiều : "Làm sao có thể đưa một con tàu lớn như vậy xuống nước ?" Nhưng Acsimet đã dùng trục quay để kéo con tàu, với rất ít người giúp việc... Chiếc tàu khổng lồ này có đầy đủ tiện nghi, như nhà bếp, nhà ăn, chỗ dạo chơi, kho lương thực, thư viện...".

Acsimet vẫn tiếp tục xây dựng sáng tạo và tham gia bảo vệ thành phố quê hương. Quân xâm lược hung hãn cố đánh phá, nhưng không thể tiến lên được. Chúng bèn dùng cách vây thành để triệt hết mọi đường tiếp tế. Đến mùa thu năm 212 trước Công nguyên, thành Xiracudơ bị hạ, sau hai năm bị vây hãm. Quân La Mã xông vào tàn sát nhân dân rất dã man. Một tên lính La Mã đã cầm giáo đâm chết Acsimet trong lúc ông đang ngồi trên bãi cát mải mê tính và vẽ hình.

Hơn hai nghìn năm đã trôi qua từ khi Acsimet bị quân La Mã giết hại, song người đời sau vẫn còn ghi nhớ mãi hình ảnh một nhà bác học thiết tha yêu nước, đầy sáng kiến phát minh về lí thuyết cũng như về thực hành, hình ảnh một con người đã hiến dâng cả đời mình cho khoa học, cho tổ quốc, đến tận giờ phút cuối cùng.

LÊ PHONG *và* **QUỐC TRINH**

VÀI MẨU CHUYỆN NHÀ TOÁN HỌC VIỆT NAM THẾ KỈ XV
LƯƠNG THẾ VINH

Lương Thế Vinh, tên tự là *Cảnh Nghi*, tên hiệu là *Thụy Hiên*, dân gian thường gọi thân mật là "Ông trạng Lường"(1). Ông người Cao Hương, huyện Thiên Bản (nay là huyện Vụ Bản, tỉnh Nam Định), sinh năm 1441, mất năm nào không rõ (khoảng trước năm 1497).

Từ bé Lương đã nổi tiếng *"thần đồng" học giỏi và học một cách thông minh*. Ngày xưa, dưới chế độ phong kiến, các cụ ta thường học gạo, học vẹt cốt đi thi đỗ :

Dùi mài kinh sử để chờ kịp khoa...

Vì vậy thường chỉ học thuộc lòng "kinh sử" của thánh hiền, ít ai chịu học những môn khoa học chính xác có tính chất thực hành như toán học chẳng hạn. Lương Thế Vinh không học như vậy. Một mặt ông cũng đọc "kinh sử", mặt khác ông còn thích học toán. Ông *học chăm, đồng thời cũng rất yêu thích văn nghệ*. Ông rất thích cùng trẻ con trong làng vừa chăn trâu, vừa *chơi sáo diều* trong những chiều mùa hạ. Trong lúc giai cấp phong kiến có thái độ coi khinh nghệ sĩ ("xướng ca vô loài") thì ông rất *mê hát chèo* và là một nghệ sĩ dân gian về hát chèo nổi tiếng, hơn nữa ông còn là một nhà lí luận về môn nghệ thuật sân khấu dân tộc đó.

Chính vì vừa biết học một cách thông minh, vừa biết chơi bời giải trí đúng mức, biết thưởng thức nghệ thuật dân gian tinh tế nên Lương học rất giỏi. Sử sách và dân gian còn truyền lại câu chuyện sau đây :

Quách Đình Bảo và Lương Thế Vinh đều nổi tiếng là học sinh giỏi của xứ Sơn Nam (Nam Định, Hà Nam – Thái Bình). Ba tháng trước khi lên kinh đô Thăng Long (Hà Nội) thi hội, Thế Vinh sang thăm Đình Bảo. Khi đến một quán nước đầu làng Phúc Khê, hỏi thăm dân làng, biết Đình Bảo đương miệt mài "mọt sách" Thế Vinh cười và nói "Kì thi gần đến nơi rồi mà còn cố sức học, chắc anh chàng này, chỉ có tiếng hão thôi, chứ trong bụng chẳng có uẩn súc gì cả" nói rồi ông bỏ về, không đến thăm Đình Bảo nữa.

Mấy hôm sau Đình Bảo ra quán nước, bà hàng nói cho Đình Bảo biết chuyện ấy. Đình Bảo giật mình nói : Người ấy tất là Thế Vinh liền sửa soạn hành trang đến thăm Thế Vinh ngay. Khi đến nơi, Thế Vinh vắng nhà, hỏi đi đâu, người mẹ Thế Vinh bảo : "Em nó đang cùng lũ trẻ trong làng chăn trâu và thả diều ở ngoài đồng ấy !". Đình Bảo bối rối nói "Tài học và cách học của người này là không thể nào sánh kịp được. Trở về nhà, Đình Bảo cũng bắt chước Thế Vinh không dùi mài khổ sở nữa mà cũng vừa biết học vừa biết chơi đúng mức. Kì thi đình năm 1463. Lương Thế Vinh đỗ trạng nguyên còn Quách Đình Bảo đỗ thám hoa, dưới ông hai bậc. Bấy giờ Thế Vinh mới 22 tuổi.

Sau khi mất Lương Thế Vinh được dân gian thờ làm phúc thần, được coi là *tổ sư nghề toán ở Việt Nam* (xem thần tích còn ở đình làng ông). Dân gian tương truyền là chính ông đã làm ra và ra sức phổ biến nhiều bàn tính hiện nay còn thông dụng. Sách vở còn lại chưa xác nhận và tôi cũng không cho rằng Lương Thế Vinh là một nhà toán học vĩ đại của Việt Nam, nhưng công lao lịch sử của Lương Thế Vinh là đã ra sức phổ biến những kiến thức phổ thông về toán học. Hiện còn truyền lại cuốn *Đại thành toán pháp* của Lương Thế Vinh(2). Đây không phải là một công trình toán học của Lương mà là một cuốn giáo khoa phổ thông về toán học. Cần lưu ý rằng cuốn sách đó viết từ thế kỷ XV mà cho đến nửa đầu thế kỉ XIX nó vẫn còn được sử dụng làm sách giáo khoa phổ thông về toán. Mở đầu cuốn sách, Lương Thế Vinh viết một bài thơ nôm nhan đề "Bài thơ khuyên học toán" :

Trước thời cho biết phép thương lường,
Tính toán bình phân ở cửu chương.
Thông hay mọi nhẽ điều vinh hiển
Suy biết trăm đường(3) giúp thánh vương !

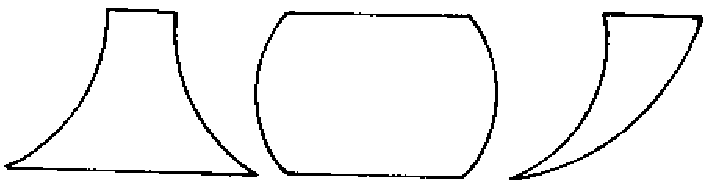
---

(1) Vừa có nghĩa là ông trạng nguyên (đỗ đầu kì thi tiến sĩ) họ Lương (đọc trạnh vì kính trọng, dân gian chỉ gọi ông bằng họ, không gọi bằng tên tục) , vừa có nghĩa là ông trạng giỏi toán (ngày xưa người ta không nói là giỏi toán mà nói là giỏi lường, chẳng hạn đo lường, lường công liệu việc).

(2) Sách tàng trữ ở thư viện khoa học Trung ương, kí hiệu VHv 1152 ngoài ra còn một cuốn khác nhan đề *Tập thành toán pháp* (kí hiệu VHv 497) nội dung đại để cũng như cuốn *Đại thành toán pháp*.

(3) Có sách chép : "Học lấy cho tinh...".

Ông dạy cho người đương thời từ phép cửu chương (tính nhân) tiến lên các phép bình phương, khai phương bình phàn, sai phân, phân số, cách đo bóng (đo bóng cây tính chiều cao của cây...) hệ thống đo lượng đương thời (tiền, vải, thóc, gạo...) toán đạc điền (phương pháp đo đạc diện tích ruộng đất, từ hình vuông, hình chữ nhật, hình tam giác, hình tròn, hình viên phân ... đến một số hình phức tạp hơn như :



Điều đặc biệt là sau khi dạy người ta một phương pháp tính nào đó ông lại làm một bài thơ nôm tóm tắt một cách ngắn gọn để nhớ từng công thức toán học. Đây là một nét rất tiến bộ của ông vì thời đó các nhà nho thường thích làm thơ chữ Hán coi thường chữ nôm ("nôm na mách qué"). Đầu đề các bài toán đưa ra cũng rất Việt Nam, rút ra từ thực tế cuộc sống. Đó là cuốn sách giáo khoa toán học Việt Nam, có lẽ là xưa nhất còn lại đến nay.

Ôn lại cuộc đời và sự nghiệp của Lương Thế Vinh, chúng ta có thể rút ra mấy kết luận sau đây :

1) Thuở bé, Lương Thế Vinh là một học sinh học chăm, học một cách thông minh, học giỏi, giỏi cả toán cả văn, rất yêu thích nghệ thuật, biết cách bố trí thời gian học tập và giải trí một cách khoa học.

2) Lớn lên Lương Thế Vinh trở thành một nhà bác học khá toàn diện.

Ông rất có công phổ biến các kiến thức phổ thông về toán học phổ biến việc dùng chiếc bàn tính. Ông có đầu óc thực hành.

3) Lương Thế Vinh là một nhà trí thức rất yêu nước, là một người gần gũi nhân dân, yêu thích những sáng tạo của dân gian, chê ghét những thói hư tật xấu của giai cấp địa chủ phong kiến.

Tóm lại ông là một nhà bác học vừa có tài cao học rộng, vừa có đức độ hơn người. Cuộc đời của ông rất đáng cho thế hệ trẻ hiện nay của chúng ta học tập và noi gương.

TRẦN QUỐC VƯỢNG

TIỂU SỬ GIOÓC BUN

(Georges Boole, 1815 - 1864)

Gioóc Bun là một nhà toán học Anh, sinh ngày 2 tháng 11 năm 1815 ở Lanhcôn. Bun là con một người bán tạp hóa thuộc tầng lớp bị xã hội khinh rẻ. Vì vậy Bun chỉ được học trong trường học của con nhà nghèo, loại trường học bị kìm hãm trong tình trạng nghèo nàn, lạc hậu. Thời bấy giờ người ta coi sự hiểu biết tiếng la tinh và Hy Lạp là một tiêu chuẩn của người quyền quý. Đương nhiên người ta không dạy thứ "của quý" này trong trường của Bun. Hiểu nhầm một cách ngây thơ rằng muốn thoát cảnh nghèo nàn chỉ cần ra sức học cho được hai thứ tiếng ấy. Bun đã bỏ rất nhiều công sức tự học và trở nên rất giỏi hai thứ tiếng này. Mới 12 tuổi Bun đã dịch được những bài trường ca tiếng la tinh ra tiếng Anh. Ông còn học giỏi các thứ tiếng Pháp, Đức và Ý nữa.

Vì nhà nghèo, từ năm 16 tuổi, Bun đã phải tìm việc làm để kiếm tiền đỡ đần cha mẹ. Ông dạy học từ đó và vừa dạy học vừa ra sức tự học. Do hoàn cảnh xã hội. Bun phải sống nhiều năm lúng túng, quẩn quanh, không lối thoát và mặc dù đã tốn nhiều sức lực, ông vẫn không sao thoát khỏi cảnh nghèo khó, bần cùng.

Những hiểu biết đầu tiên của Bun về toán do chính cha ông truyền cho, vì cần cho công việc buôn bán của gia đình. Từ năm 20 tuổi, Bun mở trường tư dạy toán, và những bài vỡ lòng về toán của cha ông đã được kết quả : toán học đã thức tỉnh Bun và ông bắt đầu để tâm đến toán học. Đầu tiên Bun nghiên cứu các phép toán đại số, quy luật của từng phép toán và mối liên hệ giữa chúng. Công trình theo hướng này của Bun rất lí thú, hấp dẫn. Nhưng ông đã bị lôi cuốn vào một công trình khác to lớn hơn. Đó là sự phát minh ra một hệ thống tinh gián, thực dụng về lôgic hình thức (hay là lôgic toán).

Để tích lũy vốn, chuẩn bị cho công việc nghiên cứu Bun phải ra công tự học toán học, ông đã tự học những bộ sách rất khó : cơ học vũ trụ cổ điển của Laplaxơ, cơ học giải tích của Lagrăng... hoàn toàn bằng những kiến thức tự học được, Bun bắt tay vào nghiên cứu, và chẳng bao lâu những công trình đầu tiên đã ra đời : bài viết về tính biến phân, bài viết về sự phát hiện ra những bất biến. Phát minh về bất biến có tầm quan trọng rất lớn : không có lí thuyết về bất biến thì không thể có lí thuyết tương đối.

Ở Anh lúc bấy giờ muốn công bố những công trình khoa học, tác giả phải có chân trong vài hội Bác học, có tạp chí xuất bản thường xuyên. Mặc dù không có chân trong một hội Bác học nào, Bun vẫn công bố được những công trình của mình, vì ông có quan hệ giao thiệp mật thiết với nhiều nhà bác học lớn. Năm 1848 Bun cho xuất bản tập "Giải tích toán học của lôgic". Đây là cống hiến đầu tiên của Bun về lôgic và từ đó ông bắt đầu nổi tiếng do sự mạnh dạn và minh mẫn trong quan điểm của ông. Quyển sách nhỏ ấy làm cho Đờ Moócgăng (1806 – 1871) nhà toán học nổi tiếng bấy giờ, tác giả của quy tắc ba đoạn (tam đoạn luận) và nhiều công trình có giá trị về lôgic – khâm phục. Đờ Moócgăng cho rằng "Giải tích toán học của lôgic" là một công trình của một nhà toán học bậc thầy. Lúc này nhiều bạn bè khuyên Bun theo học lớp toán cơ đốc giáo của trường đại học Kembritgiơ, nhưng ông không nghe. Ông vẫn cặm cụi dạy học để kiếm sống, phụng dưỡng cha mẹ và vẫn tiếp tục học tập, nghiên cứu say sưa trong hoàn cảnh khó khăn thiếu thốn.

Nhờ nổi tiếng bởi những công trình nghiên cứu độc đáo và sự hiểu biết uyên bác, năm 1849, Bun được chỉ định làm giáo sư toán tại trường đại học của nữ hoàng (Queens College). Cuộc đời Bun chuyển sang giai đoạn mới dễ chịu hơn nhiều so với thời kì dạy học tư. Từ thời gian này Bun bắt đầu cho xuất bản nhiều công trình và dành nhiều công sức cho tác phẩm chủ yếu của mình "các định luật của tư duy" (là nguồn gốc của "đại số Bun" bấy giờ) xuất bản năm 1854. Một năm sau khi xuất bản tác phẩm lớn của mình, Bun kết hôn với Mari Evơrét, cháu gái giáo sư tiếng Hy Lạp của trường đại học. Về sau vợ ông trở thành học trò trung thành của ông. Sau khi Bun mất chính bà đã vận dụng một số quan điểm của chồng vào những tác phẩm về giáo dục của mình. Con gái Bun là nữ văn sĩ Êten Lilian Bun* tác giả của "Ruồi trâu" rất quen thuộc đối với chúng ta.

Bun mất ngày 8–12–1864 thọ 49 tuổi. Cuộc đời và sự nghiệp của Bun là một tấm gương sáng về tinh thần khắc phục khó khăn, lao động cần cù, kiên nhẫn học tập và say mê nghiên cứu sáng tạo.

VŨ TUẤN

GA-LOA (1811 - 1832)

Trong lịch sử khoa học, cuộc đời ngắn ngủi của nhà toán học thiên tài Ga-loa (Evarist Galois) mãi mãi lên án một chế độ xã hội đã kìm hãm, vùi dập khả năng của con người.

Ga-loa sinh ngày 25-10-1811 ở ngoại ô thành phố Pa-ri, người Pháp. Từ bé cho đến năm 11 tuổi, Ga-loa chỉ học ở nhà với mẹ, 12 tuổi mới đến trường. Lối học nhồi sọ, kinh diễn, tu viện của trường học thời bấy giờ không hợp với Ga-loa ; Ga-loa tự mình chuyển qua học toán. Cuốn sách "Hình học" của Lơ-giăng viết cho học sinh giỏi toán, học

(*) Người ta quen gọi bà Êten Lilian Vôinitxơ vì chồng bà là M. Vôinitxơ, nhà cách mạng người Ba Lan.

trong 2 năm thì Ga-loa đã đọc dễ dàng từ đầu đến cuối, lòng say mê toán học đã lôi cuốn chàng thiếu niên ấy đọc những sách toán khó hơn, viết riêng cho các nhà toán học.

Năm 16 tuổi, quá tin tưởng ở khả năng của mình, Ga-loa thi vào trường Bách khoa, hi vọng sẽ được giúp đỡ nhiều hơn để phát triển khả năng của mình, vì trường Đại học này, lúc bấy giờ, là trung tâm khoa học của nước Pháp và của cả châu Âu. Nhưng không may, Ga-loa bị trượt. Thất vọng này làm cho Ga-loa có ý nghĩ : mọi người không hiểu được mình.

Năm 17 tuổi, lần đầu tiên Ga-loa được một thầy toán là giáo sư Risa hiểu tài năng và tận tình giúp đỡ. Nhờ thế, ngay năm ấy, Ga-loa đã có một công trình sáng tạo quan trọng về "lý thuyết hàm số".

Năm 18 tuổi, Ga-loa công bố một công trình mới của mình về "phân số liên tục" và hệ thống lại những công trình nghiên cứu của mình, đưa nhờ Cô-si xem và trình bày ở Viện Hàn-lâm. Cô-si là một trong những nhà toán học lỗi lạc nhất thời bấy giờ ở nước Pháp. Thường thường những công trình nghiên cứu gửi đến Cô-si đều được ông ta xem, phê bình sâu sắc và đúng đắn. Nhưng tai hại thay, lần này ông quên đi ; và đã để lạc mất bản thảo ! Câu chuyện vô lí đó làm cho Ga-loa thêm ác cảm với xã hội mình đang sống.

Nhưng Ga-loa không tiêu cực và vẫn say sưa nghiên cứu khoa học. Năm 19 tuổi, Ga-loa hoàn thành thêm một công trình về "phương trình đại số" và gửi lên Viện Hàn-lâm để dự một kì thi giành riêng cho các nhà toán học. Ông thư kí của Viện mang bản thảo về nhà xem, nhưng chưa kịp xem thì chết. Về sau, người ta không tìm thấy dấu vết của bản thảo đó nữa. Ga-loa cũng đã viết lại và gửi tiếp lên Viện Hàn-lâm một công trình về "cách giải tổng quát các phương trình" (ngày nay gọi là lí thuyết Ga-loa) nhưng tài liệu viết quá cô đặc, và sự nghiên cứu của giáo sư Poát-xông không được kĩ lưỡng nên sự đánh giá không đúng mức.

Hy vọng cuối cùng thế là hết. Ga-loa tham gia phong trào cách mạng. Tháng 5-1831, Ga-loa tham gia một cuộc biểu tình phản đối một đạo luật của chính phủ. Tất nhiên, Ga-loa bị bắt. Trong tù, Ga-loa vẫn tiếp tục làm toán.

Ngày 25-5-1832, Ga-loa được thả và 4 ngày sau đó, sự việc xảy ra thế nào, không ai biết thật rõ. Người ta chỉ đoán qua bức thư mà Ga-loa viết lại. Trong "Thư gửi tất cả những người cách mạng" đề ngày 29-5-1832, Ga-loa viết : "Tôi mong rằng các bạn đừng trách tôi đã không chết vì Tổ quốc... Tôi bị hai kẻ thù địch khiêu khích, tôi đã nhận đấu kiếm với chúng và danh dự không cho phép tôi báo trước điều đó với các bạn... Vĩnh biệt các bạn ! Tôi vẫn rất muốn sống vì lợi ích chung của chúng ta".

Biết mình sắp chết, Ga-loa đã thức suốt đêm để viết nốt những công trình nghiên cứu của mình. Thỉnh thoảng, Ga-loa lại ngừng lại và viết vội vàng, run run bên rìa trang giấy : "Tôi không có thì giờ, không có thì giờ nữa... !" Những trang giấy mà Ga-loa viết lúc rạng đông, trong khoảng mấy giờ đồng hồ tuyệt vọng, đã đưa Ga-loa lên địa vị các nhà toán học hàng đầu của thế giới. Ga-loa đã giải quyết trọn vẹn vấn đề đã làm băn khoăn các nhà toán học trong hàng bao thế kỉ : "Trong những điều kiện nào thì một phương trình có thể giải được ? " Trong công trình này, Ga-loa đã vận dụng tài tình lí thuyết nhóm, và vì thế, ngày nay người ta xem Ga-loa như một người tiên phong trong lí thuyết đó, một lí thuyết đã chiếm một địa vị đặc biệt quan trọng trong toán học và vật lí hiện đại.

Ga-loa đã gửi công trình trên đây cho một người bạn thân nhờ trình lên Viện Hàn lâm. Ga-loa viết : "Anh gửi hộ công trình này cho Jacôbi hay Gaoxơ và yêu cầu các ông ấy cho biết ý kiến – không phải là ý kiến về công trình của tôi đúng hay sai, mà là ý kiến về tầm quan trọng của nó đối với toán học".

Mờ sáng 30-5-1832, Ga-loa gặp kẻ thù và đã ngã. Biết mình sắp tắt thở, Ga-loa từ chối không nhận sự cầu kinh.

Ngày 31-5-1832, Ga-loa mất khi tuổi đời mới vừa 21 ! Thi hài Ga-loa được chôn trong nghĩa địa chung nên đến nay không còn dấu vết gì nữa. Nhưng 60 trang giấy mà Ga-loa để lại trong đêm cuối cùng ; mãi mãi là một đài kỉ niệm bất tử của một thiên tài trẻ tuổi, mà cuộc đời là một bản cáo trạng chế độ xã hội cũ đã vùi dập tài năng của con người.

PHẠM GIA ĐỨC *và* **LƯU NGỌC KIỀU**

VŨ HỮU, NHÀ TOÁN HỌC VIỆT NAM THỜI TRƯỚC

Vũ Hữu sinh năm 1441 người Mộ-trạch, uyện Dường-an (nay là huyện Bình-giang nh Hải-dương), con ông Vũ Bá Khiêm, một ià nho thanh bạch.

Ông học rộng, biết nhiều, rất trọng lễ hép. Đỗ hoàng giáp khoa Quý-mùi, niên iệu Quang-thuận thứ 4 thời Lê Thánh ông (1463), ông làm quan đến thượng thư m bộ. Tuy làm quan to, nhưng vốn tính em khiết, chính trực nên cảnh nhà vẫn ghèo. Ông làm việc rất cần cù, cẩn thận. ng đặc biệt rất tinh thông toán học. Ông p ra các phép "Đại thành toán pháp" và hép đo đạc ruộng đất" để dạy người trong ước. Rất tiếc vì tài liệu thiếu thốn, nay hông rõ nội dung các phương pháp toán học a Vũ Hữu ra sao. Tài liệu lịch sử cũ chỉ n ghi lại được một sự việc sau đây :

Bấy giờ các cửa Đoan-môn, Đại-hưng và ông-hoa của thành Thăng-long (Hà-nội), y dựng từ thời Lí (XI-XIII) lâu ngày đổ nát. Lê Thánh Tông sai sửa chữa lại, cho triệu Vũ Hữu vào phán rằng : Trẫm nghe nói người rất giỏi toán. Nay trẫm cho trùng tu các cửa thành, vậy ngươi thử tính xem phải dùng hết bao nhiêu gạch đá.

Vâng lời vua, ông liền đo chiều rộng, chiều cao các cửa, rồi tính ra số gạch cần dùng đem trình vua. Vua sai thợ cứ y theo số dự toán của Vũ Hữu mà làm gạch và đem xây cửa thì vừa đủ, không sai một tấc, không thừa một viên gạch !

Lê Thánh Tông vô cùng ngợi khen Vũ Hữu và ban thưởng cho ông rất hậu.

Từ thế kỉ XV, trong "đêm trường trung cổ", mà nước Việt Nam ta đã có một nhà toán học giỏi như vậy đấy !

TRẦN QUỐC VƯỢNG
(Khoa Sử – Đại học Tổng hợp)
Sưu tầm

NHINA KALOPNA BARI

(1901 – 1961)

Nhina Kalopna Bari là một nhà toán học ô viết nổi tiếng và là một nữ giáo sư đầu iên ở trường đại học Matscơva. Bà sinh gày 6 tháng 11 năm 1901 trong một gia nh làm nghề thầy thuốc.

Năm 1918 – năm đầu tiên trong lịch sử ước Nga – phụ nữ được vào học ở trường ại học, cùng năm ấy bà vào học ở Ban toán của trường đại học Matscơva.

Nhưng năm 1918 cũng là năm nước Nga ặp nhiều khó khăn nhất của thời kì đầu ách mạng. Nội chiến bắt đầu, nạn đói, nạn ét hoành hành dữ dội khắp nước Nga. Matscơva thiếu bánh ăn và củi để sưởi. Các phương tiện giao thông gần như bị đình trệ. Sinh viên và các giáo sư ở trường đại học Matscơva cùng chịu chung những khó khăn ấy. Học bổng không có họ vừa làm vừa học, Nhina Kalopna Bari làm việc vất vả để theo học.

Trong những khó khăn đó, sinh hoạt ở trường đại học Matscơva vẫn sôi nổi. Giáo sư, sinh viên vẫn say sưa nghiên cứu khoa học. Lúc bấy giờ một số lớn các sinh viên và giảng viên trẻ nhiệt tình và say mê nghiên cứu tập trung chung quanh trường phái

Matscova về "lí thuyết hàm" do nhà toán học nổi tiếng Ludin lãnh đạo.

Trong những năm này Nhina Kalopna Bari đang học tại trường, từ những năm đầu tiên bà đã được Ludin giảng và đã hăng say hoạt động trong các nhóm nghiên cứu của ông. Công trình nghiên cứu khoa học đầu tay của bà thuộc về lí thuyết các chuỗi lượng giác đã hoàn thành khi bà còn là sinh viên và đã được trình bày trong một cuộc họp của hội toán học Matscova mà mãi đến năm 1926 bà mới được công nhận là hội viên chính thức. Năm 1921 bà tốt nghiệp đại học và đã được giữ lại nghiên cứu dưới sự hướng dẫn của Ludin. Năm 1925 bà đã hoàn thành chương trình nghiên cứu và đã bảo vệ luận án : "Tính duy nhất của sự phân tích lượng giác". Với công trình này bà đã giải quyết một loạt các vấn đề khó khăn về lí thuyết chuỗi lượng giác và đã được nhận giải thưởng khoa học.

Trong đời hoạt động khoa học của mình, Nhina Kalopna Bari đã đóng góp rất nhiều công trình vào các vấn đề : lí thuyết hàm mêtric, lí thuyết chuỗi lượng giác, biểu diễn hàm liên tục tùy ý qua các hàm số hợp liên tục, lí thuyết về các hệ thống hàm trực giao v.v...

Bà đã dành phần lớn cuộc đời của mình cho khoa sư phạm. Năm 1928 sau khi được nhận chức phó giáo sư bà bắt đầu giảng ở khoa Toán cơ của trường đại học Matscova. Bốn năm sau bà được nhận chức giáo sư chính thức. Các bài giảng của bà rất sinh động và hấp dẫn. Ngoài các công tác giảng dạy ra, bà đã hướng dẫn nhiều nhóm nghiên cứu về các vấn đề : tổng quát của lí thuyết hàm, chuỗi lượng giác, chuỗi trực giao, v.v... Nhiều nhà toán học nổi tiếng Liên Xô như Kazalop, Ulyanop, Kadan, v.v... đã được bà hướng dẫn, dìu dắt.

Nghiên cứu toán học của bà không những có ảnh hưởng trong nước mà còn có tiếng vang ở quốc tế. Năm 1927 bà đến Pari và làm việc hăng say trong nhóm nghiên cứu Hađama. Đầu năm 1928 và 1929 bà hai lần đến Pari để nhận giải thưởng Rokfelơ. Nhina Kalopna Bari đã từng tham dự các cuộc hội nghị toán học quốc tế ở Ba Lan (1928), ở Êđinbơc (1958) và là hội viên của các hội toán học Pháp, Ba Lan.

Ngoài hoạt động khoa học ra, bà rất tích cực tham gia vào các công tác xã hội, bà đã từng giữ chức phụ thẩm nhân dân và đã hoàn thành tốt đẹp trách nhiệm của mình. Bà còn là biên tập viên chính của phần toán trong tạp chí "Công trình nghiên cứu" và tạp chí "Tin tức" của trường đại học Matscova.

Nhina Kalopna Bari là một người tràn đầy sức sống và yêu đời. Khi còn thanh niên, cô thiếu nữ Nhina thường là người thủ xướng của các trò vui nhộn. Bà thích làm thơ trào phúng, say mê đọc sách, yêu âm nhạc, kịch, và thường ít khi vắng mặt trong các cuộc triển lãm. Bà là một người nguyên tắc và chân thật. Khi đã biết bà, bất kì ai : sinh viên, bạn, đồng chí cũng đều kính trọng và yêu quý bà. Ngày 15 tháng 7 năm 1961 Nhina Kalopna Bari đã mất đi đột ngột vì một tai nạn xe cộ.

Các bạn trẻ yêu toán thân mến ! Chúng tôi giới thiệu với các bạn tiểu sử của một nhà nữ toán học trong số nhiều nhà nữ toán học khác trên thế giới để các bạn thấy khả năng to lớn của phụ nữ trong mọi lĩnh vực đồng thời đả phá quan niệm cho rằng phụ nữ không có năng khiếu toán học. Chỉ cần có một quyết tâm cao, một hoài bão lớn các bạn nữ sinh cũng có thể thực hiện ước mơ trở thành một nhà toán học góp phần phục vụ cho Tổ quốc xã hội chủ nghĩa của chúng ta.

HỒNG MINH

ABEN

(Abel 1802-1829)

Aben (Niels Henrik Abel) là một nhà toán học người Na-uy hồi đầu thế kỉ thứ 19, người mà cuộc đời ngắn ngủi có thể tóm tắt là "thiên tài và nghèo túng".

Sinh ngày mồng 5 tháng 8 năm 1802, Aben là con trai thứ hai của một mục sư. Cha, ông của Aben đều có học thức cao ; mẹ Aben rất đẹp và Aben cũng rất đẹp trai. Tài năng của Aben phát triển khá nhanh : bắt đầu từ khi 16 tuổi, Aben đã tự học và nghiền ngẫm các tác phẩm lớn của các bậc thầy như Niutơn (Newton), Ole (Euler) và Lagơrănggiơ (Lagrange). Với cách nhìn sâu sắc, Aben thường phát hiện ra những thiếu sót trong lí luận của các bậc tiền bối và đã dành nhiều thời gian để chính xác hóa những phần thiếu chặt chẽ. Chính theo phương hướng đó Aben đã chứng minh thành công định lí nhị thức tổng quát mà Niutơn và Ole mới giải quyết trong trường hợp đặc biệt.

Cha của Aben mất năm 1820, lúc Aben còn là một thanh niên 18 tuổi, hai vai gánh nặng gia đình thay cha, phải dạy học tư lấy tiền nuôi bẩy miệng ăn. Đất nước Na-uy hồi đó nghèo xác xơ, gia đình túng bấn nhưng Aben không hề phàn nàn, trái lại rất yêu đời và say sưa làm việc, học tập, nghiên cứu. Aben dạy học rất hay và tận tụy.

Trong những năm khó khăn nhất của đời mình, Aben đã may mắn gặp được một ông thầy rất tốt là Homboe (Holmboë) và về sau hai người trở thành bạn thân thiết. Tình bạn giữa Homboê và Aben thật đáng ca ngợi. Homboê đã tạo mọi điều kiện về vật chất và tinh thần giúp Aben theo đuổi sự nghiệp vì sớm nhìn thấy thiên tài của Aben. Nhờ sự gợi ý của Homboê mà Aben đã đọc những tác phẩm cổ điển thuộc loại khó nhất kể cả cuốn "Nghiên cứu số học" của Gaoxơ (Gauss). Cũng nhờ Homboê mà một số công trình nghiên cứu của Aben được gửi đến tay các nhà toán học có uy tín hồi đó.

Năm 19 tuổi Aben đã có cao vọng tìm lời giải bằng căn thức của phương trình đại số bậc năm tổng quát. Như đều biết, hồi đó người ta đã tìm được công thức cho biết nghiệm của các phương trình đại số từ bậc nhất cho đến bậc bốn ; thí dụ như với phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ta có công thức quen thuộc $x_{1,2} = -b \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Nhiều nhà toán học có uy tín đã mất bao nhiêu công sức tìm tòi mà không đến kết quả gì. Lúc đầu Aben cũng đi theo con đường đó và đã có lúc rất phấn khởi vì tưởng rằng đi đến kết quả. Nhưng về sau chính Aben đã tự phát hiện được sai lầm trong lí luận của mình và đã đặt lại bài toán là liệu có tồn tại một hệ thức cho phép tìm nghiệm của một phương trình đại số bậc năm tổng quát hay không ? Chính vì đặt bài toán như vậy nên Aben đã viết được một luận văn nổi tiếng để chứng minh rằng phương trình đại số bậc năm tổng quát không thể có lời giải (bằng căn thức).

Tiếp sau đó Aben còn nêu lên hai bài toán tổng quát có liên hệ chặt chẽ với nhau :

1) Hãy tìm tất cả các phương trình bậc tùy ý có thể giải được bằng các phép tính đại số.

2) Quyết định xem một phương trình cho trước có thể giải được bằng các phép tính đại số hay không ?

Cho đến 1828 Aben mới công bố công trình này và bằng số tiền eo hẹp trong túi của mình để hi vọng có điều kiện tiếp xúc được với các nhà toán học lớn ở Âu châu để học tập, nghiên cứu. Lúc đó nhà toán học người Pháp là Galoa (Evariste Galois) mới có 16 tuổi. Về sau Galoa có dịp đọc và thán phục công trình của Aben ; nhờ đó Galoa đã có những gợi ý để xây dựng lí thuyết về phép giải tổng quát các phương trình.

Phong cách suy nghĩ của Aben rất sâu sắc và độc đáo. Chính vì thế mà Aben đã tránh được các thất bại của nhiều nhà toán học tiền bối. Sau đây là một vài ý kiến của Aben : "Tôi đã nghiên cứu nhiều ngành của giải tích theo cách ấy (theo cách đặt bài toán về phương trình đại số bậc 5) và mặc dù tôi thường tự đặt ra cho mình những bài toán vượt quá sức, tôi cũng đã tìm được nhiều kết quả tổng quát".

Aben nuôi ý định sang Pháp và Đức để được tiếp xúc với các nhà toán học phương Tây có uy tín lớn hồi đó. Nhờ sự vận động kiên trì của Homboe và các bạn của Aben, đến năm 23 tuổi, Aben được chính phủ Nauy cấp học bổng cho sang nghiên cứu ở nước ngoài, chủ yếu là ở Pháp và Đức. Để chuẩn bị cho chuyến đi này, Aben đã dành gần hai năm học ngoại ngữ và nghiên cứu toán học. Và cũng trong thời gian đó nhà toán học trẻ tuổi đã hứa hôn với một thiếu nữ tên là Còrenli Kem (Crelly Kemp). Aben cũng đã để một tháng để thu xếp việc nhà trước khi lên đường cho yên tâm.

Nhà toán học Đức Gaoxơ (Gauss) có nhận được công trình của Aben về phương trình đại số bậc 4 nhưng ông ta không đọc mà đem xếp lại một xó vì hồi đó bài toán này giống như bài toán cầu phương hình tròn, đã làm tốn bao nhiêu giấy mực, thời giờ và công sức mà chẳng đi đến kết quả gì. Gaoxơ cứ đinh ninh là Aben đã làm công việc của dã tràng xe cát nên cũng chẳng lên tiếng ủng hộ. Thật là đáng tiếc ! Vì một lời ủng hộ của Gaoxơ, nhà toán học có uy tín nhất thì châu Âu hồi đó, có lẽ cũng giúp Aben thoát khỏi tình trạng túng thiếu đã khiến anh mắc bệnh lao và chết rất trẻ, trước khi thực hiện chỉ mới được một nửa sự nghiệp khoa học của đời mình. Ở bên Đức, Aben có một người bạn rất tốt là Cơren (Crelle). Hai người đã giúp đỡ nhau rất nhiều trong nghiên cứu khoa học. Cơren đã xuất bản công trình của Aben trong tạp chí của mình và thường dẫn Aben đi chơi để giới thiệu tài năng trẻ đó với các giới khoa học ở bên Đức.

Sang Pháp, Aben sống ở Pari (Paris) để có dịp tiếp xúc với Lơgiăngđơrơ (Legendre), Côsi (cau-chy) và một số nhà toán học có tên tuổi khác. Trong thời kì này Aben có trao đổi tin tức với Homboe và viết :

"... Nói thật với anh rằng thủ đô ồn ào nhất của lục địa này hiện nay đối với tôi như một bãi sa mạc... Cho đến nay tôi chỉ quen biết một số ít người.

... Ông Đirichlê (Leeune Dirichlet) đã cùng chứng minh với Lơgiăngđơrơ là phương trình

$$x^5 + y^5 = z^5$$

không có lời giải bằng nghiệm nguyên và nhiều điều lí thú khác. Lơgiăngđơrơ rất vui tính nhưng tiếc thay ông ta già quá. Côsi thì gần như điên... ; điều mà ông ta nghiên cứu thật là tuyệt diệu nhưng rất rắc rối. Thoạt tiên tôi chẳng hiểu gì cả, đến nay tôi đã thấy sáng tỏ. Poátxông, Phuriê, Ămpe chỉ quan tâm đến vấn đề từ tính và các đề tài vật lí khác. Tôi đoán rằng hiện nay ông Lapờlátxơ (Laplace) không viết lách gì nữa : công trình cuối cùng của ông ta là một bản phụ lục về lý thuyết xác suất.

... Người Pháp họ ít cởi mở với người ngoại quốc hơn so với người Đức".

Thực vậy hy vọng bồng bột của Aben lúc sang Pari chỉ được đáp lại bằng những nụ cười hoặc lời chào lịch sự. Aben có gửi đến Viện Hàn lâm Khoa học Pháp một luận văn về "Tính chất tổng quát của một lớp rất rộng các hàm siêu việt", một công trình nghiên cứu vĩ đại về giải tích toán học mà Écmít (Hermite) đã phát biểu là nó nêu lên đề tài cho các thế hệ đến 500 năm sau.

Lơgiăngđơrơ và Côsi có trách nhiệm giới thiệu với Viện Hàn lâm nhưng ông già Lơgiănđơrơ 76 tuổi thì chê là viết mờ quá khó đọc còn Côsi thì bận việc riêng, xếp xó mãi đến khi lãnh sự quán Na-uy vận động tìm lại bản thảo, Côsi mới giới thiệu ở Viện Hàn lâm, một năm sau khi Aben mất. Aben có viết thư cho nhà thiên văn học Hăngxten (Hansteen) nói rõ ý định của mình muốn xây dựng lại ngành giải tích toán học vì lí luận trước đây có nhiều chỗ sơ hở. Người thanh niên đó đã quyết tâm thực hiện hoài bão lớn lao trong cảnh nghèo nàn và bệnh tật, bệnh lao phổi mà Aben đã bị nhiễm ở Pari. Cho đến 1827 lúc hết hạn du học, Aben phải vay tiền của Homboe để trở về nước và vẫn rất lạc quan, yêu đời. Một năm sau, Aben bất đầu họ ra máu và cảm thấy đời mình có thể đếm từng ngày. Cô Còrenly, vợ chưa cưới của Aben đến chăm sóc anh bên giường bệnh. Aben vẫn yêu cuộc sống, vẫn gượng dậy để theo đuổi sự nghiệp khoa học lớn lao nhưng anh giống như một con đại bàng bị thương nặng đã đến lúc kiệt sức. Trong cơn mê sảng, có lúc anh đã hét lên "Tôi muốn phấn đấu để sống thêm". Aben mất ngày 6 tháng 4 năm 1829 chưa tròn 27 tuổi.

Nhà toán học Pháp Jacôbi đã phàn nàn rằng "Phát minh của ông Aben thật là vĩ đại !... Nhưng không hiểu tại sao phát minh toán học quan trọng nhất của thế kỉ này đã gửi tới quý viện (Viện Hàn lâm khoa học Pháp) hai năm trước đây lại không được ai chú ý tới ?".

Hai ngày sau khi Aben mất thì người ta nhận được một bức thư từ bên Đức của Còrenlơ, bạn thân của Aben, báo rằng ông ta đã vận động thành công để Aben được giữ chức giáo sư toán học tại trường Đại học Bá-linh.

... Và một năm sau. (1830), Viện Hàn lâm khoa học Pháp đã tặng Aben Giải Toán học lớn với ý định đền bù xứng đáng công lao của tác giả nhưng tiếc thay, tác giả không còn nữa !

DOÃN CHÂU LONG

*HAI NHÀ TOÁN HỌC BÔYOI**

Bôyoi Forocosơ và Bôyoi Yanôsơ là hai cha con, hai nhà toán học thiên tài của Hungari. Cuộc đời của họ buồn tẻ, cay đắng nhưng những thành tích khoa học đã làm cho tên tuổi họ trở thành bất diệt.

Forocosơ sinh năm 1775. Ông theo học ở trường đại học Gottingen và bắt đầu nghiên cứu về hình học ở đó. Và cũng ở đó ông quen thân với anh sinh viên Đức Gaoxơ, người sau này trở thành nhà toán học nổi tiếng thế giới.

Trở về nước, Forocosơ dạy toán, lí, hóa trong 47 năm liền. Ông rất ham thích toán học và đặc biệt trong bao năm ròng tìm mọi cách để chứng minh tiên đề về đường song song của Ơclit cũng như bao người khác, ông không thành công, nhưng sự bền bỉ kiên nhẫn của ông ít người sánh kịp. Ngoài ra ông còn nghiên cứu thành công nhiều vấn đề kĩ thuật thực tế, viết kịch, tìm hiểu ngôn ngữ, họa và nhạc. Nhờ lòng say mê khoa học và tài năng của mình ông đạt được nhiều kết quả khoa học. Nhưng gặp nhiều rủi ro, mãi đến năm 55 tuổi tác phẩm toán học đầu tiên của ông mới được xuất bản. Trong cuốn sách đó ông trình bày những nhận xét rất sâu sắc, độc đáo và thận trọng, được Gaoxơ đánh giá cao.

Bôyoi Yanôsơ sinh năm 1802. Thừa hưởng trí thông minh và lòng ham thích toán học của cha, năm 4 tuổi cậu bé đã biết nhiều hình hình học. Năm lên 6 tuổi cậu bé đã học tiếng latinh và hiểu biết ít nhiều về thiên văn, năm 7 tuổi đã học tiếng Đức. Cậu bé rất thích chơi vĩ cầm, nhưng toán học vẫn hấp dẫn hơn cả.

Năm 16 tuổi Yanôsơ xin vào học viện kĩ thuật quân sự Viên. Bốn năm sau anh tốt nghiệp với thành tích xuất sắc. Một năm sau anh được phong hàm thiếu úy. Nhưng anh không màng tới chức vụ, danh vọng mà chỉ chuyên tâm về toán học.

Từ khi còn nhỏ Yanôsơ đã nghe cha nói về tiên đề đường song song. Anh cố gắng tìm cách chứng minh trực tiếp hoặc gián tiếp tiên đề đó. Đầu tiên anh giới hạn trong hình học phẳng, sau mở rộng ra hình học không gian. Vấn đề ngày càng rõ ràng hơn, và cuối

* Đọc là Bô-i-oi theo đúng âm tiếng Hung. Trước đây ta thường phiên âm theo tiếng Pháp, nên viết Bô-li-ai.

cùng anh đi đến kết luận rằng không thể chứng minh được tiên đề đó.

Trong một đêm thức trắng Bôyoi Yanôsơ tìm ra được mối liên hệ giữa khoảng cách các đường song song và "góc song song". Từ kết quả này anh nghiên cứu sâu thêm và xây dựng nên hình học phi Ơclit (hình học hypebôlic). Trong hình học này Yanôsơ nêu lên nhiều định lí mới. Anh xác định rằng nếu tổng các góc trong của một tam giác nhỏ hơn hai góc vuông thì qua một điểm ngoài một đường thẳng có thể kẻ được hai đường song song và vô số đường thẳng không cắt đường thẳng đã cho. Tổng các góc của tam giác phụ thuộc vào diện tích tam giác, và có một tam giác giới hạn là tam giác có diện tích lớn nhất.

Năm 1823 chàng thanh niên 21 tuổi Bôyoi Yanôsơ viết thư cho cha, đầy hi vọng và vui sướng : "Từ tay không con đã tạo ra cả một thế giới". Năm 1832 anh cho in công trình của mình vào cuối một cuốn sách của cha, dưới hình thức phụ lục. Người cha gửi tác phẩm đó cho Gaoxơ. Trong thư trả lời Gaoxơ rất khen ngợi tài năng của Yanôsơ, nhưng nói rằng ông ta cũng đạt được những kết quả tương tự, và bao nhiêu năm sau ông ta vẫn im lặng về phát minh xuất sắc này. Việc đó làm Yanôsơ đau khổ và bực tức.

Ban đầu Forơcosơ không tin rằng con trai mình lại có thể giải quyết được vấn đề mà 22 thế kỉ nay chưa ai làm nổi. Nhưng về sau ông hiểu được giá trị công trình của con ông. Không phải tình thương yêu và tính tự trọng của người cha, mà chính lương tâm của nhà toán học buộc ông đứng ra bênh vực cho con ông trong khi bao nhiêu người đứng dưng hoặc phản đối.

Năm 1856 Forơcosơ chết. Học trò cũ của ông từ những tỉnh xa cũng về dự tang, đưa ông đến nơi an nghỉ cuối cùng.

Chúng ta biết rằng năm 1830 Lôbasepxki cũng tìm được những định lí của hình học phi Ơclit. Về sau tin đó đến tai Bôyoi Yanôsơ. Sau khi nghiên cứu cẩn thận công trình của Lôbasepxki, ông chân thành chúc mừng nhà toán học Nga vĩ đại. Cả hai người, độc lập với nhau, đã xây dựng nên hình học mới mà sau này người ta gọi là hình học Bôyoi – Lôbasepxki.

Không phải ngẫu nhiên hình học này được phát minh ở hai nước Dông và Trung Âu, mặc dù ở Tây Âu rất nhiều người nghiên cứu vấn đề đó. Ở Dông và Trung Âu chế độ thống trị hà khắc đã khơi động tinh thần cách mạng mãnh liệt. Tinh thần đó gạt bỏ một cách dễ dàng hơn những định luật cũ, nếu tìm thấy mâu thuẫn luận lí của nó.

Hình học Bôyoi – Lobasepxki đặt cơ sở cho lí thuyết tương đối của Anhxtanh sau này. Nó không chỉ mở đường cho toán học mà còn tạo nên một chuyển biến cách mạng trong triết học. Chính vì thế mà Gaoxơ không dám lên tiếng công nhận những kết quả đã đạt được.

Bôyoi Yanôsơ rất thiết tha yêu tổ quốc. Ông đã từng công khai tuyên bố rằng xã hội đương thời "đầy rẫy bất hạnh, cùng khốn, nhưng không nhất thiết phải như vậy. Có thể tìm được hạnh phúc trên trái đất này. Tuy nhiên hoàn toàn không có hạnh phúc cá nhân nào có thể sinh ra hoặc tồn tại nếu không có hạnh phúc chung". Ông nồng nhiệt chào mừng cuộc cách mạng 1848 của nhân dân Hungari chống triều đình Áo đòi độc lập dân tộc. Ông đau khổ vì bệnh tật không cho phép ông tham gia chiến đấu giành tự do. Sự thất bại của cách mạng càng làm bệnh ông thêm trầm trọng. Bốn năm sau khi cha chết, năm 1860 ông cũng kết thúc cuộc đời nghèo niềm vui con người, nhưng giàu thành tích khoa học của mình.

Nhân dân Hungari nhắc tới tên hai cha con Bôyoi với niềm tự hào và lòng kính phục. Bôyoi Yanôsơ được đặt ngang hàng với Lôbasepxki trong việc xây dựng hình học phi Ơclit. Hội toán học Hungari mang tên ông đã và đang góp phần đào tạo và bồi dưỡng những nhà toán học tài năng trẻ tuổi cho nước Hungari xã hội chủ nghĩa.

VŨ HOÀI CHƯƠNG

KHƠRICHIAN GUIGHENXƠ

(1629 - 1695)

Khơrichian Guighenxơ là một nhà toán học và vật lý học nổi tiếng người Hà Lan. Ông đã biểu lộ năng khiếu khoa học và lòng say mê học tập khi còn rất nhỏ tuổi. Lên 8 tuổi, Guighenxơ đã nắm vững bốn phép tính số học và học tập tốt tiếng la tinh ; lên 10 tuổi cậu đã say mê nghiên cứu luật thơ la tinh và say mê chơi đàn vĩ cầm. Từ 14 đến 16 tuổi, Guighenxơ học toán theo chương trình và sách giáo khoa do một giáo sư viết riêng cho cậu học trò xuất sắc của mình. Qua mấy năm say sưa học tập, năm 16 tuổi Guighenxơ đã nắm rất vững "số học" của Điôphăng, hình học của Đêcác, làm quen với tất cả các bài toán tìm cực trị của Phecma và các bài toán độc đáo về hình học giải tích. Năm 16 tuổi, Guighenxơ vào học trường Đại học. Ở đây, ông bắt đầu quan tâm đến tác phẩm bất hủ của Acsimet và "Tiết điện hình nón" của Apôlôniut.

Khi nghiên cứu "Số học" của Xehevin, Guighenxơ bị lôi cuốn vào một điều xác nhận rằng hình dáng của một sợi chỉ vật chất treo cân bằng tự do giữa hai điểm là đường parabôn. Ông nhận thấy rằng điều này không đúng và đã chứng minh rằng trong trường hợp tổng quát, nó có hình dạng như một đường có từng mắt xích nối lại với nhau. Khi nhận được cong trình khoa học đầu tay này của nhà toán học trẻ tuổi, Đêcác hết sức khen ngợi và cho rằng Guighenxơ sẽ trở thành nhà bác học lỗi lạc. Chỉ vài năm sau, lời tiên đoán của Đêcác đã thành sự thực.

Trong tác phẩm "Đo đường tròn", Acsimét đã tính giá trị gần đúng của số π : $3 + 10/71 < \pi < 3 + 1/7$ bằng cách dựng hình đa giác đều 96 cạnh. Guighenxơ đã viết tác phẩm "Về cầu phương hình tròn" trong đó ông đã phát triển ý của Acsimet, và đã nêu ra phương pháp có hiệu quả hơn để tính gần đúng số π ; chẳng hạn ông đã có được kết quả trên đây của Acsimet từ việc khảo sát hình 12 cạnh và 6 cạnh đều, Guighenxơ còn nghiên cứu về một ngành toán học trẻ là lí thuyết xác suất.

Guighenxơ còn có nhiều công trình nổi tiếng về cơ học và thiên văn học. Chẳng hạn, nhờ những máy đo khúc xạ tự chế tạo, ông đã quan sát được sao Thổ ; lần đầu tiên, ông đã mô tả đám tinh vân trong chòm sao Thiên Lạp và đã thông báo về đường vết trên bề mặt sao Mộc và sao Hỏa. Về cơ học thực hành, ông đã phát minh ra đồng hồ quả lắc nổi tiếng và viết tập sách gồm 4 cuốn về công trình này.

P.H. *sưu tầm*

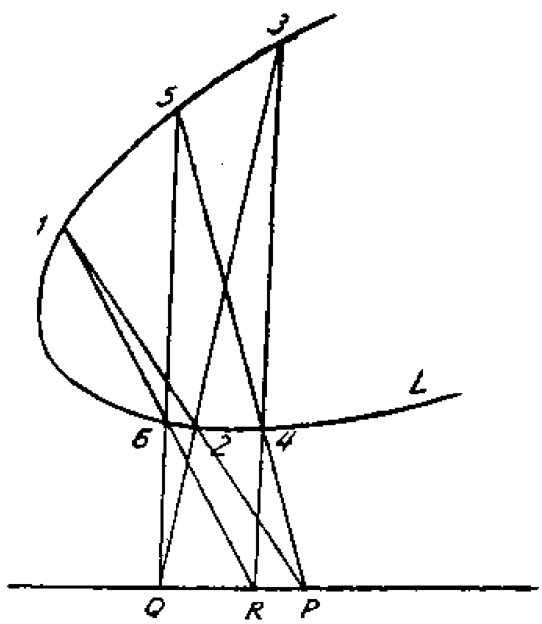
BLEDƠ PAT-SCAN

(1623 - 1662)

Ngày 19-6-1973 đánh dấu 350 năm ngày sinh của B. Pat-scan, một trong những người nổi tiếng nhất trong lịch sử nhân loại.

Suốt 350 năm qua, biết bao người khác nhau ở các thời đại khác nhau đã coi B. Pat-scan như người cùng thời đại với mình. Những lời phát biểu về B. Pat-scan đã được gộp thành nhiều tuyển tập. Thường chúng ta chỉ nhắc đến B. Pat-scan là một nhà toán học, một nhà vật lí học. Nhưng ông còn là một nhà tư tưởng, một nhà văn lớn.

Về thời niên thiếu của B. Pat-scan, thường người ta hay nhắc đến môn hình học "cái gậy và đồng tiền". Số là hồi nhỏ B. Pat-scan rất ham mê môn hình học. Chính cha ông (Êten Pat-scan, một người rất ham mê toán học và kết thân với nhiều nhà toán học lớn của Pháp hồi đó) đã gây cho B. Pat-scan lòng ham mê này. Nhưng B. Pat-scan lại rất yếu nên Êten Pat-scan không dám dậy toán cho con, sợ những suy nghĩ căng thẳng sẽ ảnh hưởng không tốt tới sức khỏe con mình. Ông giấu tất cả sách vở và tất cả những vật dụng gì có liên quan đến toán học. Thế là B. Pat-scan phải tự "nghiên cứu" môn khoa học này. Cậu đã tự xây dựng môn hình học riêng của cậu. Cậu vẽ các hình, tự đặt tên (như : dường thẳng là "cái gậy", đường tròn là "đồng tiền", hình chữ nhật là "mặt bàn", hình tam giác là "thước thợ",...) và chứng

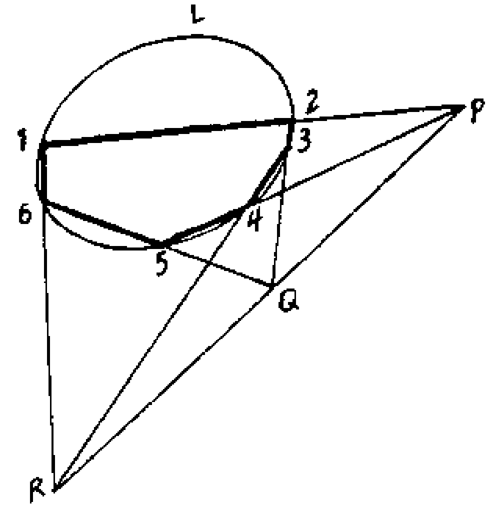


Hình 1

minh hết định lí này đến định lí khác. Trong các định lí đó, có định lí tổng các góc trong của một "thước thợ" bằng nửa tổng các góc trong của một "mặt bàn".

Êten Pat-scan bắt gặp con đang nghiên cứu. Sau khi nghe B. Pat-scan kể, ông đã sung sướng tới phát khóc khi biết con mình có thể sẽ trở thành nhà toán học lớn. Từ đó ông đã trao sách vở cho con đọc và hướng dẫn con nghiên cứu. Khi đó B. Pat-scan mới 12 tuổi.

13 tuổi, B. Pat-scan đã tham gia nhóm nghiên cứu toán. Ông tìm được người thày giáo tin cậy của mình là Đê-dac (1593 - 1662), kĩ sư, kiến trúc sư, người đã sáng lập môn hình học chiếu. Luận văn của Đê-dac



Hình 2

hồi đó rất ít người đọc tới. Nhưng B. Pat-scan đã nắm rất vững và phát triển lên. B. Pat-scan đã ứng dụng lí thuyết hình chiếu từ một tâm của Đê-dac vào việc nghiên cứu các tiết diện hình nón. Kết quả là vào năm 1640, B. Pat-scan đã công bố luận văn "về tiết diện hình nón", trong đó có định lí Pat-scan : *Giả sử trên tiết diện hình nón L* (ở hình 1, L là một parapôn ; ở hình 2, *P, Q, R là giao điểm của các cặp dường thẳng (1, 2) và (4, 5) ; (2, 3) và (5, 6) ; (3, 4) và (6, 1). Khi đó, P, Q, R sẽ nằm trên một dường thẳng.* (Với cách đánh số đơn giản nhất như ở hình 2 *L* là một êlíp), ta tùy ý chọn và đánh số 6 điểm. Gọi *P, Q, R* là các giao điểm của các cặp cạnh đối diện của lục giác). Định lí mà Pat-scan gọi là "lục giác thần kì" này dã được ông dùng như một chìa khóa để mở ra lí thuyết tổng quát về thiết diện hình nón, rộng hơn định lí của Apôlôniút.

Đê-dac đánh giá cao định lí này và gọi nó là "định lí lớn Pat-scan". Ông khẳng định nó đã bao hàm được cả bốn cuốn sách đầu của Apôlôniút.

Pat-scan đã rút ra được gần 400 hệ quả từ định lí của mình. Một trong những hệ quả khá quan trọng là : tiết diện hình nón được xác định duy nhất bởi 5 điểm bất kì của nó.

Công trình sau đây cũng không kém thú vị. Vào đầu năm 1640, gia đình Pat-scan chuyển về Ruan. Ở đó cha Pat-scan chuyển sang làm công tác tài chính. Cha Pat-scan phải tiến hành rất nhiều tính toán cồng kềnh mà Pat-scan phải giúp đỡ luôn. Cuối năm 1640, Pat-scan nảy ra ý định chế tạo máy tính. Ý nghĩ nảy ra rất nhanh và luôn thường trực trong đầu óc Pat-scan : "... mỗi trục hay mỗi bánh xe ở thứ tự nào đó sẽ gắn với 10 chữ số. Mỗi khi quay đi một vòng, chúng sẽ làm dịch chuyển một con số...". Nhưng ý nghĩ sáng sủa và rõ ràng mới là bước đầu. Để biến nó thành hiện thực còn phải tốn kém nhiều sức lực không thể lường được. Sau 5 năm lao động căng thẳng, Pat-scan mới chế tạo xong chiếc máy tính làm được bốn phép tính số học rất tin cậy tuy rằng không nhanh lắm. Nguyên liệu sử dụng là gỗ, ngà voi, thau, đồng. Người thời đó gọi nó là "bánh xe Pat-scan".

Chúng ta còn biết Pat-scan là một trong những người sáng lập ra môn thủy tĩnh học. Những thực nghiệm thiên tài đã đưa lại định luật Pat-scan nổi tiếng về sự cân bằng của chất lỏng. Định luật này ngay hồi đó đã được ứng dụng có hiệu quả, chẳng hạn việc chế tạo máy ép nhờ sức nước.

Và đây lại là một chuyện lí thú nữa. Vào năm 1651, Pat-scan nhận được một bức thư của Đơ Mere. Đơ Mere là một người học cao biết rộng nhưng cũng rất kiêu căng. Gặp bài toán : "deo hai con xúc xắc, tính số lần deo cần thiết để xác suất xuất hiện ít nhất một lần hai con 6 lớn hơn xác suất không lần nào xuất hiện hai con 6 cả". Đơ Mere giải bằng hai cách khác nhau và đi đến hai kết quả khác nhau : 24 và 25. Tin vào cả hai phương pháp giải, Đơ Mere đã nghi ngờ cả cơ sở toán học và biên thư cho Pat-scan. Pat-scan đã giải những bài toán phức tạp hơn và trao đổi những vấn đề này với Fecma. Những cuộc trao đổi đó đã làm nảy sinh một ngành toán học mới : lí thuyết xác suất. Vào năm 1654, trong thông báo của Viện hàn lâm khoa học Pari, Pat-scan đã liệt kê một loạt công trình sắp công bố của mình. Trong đó có một luận văn với tên đề làm mọi người phải ngạc nhiên : "Toán học của sự ngẫu nhiên".

Cũng vào năm này, Pat-scan công bố một trong những công trình phổ biến nhất : "Luận văn về tam giác số". Nhờ nó ta tính được một cách đơn giản các hệ số trong khai triển nhị thức Niutơn.

Nhưng vào cuối năm 1654 Pat-scan đã b một tai nạn lớn : Sau khi cha mất, chị gá Pat-scan bỏ đi tu, Pat-scan sống một mìn và trong một buổi đi lễ, khi qua một chiế cầu, bất thần hai con ngựa trước của cỗ x tứ mã đã hoảng sợ nhảy xuống sông làm chiếc xe lật tung trên cầu, Pat-scan chế ngất đi. Sau đó ông mắc bệnh thần kinh ngồi ở bàn cũng phải quây ghế bốn chung quanh vì sợ ngã. Ông chán chường tất cả và bỏ vào tu viện. Ở đây ông đã viết "những bức thư". Nó đã được đánh giá là một trong những tác phẩm vĩ đại nhất của nền văn học Pháp.

Những nghiên cứu khoa học của Pat-scan sau khi bị tai nạn hầu như đã bị đình trệ. Nhưng một năm rưỡi trong khoảng thời gian đó, Pat-scan lại có một loạt công trình toán học về đường xiclôit (đường do một điểm trên đường tròn lăn không trượt theo một đường thẳng tạo nên). Chuyện như sau : Đầu mùa xuân năm 1658 vào một đêm nào đó, Pat-scan bị đau răng. Cảm giác vô cùng đau đớn. Pat-scan đã nghĩ ra một cách chữa răng : tập trung tất cả suy nghĩ vào nghiên cứu toán học. Thế là một loạt bài toán về xiclôit được giải quyết và sáng hôm sau ông đã khỏi bệnh đau răng ! Tiếp theo nhiều công trình được hoàn thành và mãi sau theo lời khuyên của bè bạn ông mới tập hợp lại để công bố. Những bài toán về xiclôit do những người khác giải thường sử dụng những công cụ sơ cấp. Nhưng những bài toán do Pat-scan đặt và giải thường phức tạp hơn rất nhiều , trong đó Pat-scan đã đi rất gần đến phép tính vi phân và tích phân mà Niutơn và Lepnit đã chia nhau niềm vinh dự sáng lập ra nó.

Từ giữa năm 1659 do sức yếu và ảnh hưởng của nhà thờ, Pat-scan chấm dứt hẳn mọi nghiên cứu cả về vật lí lẫn toán học. Chúng ta có thể hiểu những ngày tháng này của ông qua bức thư sau đây ông gửi cho Fecma vào cuối năm 1660, khi Fecma mời ông lại chỗ mình :

"... Hiện nay tôi nghiên cứu những thứ quá xa với hình học, đến nỗi tôi khó có thể nhớ được điều gì về hình học... Mặc dù tôi biết ngài là một nhà toán học lớn nhất châu Âu, nhưng điều đó cũng chẳng lôi cuốn được tôi... Tôi thấy toán học là một thứ để luyện tập tốt cho trí tuệ, nhưng đồng thời tôi cũng thấy nó vô dụng. Tôi khó phân biệt một nhà hình học với một người làm nghề thủ công. Vì vậy tôi gọi nó là một nghề thủ công đẹp đẽ. Nhưng dù sao thì nó cũng chỉ là thủ công. Tôi thường nói nó chỉ để thử sức chứ không phải để dụng sức..." Những dòng cuối cùng, ông viết về tình trạng sức khỏe của mình : "Tôi yếu đến nỗi tôi không thể đi được mà không phải chống gậy, không thể leo lên thang gác, không thể ngồi xe ngựa quá hai dặm...".

Vào tháng 12–1660, Huy-ghen đã đến thăm Pat-scan hai lần, thấy Pat-scan là một ông già lụ khụ, không thể ngồi nói chuyện được (lúc đó Pat-scan mới 37 tuổi).

B. Pat-scan chết ngày 19-8-1662.

ĐẶNG HY

AL - KHÔREDƠMI

(Thế kỉ IX)

Nhà đại số học vĩ đại Udơbêch khoảng ba chục năm đầu của thế kỉ IX Muhamet ben Muxa Al – Khôređơmi đã làm lừng lẫy tên tuổi của mình bằng hai luận văn toán học : một về đại số là "Khixabơ al-giep Van-Mukabala" và một luận vản về số học mang tên "Số học".

Al-Khôredơmi là một nhà bác học xuất chúng về thời đó. Ông sống trong cung của chúa Al-Mamuna (813 – 833) là người bảo hộ rất am hiểu về khoa học. Theo ý kiến của vị chúa này, nhiều trước tác của các tác giả kinh điển cổ Hy-lạp và của các nhà bác học Ấn Độ đã được dịch ra tiếng Ả -rập. Cũng chính theo sự chỉ dẫn của Mamuna, Al – Khôredơmi đã thành lập một hợp tuyển gồm các bảng thiên văn của các nhà toán học Ấn Độ. Al – Khôredơmi đã có những sửa chữa cần thiết các bảng cát tuyến của Ptôlêmây để dùng trong thiên văn. Ngoài ra ông còn tham gia đo độ kinh tuyến trái đất và viết hàng loạt luận văn, trong số đó có "luận văn về dụng cụ đo góc" và "luận văn về đồng hồ mặt trời".

Trong luận văn nổi tiếng về đại số, Al-Khôredơmi có mục đích viết một tuyển tập ngắn gọn về các cách tính toán nhờ phương pháp "phục hồi" (al-dơgiep) và "so sánh" (Val-mukabala). Theo lời ông thì ông rất hài lòng về cách trình bày. Nó rất gọn nhẹ và dễ hiểu về mặt số học và gồm những vấn đề đụng chạm đến luôn trong các tính toán tiền nong, trao đổi buôn bán và trong việc đo đạc, tính toán ruộng đất v.v...

Vì vậy nó nhằm trình bày sơ giản những kiến thức cần thiết nhất có tính chất thực hành.

Trong tuyển tập này lần đầu tiên giải quyết vấn đề giải phương trình bậc nhất và bậc hai, trong đó tác giả xét sáu trường hợp :

1) $x^2 = ax$
2) $x^2 = a$
3) $ax = b$
4) $x^2 + ax = b$
5) $x^2 + a = bx$
6) $ax + b = x^2$

Cả sáu trường hợp, Al – Khôredơmi đều xét trong các thí dụ bằng số. Để giải phương trình tương tự, ông đề ra phương pháp "phục hồi" (al-dơgiep) và "so sánh" (val-mukabala). Chẳng hạn phương trình

$$x^2 - 5x - 12 = x - 14$$

bằng phép "al-dơgiep" chúng có dạng

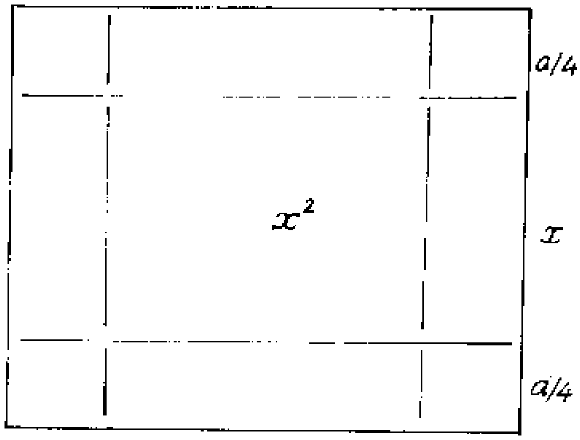
$$x^2 + 14 = x + 5x + 12$$

và sau phép "val-mukabala" đưa về dạng

$$x^2 + 2 = 6x$$

Do đó bằng hai phép toán chỉ ra ở trên phương trình đã cho được đưa về dạng "chuẩn". Trong trường hợp này nó là trường hợp thứ 5, tức là dạng

$$x^2 + a = bx$$



Để giải phương trình dạng đó, Al – Khôredơmi đã có một quy tắc phát biểu bằng lời mà dùng kí hiệu bây giờ ta có công thức.

$$x = b/a \pm \sqrt{b^2/4 - a}$$

Để giải phương trình bậc hai, có lẽ Al – Khôredơmi đã sử dụng hai công cụ là hình học và đại số. Công cụ hình học dựa trên sự so sánh các diện tích biểu diễn hình học phương trình đã cho. Chẳng hạn, để giải phương trình $x^2 + ax = b$, ông đã xét hình vuông lớn gồm bốn hình chữ nhật và năm hình vuông nhỏ. Kí hiệu S là diện tích của hình vuông xuất phát, ta có

$$S = x^2 + 4(a/4)^2 + 4\ (a/4)x =$$

$$(x^2 + ax) + 4(a/4)^2 = b + a^2/4$$

Mặt khác $S = (x + a/2)^2$. So sánh hai đẳng thức chúng ta nhận được

$$(x + a/2)^2 = b + a^2/4$$

$$x = -a/2 \pm \sqrt{b + a^2/4}$$

Một nhà toán học Ba-tư đã viết các phương pháp "al-đơgiep" và "Val-mukabala" thành những bài vè :

Al-đơgiep

Khi giải phương trình
nếu trong một vế
bất kì vế nào
Gặp một từ âm
cộng vào hai vế
một từ như thế
chỉ khác dấu thôi.
Dễ lắm bạn ơi.

*

* *

Val-mukabala

Bây giờ nhìn lại xem nào,
Những từ đồng dạng gộp vào, nhanh lên !
Việc so sánh cũng chẳng phiền
Bỏ phần giống ở hai bên phương trình.

Nói về luận văn "số học" của Al-khôredơmi thì nó là một nguồn truyền bá vào các nước Trung Cận Đông và châu Âu hệ tính thập phân do các nhà toán học Ấn Độ sử dụng trước đó.

Tất nhiên khó có thể đánh giá được các luận văn về đại số và số học của Al-Khôredơmi, vì cả hai đều đóng một vai trò rất lớn trong lịch sử không phải chỉ có toán học mà trong cả lịch sử văn hóa của loài người.

Để kết luận, cũng cần chú ý ràng danh từ "algeble" (đại số) là tên gọi quốc tế của một môn khoa học toán chính là xuất phát từ chữ "al-đơgiep", tức là tên bài luận văn của Al-Khôredơmi : "Khixabơ al-đơgiep Val-mukabala". Một điều thú vị nữa là từ "algơrít" (cách giải tổng quát một bài toán bất kì) không có gì khác chính là tên "Al-Khôređômi".

MẤY GIAI THOẠI VỀ CÁC NHÀ TOÁN HỌC

"Lời tiên đoán" ?

"Tôi không có tuổi ấu thơ, vì tôi đã học từ khi vừa biết nói. Tôi không có tuổi niên thiếu, vì tôi không có bạn đồng niên và không biết một trò chơi. Tôi không có tuổi thanh xuân, vì tôi thiếu nhất là tình yêu, và cuối cùng, tôi sẽ không có tuổi già, bởi vì tôi sẽ chết sớm !".

Urưxôn, nhà toán học thuộc loại chủ lực của một trường phái toán học Liên Xô người đã có nhiều công trình quan trọng, nhiều định lí nổi tiếng trong lĩnh vực đại số và tôpô..., khi còn rất trẻ đã tự nói về mình như vậy.

Một sự tình cờ : Urưxôn đã bị chết trong một lần đi tắm biển. Sóng biển xô anh vào đá. Khi đó anh mới 34 tuổi. Mọi người thương tiếc anh. Tuy nhiên, cũng không ít người nông nổi nói rằng anh đã "tiên đoán" trọn vẹn cuộc dời mình. Thực ra ở tuổi anh, với tình yêu khoa học, với những thành quả anh đã đạt được, không phải suy nghĩ nhiều, chắc các bạn trẻ yêu toán cũng đồng ý với tôi : lời "tiên đoán" của anh chỉ đúng một phần : anh không có tuổi già !

Chuyển động con lắc...

Nhà toán học, cơ học và vật lí học vĩ đại người Pháp Ximôn Đơni Poaxông, sinh năm 1781 tại thị trấn Pitiven. Mẹ của nhà toán học tương lai này chỉ vì sức khỏe quá kém đã phải gửi con mình cho một người vú em ở nông thôn, gần thị trấn.

Một lần cha Poaxông đến thăm con. Ông không gặp người vú em ở nhà (bà đi làm đồng). Ông đi vào nhà và hết sức kinh ngạc khi nhìn thấy cậu bé bị treo trên trần nhà ! Nhưng sau đó ông đã hiểu : người ta làm như thế để súc vật thả rông quanh nhà khỏi xông vào "ăn thịt" cậu bé, vì ngôi nhà nhỏ, cửa liếp quá yếu ớt.

Điều thú vị là Poaxông lại là người đầu tiên nghiên cứu phương trình toán học của chuyển động con lắc. Khi Poaxông đã thành một nhà khoa học, ông hay kể lại chuyện trên và nói đùa : "Không còn nghi ngờ gì nữa, tôi bị lắc từ bên này sang bên kia, và bằng cách đó, tôi đã bắt đầu nghiên cứu chuyển động con lắc !".

Cái hích ban đầu :

Ixăc Niutơn là nhà toán học và vật lí học thiên tài của Anh. Khi mới sinh ra Niutơn là một đứa trẻ ốm yếu, quặt quẹo, đến nỗi ai cũng nghĩ may lắm thì cậu cũng sống được vài tiếng đồng hồ. Người được cử đi lấy thuốc cũng dềnh dàng vì cho là vô ích, và khi về thấy Niutơn còn sống đã phải kêu lên vì kinh ngạc. Vậy mà ông đã thọ 85 tuổi, không hề rụng một cái răng. Chúng ta ai cũng biết về định luật quán tính của Niutơn. Theo ông thì nếu không có ma sát, vật nào đứng yên sẽ đứng yên mãi, còn vật nào chuyển động (do nhận được một "cái hích ban đầu") sẽ chuyển động mãi mãi. Trong Cơ học các thiên thể ông cũng xem các hành tinh như các bộ phận của một chiếc đồng hồ vĩ đại. Nhờ "Chúa" ban cho một "cái hích ban đầu" mà đi vào một chuyển động vĩnh cửu.

"Cái hích ban đầu" đã được sử dụng rộng rãi theo một nghĩa bóng : để có kết quả trong một lĩnh vực nào đó người ta cũng cần một "cái hích ban đầu", tức là một sức bật, một thành tích quyết định, v.v...

Điều thú vị là chính thiên tài của Niutơn có được cũng do một "cái hích ban đầu" theo nghĩa đen của từ này.

Hồi học ở trung học, lúc đầu Niutơn chỉ hay đọc chuyện văn học, kết quả học tập rất xoàng. Nhưng một lần, trong giờ giải lao, một học sinh nghịch ngợm đã tống vào bụng Niutơn một cái mạnh đến nỗi cậu bị ngất đi. Cảm giác cực kì đau đớn truyền khắp cơ thể, mắt hoa lên trong giây lát không nhìn thấy gì nữa, cậu lấy hết sức bình sinh nén sự đau đớn. Kẻ phạm lỗi đã không lấy làm xấu hổ, lại còn lấy làm khoái trá về cú đánh của mình và cười chế riễu Niutơn. Niutơn căm giận, muốn trả thù ngay, nhưng "kẻ thù" lại quá mạnh so với mình. Bực bội mãi, cuối cùng Niutơn nghĩ ra một cách trả thù rất thú vị : đối phương chính là người đang ngồi ở vị trí danh dự : "giỏi nhất lớp". Niutơn quyết định phải ngồi thay vào chỗ đó. Niutơn thực hiện kế hoạch không chê vào đâu được. Chỉ một tháng sau, cậu đã được khen trước lớp, được ngồi vào vị trí danh dự và cậu không rời bỏ chỗ đó nữa.

Công thức khai triển "nhị thức Niutơn" được chứng minh ngay hồi Niutơn học ở trường trung học phổ thông.

Chúc các bạn trẻ yêu toán tạo được cho mình một cái hích ban đầu, đương nhiên không phải cứ bằng một "cái hích vào bọng mỡ" như trường hợp của Niutơn.

ĐẶNG HẤN

VỀ LỊCH SỬ LƯỢNG GIÁC HỌC

Cũng như mọi khoa học và các phân môn khác của toán học, lượng giác học ra đời và phát triển do những nhu cầu của đời sống.

Nảy sinh từ sự cần thiết phải đo lại ruộng đất sau những trận lụt hàng năm ở sông Nin, hình học thời cổ Ai Cập cách đây 4000 năm đã đạt tới một trình độ đáng lưu ý. Nó cũng đã được ứng dụng vào việc xây dựng Kim Tự Tháp, một kì quan của thế giới. Với sự phát triển của hình học, lượng giác học đã hình thành. Trong những tài liệu toán học của người cổ Ai Cập còn thấy cả những yếu tố tiền thân của lượng giác học, chẳng hạn tỉ số những độ dài của những đoạn thẳng ở những hình chóp.

Ở Trung Hoa, những kiến thức hình học và lượng giác cũng đã nảy nở sớm. Ngay từ khoảng năm 1100 trước công lịch người ta đã tạo những góc vuông bằng cách dùng tam giác có các cạnh 3, 4, 5 đơn vị, đã xác định chiều cao nhờ đo bóng, đã tính chiều sâu và khoảng cách nhờ những tam giác vuông. Tiếc rằng nền toán học sớm của Trung Quốc còn để lại ít dấu vết vì tất cả những sách và tài liệu văn hóa của nước này đã bị Tần Thủy Hoàng ra lệnh thiêu hủy.

So với toán học Ai Cập thì toán học Babilon, trong đó có hình học và lượng giác, đã đạt tới một trình độ cao hơn. Hiện nay còn giữ lại được những tài liệu về những vấn đề toán học khoảng 5000 năm về trước. Ở Mêsôpôtami, một vùng nằm giữa sông Ophơrát và sông Tigơrơ, do phải xây dựng những con đê phục vụ nông nghiệp, người ta phải tính độ dốc của thành đê và chiều rộng của mặt đê. Trong những tính toán này, tỉ số độ dài của những đoạn thẳng đóng một vai trò quan trọng.

Những vấn đề nảy sinh trong thực tế đã dẫn tới những kiến thức toán học. Sự tỉ lệ của các cạnh tương ứng trong những tam giác đồng dạng và định lí Pitago đã được phát hiện. Toán học Babilon cũng đã liên hệ chặt chẽ với thiên văn học. Mặc dầu thiên văn học Babilon thời đó liên quan nhiều với mê tín dị đoan nhưng cũng đã đạt được một số kiến thức thiên văn thật sự. Những quan sát hàng nhiều trăm năm đã cho thấy tính chu kì của những hiện tượng trong bầu trời, đặc biệt là sự lặp lại một cách có quy luật của hiện tượng nhật thực và nguyệt thực. Hiện vẫn còn giữ lại được những bảng tính những quá trình thiên văn có tính chu kì. Nếu biểu thị những giá trị số này trong một hệ trục tọa độ (điều này thiên văn học thời đó chưa làm) thì được một đường sin.

Khoảng năm 1900 trước công lịch, những nước nội địa như Ai Cập và Mêsôpôtami đã không còn tạo được những điều kiện thuận lợi nhất cho kinh tế và khoa học nữa. Vai trò này đã chuyển sang những nước ở ven biển do sự phát triển của ngành đóng tầu.

Nhờ liên hệ mật thiết với Mêsôpôtami và Ai Cập, toán học Hi Lạp đã tiếp nhận rất nhiều công trình khoa học và đã đi tới những nhận thức mới. Talét (624 ? – 548 ? trước công lịch) đã đo chiều cao của những cái tháp bằng cách đo bóng của chúng vào lúc bóng của ông vừa đúng bằng bản thân ông. Ông cũng đã tính khoảng cách từ tầu thủy đến cảng nhờ những tam giác đồng dạng. Về sau toán học Hy Lạp đã phát triển đến một trình độ đáng ngạc nhiên. Tuy nhiên dần dần nó rơi vào ảnh hưởng của triết học duy tâm, đặc biệt là của trường phái Pơlatông và do đó bị đứt liên hệ với thực tế. Trong xã hội chiếm hữu nô lệ mọi hoạt động thực tế bị coi là ít giá trị và người ta cho rằng không cần thiết phải ghi chép lại những phương pháp của toán thực tế, trong đó có lượng giác học.

Vào những thế kỉ cuối trước công lịch, yêu cầu đối với khoa trắc địa tăng lên. Những sự đo đạc này thúc đẩy khoa thiên văn. Do đó lượng giác học, với tư cách là công cụ toán học quan trọng, cũng có những tiến bộ.

Aritxtacốt (khoảng năm 270 trước công lịch) đã thử đo tỉ số khoảng cách trái đất – mặt trăng với khoảng cách trái đất – mặt trời theo con đường lượng giác bằng cách đo góc giữa mặt trăng, trái đất và mặt trời lúc bán nguyệt thực. Do dụng cụ thời đó chưa được tốt, ông nhận được tỉ số 1 : 19 trong khi giá trị đúng là 1 : 370.

Việc biến đổi lượng giác có sử dụng các tỉ số sin, cosin, tang và cotang ở tam giác vuông đã được những nhà học giả Ả–rập tiến hành vào thế kỉ thứ 9. Trong khi ở châu Âu khoa học bị kìm hãm do ảnh hưởng của nhà thờ Giatô giáo thì nền văn hóa Ả–rập nở rộ, trong đó toán học đặc biệt là đại số và lượng giác rất được khuyến khích phát triển. Abu Nát (khoảng năm 1000) đã tìm ra định lí hàm số sin trong lượng giác phẳng. Át – Tút (1201 – 1274) là người đầu tiên đã tập hợp tất cả những thành tựu của lượng giác học thành một tòa lâu đài hoàn chỉnh. Người ta đã tính được cả những bảng thiên văn và lượng giác rất phức tạp, chẳng hạn Ulúc Béc (1392 – 1449) đã lập bảng hàm số lượng giác với độ chính xác tới 17 chữ số thập phân.

Lượng giác học và thiên văn học Ấn Độ cũng đã đạt tới một trình độ cao tương tự.

Đến thế kỉ 15 toán học châu Âu đuổi, kịp và vượt nền toán học cổ Hi Lạp và La Mã ít nhất là ở một số bộ phận. Những kết quả mới đã đạt được là do đời sống xã hội đã đặt ra những vấn đề mà việc giải quyết chúng đòi hỏi phải sử dụng những phương pháp toán học mới. Điều này cũng xảy ra cả trong lượng giác học.

Trong xã hội phong kiến đã phát triển một giai cấp mới, giai cấp tư sản. Giai cấp này khuyến khích thương mại, mở rộng thị trường ở hải ngoại. Dường biển tới Ấn Độ và một châu mới đã được phát hiện. Tầu thuyền đi lại trên biển cả đòi hỏi một trình độ cao về thiên văn học và lượng giác học.

Cả thiên văn học cũng đặt ra cho lượng giác học những yêu cầu cao. Bằng cách đo đạc trong bầu trời nhờ những công cụ thiên văn đã được cải tiến, người ta nhận thấy rằng quan niệm của Potôlêmê về địa tâm hệ (trái đất là trung tâm) là không đúng. Với tác phẩm khoa học "Về sự quay của các thiên thể" mà trong đó nhật tâm hệ (mặt trời là trung tâm) được lập luận, nhà bác học Ba Lan Côpécních (1473 – 1543) đã tạo nên bước quyết định cho sự phát triển của thiên văn học.

Việc trang bị đại bác cho quân đội cũng đòi hỏi cấp bách sự phát triển của ngành trắc địa và do đó của lượng giác học. Để bắn đại bác trúng mục tiêu, người ta cần những phương pháp đo chính xác những khoảng cách trên mặt đất.

Do những yêu cầu thực tế đó và cả những yêu cầu thực tế khác nữa, lượng giác học đã phát triển rất nhanh vào thế kỉ 15, 16 và 17. Iohanet Phôn Gơmunden (1380 ? – 1442) và tiếp theo là Giêoóc Phôn Poibắc (1423 – 1461) đã tiến hành tính bảng lượng giác mở rộng. Công trình phức tạp này cuối cùng đã được Rêghiômôntan (1436 – 1476) hoàn thành. Rêghiômôntan là một nhà toán học lỗi lạc của châu Âu thời đó. Trong công trình "Năm cuốn sách về tất cả các tam giác" mà mãi đến năm 1533 mới được in, ông đã thâu tóm tất cả các phương pháp, định lí và bảng lượng giác mà thời đó đã đạt được. Nhờ Rêghiômôntan lượng giác học ở châu Âu đã trở thành một khoa học nhất quán và về mặt nội dung toán học nó đã đạt tới trình độ như ngày nay.

Về sau những bảng lượng giác còn được cải tiến tốt hơn hẳn nhờ các nhà toán học Lêticút (1514 – 1576), Viét (1540 – 1603) và nhà thiên văn học lớn Iôhannét Kêpơle (1571 – 1630). Những tên gọi và kí hiệu mà hiện nay dùng trong lượng giác học thì mãi sau này mới được đưa vào. Về căn bản người ta sử dụng những tên gọi kí hiệu do nhà toán học thiên tài người Thuỵ sĩ là Lêôna Ơle (1707 – 1783) đã đặt ra : π là số đo độ dài nửa đường tròn đơn vị, a, b, c là kí hiệu các cạnh của một tam giác : sin, cos, tang là kí hiệu những hàm số lượng giác.

NGUYỄN BÁ KIM

LÊÔNA ƠLE

(1707 - 1783)

Sử sách đã ghi lại ngày 18 tháng 9 năm 1783, ngày thiên tài toán học Lêôna Ơle ngừng làm toán và cũng là ngày ông từ trần. Nhưng tên tuổi và sự nghiệp của Ơle vẫn còn sống mãi với khoảng 50 công thức, phương trình, định lí, con số và những kí hiệu toán học được mang tên ông.

Lêôna sinh ngày 15 tháng 4 năm 1707 tại Benơden. Thuỵ sĩ. Nghề nghiệp của người cha và các bài giảng của Giôhan Becnuli đã dẫn Ơle đến với toán học. Năm 20 tuổi (1727), Lêôna Ơle đến làm việc ở Viện Hàn lâm khoa học Pêtecbua, vừa mới thành lập và là nơi thu hút các tài năng trẻ của trung và tây Âu đến làm việc. Tám năm sau (1735), khi Viện Hàn lâm Pêtecbua phải tiến hành những tính toán thiên văn để thiết lập bản đồ, Ơle đã dám nhận với thời hạn 3 ngày một khối lượng công việc mà các viện sĩ cho rằng phải cần mấy tháng mới làm được, và ông đã hoàn thành công việc với thời hạn làm mọi người kinh ngạc : một ngày một đêm ! Tuy vậy, để có được một kì công như thế, ông đã phải làm việc hết sức tập trung và cực kì căng thẳng, cho nên ông bị hỏng mất mắt phải. Với một mắt còn lại, Ơle vẫn làm việc say sưa với năng suất không hề giảm sút.

Năm 1741 ông trở về làm việc ở Viện Hàn lâm khoa học Beclin (Đức) theo yêu cầu của vua Friedrich đệ nhị. Ở đây ông đã cống hiến toàn lực cho khoa học, ngày đêm miệt mài nghiên cứu và sáng tạo, tham gia công tác lãnh đạo giới toán học, đóng góp trong công tác tổ chức và cả trong những công việc quản lí, hành chính.

Ở Beclin Ơle vẫn duy trì quan hệ chặt chẽ với Viện Hàn lâm Pêtecbua. Chính M. V. Lômônôxôp, nhà bác học Nga trẻ tuổi và tài năng, "người cha của nền khoa học Nga", đã được Ơle thư từ trao đổi, dìu dắt và được tiếp nhận tới Beclin.

Trong thời gian này Ơle làm việc rất có kết quả và đã trở thành nhà toán học bậc thầy của châu Âu.

Năm 1766 Lêôna Ơle đến Pêtecbua lần thứ hai theo một thỏa thuận với Nữ hoàng Nga Katêrina đệ nhị. Bốn năm sau (1770), do ngày đêm làm toán quên mình, con mắt còn lại của Ơle bị hỏng nốt.

Tiếp theo đó một loạt bất hạnh đã xảy đến với Ơle : nhà cháy, mất sạch của cải, người vợ thân yêu của ông qua đời ! Song những tổn thất vật chất và tinh thần đó cùng với sự giảm sút sức khoẻ của tuổi già vẫn không ảnh hưởng tới sức sáng tạo và năng suất lao động của Ơle. Ông đọc cho người khác viết hết công trình này đến công trình khác. Từ năm 1766 cho đến lúc qua đời ông đã để lại 416 công trình, tức trung bình 25 công trình mỗi năm (trước đó từ 7 đến 14 công trình mỗi năm). Khi ông mất, số công trình chưa công bố của ông để lại đã được đăng trên tạp chí của Viện Hàn lâm đến 80 năm sau mới hết, gấp 4 lần con số mà chủ tịch Viện Hàn lâm Pêtecbua đã có lần yêu cầu ông trước lúc ông qua đời.

Những công trình của Ơle đề cập đến hầu hết các lĩnh vực của toán học thời bấy giờ và đến nhiều ngành khoa học và kĩ thuật khác. Theo nhà nghiên cứu lịch sử tên tuổi Liên Xô A.P. Yuskêvich, 40% nghiên cứu của Ơle dành cho đại số, lí thuyết số và giải tích, 18% cho hình học, 28% cho cơ học và vật lí, 11% cho thiên văn. Phần còn lại dành cho lí thuyết đường đạn hàn đồ, tàu thuyền và xây dựng, lí thuyết âm nhạc, thần học và triết học. Năm 1911, ở quê hương ông, toàn bộ những công trình của ông được in thành bộ sách với tên đề "Leonhardi Euleri Opera Omnia" gồm 85 quyển cỡ lớn và gần 40.000 trang. Sự xuất bản này là một đài kỉ niệm văn hóa xứng đáng với công lao to lớn của thiên tài toán học Ơle.

Ở chương trình phổ thông, chúng ta đã biết đến tên tuổi Ơle qua "đường thẳng Ơle, đường tròn Ơle" (đường tròn 9 điểm) trong tam giác, định lí Ơle về liên hệ giữa số đỉnh, cạnh và mặt trong một đa diện lồi, v.v... Chúng ta đã và đang làm toán với những kí hiệu của Ơle : số π, số i $(= \sqrt{-1})$, sin, cos, tg, cotg, Δx (số gia), $\sum$(tổng) $f(x)$ hàm f của x), v.v...

Những thành tựu sâu sắc, phong phú và muôn vẻ của Lêôna Ơle là những minh hoạ tuyệt vời cho nhận định : "Toán học chỉ cho ta những phương pháp hoặc những con đường dẫn tới chân lí. Toán học làm cho những chân lí ẩn khuất nhất trở thành minh bạch và phơi bày chúng ra trước ánh sáng. Một mặt toán học làm giàu sự hiểu biết của chúng ta, mặt khác nó làm cho suy nghĩ của chúng ta thêm sâu sắc".

Cuộc đời của Lêôna Ơle là một tấm gương sáng chói về tinh thần lao động sáng tạo không biết mỏi. Đối với Ơle, làm toán cũng tự nhiên và cần thiết cho đời sống như là thở hút khí trời vậy. Sống là lao động sáng tạo, sống là làm toán, và ông chỉ ngừng làm toán khi trái tim ngừng đập.

NGÔ ĐẠT TỨ

Phần thứ hai

CÁC BÀI TOÁN CHỌN LỌC

A - ĐỀ TOÁN

§1. Phương trình, bất phương trình và hệ

Bài toán 1.

T7/182. Hãy xác định các giá trị a, b, c để hệ

$$\begin{cases} ax^2 + bx + c \leq 0 \\ bx^2 + cx + b \leq 0 \\ cx^2 + ax + b \leq 0 \end{cases}$$

có nghiệm duy nhất.

Bài toán 2.

T5/115. Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} ax_1^2 + bx_1 + c = x_2 \\ ax_2^2 + bx_2 + c = x_3 \\ \dots \\ ax_{n-1}^2 + bx_{n-1} + c = x_n \\ ax_n^2 + bx_n + c = x_1 \end{cases}$$

với $a \neq 0$. Tìm điều kiện cần và đủ đối với a, b, c để hệ vô nghiệm, có nghiệm duy nhất, có nhiều hơn một nghiệm.

Bài toán 3.

T8/160. Giải phương trình

$$(2 + \sqrt{2})^{\sin^2 x} - (2 + \sqrt{2})^{\cos^2 x} + (2 - \sqrt{2})^{\cos 2x} = \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\cos 2x}$$

Bài toán 4.

T7/163. Giải và biện luận phương trình

$$\frac{a - b\cos x}{\sin x} = \frac{2\sqrt{a^2 - b^2}\,\mathrm{tg}y}{1 + \mathrm{tg}^2 y}$$

trong đó x, y là ẩn số, còn a, b là tham số.

Bài toán 5.

T7/164. Giải phương trình

$$\cos x - 3\sqrt{3}\sin x = \cos 7x$$

Bài toán 6.

T5/173. Cho số tự nhiên $n \geq 2$. Chứng minh rằng phương trình

$$\frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \dots + \frac{x^2}{2!} + x + 1 = 0$$

không có nghiệm hữu tỉ.

Bài toán 7.

T7/173. Cho bất phương trình

$$a^3|x| \leq \sqrt{3}\,(a^2 - y^2).$$

Hãy xác định a sao cho số cặp số nguyên (x, y) nghiệm đúng bất phương trình là nhỏ nhất.

Bài toán 8.

T7/174. Cho đa thức $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ có n nghiệm thực. Chứng minh rằng, với mọi $b > n - 1$ đa thức

$$g(x) = a_0 + a_1bx + a_2b(b-1)x^2 + \dots + a_nb(b-1)\dots(b-n+1)x^n$$

cũng có n nghiệm thực.

Bài toán 9.

T4/142. Giải và biện luận hệ phương trình sau theo các tham số a, b :

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + \sqrt[3]{x^4y^2}} + \sqrt{y^2 + \sqrt[3]{x^2y^4}} = a \\ \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = b \end{cases}$$

Bài toán 10.

T5/146. Chứng minh rằng, với mọi cặp đa thức $P(x)$ và $Q(x)$ với hệ số thực mà ít nhất một trong hai đa thức đó có bậc lớn hơn hoặc bằng 1 thì tồn tại $x_0 \in [0, 1]$ sao cho $P(\sin x_0) \neq Q(x_0)$.

Bài toán 11.

T3/147. Hãy xác định a để bất phương trình sau

$$\log_a 11 + \log_{\frac{1}{2}} \sqrt{ax^2 - 2x + 3} \times$$
$$\times \log_a(\sqrt{ax^2 - 2x + 1} + 1) \leq 0$$

có nghiệm duy nhất.

Bài toán 12.

T5/152. Giải phương trình

$$\mathrm{tg}^2x + \mathrm{tg}^2 2x + \mathrm{cotg}^2 3x = 1.$$

Bài toán 13.

T8/154. Giải phương trình

$$\cos x\cos 2x\cos 3x + \sin x\sin 2x\sin 3x = 1.$$

Bài toán 14.

T5/155. Giải phương trình sau trong khoảng (0, 1) :

$$32x(x^2 - 1)(2x^2 - 1)^2 = 1 - \frac{1}{x}.$$

Bài toán 15.

T8/155. Giải và biện luận hệ phương trình

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = \sin \alpha \\ \sin^2 x + \sin^2 y = \cos^2 \alpha \\ \sin^4 x + \sin^4 y = \cos 2\alpha \end{cases}$$

Bài toán 16.

T5/156. Giải bất phương trình

$$\sqrt{2x^3 + 3x^2 + 6x + 16} > 2\sqrt{3} + \sqrt{4 - x}.$$

Bài toán 17.

T6/159. Cho phương trình

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1 = 0$$

có nghiệm. Chứng minh rằng

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{4}{3}.$$

Bài toán 18.

T7/157. Giả sử các hàm số f, g : $(0, +\infty) \to (0, +\infty)$ liên tục và thỏa mãn điều kiện : với mọi $x > 0$ mà $g(x) \neq x$, ta đều có $f(g(x)) = 1 \Leftrightarrow f(x) \neq 1$. Chứng minh rằng, tồn tại $x_0 > 0$ sao cho $g(x_0) = x_0$.

§2. Đẳng thức, bất đẳng thức và các bài toán cực trị

Bài toán 19.

T3/114. Xét dãy số $\left\{1, \frac{1}{2}, ..., \frac{1}{n}\right\}$. Giả sử $(a_1, a_2, ..., a_n)$ và $(b_1, b_2, ..., b_n)$ là hai hoán vị của dãy số trên và thỏa mãn điều kiện

$$a_1 + b_1 \geq a_2 + b_2 \geq ... \geq a_n + b_n. \quad (*)$$

1) Chứng minh bất đẳng thức : $a_k + b_k < \frac{4}{k}$ $\forall k \in \{1, ..., n\}$.

2) Chứng minh rằng, với mỗi số $c > 1$ luôn luôn tìm thấy ít nhất một số tự nhiên n sao cho có hai hoán vị $(a_1, a_2, ..., a_n)$ và $(b_1, b_2, ..., b_n)$ thỏa mãn điều kiện (*) để bất đẳng thức $a_k + b_k > \frac{4 - c}{k}$ đối với ít nhất một giá trị $k \in \{1, 2, ..., n\}$.

Bài toán 20.

T5/114. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$f(x, y) = \frac{a\sin^4x + b\cos^4y}{c\sin^2x + d\cos^2y} + \frac{a\cos^4x + b\sin^4y}{c\cos^2x + d\sin^2y},$$

trong đó a, b, c, d là các hằng số dương.

Bài toán 21.

T6/120. Xét đa thức với hệ số thực $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ thỏa mãn điều kiện $|f(x)| \leq \alpha$ $\forall x \in [-1, 1]$ với $\alpha > 0$ cho trước. Tìm giá trị lớn nhất của $|a|$, $|b|$, $|c|$, $|d|$.

Bài toán 22.

T7/127. Tìm điều kiện đối với α, β, γ, α_1, β_1, γ_1 để hàm số :

$$y = \frac{\alpha\cos x + \beta\sin x + \gamma}{\alpha_1\cos x + \beta_1\sin x + \gamma_1}$$

có đồng thời giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất.

Bài toán 23.

T7/124. Cho $f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ với a, b, c là các số thực và $D = ac - b^2 > 0$. Chứng minh rằng, tồn tại cặp số nguyên không âm u, v thỏa mãn các điều kiện sau

1) $u^2 + v^2 \neq 0$

2) $|f(u, v)| \leq 2\sqrt{\frac{D}{3}}$.

Bài toán 24.

T8/83. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$M = \frac{\sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z}{\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z}$$

trong đó x, y, z là ba góc của một tam giác.

Bài toán 25.

T10/87. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \cos 3x + \cos 3y - \cos 3z,$$

trong đó x, y, z là ba góc của một tam giác.

Bài toán 26.

T6/86. Chứng minh rằng, nếu α, β là các góc nhọn của một tam giác vuông thì

$$\frac{\cos^6\alpha}{\alpha} + \frac{\cos^6\beta}{\beta} \geq \frac{1}{\pi}.$$

Bài toán 27.

T4/130. Cho $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ là một hoán vị của dãy số $(1, 2, \ldots, n)$. Tìm tất cả các giá trị có thể có của

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} |a_i - i|.$$

Bài toán 28.

T135/66. Trong một hình tròn diện tích S lấy 17 điểm tùy ý. Chứng minh rằng ít nhất có ba điểm là ba đỉnh của một tam giác có diện tích nhỏ hơn $S/8$. Nếu ta lấy n điểm bất kì thì kết quả sẽ ra sao ?

Bài toán 29.

T2/34. Tìm ba góc x, y, z của một tam giác sao cho $\cot g x + \cot g y + \cot g z$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài toán 30.

T77/65. Chứng minh rằng, nếu α, β, γ là ba góc của một tam giác nhọn thì

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma + \mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta + \mathrm{tg}\gamma > 2\pi.$$

Bài toán 31.

T85/65. Chứng minh rằng

$$\sin\cos\alpha < \cos\sin\alpha.$$

Bài toán 32.

T127/66. Chứng minh rằng

$$\mathrm{tg}^n A + \mathrm{tg}^n B + \mathrm{tg}^n C \geq 3 + \frac{3n}{2}$$

với A, B, C là ba góc của một tam giác nhọn và $n \in N$.

Bài toán 33.

T9/179. Cho tam giác ABC thỏa mãn điều kiện

$$(\mathrm{tg}A + \mathrm{tg}B + \mathrm{tg}C)(\mathrm{cotg}A + \mathrm{cotg}B + \mathrm{cotg}C)$$
$$= \left(\mathrm{tg}\frac{A}{2}+\mathrm{tg}\frac{B}{2}+\mathrm{tg}\frac{C}{2}\right)\left(\mathrm{cotg}\frac{A}{2}+\mathrm{cotg}\frac{B}{2}+\mathrm{cotg}\frac{C}{2}\right).$$

Chứng minh rằng ΔABC là tam giác đều.

Bài toán 34.

T7/176. Cho x, y, z là ba số dương thỏa mãn điều kiện : $xy \geq (x + y)z$. Chứng minh rằng

$$x\cos A + y\cos B + z\cos C < x + y + z,$$

với A, B, C là ba góc của một tam giác.

Bài toán 35.

T8/176. Các góc A, B, C của ΔABC thỏa mãn điều kiện

$$\cos\left(A-\frac{B}{2}\right) + \cos\left(B-\frac{C}{2}\right) + \cos\left(C-\frac{A}{2}\right) =$$
$$= 4\cos\left(A-\frac{B}{2}\right)\cos\left(B-\frac{C}{2}\right)\cos\left(C-\frac{A}{2}\right).$$

Chứng minh rằng ΔABC là tam giác đều.

Bài toán 36.

T9/178. A, B, C là ba góc của một tam giác. Chứng minh rằng

$3(\sin A\sin 2A + \sin B\sin 2B + \sin C\sin 2C)$

$\leq (\sin A + \sin B + \sin C)(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C)$.

Bài toán 37.

T10/178. Chứng minh rằng ΔABC là tam giác đều nếu

$$\frac{1}{\cos A} + \frac{1}{\cos B} + \frac{1}{\cos C} = \frac{1}{\sin\frac{A}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{B}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{C}{2}}.$$

Bài toán 38.

T5/147. Xét các số thực $x_1, x_2, ..., x_{1986}$ thỏa mãn điều kiện

$$\frac{\pi}{6} \leqslant x_1, x_2, ..., x_{1986} \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$y + (\sin x_1 + \sin x_2 + ... + \sin x_{1986})\left(\frac{1}{\sin x_1} + \frac{1}{\sin x_2} + ... + \frac{1}{\sin x_{1986}}\right).$$

Bài toán 39.

T6/148. Kí hiệu M là tập hợp gồm tất cả các tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ có $a > 0$, $\Delta = b^2 - 4ac \leqslant 0$. Tìm điều kiện cần và đủ đối với α, β, γ để với mọi $f(x) \in M$, ta đều có

$$g(x) = f(x) + \alpha(ax + b) + \beta(bx + c) + \gamma(cx + a)$$

cũng thuộc M.

Bài toán 40.

T6/132. Cho số nguyên $n \geqslant 2$. Chứng minh rằng, nếu có

$$a_1\cos^2 x + a_2\cos^2 2x + ... + a_n\cos^2 nx \geqslant 1, \quad \forall x \in R$$

thì

$$a_1 + a_2 + ... + a_n \geqslant \frac{2n}{n-1}.$$

Bài toán 41.

T8/138. Cho $2n$ số dương $m_1, m_2, ..., m_n$; $a_1, a_2, ..., a_n$. Chứng minh rằng

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i^k}{a_i^m} \geqslant \frac{1}{n^{k-m-1}}\frac{\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right)^k}{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^m} \quad \forall k, m \in N.$$

Bài toán 42.

T3/150. Cho $0 < a_1 \leqslant a_2 \leqslant ... \leqslant a_n$ và $a_n a_{\left[\frac{n+1}{2}\right]} \leqslant 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{n}{1 + \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i}} \geqslant \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1 + a_i}.$$

Bài toán 43.

T2/152. Cho các số thực $x_0, x_1, ..., x_{n+1}$ thỏa mãn các điều kiện

1) $0 = x_0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 ... \leqslant x_n \leqslant x_{n+1} = 1$

2) $\displaystyle\sum_{j=0, j\neq i}^{n+1} \frac{1}{(x_i - x_j)} = 0 \ \forall i \in \{1, 2, ..., n\}$.

Chứng minh rằng

$$x_{n+1-i} = 1 - x_i \ \forall i \in \{1, 2, ..., n\}$$

Bài toán 44.

T9/157. Cho n góc $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ thỏa mãn các điều kiện : $\alpha_i \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \ \forall i \in \{1, 2, ..., n\}$

và $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \pi$. Chứng minh rằng

$$\left(n - \sum_{i=1}^{n} tg^2\alpha_i\right)\left(n + \sum_{i=1}^{n} tg^2\alpha_i\right) \leqslant \cos\frac{2\pi}{n}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi nào ?

Bài toán 45.

T7/159. Cho hàm số $f : Z^+ \to R^+$ thỏa mãn các điều kiện

1) $f(x) = 0 \leftrightarrow x = 0$

2) $f(xy) = f(x)f(y) \ \forall x, y \in Z^+$

3) $f(x + y) = f(x) + f(y) \ \forall x, y \in Z^+$.

Gọi n_0 là số nguyên dương bé nhất trong các số nguyên dương m thỏa mãn điều kiện $f(m) > 1$. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n ta đều có bất đẳng thức sau

$$f(n) < \frac{(f(n_0))^{1 + [\log_{n_0} n]}}{f(n_0) - 1}.$$

($[a]$ là phần nguyên của số thực a).

Bài toán 46.

T5/160. Gọi m, n, p là 3 nghiệm thực của phương trình $ax^3 + bx^2 + cx - a = 0$, $a \neq 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{\sqrt{2}}{m} + \frac{\sqrt{3}}{n} - \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{p} \leqslant m^2 + n^2 + p^2.$$

Dấu "=" xảy ra khi nào ?

Bài toán 47.

T10/136. a, b, c là độ dài các cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng

$$\left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{\cot gA + \cot gB + \cot gC}\right)^3 \leqslant \frac{a^2b^2c^2}{tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2}}.$$

Bài toán 48.

Bt T6/74. Chứng minh rằng

$$(n+1)\cos\frac{\pi}{n+1} - n\cos\frac{\pi}{n} > 1,\ \forall n \geqslant 2.$$

Bài toán 49.

T8/74. a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác thỏa mãn hệ thức $a^2 + b^2 - c^2 = 4R^2$. Chứng minh rằng

$$\frac{\mathrm{tg}A\,\mathrm{tg}B + 1}{\mathrm{tg}A\,\mathrm{tg}B - 1} = \mathrm{tg}^2 C.$$

Bài toán 50.

T7/101. Với n là số tự nhiên và $0 < (n+1)x < \frac{\pi}{2}$. Chứng minh rằng

$$(1 - \cos^n x)(1 + \cos^n x) < \mathrm{tg}nx\,\mathrm{tg}x.$$

Bài toán 51.

T5/112. Chứng minh rằng trong tứ giác $ABCD$ các hệ thức sau là tương đương :

1) $\cos A + \cos B + \cos C + \cos D = 0$

2) $\mathrm{cotg}A + \mathrm{cotg}B + \mathrm{cotg}C + \mathrm{cotg}D = 0$.

Bài toán 52.

T5/111. Tính giá trị của biểu thức

$$A = (\sin x + \sin 2x + \sin 4x)^5 - (\sin x + \sin 2x + \sin 4x)^5 - (\sin 2x + \sin 4x - \sin x)^5 - (\sin 4x + \sin x - \sin 2x)^5,$$

với $x = 20^\circ$.

Bài toán 53.

T7/132. Cho ΔABC. Đường phân giác AA_1 của góc A cắt các đường trung tuyến CC_1 và BB_1 tại M và N. Gọi G là trọng tâm của ΔABC. Đặt $AA_1 = l_a$, $BB_1 = m_b$, $CC_1 = m_c$, $AC = b$ và $AB = c$. Chứng minh rằng khi $b \geqslant c$ thì :

1) $MN \geqslant \dfrac{4}{9}\dfrac{l_a(b-c)}{b+c}$,

2) $\dfrac{GN.GM}{NM} = \dfrac{4}{9}\dfrac{m_b m_c(b-c)}{l_a(b+c)}$.

Bài toán 54.

T9/168. Chứng minh rằng ΔABC đều khi và chỉ khi

$$\cos A + \cos B + \cos C + \cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = 0.$$

Bài toán 55.

T9/171. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để ΔABC đều là

$$\cos(A - B) + \cos(B - C) + \cos(C - A) = 2(\cos A + \cos B + \cos C).$$

Bài toán 56.

T6/147. Chứng minh rằng

$$(\mathrm{cotg}x)^{\cos 2x} \geqslant \frac{1}{\sin 2x},\ \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Bài toán 57.

T7/152. Cho tam giác có độ dài ba cạnh là a, b, c ; còn độ dài bán kính đường tròn ngoại tiếp là R. Gọi S và p là diện tích và nửa chu vi của tam giác đó. Chứng minh rằng

$$4S^2 \leqslant a^2(p-b)(p-c) + b^2(p-a)(p-c) + c^2(p-a)(p-b) \leqslant p^2R^2.$$

Bài toán 58.

T9/108. Tìm tất cả các dãy số nguyên không giảm $x_1, x_2, \ldots, x_{1979}$ gồm 1979 số hạng thỏa mãn điều kiện sau :

1) $1 \leqslant x_i \leqslant 1964$, $\forall i = \overline{1,1979}$,

2) Biểu thức $P = \dfrac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{1979}^2}{(x_1 + x_2 + \ldots + x_{1979})^2}$

đạt giá trị lớn nhất.

Bài toán 59.

T6/110. Cho n là một số nguyên dương. Chứng minh rằng

$$7 < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n+1} \leqslant 8.$$

Bài toán 60.

T5/130. Cho n số thực $x_1, x_2, \ldots, x_n$ thỏa mãn điều kiện : $0 \leqslant x_i \leqslant 1$, $\forall i = \overline{1,n}$. Đặt :

$$T = x_1 + x_2 + \ldots + x_n - x_1x_2 - \ldots - x_1x_n - x_2x_3 - \ldots - x_2x_n - \ldots - x_{n-1}x_n.$$

Chứng minh rằng

$$\frac{3n - n^2}{2} \leqslant T \leqslant 1,\ \forall n \geqslant 3.$$

Bài toán 61.

T6/130. Cho $a > 0$. Lập dãy số $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ theo quy luật sau :

$$x_0 = a,\ x_{k+1} = x_k + \frac{1}{x_k^2},\ \forall k = 0, 1, 2, \ldots$$

1) Hãy tìm các số dương α và A sao cho :

$$\lim_{n \to \infty} \frac{x_n^{\alpha}}{n} = A.$$

2) Chứng minh rằng, tồn tại số dương B sao cho

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k^4} < B, \forall n \in IN^*.$$

Bài toán 62.

T10/165. Chứng minh rằng trong tam giác bất kì tổng bình phương của ba bán kính ba đường tròn bàng tiếp của tam giác không nhỏ hơn tổng bình phương của độ dài ba đường phân giác.

§3. Logic và Toán rời rạc

Bài toán 63.

T1/171. Cho hai tập hợp A, B thỏa mãn các điều kiện :

1) Mỗi tập hợp đều gồm các số nguyên dương khác nhau và nhỏ thua 1990,

2) Tổng số phần tử của A và B lớn hơn 1990.

Chứng minh rằng tồn tại ít nhất một phần tử của A và một phần tử của B có tổng bằng 1990.

Bài toán 64.

T3/166. Với mỗi số nguyên $r \geqslant 1$, xác định số nguyên nhỏ nhất $h(r) \geqslant 1$ sao cho với mọi cách chia tập hợp $\{1, 2, ..., h(r)\}$ thành r tập con đều tồn tại các số nguyên $a \geqslant 0$, $y \geqslant x \geqslant 1$ sao cho $a + x$, $a + y$, $a + x + y$ thuộc cùng một tập con.

Hỏi có thể xếp vào hình lập phương cạnh 1 hai hình tứ diện đều cạnh $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ sao cho chúng không có điểm chung nào hay không ?

Bài toán 65.

T12/172. Cho n ($n \geqslant 2$) em học sinh đứng thành hàng dọc. Sau mỗi lần cô giáo thổi còi, có hai em đổi chỗ cho nhau. Hỏi, sau một số lẻ lần thổi còi, ta có thể thấy tất cả các em học sinh đều đứng ở vị trí ban đầu của mình hay không ?

Bài toán 66.

T9/173. Cho bàn cờ vua $n \times n$ ô. Dán mép trái và mép phải của bàn cờ với nhau, sao cho mặt bàn cờ quay ra ngoài, ta thu được một bàn cờ hình trụ. Tiếp tục dán mép trên và mép dưới của bàn cờ hình trụ ta sẽ thu được một bàn cờ hình xuyến. Hỏi trên bàn cờ hình xuyến ấy có thể xếp được tối đa bao nhiêu quân vua sao cho quân nọ không ăn được quân kia ?

Bài toán 67.

T9/153. Trên trang giấy có một vết mực có tổng diện tích bé hơn 1. Chứng minh rằng, có thể chia trang giấy thành các hình vuông đơn vị sao cho không có đỉnh nào của hình vuông rơi vào chỗ có mực.

Bài toán 68.

T12/155. Trên mặt bàn người ta dán một số hình tròn có bán kính bằng nhau sao cho không có hai hình nào giao nhau. Chứng minh rằng với 4 màu khác nhau ta có thể tô các hình tròn (mỗi hình tròn được tô bởi một màu) sao cho các hình tròn tiếp xúc nhau được tô bởi các màu khác nhau.

Bài toán 69.

T4/85. Cho một mảnh giấy hình vuông. Mảnh giấy này được cắt bởi đường cắt thẳng thành hai mảnh. Một trong hai mảnh nhặt được, ta lại làm như vậy nhiều lần. Hỏi số lần cắt ít nhất phải là bao nhiêu để có thể nhận được 100 đa giác hai mươi cạnh.

Bài toán 70.

T5/126. Người ta rải 35 viên bi trên một mặt sàn hình vuông có cạnh bằng $10cm$. Chứng minh rằng, khi các hòn bi đã đứng yên thì có thể tìm được trên mặt sàn ít nhất một hình chữ nhật có diện tích lớn hơn $3cm^2$ không chứa viên bi nào (tức là không có điểm nào của hình chữ nhật là điểm tiếp xúc của một viên bi với mặt sàn).

Bài toán 71.

T7/82. Chứng minh rằng không tồn tại một cách xếp 5 hình cầu có cùng bán kính, sao cho mỗi hình cầu tiếp xúc với 4 hình cầu kia.

Bài toán 72.

T6/88. Cho ΔABC đều cạnh a. Hai người chơi một trò chơi như sau :

– Người thứ nhất lấy 1 điểm C_1 trên AB

– Tiếp theo, người thứ hai lấy 1 điểm A_1 trên BC

– Tiếp theo, người thứ nhất lấy 1 điểm B_1 trên AC.

Mục đích của người thứ nhất là lấy C_1 và B_1 sao cho diện tích $\Delta A_1B_1C_1$ lớn nhất. Mục đích của người thứ hai là lấy A_1 sao cho diện tích của $\Delta A_1B_1C_1$ nhỏ nhất.

Vậy người thứ nhất đạt được diện tích lớn nhất bằng bao nhiêu nếu hai người cùng chơi giỏi.

Bài toán 73.

T3/179. Tìm tất cả các số nguyên dương k sao cho có thể phân chia tập hợp
$X = \{1990, 1990 + 1, ..., 1990 + k\}$
thành hai tập con A, B thỏa mãn điều kiện : Tổng của tất cả các phần tử thuộc A bằng tổng của tất cả các phần tử thuộc B.

Bài toán 74.

T8/181. Có n $(n \geq 2)$ con chim đậu trên một đường tròn tâm O sao cho tại một điểm của đường tròn có đúng một con chim đậu. Hai con chim đậu tại hai điểm phân biệt P_i, P_j được gọi là trông thấy nhau, nếu $P_iOP_j \leq 120^o$. Hãy tìm số nhỏ nhất các cặp chim trông thấy nhau.

Bài toán 75.

T8/183. Cho bảng hình chữ nhật kẻ ô vuông có 1991 hàng và 1992 cột. Kí hiệu (m, n) là ô vuông nằm ở giao của hàng thứ m và cột thứ n. Tô màu các ô vuông của bảng theo quy tắc : lần thứ nhất tô ba ô vuông (r, s), $(r + 1, s + 1)$, $(r + 2, s + 2)$, với r, s là hai số cho trước thỏa mãn điều kiện $1 \leq r \leq 1989$, $1 \leq s \leq 1990$; Từ lần thứ hai, mỗi lần tô đúng ba ô chưa có màu nằm cạnh nhau trong cùng một hàng hoặc cùng một cột. Hỏi bằng cách đó có thể tô màu được hết tất cả các ô vuông của bảng đã cho hay không ?

Bài toán 76.

T10/177. Cho một hình phẳng có diện tích bằng 1, được phủ kín bởi một số hữu hạn các hình tròn. Chứng minh rằng trong số các hình tròn đó có thể chọn ra hoặc một hình tròn có diện tích lớn hơn hoặc bằng $\frac{1}{9}$, hoặc một số hình tròn đôi một rời nhau mà tổng diện tích của chúng lớn hơn hoặc bằng $\frac{1}{9}$.

Bài toán 77.

T6/44. Hãy cắt một tam giác cho trước ra làm bốn phần và ghép các phần này lại để được hai tam giác đồng dạng với tam giác đã cho.

Bài toán 78.

T4/47. Người ta cắt một hình đa giác lồi 17 cạnh ra thành các hình tam giác. Hỏi được ít nhất là bao nhiêu tam giác ? Nếu đa giác là không lồi thì số đó là bao nhiêu ?

Bài toán 79.

T6/47. Cho đa giác lồi n cạnh $A_1A_2...A_n$. Vẽ tất cả các đường chéo xuất phát từ đỉnh A_1. M là một điểm trong $\Delta A_1A_kA_{k+1}$ $(2 \leq k \leq n - 1)$. Nối M với tất cả các đỉnh của đa giác. Tính xem miền trong của đa giác đã cho đã được chia thành bao nhiêu phần ? Với giá trị nào của k thì số phần được tạo thành là nhiều nhất và ít nhất ?

Bài toán 80.

T158/66. Từ bảng :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ n+1 & n+2 & n+3 & \dots & 2n \\ 2n+1 & 2n+2 & 2n+3 & \dots & 3n \\ . & . & . & \dots & . \\ (n-1)n+1 & (n-1)n+2 & (n-1)n+3 & \dots & n^2 \end{bmatrix}$$

hãy chọn n số sao cho không có hai số nào đứng trong cùng một dòng và không có 2 số nào nằm trong cùng một cột của bảng. Tính tổng n số đã chọn.

Bài toán 81.

T9/47. 1) Có 9 em học sinh cùng đi một chuyến tầu. Mỗi em chọn tùy ý và ngẫu nhiên một trong 3 toa tầu đã định. Tìm xác suất để cho :

a) Toa đầu có 3 em.

b) Mỗi toa có 3 em.

c) Một trong 3 toa có 4 em, một toa nữa có 3 em và toa còn lại có 2 em.

2) Một thành phố có 10.000 xe đạp mang số hiệu từ 1 đến 10.000. Tìm xác suất để cho biển số chiếc xe đạp mà em gặp đầu tiên không chứa con số 8.

Bài toán 82.

T6/140. Xét bảng số gồm n dòng n cột :

$$A_n = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

trong đó $a_{ij} \in \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3\}$. Hãy tìm tất cả các giá trị n sao cho tồn tại bảng A_n có các tính chất sau :

1) Ở mỗi dòng, mỗi cột đều có một số 1 (hoặc −1), một số 2 (hoặc −2), một số 3 (hoặc −3), các số còn lại bằng 0.

2) Ứng với mỗi bộ (i, j, k), mà $a_{ik}a_{jk} \neq 0$, có duy nhất một cột m sao cho $a_{im}a_{jm} = -a_{ik}a_{jk}$.

3) Ứng với mỗi bộ (i, j, k), mà $a_{ki}a_{kj} \neq 0$, có duy nhất một dòng m sao cho $a_{mi}a_{mj} = -a_{ki}a_{kj}$.

Bài toán 83.

T10/152. Giả sử có n ngôi nhà và một nhà máy điện. Hỏi có bao nhiêu cách mắc điện tới các ngôi nhà sao cho nhà nào cũng có điện.

Bài toán 84.

T1/154. Cho mặt phẳng kẻ ô vuông đơn vị. Hãy tìm đường tròn có bán kính lớn nhất chỉ đi qua các đỉnh ô vuông mà không cắt một cạnh hình vuông nào cả.

Bài toán 85.

T3/157. Tìm số các phân hoạch tập hợp $\{1, 2, ..., n\}$ thành 3 tập con A_1, A_2, A_3 (các tập này có thể rỗng) sao cho các điều kiện sau được thỏa mãn :

1) Sau khi sắp xếp các phần tử của A_1, A_2, A_3 theo thứ tự tăng dần thì 2 phần tử liên tiếp luôn có tính chẵn, lẻ khác nhau.

2) Nếu cả ba tập A_1, A_2, A_3 đều không rỗng thì có đúng một tập có số nhỏ nhất là số chẵn.

Bài toán 86.

T12/158. Các bức tường của một phòng triển lãm chắn trên nền nhà thành một đa giác phẳng n cạnh. Hãy chứng minh rằng để chiếu sáng toàn bộ các gian của phòng triển lãm người ta chỉ cần $\left[\frac{n}{3}\right]$ ngọn đèn (kí hiệu $[x]$ chỉ phần nguyên của số x).

Bài toán 87.

T8/164. Có n cặp vợ chồng tham dự một buổi dạ hội. Biết rằng, mỗi người đều trò chuyện với tất cả những người khác, trừ vợ hoặc chồng mình. Các cuộc trò chuyện lập thành các nhóm người $C_1, C_2, ..., C_k$ với các tính chất sau : không có một cặp vợ chồng nào nói chuyện trong cùng một nhóm, nhưng với mọi cặp không phải là vợ chồng thì đều có đúng một nhóm để họ trò chuyện. Chứng minh rằng, nếu $n \geqslant 4$ thì $k \geqslant 2n$.

Bài toán 88.

T6/146. Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) bằng nhau. Chia mỗi đường tròn thành n cung tròn bằng nhau ($n \geqslant 2$). Tại các điểm chia trên đường tròn (O_1) ta gán các số tự nhiên từ 1 đến n một cách tùy ý. Chứng minh rằng

1) Nếu n là số chẵn thì với mỗi cách gán các số tự nhiên từ 1 đến n lên trên các điểm chia trên đường tròn (O_2), ta đều có thể đặt hai đường tròn lên nhau sao cho có hai số i, j ($i \neq j$) của đường tròn (O_1) trùng với hai số bằng chúng trên đường tròn (O_2).

2) Nếu n là số lẻ thì tồn tại một cách gán các số tự nhiên từ 1 đến n lên các điểm chia trên đường tròn (O_2) sao cho ở mỗi cách đặt đường tròn (O_1) lên đường tròn (O_2) đều chỉ có nhiều nhất một số i trên đường tròn (O_1) trùng với số bằng chính nó trên đường tròn (O_2).

Bài toán 89.

T3/53. Trên mặt phẳng cho 5 điểm phân biệt tùy ý A, B, C, D, E. Hai điểm bất kì trong 5 điểm ấy được nối với nhau bằng một đường cong liên tục không tự cắt và không đi qua các điểm còn lại. Chứng minh rằng không thể vẽ được tất cả các đường cong như thế sao cho hai đường bất kì đều không cắt nhau ở điểm khác với các điểm đã cho.

Bài toán 90.

T8/62. Trong mặt phẳng cho n điểm $A_1, A_2, ..., A_n$, trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng và trong các đoạn thẳng nối chúng từng đôi một không có hai đoạn nào song song. Qua mỗi điểm A_i ($i = \overline{1, n}$) ta vẽ các đường thẳng song song với tất cả các đoạn thẳng A_jA_k với $j \neq k, j, k \in \{1, 2, ..., n\} \{i\}$.

Hỏi số giao điểm tối đa của các đường thẳng đã vẽ.

Bài toán 91.

T5/67. Trong một khu vực có n thành phố. Giữa hai thành phố được nối với nhau bằng một đoạn đường không tự cắt. Hai đoạn đường bất kì chỉ gặp nhau tại một thành phố mà thôi. Từ một thành phố bất kì, bao giờ cũng có thể đi đến một thành phố khác tùy ý bằng một đường gấp khúc nào đó (gồm nhiều đoạn đường nối tiếp nhau). Chứng minh rằng

1) Nếu khu vực đó không có đường vòng (tức là đường gấp khúc kín) thì số đoạn đường có tất cả là $n - 1$.

2) Bao giờ cũng có $n - m + v = 1$, trong đó m là số đoạn đường, v là số đường vòng đơn (tức là đường gấp khúc kín không bao quanh bất kì một đường gấp khúc kín nào khác ở bên trong nó).

3) Bao giờ cũng có ít nhất một thành phố mà tại đó có nhiều nhất là 5 đoạn đường đi đến các thành phố khác.

Bài toán 92.

T2/85. Cho một bảng ô vuông có $(n \times n)$ ô, với n là một số lẻ. Mỗi ô của bảng ta đặt một số 1 hoặc -1. Gọi a_k là tích các số ở các ô của cột k, b_k là tích các số ở các ô của hàng k. Chứng minh rằng

$$\sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k \neq 0.$$

§4. Các bài toán chứng minh hình học

Bài toán 93.

(T10/153). Giả sử D là một điểm nằm trong tam giác ABC. Các đường thẳng AD, BD và CD lần lượt cắt các cạnh BC, CA và AB ở X, Y và Z. Chứng minh rằng nếu hai trong ba tứ giác $DYAZ$, $DZBX$ và $DXCY$ có thể ngoại tiếp được đường tròn thì tứ giác thứ ba cũng vậy.

Bài toán 94.

(T2/158). Cho đường thẳng d nằm ngoài đường tròn (O). Gọi A là chân đường vuông góc hạ từ O xuống d. Trên d lấy hai điểm B và C đối xứng với nhau qua A. Qua B và C vẽ hai cát tuyến tùy ý, lần lượt cắt (O) ở các cặp điểm M, N và P, Q. Gọi R và S lần lượt là các giao điểm của các đường thẳng NP và MQ với d. Chứng minh rằng R và S đối xứng với nhau qua A.

Bài tập 95 (T10/167). Xét một tam giác không vuông ABC. Ba đường thẳng l_A, l_B, l_C lần lượt dựng qua các đỉnh A, B, C như sau : Gọi A' là chân đường cao hạ từ đỉnh A xuống cạnh BC, đường tròn đường kính AA' cắt AB ở M, AC ở N thì l_A là đường thẳng qua A vuông góc với MN. Các đường thẳng l_B, l_C được dựng một cách tương tự. Chứng minh rằng l_A, l_B và l_C đồng quy ở một điểm.

Bài toán 96.

(T10/173). Các đường phân giác trong các góc A, B và C của tam giác ABC cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác lần lượt ở các điểm A_1, B_1, C_1. Gọi S là diện tích phần chung của hai tam giác ABC và $A_1B_1C_1$. Chứng minh rằng :

$$S \geqslant \frac{2}{3} s(ABC)$$

Khi nào thì xảy ra đẳng thức.

Bài toán 97

(T2/179). Cho tam giác ABC. Dựng các tia Cx, Cy thuộc nửa mặt phẳng bờ AC có chứa điểm B sao cho tia Cx nằm giữa hai tia CB, Cy và $Cx \parallel AB$. Một đường thẳng bất kì qua B cắt Cx, Cy theo thứ tự ở các điểm D, E. Gọi F là giao điểm của (AD) và (BC), chứng minh rằng đường thẳng EF luôn luôn đi qua một điểm cố định.

Bài toán 98.

(T3/183). Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). Dựng tia $Ax \perp AD$, $Ax \cap BC = E$, tia $Ay \perp AB$, $Ay \cap CD = F$. Chứng minh rằng đường thẳng EF đi qua tâm O của đường tròn.

Bài toán 99.

(T10/138). Giả sử MN là một đường kính bất kì của đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác đều ABC và AA_1, BB_1, CC_1 là ba dây cung của (O) và cùng vuông góc với MN. Chứng minh :

$$MA^4 + MB^4 + MC^4 = NA^4 + NB^4 + NC^4 =$$
$$= AA_1^4 + BB_1^4 + CC_1^4$$

Bài toán 100.

(T9/140). Cho hai tam giác ABC, $A'B'C'$ đồng dạng với tỉ số $k \neq 1$ và có cùng hướng. Chứng minh rằng nói chung tồn tại một tam giác (T) có độ dài các cạnh bằng $AA'.BC$, $BB'.CA$ và $CC'.AB$. Khi nào thì không tồn tại (T) (cũng tức là (T) suy biến thành đoạn thẳng) ?

Bài toán 101.

(T7/142). Trên các cạnh của một tứ giác lồi có diện tích S, về phía ngoài người ta dựng các hình vuông. Trên các hình vuông đó tạo thành một tứ giác có diện tích S_1. Chứng minh rằng :

a) $S_1 \geqslant 2S$

b) $S_1 = 2S$ khi và chỉ khi các đường chéo của tứ giác ban đầu bằng nhau và vuông góc với nhau.

Bài toán 102.

(T7/145). a) Gọi m_1, m_2, m_3 ; h_1, h_2, h_3 ; r và R lần lượt là độ dài các đường trung tuyến, đường cao, bán kính các đường tròn nội và ngoại tiếp một tam giác có ba góc nhọn $A_1A_2A_3$. Chứng minh rằng :

$$\frac{m_1}{h_1} + \frac{m_2}{h_2} + \frac{m_3}{h_3} \leqslant 1 + \frac{R}{r}$$

b) Phát biểu và chứng minh bất đẳng thức tương tự đối với tứ diện $A_1A_2A_3A_4$.

c) Khi nào xảy ra đẳng thức trong các hệ thức đó ?

Bài toán 103.

(T7/151). Cho tứ giác lồi $ABCD$ không nội tiếp một đường tròn. Gọi A', B', C' và D' lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác BCD, CDA, DAB và ABC ; ta kí hiệu : $A'B'C'D' = T(ABCD)$. Lại lấy $A''B''C''D'' =$ $= T(A'B'C'D') = T(T(ABCD))$.

a) Chứng minh rằng $A''B''C''D'' \backsim ABCD$.

b) Hệ số đồng dạng k phụ thuộc vào độ lớn các góc của tứ giác $ABCD$, hãy xác định hệ số này.

Bài toán 104.

(T9/165). Cho parabol $y = x^2$. Từ một điểm I trong mặt phẳng tọa độ kẻ hai tiếp tuyến, tiếp xúc với parabol ở M và N. Một cát tuyến qua I cắt parabol ở A và B, cắt MN ở J. Chứng minh rằng A, B, I, J lập thành một hàng điểm điều hòa.

Bài toán 105.

(T10/168). Các phân giác trong của các góc A, B và C của tam giác ABC gặp đường tròn ngoại tiếp tam giác đó theo thứ tự ở các điểm A', B' và C'. Chứng minh rằng diện tích tam giác $A'B'C'$ lớn hơn hoặc bằng diện tích tam giác ABC. Khi nào thì xảy ra đẳng thức ?

Bài toán 106.

(T9/169). Cho tam giác nhọn ABC. Gọi u, v và w là các khoảng cách lần lượt từ các đỉnh A, B và C đến một đường thẳng Δ bất kì nằm trong mặt phẳng tam giác. Chứng minh rằng :

$$u^2 tgA + v^2 tgB + w^2 tgC \geqslant 2S,$$

trong đó S là diện tích tam giác ABC.

Khi nào thì xảy ra đẳng thức ?

Bài toán 107.

(T10/169). Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC có độ dài các cạnh $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Kéo dài IA, IB, IC về phía A, B, C và trên đó lấy A_1, B_1, C_1 sao cho $AA_1 = aIA$, $BB_1 = bIB$, $CC_1 = cIC$. Chứng minh rằng hai tam giác ABC và $A_1B_1C_1$ có cùng trọng tâm.

Bài toán 108.

(T11/169). Về phía ngoài của tam giác nhọn ABC người ta dựng các tam giác đều BCF, CAE và ABD. Chứng minh rằng các đường thẳng đi qua các trung điểm M, N, P của các cạnh BC, CA, AB và theo thứ tự vuông góc với các đường thẳng DE, DF, EF đồng quy ở một điểm.

Bài toán 109.

(T9/170). Giả sử M là một điểm bất kì trong mặt phẳng của tam giác ABC không nằm trên các đường thẳng chứa các cạnh tam giác. Chứng minh rằng :

a) Các đường thẳng đối xứng với AM, BM và CM lần lượt qua các đường phân giác trong của các góc $\widehat{A}, \widehat{B}$ và $\widehat{C}$ của tam giác ABC hoặc đồng quy hoặc song song với nhau.

b) Trong trường hợp ba đường thẳng nói trên đồng quy tại một điểm M' thì, các hình chiếu của hai điểm M và M' trên các đường thẳng BC, CA và AB cùng nằm trên một đường tròn (gọi là đường tròn sáu điểm).

Bài toán 110.

(T10/171). M là một điểm nào đó nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABC. Chứng minh rằng tổng $MA^4 + MB^4 + MC^4$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm M trên đường tròn.

Bài toán 111.

(T10/172). Cho tam giác ABC. Kéo dài ba đường cao AA_1, BB_1, CC_1 về phía A, B, C và trên đó lần lượt lấy các điểm A_2, B_2, C_2 sao cho $AA_2 . AA_1 = BB_2 . BB_1 = CC_2 . CC_1 = 1$. Chứng minh rằng hai tam giác ABC và $A_2B_2C_2$ có cùng trọng tâm.

Bài toán 112.

(T9/181). Tam giác ABC có độ dài các cạnh $BC = a$, $CA = b$ và $AB = c$. Đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh BC, CA và AB lần lượt ở các điểm A_1, B_1 và C_1. Chứng minh :

a) Chu vi tam giác $A_1B_1C_1$ không vượt quá nửa chu vi tam giác ABC. Dấu bằng xảy ra khi nào ?

b) $\dfrac{IA . IB . IC}{aIA^2 + bIB^2 + cIC^2} \geqslant \dfrac{1}{3\sqrt{3}}$

Dấu bằng xảy ra khi nào ?

Bài toán 113.

(T10/132). Chứng minh rằng có hình hộp mà tất cả các mặt của nó là những hình thoi bằng nhau có một góc bằng 60^o.

Các thiết diện thẳng của hình hộp đó là hình gì ? Có bao nhiêu thiết diện thẳng là hình thoi ?

Bài toán 114.

(T9/136). Cho một nửa mặt cầu tâm O bán kính R cố định và hai hình cầu nhỏ thay đổi nhưng luôn tiếp xúc với nhau và nội tiếp trong nửa mặt cầu đã cho. Chứng minh rằng tiếp điểm của hai hình cầu nhỏ luôn nằm trên một mặt cầu cố định.

Bài toán 115.

(T9/137). Qua trọng tâm G của tứ diện $ABCD$ ta dựng một mặt phẳng (P) tùy ý. Gọi AA_1, BB_1, CC_1 và DD_1 là khoảng cách lần lượt từ A, B, C và D đến (P). Chứng minh rằng trong bốn đoạn thẳng AA_1, BB_1, CC_1 và DD_1 hoặc có một đoạn bằng tổng của ba đoạn kia, hoặc tổng của hai đoạn nào đó bằng tổng của hai đoạn còn lại.

Bài toán 116.

(T10/141). a) Chứng minh rằng trong một hình hộp, trung điểm các cạnh không xuất phát từ hai đầu mút của một đường chéo nào đó, là các đỉnh của một lục giác phẳng có tâm đối xứng.

b) Tìm tất cả những hình hộp có tính chất là tất cả các lục giác phẳng ứng với tất cả các đường chéo là lục giác đều.

Bài toán 117.

(T11/155). Cho một hình hộp thoi $ABCDA'B'C'D'$ có các cạnh bằng nhau và bằng AC', góc tam diện đỉnh A là đều.

a) Tính số đo góc các mặt của tam diện đỉnh A.

b) Một mặt phẳng cắt các cạnh AB, AD và AA' theo thứ tự ở M, N, P và cắt AC' ở Q. Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{AQ} = \frac{1}{AM} + \frac{1}{AN} + \frac{1}{AP}$$

Bài toán 118.

(T11/168). Mặt phẳng đi qua một cạnh (AB) và trung điểm (E) của cạnh đối diện (CD) của một tứ diện $(ABCD)$ gọi là một mặt trung diện của tứ diện đó. Mặt phẳng đối xứng với một mặt trung diện của một tứ diện qua mặt phân giác của nhị diện, phát xuất từ cùng một cạnh với mặt trung diện đó gọi là một mặt phẳng đối trung của tứ diện. Chứng minh rằng trong một tứ diện, sáu mặt phẳng đối trung đồng quy tại một điểm (điểm này gọi là điểm đối – trọng tâm của tứ diện).

Bài toán 119.

(T12/173). Tứ diện $ABCD$ thay đổi về vị trí các đỉnh trong không gian và độ dài các cạnh nhưng luôn giữ cho hai cạnh đối nhau thì bằng nhau ($BC = DA$, $CA = DB$, $AB = DC$; một tứ diện như vậy gọi là một tứ diện gần đều) ; đồng thời giữ cho các đỉnh A, B, C lần lượt chạy trên ba mặt cầu đồng tâm O, có bán kính là $r_1 = 12cm$, $r_2 = 16cm$, $r_3 = 48cm$.

Chứng minh rằng đỉnh thứ tư D không bao giờ vượt ra khỏi một mặt cầu có tâm và bán kính mà ta sẽ xác định.

Bài toán 120.

(T11/177). Gọi G là trọng tâm tứ diện $ABCD$. Mặt phẳng quay xung quanh AG

cắt các cạnh DB và DC lần lượt ở M và N. Gọi $V = v(ABCD)$ và $V_1 = v(DAMN)$; chứng minh rằng :

$$\frac{4}{9} \leq \frac{V_1}{V} \leq \frac{1}{2}$$

Bài toán 121.

(T11/179). Cho ba đường thẳng a, b, c song song với nhau và không đồng phẳng. Trên a, b, c lấy ba điểm A, B, C cố định lần lượt thuộc ba đường thẳng đó. Một mặt phẳng thay đổi cắt a, b, c ở M, N, P sao cho M, N, P ở về cùng một phía đối với mặt phẳng ABC và tổng diện tích các hình thang $AMNB$, $BNPC$ và $CPMA$ không đổi. Chứng minh rằng hình chiếu của trọng tâm G của tam giác ABC lên mặt phẳng MNP nằm trên một mặt cầu cố định.

§5. Các bài toán quỹ tích

Bài toán 122.

(T12/149). Trong mặt phẳng cho một đường tròn (O) và hai đường thẳng vuông góc với nhau d và d'. OA và OB là hai bán kính thay đổi vuông góc với nhau. Qua A kẻ $Ax \parallel d$ và qua B kẻ $By \parallel d'$. Tìm quỹ tích giao điểm M của Ax và By.

Bài toán 123.

(T11/162). Cho tam giác không đều ABC có hướng dương (tức là các đỉnh sắp xếp ngược chiều kim đồng hồ). Tìm quỹ tích tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác đều $A'B'C'$ có hướng dương, ở đó các bộ ba điểm A, B', C' cũng như B, C', A' và C, A', B' thẳng hàng.

Bài toán 124.

(T11/164). Cho tam giác ABC. Hai điểm M và N lần lượt chuyển động trên hai cạnh AB và AC sao cho $BM = CN$. Gọi P là điểm đối xứng của N qua C. Tìm quỹ tích trọng tâm các tam giác AMN và AMP.

Bài toán 125.

(T2/170). Gọi O là giao điểm hai đường chéo AC và BD của tứ giác lồi $ABCD$. Tìm tập hợp các điểm P thỏa mãn điều kiện :

$$OP < \min (AP, BP, CP, DP)$$

Bài toán 126.

(T11/173). Cho góc xOy. Hai điểm A và B lần lượt chuyển động trên hai cạnh Ox và Oy sao cho $OA + OB = l$ không đổi.

a) Chứng minh rằng đường trung trực của AB luôn đi qua một điểm cố định.

b) Tìm quỹ tích tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB.

Bài toán 127.

(T9/156). Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Tìm quỹ tích những điểm M nằm trong đường tròn sao cho ba dây cung đi qua M là AA', BB' và CC' thỏa mãn hệ thức :

$$\frac{MA}{MA'} + \frac{MB}{MB'} + \frac{MC}{MC'} = 3 \qquad (*)$$

Bài toán 128.

(T9/183). Cũng như trên, thay hệ thức (*) bởi hệ thức sau đây :

$$\frac{MA}{MA'} + \frac{MB}{MB'} + \frac{MC}{MC'} \leq 3 \qquad (**)$$

Bài toán 129.

(T11/172). Trên mặt cầu $C\ (O, R)$ cho n điểm cố định $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ($n \leq 2$). Tìm quỹ tích những điểm M sao cho các dây cung đi qua M là $A_iA'_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) thỏa mãn hệ thức :

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\overline{A_iM}}{\overline{MA'_i}} = k,$$

trong đó k là một số thực cho trước, $k \geq n$.

Bài toán 130.

(T11/174). Trong mặt phẳng (P) cho tam giác nhọn ABC. Một điểm D thay đổi vị trí trong không gian sao cho tất cả các mặt của tứ diện $ABCD$ đều là các tam giác nhọn. Tìm quỹ tích các hình chiếu của D trên mặt phẳng (P).

Bài toán 131.

(T10/181). Cho tứ diện $ABCD$. Tìm tập hợp những điểm M nằm trong tứ diện đã cho mà khoảng cách từ đó đến mặt phẳng của tứ diện bằng tổng các khoảng cách từ đó đến ba mặt còn lại.

§6. Các bài toán dựng hình

Bài toán 132.

(T8/143). Cho hai điểm A và B nằm ở ngoài đường tròn (O). Dựng một đường tròn (K) đi qua A, B và cắt (O) theo một dây cung có chiều dài d cho trước.

Bài toán 133.

(T8/147). Trong mặt phẳng cho một đường tròn (υ) và một đường thẳng Δ không cắt (υ). Hai điểm M và N chuyển động trên Δ sao cho đường tròn đường kính MN bao giờ cũng tiếp xúc ngoài với đường tròn (υ) đã cho. Chứng minh rằng trong mặt phẳng tồn tại một điểm P luôn luôn nhìn các đoạn MN dưới một góc không đổi α. Xác định độ lớn của $\widehat{MNP} = \alpha$ theo bán kính R của (υ) và khoảng cách $d = CO$ từ tâm C của (υ) đến Δ.

Bài toán 134.

(T10/140). Mặt phẳng đi qua một cạnh và chia đôi cạnh đối diện của một hình tứ diện gọi là một mặt trung diện của tứ diện đó. Mặt phẳng đi qua một cạnh và chia đôi góc nhị diện thuộc cạnh đó gọi là mặt phân giác (trong) của tứ diện đó.

Hãy tìm tất cả các hình tứ diện đặc trưng bởi tính chất là mỗi mặt phân giác của một nhị diện trùng với mặt trung diện xuất phát từ cạnh của nhị diện đó.

Bài toán 135.

(T9/148). Tìm điều kiện mà hình chóp tứ giác $S.ABCD$ phải thỏa mãn để có một mặt cầu đi qua các đỉnh A, B, C, D của đáy và các hình chiếu (vuông góc) B', C', D' của đỉnh A trên các cạnh SB, SC và SD.

Bài toán 136.

(T10/150). Qua một điểm M cho trước thuộc một cạnh của một hình lập phương có thể dựng được bao nhiêu mặt phẳng cắt hình lập phương đó sao cho thiết diện thu được là một hình vuông ?

Bài toán 137.

(T11/170). Trong không gian cho bốn điểm phân biệt A, B, C, D không đồng phẳng. Gọi M, M' ; N, N' và P, P' lần lượt là trung điểm của các cặp đoạn thẳng BC, DA ; CA, DB và AB, DC. Hỏi tứ điểm $\{A, B, C, D\}$ phải thỏa mãn điều kiện gì để sáu điểm nói trên cùng nằm trên một mặt cầu ?

§7. Cực trị hình học

Bài toán 138.

(T7/133). Cho tam giác ABC. Tìm một điểm M nằm ở trong tam giác sao cho đại lượng $BC.MA + CA.MB + AB.MC$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài toán 139.

(T9/134). Cho góc xOy cố định. Một điểm A chạy trên Ox và một điểm B chạy trên Oy sao cho :

$$\frac{a}{OA} + \frac{b}{OB} = k,$$

trong đó a, b là các độ dài cho trước và k là một số thực dương cho trước. Tìm vị trí của A và B để tam giác OAB có chu vi nhỏ nhất.

Bài toán 140.

(T10/146). Bốn xã có vị trí ở bốn đỉnh của một hình vuông có độ dài cạnh bằng 10 km. Người ta muốn xây dựng một hệ thống đường liên xã sao cho từ bất cứ một xã nào cũng có thể dẫn đến bất cứ một xã nào khác.

a) Hỏi với vật liệu đủ xây dựng 28 km đường, người ta có thể đạt được mục đích đã đề ra hay không ?

b) Hỏi tổng độ dài các con đường ngắn nhất là bao nhiêu ?

Bài toán 141.

(T8/144). Gọi R_1, R_2, R_3 và R_4 là bán kính các mặt cầu lần lượt bàng tiếp các góc tam diện có đỉnh là A, B, C và D của một tứ diện $ABCD$, ngoại tiếp một mặt cầu bán kính r cho trước. Hãy xác định tứ diện để tổng $R_1 + R_2 + R_3 + R_4$ có giá trị nhỏ nhất.

Bài toán 142.

(T9/149). Hai điểm C và D lần lượt chạy trên hai nửa đường thẳng Ax và By chéo nhau cho trước sao cho :

$$\frac{a}{AC} + \frac{b}{BD} = k,$$

trong đó a, b là hai độ dài cho trước, còn k là một số thực dương cho trước.

a) Chứng minh rằng đoạn CD luôn luôn cắt một đoạn thẳng cố định.

b) Xác định vị trí của C và D để thể tích tứ diện $ABCD$ là nhỏ nhất.

Bài toán 143.

(T12/153). Cho tứ diện $ABCD$ có $BC = DA = a$, $CA = DB = b$ và $AB.\ DC = c^2$. P là một điểm nào đó trong không gian. Tính giá trị nhỏ nhất của $f(P) = PA + PB + PC + PD$.

Bài toán 144.

(T12/154). Cho góc tam diện vuông $Oxyz$ và một điểm M cố định nằm trong góc đó. Qua M dựng một mặt phẳng cắt Ox, Oy, Oz lần lượt ở A, B, C sao cho :

a) $OA + OB + OC$ nhỏ nhất ;

b) Tổng bình phương các cạnh của ta giác ABC nhỏ nhất.

Bài toán 145.

(T12/164). Cho hai hình cầu đồng tâm bán kính 1 và 4. Xét hình ch $S.A_1A_2...A_n$ có đỉnh S thuộc mặt cầu nh các đỉnh A_i của đáy đều thuộc mặt cầu l $(i = 1, 2, ..., n)$. Hãy xác định S và A_i $(i =$ $2, ..., n)$ để thể tích hình chóp là lớn nhấ

Bài toán 146.

(T9/147). Cho tam giác ABC cố định. T trong không gian một điểm D sao cho diện $ABCD$ có thể tích v cho trước và b kính mặt cầu nội tiếp tứ diện đó là *lớn* nh

B - LỜI GIẢI

§1. Phương trình, bất phương trình và hệ

Bài toán 1 (T7/182) (1)

Giả sử $x = x_0$ là nghiệm của hệ.

Thay vào hệ và cộng các vế của các bất đẳng thức ta được :

$$(a + b + c)(x_0^2 + x_0 + 1) \leqslant 0$$

$\Leftrightarrow a + b + c \leqslant 0$.

Nếu $x = 1$ không là nghiệm của một trong ba phương trình $ax^2 + bx + c = 0$, $bx^2 + cx + a = 0$ và $cx^2 + ax + b = 0$ thì suy ra $a + b + c < 0$ và hệ

$$\begin{cases} ax^2 + bx + c < 0 \\ bx^2 + cx + a < 0 \\ cx^2 + ax + b < 0 \end{cases}$$

không có nghiệm duy nhất. Suy ra hệ đã cho không có nghiệm duy nhất.

Vậy $x = 1$ phải là nghiệm của một trong ba phương trình trên, suy ra $a + b + c = 0$ và hệ đã cho

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x - 1)(ax - c) = 0 \\ (x - 1)(bx - a) = 0 \\ (x - 1)(cx - b) = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

(vì $(a + b + c)(x_0^2 + x_0 + 1) = 0$).

Nếu $a = b = c = 0$ thì (2) có vô số nghiệm.

Nếu $a^2 + b^2 + c^2 > 0$ và có 1 số bằng 0 thì (2) có nghiệm duy nhất. Nếu cả 3 số a, b, c đều khác 0 thì do $a + b + c = 0$ nên không thể xảy ra : $a/b = b/c = c/a \neq 1$. Vậy (2) không thể có nghiệm $x = x_0 \neq 1$.

Kết luận : Hệ đã cho có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 > 0. \end{cases}$$

Bài toán 2 (5/115)

Lời giải. Kí hiệu

$$x_2 - x_1 = X_1$$
$$x_3 - x_2 = X_2$$
$$\dots\dots\dots$$
$$x_n - x_{n-1} = X_{n-1}$$
$$x_1 - x_n = X_n$$

thì ta có

$$X_1 + X_2 + \dots + X_n = 0 \qquad (1)$$

và hệ phương trình đã cho tương đương với hệ sau

$$\begin{cases} ax_1^2 + (b - 1)x_1 + c = X_1 \\ ax_2^2 + (b - 1)x_2 + c = X_2 \\ \dots\dots\dots \\ ax_{n-1}^2 + (b - 1)x_{n-1} + c = X_{n-1} \\ ax_n^2 + (b - 1)x_n + c = X_n \end{cases}$$

– Nếu $(b - 1)^2 - 4ac < 0$ thì các x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) luôn cùng dấu với a, do vậy không thể có đẳng thức (1), trong trường hợp này hệ đã cho vô nghiệm.

– Nếu $(b - 1)^2 - 4ac = 0$ thì hệ đã cho có duy nhất nghiệm

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = (1 - b)/2a.$$

Còn các giá trị khác của x_i sẽ làm cho X_i cùng dấu với a, đẳng thức (1) sẽ không có.

– Nếu $(b - 1)^2 - 4ac > 0$, hệ đã cho có ít nhất hai nghiệm :

$$x_i = (1 - b + \sqrt{(b - 1)^2 - 4ac})/2a$$
$$i = 1, 2, \dots, n$$

và $$x_i = (1 - b - \sqrt{(b - 1)^2 - 4ac})/2a$$

$$i = 1, 2, \dots, n.$$

Bài toán 3 (8/160)

Xét 3 trường hợp :

1) $\cos 2x > 0 \Rightarrow \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x > 0$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x > \sin^2 x$$

Mà $2 + \sqrt{2} > 1$

nên $(2 + \sqrt{2})^{\sin^2 x} - (2 + \sqrt{2})^{\cos^2 x} < 0$

$\Rightarrow$ Phương trình đã cho có

Vế trái $\leqslant (2 - \sqrt{2})^{\cos 2x} < (1 + \sqrt{2/2})^{\cos 2x}$ (do $(2 - \sqrt{2})^{\cos 2x} < 1$).

2) $\cos 2x < 0$: tương tự trên $\Rightarrow$ Vế trái > vế phải

3) $\cos 2x = 0 \Leftrightarrow x = \pi/4 + k\pi/2,\ k \in Z$.

Vậy phương trình đã cho chỉ có nghiệm.

$$x = \pi/4 + k\pi/2.$$

Bài toán 4 (7/163)

Điều kiện của phương trình là $\sin x \neq 0$, $\cos y \neq 0$, $|a| \geqslant |b|$ hay là $x \neq k\pi$; $y \neq \pi/2 + l\pi$ và $|a| \geqslant |b|$. Với điều kiện trên phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{a - b}{\sin x} = \sqrt{a^2 - b^2}\,.\,2\cos y\,.\,\sin y, \text{ hay là}$$

$$\frac{a - b\cos x}{\sin x} = \sqrt{a^2 - b^2}\,.\,\sin(2y) \qquad (1)$$

Do $|\sin 2y| \leqslant 1$ nên từ (1) có :

$$\left|\frac{a - b\cos x}{\sin x}\right| \leqslant \sqrt{a^2 - b^2}$$

$\leftrightarrow (a - b\cos x)^2 \leqslant \sin^2 x\,.\,(a^2 - b^2)$

$\leftrightarrow (a - b\cos x)^2 \leqslant (1 - \cos^2 x)(a^2 - b^2)$

$\leftrightarrow a^2 - 2ab\cos x + b^2\cos^2 x \leqslant$

$\leqslant a^2 - b^2 - a^2\cos^2 x + b^2\cos^2 x$

$\leftrightarrow a^2\,.\,\cos^2 x + b^2 - 2ab\cos x \leqslant 0$

$\leftrightarrow (a\cos x - b)^2 \leqslant 0$

$$\leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ x \text{ tùy ý} \end{cases} \\ \\ \begin{cases} a \neq 0 \\ \cos x = \dfrac{b}{a} \end{cases} \end{array}\right.$$

Thay vào (1), đặt $\alpha \in [0, \pi]$ là góc thỏa mãn $\cos\alpha_o = \dfrac{b}{a}$, kí hiệu sig (a) là dấu của a thì (1) $\leftrightarrow$

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ x, y \text{ tùy ý} \end{cases} \quad \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ x, y \text{ tùy ý}, x \neq k\pi, y \neq \pi/2 + l\pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ x = \alpha_o + 2k\pi \\ \sin 2y' = sig(a) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ x = \alpha_o + 2k\pi \\ y = sig(a)\,\pi/4 + l\pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ x = -\alpha_o + 2k\pi \\ \sin 2y = -sig(a) \end{cases} \quad \begin{cases} a \neq 0 \\ x = -\alpha_o + 2k\pi \\ y = -sig(a)\,\pi/4 + l\pi \end{cases}$$

Tóm lại :

1) $|a| < |b|$ vô nghiệm

2) $a = b = 0$ x, y tùy ý $x \neq k\pi$, $y \neq \pi/2 + l\pi$

$a = 0$, $b \neq 0$ vô nghiệm

3) $|a| > |b|$ có nghiệm

$$\begin{cases} x = \alpha_o + 2k\pi \\ y = sig(a)\,\pi/4 + l\pi \end{cases}$$

và
$$\begin{cases} x = -\alpha_o + 2k\pi \\ y = -sig(a)\,\pi/4 + l\pi \end{cases}$$

Bài toán 5 (7/164)

Viết phương trình về dạng :

$$\cos x - \cos 7x - 3\sqrt{3}\sin x = 0$$

$\Leftrightarrow 2\sin 3x \sin 4x - 3\sqrt{3}\sin x = 0$

$\Leftrightarrow 2\sin 4x \sin x\,(3 - 4\sin^2 x) - 3\sqrt{3}\sin x = 0$

$\Leftrightarrow \sin x\,[2\sin 4x\,(1 + 2\cos 2x) - 3\sqrt{3}] = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \sin x = 0 & (1) \\ 2\sin 4x\,(1 + 2\cos 4x) = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} & (2) \end{array}\right.$$

Ta có : (1) $\Leftrightarrow x = k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$

(2) $\Leftrightarrow \sin 4x\cos 2x + \sin 4x = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

$$4\sin 2x\cos^2 2x + \sin 4x = \frac{3\sqrt{3}}{2} \qquad (3)$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho ba số $\sin^2 2x$

$\dfrac{\cos^2 2x}{2}$ và $\dfrac{\cos^2 2x}{2}$ ta được

$$1 = \sin^2 2x + \frac{\cos^2 2x}{2} + \frac{\cos^2 2x}{2} \geqslant$$

$\geqslant 3\sqrt[3]{\dfrac{(\sin 2x\cos^2 2x)^2}{4}}$. Suy ra :

$$\sin 2x\cos^2 2x \leqslant |\sin 2x\cos^2 2x| \leqslant \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

Do đó :

$$4\sin 2x\cos^2 2x + \sin 4x \leqslant \frac{2}{3\sqrt{3}} + 1 < \frac{3\sqrt{3}}{2} \qquad (4)$$

Từ (4) và (3) suy ra phương trình (2) vô nghiệm. Vậy phương trình đã cho chỉ có duy nhất một họ nghiệm $x = k\pi$; $k = 0, \pm 1, \pm 2$ ...

Bài toán 6 (T5/173)

Ta chứng minh bài toán bằng phương pháp phản chứng. Giả sử phương trình đã cho có nghiệm hữu tỉ α. Khi đó α sẽ là nghiệm hữu tỉ của đa thức :

$$P(x) = x^n + nx^{n-1} + ... + n!x/k! + ... +$$
$$+ n!x^2/2! + n!x/1! + n!$$

Nhưng do $P(x)$ là đa thức bậc n với hệ số nguyên, hơn nữa hệ số của x^n bằng 1, nên suy ra α phải là số nguyên ; và ta có :

$$\alpha^n + n\alpha^{n-1} + ... + n!\,\alpha^k/k! + ... +$$
$$+ n!\,\alpha^2/2! + n!\,\alpha/1! + n! = 0 \quad (1)$$

Gọi p là một ước nguyên tố của n. $\forall k = \overline{1, n}$, kí hiệu r_k là số mũ cao nhất của p thỏa mãn $k\,! \,\vdots\, p^{r_k}$, ta có :

$$r_k = [k/p] + [k/p^2] + ... + [k/p^s] \quad (2)$$

với s là số nguyên không âm thỏa mãn

$$p^s \leqslant k < p^{s+1}$$

Từ (2) suy ra :

$$r_k \leqslant k/p + k/p^2 + ... + k/p^s =$$
$$= k\,.\,(1 - 1/p^s)/(p-1) < k\,.$$

Do đó $r_n - r_k > r_n - k$. Suy ra

$r_n - r_k \geqslant r_n - k + 1$. Vì vậy ta được :

$$n!/k! \,\vdots\, p^{r_n - k + 1}, \forall k = \overline{1, n} \quad (3)$$

Hơn nữa, do $n \,\vdots\, p$ nên từ (1) ta có $\alpha^n \,\vdots\, p$, và do đó $\alpha \,\vdots\, p$. Suy ra $\alpha^k \,\vdots\, p^k$, $\forall k = \overline{1, n}$. Kết hợp điều này với (3) ta được $n!\,\alpha^k/k! \,\vdots\, p^{r_n + 1}$, $\forall k = \overline{1, n}$. Từ đây và (1) ta suy ra $n! \,\vdots\, p^{r_n + 1}$. Mâu thuẫn vừa nhận được chứng tỏ giả sử ban đầu là sai và vì vậy ta có đpcm.

Bài toán 7 (T7/173) :

Xét các trường hợp sau :

1) $\gamma = 0$. Khi đó (1) trở thành :

$0\,.\,|x| \leqslant -\sqrt{3}\,y^2$

Suy ra tất cả các cặp số nguyên dạng $(x, 0)$ đều là nghiệm của bất phương trình đã cho.

2) $\gamma < 0$. Viết lại (1) dưới dạng tương đương :

$$y^2 < \frac{(\sqrt{3}\,\gamma^2 - \gamma^3\,|x|)}{\sqrt{3}} \quad (2)$$

Từ đây, ta thấy với x là số nguyên thỏa mãn

$$|x| \geqslant \frac{\sqrt{3}\,(1 - \gamma^2)}{-\gamma^3}$$

ta luôn tìm được số nguyên y thỏa mãn (2). Suy ra (1) có vô số nghiệm nguyên trong trường hợp này.

3) $\gamma > 0$. Ta thấy nếu cặp số nguyên (x_0, y_0) là nghiệm của (1) thì ta phải có $|y_0| \leqslant \gamma$. Do đó :

a) Nếu $0 < \gamma < 1$ thì $y_0 = 0$. Suy ra :

$$|x_0| \leqslant \sqrt{3}/\gamma \quad (3)$$

Vì $\sqrt{3}/\gamma > \sqrt{3}$ (do $0 < \gamma < 1$) nên ta có $x_0 = 0, \pm 1$ luôn thỏa mãn (3). Như vậy, nếu $0 < \gamma < 1$ thì (1) luôn nhận ba cặp số nguyên $(0, 0)$, $(0, -1)$, $(0, +1)$ làm nghiệm. Từ đây suy ra nếu $0 < \gamma < 1$ thì (1) luôn có ít nhất ba nghiệm nguyên và nó sẽ có đúng ba nghiệm nguyên khi và chỉ khi $\sqrt{3} < \sqrt{3}/\gamma < 2$, hay $\sqrt{3}/2 < \gamma < 1$.

b) Nếu $\gamma \geqslant 1$ thì các giá trị $y_0 = 0$, $y_0 \pm 1$ sẽ luôn thỏa mãn $|y_0| \leqslant \gamma$, $\forall \gamma$ Bằng cách thay trực tiếp vào (1) ta sẽ thấy $\forall \gamma \geqslant 1$, bất phương trình (1) luôn nhận ba cặp số nguyên $(0, -1)$, $(0, 0)$, $(0, 1)$ làm nghiệm. Suy ra với $\gamma \geqslant 1$ bất phương trình đã cho có ít nhất ba nghiệm nguyên và sẽ có đúng ba nghiệm nguyên khi và chỉ khi nó chỉ nhận các cặp số nguyên $(0, -1)$, $(0, 0)$, $(0, 1)$ làm nghiệm. Điều kiện cần và đủ để có điều này là :

$$\begin{cases} 1 \leqslant \gamma < 2 \\ 0 \leqslant \dfrac{\sqrt{3}\,(\gamma^2 - y^2)}{\gamma^3} < 1 \ \forall y = 0, \pm 1. \end{cases}$$

Từ đây ta có $\sqrt{3} < \gamma \leqslant 2$

Tóm lại, qua kết quả xét các trường hợp ở trên ta được :

Luôn có ít nhất ba cặp số nguyên thỏa mãn (1) và sẽ có đúng ba cặp số nguyên thỏa mãn (1) khi và chỉ khi hoặc $\sqrt{3}/2 < \gamma < 1$ hoặc $\sqrt{3} < \gamma < 2$.

Vậy tất cả các giá trị γ cần tìm là :

$$\sqrt{3}/2 < \gamma < 1 \text{ và } \sqrt{3} < \gamma < 2\,.$$

Bài toán 8 (T7/174)

Trước hết ta chứng minh khẳng định sau :

Khẳng định K : Nếu đa thức $\varphi(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_o, a_o \neq 0$, có n nghiệm thực thì đa thức :

$\Psi_{(x)} = \lambda\varphi(x) + \gamma x\varphi(x) = x^2\varphi'(x)$ sẽ có $n+1$ nghiệm thực $\forall\lambda$ và với mọi $\varphi > n$

Chứng minh : Giả sử đa thức $\varphi(x)$ có các nghiệm $x_1, x_2, \dots, x_m$ với số bội tương ứng là $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ $(\alpha_i \in Z^+ \ \forall i = \overline{1,m})$. Theo giả thiết ta có $x_i \neq 0\ \forall i = \overline{1,m}$ và $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m = n$. Không mất tổng quát, giả sử $x_1 < x_2 < \dots < x_m$

Do đa thức $\varphi'(x)$ nhận $x_1, x_2, \dots x_m$ làm nghiệm với số bội tương ứng là $\alpha_1 - 1, \alpha_2 - 1, \dots\alpha_m - 1$ nên đa thức $\Psi_{(x)}$ sẽ nhận $x_1, x_2, \dots x_m$ làm nghiệm với số bội tương ứng là $\alpha_1 - 1, \alpha_2 - 1 \dots \alpha_m - 1$. Suy ra, trước hết đa thức $\Psi(x)$ có$(\alpha_1 - 1) + (\alpha_2 - 1) + \dots + (\alpha_m - 1) = n - m$ nghiệm. (Ta coi một giá trị x_i nào đó không phải là nghiệm của $\Psi(x)$ như là một nghiệm bội 0 của đa thức ấy. Điều này không ảnh hưởng tới kết quả của bài toán đang xét).

Hơn nữa, xét hàm

$h(x) = \Psi(x)/\varphi(x) = \lambda + \gamma x - x^2\varphi'(x)/\varphi(x)$ với miền xác định $x \neq x_i$, $i = \overline{1,m}$. Với lưu ý rằng $x^2\varphi'(x)$ là 1 đa thức bậc $n+1$, còn $\Psi(x)$ là đa thức bậc n ta có $\lim\limits_{x\to\infty} h(x) = \infty$.

Mặt khác, ta lại có : $\lim\limits_{x\to\infty} h(x)/x = \gamma - n > 0$ (do $\gamma > n$). Từ đó suy ra :

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = +\infty \text{ và } \lim_{x\to-\infty} h(x) = -\infty \quad (1)$$

Với lưu ý rằng $\varphi(x)$ có thể viết dưới dạng :

$$\varphi(x) = a_n(x-x_1)^{\alpha_1}(x-x_2)^{\alpha_2}\dots(x-x_m)^{\alpha_m}$$

ta có $\varphi'(x) = a_n\alpha_1(x-x_1)^{\alpha_1-1}(x-x_2)^{\alpha_2}\dots(x-x_m)^{\alpha_m} + \dots a_n\alpha_n(x-x_1)^{\alpha_m}\dots(x-x_{m-1})^{\alpha_{m-1}}(x-x_m)^{\alpha_m-1}$

Do đó h(x) có thể viết lại dưới dạng :

$h(x) = \lambda + \gamma x - x^2[\alpha_1/(x-x_1) + \alpha_2/(x-x_2) + \dots + \alpha_m/(x-x_m)]$. Suy ra : "i $= \overline{1,m}$ ta có :

$$\lim_{x\to x_i-0} h(x) = +\infty \text{ và } \lim_{x\to x_i+0} h(x) = -\infty \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra phương trình $h(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trong mỗi khoảng $(-\infty, x_1), (x_1, x_2), \dots (x_{m-1}, x_m), (x_m, +\infty)$.

Do vậy, đa thức $\Psi(x)$ cũng có ít nhất một nghiệm trong mỗi khoảng trên. Như vậy ngoài $(n+m)$ nghiệm đã nói ở trên, đa thức $\Psi(x)$ còn có thêm ít nhất $(m+1)$ nghiệm khác. Suy ra số nghiệm thực của đa thức $\Psi(x)$ không ít hơn $n+1$ nhưng $\Psi(x)$. là đa thức bậc $n+1$ nên số nghiệm của nó không vượt quá $n+1$. Vậy đa thức $\Psi(x)$ có $(n+1)$ nghiệm thực (Đpcm).

Trở lại bài toán, ta xét hai trường hợp sau :

1) Đa thức f(x) không nhận $x = 0$ làm nghiệm.

Trong trường hợp này, ta sẽ chứng minh bài toán bằng phương pháp quy nạp theo n.

Với $n = 1$ dễ thấy khẳng định của bài toán hiển nhiên đúng. Giả sử ta đã có điều khẳng định của bài toán đúng với $n = k$ $(k \in Z^+)$. Ta sẽ chứng minh khẳng định của bài toán cũng đúng với $n = k+1$, tức ta sẽ chứng minh :

Nếu đa thức

$f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_{k+1}x^{k+1}$ có $k+1$ nghiệm thực khác 0 thì đa thức

$$g(x) = a_0 + \gamma_1 x + \dots + \gamma(\gamma-1)\dots(\gamma-k)a_{k+1}x^{k+1}$$

cũng có $k+1$ nghiệm thực, với mọi $\gamma > k$.

Thật vậy, gọi λ là một nghiệm nào đó của $f(x)$. Khi đó, ta có thể biểu diễn $f(x)$ dưới dạng :

$$f(x) = q(x)(x+\lambda) \quad (3)$$

với $q(x)$ là đa thức bậc k *của* x :

$$q(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_k x^k \quad (4)$$

Thay (4) vào (3) và đồng nhất hệ số cùng bậc ở 2 vế của (3) ta được :

$a_0 - \lambda b_0$, $a_1 = \lambda b_1 + b_0, \dots, a_k = \lambda b_k + b_{k-1}\, a_{k+1} = b_k$. Suy ra :

$g(x) = a_0 + \gamma a_1 x + \dots + \gamma(\gamma-1)\dots(\gamma-k+1)a_k x^k + \gamma(\gamma-1)\dots(\gamma-k)a_{k+1}x^{k+1}$

$= \lambda b_0 + \gamma(\lambda b_1 + b_0) + \dots + \gamma(\gamma-1)\dots(\gamma-k+1)(\lambda b_k + b_{k-1}) + \gamma(\gamma-1)\dots(\gamma-k)b_k x^{k+1}$

$$= \lambda\varphi(x) + \gamma x\varphi(x) - x^2\varphi'(x) \quad (5)$$

với $\varphi(x) = b_0 + b_1\gamma x + \dots + \gamma(\gamma-1)\dots(\gamma-k+1)b_k x^k$.

(Đề nghị bạn đọc tự kiểm tra !)

Do $f(x)$ có $k+1$ nghiệm thực khác 0 nên $q(x)$ có k nghiệm thực khác 0 và do $\gamma > k$ nên $\gamma > k-1$. Vì vậy theo giả thiết quy nạp, ta có đa thức $\varphi(x)$ có k nghiệm thực. Hơn nữa, ta còn có $b_0 \neq 0$ (do $q(x)$ không nhận 0 làm nghiệm).

Từ đây và (5), theo khẳng định K, suy ra $g(x)$ có $(k+1)$ nghiệm thực.

Vậy, theo nguyên lí quy nạp, khẳng định của bài ra được chứng minh.

2) Đa thức f(x) nhận $x = 0$ làm nghiệm

Giả sử $x = 0$ là nghiệm bội k của $f(x)$ ($k \in Z^+$, $k \leq n$). Khi đó $f(x)$ sẽ có dạng :

$$f(x) = a_k x^k + ... + a_n x^n =$$

$$= (a_n x^{n-k} + ... + a_k) x^k$$

và $g(x)$ sẽ có dạng :

$$g(x) = \gamma(\gamma -) ... (\gamma - k + 1) a_k x^k + ... +$$

$$+ \gamma(\gamma - 1) ... (\gamma - n + 1) a_n x^n$$

$$= \gamma(\gamma - 1) ... (\gamma - k + 1) x^k [a_k + ... +$$

$$+ (\gamma - k) ... (\gamma - n + 1) a_n x^{n-k}] \quad (6)$$

Vì $f(x)$ có n nghiệm thực nên đa thức $\varphi(x) = a_n x^{n-k} + ... + a_k$ có $(n - k)$ nghiệm thực khác 0. Do đó, áp dụng kết quả của 1) cho $\varphi(x)$ và $\gamma' = \gamma - k > n - k - 1$ (do $\gamma > n - 1$) ta được đa thức

$\Psi(x) = a_k + ... + (\gamma - k)...(\gamma - n + 1) a_n x^{n-k}$ sẽ có $(n - k)$ nghiệm thực. Từ đây, kết hợp với (6), suy ra $g(x)$ có n nghiệm thực.

Bài toán được chứng minh hoàn toàn !

Bài toán 9 (T4/142)

Viết hệ đã cho dưới dạng :

$$\begin{cases} \sqrt{\sqrt[3]{x^4}(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2})} + \sqrt{\sqrt[3]{y^4}(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2})} = a \\ \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2}}(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2}) = a \\ \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = b \end{cases} \quad (1)$$

1) Nếu $b < 0$ hoặc $a < 0$ thì hệ đã cho vô nghiệm.

2) Xét $b \geq 0$, $a \geq 0$. Khi đó

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{b^3} = a \\ \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = b \end{cases}$$

a) Khi $a \neq \sqrt{b^3}$ hệ đã cho vô ngbiệm.

b) Khi $a = \sqrt{b^3}$ thì (1) $\Leftrightarrow \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = b$ (2)

Suy ra :

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x^2} \leq b \\ \sqrt[3]{y^2} \leq b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| \leq \sqrt{b^3} \\ |y| \leq \sqrt{b^3} \end{cases}$$

Vậy có thể viết nghiệm của (2) dưới dạng :

$$\begin{cases} x = \sqrt{b^3} \sin^3 t \\ y = \sqrt{b^3} \cos^3 t \end{cases} \quad t - \text{tùy ý}$$

Bài toán 10 (T5/146)

Ta chứng minh bằng phản chứng. Gỉa sử với mọi $x \in [0,1]$ ta có $P(\sin x) = Q(x)$ (1)

Nếu bậc của P (kí hiệu là deg P) bằng không thì $Q(x) \equiv C$ (hằng số) (trên $[0,1]$ và do đó trên cả trục số). Điều này mâu thuẫn với giả thiết max (deg P, deg Q) ≥ 1.

Vậy xét trường hợp deg $P \geq 1$. Lấy đạo hàm hai vế của (1) cho tới cấp 2 đối với $x \in [0,1]$ ta được

$$\cos x \, , p'(\sin x) = Q'(x)$$

$$(1 - \sin^2 x) P'(\sin x) - \sin x \, . \, P'(\sin x) = Q''(x)$$

Đặt $P_1(x) = (1 - x^2) P''(x) - x P'(x)$ thì deg P_1 = deg$P$ và $P_1(\sin x) = Q''(x)$ $\forall x \in [0,1]$

Xác định theo công thức quy nạp

$P_{k+1}(x) = (1 - x^2) P''_k(x) - x P'_k(x)$, $k \geq 1$

ta có $P_k(\sin x) = Q^{(2k)}(x)$ $\forall x \in [0,1]$ và deg $P_k = degP$.

Nếu $2k > deg\, Q$ thì $Q^{(2k)}(x) \equiv 0$ $\Rightarrow$ $P_k(\sin x) = 0$ $\forall$ $x \in [0,1]$ $\rightarrow$ $P_k(t) = 0$ $\forall t \in [0, \sin 1]$ $\Rightarrow$ $P_k(x) \equiv 0$. Điều này mâu thuẫn với deg $P_k = degP \geq 1$.

Vậy phải tồn tại $x \in [0,1]$ mà $P(\sin x) \neq Q(x)$

Bài toán 11 (T3/147)

Điều kiện : $a > 0$, $a \neq 1$; $ax^2 - 2x + 1 \geq 0$.

Với điều kiện đó, đặt $\sqrt{ax^2 - 2x + 1} = t$, $t \geq 0$ ta có thể viết bất phương trình đã cho dưới dạng sau :

$$\log_a 2 . \log_2 11 \leq \log_a(t+1) . \log_2 \sqrt{t^2 + 2} \quad (1)$$

1) Nếu $a > 1$ thì $f(t) = \log_a(t + 1) \, . \, \log_2\sqrt{t^2 + 2}$ là hàm đồng biến khi $t \geq 0$ và $f(3) = \log_a 4 \times$

$\times \log_2\sqrt{11} = \log_a 2 = \log_2 11$.

Do vậy (1) $\leftrightarrow$ t ≥ 3 hay $ax^2 - 2x + 1 \geq 3$.

Bất phương trình này không thể có nghiệm duy nhất.

2) Xét $0 < a < 1$. Khi đó $f(t)$ là hàm nghịch biến khi $t \geq 0$. Do vậy (1) $\leftrightarrow$ $t \leq 3$ hay

$$\begin{cases} ax^2 - 2x + 1 \geqslant 0 \\ ax^2 - 2x + 1 \leqslant 3 \end{cases} \quad (2)$$

$$(2) \leftrightarrow \begin{cases} ax^2 - 2x + 1 \geqslant 0 \\ ax^2 - 2x - 2 \leqslant 0 \end{cases} \quad (3)$$

cần xác định a $(0 < a < 1)$ để (3) có nghiệm duy nhất.

Nhận xét rằng với mọi a $(0 < a < 1)$ hệ (3) đều có $x = 0$ và $x = 1/2$ thỏa mãn. Suy ra (3) không thể có nghiệm duy nhất.

Kết luận : Không tồn tại a để bất phương trình có nghiệm duy nhất.

Bài toán 12 (T5/152) Diều kiện $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $x \neq \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}$; $x \neq \dfrac{k\pi}{3}$.

Ta có $cotg\,3x = \dfrac{1 - tgx\,tg2x}{tgx + tg2x}$

Hay $tgxtg2x + tg2xcotg3x + cotg3xtgx = 1$. Vậy phương trình tương đương với :

$tg^2x + tg^22x + cotg^23x = tgxtg2x +$

$+ tg2xcotg3x + cotg3xtgx$

$\Leftrightarrow (tgx - tg2x)^2 + (tg2x - cotg3x)^2$

$+ (cotg3x - tgx)^2 = 0$

$\Leftrightarrow tgx = tg2x = cotg3x$. Hệ phương trình cuối cùng vô nghiệm. Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài toán 13 (T8/154)

Ta xét hai trường hợp :

1) $|\cos x| < 1$ theo bất đẳng thức bunhiacôpxki ta có

$(\cos x\cos 2x\cos 3x + \sin x\sin 2x\sin 3x)^2 \leqslant$

$\leqslant (\cos^2x\cos^22x + \sin^2x\sin^22x)(\sin^23x + \cos^23x) =$

$= \cos^2x\cos^22x + \sin^2x\sin^22x < \cos^22x + \sin^22x = 1$

Vậy trong trường hợp này phương trình đã cho không có nghiệm.

2) $|\cos x| = 1 \Leftrightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$ thay vào vế trái phương trình ta có $\cos k\pi \cos 2k\pi \cos 3k\pi + 0 = 1$

Vậy phương trình đã cho có họ nghiệm duy nhất

$x = k\pi$ (k nguyên).

Bài toán 14 (T5/155)

Dặt $x = \cos\alpha$, $0 < \alpha < \pi/2$. Từ (1) ta có :

$32\cos\alpha(\cos^2\alpha - 1)(2\cos^2\alpha - 1)^2 = 1 - 1/\cos\alpha \quad (2)$

$\Leftrightarrow 32\cos^3\alpha \sin^2\alpha\,(2\cos^2\alpha - 1)^2 = 1 - \cos\alpha$

$\Leftrightarrow 8\sin^2 2\alpha \cos^2 2\alpha = 1 - \cos\alpha$

$\Leftrightarrow \cos\alpha = 1 - 2\sin^2 4x = \cos 8\alpha$

$\Leftrightarrow \quad 2\sin(9\alpha/2)\sin(1\alpha/2) = 0 \quad \Leftrightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} \sin(9\alpha/2) = 0 \\ \sin(7\alpha/2) = \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 9\alpha/2 = k\pi \\ 7\alpha/2 = k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha = 2k\pi/9 \\ \alpha = 2k\pi/7 \end{array}\right.$$

Do $0 < \alpha < \pi/2$ nên có $\alpha_1 = 2\pi/7$, $\alpha_2 = 4\pi/9$, $\alpha_3 = 2\pi/9$ là nghiệm của phương trình (2).

Vậy trong khoảng (0, 1) phương trình đã cho có 3 nghiệm :

$x_1 = \cos(2\pi/7)$; $x_2 = \cos(4\pi/9)$;

$x_3 = \cos(2\pi/9)$

Bài toán 15 (T8/115)

Dặt $\sin x = a$, $\sin y = b$, $-\sin\alpha = c$ thì hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 1 \\ a^4 + b^4 + c^4 = \cos 2\alpha + \sin^4\alpha = \cos^4\alpha \end{cases}$$

Ta có $ab + bc + ca =$

$= [(a + b + c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2)]/2 = -1/2$

$a^4 + b^4 + c^4 = (a^2 + b^2 + c^2)^2 -$

$- 2(a^2b^2 + b^2c^2 - c^2a^2) =$

$= 1 - 2[(ab + bc + ca)^2 - 2abc(a + b + c)] =$

$= 1 - 2(-1/2)^2 = 1/2$.

Vậy nếu $\cos^4\alpha \neq 1/2$ thì hệ vô nghiệm.

Xét $\cos^4\alpha = 1/2 \Rightarrow \cos^2\alpha = \sqrt{2}/2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin\alpha = \pm\sqrt{(2 - \sqrt{2})/2}$

Do đó hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases} a + b = \pm\sqrt{(2 - \sqrt{2})}/2 \\ a^2 + b^2 = \sqrt{2}/2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b = \pm\sqrt{(2 - \sqrt{2})/2} \\ ab = (1 - \sqrt{2})/2 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ a, b hay $\sin x$, $\sin y$ là nghiệm của phương trình

$t^2 \pm \sqrt{(2 - \sqrt{2})/}\,2\,t + (1 - \sqrt{2})/2 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = (-1)^m\sqrt{(2 - \sqrt{2})/8} + \sqrt{(3\sqrt{2} - 2)/8} \\ \sin y = (-1)^m\sqrt{(2 - \sqrt{2})/8} - \sqrt{(2\sqrt{2} - 2)/8} \end{cases}$$

$(m = \overline{1,2})$

(không kể nghiệm đối xứng khi đổi x cho y)

$$\begin{cases} x = (-1)^k \arcsin[(-1)^m\sqrt{(2 - \sqrt{2})/8} + \\ \qquad + \sqrt{(3\sqrt{2} - 2)/8}] + k\pi \\ y = (-1)^n \arcsin[(-1)^m\sqrt{(2 - \sqrt{2})/8} - \\ \qquad - \sqrt{(3\sqrt{2} - 2)/8}] + k\pi \end{cases} \quad (*)$$

Bài toán 16 (T5/156)

Điều kiện để cho bất phương trình có nghĩa là :

$$\begin{cases} 2x^3 + 3x^2 + 6x + 16 \geqslant 0 \\ 4 - x \geqslant 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+2)(2x^3 - x + 8) \geqslant 0 \\ 4 - x \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow 4 \geqslant x \geqslant -2$$

(vì $2x^2 - x + 8 > 0 \ \forall x$)

Xét hàm số

$$f(x) = \sqrt{2x^3 + 3x^2 + 6x + 16} - \sqrt{4 - x}$$

Ta có

$$f'(x) = \frac{6(x^2 + x + 1)}{2\sqrt{2x^3 + 3x^2 + 6x + 1}} + \frac{1}{2\sqrt{4 - x}} > 0$$

$\forall x \in (-2 ; 4)$

Suy ra $f(x)$ là hàm số đồng biến trong khoảng $(-2, 4)$.

Do đó nếu $x > 1$ thì $f(x) > f(1) = 2\sqrt{3}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x^3 + 3x^2 + 6x + 16} - \sqrt{4 - x} > 2\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x^3 + 3x^2 + 6x + 16} > 2\sqrt{3} + \sqrt{4 - x}$$

Vậy khoảng nghiệm của bất phương trình trên là :

$$4 \geqslant x > 1.$$

Bài toán 17 (T6/159)

Gọi x_o là nghiệm của phương trình. Ta có

$$ax_o^3 + bx_o^2 + cx_o = -1 + x_o^4$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpski ta có

$$(a^2 + b^2 + c^2)(x_o^6 + x_o^4 + x_o^2) \geqslant$$

$$\geqslant ax_o^3 + bx_o^3 + cx_o^2 = (1 + x_o^4)^2$$

suy ra $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant \dfrac{(1 + x_o^4)^2}{x_o^6 + x_o^4 + x_o^2}$

Ta chứng minh $(1 + x_o^4) / (x_o^6 + x_o^4 + x_o^3) \geqslant$

$$\geqslant 4/3 \qquad (1).$$

Biến đổi ta dẫn đến (1) tương đương với

$$(x_o^2 - 1)^2 (3x_o^6 + 2x_0^2 + 3) \geqslant 0 \qquad (2)$$

(2) đúng, vậy (1) đúng. Từ đó suy ra :

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 4/3 .$$

Dấu bằng xảy ra khi

a = 2/3 (với $x_o = 1$ là nghiệm)

hoặc $a = -2/3$ (với $x_o = -1$ là nghiệm)

Bài toán 18 (T7/157)

Ta chứng minh bằng phương pháp phản chứng. Giả sử $g(x) \neq x$. $\forall x > 0$. $\Rightarrow f(g(x)) = 1 \Leftrightarrow f(x) \neq 1 \ \ \forall x > 0$ (1). Đặt $h(x) = f(g(x)) - f(x))$, $x > 0$. Ta có $h(x)$ liên tục (do các hàm f, g liên tục) trên miền xác định $(0, +\infty)$ và $h(x) \neq 0$, $\forall x > 0$ (do (1)). Từ đó a dễ dàng có

$$h(x) > 0 \text{ với mọi } x > 0 \qquad (2)$$

$$\text{hoặc } h(x) < 0 \text{ với mọi } x > 0 \qquad (3)$$

Đặt $g_m(x) = g(g(...(g(x))...)$ *(m hàm g) ta có* nếu xẩy ra (2) thì

$(x) < f(g(x)) < f(g_2(x)) < f(g_3(x))$ với $\forall x > 0$ (4)

và nếu xảy ra (3) thì :

$f(x) > f(g(x)) > f(g_2(x)) > f(g_3(x))$ với $\forall x > 0$ (5)

Theo (1) ta thấy nếu $f(x) = 1 \Rightarrow f(g(x) \neq 1 \Rightarrow f(g_2(x)) = 1$ và từ đó $f(x) = f(g_2(x))$ mâu thuẫn với (4) và (5).

Còn nếu $f(x) \neq 1$, theo (1) ta cũng có $f(g(x) = 1 \Rightarrow f(g_2(x)) \neq 1 \Rightarrow f(g_3(x)) = 1$ và từ đó $f(g(x)) = f(g_3(x))$ cũng mâu thuẫn với (4) và (5).

Tóm lại : điều giả sử là sai. Vậy phải tồn tại $x > 0$ thỏa mãn $g(x) = x$.

§2. Đẳng thức, bất đẳng thức và các bài toán cực trị

Bài toán 19 (T3/114)

Ta hãy cố định một số k, và chia các cặp

$$(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots (a_k, b_k)$$

ra ba loại :

– Loại 1 gồm các cặp với $a_i > b_i$, giả thử có r cặp.

– Loại 2 gồm các cặp với $a_i = b_i$, giả thử có s cặp.

– Loại 3 gồm các cặp với $a_i < b_i$, giả thử có t cặp.

Như vậy $r + s + t = k$. Do k cố định, nên kết quả cần chứng minh không thay đổi nếu ta trao đổi vai trò các hoán vị $(a_1, a_2, \dots a_n)$ và $(b_1, b_2, \dots, b_n)$, do đó có thể coi rằng $r \geqslant t$.

Ta hãy xét hai trường hợp tùy theo $s > 0$ hay $s = 0$.

Trường hợp 1 : $s > 0$. Khi đó ta có $r + s$ cặp loại 1 và loại 2.

$$(a_{i_1}, b_{i_1}),\ (a_{i_2}, b_{i_2}),\ \dots,\ (a_{i_{r+s}}, b_{i_{r+s}}) . \quad (1)$$

Các số a_{i_j} $(1 \leq j \leq r + s)$ lấy $(r + s)$ giá trị khác nhau trong tập hợp $\{1, 1/2, \dots, 1/n\}$, vì vậy

$$a^* = \min(a_{i_j} : 1 \leq j \leq r + s) \leq 1/(r + s) .$$

Gọi (a^*, b^*) là cặp ứng với a^*. Vì (a, b^*) là một trong các cặp (1), nên theo giả thiết ta có

$$a_k + b_k \leq a^* + b^* \leq 2a^* \leq \frac{2}{r+s} = \frac{4}{2r+2s} <$$

$$< \frac{4}{r+s+t} = \frac{4}{k} \text{, do } r \geq t \text{ và } s > 0 .$$

Trường hợp 2 : $s = 0$. Khi đó ta xét r cặp loại 1

$(a_{i_1}, b_{i_1}),\ (a_{i_2}, b_{i_2}),\ \dots,\ (a_{i_r}, b_{i_r})$. Cũng như trên, gọi

$$a^* = \min(a_{i_j} : 1 \leq j \leq r),$$

trong trường hợp này ta có

$$a^* \leq 1/r \text{ và } b^* < a^*.$$

do (a^*, b^*) là một cặp loại 1. Vì vậy

$$a_k + b_k \leq a^* + a^* < 2a^* \leq 2/r =$$

$$= 4/2r \leq 4/(r + 1) = 4/k,$$

do giả thiết $r \geq t$.

Thành thử trong cả hai trường hợp, ta đều có

$$a_k + b_k < 4/k$$

Mặt khác với $n = 2m$, ta hãy xem hai hoán vị sau đây của dãy $(1, 1/2, \dots, 1/2m)$

$$a_1 = 1, a_2 = 1/2m, a_3 = 1/2, a_4 = 1/(2m - 1), \dots$$

$$, \dots, a_{(2m-1)} = 1/m,\ a_{2m} = 1/(m + 1),$$

$$b_1 = a_2,\ b_2 = a_1,\ b_3 = a_4,\ b_4 = a_3 \dots$$

$$\dots, b_{2m-1} = a_{2m},\ b_{2m} = a_{2m-1}.$$

Có thể thử lại rằng hai hoán vị này thỏa mãn điều kiện của bài toán, và để ý rằng

$$a_{2m} + b_{2m} = 1/(m + 1) + 1/m =$$

$$= (2m + 1)/m(m + 1).$$

Vì vậy với $c > 0$, ta có

$$\frac{4-c}{2m} - (a_{2m} + b_{2m}) = \frac{2-(m+1)c}{2m(m+1)} < 0$$

nếu chọn m đủ lớn.

Bài toán 20 (T5/114)

Đặt $f(x, y) = af_1(x, y) + bf_2(x, y)$ với

$$f_1(x, y) = \frac{\sin^4 x}{c\sin^2 x + d\cos^2 y} + \frac{\cos^4 x}{c\cos^2 x + d\sin^2 y}$$

$$f_2(x, y) = \frac{\cos^4 x}{c\sin^2 x + d\cos^2 y} + \frac{\sin^4 y}{c\cos^2 x + d\sin^2 y}$$

a) *Giá trị lớn nhất* – Ta có

$$f_1(x, y) \leq \sin^4 x/c\sin^2 x + \cos^4 x/c\cos^2 x =$$

$$= (1/c)(\sin^2 x) + \cos^2 x) = 1/c,$$

dấu đẳng thức đạt được khi và chỉ khi :

– hoặc $\cos^2 y = \cos^2 x = 0$,

– hoặc $\sin^2 y = \sin^2 x = 0$.

Tương tự $f_2(x, y) \leq 1/d$, dấu đẳng thức cũng chỉ xảy ra trong điều kiện trên.

Thành thử giá trị lớn nhất của $f(x, y)$ bằng $a/c + b/d$

b) *Giá trị nhỏ nhất* – Vì

$$c + d = c(\sin^2 x + \cos^2 x) + d(\cos^2 y + \sin^2 y)$$

nên theo bất đẳng thức Bunhiakôpxki, ta có :

$$(c + d)f_1(x, y) =$$

$$= (c\sin^2 x + d\cos^2 y + c\cos^2 x + d\sin^2 y) \times$$

$$\times \left(\frac{\sin^4 x}{c\sin^2 x + d\cos^2 y} + \frac{\cos^2 x}{c\cos^2 x + d\sin^2 y} \right) \geq$$

$$\geq (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 = 1.$$

Vậy :

$$f(x, y) \geq 1/(c + d).$$

Dấu đẳng thức chỉ xảy ra khi :

$$\frac{\sin^2 x}{c\sin^2 x + d\cos^2 y} = \frac{\cos^2 x}{c\cos^2 x + d\sin^2 y} =$$

$$= \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{c\sin^2 x + d\cos^2 y + c\cos^2 x + d\sin^2 y} = \frac{1}{c+d}.$$

tức là

$$c + d = (c\sin^2 x + d\cos^2 y)/\sin^2 x$$

$$= (c\cos^2 x + d\sin^2 y)/\cos^2 x$$

hay $\sin^2 x = \cos^2 y$.

Tương tự, $f_2(x, y)$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $1/(c + d)$ khi $\sin^2 x = \cos^2 y$. Thành thử giá trị nhỏ nhất của $f(x, y)$ là $(a + b)/(c + d)$.

Bài toán 21 (T6/120)

Theo giả thiết ta có

$$f(\pm 1) \leq a,\ f(\pm 1/2) \leq a \quad (1)$$

Hơn nữa

$$A = f(-1) = -a + b - c + d$$

$$B = f(-1/2) = -a/8 + b/4 - c/2 + d$$

$$C = f(1/2) = a/8 + b/4 + c/2 + d$$

$$D = f(1) = a + b + c + d.$$

Từ bốn hệ thức trên, rút ra

$$a = (-2/3)A + (4/3)B + (-4/3)C + (2/3)D$$

$$c = (1/6)A + (-8/6)B + (8/6)C + (-1/6)D.$$

Kết hợp với (1) ta được

$|a| \leqslant (2/3)|A| + (4/3)|B| +$

$+ (4/3)|C| + (2/3)|D| \leqslant 4\alpha$ (3)

$|c| \leqslant (1/6)|A| + (8/6)|B| +$

$+ (8/6)|C| + (1/6)|D| \leqslant 3\alpha$ (4)

Xét đa thức $f(x) = 4\alpha x^3 - 3\alpha x$, với $a = 4$, $c = -3$. Ta thấy $f'(x) = 12\alpha x^2 - 3x = 0$ khi $x = \pm 1/2$; $f''(x) = 24\alpha x$, $f''(1/2) = 12\alpha$, $f''(-1/2) = -12\alpha$. Do đó trong khoảng $[-1, 1]$ ta có

$f_{max} = f(-1/2) = \alpha$, $f_{min} = f(1/2) = -\alpha$.

Như vậy $|f(x)| \leqslant \alpha$ khi $|x| \leqslant 1$. Kết hợp với (3), (4), ta được $|a|_{max} = 4\alpha$ và $|c|_{max} = 3\alpha$.

Cũng từ giả thiết, ta có

$|f(\pm 1)| \leqslant \alpha$ $|f(1/2)| \leqslant \alpha$, $|f(0)| \leqslant \alpha$. (5)

Vậy

$E = f(-1) = -a + b - c + d$. $F = f(0) = d$.

$G = f(1/2) = a/8 + b/4 + c/2 + d$,

$H = f(1) = a + b + c + d$.

Ta rút ra

$b = (1/2)E + (1/2)H - F$, $d = F$.

Kết hợp với (5) ta được

$|b| \leqslant (1/2)|E| + (1/2)|H| + |F| \leqslant 2\alpha$ (6)

$|d| = |F| \leqslant \alpha$ (7)

Xét đa thức $f(x)' = 2\alpha x^2 - \alpha$, với $b = 2\alpha$, $d = -\alpha$. Ta thấy trong khoảng $[-1, 1]$ $f_{max} = f(\pm 1) = \alpha$, $f_{min} = f(0) = -\alpha$. Vậy trong khoảng $|x| \leqslant 1$ thì $|f(x)| \leqslant \alpha$. Kết hợp (6), (7) sẽ được

$|b|_{max} = 2\alpha$, $|d|_{max} = \alpha$.

Bài toán 22 (T7/127)

Từ hàm số đã cho ta viết được

$(\alpha - \alpha_1 y)\cos x + (\beta - \beta_1 y)\sin x = \gamma_1 y - \gamma$ (2)

Nếu $(\alpha - \alpha_1 y)$ và $(\beta - \beta_1 y)$ đồng thời bằng không thì dẫn đến y lấy giá trị hằng số. Loại bỏ trường hợp tầm thường này ta giả sử ít nhất một trong hai $(\alpha - \alpha_1 y)$ và $(\beta - \beta_1 y)$ là khác không. Khi đó ta có thể viết (2) dưới dạng

$\sqrt{(\alpha - \alpha_1 y)^2 + (\beta - \beta_1 y)^2}\sin(\varphi + x) = \gamma_1 y - \gamma$ (3)

trong đó

$\sin\varphi = (\alpha - \alpha_1 y)/\sqrt{(\alpha - \alpha_1 y)^2 + (\beta - \beta_1 y)^2}$

$\cos\varphi = (\beta - \beta_1 y)/\sqrt{(\alpha - \alpha_1 y)^2 + (\beta - \beta_1 y)^2}$

Từ (3) ta có :

$(\alpha - \alpha_1 y)^2 + (\beta - \beta_1 y)^2 \geqslant (\gamma_1 y - \gamma)^2$

hay

$(\alpha_1^2 + \beta_1^2 - \gamma_1^2)y^2 - 2(\alpha_1\alpha + \beta_1\beta - \gamma_1\gamma)y$

$+ \alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 \geqslant 0$ (4)

Nếu có giá trị y_o nào đấy thỏa mãn (4) thì ta luôn có thể tìm được giá trị r_o để có (3), tức là ta có (1).

$$y_o = \frac{\alpha\cos x_o + \beta\sin x_o + \gamma}{\alpha_1\cos x_o + \beta_1\sin x_o + \gamma_1}.$$

Vậy ta xét các miền giá trị của y thỏa mãn (4)

a) Nếu $(\alpha_1^2 + \beta_1^2 - \gamma_1^2) = 0$ thì (4) sẽ thỏa mãn với các

$y \geqslant (x^2 + \beta^2 - \gamma^2)/2(\alpha_1\alpha + \beta_1\beta - \gamma_1\gamma)$ nếu

$(\alpha_1\alpha + \beta_1\beta - \gamma_1\gamma) < 0$

$y \leqslant (\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2)/2(\alpha_1\alpha + \beta_1\beta - \gamma_1\gamma)$ nếu

$(\alpha_1\alpha + \beta_1\beta - \gamma_1\gamma) > 0$ }

Nghĩa là không đồng thời tồn tại giá trị lớn nhất và nhỏ nhất.

Nếu $(\alpha_1\alpha + \beta_1\beta - \gamma_1\gamma) = 0$ thì (4) hoặc vô nghiệm hoặc thỏa mãn với mọi y, tức không đồng thời tồn tại min và max của y.

b) Nếu $(\alpha_1^2 + \beta_1^2 - \gamma_1^2) > 0$.

Xét $\Delta' = (\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 - \gamma\gamma_1)^2$

$- (\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2)(\alpha_1^2 + \beta_1^2 - \gamma_1^2)$

– Nếu $\Delta \geqslant 0$ thì nghiệm của (4) là các y thuộc các khoảng $(-\infty, y_1]$ và $[y_2, +\infty)$ với $y_1 \leqslant y_2$ là nghiệm của phương trình ở (4). Không tồn tại đồng thời các giá trị min và max của y.

– Nếu $\Delta' < 0$, (4) thỏa mãn với mọi y từ $-\infty$ đến $+\infty$. Không tồn tại đồng thời min, max.

c) Nếu $(\alpha_1^2 + \beta_1^2 - \gamma_1^2) < 0$

– Nếu $\Delta' < 0$, (4) vô nghiệm. Không đồng thời tồn tại giá trị nhỏ nhất, lớn nhất.

– Nếu $\Delta' = 0$, phương trình ở (4) có nghiệm kép. Không tồn tại giá trị nhỏ nhất, lớn nhất.

– Nếu $\Delta' > 0$, (4) thỏa mãn với các giá trị y nằm trong khoảng $[y_1, y_2]$, trong đó :

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= (\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 - \gamma\gamma_1 - \sqrt{\Delta})/(\alpha_1^2 + \beta_1^2 - \gamma_1^2) \\ y_2 &= (\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 - \gamma\gamma_1 + \sqrt{\Delta})/(\alpha_1^2 + \beta_1^2 - \gamma_1^2) \end{aligned}\right\} (5)$$

Rõ ràng trường hợp này tồn tại đồng thời giá trị y nhỏ nhất là y_1 và lớn nhất là y_2.

Tóm lại điều kiện để hàm y ở (1) có giá trị lớn nhất và nhỏ nhất là :

1) $\alpha_1^2 + \beta_1^2 - \gamma_1^2 < 0$

2) $(\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 - \gamma\gamma_1)^2 - (\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2) \times$

$\times (\alpha_1^2 + \beta_1^2 - \gamma_1^2) > 0$

và các giá trị nhỏ nhất, lớn nhất là y_1 và y_2 ở trong (5).

Bài toán 23 (T7/124)

Từ $D = ac - b^2 > 0$ ta suy ra $a \neq 0$. Do $|-f(u,v)| = |f(u,v)|$ và vì $a \neq 0$ nên ta chỉ cần chứng minh (1) với $a > 0$ là đủ. Với $y \neq 0$ ta có :

$$f(x,y) = y^2[a(x/y)^2 + 2b(x/y) + c]$$

$$= y^2[a(x/y + b/a)^2 + D/a] > 0$$

Với $y = 0$ ta có $f(x,y) = ax^2$. Vậy, gọi G là tập hợp các cặp số nguyên (x, y) không đồng thời bằng không , ta có $f(x,y) > 0$ với mọi $(x, y) \in G$. Do đó ta có

$$f(u,v) = \min_{(x,y)\in G} f(x,y) = \min_{(x,y)\in G} |f(x,y)|$$

Đặt $\alpha = f(u,v)$, đương nhiên có $\alpha > 0$. Chú ý $f(x,y)$ đẳng cấp đối với x và y, ta dễ dàng chứng minh được u, v nguyên tố cùng nhau. Do u, v nguyên tố cùng nhau, nên tồn tại hai số nguyên s, t sao cho :

$$us - vt = 1 \qquad (2)$$

Đặt $g(x,y) \equiv f(ux + ty, vx + sy)$, ta có :

$$\min_{(x,y)\in G} g(x,y) = \min_{(x,y)\in G} f(ux + ty, vx + sy)$$

$$= f(u,v) = \alpha$$

(đạt được tại $x = 1$, $y = 0$). Chú ý đến biểu thức của $f(x,y)$ ta dễ dàng có :

$$g(x,y) = f(ux + ty, vx + sy)$$

$$= f(u,v)x^2 + 2\beta xy + f(s,t)y^2$$

với $\beta = uta + vsc + btv + bus$.

Từ (2) ta có

$$\alpha f(t,s) = f(u,v) \,.\, f(t,s) = \beta^2 + D.$$

Vậy :

$$g(x,y) = \alpha\left(x + \frac{\beta}{\alpha}y\right)^2 + Dy^2/\alpha$$

(viết được do $\alpha \neq 0$). Bây giờ ta xác định số nguyên n như sau :

$$n = \begin{cases} [\beta/\alpha] \text{ nếu } \{\beta/\alpha\} \leqslant 1/2 \\ [\beta/\alpha] + 1 \text{ nếu } \{\beta/\alpha\} > 1/2 \end{cases}$$

với $|x|$, $\{x\}$ chỉ phần nguyên, phần thập phân của x, thì ta có : $|n - \beta/\alpha| \leqslant 1/2$. Từ đó có :

$$\alpha \leqslant g(n, -1) = \alpha(n - \beta/\alpha)^2 + D/\alpha$$

$$\leqslant \alpha/4 + D/\alpha \Rightarrow \alpha^2 \leqslant (4/3)D.$$

Vậy, do $\alpha > 0$, có

$$\alpha \leqslant 2\sqrt{D/3}.$$

Bài toán 24 (T8/83)

$$A = (\sin^2x + \sin^2y + \sin^2z)/(\cos^2x + \cos^2y + \cos^2z)$$

$$= 3/(\cos^2x + \cos^2y + \cos^2z) - 1.$$

Do đó để tìm cực đại của A ta thay bằng việc tìm cực tiểu của

$P = \cos^2x + \cos^2y + \cos^2z$. Ta có

$$P = \cos^2x + (1 + \cos 2y)/2 + (1 + \cos 2z)/2$$

$$= \cos^2x + \cos(y + z) + \cos(y - z) + 1$$

$$= [\cos^2x - \cos(y - z)\cos x + 1/4] + 3/4.$$

Tam thức trong [ ] không âm vì

$$\Delta = \cos^2(y - z) - 1 \leqslant 0$$

và hệ số của $\cos^2x = 1 > 0$.

Vậy $P \geqslant 3/4$. Nếu $x = y = z = 60^o$ thì $P = 3/4$, khi đó A đạt cực đại ; giá trị cực đại đó bằng

$$3/(3/4) - 1 = 3.$$

Cách 2 : Ta cũng tìm cực tiểu của $P = \cos^2x + \cos^2y + \cos^2x$.

Ta có

$\cos^2x + \cos^2y + \cos^2z = 1 - \cos x \cos y \cos z$ (lượng giác lớp 9).

Theo bài 7/77 thì $\cos x \cos y \cos z \leqslant 1/8$ và đạt dấu hằng khi và chỉ khi $x = y = z = 60^o$.

Vậy $P \geqslant 1 - 2 . 1/8 = 3/4$ và $P = 3/4$ khi $x = y = z = 60^o$. Khi đó A đạt cực đại bằng 3.

Bài toán 25 (T10/87)

Vì x, y, z là ba góc của một tam giác nên

$\cos 3z = \cos 3[\pi - (x + y)]$

$= \cos[\pi - 3(x + y)] = -\cos 3(x + y)$ Ta có

$P = \cos 3x + \cos 3y + \cos 3(x + y)$

$$= 2\cos\frac{3(x + y)}{2}\cos\frac{3(x - y)}{2} +$$

$$+ 2\cos^2\frac{3(x + y)}{2} - 1$$

$$P + \frac{3}{2} = 2\cos^2\frac{3(x + y)}{2} +$$

$$+ 2\cos\frac{3(x - y)}{2}\cos\frac{3(x + y)}{2} + 1/2$$

Vế phải là một tam thức bậc hai đối với $\cos[3(x + y)/2]$ có biệt số $\Delta' = \cos^2[3(x - y)2] - 1 \leqslant 0$, hệ số của $\cos^2[3(x + y)/2]$ là $2 > 0$, nên tam thức luôn luôn $\geqslant 0$,

ta có $P \geqslant -3/2$.

P đạt giá trị nhỏ nhất bằng $-3/2$ khi tam thức bằng 0, tức là khi

$$\begin{cases}\Delta' = \cos^2[3(x - y)/2] - 1 = 0 \quad (1)\\ \cos[3(x + y)/2] = -(1/2)\cos[3(x - y)/2] \quad (2)\end{cases}$$

(1) cho $x = y$. Thay vào (2) :

$\cos 3y = -1/2 = \cos 120^o$

$3y = 120^o \Rightarrow x = y = 40^o$

và $3y = 240^o \Rightarrow x = y = 80^o$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức đã cho bằng $-3/2$ khi $x = y = 40^o$, $z = 100^o$ và khi $x = y = 80^o$, $z = 20^o$.

Bài toán 26(T6/86)

Nếu $\pi/2 > \alpha \geqslant \pi/4$ thì $\sin^6\alpha \geqslant \cos^6\alpha$, còn nếu $\pi/4 > \alpha > 0$ thì $\sin^6\alpha < \cos^6\alpha$. Vậy ta luôn có

$$(\alpha - \pi/4)(\sin^6\alpha - \cos^6\alpha) \geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow \sin^6\alpha . \alpha - \cos^6\alpha . \alpha - (\pi/4)\sin^6\alpha + (\pi/4)\cos^6\alpha \geqslant 0$$

$\Leftrightarrow \sin^6\alpha . \alpha + (\pi/2)\cos^6\alpha - \cos^6\alpha . \alpha \geqslant$

$\geqslant (\pi/4)\sin^6\alpha + (\pi/4)\cos^6\alpha$

$\Leftrightarrow \sin^6\alpha . \alpha + \cos^6\alpha(\pi/2 - \alpha) \geqslant$

$\geqslant (\sin^6\alpha + \cos^6\alpha)\pi/4$

$\Leftrightarrow \cos^6\beta . \alpha + \cos^6\alpha . \beta \geqslant$

$\geqslant (1 - 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha) . \pi/4 > \pi/16$

$\Leftrightarrow \cos^6\beta/\beta + \cos^6\alpha/\alpha \geqslant \pi/16 . 1/\alpha\beta.$ (1)

Nhưng từ $(\alpha - \beta)^2 \geqslant 0$ ta có $(alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta \geqslant 0$ hay $\alpha\beta \leqslant (\alpha + \beta)^2/4 = \pi^2/16$. Thay vào (1) ta có $\cos^6\beta/\beta + \cos^6\alpha/\alpha \geqslant 1/\pi$ (đpcm).

Bài toán 27 (T4/130)

Trước hết ta có nhận xét

$|a_i - i| + (a_i + i) = 2\max\{a_i, i\}$, Từ đó có

$$S_n + 2\sum_{i=1}^{n} i = \sum_{i=1}^{n}\{|a_i - i| + (a_i + i)\}$$

$$= 2\sum_{i=1}^{n}\max\{a_i, i\}.$$

Vậy S_n là một số chẵn.

$$S_n = 2\sum_{i=1}^{n}\max\{a_i, i\} - n(n + 1) \text{ ; vậy}$$

$S_n \leqslant 4\{n + (n - 1) + ... + (n/2 + 1)\}$

$- n(n + 1) = n^2/2$

nếu n chẵn, và

$S_n \leqslant 4\{n + (n - 1) + ... + ([n/2] + 2)\}$

$+ 2([n/2] + 1) - n(n - 1) = (n^2 - 1)/2$

nếu n lẻ.

Trong cả hai trường hợp, dấu đẳng thức đạt được tại hoán vị $(n, n - 1, ..., 1)$, tức là đối với hoán vị này thì S_n có giá trị lớn nhất.

Xét một hoán vị $(a_1, a_2, ..., a_n)$ có số $a_p < a_p + 1$ $(1 \leqslant p \leqslant n - 1)$ và gọi S_n tương ứng với nó là $S_n^{(1)}$. Đổi chỗ hai số a_p và a_{p+1} cho nhau ta được hoán vị mới có S_n tương ứng là $S_n^{(2)}$. Ta có

$S_n^{(2)} - S_n^{(1)} = A + B$, với

$A = |a_{p+1} - p| - |a_{p+1} - (p+1)|$,

$B = |a_p - (p+1)| - |a_p - p|$.

Ta thấy A và B chỉ nhận các giá trị 0, 1, −1, nhưng ít nhất một trong A, B nhận giá trị 1. Vậy $S_n^{(2)} - S_n^{(1)}$ chỉ có thể bằng 0 hoặc bằng 2.

Xuất phát từ hoán vị (1, 2, ..., n) có $S_n = 0$ ta thực hiện các phép đổi chỗ lần lượt các số $n - 1$, $n - 2$, ..., 1 cho từng số đứng liền sau. Đối với mỗi số ta tiến hành đến khi chúng ở vị trí cuối cùng. Cuối cùng ta được hoán vị (n, $n - 1$, ..., 1). Như vậy, S_n tăng từ 0 đến giá trị lớn nhất của nó, mỗi phép đổi chỗ thì S_n không đổi hoặc tăng 2 đơn vị. Vậy S_n nhận mọi giá trị chẵn trong các số từ 0 đến $n^2/2$.

Ở trên ta đã chứng minh S_n là một số chẵn vậy tất cả các giá trị có thể có của S là tất cả các số chẵn từ 0 đến $n^2/2$.

Bài toán 28 (T135/66)

Lời giải : Nếu chia hình tròn thành 8 phần bằng nhau thì ít nhất có một phần chứa 3 điểm. Bởi vì nếu cả 8 phần đó đều chứa không quá 2 điểm thì tổng số điểm sẽ không quá 16 điểm, trái giả thiết.

Rõ ràng, 3 điểm ở trong phần hình tròn nói trên lập thành một tam giác có diện tích nhỏ hơn $\frac{S}{8}$.

Trong trường hợp tổng quát, nếu lấy n điểm thì :

1) Khi $n = 2k + 1$. Giống như trên, chia hình tròn thành k phần bằng nhau thì có ít nhất một phần chứa 3 điểm. Ba điểm này lập thành một tam giác có diện tích nhỏ hơn $\frac{S}{k}$.

2) Khi $n = 2k$. Chia hình tròn thành $k - 1$ phần bằng nhau thì có ít nhất một phần chứa 3 điểm. Ba điểm này lập thành một tam giác có diện tích nhỏ hơn $\frac{S}{k-1}$.

Bài toán 29 (2/34)

Vì x, y, z là 3 góc của tam giác nên dễ chứng minh được rằng $\cot g x + \cot g y + \cot g z > 0$, do đó nếu $\cot g x + \cot g y + \cot g z$ đạt cực tiểu thì $(\cot g x + \cot g y + \cot g z)^2$ cũng đạt cực tiểu và ngược lại. Như thế bài toán đã cho trở thành :

Tìm các góc x, y, z của tam giác để $(\cot g x + \cot g y + \cot g z)^2$ đạt giá trị cực tiểu.

Ta có :

$$(\cot g x + \cot g y + \cot g z)^2 =$$
$$= \cot g^2 x + \cot g^2 y + \cot g^2 z +$$
$$+ 2(\cot g x \cot g y + \cot g y \cot g z + \cot g z \cot g x)$$

Vì x, y, z là 3 góc của tam giác nên ta chứng minh được rằng :

$$\cot g x \cot g y + \cot g y \cot g z + \cot g z \cot g x = 1$$

do đó :

$$(\cot g x + \cot g y + \cot g z)^2 =$$
$$+ \cot g^2 x + \cot g^2 y + \cot g^2 z + 2$$

nên vế trái cực tiểu khi

$\cot g^2 x + \cot g^2 y + \cot g^2 z$ cực tiểu.

Ta tìm điều kiện để

$\cot g^2 x + \cot g^2 y + \cot g^2 z$ cực tiểu.

Vì $\cot g^2 x, \cot g^2 y, \cot g^2 x \geq 0$ nên áp dụng bất đẳng thức Côsi cho từng cặp hai số hạng và cộng vế với vế các bất đẳng thức lại ta được :

$$\frac{\cot g^2 x + \cot g^2 y}{2} + \frac{\cot g^2 y + \cot g^2 z}{2} +$$
$$+ \frac{\cot g^2 z + \cot g^2 x}{2} \geq \cot g x \cot g y + \cot g y \cot g z +$$
$$+ \cot g z \cot g x.$$

hay

$$\cot g^2 x + \cot g^2 y + \cot g^2 z \geq 1$$

Đẳng thức xẩy ra khi $\cot g^2 x = \cot g^2 y = \cot g^2 z$, khi đó $\cot g^2 x + \cot g^2 y + \cot g^2 z$ đạt cực tiểu.

Nhưng vì x, y, z là ba góc của tam giác, $0 < x, y, z < 180^o$, nên từ đẳng thức

$$\cot g^2 x = \cot g^2 y = \cot g^2 z$$

ta rút ra $\cot g x = \cot g y = \cot g z$

và do đó $x = y = z = 60^o$

Vậy x, y, z là 3 góc của tam giác đều thì $cotgx + cotgy + cotgz$ đạt cực tiểu.

Bài toán 30 (77/65). Ta hãy chứng minh : φ $tgx > x\left(x < \frac{\pi}{2}\right)$. Diện tích ΔOAC lớn hơn diện tích tam giác cong OAB trên vòng tròn đơn vị :

$$\frac{1}{2}tgx > \frac{x}{2} \Rightarrow tgx > x.$$

Mặt khác $tgx + \sin x = \dfrac{4tg\frac{x}{2}}{1 - tg^4\frac{x}{2}}$

vì $0 < x < \frac{\pi}{2}$ nên $0 < tg\frac{x}{2} < 1 \Rightarrow$

$$0 < 1 - tg^4\frac{x}{2} < 1$$

do đó $\dfrac{1}{1 - tg^4\frac{x}{2}} > 1$, hay

$$\frac{4tg\frac{x}{2}}{1 - tg^4\frac{x}{2}} > 4tg\frac{x}{2} > 4\frac{x}{2} = 2x.$$

α, β, γ đều nhọn, nên ta có :

$\sin\alpha + tg\alpha > 2\alpha,$

$\sin\beta + tg\beta > 2\beta,$

$\sin\gamma + tg\gamma > 2\gamma,$

$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma + tg\alpha + tg\beta + tg\gamma >$

$> 2(\alpha + \beta + \gamma) = 2\pi.$

Chú ý : Có thể xét hàm số

$$f(x) = \sin x + tgx - 2x$$

với $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right)$. Ta có $f'(x) = \cos x + \dfrac{1}{\cos^2 x} =$

$7 - 2 \geq \cos^2 x + \dfrac{1}{\cos^2 x} - 2 \geq 0 \Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$. Do đó với $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ thì $f(x) > f(0) = 0 \Rightarrow \sin x + tgx - 2x > 0.$

Bài toán 31 (85/65). Bất đẳng thức tương đương với :

$$\sin\cos\varphi - \cos\sin\varphi < 0$$

$$\Leftrightarrow \sin\cos\varphi - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \sin\varphi\right) < 0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos\left[\frac{\pi}{4} + \left(\frac{\cos\varphi - \sin\varphi}{2}\right)\right] \times$$

$$\times \sin\left[-\frac{\pi}{4} + \left(\frac{\cos\varphi + \sin\varphi}{2}\right)\right] < 0 (*)$$

Lại có, với φ bất kì :

$|\cos\varphi - \sin\varphi| = \left|-2\sin\frac{\pi}{4}\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)\right| \leq$

$\leq \sqrt{2} < \frac{\pi}{2}$

$|\cos\varphi + \sin\varphi| = \left|2\cos\frac{\pi}{4}\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)\right| \leq$

$\leq \sqrt{2} < \frac{\pi}{2}$

Do đó, với φ bất kì thì :

$$0 < \frac{\pi}{4} + \frac{\cos\varphi - \sin\varphi}{2} < \frac{\pi}{2}$$

và $$-\frac{\pi}{2} < -\frac{\pi}{4} + \frac{\cos\varphi + \sin\varphi}{2} < 0$$

Từ đó suy ra bất đẳng thức (*) luôn đúng.

Bài toán 32 (127/66).

Vì A, B, C nhọn nên $tgA, tgB, tgC > 0$. Áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta có :

$tgA + tgB + tgC \geq 3\sqrt[3]{tgA\,tgB\,tgC}$ Mà $tgA + tgB + tgC = tgA.tgB.tgC$ nên $tgA.tgB.tgC \geq 3\sqrt{3}$.

Lại áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta có

$tg^nA + tg^nB + tg^nC \geq 3\sqrt[3]{tg^nA\,tg^nB\,tg^nC}$

$= 3\sqrt[3]{(tgAtgBtgC)^n} \geq 3(\sqrt{3})^n \geq$

$\geq 3\left(1 + \frac{1}{2}\right)^n \geq 3\left(1 + \frac{n}{2}\right)$

$= 3 + \frac{3n}{2}.$

Dẳng thức chỉ xảy ra khi $n = 0$.

Bài toán 33 (9/179).

Vì $cotgA + cotgB = \sin(A + B)/\sin A\sin B > 0$ nên $cotgA + cotgB + cotgC > 0$. Do vậy từ hệ thức đã cho suy ra $tgA + tgB + tgC = tgA\,tgB\,tgC > 0$. Suy ra ΔABC nhọn.

Giả sử ΔABC không đều và $A \neq B$. Khi đó :

$cotgA + cotgB = \sin(A + B) / \sin A\sin B =$

$= 2\sin C / [\cos(A - B) - \cos(A + B)] >$

$> 2\sin C / (1 + \cos C) =$

$= 4\sin(C/2)\cos(C/2) / 2\cos^2(C/2) = 2tg(C/2)$

Tương tự :

$\cot g B + \cot g C \geq 2tg(A/2)$;

$\cot g C + \cot g A \geq 2tg(B/2)$

Vậy : $\cot g A + \cot g B + \cot g C > tg(A/2) + tg(B/2) + tg(C/2)(1)$ Biến đổi tương tự sẽ có :

$tgA + tgB = \sin(A + B)/\cos A \cos B = 2\sin C/[\cos(A - B) + \cos(A + B)] > 2\sin C/(1 - \cos C) = 2\cot g(C/2)$;

$tgB + tgC \geq 2\cot g(A/2)$;

$tgC + tgA \geq 2\cot g(B/2)$

Vậy : $tgA + tgB + tgC > \cot g(A/2) + \cot g(B/2) + \cot g(C/2)(2)$.

Từ (1) và (2) suy ra :

$(tgA + tgB + tgC)(\cot g A + \cot g B + \cot g C) > (tg(A/2) + tg(B/2) + tg(C/2)).(\cot g(A/2) + \cot g(B/2) + \cot g(C/2))$ trái với giả thiết. Vậy ΔABC là tam giác đều.

Bài toán 34 (7/176).

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với :

$x(1 - \cos A) + y(1 - \cos B) > z(1 + \cos C)$

$\Leftrightarrow x\sin^2(A/2) + y\sin^2(B/2) > z\sin^2[(A + B)/2](1)$ Do $0 < z \leq xy/(x + y)$ nên (1) được suy ra từ bđt $x\sin^2(A/2) + y\sin^2(B/2) > xy\sin^2[(A + B)/2]/(x + y) \Leftrightarrow (x + y)\sin^2(A/2)/y + (x + y)\sin^2(B/2)/x > \sin^2[(A + B)/2](2)$

Xét vế phải của (2) :

$\sin^2[(A + B)/2] = \sin^2(A/2)\cos^2(B/2) + \sin^2(B/2)\cos^2(A/2) + 2\sin(A/2)\sin(B/2) \times \cos(A/2)\cos(B/2) < \sin^2(A/2) + \sin^2(B/2) + 2\sin(A/2)\sin(B/2) < \sin^2(A/2) + \sin^2(B/2) + \left[\frac{x}{y}\sin^2(A/2) + \frac{y}{x}\sin^2(B/2)\right] = (x + y)\sin^2(A/2)/y + (x + y)\sin^2(B/2)/x$

Vậy bđt (2) đúng và suy ra Dpcm.

Trong lời giải ta không cần điều kiện $x \geq z$, $y \geq z$ và thực ra từ điều kiện $xy \geq (x + y)z$ cũng suy ra được $x \geq z$, $y \geq z$.

Bài toán 35 (8/176).

Nhận xét rằng vế trái của (1) luôn luôn dương. Thật vậy, chỉ cần xét trường hợp ΔABC tù. Giả sử $A \geq \pi/2 > B > C$. Khi đó $\cos(C - A/2) > 0$ và $\cos(A - B/2) + \cos(B - C/2) \geq \cos(A - C/2) + \cos(C - C/2) = 2\cos(A/2)\cos[(A - C)/2] > 0$.

Vậy suy ra vế phải của (1) phải dương. Do vậy, nếu đặt $A - B/2 = x$, $B - C/2 = y$, $C - A/2 = z$ thì $x + y + z = \pi/2$,

$-\pi/2 < x, y, z < \pi/2$ và (1)

$$\Leftrightarrow \cos x + \cos y + \cos z = 4\cos x\cos y\cos z \quad (2)$$

Biến đổi vế trái của (2) ta được :

$\cos x + \cos y + \cos z = \sin(y + z) + \sin(z + x) + \sin(x + y) = 4\cos[(x + z)/2]\cos[(x + y)/2]\cos[(y + z)/2]$

Vậy

$(2) \Leftrightarrow \cos\frac{x + y}{2}\cos\frac{y + z}{2}\cos\frac{z + x}{2} = \cos x\cos y\cos z$ (3)

Ta có : $\cos^2[(x + y)/2] = (1/2)[1 + \cos(x + y)] \geq (1/2)[\cos(x - y) + \cos(x + y)] = \cos x\cos y > 0$

Tương tự $\cos^2[(y + z)/2] \geq \cos y\cos z > 0$; $\cos^2[(z + x)/2] \geq \cos z\cos x$

Suy ra (3) xảy ra khi và chỉ khi :

$\cos(x - y) = \cos(y - z) = \cos(z - x) = 1$

hay $\qquad x - y = y - z = z - x = 0$

(do $-\pi/2 < x, y, z < \pi/2$). Vậy $x = y = z = \pi/6$ và $A - B/2 = B - C/2 = C - A/2 = \pi/6$. Giải hệ này ta được $A = B = C$.

Bài toán 36 (9/176). a) Xét ΔABC nhọn. Viết bất đẳng thức đã cho dưới dạng :

$(\sin A\sin 2A + \sin B\sin 2B - \sin A\sin 2B - \sin B\sin 2A) + (\sin A\sin 2A + \sin C\sin 2C - \sin A\sin 2C - \sin C\sin 2A) + (\sin B\sin 2B + \sin C\sin 2C - \sin B\sin 2C - \sin C\sin 2B) \leq 0$

$\Leftrightarrow (\sin A - \sin B)(\sin 2A - \sin 2B) + (\sin C - \sin A)(\sin 2C - \sin 2A) + (\sin B - \sin C) \times (\sin 2B - \sin 2C) \leq 0$

Không mất tính tổng quát, giả sử $A \geq B \geq C$ thì $a \geq b \geq c$ và $\sin A \geq \sin B \geq \sin C$, $\sin 2A \leq \sin 2B \leq \sin 2C$.

Suy ra : $(\sin A - \sin B)(\sin 2A - \sin 2B) \leq 0$

$(\sin B - \sin C)(\sin 2B - \sin 2C) \leq 0$

$(\sin C - \sin A)(\sin 2C - \sin 2A) \leq 0$

Cộng các vế tương ứng ta thu được đpcm.

b) Xét trường hợp ΔABC không nhọn. Giả sử $B \geq \pi/2$; $A, C < \pi/2$. Khi đó $\sin 2A$, $\sin A$, $\sin C > 0$, $\cos B \leq 0$. Vậy : $2\sin 2A - \sin 2B - \sin 2C = \sin 2A + (\sin 2A - \sin 2B - \sin 2C) = \sin 2A - 4\sin A\cos B\cos C > 0$

Vậy $(\sin A - \sin B)(2\sin 2A - \sin 2B - \sin 2C) < 0$ (1)

Tương tự : $(\sin C - \sin B)(2\sin 2C - \sin 2B - \sin 2A) < 0$ (2).

Bài toán 37 (10/178).

Xét ΔABC tù, giả sử $A > \pi/2 > B \geqslant C$ thì $C \leqslant \pi/4$.

Vậy $\operatorname{tg}C \leqslant 1$ và $0 < \sin(C/20 < \sin C \leqslant \cos C$

$\Rightarrow 1/\cos C < 1/\sin(C/2)$;

$(1/\cos A) + (1/\cos B) =$
$= 2\cos((A + B)/2)\cos((A - B)/2)/\cos A\cos B < 0$

Vậy : $(1/\cos A) + (1/\cos B) + (1/\cos C) < (1/\cos C) < 1/\sin(C/2) < 1/\sin(A/2) + 1/\sin(B/2) + 1/\sin(C/2)$

Xét trường hợp ΔABC nhọn : Áp dụng bất đẳng thức *Côsi*, ta có :

$1/\cos A + 1/\cos B \geqslant 2/\sqrt{\cos A\cos B} \geqslant$
$\geqslant 4/(\cos A + \cos B) = 4/2\cos((A+B)/2)\cos((A-B)/2)$
$\geqslant 4/2\cos((A + B)/2) = 2/\sin(C/2)$, dấu "=" $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow A = B$. Tương tự :

$(1/\cos B) + (1/\cos C) \geqslant 2/\sin(A/2)$, dấu "=" $\Leftrightarrow B = C$.

$(1/\cos C) + (1/\cos A) \geqslant 2/\sin(B/2)$ dấu "=" $\Leftrightarrow A = C$.

Suy ra : $(1/\cos A) + (1/\cos B) + (1/\cos B) + (1/\cos C) + (1/\cos C) + (1/\cos A) \geqslant 2/\sin(C/2) + 2/\sin(B/2) + 2\sin(A/2)$

Hay là : $\dfrac{1}{\cos A} + \dfrac{1}{\cos B} + \dfrac{1}{\cos C} \geqslant$

$$\geqslant \frac{1}{\sin\frac{A}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{B}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{C}{2}}$$

Dẳng thức xảy ra khi và chỉ khi ΔABC đều.

Bài toán 38 (5/147).

Từ giả thiết $\pi/6 \leqslant \alpha_1 \leqslant \pi/2$, $i = \overline{1,1986}$ ta có $1/2 \leqslant \sin\alpha_1 \leqslant 1$ với $i = 1, 2 \ldots 1986$. Ta có $(\sin\alpha_1 - 1/2)(\sin\alpha_1 - 1) \leqslant 0 \Leftrightarrow \sin^2\alpha_1 - 3/2\sin\alpha_1 + 1/2 \leqslant 0 \Leftrightarrow \sin\alpha + 1/2\sin\alpha_1 \leqslant 3/2$ với mọi i, nên :

$$\sum_{i=1}^{1986}\sin\alpha_i + 1/2 \times \sum_{i=1}^{1986} 1/\sin\alpha_i \leqslant 1986.3/2 (1)$$

Lại theo bất đẳng thức côsi cho 2 số ta có :

$$\sum_{i=1}^{1986}\sin\alpha_i + 1/2 \times \sum_{i=1}^{1986} 1/\sin\alpha_i \geqslant$$

$$\geqslant 2\sqrt{1/2\sum_{i=1}^{1986}\sin\alpha_i \cdot \sum_{i=1}^{1986} 1/\sin\alpha_i} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) có :

$$\sum_{i=1}^{1986}\sin\alpha_i \cdot \sum_{i=1}^{1986} 1/\sin\alpha_i \leqslant 9/8 \times 1986$$

Dấu bằng xảy ra khi (1) và (2) xảy ra dấu bằng tức là $\sin\alpha_i$ bằng 1/2 hoặc bằng 1 và

$$\sum_{i=1}^{1986}\sin\alpha_i = 1/2 \times \sum_{i=1}^{1986} 1/\sin\alpha_i$$

Gọi số các $\sin\alpha_i$ bằng 1/2 là p, số các $\sin\alpha_i$ bằng 1 là q ta có :

$$\begin{cases} p + q = 1986 \\ p/2 + q = (2p + q)/2 \end{cases} \Leftrightarrow p = q = 993.$$

Bài toán 39 (6/148).

Xét $f(x) = (x + \lambda)^2 = x^2 + 2\lambda x + \lambda^2$ thuộc M. Khi đó $g(x) = (1 + \beta + \gamma x)\lambda^2 + 2(x + \alpha + \beta x)\lambda + x^2 + \alpha x + \gamma \geqslant 0 \ \forall x, \lambda$

Vậy $1 + \beta + \gamma x \geqslant 0 \ \forall x$. Suy ra $\gamma = 0$ và $1 + \beta \geqslant 0$.

Lấy $\lambda = 0$ thì $g(x) = x^2 + \alpha x + \gamma$
$= x^2 + \alpha x \geqslant 0 \ \forall x$

suy ra $\alpha = 0$. Vậy $g(x)$ có dạng :

$g(x) = (1 + \beta)\lambda^2 + 2(x + \beta x)\lambda + x^2 \geqslant 0 \ \forall\lambda, x$

Từ đó suy ra $-1 \leqslant \beta \leqslant 0$. Vậy điều kiện cần để $f(x)$ thuộc M là $\alpha = \gamma = 0$; $-1 \leqslant \beta \leqslant 0$ (1).

Ngược lại, với điều kiện (1)

thì $\forall f(x) = ax^2 + bx + c \in M$

ta có : $g(x) = ax^2 + bx + c + b\beta x + \beta c =$

$= ax^2 + b(1 + \beta)x + c(1 + \beta)$

Do $\Delta = b^2 - 4ac \leqslant 0$ nên $ac \geqslant 0$. Do vậy $g(x)$ có biệt thức $\Delta = b^2(1 + \beta)^2 - 4ac(1 + \beta)$
$= (b^2 - 4ac)(1 + \beta)^2 + 4ac\beta(1 + \beta) \leqslant 0$

nên $g(x)$ thuộc M.

Bài toán 40 (6/132).

Trước hết ta chứng minh bổ đề sau :

Bổ đề : Nếu $\varphi = 2k\pi(n + 1)$ với k và n là các số nguyên và k không chia hết cho $(n + 1)$ thì

$S = \cos\varphi + \cos 2\varphi + \dots + \cos n\varphi = -1.$

Thực vậy, có $2\sin(\varphi/2).S = \sum_{k=1}^{n} 2\cos k\varphi \sin(\varphi/2) =$

$$= \sum_{k=1}^{n} [\sin(k+1/2)\varphi - \sin(k-1/2)\varphi]$$

$$= \sin\left(\frac{2n+1}{2}\varphi\right) - \sin\frac{\varphi}{2}$$

Vậy : $S = \dfrac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}\varphi\right)}{2\sin(\varphi/2)} - \dfrac{1}{2}$. (chú ý $\sin(\varphi/2) \neq 0$ vì k không chia hết cho $(n+1)$. Do có

$$\frac{2n+1}{2}\varphi = \frac{2n+1}{2}\cdot\frac{2k\pi}{n+1} = \frac{(2n+1)k\pi}{n+1} =$$
$= 2k\pi - k\pi/(n+1) = 2k\pi - \varphi/2$ nên

$\sin\left(\frac{2n+1}{2}\varphi\right) = -\sin(\varphi/2)$. Do vậy : $S = -1$.

Bây giờ trở lại bài toán. Do đúng với mọi x nên nói riêng với x_1, $x_2 = 2x_i \dots x_n = nx_i$ ta có :

$$\begin{cases} a_1\cos^2 x_1 + \dots + a_n\cos^2 nx_1 \geq 1 \\ a_1\cos^2 x_2 + \dots + a_n\cos^2 nx_2 \geq 1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_1\cos^2 x_n + \dots + a_n\cos^2 nx_n \geq 1 \end{cases}$$

Chú ý rằng $kx_2 = k.2x_1 = 2kx_1 = 2xk$ nên hệ (1) trở thành :

$$\begin{cases} a_1\cos^2 x_1 + \dots + a_n\cos^2 x_n \geq 1 \\ a_1\cos^2 2x_1 + \dots + a_n\cos^2 2x_n \geq 1 \end{cases}$$

Cộng theo từng vế các bất đẳng thức của (2) ta có :

$$a_1T_1 + a_2T_2 + \dots + a_nT_n \geq 3 \qquad (3)$$

Ở đó $T_i = \sum_{i=1}^{n} \cos^2 kx_i$

Ta có

$$2T_i - n = \sum_{k=1}^{n} (2\cos^2 kx_i - 1) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \cos k(2x_i)$$

Lấy $2x_i = 2i\pi/(n+1)$; rõ ràng i không chia hết cho $(n+1)$ vì $1 \leq i \leq n$, nên theo bổ đề ta có $2T_i - n = -1$ hay

$$T_i = (n-1)/2 \text{ với mọi } i = 1, \dots, n. \qquad (4)$$

Như vậy lấy $x_1 = \pi/(n+1)$, thì theo cách xác định $x_2, \dots x_n$ ở trên ta có $x_2 = 2\pi/(n+1)$, $\dots x_n = n\pi/(n+1)$, hay với mọi $1 \leq i \leq n$ ta có $2x_i = 2i\pi/(n+1)$. Do vậy, theo (4) khi lấy $x_1 = \pi/(n+1)$ thì từ (3) ta có :

$\frac{n-1}{2}(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \geq n$ hay

$a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq 2n/(n-1)$(đ.p.c.m)

Bài toán 41 (8/138).

Theo bất đẳng thức Bunhiacôpxki suy rộng (xem báo TH và TT số 6 năm 1983), ta có : với m, n số dương a_{ij}, $i = \overline{1,m}$; $j = \overline{1,n}$ và m, n là các số nguyên không âm thì :

$$\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\right)^m \leq \prod_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^m\right)$$

Áp dụng bất đẳng thức này ta được :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} m_j\right)^k = \left(\sum_{i=1}^{n} 1 \dots 1 \sqrt[k]{a_i \dots}\sqrt[k]{a_i}\,.\sqrt[k]{m_1^k/a_i^k}\right)^k$$

k-m-1 m

$$\leq (1^k + \dots + 1^k)^{k-m-1}(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^m \times$$

n

$$\times\left(\frac{m_1^k}{a_1^m} + \dots + \frac{m_n^k}{a_n^m}\right) = n^{k-m-1}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^m \times$$

$$\times\left(\sum_{i=1}^{n} m_i^k / a_i^m\right).$$

Vậy có :

$$\sum_{i=1}^{n} m_i^k / a_i^m \geq \left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right)^k /$$

$$/\, n^{k-m-1}\left(\sum_{i=1}^{n} a_1\right)^m \text{(đ.p.c.m)}$$

Bài toán 42 (3/150).

Với $a_1, a_2 > 0$ và $a_1, a_2 \leq 1$.

Ta thấy :

$2/(1 + \sqrt{a_1a_2}) - (1/1 - a_1) + 1/(1 + a_2)) =$

$= (1/(1 + \sqrt{a_1a_2}) - 1/(1 + a_1)) +$

$+ (1/(1 + \sqrt{a_1a_2}) - 1/(1 + a_2))$

$= \sqrt{a_1}(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2}) / (1 + \sqrt{a_1a_2})(1 + a_1) +$

$+ \sqrt{a_2}(\sqrt{a_2} - \sqrt{a_1}) / (1 + \sqrt{a_1a_2})(1 + a_2)$

$$= \frac{(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2(1 - \sqrt{a_1a_2})}{(1 + \sqrt{a_1a_2})(1 + a_1)(1 + a_2)} \geq 0.$$

Vậy có : $2/(1 + \sqrt{a_1a_2}) \geqslant$

$$\geqslant 1/(1 + a_1) + 1/(1 + a_2) \qquad (1)$$

Dấu bằng xảy ra khi $a_1 = a_2$ hoặc $a_1a_2 = 1$.

Áp dụng (1) vào bài ta có :

$$\sum_{i=1}^{n} 1/(1 + a_i) \leqslant \sum_{i=1}^{[(n+1)/2]} 2/(1 + \sqrt{a_1a_{n+1-i}})$$

Dấu bằng xảy ra khi n chẵn và hoặc :

$a_1 = a_2 = \ldots = a_n$ hoặc $a_ia_{n+1-i} = 1$.

Xét hàm số $f(x) = 1/(1 + e^x)$ ta thấy $f(x)$ là hàm số lõm với $x \leqslant 0$ bởi vì :

$$f'(x) = -e^x/(1 + e^x)^2$$

và $f''(x) = e^x(e^x - 1)/(1 + e^x)^3 \leqslant 0$ (với $x \leqslant 0$).

Áp dụng bất đẳng thức Jensen vào hàm lõm với các $x_i \leqslant 0$ và

$e^{x_i} = \sqrt{a_ia_{n+1-i}} \leqslant 1$ ta có :

$$\sum_{i=1}^{n} 1/(1+m) \leqslant \sum_{i=1}^{[(n+1)/2]} 2/(1+\sqrt{a_i.a_{n+1-i}}) \leqslant$$

$$\leqslant n/\left(1 + \sqrt[n]{\prod_{1}^{n} a_i}\right)$$

Bài toán 43 (2/152).

Gọi $P(x) = (x - x_o)(x - x_1) \ldots (x - x_n)(x - x_{n+1})$ và

$P_k(x) = \prod_{i=0, i\neq k}^{n+1} (x - x_i)$. Dễ thấy

$$P'(x) = \sum_{k=0}^{n+1} P_k(x) \quad \text{và}$$

$$P''(x) = \sum_{\substack{j,k=0\\ k\neq j}}^{n+1} P_k(x)/(x - x_j)$$

Từ đó

$$P''(x_i) = \sum_{\substack{j,k=0\\ k\neq 0}}^{n+1} P_k(x_i)/(x_i - x_j) =$$

$$= \sum_{\substack{k=0\\ k\neq i}}^{n+1} P_i(x_i)/(x_ix_k) = 0$$

do điều kiện của đầu bài với $i = 1, 2, \ldots, n$.

Do đó $x(x - 1)P''(x) =$

$$= (n + 2)(n + 1)P(x) \qquad (1)$$

Dễ dàng thấy rằng chỉ tồn tại duy nhất một đa thức bậc $n + 2$ với hệ số cao nhất bằng 1 thỏa mãn (1).

Mặt khác đa thức $Q(x) = (-1)^n.P(1 - x)$ thỏa mãn phương trình (1). $Q(x)$ là đa thức bậc $n + 2$ với hệ số cao nhất bằng 1. Vậy

$$(-1)^nP(1 - x) = P(x).$$

Từ đó và từ giả thiết

$$0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < 1$$

ta suy ra điều phải chứng minh.

Bài toán 44 (9/157).

Xét hàm số $f(x) = tg^2x$, $x \in [0, \pi/2)$

Ta có :

$$f''(x) = (2\cos^4x + 6\sin^2x\cos^2x)/\cos^6x > 0$$

$\forall x \in [0, \pi/2)$ nên $f(x)$ là hàm lồi trên $[0, \pi/2)$.

Vậy theo bất đẳng thức Jensen ta có :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} tg^2\alpha_i\right)/n \geqslant tg^2\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i/n\right) = tg^2(\pi/n) \qquad (1)$$

$$\Leftrightarrow n\ /\left(n + \sum_{i=1}^{n} tg^2\alpha_i\right) \leqslant 1/(1 + tg^2(\pi/n)) = \cos^2(\pi/n)$$

$$\Leftrightarrow 2n\ /\left(n + \sum_{i=1}^{n} tg^2\alpha_i\right) - 1 \leqslant 2\cos^2(\pi/n) - 1.$$

Vậy cuối cùng có :

$$\left(n - \sum_{i=1}^{n} tg^2\alpha_i\right) / \left(n + \sum_{i=1}^{n} tg^2\alpha_i\right) \leqslant \cos(2\pi/n).$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi (1) xảy ra dấu bằng tức là $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = \pi/n$.

Bài toán 45 (7/159).

Theo bài ra có $f(x) > 0$, $\forall x > 0$ và $f(t) = 1$ $\forall\ 0 < t < n_o$ (ở đây $n_o \neq 1$ để $\log_{n_o} n$ có nghĩa).

Biểu diễn n ($n \in N$ tùy ý) ra cơ số n_o :

$n = x_k.n_o^k + x_{k-1}n_o^{k-1} + \ldots + x_o$ ($k \geqslant 0$, $0 \leqslant x_i < n_o$).

Nếu $k = 0$ thì $n = x_o < n_o\ 1 + [\log_{n_o} n]$

$$\Rightarrow f(n) = 1 < \frac{f(n_o)}{f(n_o) - 1} \leqslant \frac{f(n_o)}{f(n_o) - 1}$$

Nếu $k > 0$ thì $f(n) = f(x_k . n_o^k + x_{k-1}n_o^{k-1} + \ldots + x_o)$

$$\leqslant f(x_o) + f(x_1 n_o^1 + \ldots + x_k \ldots n_o^k)$$

$\leqslant ...$

$\leqslant f(x_o) + f(x_1) \cdot f(n_o) + ... +$

$+ f(x_k) \cdot f(n_o)^k$ (do (1) và (2)).

$\leqslant \dfrac{f(n_o)^{k+1}}{f(n_o) - 1}$(đpcm)

Bài toán 46 (5/160).

Theo định lí Viet ta có $mnp = 1$. Lấy $\alpha = 45^o$; $\beta = -30^o$; $\gamma = 165^o$ thì $\alpha + \beta + \beta = 180^o$

và $\cos\alpha = \sqrt{2}/2$; $\cos\beta = \sqrt{3}/2$;

$\cos\gamma = -\cos 15^o = -\sqrt{2 + \sqrt{3}}/2$. Vậy bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$\sqrt{2}\, np + \sqrt{3}\, pm - \sqrt{2 + \sqrt{3}}\, mn \leqslant m^2 + n^2 + p^2$ hay

$2np\cos\alpha + 2pm\cos\beta + 2mn\cos\gamma \leqslant m^2 + n^2 + p^2 (*)$

Ta có

$(p - m\cos\beta - n\cos\alpha)^2 + (m\sin\beta - n\sin\alpha)^2 \geqslant 0$

$\Rightarrow p^2 + m^2\cos^2\beta + \sin^2\beta + n^2(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) \geqslant$

$\geqslant 2mp\cos\beta + 2np\cos\alpha - 2mn\cos(\alpha + \beta)$

$\Rightarrow p^2 + m^2 + n^2 \geqslant 2mp\cos\beta + 2np\cos\alpha + 2mn\cos\gamma$

(vì $\alpha + \beta + \gamma = 180^o$)

Bất đẳng thức (*) được chứng minh. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi :

$$\begin{cases} m\sin\beta = n\sin\alpha \\ p = m\cos\beta + n\cos\alpha \end{cases}$$

$\Leftrightarrow m/\sin\alpha = n/\sin\beta = p/\sin\gamma$.

Đặt $k = m/\sin\alpha$. Ta có

$k^3 = mnp/\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma = -4(\sqrt{3} + 1)$

$\Rightarrow k = -\sqrt[3]{4(\sqrt{3} + 1)}$ $m = k\sin\alpha =$

$= -\sqrt[6]{2} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3} + 1}$

$n = k\sin\beta = \sqrt[3]{(\sqrt{3} + 3)/2}$

$p = k\sin\gamma = \sqrt[6]{(7 - 4\sqrt{3})/2}$

Bài toán 47 (10/136).

Ta có

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A = b^2 + c^2 - (2bc\sin A).\text{cotg}A = b^2 + c^2 - 4S\text{cotg}A$. ($S$ là diện tích ΔABC).

Từ đó suy ra

$a^2 + b^2 + c^2 = 4S(\text{cotg}A + \text{cotg}B + \text{cotg}C)$ (1)

Mặt khác :

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \geqslant 2bc - 2bc\cos A =$

$= 2bc(1 - \cos A)$

$= 4bc.\sin^2(A/2)$

$= 4bc.\sin A.\dfrac{\sin^2(A/2)}{\sin A}$

$= 4S.\text{tg}(A/2)$

Do vậy $\dfrac{a^2}{tg(A/2)} \geqslant 4S$. Từ đó suy ra :

$$\frac{a^2b^2c^2}{tg(A/2) \cdot tg(B/2) \cdot tg(C/2)} \geqslant (4S)^3 \quad (2)$$

Kết hợp (1) và (2) ta được đ.p.c.m. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$, tức ΔABC là tam giác đều.

Cách 2 ;

Gọi r là bán kính đường tròn nội tiếp ΔABC. Ta có :

$r = S/p = (p - a)\text{tg}(A/2) = (p - b)\text{tg}(B/2) =$

$= (p - c)\text{tg}(C/2)$ (1)

$$\text{cotg}A = \frac{(b^2 + c^2 - a^2)/2bc}{2S/bc} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4S} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta suy ra bất đẳng thức cần phải chứng minh tương đương với :

$(4S)^3 \leqslant a^2b^2c^2.p^3(p - a)(p - b)(p - c)/S^3 =$

$= p^2a^2b^2c^2/S$

$\Leftrightarrow (a + b - c)^2(b + c - a)^2(c + a - b)^2 \leqslant a^2b^2c^2$

(3) Mà

$$\begin{cases} a^2 \geqslant a^2 - (b - c)^2 = (a + b - c)(a + c - b) \\ b^2 \geqslant b^2 - (a - c)^2 = (a + b - c)(b + c - a) \\ c^2 \geqslant c^2 - (a - b)^2 = (a + c - b)(b + c - a). \end{cases}$$

Nhân các vế tương ứng ta được (3).

Bài toán 48 (6/74).

$(n + 1)\cos[\pi/(n + 1)] - n\cos(\pi/n) > 1$

tương đương với

$n[\cos[\pi/(n + 1)] - \cos(\pi/n)] > 1 - \cos[\pi/(n + 1)]$

hay

$n\sin[\pi/2n(n + 1)]\sin[\pi(2n + 1)/2n(n + 1)] >$

$> \sin^2[\pi/2(n + 1)]$

Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức cuối cùng là đúng. Chỉ cần chứng minh :

1) $\sin[\pi(2n + 1)/2n(n + 1)] > \sin[\pi 2n/2n(n + 1)] =$

$= \sin[\pi/(n + 1)] > \sin[\pi/2(n + 1)]$

(với $n \geqslant 2$, các cung ở đây đều ở trong khoảng $(0, \pi/2)$ nên hàm số sin đồng biến).

2) $n\sin[\pi/2n(n+1)] \geqslant \sin[\pi/2(n+1)]$

Để cho tiện ta đặt : $\pi/2n(n+1) = \alpha$ ta có $n\sin\alpha \geqslant \sin n\alpha$.

Ta chứng minh bất đẳng thức này bằng phương pháp quy nạp – Với $n = 2$ ta có $2\sin\alpha \geqslant \sin 2\alpha$

hay $\quad 2\sin\alpha \geqslant 2\sin\alpha\cos\alpha$ (vì $\cos\alpha \leqslant 1$)

– Giả sử bất đẳng thức đúng với $n = k$ tức là :

$k\sin\alpha \geqslant \sin k\alpha$, ta phải chứng minh

$(k+1)\sin\alpha \geqslant \sin(k+1)\alpha$

Thật vậy :

$k\sin\alpha \geqslant \sin k\alpha$

$k\sin\alpha + \sin\alpha \geqslant \sin kx + \sin\alpha$

$$(k+1)\sin\alpha \geqslant 2\sin\frac{(k+1)\alpha}{2}\cos\frac{(k-1)\alpha}{2}$$

Bất đẳng thức cuối cùng là đúng vì :

$$\cos\frac{(k+1)\alpha}{2} < \cos\frac{(k-1)\alpha}{2}$$

(các cung $(k+1)\alpha/2$; $(k-1)\alpha/2$ đều ở trong khoảng $(0, \pi/2)$ nên hàm số cosin nghịch biến).

Ta có :

$$(k+1)\sin\alpha > 2\sin\frac{(k+1)\alpha}{2}\cos\frac{(k+1)\alpha}{2}$$

$(k+1)\sin\alpha \geqslant \sin(k+1)\alpha$ (đpcm)

Bài toán 49 (8/74).

Áp dụng định lí hàm số sin, ta có $a/\sin A = b/\sin B = c/\sin C = 2R$. do đó

$a^2/\sin^2 A = b^2/\sin^2/B = C^2/\sin^2 C = 4R^2$

$(a^2 + b^2 - c^2)/(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C) =$

$= 4R^2/1$ mà $a^2 + b^2 - c^2 = 4R$ nên

$\sin^2 A + \sin^2 B - \sin^2 C = 1$

$\sin^2 A + \sin^2 B = 1 + \sin^2 C$

$(1 - \cos 2A)/2 + (1 - \cos 2B)/2 = 1 + \sin^2 C$

$-(\cos 2A + \cos 2B)/2 = \sin^2 C$

$-\cos(A+B)\cos(A-B) = \sin^2 C \qquad (1)$

Vì $A + B + C = \pi$ nên

$$\begin{cases} \sin(A+B) = \sin C \\ \cos(A+B) = -\cos C \end{cases}$$

Do đó chia hai vế của (1) cho

$-\cos(A+B)\sin(A+B) = \cos C\sin C$ ta có

$\cos(A-B)/\sin(A+B) = \sin C/\cos C$

$(\cos A\cos B + \sin A\sin B)/(\sin A\cos B + \sin B\cos A) = \mathrm{tg}C$

Chia tử số và mẫu cho cho $\cos A\cos B$, ta có :

$(1 + \mathrm{tg}A\,\mathrm{tg}B)/(\mathrm{tg}A + \mathrm{tg}B) = \mathrm{tg}C$

$(1 + \mathrm{tg}A\mathrm{tg}B)/(1 - \mathrm{tg}A\mathrm{tg}B) =$

$= \mathrm{tg}C(\mathrm{tg}A + \mathrm{tg}B)/(1 - \mathrm{tg}A\mathrm{tg}B) =$

$= \mathrm{tg}C.\mathrm{tg}(A+B)$

$= -\mathrm{tg}^2 C$ (vì $A + B + C = \pi$)

Do đó

$(\mathrm{tg}A\mathrm{tg}B + 1)/(\mathrm{tg}A\mathrm{tg}B - 1) = \mathrm{tg}^2 C$

Chú ý rằng ; từ $a^2 + b^2 - c^2 = 4R$ suy ra

1) C là góc nhọn, do đó $\mathrm{tg}C$ xác định.

2) A và $B \neq 90^\circ$ nên việc chia tử và mẫu của vế trái cho $\cos A\cos B$ là thực hiện được.

3) $A \neq \pi/2 - B$ (vì C nhọn) do đó

$\mathrm{tg}A \neq \mathrm{tg}(\pi/2 - B) = \mathrm{cotg}B$,

$\mathrm{tg}A\mathrm{tg}B \neq 1$ hay $\mathrm{tg}A\mathrm{tg}B - 1 \neq$, vậy việc chia hai vế cho $\mathrm{tg}A\mathrm{tg}B - 1$ cũng thực hiện được.

Do đó mọi phép biến đổi trên là tương đương.

Bài toán 50 (7/101).

Trước hết ta nhận xét rằng từ $0 < (n+1)x < \pi/2$ suy ra $0 < nx < \pi/2$ và $0 < x < \pi/2$.

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với $1 - \cos^{2n}x < \dfrac{\sin nx\sin x}{\cos nx\cos x}$

hay (do $\cos nx\cos x > 0$)

$$\cos(n+1)x < \cos^{2n+1}x\cos nx \qquad (1)$$

Ta chứng minh bất đẳng thức (1) bằng quy nạp. Với $n = 1$ bất đẳng thức (1) trở thành $\cos 2x < \cos^4 x$ hay $\cos^4 x - 2\cos^2 x + 1 > 0$, nghĩa là $\sin^4 x > 0$. Bất đẳng thức này đúng vì $0 < x < \pi/2$.

Giả sử rằng bất đẳng thức (1) đúng với $n = k - 1$, tức là với $0 < kx < \pi/2$ ta có

$$\cos kx < \cos^{2k-1}x\cos(k-1)x \qquad (2)$$

ta chứng minh (1) cũng đúng với $n = k$, tức là với $0 < (k+1)x < \pi/2$ thì $\cos(k+1)x < \cos^{2k+1}\cos kx$.

Thật vậy, theo nhận xét ở trên do $0 < (k+1)x < \pi/2$ nên ta có $0 < x$, $\pi/2$ và $0 < kx < \pi/2$ nghĩa là có (2). Nhân hai vế của (2) với $\cos x > 0$

$\cos x \cos kx < \cos^{2k}x \cos(k-1)x$,

$\cos(k+1)x + \sin x \sin kx <$

$< \cos^{2k}x(\cos x \cos kx + \sin x \sin kx)$

$\cos^{2k+1} x \cos kx \cos(k+1)x >$

$> \sin x \sin kx \cos^{2k}x \sin x \sin kx =$

$= (1 - \cos^{2k}x) \sin x . \sin kx > 0$.

Vậy theo nguyên lí quy nạp ta có bất đẳng thức cần chứng minh.

Cách 2

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\mathrm{tg} nx \mathrm{tg} x + \cos^{2n}x > 1$$

Kí hiệu $f(n) = \mathrm{tg} nx \mathrm{tg} x + \cos^{2n}x$. Ta chứng minh $f(k+1) > f(k)$ với $k = 0, 1, \ldots n-1$:

$\mathrm{tg} kx \,\mathrm{tg} x + \cos^{2k}x < \mathrm{tg}(k+1)x \,\mathrm{tg} x + \cos^{2k+2}x$

$\Leftrightarrow \cos^{2k}x - \cos^{2k+2}x < \mathrm{tg} x[\mathrm{tg}(k+1)x - \mathrm{tg} kx]$

$\Leftrightarrow \cos^{2k}x \sin^2 x < \mathrm{tg} x \sin x/\cos(k+1)x \cos kx$

$\Leftrightarrow \cos^{2k}x < 1/\cos x \cos(k+1)x \cos kx$

Do giả thiết $0 < (n+1)x < \pi/2$ nên các hàm số lượng giác ở vế phải đều có giá trị dương và nhỏ hơn 1, vậy bất đẳng thức là đúng.

Thay $k = 0, 1, \ldots, n-1$ ta có

$f(n) > f(n-1) > \ldots > f(0)$. Nhưng $f(0) = 1$, vậy $f(n) > 1$ (đ.p.c.m). Có thể mở rộng góc x thành $0 < nx < \pi/2$. Đồng thời bất đẳng thức cần chứng minh có thể làm chặt hơn là

$$(1 - \cos^n x)(1 + \cos^n x) < \mathrm{tg} nx \sin x.$$

Chứng minh bất đẳng thức này tương tự cách giải 2 ở trên, chỉ cần thay $\mathrm{tg} x$ bằng $\sin x$.

Bài toán 51 (5/112).

a) Chứng minh (1) $\Rightarrow$ (2).

Ta có

$P = \cos A + \cos B + \cos C + \cos D$

$$= \cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + \cos\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}$$

$$= \cos\frac{A+b}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} - \cos\frac{C-D}{2}\right) \qquad (3)$$

(vì $(A+B) + (C+D) = 2\pi$).

$M = \mathrm{cotg} A + \mathrm{cotg} B + \mathrm{cotg} C + \mathrm{cotg} D$

$$= \frac{\sin(A+B)}{\sin A \sin B} = \frac{\sin(C+D)}{\sin C \sin D}$$

$$= \sin(A+B)\left(\frac{1}{\sin A \sin B} + \frac{1}{\sin C \sin D}\right)$$

Từ $P = 0$ suy ra hoặc $\cos[(A+B)/2] = 0$ hoặc $\cos[(A-B)/2] = \cos[(C-D)/2]$.

1) Nếu $\cos[(A+B)/2] = 0$ thì $\sin(A+B) = 0 \Rightarrow M = 0$.

2) Nếu $\cos[(A-B)/2] = \cos[(C-D)/2]$ thì hoặc $A - B = C - D$ hoặc $A - B = D - C$, tức là hoặc $A + D = B + C = \pi$, hoặc $A + C = B + D = \pi$. Lúc đó tính M theo $A + D$, $B + C$ hoặc theo $A + C$, $B + D$ tương tự như theo $A + B$ trong (4) ta có $M = 0$.

b) Chứng minh (2) $\Rightarrow$ (1)

Từ (4) ta có $M = 0 \Leftrightarrow \sin(A+B) = 0$ hoặc $1/\sin A \sin B = 1/\sin C \sin D$.

1) Nếu $\sin(A+B) = 0$ thì $\cos[(A+B)/2] = 0 \Rightarrow P = 0$.

2) Nếu $1/\sin A \sin B = 1/\sin C \sin D$ thì $\sin A \sin B = \sin C \sin D$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos(A-B) - \cos(A+B)}{2} =$$

$$= \frac{\cos(C-D) - \cos(C+D)}{2}$$

$\Leftrightarrow \cos(A-B) = \cos(C-D)$

$\Leftrightarrow A - B = C - D$ hoặc $A - B = D - C$

$\Leftrightarrow A + D = B + C = \pi$ hoặc $A + C = B + D = \pi$.

Lúc đó tính P theo $A + D$, $B + C$ hoặc theo $A + C$, $B + D$ tương tự như theo $A + B$ trong (3) ta có $P = 0$.

Bài toán 52 (5/111).

Vì $x = 20^\circ$ nên

$\sin x + \sin 2x = 2\sin(3x/2)\cos(x/2) =$

$= \cos(x/2) = \sin 4x$.

Vậy A trở thành

$A = 2^5[(\sin x + \sin 2x)^5 - \sin^5 2x - \sin^5 x]$

$= 2^5.5[\sin x \sin 2x(\sin^3 x + \sin^3 2x) +$

$+ 2\sin^2 x \sin^2 2x(\sin x + \sin 2x)]$

$= 2^5.5\sin x \sin 2x(\sin x + \sin 2x) \times$

$\times (\sin^2 x + \sin x \sin 2x \times \sin^2 2x)$

$= 2^5.5\sin x \sin 2x \cos(x/2)[\cos^2(x/2) - \sin x \sin 2x]$

Mặt khác cũng vì $x = 20^\circ$ nên

$\sin x \sin 2x = (\cos x - 1/2)/2$.

$\cos x \cos(x/2) = [\cos(x/2) + 3/2]/2$.

Do đó

$A = 2^4.5(\cos x - 1/2)\cos(x/2)$

$\times [\cos^2(x/2) - \cos(x/2) + 1/4]$

$= 2^4.5(\cos x - 1/2)\cos(x/2).(3/4)$

$= 2^2.3.5[\cos(x/2)/2 + \sqrt{3}/4 - \cos(x/2)/2]$

$= 3.5.\sqrt{3} = 15\sqrt{3}.$

Bài toán 53 (7/132).

Gọi A_1, B_1, C_1 là chân các đường phân giác đỉnh A, các đường trung tuyến đỉnh B và C. Từ A_1 kẻ đường thẳng song song với CC_1 cắt AB ở A_2. Ta có ; $MA/MA_1 = C_1A/C_1A_2 = BC_1/C_1A_2 = BC/A_1C$ Do $b \geqslant c$ nên $MA_1 = MN + NA_1$ và chú ý

$MA/MA_1 + 1 = p_a/MA_1$ ta có :

$$p_a/(MN + NA_1) = (2b + c)/b \qquad (1)$$

Tương tự ta cũng có $NA/NA_1 = 1 + b/c$ và cũng chú ý $NA/NA_1 + 1 = p_a/NA_1$, ta có :

$$p_a/NA_1 = (2c + b)/c \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta rút ra được :

$$MN = \frac{p_a(b^2 - c^2)}{(c + 2b)(b + 2c)} \qquad (3)$$

Theo bất đẳng thức Côsi cho 2 số ta có : $(c + 2b)(b + 2c) \leqslant (9/4)(b + c)^2$. Vậy phần a) được chứng minh.

$$MN \geqslant \frac{4}{9}\frac{p_a(b^2 - c^2)}{(b + c)^2} = \frac{4}{9}\frac{p_a(b - c)}{b + c}$$

Tiếp theo, do $b \geqslant c$ nên $MC_1 = GC_1 - GM$; Vậy : $\dfrac{MC_1}{MC} = \dfrac{(1/3)m_c - MG}{(2/3)m_c + MG} = \dfrac{c}{2b}$.

Từ đó rút ra được

$$MG = (2/3)(b - c)m_c/(c + 2b). \qquad (4)$$

Chứng minh tương tự (với chú ý do $b \geqslant c$ nên có $NB_1 = NG + GB_1$) ta có ;
$$NG = (2/3)(b - c)m_b/(2b + c) \qquad (5)$$

Như vậy, từ (3), (4) và (5) ta có :

$$\frac{GN.GM}{NM} = \frac{4}{9}\frac{(b - c)m_b m_c}{(b + c)p_a}$$

Phần b) cũng được chứng minh xong.

Bài toán 54 (9/168).

Điều kiện cần : Hiển nhiên.

Điều kiện đủ : Trong mọi ΔABC ta có :

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

$\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C =$

$= -1 - 4\cos A\cos B\cos C.$

Vì vậy từ giả thiết ta suy ra

$\sin A/2.\sin B/2.\sin C/2 = \cos A.\cos B.\cos C$ (*)

Từ (*) suy ra ΔABC nhọn.

Ta có : $\cos A.\cos B = 1,2.[\cos(A - B) + \cos(A + B)] \leqslant 1,2[1 + \cos(A + B)].$

$$= 1/2[1 - \cos C] = \sin^2(C/2) \qquad (1)$$

Hoàn toàn tương tự :

$$\cos B.\cos C \leqslant \sin^2(A/2) \qquad (2)$$

$$\cos C.\cos A \leqslant \sin^2(B/2) \qquad (3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra

$$\cos A.\cos B.\cos C \leqslant \sin(A/2).\sin(B/2).\sin(C/2).$$

Dấu đẳng thức xảy ra chỉ khi ΔABC đều.

Bài toán 55 (9/171).

Nếu ΔABC đều dễ thấy :

$\cos(A - B) + \cos(B - C) + \cos(C - A) = 3$

$= 2(\cos A + \cos B + \cos C)$. Ngược lại :

$\cos(A - B) + \cos(B - C) + \cos(C - A) =$

$2(\cos A + \cos B + \cos C) \Rightarrow$

$[\cos(A - B) - \cos C] +$

$[\cos(B - C) - \cos A] + [\cos(C - A) - \cos B] =$

$= \cos A + \cos B + \cos C.$

$\Rightarrow [\cos(A - B) + \cos(A + B)] +$

$+ [\cos(B - C) + \cos(B + C)] + [\cos(C - A) + \cos(C + A)] = (\cos A + \cos B + \cos C)$

$\Rightarrow 2(\cos A\cos B + \cos B\cos C + \cos C\cos A) =$

$= (\cos A + \cos B + \cos C).$

Chú ý rằng $(\cos A\cos B + \cos B\cos C + \cos A\cos C \leqslant (\cos A + \cos B + \cos C)^2/3$

$$1 < \cos A + \cos B + \cos C \leqslant 3/2 \qquad (*)$$

và $\cos A + \cos B + \cos C = 3/2$ tương đương với ΔABC là đều. Nên từ đẳng thức trên suy ra $2/3 \times (\cos A + \cos B + \cos C)^2 \geqslant (\cos A + \cos B + \cos C) \Rightarrow \cos A + \cos B + \cos C \geqslant 3/2$, do (*) suy ra ΔABC đều (đpcm).

Bài toán 56 (6/147).

Ta có :

$$tgx^{\cos 2x} \times \frac{1}{\sin 2x} = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^{\cos 2x} . \frac{1}{2\sin x\cos x}$$

$$= \frac{1}{2(\cos x)^{\cos 2x + 1}\sin x^{1 - \cos x}} =$$

$$= \frac{1}{2(\cos x)^{2\cos^2 x}(\sin x)^{2\sin^2 x}}$$ và $tgx > 0$ khi $0 < x < \pi/2$ nên bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với bất đẳng thức :

$2 \geq (1/\cos^2x)^{\cos^2x} . (1/\sin^2x)^{\sin^2x} (*)$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi tổng quát ta có

$$(1/\cos^2x)^{\cos^2x}(1/\sin^2x)^{\sin^2x} \leq$$

$$\leq \frac{\cos^2x}{\cos^2x} + \frac{\sin^2x}{\sin^2x} = 2$$

Dấu bằng xảy ra khi $\cos^2x = \sin^2x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin x = \cos x$ (chú ý $\sin x$, $\cos x > 0$ khi $0 < x < \pi/2$)

$\Leftrightarrow x = \pi/4$. Vậy (*) được chứng minh.

Bài toán 57 (7/152).

Ta có $S = abc/4R$ và $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ cho nên $p^2R^2 = pa^2b^2c^2/16(p-a)(p-b)(p-c) =$
$= a^2b^2c^2.S^2/16(p-a)^2(p-b)^2(p-c)^2$ còn
$a^2(p-b)(p-c) = a^2p(p-a)(p-b)(p-c)/p(p-a) =$
$= a^2S^2/p(p-a) = S^2(a/(p-a) - a/p)$
tương tự $b^2(p-a)(p-c) = S^2(b/(p-b) - b/p)$

$c^2(p-a)(p-b) = S^2(c/(p-c) - c/p)$

Đặt $X = a/(p-a)$; $Y = b/(p-b)$; $Z = c/(p-c)$

ta có đẳng thức cần chứng minh là :

$4S^2 \leq S^2(X + Y + Z - (a + b + c)/p) \leq X^2Y^2Z^2S^2/16$. hay $4 \leq X + Y + Z - 2 \leq X^2Y^2Z^2/16$.

Mặt khác do

$a/(p-a) = X$ nên $a/p = X/(X+1)$. Vậy :

$X/(X+1) + Y/(Y+1) + Z/(Z+1) =$

$= a/p + b/p + c/p = 2$.

Vậy $X(Y+1)(Z+1) + Y(Z+1)(Y+1) +$
$+ Z(X+1)(Y+1) = 2(X+1)(Y+1)(Z+1)$

suy ra $\quad X + Y + Z + 2 = XYZ$.

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 4 số dương X, Y, Z 2 ta có :

$$2 + X + Y + Z \geq 4\sqrt{2XYZ}$$

do đó $\quad XYZ \geq 4\sqrt[4]{2XYZ}$ và $XYZ \geq 8$.

Vậy $X + Y + Z - 2 \geq 4 \qquad (1)$

Mặt khác $(XYZ - 8)^2 \geq 0$

nên $\quad (XYZ)^2 - 16(XYZ) + 64 \geq 0$

hay $X^2Y^2Z^2 \geq 16(XYZ - 4) = 16(X + Y + Z + 2 - 4)$

Vậy $X^2Y^2Z^2/16 \geq X + Y + Z - 2 \qquad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra điều cần chứng minh. Muốn có dấu "=" thì ta phải có $X = Y = Z = 2$ tức là $a/(p-a) = b/(p-b) = c/(p-c) = 2$ hay $2p = 3a = 3b = 3c$. Ta có tam giác đều. Ngược lại khi $a = b = c$ thì ta lại có $X = Y = Z = 2$ do đó $X + Y + Z - 2 = 4$ và $X^2Y^2Z^2/16 = 4$.

Bài toán 58 (9/108)

Đặt $a = x_1 = \min(x_1, x_2, ..., x_{1979})$, ta có $(x_k - a)(x_k - 1964) \leq 0$ $(k = 1, 2, ..., 1979)$

$\Leftrightarrow x_k^2 - (a + 1964)x_k + 1964a \leq 0$.

Lấy tổng từ 1 đến 1979 và đặt

$A = (x_1^2 + x_2^2 + ... + x_{1979}^2)/1979$,

$B = (x_1, x_2 + ... + x_{1979})/1979$

thì ta được

$A - (a + 1964)B + 1964a \leq 0$

hay $A \leq (a + 1964)B - 1964a$

$A/B^2 \leq -1964a/B^2 + (a + 1964)/B$.

Đặt vế phải bằng $f(1/B)$, nó là tam thức bậc hai đối với $1/B$ có hệ số của $(1/B)^2$ là $-1964a < 0$, vì vậy

$$f(1/B) \leq f\left(\frac{a + 1964}{2.1964a}\right) = \frac{(a + 1964)^2}{4.1964a}.$$

Do đó $A/B^2 \leq \dfrac{(a + 1964)^2}{4.1964a}$

Ta có $P = 1979A/1979^2B^2 = A/1979B^2$

nên $\qquad P \leq \dfrac{1}{1979} \cdot \dfrac{(a + 1964)^2}{4.1964a}$.

Như vậy P đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi

$(x - a)(x_k - 1964) = 0$ $(k = 1, 2, ..., 1979)$

và

$B = 2.1964a/(a + 1964)$

Gọi x là số các số hạng của số liệt bằng 1964, ta có

$$B = \frac{(1979 - x)a + 1964x}{1979} = \frac{2.1964a}{a + 1964}$$

$\Rightarrow (1964 - a)x = (1964 - a)\,1964a/(a + 1964)$

1) Nếu $1964 - a \neq 0$ thì $x = 1979a/(a + 1964)$. Dễ chứng minh được rằng x nguyên khi và chỉ khi $a + 1964 = 1979$ tức là khi $a = 15$, $x = 15$ (chú ý 1979 là số nguyên tố). Ta có số liệt :

$$x_1 = x_2 = ... = x_{1964} = 15,$$

$x_{1965} = x_{1966} = \dots = x_{1979} = 1964$

Khi đó

$P_1 = (1/1979)(15 + 1964)^2/(4.1964.15) =$

$= 1979/(60.1964)$

2) Nếu $1164 - a = 0$ thì $a = 1964$, khi đó

$x_1 = x_2 = \dots = x_{1979} = 1964$

$P_2 = 1/1979.$

Bài toán 59 (6/110)

• Đặt $a_n = (1 + 1/n)^{2n+1}$. Trước hết ta chứng minh bất đẳng thức.

$$\left(\frac{k^2-1}{k^2}\right)^{2k+1}\left(1+\frac{1}{k-1}\right)^2 < 1 \quad (1)$$

$$k = 2, 3, \dots$$

$$\Leftrightarrow \left(1+\frac{1}{k^2+1}\right)^{2k+1} > \left(1+\frac{1}{k-1}\right)^2$$

Do $\left(1+\frac{1}{k^2+1}\right)^{2k+1} = 1 + C^1_{2k+1}1/(k^2-1) +$

$+ C^2_{2k+1}1/(k^2-1)^2 + C^3_{2k+1}1/(k^2-1)^3 + \dots$

và chú ý đến khai triển của vế phải bất đẳng thức ta chỉ cần chứng minh :

$C^1_{2k+1}1/(k^2-1) + C^2_{2k+1}1/(k^2-1)^2 +$

$+ C^3_{2k+1}1/(k^2-1)^3 > 1/(k-1)^2 + 2/(k-1)$

$\Leftrightarrow (2k+1)/(k^2-1) + k(2k+1)/(k^2-1)^2 +$

$+ k(2k+1)(2k-1)/3(k^2-1)^3 >$

$> 1/(k-1)^2 + 2/(k-1). \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2/(k-1) - 1/(k^2-1) + k(2k+1)/(k^2-1)^2 +$

$+ k(2k+1)(2k-1)/3(k^2-1)^3 >$

$> 1(k-1)^2 + 2(k-1)$

$\Leftrightarrow k(2k+1)/(k^2\ 1)^2 + k(2k+1)(2k-1)/3(k^2-1)^3 > 1/(k-1)^2 + 1(k^2-1) = 2k/(k^2-1)(k-1)$

$\Leftrightarrow (2k+1)/(k+1) + (4k^2-1)/3(k+1)^2(k-1) > 2$

$\Leftrightarrow (4k^2-1)/3(k+1)^2(k-1) > 1/(k-1)$

$\Leftrightarrow 4k^2 - 1 > 3k^2 - 3.$

Bất đẳng thức cuối cùng là hiển nhiên, vậy có (1).

Ta chứng minh $a_k < a_k - 1$.

Ta có

$a_k/a_{k-1} = (1 + 1/k)^{2k+1}/[1 + 1/(k-1)]^{2k-1}$

$$= \left(\frac{k^2-1}{k^2}\right)^{2k+1}\left(1+\frac{1}{k-1}\right)^2 < 1 \text{ (do (1))}.$$

Vậy $a_k < a_{k-1}$.

Cho $k = 2, 3, 4, \dots$ ta sẽ có

$$8 = a_1 > a_2 > a_3 > \dots$$

Vậy $a_n \leq 8$ với mọi n.

Để chứng minh $a_n > 7$, trước hết ta chứng minh bất đẳng thức

$$(1 + a)^m \geq 1 + ma + (m-1)^2a^2 \quad (2)$$

trong đó m là số tự nhiên, a_1 là số dương và

$$(m-1)[a(m-1) - 1] \geq 0.$$

Khi $m = 1$ bất đẳng thức (2) đúng.

Giả sử (2) đúng với $m = k$, ta chứng minh (2) cũng đúng với $m = k + 1$:

$(1 + a)^{k+1} = (1 + a)(1 + a)^k \geq$

$\geq (1 + a)[1 + ka + (k-1)^2a^2]$

$= 1 + ka + (k-1)^2a^2 + a + ka^2 + (k-1)^2a^3$

$= 1 + (k+1)a + k^2a^2 + a^2 - ka^2 + (k-1)^2a^3$

$= 1 + (k+1)a + k^2a^2 + a^2(k-1)[a(k-1) - 1]$

$\geq 1 + (k+1)a + k^2a^2$ (d.p.c.m).

Áp dụng bất đẳng thức (2), đặt $a = 1/n$, $m = 2n + 1$, ta có

$(1 + 1/n)^{2n+1} \geq 1 + (2n+1)/n +$

$+ (2n + 1 - 1)^2/n^2 = 7 + 1/n > 7$

Bài toán được giải xong.

Bài toán 60 (5/130)

Ta cố định các biến $x_2, x_3, \dots, x_n$, riêng biến $x_1 = x$ biến thiên trong đoạn [0, 1]. Khi đó T có dạng $T = kx + b$ với các số cố định : $k = 1 - x_2 - x_3 - \dots - x_n$ và $b = x_2 + \dots + x_n - x_2x_3 - \dots - x_2x_n - x_3x_4 - \dots - x_{n-1}x_n$.

Rõ ràng, khi này các giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm tuyến tính đạt được tại 0 hoặc 1 là các nút của đoạn [0, 1]. Chú ý rằng các số $x_2, x_3, \dots, x_n$ tuy là cố định nhưng trước khi cố định chúng lấy các giá trị tùy ý thuộc đoạn [0, 1]. Do vậy, sau khi áp dụng tương tự các lập luận trên vào $x_2, x_3, \dots$, ta có kết quả là : các giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của T đạt được khi một vài số trong các số x_i bằng 1, còn các số còn lại bằng 0. Gọi số các số bằng 1 là m, vậy m là số nguyên và $0 \leq m \leq n$. Khi đó.

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = m \text{ và } x_1x_2 + \dots + x_1x_n + x_2x_3 + \dots + x_{n-1}x_n$$

$$= C^2_m$$

nên $T = m - m(m-1)/2 = (3m - m^2)/2$. Nếu coi m là biến liên tục thì đây là phương trình parabol mà đồ thị của nó quay bề lõm xuống dưới, tọa độ đỉnh là (3/2, 9/8) và cắt trục hoành ở 0 và 3. Bài toán của ta m – nguyên và $0 \leqslant m \leqslant n$ mà tại $m = 1$, $m = 2$ (là các giá trị nguyên không âm gần hoành độ của đỉnh nhất), giá trị của T đều bằng 1, nên giá trị lớn nhất $T_{max} = 1$ đạt được tại $m = 1$ hoặc $m = 2$. Còn vì $n \geqslant 3$ nên T_{min} đạt được tại $m = n$ và $T_{min} = (3n - n^2)/2$.

Bài toán 61 (6/130)

1) Ta có với $k = 0, 1, \ldots$

$$x_{k+1}^3 = x_k^3 + 3 + 3/x_k^3 + 1/x_k^6 \qquad (1)$$

Từ (1) suy ra

$$x_{k+1}^3 > x_k^3 + 3.$$

Viết các bất đẳng thức này cho k từ 0 đến $n-1$, rồi cộng lại thì được

$$x_n^3 > x_o^3 + 3n \ (n \geqslant 1) \qquad (2)$$

Nhờ (2), từ (1) suy ra với $k \geqslant 1$

$$x_{k+1}^3 < x_k^3 + 3 + 3/(x_o^3 + 3k) + 1/(x_o^3 + 3k)^2$$

$$< x_k^3 + 3 + 1/k + 1/(9k^2).$$

Viết các bất đẳng thức này cho k từ 1 đến $n-1$, rồi cộng lại thì được

$$x_n^3 < x_1^3 + 3(n-1) + \sum_{k=1}^{n-1}(1/k) + (1/9)\sum_{k=1}^{n-1}(1/k^2)$$

$$< x_1^3 + 3n + \sum_{k=1}^{n}(1/k) + (1/9)\sum_{k=1}^{n}(1/k^2) \qquad (3)$$

Để ý rằng $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} < 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{(n-1)n}$

$= 1 + (1 - 1/2) + (1/2 - 1/3) + \ldots +$
$+ [1/(n-1) - 1/n] = 2 - 1/n < 2, \quad (4)$

và theo bất đẳng thức Côsi – Bunhiakốpxki

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)^2 \leqslant n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} < 2n,$$

do đó

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} < \sqrt{2n} \qquad (5)$$

Nhờ (4) và (5), từ (2) và (3) suy ra

$$x_o^3/n + 3 < x_n^3/n < x_1^3/n + 3 + \sqrt{2/n} + 2/(9n)$$

Cho $n \to \infty$, ta thấy rằng

$$\lim_{n\to\infty}(x_n/n) = 3.$$

Vậy $a = 3$ và $A = 3$.

2) Để ý rằng

$$a = x_o < x_1 < \ldots < x_n < \ldots$$

Ta có với $k = 0, 1, \ldots$

$$\frac{1}{x_k} - \frac{1}{x_{k+1}} = \frac{x_{k+1} - x_k}{x_k x_{k+1}} = \frac{1}{x_k^3 x_{k+1}} > \frac{1}{x_k^4 + 1}.$$

Viết các bất đẳng thức này cho $k = 0, 1, \ldots, n-1$, rồi cộng lại thì được

$1/x_o - 1/x_n > \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k^4}$, do đó

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k^4} < 1/x_o = 1/a.$$

Bài toán 62 (10/165)

Gọi d_a, d_b, d_c là độ dài các đường phân giác của các góc A, B, C tương ứng thì :

$$d_a = \frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c} \Rightarrow$$

$$d_a^2 = 4b^2c^2\cos^2\left(\frac{A}{2}\right)/(b+c)^2$$

$$= 2b^2c^2(\cos A + 1)/(b+c)^2 =$$

$$= bc[(b+c)^2 - a^2]/(b+c)^2 =$$

$$= 4bcp(p-a)/(b+c)^2. \qquad (1)$$

Vì $4bc \leqslant (b+c)^2$ nên từ (1) suy ra

$d_a^2 \leqslant p(p-a)$ (2) Tương tự :

$d_b^2 \leqslant p(p-b)$ (3) ; $d_c^2 \leqslant p(p-c)$ (4).

Từ (2), (3), (4) suy ra :

$d_a^2 + d_b^2 + d_c^2 \leqslant$

$\leqslant p(p - a + p - b + p - c) = p^2 \qquad (5)$

Mặt khác :

$$r_a^2 + r_b^2 + r_c^2 = p^2 \left[\mathrm{tg}^2 \frac{A}{2} + \mathrm{tg}^2 \frac{B}{2} + \mathrm{tg}^2 \frac{C}{2} \right] \geqslant$$

$$\geqslant p^2 \left[\mathrm{tg}\frac{A}{2}\mathrm{tg}\frac{B}{2} + \mathrm{tg}\frac{B}{2}\mathrm{tg}\frac{C}{2} + \mathrm{tg}\frac{C}{2}\mathrm{tg}\frac{A}{2} \right] = p^2 \quad (6)$$

Từ (5), (6) ta có :

$$r_a^2 + r_b^2 + r_c^2 \geqslant d_a^2 + d_b^2 + d_c^2.$$

§3. Logic và Toán rời rạc

Bài toán 63 (1/171)

Giả sử các phần tử của A và B tương ứng là : $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m$ và $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n$, ta có $m + n > 1990$ (gt). Xét n số c_i sau đây : $x_i = 1990 - b_i$ ($i = 1, 2, 3, \ldots, n$). Vì các phần tử của B đôi một khác nhau nên các số c_i cũng đôi một khác nhau (1), hơn nữa mọi số b_i đều là số tự nhiên lớn hơn 0 nên mọi số c_i cũng là số tự nhiên nhỏ hơn 1990. Do đó ta có $m + n$ số tự nhiên nhỏ hơn 1990 sau đây : $a_1, a_2, a_3 \ldots, a_m, c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n$. Vì chỉ có 1990 số tự nhiên nhỏ hơn 1990 trong khi $m + n > 1990$ nên trong dãy này phải có hai số bằng nhau. Do (1) và điều kiện a) nên một và chỉ một trong hai số đó phải thuộc A : Giả sử hai số bằng nhau đó $a_i = c_k$. Vậy $a_i = 1990 - b_k$ hay $a_i + b_k = 1990$.

Bài toán 64 (3/166)

Đặt M_o là tập hợp $\{1, 2, \ldots, 2r\}$. M_1 là tập hợp $\{r, r + 1, \ldots, 2r\}$ thì $M_1 \subset M_o$. ($M_1 = M_o$ khi $r = 1$) và M_1 có $r + 1$ phần tử. Như thế giả sử ta chia tập M_o thành r tập con $M_o = \bigcup\limits_{i=1}^{r} C_i$ thì sẽ tồn tại hai phần tử u, v thuộc M_1, cùng thuộc một tập con C_{i_c} nào đấy. Giả sử $r \leqslant u < v \leqslant 2r$. Khi đó đặt $a = 2u - v$, $x = y = v - u$ ta có $a > 0$ và $x = y \geqslant 1$, thì $a + x = a + y = u$; $a + x + y = v$. Ta đã có u, v thuộc cùng một tập con C_i nào đó của M_o vậy M_o là một tập hợp thỏa mãn điều kiện của đầu bài. Suy ra $k(r) \leqslant 2r$ (1)

Bây giờ xét một cách chia tập hợp $M_2 = \{1, 2, \ldots, 2r - 1\}$ (thành r tập con) như sau :

$M_2 = \bigcup\limits_{k=1}^{r} D_k$ trong đó $D_u = \{k, k + r\}$ với $k = 1, 2, \ldots, r - 1$ và $D_r = \{r\}$.

Ta xét hai trường hợp :

1. Giả sử $\exists a \geqslant 0$, $y \geqslant x \geqslant 1$ sao cho $a + x$, $a + y$, $a + x + y$ thuộc cùng một tập con D_k nào đấy với $k = 1, 2, \ldots, r - 1$. Khi đó : $a + x = a + y = k$ và $a + x + y = k + r$. Như thế suy ra rằng $x = y = r$ và $a = k - r < 0$, mâu thuẫn. Vậy điều giả sử không đúng.

2. Giả sử $\exists a \geqslant 0$, $y \geqslant x > 1$ sao cho $a + x$, $a + y$, $a + x + y$ cùng thuộc $D_r = \{r\}$ thì $a + x = a + y = a + x + y = r$. Điều này không thể xảy ra vì luôn luôn có $a + x = a + y \neq r + x + y$.

Vậy với cách chia tập hợp M_2 như trên sẽ không tồn tại các số $a \geqslant 0$, $y \geqslant x \geqslant 1$ sao cho $a + x, a + y, a + x + y$ thuộc cùng một tập con D_k, $k = 1, 2, \ldots, r$ của M_2. Từ đó suy ra $h(r) > 2r - 1$ (2). Từ (1) và (2) ta có $h(r) = 2r$. Đó là số nguyên nhỏ nhất $h(r)$ cần tìm.

Bài toán 65 (12/172)

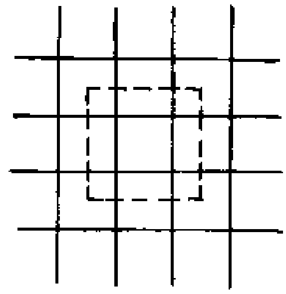
Ta gán cho mỗi em học sinh một số nguyên a, $1 \leqslant a \leqslant n$, sao cho hai em khác nhau được gán hai số khác nhau. Khi đó, tương ứng với mỗi trật tự đứng của n em học sinh trong hàng (tính theo thứ tự từ trên xuống dưới) ta sẽ có một hoán vị của n số nguyên dương đầu tiên. Hơn nữa, nếu A là hoán vị tương ứng với trật tự đứng của n em học sinh sau lần thổi còi thứ k ($k \in N$, với $k = 0$ ta coi đó là trật tự đứng ban đầu) và A' là hoán vị tương ứng với trật tự đứng của các em sau lần thổi còi thứ $k + 1$, thì A' sẽ là hoán vị nhận được từ A bằng cách lấy hai số, được dùng để gán cho hai em đã đổi chỗ cho nhau sau lần thổi còi thứ k của A và đổi chỗ của chúng cho nhau. Như vậy nếu câu trả lời của bài toán đã ra là khẳng định thì từ hoán vị ban đầu, bằng cách thực hiện liên tiếp một số lẻ lần phép đổi chỗ của hai số trong hoán vị như đã mô tả ở trên (mà ta sẽ gọi là phép đổi chỗ K) ta sẽ phải nhận lại được chính hoán vị ấy. Tuy nhiên, ta sẽ chứng minh rằng xuất phát từ một hoán vị bất kỳ của n số nguyên dương đầu tiên ta sẽ không thể trở về chính hoán vị ấy sau một số lẻ lần thực hiện liên tiếp phép đổi chỗ K. Và từ đây, hiển nhiên suy ra câu trả lời của bài toán đã ra là phủ định.

Xét một hoán vị A bất kì của n số nguyên dương đầu tiên. Ta sẽ gọi cặp số (a, b), với $a, b \in A$, là cặp số ngược nếu $a > b$ và a đứng trước b trong hoán vị A. Nhận xét thấy rằng khi đổi chỗ hai số a_i, a_{i+1} đứng cạnh nhau trong hoán vị A để được hoán vị A' thì số cặp số ngược của hoán vị A sẽ hơn hoặc kém số cặp số ngược của hoán vị A', 1 đơn vị (hơn nếu cặp số (a_i, a_{i+1}) không phải là cặp số ngược và kém nếu cặp số (a_i, a_{i+1}) là cặp số ngược). Suy ra sau khi thực hiện liên tiếp một số lẻ lần đổi chỗ hai số đứng cạnh nhau, từ hoán vị A ta sẽ nhận được hoán vị mới có số cặp số ngược khác về tính chẵn lẻ với số cặp số ngược của hoán vị A. Mặt khác, phép đổi chỗ hai số a_j, a_k ($j < k$) trong hoán vị A có thể được thay thế bằng một số lẻ lần $((2(k - j) - 1)$ lần) phép đổi chỗ hai số đứng cạnh nhau. Do đó ta có : sau khi đổi chỗ hai số của hoán vị A cho nhau ta sẽ nhận được hoán vị mới có số cặp số ngược khác tính chẵn lẻ với cặp số ngược của hoán vị A. Từ đó suy ra sau khi thực hiện liên tiếp một số lẻ lần phép đổi chỗ K ta sẽ nhận được hoán vị A' có số cặp số ngược khác tính chẵn lẻ với số cặp số ngược của hoán vị A. Diều này chứng tỏ khi xuất phát từ A ta sẽ không thể nhận lại được A sau một số lẻ lần thực hiện phép đổi chỗ K. (D.p.c.m).

Vậy tóm lại, sau một số lẻ lần thổi còi của cô giáo ta không thể thấy tất cả các em học sinh đều đứng ở vị trí ban đầu của mình.

Bài toán 66 (T9 /173)

Vì mỗi ô trên bàn cờ hình xuyến đều có đúng 8 ô lân cận nên xung quanh mỗi ô cờ ta đều có thể dựng được một hình vuông có 4 đỉnh là 4 tâm của 4 ô cờ có chung đỉnh với ô cờ ấy (xem hình vẽ). Nếu ta quy ước độ dài một cạnh của ô cờ là 1 thì hình vuông dựng được sẽ có kích thước 2×2.



Từ cách đi của quân vua trên bàn cờ ta thấy hai quân vua sẽ nằm ở các vị trí không ăn được nhau trên bàn cờ khi và chỉ khi hai hình vuông được dựng theo cách trên, xung quanh 2 ô cờ mà hai quân vua đó nằm có nhiều nhất một cạnh chung.

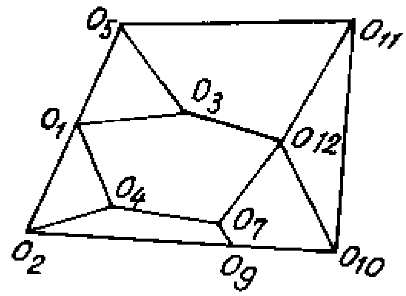
Từ các nhận xét trên ta có số tối đa các quân vua xếp được trên bàn cờ thỏa mãn đề bài chính bằng số tối đa các hình vuông (cong) 2×2 có thể xếp được lên mặt xuyến diện tích $n \times n$ sao cho không có hai hình vuông nào chờm lên nhau. Dễ dàng thấy rằng số tối đa các hình vuông 2×2 có thể xếp được là $[n/2]^2$. Vậy trên bàn cờ hình xuyến của bài ra có thể xếp được tối đa $[n/2]^2$ quân vua sao cho quân nọ không ăn được quân kia.

Bài toán 67 (9/153)

Ta kẻ một mạng lưới hình vuông đơn vị tùy ý rồi cắt rời các ô vuông ra khỏi tờ giấy. Ta xếp các ô vuông này chồng khít lên nhau. Giả sử vết mực có thể thấm qua các tờ giấy. Như vậy ở tờ giấy trên cùng sẽ bị các vết mực ngấm lên làm thành một vết mực có diện tích nhỏ hơn 1 (các vết mực có thể còn thấm lên nhau). Suy ra có điểm P của hình vuông trên cùng không có vết mực nào. Ta lấy một cái kim đâm thủng cả chồng giấy từ trên xuống qua điểm P. Đem rải các hình vuông trở về vị trí cũ thì các lỗ thủng này tạo nên một màng lưới hình vuông không có đỉnh nào nằm trong vết mực cả !

Bài toán 68 (12/155)

Ta chứng minh bài toán bằng quy nạp theo số n các hình tròn. Bài toán hiển nhiên đúng với $n = 1, 2, 3$ và 4. Giả sử bài toán đúng với $n = k$, nghĩa là ta có thể bằng 4 màu tô k hình tròn được dán một cách tùy ý trên mặt bàn sao cho các hình tròn tiếp xúc nhau được tô bằng các màu khác nhau.



Ta xét $n = k + 1$ hình tròn bằng nhau được dán tùy ý trên mặt phẳng. Ta chứng minh rằng tồn tại một đường tròn tiếp xúc với không quá 3 đường tròn khác. Thực vậy, giả sử tâm của các hình tròn là $O_1, O_2, ..., O_{k+1}$. Ta nối tất cả các tâm O_i, O_j lại với nhau để thu được một đa giác lồi $m \geq 3$ cạnh chứa các tâm O_i khác của các hình tròn còn lại ở trong. Như vậy tồn tại O_{i_o} sao cho $\widehat{O_iO_{i_o}O_j} < 180^o$ với $\forall\ i \neq j \neq i_o$ tùy ý. Dễ thấy rằng có không quá 3 đường tròn tiếp xúc với hình tròn tâm O_{i_o}, vì nếu hai đường tròn (O_o) và (O_{i_o}) tiếp xúc với đường tròn (O_{io}) thì ta có $\widehat{O_iO_{i_o}O_j} \geq 60^o$. Từ đó ta chỉ việc tô màu k hình tròn khác (O_{i_o}) bằng 4 màu và tô màu hình tròn (O_{i_o}) bởi màu khác với màu của các hình tròn tiếp xúc với (O_o).

Bài toán 69 (4/85)

Giả sử sau n lần cắt ta nhận được 100 đa giác hai mươi cạnh.

Sau mỗi lần cắt tổng số đỉnh sẽ tăng thêm nhiều nhất là 4. Vậy sau n lần cắt, tổng số đỉnh sẽ không quá $4n + 4$.

Sau mỗi lần cắt tổng số mảnh sẽ tăng thêm 1. Vậy sau n lần cắt tổng số mảnh là $n + 1$. Số mảnh không phải là hình 20 cạnh là $n + 1 - 100 = n - 99$. Tổng số đỉnh trong các mảnh này ít nhất là $3(n - 99)$.

Ta có

$4n + 4 \geq 100 \,.\, 20 + 3\,(n - 99).$

Giải ra được $n \geq 1699$. Vậy số lần cắt không thể ít hơn 1699.

Bây giờ ta chỉ ra một cách cắt chỉ dùng đúng 1699 lần cắt :

Trước hết ta cắt 99 lần để nhận được 100 hình chữ nhật. Sau đó ở mỗi hình chữ nhật ta cắt 16 lần để được một hình đa giác hai mươi cạnh. Tổng số lần cắt là :

$$99 + 100 \times 16 = 1699$$

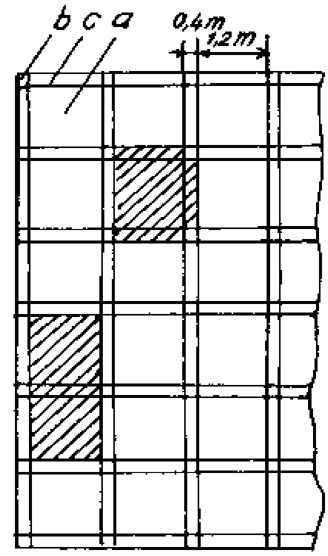
Bài toán 70 (5/126)

Chia mặt sàn thành các ô vuông a, b, các ô chữ nhật c như hình vẽ.

Ta chứng minh có ít nhất một hình chữ nhật có diện tích lớn hơn $3m^2$, là hình chữ nhật tạo bởi $a + 2b + 3c$ hoặc tạo bởi $2a + c$, không chứa bi.

Gọi tính chất để có hình chữ nhật như thế là A, ngược lại là không A.

Ta có nhận xét :



– Nếu một ô vuông a nào đó trống (không có bi) thì để *không A*, các ô b, c xung quanh ô a đó phải có tổng số ít nhất 2 viên bi và nếu chỉ có hai viên thì hai viên bi đó phải nằm ở hai ô c khác nhau (Vì nếu trái lại thì sẽ có hình chữ nhật tạo bởi $a + 2b + 3c$ trống).

– Nếu có hai ô a trống kề nhau (cách nhau 1 ô c) thì để *không A*, trong ô c ở giữa đó phải có ít nhất một viên bi. (Vì nếu trái lại thì hình chữ nhật tạo bởi hai ô a và ô c đó trống).

Từ nhận xét trên suy ra : để không A thì tổng số bi trên các ô b, c phải lớn hơn số ô a trống.

Gọi n là số ô a trống. Số bi trên các ô a có bi là x thì

$$x \geq 36 - n$$

(vì có tất cả 6 ô a).

Số bi trên các ô b, c là y thì để *không A* :

$$y \geq n + i$$

Như vậy $x + y \geq 37$.

Ta chỉ có 35 viên bi nên tất phải có A (đ.p.c.m).

Bài toán 71 (7/82)

Giả thiết trái lại có thể xếp 5 hình cầu S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 có cùng bán kính R, sao cho mỗi hình cầu tiếp xúc với 4 hình cầu còn lại.

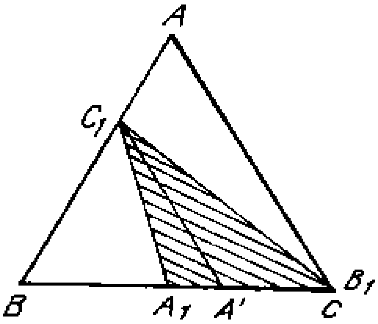
Gọi O_1, O_2, O_3, O_4, O_5 là tâm của 5 hình cầu ấy.

Hình cầu S_i tiếp xúc với hình cầu S_j, nên khoảng cách O_iO_j bằng $2R$.

Từ đây suy ra rằng khoảng cách giữa hai tâm bất kì luôn luôn bằng $2R$. Đặc biệt O_1, O_2, O_3, O_4 là 4 đỉnh của một tứ diện đều có cạnh $2R$. Nhưng O_2, O_3, O_4, O_5 cũng là 4 đỉnh của một tứ diện đều có cạnh $2R$. Hai tứ diện này có chung đáy $O_2O_3O_4$: thế thì hai đỉnh O_1 và O_5 của hai tứ diện ấy phải nằm về hai phía khác nhau của đáy chung. Khi đó $O_1O_5 > 2R$ và ta gặp mâu thuẫn.

Bài toán 72 (6/88)

Trước hết ta xem sau khi người thứ nhất lấy C_1 trên AB rồi thì người thứ hai phải lấy A_1 trên AC như thế nào để đạt được mục đích của mình.



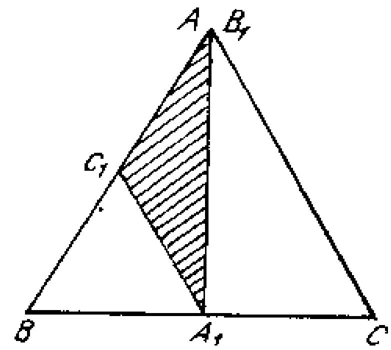
Hình 2

Gọi A' là điểm trên BC sao cho $C_1A' \parallel AC$. Dễ dàng chứng minh được rằng nếu người thứ hai lấy A_1 nằm trong đoạn BA' hình 2) hay lấy A_1 nằm trong đoạn $A'C$ thì đều không lợi bằng lấy $A_1 \equiv A'$. Vậy sau khi người thứ nhất lấy C_1 trên AB thì để đạt được mục đích của mình người thứ hai phải lấy A trên BC sao cho $C_1A_1 \parallel AC$.

Vấn đề còn lại là người thứ nhất phải lấy C_1 như thế nào để đạt được diện tích $A_1B_1C_1$ lớn nhất.

Dễ thấy rằng với cách lấy A_1 của người thứ hai đã chỉ ra ở trên thì dù B_1 ở vị trí nào trên AC thì cũng không làm thay đổi diện tích tam giác $A_1B_1C_1$. Vì vậy ta có thể giả sử $B_1 \equiv A$.

Đặt $AC_1 = x$ thì $C_1A_1 = a - x$, ta có $dtA_1B_1C_1 = x \times (a - x)\sin 120^0/2$. Diện tích $A_1B_1C_1$ lớn nhất khi tích số $x(a - x)$ lớn nhất, tức là khi $x = a - x$ hay $x = a/2$ (Hai số dương có tổng không đổi thì tích của chúng lớn nhất kbi hai số đó bằng nhau).



Hình 3

Như vậy diện tích tam giác $A_1B_1C_1$ lớn nhất mà người thứ nhất đạt được bằng

$$(a/2)(a/2)\sin 120^0/2 = a^2\sqrt{3}/16.$$

Bài toán 73 (3/179)

Trước hết, ta quy ước : tập số M được gọi là có tính chất T nếu M có thể được chia thành hai tập con rời nhau sao cho tổng của tất cả các phần tử của tập con này bằng tổng của tất cả các phần tử của tập con kia.

Theo bài ra, ta cần tìm tất cả các số nguyên dương k để tập X có tính chất T. Dễ thấy nếu X có tính chất T thì tổng của tất cả các phần tử của x sẽ là một số chẵn. Mà tổng này bằng $1990(k + 1) + k(k + 1)/2$ nên $k(k + 1) \vdots 4$. Suy ra, k cần có dạng $k = 4t + 3$ hoặc $k = 4t$ với $t \in N$. Xét :

1) Trường hợp 1 : $k = 4t + 3$, $t \in N$. Khi đó, số phần tử của X sẽ là $4(t + 1)$. Do đó, ta có thể chia tập X thành $t + 1$ tập con rời nhau sao cho mỗi tập con đều gồm 4 số tự nhiên liên tiếp. Dễ thấy, tập gồm 4 số tự nhiên liên tiếp là tập có tính chất T. Từ đó suy ra tập X sẽ có tính chất T.

2) Trường hợp 2 : $k = 4t$, $t \in N$. Khi đó, tập X sẽ có $4t + 1$ phần tử. Do đó, nếu X được chia thành hai tập con rời nhau A, B thì một trong hai tập con đó, không mất tổng quát giả sử là A, phải có không ít hơn $2t + 1$ phần tử. Như vậy tập B sẽ có không quá $2t$ phần tử. Suy ra, nếu kí hiệu a, b tương ứng là tổng của tất cả các phần tử của A, B thì :

$a \geqslant 1990 + (1900 + 1) + ... + (1900 + 2t) =$
$= 1990\ (2t + 1) + t(2t + 1)$

$b \leqslant (1990 + 2t + 1) + ... + (1990 + 4t) =$
$= 1990 \times 2t + t(6t + 1)$

Với giả thiết $a = b$ ta có : $1990 \times 2t + 6t(6t + 1 \geqslant 1990(2t + 1) + t(2t + 1) \Leftrightarrow 4t^2 \geqslant 1990 \Rightarrow t \geqslant 23$.

Với $t = 23$ ta có $X = \{1990, 1990 + 1, ..., 1990 + 92\} = AUB$, với : $A = \{1990 + 1, 1990 + 2, ..., 1990 + 46, 1990 + 63\}$

$B = \{1990 ; 1990 + 47, 1990 + 48 , ..., 1990 + 92\}$

Hiển nhiên A, B rời nhau, và bằng tính toán trực tiếp dễ thấy $a = b$. Như vậy với $t = 23$ ($\Leftrightarrow k = 92$) tập X có tính chất T.

ới $t > 23$ ta có $X = X_1 U X_2$, với $X_1 = \{ 1990, 1990 + 1, ..., 1990 + 2\}$ và $X_2 = \{1990 + 93, 1990 + 94, ..., 1990 + 4t\}$. Theo phần trên, tập X_1 có tính chất T. Hơn nữa, do tập X_2 có $4(t - 23)$ phần tử nên, vận dụng những lập luận đã trình bày khi xét trường hợp 1, ta sẽ được tập X_2 có tính chất T. Từ đó suy ra tập X cũng có tính chất T.

Vậy, tóm lại, tất cả các số nguyên dương k cần tìm là tất cả các số có dạng $k = 4t + 3$, $t \in N$ và $k = 4t$, $t \in N$, $t > 23$.

Bài toán 74 (T8/181)

Quy ước gọi con chim đậu tại điểm P là chim P.

Trước hết, ta sẽ chứng minh, bằng quy nạp theo n, rằng số cặp chim trông thấy nhau không ít hơn $[(n - 1)^2/4]$) ở đây $[x]$ kí hiệu phần nguyên của x).

Thật vậy, với $n = 2$ thì số cặp chim trông thấy nhau không ít hơn $0 = [(2 - 1)^2/4]$. Giả sử ta đã có điều cần chứng minh đúng với $n = k$ ($k \geqslant 2$), ta sẽ chứng minh nó cũng đúng với $n = k + 1$.

Trong số $(k + 1)$ con chim, chọn ra con chim A trông thấy nhiều con chim khác nhất. Gọi s là số chim mà A trông thấy. Lấy trên đường tròn hai điểm X, Y sao cho sđAX = sđXY = sđYA = 120^o. Khi đó, trong XY (không kể hai đầu mút) phải có $(k - s)$ chim đậu. Do đó, mỗi con chim đậu trong XY sẽ trông thấy ít nhất $(k - s - 1)$ con chim khác. Từ cách chọn chim A suy ra $s \geqslant k - s - 1 \Rightarrow 2s \geqslant k - 1 \Rightarrow s \geqslant [k/2]$. Với k con chim còn lại, theo giả thiết quy nạp, số cặp chim trông thấy nhau không ít hơn $[(k - 1)^2/4]$. Do vậy, với $(k + 1)$ con chim đậu trên đường tròn thì số cặp chim trông thấy nhau sẽ không ít hơn :

$$[k/2] + [(k - 1)^2/4] = [k^2/4] = [(k + 1 - 1)^2/4]$$

Theo nguyên lí quy nạp, ta có điều cần chứng minh.

Bây giờ, ta sẽ chỉ ra một cách đậu của n con chim trên đường tròn có số cặp chim trông thấy nhau đúng bằng $[(n - 1)^2/4]$. Lấy trên đường tròn hai điểm X, Y sao cho sđXY = 30^o. Cho $[n/2]$ con chim đậu trong XY, còn $\{ [(n + 1)/2] = (n - [n/2])$ con chim còn lại cho đậu trong cung đối của XY. Khi đó, số cặp chim trông thấy nhau sẽ là :

$$[n/2]([n/2] - 1)/2 +$$
$$+ [(n + 1)/2]([(n + 1)/2] - 1)/2 =$$
$$= [(n - 1)^2/4]$$

Vậy số nhỏ nhất các cặp chim trông thấy nhau là $[(n - 1)^2/4]$

Bài toán 75 (T8/183)

Cách 1 :

Chia tất cả các ô vuông của bảng đã cho thành ba loại :

+ Loại I : gồm tất cả các ô (m, n) mà $m - n \equiv 0 \pmod 3$ + Loại II : gồm tất cả các ô (m, n) mà $m - n \equiv 1 \pmod 3$ + Loại III : gồm tất cả các ô (m, n) mà $m - n \equiv 2 \pmod 3$

Vì 1992 ⋮ 3 nên ở mỗi hàng ta đều có số ô mỗi loại là bằng nhau. Do đó, ở toàn bảng số ô mỗi loại là bằng nhau (1)

Dễ thấy, kể từ lần thứ hai, trong mỗi lần tô màu ta tô đúng một ô loại I, một ô loại II và một ô loại III (2)

Từ (1) và (2) suy ra, nếu tô màu được hết tất cả các ô của bảng đã cho thì ở lần tô thứ nhất ta phải tô đúng một ô loại I, một ô loại II và một ô loại III. Tuy nhiên, cả ba ô được tô ở lần thứ nhất đều thuộc cùng một loại (do $r - s = (r + 1) - (s + 1) = (r + 2) - (s + 2)$).
Vậy :

Bằng cách tô màu của bài ra ta không thể tô được hết tất cả các ô vuông của bảng đã cho.

Cách 2 :

Câu trả lời là không. Ta sẽ chứng minh điều này bằng phản chứng.

Giả sử, bằng cách tô của bài ra, ta có thể tô màu được hết tất cả các ô vuông của bảng đã cho. Khi đó tổng số lần tô là 1991×664. Điền các số vào các ô vuông của bảng theo cách sau : tại ô (m, n) điền số m, n. Gọi S là tổng của tất cả các số đã điền ta có :
$S = (1 + 2 + ... + 1991)(1 + 2 + ... + 1992) \equiv 0 \pmod 3$ (1) Mặt khác, gọi S_i là tổng của ba số nằm tại ba ô được tô ở lần thứ i, $1 \leq i \leq 1991 \times 664$. Dễ thấy $S_1 = rs + (r + 1)(s + 1) + (r + 2)(s + 2)$, và với mỗi $i = 2, 3, ..., 1991 \times 664$ thì S_i là tổng của ba số dạng ab, $(a + 1)b$, $(a + 2)b$ $(a, b \in Z^+)$. Suy ra $S_1 \equiv 2 \pmod 3$ và $S_i \equiv 0 \pmod 3$, $i = 2, 3, ..., 1991 \times 664$. Do đó :

$S = S_1 + S_2 + ... + S_{1991 \times 664} \equiv 2 \pmod 3$ (2)

Mâu thuẫn giữa (1) và (2) cho ta điều cần chứng minh.

Bài toán 76. (T10/177)

Kí hiệu (O, R) và dt F lần lượt là hình tròn tâm O bán kính R và diện tích của hình phẳng F.

Vì số các hình tròn đã cho là hữu hạn nên tồn tại hình tròn có bán kính lớn nhất. Gọi hình tròn đó là (O_1, R_1). Gọi F_1 là hình phẳng do (O_1, R_1) và các hình tròn có điểm chung với (O_1, R_1) tạo nên. Dễ thấy, tất cả các hình tròn tạo nên F_1 đều nằm trong $(O_1, 3R_1)$. Do đó $\mathrm{dt}F_1 \leq \mathrm{dt}(O_1, 3R_1) = 9\mathrm{dt}(O_1, R_1)$. Suy ra $\mathrm{dt}(O_1, R_1) \geq \mathrm{dt}F_1/9$. (1)

Xét hai trường hợp sau :

1) (O_1, R_1) có điểm chung với tất cả các hình tròn còn lại.

Khi đó, do các hình tròn phủ kín hình phẳng có diện tích 1, nên suy ra $\mathrm{dt}F_1 \geq 1$. Do đó, từ (1) ta được $\mathrm{dt}1(O_1, R_1) \geq 1/9$, và bài toán được chứng minh.

2) Tồn tại hình tròn không có điểm chung với (O_1, R_1). Do số các hình tròn không có điểm chung với (O_1, R_1) là hữu hạn nên ta có thể chọn ra trong số chúng một số hữu hạn, chẳng hạn $k (k \geq 1)$, các hình tròn $(O_2, R_2), ..., (O_{k+1}, R_{k+1})$ sao cho :

a) Với mỗi $i = 2, ..., k + 1$, (O_i, R_i) là hình tròn có bán kính lớn nhất trong số các hình tròn không có điểm chung với $(O_1, R_1), ..., (O_{i-1}, R_{i-1})$;

b) Không tồn tại hình tròn không có điểm chung với $(O_1, R_1), (O_2, R_2), ..., (O_{k+1}, R_{k+1})$.

Với mỗi $i = 2, ..., k + 1$ ta gọi F_i là hình phẳng do (O_i, R_i) và các hình tròn có điểm chung với (O_i, R_i) nhưng không có điểm chung với $(O_1, R_1), ..., (O_{i-1}, R_{i-1})$ tạo nên. Từ a) suy ra tất cả các hình tròn tạo nên F_i đều nằm trong $(O_i, 3R_i)$. Do đó $\mathrm{dt}F_i \leq \mathrm{dt}(O_i, 3R_i) = 9\mathrm{dt}(O_i, R_i)$. Suy ra
$\mathrm{dt}(O_i, R_i) \geq \mathrm{dt}F_i/9$ (2)

Từ b), và do tất cả các hình tròn phủ kín hình phẳng có diện tích 1, ta có
$\mathrm{dt}F_1 + \mathrm{dt}F_2 + ... + \mathrm{dt}F_{k+1} \geq 1$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra :

$\mathrm{dt}(O_1, R_1) + \mathrm{dt}(O_2, R_2) +$
$+ \mathrm{dt}(O_{k+1}, R_{k+1} \geq 1/9$

Hơn nữa, từ cách xác định $(O_1, R_1), (O_2, R_2), ... (O_{k+1}, R_{k+1})$ hiển nhiên ta có tất cả các hình tròn này đôi một rời nhau. Bài toán được chứng minh.

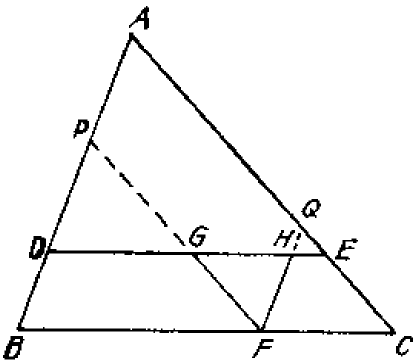
Nhận xét : Có nhiều bạn gửi lời giải của bài toán tới Tòa soạn. Không ít bạn mắc thiếu sót trong việc chỉ ra cách chọn các hình tròn $(O_2, R_2), (O_3, R_3), ...$, và phạm phải các sai sót sau :

1) Khẳng định $\mathrm{dt}F_1 + \mathrm{dt}F_2 + ... + \mathrm{dt}F_{k+1} = 1$.

2) Từ giả thiết các hình $H_1, H_2, ..., H_n$ nằm trong hình H suy ra $\mathrm{dt}H_1 + \mathrm{dt}H_2 + ... + \mathrm{dt}H_n \leq \mathrm{dt}H$.

Bài toán 77 (6/44)

Cho tam giác ABC. Rõ ràng là trước hết phải cắt theo một đường DE song song với một cạnh của ABC, chẳng hạn $DE \parallel BC$. Như vậy ta được một tam giác (ADE) đồng dạng với tam giác đã cho. Vấn đề còn lại là chia hình thang $DECB$ ra ba phần sao cho có thể ghép lại được một tam giác đồng dạng với ABC ; giả sử tam giác này là PBF. Như vậy phải cắt $DECB$ theo đường $FG \parallel AC$. Cuối cùng, phải cắt hình bình hành $GECF$ ra hai phần và ghép lại để được tam giác bằng tam giác PDG. Ta tịnh tiến PDG để

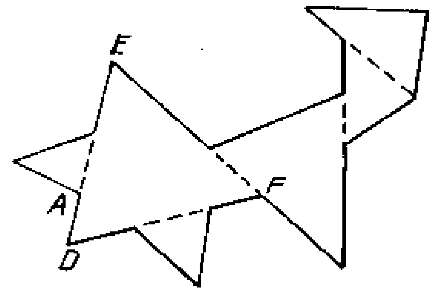


cho GP đến vị trí CQ. Thế thì phải có $CF = GD$, tức là G là điểm giữa của DE, và phải cắt $GECF$ theo đường $FH \parallel AB$. Ở đây phải có $HG = HE$ để cho hai tam giác FGH và QEH bằng nhau, lúc đó hình bình hành $GECF$ được chia ra hai phần và ghép hai phần này lại thì được QFC (bằng PDG).

Như vậy, đường DE phải được vạch sao cho : nếu từ điểm giữa G của DE ta vạch $GF \parallel AC$ (F trên BC) rồi từ F vạch $FH \parallel AB$ (H trên DE) thì có $GH = HE$. Dễ thấy rằng, muốn vậy, phải có $BD = \frac{1}{5}BA$. Tóm lại, cách cắt như sau : vạch $DE \parallel BC$, với $BD = \frac{1}{5}BA$; lấy điểm giữa G của DE và vạch $GF \parallel AC$, cuối cùng vạch $FH \parallel AB$.

Bài toán 78 (4/47)

Khi chia một đa giác ra thành n tam giác (bằng đường chéo hoặc không phải đường chéo) thì do mọi góc của đa giác đều nhỏ hơn 2d nên không một đỉnh nào của đa giác có thể nằm trên cạnh của một tam giác, mà mỗi đỉnh của đa giác phải là đỉnh của ít nhất một tam giác. Vì vậy, tổng các góc của tất cả n tam giác không thể nhỏ hơn tổng các



Hình 1

góc của đa giác đã cho. Trong trường hợp hình đa giác 17 cạnh, ta có tổng các góc của đa giác là $(17 - 2)2d = 30d$, mà tổng các góc của n tam giác, là $2nd$. Ta có $2nd \geqslant 30d$, tức là $n \geqslant 15$. Ta có 15 tam giác nếu kẻ tất cả các đường chéo của đa giác xuất phát từ một đỉnh.

Xét trường hợp chia hình 17 cạnh *không lồi* thành n tam giác. Nếu góc ở một đỉnh nào đó của đa giác mà nhỏ hơn 2d, thì đỉnh đó phải là đỉnh của một tam giác. Nếu góc ở đỉnh đó lớn hơn 2d (chẳng hạn góc A trong hình vẽ), thì A nằm trên cạnh của một tam giác (DEF), nhưng phần còn lại của góc A phải thuộc về ít nhất một tam giác khác và A phải là đỉnh của tam giác đó. Vì vậy, trong mọi trường hợp, mỗi đỉnh của hình 17 cạnh phải là đỉnh của ít nhất một tam giác, do đó tổng số đỉnh của các tam giác không thể nhỏ hơn 17. Ta có $3n \geqslant 17$, tức $n \geqslant 6$ (vì n nguyên). Hình vẽ chỉ ra một trường hợp cụ thể về đa giác 17 cạnh được chia ra 6 tam giác.

Bài toán 79 (6/47)

Sau khi kẻ tất cả các đường chéo của đa giác xuất phát từ đỉnh A_1, và nối M với tất cả các đỉnh của đa giác, ta dễ dàng nhận thấy rằng :

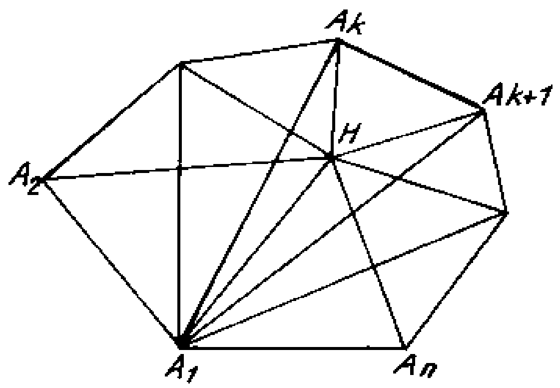
a) Tam giác $A_1A_kA_{k+1}$ được chia ra n phần.

b) Đa giác $A_1A_2A_3 \ldots A_k$ lồi có k cạnh và được chia thành $(k - 2)$ tam giác : $A_1A_2A_3$ được chia ra hai phần, $A_1A_3A_4$ được chia ra 3 phần, $A_1A_{k-1}A_k$ được chia ra $(k - 1)$ phần. Do đó đa giác $A_1A_2 \ldots A_k$ được chia ra $2 + 3 + 4 + \ldots + (k - 1) = (k + 1)(k - 2)/2$ phần.

c) Đa giác $A_1A_nA_{n-1} \cdots A_{k+1}$ lồi có $(n - k + 1)$ cạnh và được chia thành

$(n - k + 1)$ tam giác : $A_1A_nA_{n-1}$ được chia ra 2 phần, $A_1A_{n-1}A_{n-2}$ được chia ra 3 phần, $A_1A_{n-2}A_{n-3}$ được chia ra 4 phần, ..., $A_1A_{k+2}A_{k+1}$ được chia ra $(n - k)$ phần. Do đó đa giác này được chia ra

$$2 + 3 + 4 + ... + (n - k) =$$
$$= [2 + (n - k)](n - k - 1)/2 \text{ phần}$$



Như vậy gọi S là tổng số các phần đã được chia của đa giác đã cho thì :

$$S = n + (k + 1)(k - 2)/2 +$$
$$+ [2 + (n - k)](n - k - 1)/2$$

hay

$$S = (n^2 + 3n - 4)/2 + k^2 - k(n + 1)$$

S có giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) khi $k^2 - (n + 1)$ lớn nhất (nhỏ nhất)

Ta biết rằng đồ thị hàm số $y = x^2 - x(n + 1)$ với $2 \leq x \leq n - 1$ là một đoạn parabôn có tung độ lớn nhất khi $x = 2$ và $x = n - 1$, và có tung độ bé nhất khi $x = (n + 1)/2$. Ta suy ra S (xác định với các giá trị nguyên của k : $2 \leq k \leq (n - 1)$ có giá trị lớn nhất khi $k = 2$ vá $k = n - 1$ bé nhất khi $k = (n + 1)/2$ (nếu n lẻ) hoặc $k = n/2$ và $k = (n + 2)/2$ (nếu n chẵn).

Bài toán 80 (158/66)

Kí hiệu a_{ij} là số ở hàng thứ i, cột thứ j và để ý đến cấu tạo của bảng thì ta có :

$$a_{ij} = (i - 1)n + j.$$

Muốn có n số thỏa mãn đầu bài, ta chỉ việc lấy n số sau :

$$a_{1\alpha_1}, a_{2\alpha_2}, ..., a_{n\alpha_n}$$

Trong đó α_i là số thứ tự chỉ cột và $\alpha_i \neq \alpha_j$ nếu $i \neq j$. Như vậy nếu hoán vị các α_i cho nhau, ta được tất cả n ! cách chọn ($n ! = 1 \times 2 \times ... \times n$). Điều này các bạn tự chứng minh được. Muốn có cách chọn khác ta chỉ việc hoán vị α_i và α_j cho nhau mà phép hoán vị không làm thay đổi tổng của hai số đã cho, nên mọi cách chọn đều có chung một tổng. Gọi tổng của n chữ số đó là S ta có :

$$S = (1 - 1)n + \alpha_1 + (2 - 1)n +$$
$$+ \alpha_2 + ... + (n - 1)n + \alpha_n$$
$$S = 0n + n + 2n + ... + (n - 1)n +$$
$$+ \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$$

mà

$$\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n = 1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

nên :

$$S = [1 + 2 + ... + (n - 1)]n + \frac{n(n + 1)}{2}$$

$$S = \frac{n^2(n - 1)}{2} + \frac{n(n + 1)}{2} = \frac{n(n^2 + 1)}{2}$$

Bài toán 81 (9/47)

1) Ta coi đây là sự chọn 9 lần có hoàn lại đối với tập hợp 3 yếu tố : 3 toa tầu, thì số kết cục đồng xác suất là $3^9 = 19683$.

a) Trong 9 bạn ta chọn được C_9^3 tập hợp 3 bạn. Mặt khác cứ 3 bạn lên toa đầu thì 6 bạn còn lại có tất cả 2^6 cách lên 2 toa sau, vì đây là một sự chọn 6 lần có hoàn lại đối với tập hợp 2 yếu tố là 2 toa sau. Như vậy số kết cục thuận lợi cho việc 3 bạn lên toa đầu là $C_9^3 . 2^6 = 5376$. Vậy xác suất phải tìm là :

$$P_1 = 5376/19683 = 1792/6561.$$

b) Trong 9 bạn chọn được C_9^3 tập hợp 3 bạn. Nhưng cứ 3 bạn lên một toa thì trong 6 bạn còn lại ta lại chọn được C_9^3 tập hợp 3 bạn để lên toa khác. Nhưng nếu 3 bạn đã lên toa thứ 2 thì 3 bạn còn lại chỉ còn lại một cách duy nhất, tức là C_3^3 cách để lên toa còn lại. Tóm lại số kết cục thuận lợi để mỗi toa có 3 bạn là :

$$C_9^3 \times C_9^3 \times C_3^3 = 1680$$

Do đó xác suất phải tìm là :

$$P_2 = 1680/19683 = 560/6561$$

c) Tương tự như trên ta có xác suất để cho 4 bạn lên toa đầu, 3 bạn lên toa thứ hai và hai bạn lên toa thứ 3 là :

$$C_9 \times C_6^3 \times C_2^2/19683$$

Mặt khác theo đầu bài ta có thể hoán vị số thứ tự ba toa cho nhau nên xác suất để cho một trong 3 toa có 4 bạn, một trong hai toa còn lại có 3 bạn và toa cuối cùng có 2 bạn là :

$$P_3 = C \times C_5^2 \times C_2^2 \times 34/19683 = 280/729$$

2) Ta quy ước viết tất cả các biển số dưới dạng số gồm 4 chữ số, bằng cách thêm chữ số 0 đằng trước những số có ít hơn 4 chữ số : Chẳng hạn số 24 được viết thành 0024... riêng số 10000 được viết thành 0000. Với quy ước trên đây thì trong tập hợp 9 chữ số : 0, 1, 2, ..., 7, 9 (bỏ chữ số 8) ta có thể viết được $9^4 = 6561$ con số khác nhau có 4 chữ số ; đó cũng là số biển số không chứa chữ số 8.

Do đó xác suất phải tìm là :

$$P = 6561/10000 = 0,6561$$

Bài toán 82 (6/140)

Trước hết, ta nhận xét rằng với $n = 1, 2, 3$ thì không thể sắp xếp các số của A_n thỏa mãn 1) ; 2) ; và 3).

Khi $n = 4$ thì có thể sắp xếp A_4 như sau :

$$A_4 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & 3 & 0 \\ 6 & -3 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Khi $n = 4k$ thì tồn tại cách sắp xếp :

$$A_{4k} = \begin{vmatrix} A_4 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_4 & \dots & 0 \\ \dots & & & \\ 0 & 0 & \dots & A_4 \end{vmatrix} \text{ trong đó}$$

$$0 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Giả sử $n = 4k + r : 0 < r < 4$. Trước hết, nhận xét rằng nếu bảng A_n thỏa mãn các điều kiện 1), 2), và 3) thì khi đổi vị trí hai dòng, hai cột tùy ý thì các tính chất trên vẫn đúng. Vì vậy, ta có thể đổi vị trí để các số 1 (hoặc −1), 2 (hoặc −2), 3 (hoặc −3) vào các vị trí a_{11}, a_{12}, a_{13} ; cũng vậy, đối với các dòng (±1, ...), (±2, ...), (±3, ...) được xếp theo thứ tự dòng 1, dòng 2, dòng 3 của bảng A_n. Tiếp theo, sắp xếp cột có phần tử thứ 2 (từ trên xuống) khác 0 ở cột thứ 4 và dòng có phần tử thứ 2 (từ trái qua phải) khác 0 ở dòng thứ 4. Vậy tất cả các phần tử còn lại ở 4 dòng và 4 cột trên đều bằng 0. Nếu bảng 4 × 4 thu được theo cách trên không thỏa mãn 1), 2), 3) thì không tồn tại bảng A_n. Giả sử bảng dó thỏa mãn 1), 2) và 3). Sau khi gạch bỏ 4 dòng đầu và 4 cột đầu, ta được một bảng mới cũng có các tính chất 1), 2), 3) như bảng A_n. Đối với bảng mới này, ta tiếp tục thực hiện quá trình như trên, sau k bước ta được bảng $r \times r$ có các tính chất 1), 2), 3). Điều đó không thể xảy ra (do nhận xét ở đầu bài giải).

Vậy khi n không chia hết cho 4 thì không tồn tại bảng A_n có các tính chất 1), 2), và 3).

Suy ra, điều kiện cần và đủ để tồn tại bảng A_n có các tính chất 1), 2) và 3) là n chia hết cho 4.

Bài toán 83 (T10/152)

Giả sử $A_1, ..., A_n$ là các ngôi nhà của ta và A_{n+1} là nhà máy điện. Như vậy nếu ta mắc điện sao cho mỗi nhà chỉ nhận điện từ nhiều nhất là một nhà khác, thì bao giờ cũng có một ngôi nhà A_i ($i \leq n$) chỉ được nối với đúng một nhà khác – chẳng hạn nếu ta xuất phát từ nhà máy điện, đi theo đường dây điện, thì ta sẽ đến một trong những ngôi nhà cuối cùng như vậy.

Bây giờ ta đem ứng một cách mắc điện với một bộ $(j_1, j_2, ..., j_{n-1})$ theo quy tắc sau :

1) Trong các ngôi nhà ở cuối đường dây điện gọi A_{i_1} là ngôi nhà có chỉ số nhỏ nhất. Chỉ số của ngôi nhà được nối với A_{i_1} (chỉ có đúng một ngôi nhà như thế) được đặt là j_1.

2) Đem bỏ đi ngôi nhà A_{i_1}, gọi A_{i_2} là ngôi nhà có chỉ số nhỏ nhất trong các ngôi nhà ở cuối đường dây. Đặt chỉ số của ngôi nhà được nối với A_{i_2} là j_2. Giả sử ta có chỉ số j_t rồi thì j_{t+1} là chỉ số của ngôi nhà được nối

với ngôi nhà $A_{i_{t+1}}$ là ngôi nhà có chỉ số nhỏ nhất trong tất cả các ngôi nhà ở cuối đường dây.

Như vậy thì với mỗi cách mắc điện ta có được một bộ $(j_1, j_2, ..., j_{n-1})$ với $1 \leq j_t \leq n$ $(t = 1, 2, ..., n - 1)$ được xác định một cách duy nhất. Ta thấy dễ dàng rằng :

$$\left.\begin{array}{l} i_1 = \min\{1, 2, , n\} \ / \{j_1, j_2, ..., j_{n-1}\} \\ i_2 = \min\{1, 2, ..., n\} \ / \{i_1, j_2, ..., j_{n-1}\} \\ \cdots\cdots\cdots \\ i_{n-1} = \min\{1, 2, ..., n\} \ /\{i_1, i_2, ..., i_{n-2}, j_{n-1}\} \end{array}\right\} (*)$$

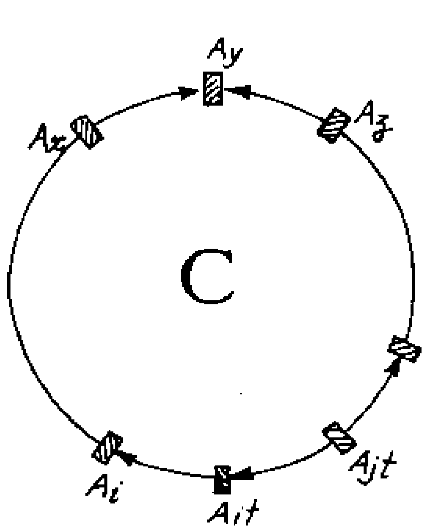
Qua (*) ta thấy ngay là ứng với hai cách mắc điện khác nhau là hai bộ $(j_, j_2, ..., j_{n-1})$ khác nhau.

Như vậy ta có số các cách mắc điện có thể $\leq (n+1)^{n-1}$. Mặt khác ta có thể xây dựng từ một bộ $(j_1, j_2, ..., j_{n-1})$ cho trước một cách mắc điện tương ứng. Thực vậy, nếu có một bộ $(j_1, j_2, ..., j_{n-1})$ thì ta xác định một bộ $(i_1, i_2, ..., i_{n-1})$ tương ứng bởi (*). Ngoài ra đặt $j_n = n + 1$ và $i_n = \min(\{1, 2, ..., n\} \ / \{i_1, i_2, ..., i_{n-1}\})$. Ta cho nối dây từ nhà A_{jt} sang nhà A_{i_t} $(t = 1, 2, ..., n)$ và kí hiệu ở trên sơ đồ các nhà hàng một véc tơ đi từ điểm A_{jt} sang A_{i_t} tương ứng. Cách mắc điện này thực hiện được và thấy :

(a) Mỗi nhà có nhiều nhất là một véc tơ dẫn đến nó

(b) Không tồn tại $s \leq t$ để có $j_t = i_s$.

Bây giờ ta chứng minh rằng trên hệ thống dây mắc, không tồn tại một vòng kín (các



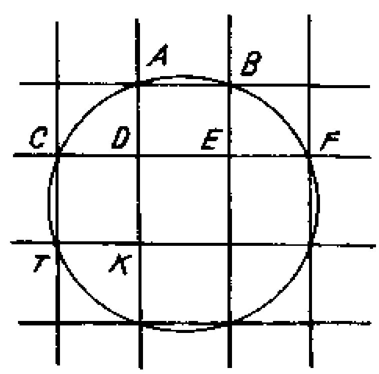
cạnh không xét hướng). Thực vậy nếu ta có điều ngược lại. Có thể giả thiết rằng j_t là chỉ số nhỏ nhất mà khi nối A_{jt} với A_{i_t} thì xuất hiện chu trình C. Từ (h) suy ra là A_{jt} dẫn sang 2 nhà bên cạnh nó ở trên C (tức là theo chiều véc tơ dẫn đi từ A_{jt} sang hai nhà bên cạnh. Nếu đi theo chiều từ A_{jt} theo 2 cạnh véc tơ, ta dẫn đến một nhà A_y nào để nhận điện từ 2 nhà bên cạnh (tức là 2 véc tơ dẫn đến nó). Điều này mâu thuẫn với (a).(**)

Cuối cùng ta phải chỉ ra là từ nhà máy điện, điện có thể tới mỗi nhà tùy ý. Chú ý rằng hệ thống của ta có n đoạn dây dẫn. Giả sử rằng nếu nó chia thành khu vực s và t nhà không được nối với nhau bởi đoạn dây nào thì hàng quá trình đếm các nhà ở cuối đường dây và lần lượt vất bỏ chúng, thì ta thấy số lượng dây ở trong mỗi cụm $\leq s - 1$ và $\leq t - 1$, tương ứng. Suy ra tổng số dây $\leq s + t - 2 = n - 1$, vô lý. Suy ra $(n+1)^{n-1}$ không lớn hơn số các cách mắc điện.

Vậy ta có tất cả $(n+1)^{n-1}$ cách mắc điện khác nhau.

Bài toán 84 (T1/154)

Trước hết ta thấy ngay đường tròn bán kính $\sqrt{10}/2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. Ta sẽ chứng minh rằng đó là đường tròn có bán kính lớn nhất thỏa mãn yêu cầu của ta.



Thực vậy nếu ta có một đường tròn $\mathscr{C}$ đi qua một đỉnh ô vuông A nào đó. Khi đó $\mathscr{C}$ phải cắt 1 trong 4 hình vuông đơn vị có đỉnh tại A. Như vậy để đi ra khỏi hình vuông này, $\mathscr{C}$ phải đi qua một đỉnh nào đó của hình vuông, kề A như B hoặc đối diện với A như C ở trong hình vẽ. Ta có hai trường hợp :

a) $\mathscr{C}$ đi qua đỉnh B kề A. Như vậy tương tự như lập luận với đỉnh A, nó sẽ qua đỉnh kề B như E chẳng hạn, hoặc qua đỉnh đối diện với B như F. Trong hai trường hợp này bán kính của $\mathscr{C}$ không vượt quá $\sqrt{10}/2$.

b) $\mathscr{C}$ đi qua C đối diện A. Như vậy từ C nó sẽ qua đỉnh T kề C hoặc K đối diện với C. Trong hai trường hợp này bán kính của đường tròn ta khảo sát cũng không vượt quá $\sqrt{10}/2$ (đ.p.c.m).

Bài toán 85 (T3/157)

Ta có thể giả thiết thêm : $1 \in A_1$ và số nhỏ nhất trong A_2 bé hơn số nhỏ nhất trong A_3 (3). Ta xây dựng các phân hoạch bằng cách xếp lần lượt các số 1, 2, ..., n vào A_1, A_2, A_3 theo các điều kiện (1), (2) và (3).

Ta có : $1 \in A_1$. Còn số 2 có 2 khả năng : $2 \in A_1$ hoặc $2 \in A_2$ (do (3)).

Nếu A_2 và A_3 còn rỗng thì các số tiếp theo, do điều kiện (3), đều chỉ có 2 cách xếp : vào A_1 hoặc A_2.

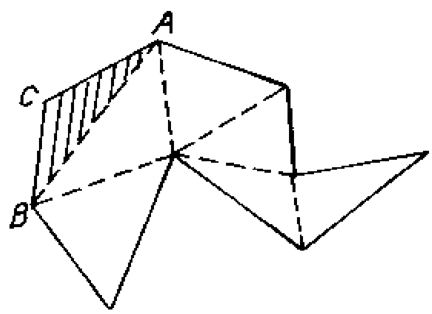
Sau khi phần tử đầu tiên của A_2 được xếp thì số tiếp theo chỉ có 2 cách xếp : vào A_2 hoặc vào A_3 (vì số đó có cùng tính chẵn, lẻ, với phần tử cuối của A_1 lúc đó). Khi A_3 còn rỗng thì do điều kiện (1), (2) các số tiếp theo cũng chỉ có 2 cách xếp vào 2 trong 3 tập A_1, A_2, A_3. Sau khi phần tử đầu tiên của A_3 được xếp, ta có thể chứng minh tiếp bằng phép quy nạp rằng mỗi số luôn có thể và chỉ có thể xếp vào 2 trong 3 tập A_1, A_2, A_3.

Thật vậy, giả sử đến một bước nào đó số k có thể xếp vào một trong 2 tập A_{i_1} và A_{i_2} và không thể xếp vào A_{i_3} (i_1, i_2, i_3) là một hoán vị nào đó của (1, 2, 3) nghĩa là k khác tính chẵn lẻ với 2 số cuối của A_{i_1} và A_{i_2} lúc đó, và cùng tính chẵn lẻ với số cuối của A_{i_3} lúc đó. Giả sử ta xếp k vào A_{i_1} thì ở bước tiếp theo số $k+1$ chỉ có thể xếp vào A_{i_1} hoặc A_{i_3} (do điều kiện (1)). Nghĩa là cũng có đúng 2 khả năng sắp xếp đối với $k+1$. Tóm lại mỗi số trong tập [1, 2, ..., n] trừ số 1 đều cho ta 2 khả năng sắp xếp. Vậy có 2^{n-1} phân hoạch tập [1, 2, ..., n] vào 3 tập A_1, A_2, A_3 theo yêu cầu của bài toán.

Bài toán 86 (T12/158)

Trước tiên ta nhận xét toàn bộ nền nhà phòng triển lãm bao giờ cũng có thể phân chia được thành các tam giác, bởi các đường chéo không cắt nhau, nằm trong n – giác (nền nhà). Với mỗi cách phân chia ta được 1 đồ hình của phòng triển lãm (phép phân chia này được gọi là phép tam phân một đa giác).

Bây giờ ta sẽ tô mầu các đỉnh của 1 đồ hình sao cho 2 đỉnh được nối với nhau (theo cạnh thẳng của đồ hình) sẽ có mầu khác nhau. Ta khẳng định rằng để tô mầu như thế chỉ cần 3 mầu là đủ. Ta sẽ chứng minh khẳng định này bằng quy nạp theo n.



$n = 3$. Phòng triển lãm là 1 tam giác và chỉ việc tô 3 đỉnh bằng 3 mầu. Giả sử khẳng định đúng với phòng triển lãm có n tường $(n \geqslant 3)$. Xét một phòng triển lãm G có $(n+1)$ tường. Sử dụng phép tam phân đối với đa giác G, ta gọi G' là đa giác nhận được từ G sau khi cắt bỏ đi ΔABC (hình vẽ). Theo giả thiết quy nạp, khẳng định đúng với n – giác G'. Vì rằng A và B chỉ có thể được tô màu bằng 2 trong số 3 màu đã cho nên ta chỉ việc tô mầu đỉnh C bằng mầu còn lại. Vậy khẳng định đúng với $(n+1)$ – giác G và do đó, điều khẳng định được chứng minh. Vậy ta giả sử rằng các đỉnh của phòng triển lãm có n bức tường được tô bằng 3 mầu a, b, c. Có tất cả n đỉnh, do đó có ít nhất một mầu, chẳng hạn mầu a mà số đỉnh được tô màu a không vượt quá $[n/3]$.

Vì mọi cặp đỉnh của một tam giác bất kì trong đó hình G là không thể có cùng một mầu. Do đó trong mỗi tam giác thì 3 đỉnh của nó được tô bằng 3 mầu khác nhau. Rõ ràng là tại mỗi đỉnh được tô mầu a ta đặt một ngọn đèn thì toàn bộ phòng triển lãm được chiếu sáng, mà số đỉnh đó là không vượt quá $[n/3]$ (đpcm).

Bài toán 87 (T8/164)

Gọi g_i là số nhóm có người thứ i tham gia trò chuyện ($i=\overline{1, 2n}$). Ta có $g_i \geq 2$, $\forall i = \overline{1, 2n}$ (vì người thứ i nói chuyện ít nhất với 1 cặp vợ chồng (A, B) và tồn tại hai nhóm khác nhau chứa A, chứa B).

Như vậy, chỉ xảy ra hai trường hợp

Trường hợp 1 : $\exists i$ sao cho $g_i = 2$. Giả sử $C_m \cap C_n = \{ i\}$ (C_i xem như 1 tập hợp). Khi đó mỗi đôi vợ chồng không kể đôi vợ chồng của i có một người tham gia vào C_m và người kia tham gia trong C_n. Kí hiệu $|C|$ là số phần tử của C và đặt $C_m^* = C_m \setminus \{ i\}$; $C_n^* = C_n\setminus\{ i\}$ thì $|C_m^*| = n - 1$ và $|C_n^*| = n - 1$

Mỗi người thuộc C_m^* sẽ nói chuyện với người không phải là bạn đời của mình của nhóm C_n^*. Do các nhóm này phân biệt cho nên có tất cả $(n - 1)(n - 2)$ nhóm như vậy.

Khi đó : $k \geq (n - 1)(n - 2) + 2$

$= 2n + (n - 1)(n - 4)$

Vậy $k \geq 2n$ (vì $n \geq 4$).

Trường hợp 2 : Với mọi $i = \overline{1, 2n}$ có $g_i \geq 3$. Khi đó gán cho người thứ i biến số x_i, $\forall i = \overline{1, 2n}$. Xét hệ phương trình $2n$ ẩn $(x_1, x_2, ..., x_{2n})$.

$$\sum_{i \in C_t} x_i = 0 \ ; \ t = \overline{1, k} \qquad (1)$$

Giả sử $< 2n$, nghĩa là số phương trình của (1) ít hơn số ẩn. Khi đó hệ (1) có nghiệm không tầm thường (các x_i không đồng thời bằng 0) (2).

Mặt khác nếu đặt

$y_t = \sum_{i \in C_t} x_i$

$M = \{(i \ ; j)$ với i và j là vợ chồng $\}$

$M^* = \{(i \ ; j)$ với $j \neq j$ và i, j không là vợ chồng$\}$

Ta có :

$$\sum_{t=1}^{k} y_t^2 = \sum_{t=1}^{k} \Big(\sum_{i \in C_t} x_i\Big)^2 = \sum_{i=1}^{2n} g_i x_i^2 + 2\sum_{(i;j)\in M^*} x_i x_j$$

$$= \sum_{i=1}^{2n} x_i^2(g_i - 1) + \sum_{i=1}^{2n} x_i^2 + 2\sum_{i\neq j} x_i x_j - 2\sum_{(i;j)\in M} x_i x_j$$

$$= \sum_{i=1}^{2n} x_i^2 (g_i - 1) + \Big(\sum_{i=1}^{2n} x_i\Big)^2 - 2\sum_{(i;j \in M)} x_i x_j$$

$$= \sum_{i=1}^{2n} x_i^2 (g_i - 2) + \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i\Big)^2 + \sum_{(i;j)\in M} (x_i - x_j)^2$$

Do đó : $\sum_{t=1}^{k} y_t^2 = 0 \Leftrightarrow x_i = 0 \ \forall i = \overline{1, 2n}$.

Hay $\qquad y_t^2 = 0 \Leftrightarrow x_i = 0 \qquad (3)$

Ta có (2), (3) mâu thuẫn.

Vậy $k \geq 2n$.

Tóm lại với $n \geq 4$ ta luôn có $k \geq 2n$.

Bài toán 88 (T6/146)

a) $n = 2k$. Ta gán các số trên các đường tròn theo chiều kim đồng hồ, bắt đầu từ số nào đó. Kí hiệu $a_1, a_2, ..., a_{2k}$ là các số gắn trên đường tròn thứ nhất, $b_1, b_2, ..., b_{2k}$ là các số gắn trên đường tròn thứ hai. Ta hãy đặt hai đường tròn lên nhau sao cho a_i trùng với b_j. Vì $a_1, a_2, ..., a_{2k}$ và $b_1, b_2, ..., b_{2k}$ là hai hoán vị khác nhau của $1, 2, ..., 2k$ nên với mọi $i \leq 2k$ luôn có $j_i \leq 2k$ sao cho $a_i = b_{ji}$.

Bây giờ ta giả sử rằng không tồn tại $i_1 \neq i_2$ sao cho $j_{i_1} - i_1 \equiv j_{i_2} - i_2 \pmod{2k}$. Khi đó vì các chỉ số $i_1, i_2, ..., i_{2k}$ và $j_{i_1}, j_{i_2} ... j_{i_{2k}}$ cũng là các hoán vị của $1, 2, ..., 2k$ nên số dư (mod $2k$) của các hiệu $j_{i_1} - i_1, j_{i_2} - i_2 \ j_{i_{2k}} - i_{2k}$ là một hoán vị của $0, 1, 2, ..., 2k - 1$ và ta thấy :

$$\sum_{r=1}^{2k} (j_{i_r} - i_r \equiv \sum_{s=0}^{2k-j} s \pmod{2k}$$

hay $$\sum_{r=1}^{2k} j_{i_r} - \sum_{r=1}^{2k} i_r \equiv k(2k - 1) \pmod{2k}$$

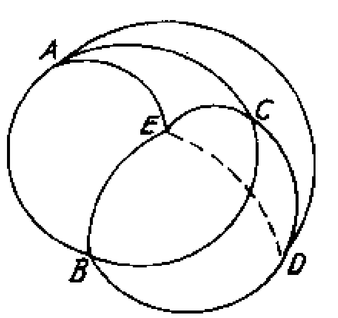
$0 \equiv k(2k - 1) \pmod{2k}$ mâu thuẫn.

Vậy phải có $i_1 \neq i_2$ để $j_{i_1} - i_1 \equiv j_{i_2} - i_2 \pmod{2k}$. Ta quay đường tròn thứ hai quanh tâm cho bj_{i_1} tới trùng với $a_{i_1} = bj_{i_1}$ lúc đó bj_{i_2} tới trùng với $a_{i_2} = bj_{i_2}$... (đpcm).

b) $n = 2k + 1$. Giả sử cách gắn số trên đường tròn thứ nhất là $a_1, a_2, ..., a_n$. Trên đường tròn thứ hai ta gắn $b_1 = a_1$ trùng với a_i và $b_i = a_{n-i+2}$ thì các số b_i, $i \neq 1$ trên đường tròn thứ hai đối xứng với các số a_i bằng nó trên đường tròn thứ nhất qua đường thẳng đi qua tâm của 2 đường tròn và điểm $a_1 = b_1$. Như thế trừ a_1 ra trên đường tròn thứ hai $2k$ số $a_2, a_3, ..., a_{2k+1}$ đã được sắp xếp theo thứ tự ngược lại so với đường tròn thứ nhất. Bởi vậy khi ta quay đường tròn thứ hai sao cho có một cặp số bằng nhau thì các cặp số bằng nhau khác không thể trùng nhau được.

Bài toán 89 (3/53)

Trước hết, chứng minh bổ đề : Nếu trên mặt phẳng có 4 điểm bất kì và ta nối từng cặp điểm trong các điểm đó bằng một đường cong thỏa mãn điều kiện của bài toán (liên tục, không tự cắt và không qua các điểm còn lại ; hai đường cong bất kì không cắt nhau ở điểm khác với các điểm đã cho) thì bao giờ cũng có một điểm nằm *trong* hình "tam giác cong" giới hạn bởi ba đường cong nối ba cặp điểm kia.



Thực vậy, cho 4 điểm A, B, C, D. Ta nối AB, BD, CD, DA bằng các đường cong thỏa mãn điều kiện của bài toán ; ta được một đường cong kín, chia mặt phẳng thành hai miền (ta có một "tứ giác cong"). Nếu hai đường cong AD và BC đều nằm ở miền trong của "tứ giác cong" $ABCD$ thì chúng phải cắt nhau. Vậy phải có ít nhất một đường, chẳng hạn là AD, nằm ngoài tứ giác cong $ABCD$, và như vậy điểm C (hay điểm B) sẽ nằm trong hình tam giác cong ABD (ACD), đpcm.

Bây giờ ta giải bài toán. Ta hãy xét 4 điểm A, B, C, D trong 5 điểm đã cho. Theo bổ đề, có một điểm, chẳng hạn C nằm trong tam giác cong ABD. Ta nối các điểm với E. Có hai trường hợp có thể xảy ra :

– E nằm ngoài tam giác cong ABD ; thế thì EC phải cắt một "cạnh" của tam giác cong ABD (vì E và C nằm ở hai miền khác nhau của mặt phẳng, giới hạn bởi ABD) ;

– E nằm trong tam giác cong ABD, do đó E ở trong một trong ba tam giác cong ABC, BCD, CDA, chẳng hạn E ở trong ABC. Thế thì E và D lại ở trong hai miền khác nhau của mặt phẳng, giới hạn bởi tam giác cong ABC, do đó ED phải cắt một "cạnh" của ABC (đpcm).

Bài toán 90 (8/62)

Cách 1 :

Dễ thấy rằng có tất cả $(n - 1)(n - 2)/2$ đoạn thẳng nối $n - 1$ điểm từng đôi một ; do đó, từ một điểm A_i tùy ý của hệ, ta vẽ được $(n - 1)(n - 2)/2$ đường thẳng song song với các đoạn thẳng nối $n - 1$ điểm còn lại. Trong mặt phẳng có n điểm, nên ta vẽ được tất cả $K = n(n - 1)(n - 2)/2$ đường, chia làm $n(n - 1)/2$ bộ, mỗi bộ có $n - 2$ đường song song với nhau.

Ta tìm số giao điểm tối đa của một đường thẳng tùy ý x (qua điểm tùy ý A_i) với các đường thẳng khác trong hệ. Vì trong mặt phẳng, ta kẻ tất cả là $n(n - 1)(n - 2)/2$ đường, nên nếu không kể đường x thì có

$M = n(n - 1)(n - 2)/2 - 1$ đường. Trong M đường đó thì có $(n - 1)(n - 2)/2$ đường qua A_i, tức là nếu không kể x thì có $N = (n - 1)(n - 2)/2 - 1$ đường qua A_i ; và vì mỗi bộ đường có $n - 2$ đường song song nhau, nên có $P = n - 3$ đường song song với x. Như vậy có nhiều nhất là $M - N - P$ đường cắt x, tức là số giao điểm tối đa của x với các đường khác (không kể các đường qua A_i) là

$$Q = M - N - P = [n(n - 1)(n - 2)/2 - 1] - [(n - 1)(n - 2)/2 - 1] - (n - 3) - = (n^3 - 4n^2 + 3n + 4)/2$$

Vì có tất cả là $K = n(n - 1)(n - 2)/2$ đường thẳng, nên số giao điểm tối đa cần tìm là K, $Q/2$ (vì mỗi giao điểm kể hai lần), tức là

$$n(n-1)(n-2)(n^3-4n^2+3n+4)/8$$

Cách 2 :

Gọi số đoạn thẳng nối tất cả n điểm là A thì

$$A = n(n-1)/2$$

Gọi số đoạn thẳng nối tất cả $(n-1)$ điểm là B thì

$$B = (n-1)(n-2)/2$$

Gọi chùm các đường thẳng vẽ từ mỗi điểm của hệ song song với tất cả các đoạn nối $n-1$ điểm còn lại bằng tên của điểm xuất phát tương ứng (ta có chùm A_1, A_2, ..., A_n). Do điều kiện đã cho trong hệ không có hai đoạn nào song song nên số đường của mỗi chùm A_i đều bằng nhau và bằng số đoạn thẳng tối đa nối $(n-1)$ điểm của hệ là B.

Ta xét giao điểm của 2 chùm đầu tiên A_1 và A_2. Giả sử mọi đường của chùm A_1 cắt mọi đường của chùm A_2 thì số giao điểm tối đa sẽ là B^2. Nhưng ta biết từ mỗi điểm trong hệ $(n-1)$ điểm có $(n-2)$ đoạn thẳng xuất phát (uốn với $(n-2)$ điểm kia) nên số đoạn thẳng trong hệ B (hệ nối $(n-1)$ điểm) không đi qua 1 điểm của hệ là $B-(n-2)$. Như vậy chùm A_1 và chùm A_2 sẽ có $B-(n-2) =$ $= B-n+2$ cặp đường không cắt nhau (vì cùng lần lượt song song với $B-n+2$ đoạn thẳng không đi qua A_1, A_2). Tức là số giao điểm tối đa thực tế có thể có (không kể các điểm đã cho) là

$B^2-(B-n+2) = B^2-B+n-2$. Chùm A_3 (tương tự lí luận trên) cắt chùm A_1 và A_2 với số giao điểm tối đa (không kể điểm đã cho) là $2(B^2-B+n-2)$.

Lần lượt như vậy cuối cùng chùm A_n cắt $n-1$ chùm $A_1 \dots A_{n-1}$ và cho tối đa $(n-1)(B^2-B+n-2)$ giao điểm.

Vậy tổng số giao điểm tối đa là

$$(B^2-B+n-2)[1+2+\dots+(n-1)] =$$
$$= (B^2-B+n-2)A$$

Thay $A = n(n-1)/2$ và $B = (n-1)(n-2)/2$, ta cũng được kết quả như trên.

Bài toán 91 (5/67)

1) Chứng minh quy nạp theo số thành phố là n.

Hiển nhiên mệnh đề đúng với $n = 2$, vì khi đó phải có số đoạn đường là 1 để có thể đi lại giữa 2 thành phố đó với nhau.

Giả sử mệnh đề đúng với mọi khu vực có $n' < n$ thành phố. Ta phải chứng minh mệnh đề đúng với khu vực có n thành phố.

Vì khu vực đó không có đường vòng nên thế nào cũng có một thành phố mà tại đó chỉ có một đoạn đường.

Thật vậy, nếu trái lại, mọi thành phố mà tại đó đều có 2 đường trở lên, thì ta có thể đi tới 1 thành phố nào đó bằng một đường rồi đi khỏi thành phố đó bằng một đường khác để đi tới thành phố thứ hai và lại đi khỏi thành phố này bằng một đường khác nữa v.v...

Vì khu vực không có đường vòng nên khi đi tiếp như thế không thể trở về những thành phố mà trước đó đã đi qua. Mặt khác vì số thành phố là hữu hạn nên không thể đi mãi như trên được ! Vậy phải có một thành phố mà tại đó chỉ có một đoạn đường, giả sử đó là thành phố A.

Bây giờ ta bỏ thành phố A và đoạn đường nối với A được một khu vực có $n-1$ thành phố. Theo giả thiết quy nạp, số đoạn đường trong khu vực này là : $(n-1)-1 = n-2$.

Do đó, nếu thêm thành phố A và đoạn đường nối với A vào khu vực đó thì trở thành khu vực đang xét có n thành phố và số đoạn đường có tất cả là :

$$(n-2)+1 = n-1.$$

2) Chứng minh bằng quy nạp theo số đoạn đường là m.

Hiển nhiên mệnh đề đúng với $m = n-1$ đoạn đường, vì theo câu 1) khu vực đó không có đường vòng, tức là $v = 0$ nên :

$$n-m+v = n-(n-1)+0 = 1.$$

Giả thiết mệnh đề đúng với mọi khu vực có $m' < m$ đoạn đường. Ta phải chứng minh mệnh đề đúng với khu vực có m đoạn đường.

Trong khu vực có m đoạn đường, ta bỏ đi một đoạn đường thuộc một vòng đơn nào đó, giả sử đoạn đó là AB, ta được một khu vực có $m-1$ đoạn đường và có $v-1$ vòng đơn (vì khi bỏ đoạn AB thuộc 1 vòng đơn nào đó thì số vòng đơn sẽ giảm đi 1).

Theo giả thiết quy nạp, ta có :

$$n - (m - 1) + (v - 1) = 1$$

Do đó : $n - m + v = 1$ (đ.p.c.m)

3) Chứng minh bằng phản chứng. Giả sử mọi thành phố mà tại đó đều có ít nhất là 6 đoạn đường, mà mỗi đoạn đường chung cho 2 thành phố kề nhau, nên ta có :

$$m \geq 6n/2 = 3n \text{ hay } n \leq m/3$$

Vì mỗi vòng đơn là 1 đường gấp khúc kín, tạo thành 1 đa giác cong, mỗi đa giác có ít nhất 3 đoạn đường, mà 2 đa giác kề nhau thì có một đoạn đường chung, nên ta có :

$$m \geq 3v/2 \text{ hay } v \leq 2m/3$$

Do đó theo công thức ở câu 2, ta có :

$1 = n - m + v \leq m/3 - m + 2m/3 = 0$

(Vô lí !).

Vậy phải có 1 thành phố mà tại đó có nhiều nhất là 5 đoạn đường đi đến các thành phố khác.

Bài toán 92 (2/85)

Cách 1 :

Gọi a_{ij} là số đặt ở cột i hàng j. Nếu thay đổi dấu của số a_{ij} thì chỉ có a_i và b_j đổi dấu. Khi đó tổng $a_i + b_j$ thay đổi, nhưng sự thay đổi này làm cho S thêm hay bớt một đại lượng chia hết cho 4.

Bây giờ xét một bảng chỉ gồm toàn số 1. Khi đó

$$S^* = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k = n + n = 2n.$$

Đối mỗi lần dấu một số a_{ij} thích hợp và làm một số lần sao cho bảng đó trở thành bảng đã cho. Mỗi lần đổi dấu một a_{ij} thì tổng S^* lại được thêm hay bớt một đại lượng chia hết cho 4 và cuối cùng thì trở thành tổng S. Vì n lẻ nên $S^* = 2n$ không chia hết cho 4, do đó S không thể bằng số 0.

Cách 2 :

Theo đầu bài, các số a_k và b_k đều bằng 1 hoặc -1.

Giả sử $\sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k = 0$

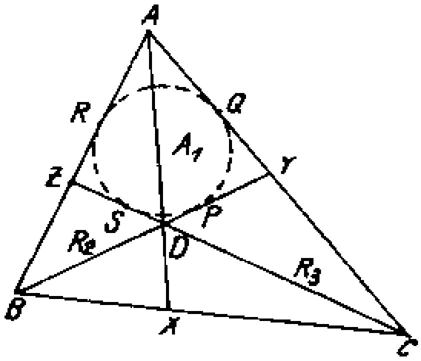
thế thì trong tất cả số a_k và b_k, số các số bằng 1 bằng số các số bằng -1. Mặt khác ta có $a_1, a_2, \ldots a_n, b_1, b_2 \ldots b_n$ bằng bình phương của tích tất cả các số của bảng nên bằng 1. Vậy trong tất cả các số a_k và b_k nói trên, số các số bằng -1 phải chẵn. Vậy số các số a_k và b_k là tổng của hai số chẵn bằng nhau nên chia hết cho 4. Nhưng vì bảng có n hàng, n cột nên số các số đó bằng $2n$, mà n là lẻ nên $2n$ không chia hết cho 4.

Mâu thuẫn này chứng tỏ điều giả sử là sai.

§4. Các bài toán chứng minh hình học

Bài toán 93 (T10/153)

Kí hiệu các cạnh của tam giác ABC là a, b, c và các khoảng cách từ D đến các đỉnh A, B, C tương ứng là R_1, R_2, R_3. Trước tiên, ta chứng minh khẳng định sau : *Tứ giác $DYAZ$ có thể ngoại tiếp đường tròn khi và chỉ khi $R_2 - R_3 = c - b$.*



Thật vậy, giả sử tứ giác $DYAZ$ ngoại tiếp một đường tròn. Gọi P, Q, R, S lần lượt là các điểm tiếp xúc của đường tròn với các cạnh DY, YA, AZ, ZD. Khi đó :

$$R_2 - R_3 = BP - CS \text{ (do } DP = DS)$$
$$= BR - CQ$$
$$= c - b \text{ (do } AR = AQ)$$

Ngược lại, giả sử ta có : $R_2 - R_3 = c - b$. Gọi Q, R, S lần lượt là các điểm tiếp xúc của đường tròn nội tiếp tam giác AZC với các cạnh AC, AZ, ZC. Từ B kẻ tiếp tuyến thứ hai với đường tròn nội tiếp tam giác AZC. Tiếp tuyến này tiếp xúc với đường tròn tại P' và cắt ZC tại D'. Ta sẽ chứng minh D' trùng với D. Thật vậy, theo phần thuận ta có : $c - b = D'B - D'C$.

Giả sử $D'C = D'D + CD = D'D + R_3$. Khi đó $c - b = BD' - D'D - R_3$. Nhưng $c - b = R_2 - R_3$ nên suy ra $BD' - D'D = R_2 = BD$. Điều này chứng tỏ D' phải nằm trên BY. Nghĩa là D' trùng với D.

Nếu $D'C = CD - DD'$ thì cũng bằng lập luận tương tự ta cũng đi đến kết luận D' vừa nằm trên CZ vừa nằm trên BY nên nó trùng với D. Điều khẳng định được chứng minh.

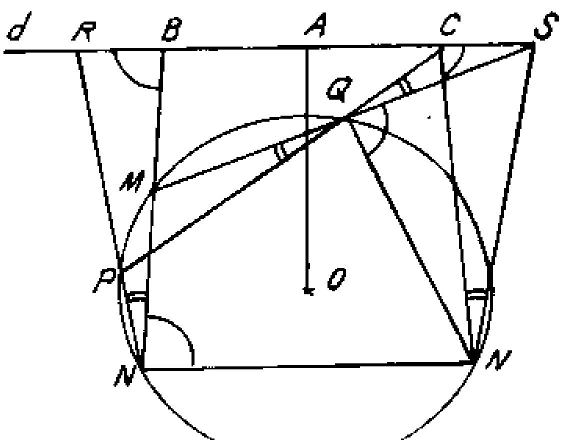
Bây giờ giả sử $DZBX$ và $DXCY$ ngoại tiếp được đường tròn. Theo điều khẳng định vừa chứng minh ta có :

$R_1 - R_3 = c - d$ và $R_2 - R_1 = a - b$

Từ đó suy ra $R_2 - R_3 = c - b$. Lại theo điều khẳng định vừa chứng minh ta thấy $DYAZ$ cũng ngoại tiếp được đường tròn.

Bài toán 94 (T2/158)

Vì $OA \perp (d)$; $AB = AC$, N nằm trên đường tròn tâm O nên dựng N' đối xứng với N qua đường thẳng OA, ta có :



N' nằm trên đường tròn tâm O, $NN' \parallel BC$ và tứ giác $BCN'N$ nhận OA làm trục đối xứng. Suy ra : $\widehat{SCN'} = \widehat{RBN} = \widehat{BNN'} = \widehat{SQN'}$ (cùng bằng nửa số đo của một trong 2 cung $\overset{\frown}{MN'}$ hoặc $\overset{\frown}{MPN'}$). Vậy tứ giác $SCQN'$ nội tiếp, hơn nữa tứ giác $MQNP$ cũng nội tiếp nên : $\widehat{SN'C} = \widehat{SQC} = \widehat{PQM} = \widehat{RNB}$.

Vậy $\Delta RBN = \Delta SCN'$ (g.c.g), do đó : $RB = SC$, và $AR = AS$.

Chú ý 1. Chứng minh trên vẫn đúng khi $\widehat{SCN'} \geq 90^o$.

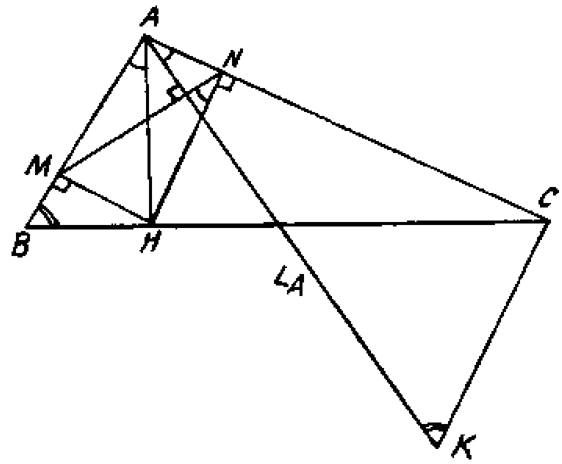
2. Trong trường hợp C, Q ở hai phía đối với đường thẳng SN' thì lí do để tứ giác $SQN'C$ nội tiếp là :

$$\widehat{SCN'} + \widehat{SQN'} = 180^o.$$

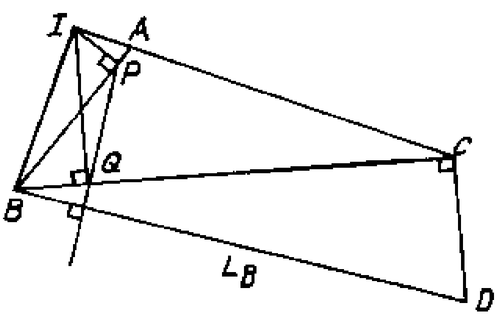
3. Bài toán vẫn đúng trong trường hợp (d) cắt hoặc tiếp xúc đường tròn tâm O.

Bài toán 95 (T10/167)

Không mất tổng quát, giả sử $\widehat{A} > 90^o$. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC.



Kẻ $Cx \perp AC$. Do $\widehat{AMN}$ và $\widehat{ANM}$ là các góc nhọn nên L_A sẽ cắt MN tại điểm nằm trong đoạn MN và do vậy L_A sẽ cắt Cx tại điểm K ở cùng phía với B so với AC (H. 1). Do $AMHN$ là tứ giác nội tiếp nên : $\widehat{MAH} = \widehat{MNH}$. Ta lại có : $\widehat{MNH} = \widehat{CAK}$ (hai góc nhọn có cạnh tương ứng vuông góc). Suy ra $\widehat{MAH} = \widehat{CAK}$. Nhưng $\widehat{MAH} = \widehat{ABC} = 90^o$ và $\widehat{CAK} + \widehat{AKC} = 90^o$, nên $\widehat{ABC} = \widehat{AKC}$. Suy ra K nằm trên đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Và do $\widehat{ACK} = 90^o$ nên AK là đường kính của đường tròn. Do vậy AK, và cũng là L_A, đi qua O.

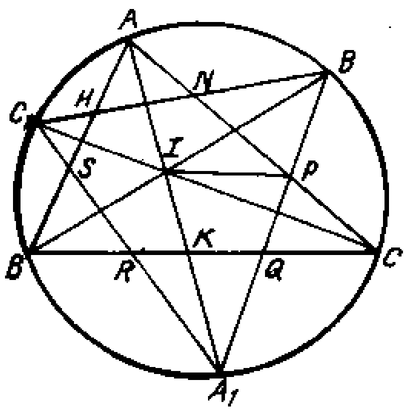


Hạ $BI \perp AC$. Gọi P, Q tương ứng là giao của đường tròn đường kính BI với AB và BC. Kẻ $Cy \perp BC$. Do $\widehat{A} > 90^o$ nên I nằm trên CA kéo dài về phía A. Do đó P và B nằm về hai phía của IQ. Suy ra $\widehat{BQP} > 90^o$ và do vậy L_B cắt PQ tại điểm nằm trên PQ kéo dài về phía Q. Suy ra L_B cắt Cy tại D ở khác phía với A so với BC (H. 2). Vì $BIPQ$ là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{PBI} = \widehat{PQI}$. Mặt khác : $\widehat{PQI} = \widehat{CBD}$ (hai góc nhọn có cạnh tương ứng vuông góc) nên $\widehat{PBI} = \widehat{CBD}$. Mà $\widehat{PBI} + \widehat{PAI} = 90^o$ và $\widehat{CBD} + \widehat{BDC} = 90^o$ nên $\widehat{BAI} = \widehat{BDC}$. Suy ra $\widehat{BDC} + \widehat{BAC} = 180^o$ (vì $\widehat{BAI} + \widehat{BAC} = 180^o$). Do vậy D nằm trên đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Và vì $\widehat{BCD} = 90^o$ nên BD là đường kính của đường tròn. Như thế BD và cũng là L_B đi qua O.

Vì B và C có vai trò như nhau trong bài toán nên nếu gọi E là giao của L_C và Bz ($Bz \perp BC$) thì bằng cách tương tự như đã chứng minh đối với L_B ta cũng sẽ chứng minh được CE là đường kính của đường tròn ngoại tiếp ΔABC và do đó CE cũng đồng thời là L_C đi qua O.

Vậy L_A, L_B, L_C đồng quy (đpcm).

Bài toán 96 (T10/173)



Giả sử A_1B_1 cắt AC tại P. Gọi I là giao điểm ba đường phân giác. Ta chứng minh $IP \parallel BC$.

Thật vậy $\widehat{AIB_1} = 1/2 \times (\text{sđ } \overset{\frown}{AB_1} + \text{sđ } \overset{\frown}{A_1B}) = \frac{1}{2} \times (\text{sđ } \overset{\frown}{AB_1} + \text{sđ } \overset{\frown}{A_1C} = \widehat{APB_1}$. Do đó tứ giác $AIPB_1$ nội tiếp. Suy ra $\widehat{IPQ} = \widehat{IAB_1}$

Ta lại có :

$\widehat{IAB_1} = \widehat{A_1AB_1} = 1/2 \times (\text{sđ } \overset{\frown}{A_1C} + \text{sđ } \overset{\frown}{CB_1}) = 1/2 \times (\text{sđ } \overset{\frown}{A_1B} + \text{sđ } \overset{\frown}{B_1C}) = \widehat{B_1QC})$

Vậy $IP \parallel BC$.

Tương tự $IQ \parallel AC$. Suy ra tứ giác $IQCP$ là hình bình hành. Tương tự $ISBR$ và $IMAN$ là hình bình hành.

Từ đó $S(SIR) = S(SBR)$

$S(IPQ) = S(CPQ)$ (1)

$S(IMN) = S(AMN)$

Ta có $\Delta IRQ \backsim \Delta ABC$, $\Delta IPN \backsim \Delta ABC$ và $\Delta IMS \backsim \Delta ABC$.

Đặt $IK / KA = x$, $IL/LB = y$, $IJ/JC = z$.

Ta có :

$x + y + z =$

$= (S(IBC) + S(ICA) + S(IAB))/S(ABC) = 1$.

Vì thế

$S(IQR)/S(ABC) + S(IPN)/S(ABC) + S(IMS)/S(ABC) = x^2 + y^2 + z^2 \geq 1/3 \times (x + y + z)^2 = 1/3$. Suy ra

$S_1 = S(IQR) + S(IPN) + S(IMS) \geq S(ABC)/3$

Gọi S là diện tích phần chung. Từ (1) ta có

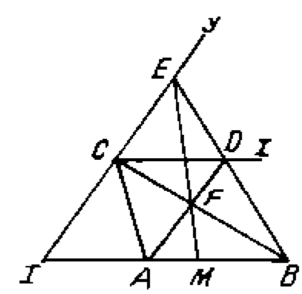
$S_1 + 2(S - S_1) = S(ABC)$

$2S = S(ABC) + S_1 \geq 4S(ABC)/3$

Vậy $S \geq 2/3 \times S(ABC)$ (đpcm)

Dấu bằng xảy ra khi $x = y = z$ tức là khi ABC là tam giác đều.

Bài toán 97 (T2/179)



Do $Cx \parallel AB$ và Cy cắt Cx tại C nên đường thẳng chứa tia Cy cắt đường thẳng AB tại I. Gọi giao điểm của tia EF với AB, CD tương ứng là M, N. Do $CD \parallel AB$ nên theo định lí Ta-lét, ta có :

$MA/ND = FM/FN = MB/NC$ hay $NC/ND = MB/MA$ (1)

Ta lại có :

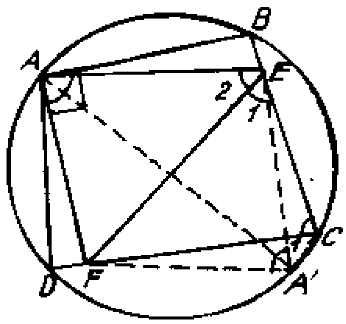
$NC/MI = EN/EM = ND/MB$ hay $NC/ND = MI/MB$ (2)

Từ (1) và (2) ta có : $MB/MA = MI/MB = (MB + MI)/(MA + MB) = IB/AB$. Suy ra : $IB/(AB + IB) = MB/(MA + MB) = MB/AB$, hay

$MB = IB.AB : (AB + IB) =$ không đổi. Vậy, M – cố định (vì nằm trên tia BA và cách gốc B một khoảng không đổi), và bài toán đã được giải xong.

Bài toán 98 (T3/183)

Nếu $\widehat{BAD} = 90^\circ$ thì hiển nhiên EF đi qua O. Bây giờ giả sử $\widehat{BAD} > 90^\circ$ (với $\widehat{BAD} < 90^\circ$ ta chứng minh hoàn toàn tương tự).



Gọi A' là điểm đối xứng của A qua EF. Ta có $\widehat{EA'F} = \widehat{EAF}$ (1). Mặt khác ta thấy $\widehat{EAF} = \widehat{BCD}$ (2) (vì đều bằng $180^\circ - \widehat{BAD}$).

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{EA'F} = \widehat{ECF}$ hay tứ giác $ECA'F$ là nội tiếp. Vậy có $\widehat{C}_1 = \widehat{E}_1 = \widehat{E}_2$. Nhưng $\widehat{E}_2 = \widehat{DAA'}$ (hai góc có các cặp cạnh tương ứng vuông góc). Từ đó ta có $\widehat{C}_1 = \widehat{DAA'}$ hay tứ giác $DACA'$ là nội tiếp. Vậy A' nằm trên đường tâm O ngoại tiếp tứ giác $ABCD$. Do EF là trung trực của dây AA' nên EF đi qua O, đpcm.

Bài toán 99 (T10/138)

Trước hết ta chứng minh rằng $MA^4 + MB^4 + MC^4 = 18R^4$ (1). Thật vậy, không mất tổng quát ta giả sử $M \in \overset{\frown}{AB}$. Đặt $MA = a$, $MB = b$, $MC = c$. Trên CM lấy điểm D sao cho $CD = MA$, dễ dàng chứng minh được tam giác MDB là đều. Từ đó ta có :

$$c = a + b \text{ và}$$

$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 =$
$= 2(a^2 + b^2 + ab) = 2(a^2 + b^2 - 2ab\cos 120^\circ)$.

nên $a^2 + b^2 + c^2 = 2AB^2 = 6R^2$. Từ đó suy ra :

$a^4 + b^4 + c^4 = (a^2 + b^2 + c^2)^2 - 2a^2b^2 -$
$- 2c^2(a^2 + b^2) = (a^2 + b^2 + c^2)^2 - 2[3R^2 -$
$- (a^2 + b^2)]^2 - 2c^2(a^2 + b^2)$
$= (a^2 + b^2 + c^2)^2 - 18R^4 + 12R^2(a^2 + b^2) -$
$- 2(a^2 + b^2)(a^2 + b^2 + c^2)$
$= 36R^4 - 18R^4 + 12R^2(a^2 + b^2) -$
$- 2(a^2 + b^2)6R^2 = 18R^4$

Vậy (1) được chứng minh.

Mặt khác do B_1, C_1 là điểm đối xứng qua MN của B, C nên giao điểm I của B_1C và C_1B nằm trên MN. Ta có $\widehat{B_1BC_1} = \widehat{BB_1C} = \widehat{BAC} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{B_1IB} = \widehat{AC_1B} = 60^\circ \Rightarrow AC_1 \parallel B_1C$. Từ đó suy ra $B_1A = C_1C$ (2). Từ $BB_1 \parallel AA_1$ suy ra $\overset{\frown}{A_1B_1} = \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AC} \Rightarrow \overset{\frown}{A_1A} = \overset{\frown}{B_1C}$ hay $A_1A = B_1C$ (3). Từ (2) và (3) ta có :

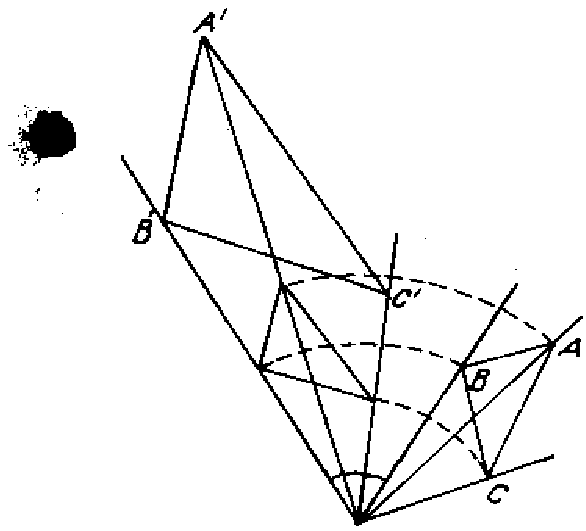
$$A_1A^4 + B_1B^4 + C_1C^4 = B_1C^4 + B_1B^4 + B_1A^4 \qquad (4)$$

Cuối cùng ta thấy (1) vẫn đúng nếu ta thay M bởi N hoặc B_1. Nghĩa là ta cũng có.

$NA^4 + NB^4 + NC^4 = B_1A^4 + B_1B^4 + B_1C^4 = 18B^4$(5) từ (1), (4), (5) cho ta đẳng thức kép cần chứng minh.

Bài toán 100 (T9/140)

Do hai tam giác ABC và $A'B'C'$ đồng dạng với tỉ số $k \neq 1$ và có cùng hướng nên tam giác $A'B'C'$ là ảnh của tam giác ABC sau một phép vị tự quay tâm O, góc α, tỉ số k.



Khi đó các tam giác OAA', OBB', OCC' đồng dạng và ta có $AA'/BB' = OA/OB$; $AA'/CC' = OA/OC$. Vậy $BB'.CA + CC'.AB = (AA'/OA)(OB.CA + OC.AB)$. Do bất đẳng thức Ptôlêmê $OB.CA + OC.AB \geqslant OA.BC$ nên ta có

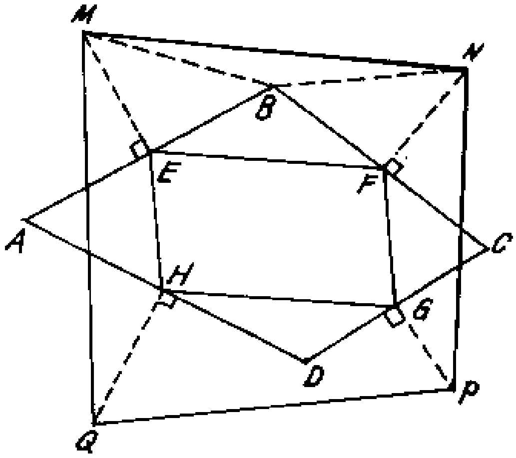
$BB'.CA + CC'.AB \geqslant AA'.BC$. Tương tự ta có hai bất đẳng thức kia.

Ta có đẳng thức chỉ khi $OABC$ là tứ giác nội tiếp được.

Bài toán 101 (T7/142)

Kí hiệu M, N, P, Q, lần lượt là tâm của các hình vuông dựng về phía ngoài tứ giác $ABCD$ trên các cạnh AB, BC, CD, DA. Kí hiệu trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA, lần lượt là E, F, G, H. Khi đó :

$S_1 = S_{MNPQ} = S_{EFGH} + S_{MEFN} + S_{NFGP} + S_{PGHQ} + S_{QHEM}$ (1)



Ta sẽ tìm S_{MEFN}. Đặt $\varphi = \widehat{ABC}$.

Khi đó :

$S_{MEFN} = S_{EBF} + S_{EBM} + S_{FBN} \pm S_{MBN}$

$= S_{EBF} + AB^2/8 + BC^2/8$

$\pm 1/2.MB.BN.\sin\widehat{MBN}$ (2)

dấu "+" xảy ra khi $\pi/2 \leq \varphi < \pi$, lúc đó $\widehat{MBN} = 3\pi/2 - \varphi$

dấu "–" xảy ra khi $0 < \varphi \leq \pi/2$ lúc đó $\widehat{MBN} = \varphi + \pi/2$.

Sau một số biến đổi lượng giác, cả hai trường hợp của (2) đều đưa đến.

$S_{MEFN} = S_{EBF} + 1/8.(AB^2 + BC^2 - 2AB.BC.\cos\varphi)$.

Áp dụng định lí hàm cosin cho ΔABC ta có :

$$S_{MEFN} = S_{EBF} + 1/8.AC^2 \quad (3)$$

Lập luận tương tự đối với các tứ giác *NFGP, PQHQ* và *QHEM* ta cũng thu được :

$S_{NFGP} = S_{FCG} + 1/8.BD^2$ (4)

$S_{PGHQ} = S_{GDH} + 1/8.AC^2$ (5)

$S_{QHEM} = S_{HAB} + 1/8.BD^2$ (6)

Thay (3), (4), (5) và (6) vào (1) ta có :

$S_1 = S_{EBF} + S_{FCG} + S_{GDH} + S_{HAE} +$

$+ S_{EFGH} + 1/4(AC^2 + BD^2) =$

$= S_{ABCD} + 1/4.(AC^2 + BD^2) =$

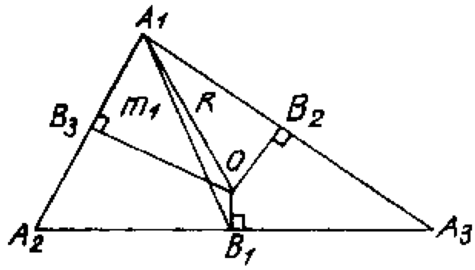
$= S + 1/4(AC^2 + BD^2) \geq S + 1/2AC.BD \geq$

$\geq S + 1/2.AC.BD.\sin\alpha = 2S$

(α là góc giữa 2 đường chéo *AC* và *BD* của tứ giác *ABCD*), dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $AC = BD$ và $\sin\alpha = 1$, hay $AC = BD$ và $\alpha = \pi/2$. Nói cách khác, $S_1 = 2S$ khi và chỉ khi các đường chéo của tứ giác *ABCD* bằng nhau và vuông góc với nhau (đpcm).

Bài toán 102 (T7/145)

Gọi lần lượt a_1, a_2, a_3 ; B_1, B_2, B_3, O là các cạnh, trung điểm của các cạnh, tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác $A_1A_2A_3$ ta có :



$$m_1 \leq R + OB_1$$

hay $\quad m_1/h_1 \leq R/h_1 + OB_1/h_1 \quad$ (1)

Một cách hoàn toàn tương tự như thế có

$$m_2/h_2 \leq R/h_2 + OB_2/h_2 \quad (2)$$

$$m_3/h_3 \leq R/h_3 + OB_3/h_3 \quad (3)$$

Cộng các bất đẳng thức (1), (2), (3) vế với vế ta có

$$m_1/h_1 + m_2/h_2 + m_3/h_3 \leq$$

$\leq OB_1/h_1 + OB_2/h_2 + OB_3/h_3 + R(1/h_1 + 1/h_2 + 1/h_3)$ Gọi S là diện tích $\Delta A_1A_2A_3$ ta thấy :

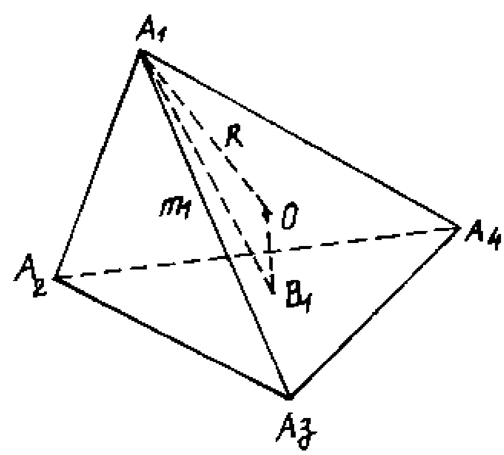
$OB_1/h_1 + OB_2/h_2 + OB_3/h_3 =$

$= a_1.OB_1/2S + a_2.OB_2/2S + a_3.OB_3/2S = 1$

$1/h_1 + 1/h_2 + 1/h_3 = (a_1 + a_2 + a_3)/2S = p/S = 1/r$.

Từ đó ta có bất đẳng thức phải chứng minh.

b) Xét tứ diện $A_1A_2A_3A_4$ có chứa tâm O của mặt cầu ngoại tiếp ta gọi lần lượt m_1, m_2, m_3, m_4 ; h_1, h_2, h_3, h_4 ; R, r là các đoạn thẳng nối các đỉnh A_1, A_2, A_3, A_4 với tâm



đường tròn ngoại tiếp các mặt đối diện ; các đường cao ; bán kính mặt cầu ngoại tiếp, nội tiếp thì ta luôn có :

$m_1/h_1 + m_2/h_2 + m_3/h_3 + m_4/h_4 \leq$ $(R + r)/r$ Thật vậy : Gọi B_1, B_2, B_3, B_4 là tâm các đường tròn ngoại tiếp các mặt của tứ diện ta thấy $m_1 \leq R + OB_1$ hay $m_1/h_1 \leq R/h_1 + OB_1/h_1$. Tương tự cũng có $m_2/h_2 \leq R/h_2 + OB_2/h_2$, $m_3/h_3 \leq R/h_3 + OB_3/h_3$, $m_4/h_4 \leq R/h_4 + OB_4/h_4$.

Cộng các bất đẳng thức này vế theo vế được.

$m_1/h_1 + m_2/h_2 + m_3/h_3 + m_4/h_4 \leq R(1/h_1 + 1/h_2 + 1/h_3 + 1/h_4) + OB_2/h_1 + OB_2/h_2 + OB_3/h_3 + OB_4/h_4$ Ta cũng có

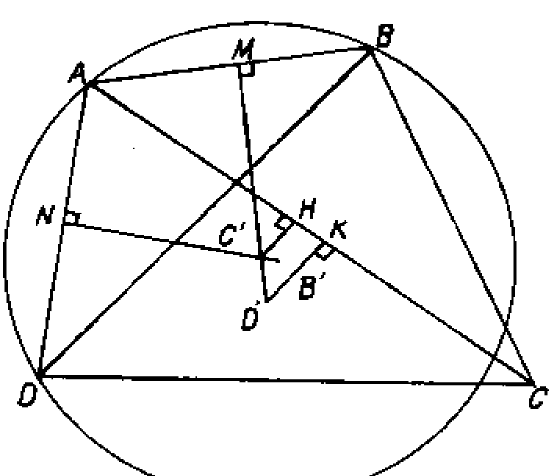
$1/h_1 + 1/h_2 + 1/h_3 + 1/h_4 =$ $(S_{A_2A_3A_4} + S_{A_1A_3A_4} + S_{A_1A_2A_4} + S_{A_1A_2A_3})/3V =$ $= 1/r$ và $OB_1/h_1 + OB_3/h_2 + OB_3/h_3 + OB_4/h_4 =$ $= V_{OA_2A_3A_4}/V + V_{OA_1A_3A_4}/V + V_{OA_1A_2A_4}/V +$ $+ V_{OA_1A_2A_3}/V = 1$

Từ đó ta được bất đẳng thức cần chứng minh.

c) Với tam giác $A_1A_2A_3$ dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi O nằm trên A_iB_i, $t = 1, 2, 3$. Nghĩa là $A_1A_2A_3$ là tam giác đều.

Trong trường hợp tứ diện $A_1A_2A_3A_4$, dấu bằng của bất đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi O nằm trên các đoạn A_iB_i, $t = 1, 2, 3, 4$. Nói khác đi tứ diện $A_1A_2A_3A_4$ là tứ diện đều.

Bài toán 103 (T7/151)



a) Do A, B, C, D không cùng nằm trên một đường tròn nào nên A', B', C', D' là bốn điểm phân biệt. Ta có $A'B'$, $A'D'$, $B'C'$, ... lần lượt là trung trực của CD, BD, BC, AD, ...

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AD. Ta có tứ giác nội tiếp $AMC'N$. Hạ $C'H \perp AC$. Do $B'D' \perp AC$ nên $B'D' \parallel C'H$. Vậy B' và D' nằm về cùng một phía đối với dường thẳng $C'H$ và M, N cũng nằm về cùng một phía đối với đường thẳng $C'H$. Vậy $\widehat{B'C'D'} =$ $= \widehat{MC'N} = \pi - \widehat{BAD}$

Tương tự $\widehat{C'D'A'} = \pi - \widehat{CBA}$;

$\widehat{D'A'B'} = \pi - \widehat{DCB}$;

$\widehat{A'B'C'} = \pi - \widehat{ADC}$.

Do đó $A'B'C'D'$ cũng là tứ giác lồi không nội tiếp được. Cũng vậy ta lại có $A''B''C''D''$ là tứ giác lồi và hơn nữa $A''B''$, AB cùng vuông góc với $C'D'$ nên $A''B'' \parallel AB$. Tương tự $B''C'' \parallel BC$ và $C''A'' \parallel CA$. Do đó các tam giác $A''B''C''$ và ABC đồng dạng. Lập luận tương tự ta cũng có các cặp tam giác đồng dạng $A''D''C''$ và ADC ; $B''C''D''$ và BCD ; $A''B''D''$ và ABD. Suy ra $ABCD$ và $A''B''C''D''$ đồng dạng.

b) Giả sử $B'D'$ cắt AC tại K (trung điểm của AC). Trên $B'D'$ ta định chiều dương từ phía chứa D với AC. Khi đó

$\overline{B'K} = AC.\cos\widehat{D}/2\sin\widehat{D}$; $\overline{D'K} = AC.\cos\widehat{B}/2\sin\widehat{B}$

và

$$D'B' = |\overline{B'K} - \overline{D'K}|$$
$$= AC\sin(\widehat{D} + \widehat{B})/2\sin\widehat{D}\sin\widehat{B}$$

Tương tự

$$C''A'' = \left|\frac{D'B'\sin(\widehat{A'} + \widehat{D'})}{2\sin A' . \sin B'}\right|$$

Do đó

$$K = \frac{A''C''}{AC} = \frac{1}{4}\left|\frac{\sin(\widehat{B} + \widehat{D})\sin(\widehat{A} + \widehat{C})}{\sin\widehat{A}\sin\widehat{B}\sin\widehat{C}\sin\widehat{D}}\right|$$

$$k = \frac{1}{4}\frac{\sin^2(A + C)}{\sin A\sin B\sin C\sin D}$$

Bài toán 104 (T9/165)

Kí hiệu x_K và y_k là hoành độ và tung độ của điểm K bất kì trong mặt phẳng. Phương trình các đường thẳng d_1, d_2 đi qua hai điểm A và B ; M và N tương ứng có dạng $y = ax + b$; $y = mx + n$. Do J là giao điểm của hai đường thẳng nói trên nên :

$$ax_J + b = mx_J + n$$

$$\Leftrightarrow x_J = \frac{n-b}{a-m}$$

Phương trình tiếp tuyến của parabon $y = x^2$ tại các điểm M, N tương ứng là : $y = 2x_Mx - x_M^2$ và $y = 2x_Nx - x_N$. Do I là giao điểm của hai tiếp tuyến nói trên nên :

$$2x_Mx_I - x_M^2 = 2x_Nx_I - x_N^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_I = (x_M + x_N)/2 \ (1) \ (\text{vì } x_M \neq x_N)$$

Do đó : $y_I = 2x_Mx_I - x_M^2 = x_Mx_N(2)$ Vì các điểm A, B là giao của đường thẳng d_1 với parabon $y = x^2$ nên $x_A.x_B$ là hai nghiệm của phương trình :

$$x^2 = ax + b \Leftrightarrow x^2 - ax - b = 0$$

Vì M, N là giao điểm của đường thẳng d_2 với parabon $y = x^2$ nên $x_M.x_N$ là hai nghiệm của phương trình

$$x^2 = mx + n \Leftrightarrow x^2 - mx - n = 0$$

Do đó theo định lí Viet ta có :

$x_A + x_B = a$; $x_Ax_B = -b$; $x_M + x_N$ [illegible] ;
$x_Mx_N = -n$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra :

$$x_I = m/2, \ y_I = -n/2$$

Mặt khác, do I nằm trên đường thẳng d_1 nên $y_I = ax_I + b$.

Suy ra : $-n/2 = am/2 + b \Leftrightarrow$

$$am + 2(b + n) = 0 \qquad (4)$$

Gọi A', B', I', J' là hình chiếu của A, B, I, J trên trục hoành ta có :

$$\overline{A'J'} = x_A - x_J, \ \overline{B'J'} = x_B - x_J,$$
$$\overline{A'I'} = x_A - x_I \text{ và } \overline{B'I'} = x_B - x_I$$

Do đó :

$$\overline{A'J'}/\overline{B'J'} = -\overline{A'I'}/\overline{B'I'} \qquad (5)$$

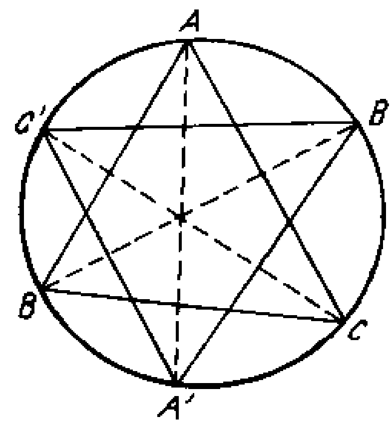
$\Leftrightarrow (x_A - x_J)/(x_B - x_J) = -(x_A - x_I)/(x_B - x_I)$
$\Leftrightarrow 2(x_Ax_B + x_Ix_J) = (x_A + x_B)(x_I + x_J)$
$\Leftrightarrow 2[-b + m(n - b)/2(a - m)] =$
$= a[(m/2 + (n - b)/(a - m)]$
$\Leftrightarrow 4b(m - a) + 2m(n - b) = am(a - m) +$
$+ 2a(n - b)$

$$\Leftrightarrow (a - m)(am + 2b + 2n) = 0 \qquad (6)$$

Vì (6) là một đẳng thức đúng (do (4)) nên (5) cũng là đẳng thức đúng. Điều đó chứng tỏ A', B', I', J' lập thành một hàng điểm điều hòa. Vì vậy A, B, I, J cũng lập thành một hàng điểm điều hòa (đpcm).

Bài toán 105 (T10/168)

Gọi S là diện tích ΔABC, S' là diện tích $\Delta A'B'C'$.



Ta có :

$$S = \frac{abc}{4R} = 2R^2\sin A\sin B\sin C$$

$$S' = \frac{a'b'c'}{4R}$$

$$= 2R^2\sin\frac{A+B}{2}.\sin\frac{B+C}{2}.\sin\frac{C+A}{2}$$

$$= 2R^2\cos(A/2)\cos(B/2)\cos(C/2).$$

Do đó : $S/S' = 8\sin(A/2)\sin(B/2)\sin(C/2)$

$= 4\{\cos[(A - B)/2] - \cos[(A + B)/2]\}\sin(C/2)$

$= 4\cos[(A - B)/2]\sin(C/2) - 4\sin^2(C/2) -$

$- \cos^2[(A - B)/2] + \cos^2[(A - B)/2]$

$= -\{2\sin(C/2) - \cos[(A - B)/2]\}^2 +$

$+ \cos^2[(A - B)/2] \leq 1.$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi ΔABC đều.

Bài toán 106 (T9/169)

Hạ $AO \perp BC$. Xét hệ trục tọa độ vuông góc có gốc là O, trục Ox nằm theo OC và trục Oy nằm theo OA. Do ΔABC là tam giác nhọn nên O nằm trong đoạn BC. Vì vậy tọa độ của các điểm A, B, C trong hệ trục tọa độ Oxy tương ứng có dạng $(0, \alpha)$, $(-\beta, 0)$, $(\gamma, 0)$ với $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$. Khi đó $\mathrm{tg}B = \alpha/\beta$, $\mathrm{tg}C = \alpha/\gamma$, $\mathrm{tg}A = -\mathrm{tg}(B + C) =$

$$= \alpha(\beta + \gamma)/(\alpha^2 - \beta\gamma) \qquad (1)$$

Giả sử trong hệ Oxy đường thẳng L có phương trình :

$x\cos\theta + y\sin\theta + p = 0$ ($0 \leqslant \theta = \text{const} < 2\pi$, $p = \text{const} \in \mathbf{R}$)

Áp dụng công thức tính khoảng cách từ một điểm tới một đường thẳng cho các điểm A, B, C và đường thẳng L và theo (1) ta có :

$u^2\text{tg}A + v^2\text{tg}B + w^2\text{tg}C = (\alpha\sin\theta + p)^2\alpha(\beta + \gamma)/(\alpha^2 - \beta\gamma) + (-\beta\cos\theta + p)^2\alpha/\beta + (\gamma\cos\theta + p)^2\alpha/\gamma =$
$= (\alpha^2\sin^2\theta + 2\alpha p\sin\theta + p^2)\alpha(\beta + \gamma)/(\alpha^2 - \beta\gamma) +$
$+ \alpha(\beta+\gamma)\cos^2\theta + \alpha(\beta + \gamma)/\beta\gamma.p^2 =$
$= \alpha(\beta + + \gamma)/(\beta\gamma(\ \pi^2\alpha^2 + \beta\gamma(\alpha^2 - \beta\gamma)\cos^2\theta] =$
$= \alpha(\beta + + \gamma)/(\beta\gamma\ \beta\gamma)]$ (2)

Do $0 < A < \pi/2$ nên $\text{tg}A > 0 \Rightarrow \alpha(\beta + \gamma)/(\alpha^2 - \beta\gamma) > 0 \Rightarrow \alpha^2 - \beta\gamma > 0$ (3)

Từ (2) và (3) suy ra : $u^2\text{tg}A + v^2\text{tg}B + w^2\text{tg}C \geqslant \alpha(\beta + \gamma) = 2\Delta$ (Dpcm). Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $(\alpha p + \beta\gamma\sin\theta)^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha p + \beta\gamma\sin\theta = 0 \Leftrightarrow p + \beta\gamma/\alpha\sin\theta = 0$ (do $\alpha \neq 0$). Diều này chứng tỏ dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi đường thẳng L đi qua điểm $(O, \beta\gamma/\alpha)$ – trực tâm của ΔABC.

Bài toán 107 (T10/169)

Ý tưởng giải như sau :

1) Chứng minh : $a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{O}$ (1)

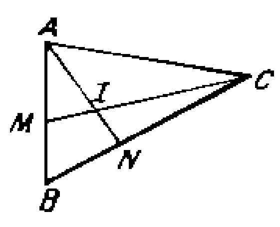
2) Từ giả thiết suy ra $\overrightarrow{AA_1} = a\overrightarrow{IA}$, $\overrightarrow{BB_1} = b\overrightarrow{IB}$, $\overrightarrow{CC_1} = c\overrightarrow{IC}$. Do đó, nếu gọi G là trọng tâm của ΔABC ta sẽ có : $\overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{GB_1} + \overrightarrow{GC_1} = \overrightarrow{GA} +$
$+ \overrightarrow{AA_1}) + (\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BB_1}) + (\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CC_1}) = (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) + (a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IG}) = \overrightarrow{O}$

Vậy G là trọng tâm của $\Delta A_1B_1C_1$ (đpcm).

Sự khác nhau trong lời giải của các bạn là phương pháp chứng minh (1). Dưới đây sẽ trình bày hai phương pháp chứng minh ngắn gọn và đơn giản hơn cả.

Cách 1

Gọi M, N lần lượt là giao của CI và AB, AI và BC. Ta có $NB/NC = c/b$. (Do AN là phân giác $\widehat{A}$) $\Rightarrow b.NB = c.NC \Rightarrow b\overrightarrow{NB} + c\overrightarrow{NC} = 0$ (2)



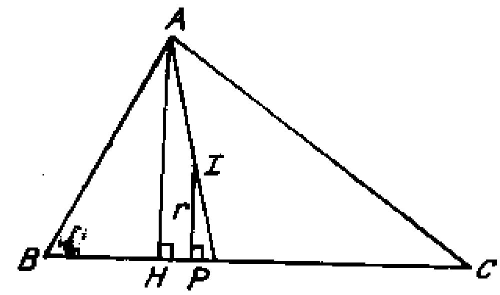
Mặt khác, theo định lí Mênêlaus ta có :

$AM/MB\ .\ CB/CN\ .\ NI/IA = 1 \Rightarrow IA/IN = AM/MB\ .\ CB/CN = AM/MB.(1 + NB/NC) =$
$= b/a.(1 + c/b) = (b + c)/a \Rightarrow aIA = (b + c)IN$
$\Rightarrow a\overrightarrow{IA} + (b + c)\overrightarrow{IN} = 0$ (3)

Từ (2) và (3) suy ra : $a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = a\overrightarrow{IA} + b(\overrightarrow{IN} + \overrightarrow{NB}) + c(\overrightarrow{IN} + \overrightarrow{NC}) = \overrightarrow{0}$

Cách 2

Gọi P là giao của AI và BC. Hạ $AH \perp BC$. Dặt $AH = h_a$ và gọi r là bán kính đường tròn nội tiếp ΔABC.



Ta có : $r/h_a = IP/AP \Rightarrow AI/AD = 1 - r/h_a$

Vì $r(a + b + c) = ah_a$ nên $r/h_a =$
$= a/(a + b + c)$. Do đó $AI/AP =$
$= (b + c)/(a + b + c)$. Suy ra :
$\ldots (b + c)/(a + b + c).\overrightarrow{PA}$ (2)

$\ldots P$ kẻ $PP_1 \parallel AC$ ($P_1 \in AB$) và $PP_2 \parallel AB$ ($P_2 \ldots AC$)

Ta có : $CA/PP_1 = CB/PB = 1 + PC/PB =$
$= 1 + b/c = (b + c)/c \Rightarrow$
$PP_1/CA = c/(b + c) \Rightarrow \overrightarrow{PP_1} = c/(b + c).\overrightarrow{CA}$

$BA/PP_2 = BC/PC = 1 + PB/PC = 1 + c/b =$
$= (b + c)/b \Rightarrow PP_2/BA = b/(b + c) \Rightarrow$
$\overrightarrow{PP_2} = b/(b + c).\overrightarrow{BA}$

Do đó : $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{PP_1} + \overrightarrow{PP_2} =$
$= b/(b + c).\overrightarrow{BA} + c/(b + c).\overrightarrow{CA}$ (3)

Từ (2) và (3) ta có :
$\overrightarrow{IA} = (b + c)/(a + b + c).\overrightarrow{PA} =$
$= 1/(a + b + c).(b\overrightarrow{BA} + c\overrightarrow{CA})$
$\Rightarrow a\overrightarrow{IA} = 1/(a + b + c)(ab\overrightarrow{BA} + ac\overrightarrow{CA})$

Chứng minh hoàn toàn tương tự ta cũng sẽ có :
$b\overrightarrow{IB} = 1/(a + b + c).(ab\overrightarrow{AB} + bc\overrightarrow{CB})$,
$c\overrightarrow{IC} = 1(a + b + c).(ac\overrightarrow{AC} + bc\overrightarrow{BC})$

Do đó :
$a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = 1/(a + b + c)[ab(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB}) + bc(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BC}) + ac(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AC}] = \overrightarrow{0}$

Sau khi chứng minh được (1), lời giải được trình bày tiếp theo như đã trình bày ở phần 2)

Bài toán 108 (T11/169)

Vì tam giác ABC nhọn nên các góc $\widehat{DAN}$, $\widehat{PAE}$, $\widehat{MEC}$, $\widehat{NCF}$, $\widehat{PBF}$, $\widehat{MBD}$ đều nhỏ hơn 180^o. Trước tiên ta chứng minh rằng :

$$ND^2 + PF^2 + ME^2 = NF^2 + PE^2 + MD^2. \quad (1)$$

Áp dụng hàm số cosin trong các tam giác DAN, PAE, MCE, NCF, PBF, MBD ta thấy :

$ND^2 = c^2 + b^2/4 - bc\cos(A + 60^o)$

$PF^2 = a^2 + c^2/4 - ac\cos(B + 60^o)$

$ME^2 = b^2 + a^2/4 - ab\cos(C + 60^o)$

$NF^2 = a^2 + b^2/4 - ab\cos(C + 60^o)$

$PE^2 = b^2 + c^2/4 - bc\cos(A + 60^o)$

$MD^2 = c^2 + a^2/4 - ac\cos(B + 60^o)$

Từ đây thấy có được (1).

Gọi H, L, K là các hình chiếu của M, P, N xuống DE, EF và DF ta phân tích : $ND^2 = DK^2 + KN^2$; $PF^2 = PL^2 + LF^2$; $ME^2 = MH^2 + HE^2$; $NF^2 = KN^2 + KF^2$; $PE^2 = EL^2 + PL^2$; $MD^2 = MH^2 + DH^2$ giản ước đi ta có : $EH^2 + FL^2 + DK^2 =$
$= DH^2 + EL^2 + + FK^2$ (2)

Bây giờ gọi R là giao của MH và NK. Gọi L' là hình chiếu của R trên EF ta có :

$$EH^2 + L'F^2 + DK^2 = DH^2 + (EL')^2 + FK^2 \quad (3)$$

(vì cùng bằng $DR^2 + RE^2 + RF^2 -$
$- (RH^2 + (RL')^2 + RK^2))$

Từ (2) và (3) suy ra $EL^2 - FL^2 = EL'^2 - FL'^2$, điều này tương đương với $EL - FL = EL' - FL'$. Từ đây suy ra $L \equiv L'$.

Vậy P, R, L thẳng hàng. Suy ra $R \in PL$ nghĩa là PL, MH, NK đồng quy.

Bài toán 109 (T9/170)

a) Gọi các đường thẳng AM, BM, CM lần lượt là x, y, z. Gọi x' y' z' tương ứng là các đường đối xứng với x, y, z qua các đường phân giác trong của các góc $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$ của ΔABC. Giả sử x' cắt y' tại M', ta sẽ chứng minh $M' \in z'$. Thật vậy, gọi P, P' ; Q, Q' ; R, R' tương ứng là hình chiếu của M, M' trên các đường thẳng BC, CA, AB. Từ sự đối xứng của x và x' qua phân giác trong của $\widehat{A}$ và từ sự đối xứng của y và y' qua phân giác trong của $\widehat{B}$ ta có : $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$ (1) và $\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2$ (2) (xem hình 1). Dễ thấy rằng :

$$(1) \Leftrightarrow \frac{M'Q'}{M'R'} = \frac{MR}{MQ}$$
$$\Leftrightarrow MQ.M'Q' = MR.M'R' \quad (3')$$

$$(2) \Leftrightarrow \frac{M'R'}{M'P'} = \frac{MP}{MR} \Leftrightarrow MR.M'R' = MP.M'P' \quad (2')$$

Từ (1') và (2') suy ra $MP.M'P' =$
$= MQ.M'Q' \Leftrightarrow \dfrac{M'P'}{M'Q'} = \dfrac{MQ}{MP} \Leftrightarrow \widehat{C}_1 = \widehat{C}_2$ (3) chứng tỏ z và CM' đối xứng với nhau qua phân giác trong của $\widehat{C}$. Từ đó suy ra $M' \in z'$. Vậy, nếu $x' \neq y'$ thì x', y' và z' đồng quy tại một điểm M' nào đó.

– Giả sử $x' \,//\, y'$, ta sẽ chứng minh rằng $x' \,//\, y' \,//\, z'$. Thật vậy, đặt $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 = \alpha$, $\widehat{B}_1 = \widehat{B} = \beta$, (Xem hình 2). Do $x' \,//\, y'$ nên $\widehat{B}_2 = \widehat{A}_2$ tức là $\alpha = \beta$, và vì vậy ta được : $\widehat{MBC} = \beta = \alpha = \widehat{MAC}$. Suy ra bốn điểm M, A, B, C cùng nằm trên một đường tròn. Từ đó ta có :
$\gamma = \widehat{MCB} = \widehat{MAB} = \widehat{A}_2 + \widehat{A}_3 = \widehat{A}_1 + \widehat{A}_3 =$
$= \widehat{CAx'}$. Do đó $z' \,//\, x'$ và như vậy $x' \,//\, y' \,//\, z'$. Vậy x', y', z' hoặc đồng quy hoặc song song với nhau (Đpcm).

b) Nối QR và $Q'R'$ (xem h. 1), ta sẽ chứng minh rằng $QRR'Q'$ là tứ giác nội tiếp. Thật vậy, ta có $\widehat{QMR} = \widehat{R'M'Q'}$ (góc có cạnh tương ứng song song). Hơn nữa ta lại có $MQ/MR = M'R'/M'Q'$ (do (1)). Từ đó suy ra $\Delta MQR \backsim \Delta M'R'Q'$. Do đó $\widehat{MQR} = \widehat{M'R'Q'}$ và vì vậy ta được $\widehat{AQR} = 90^o - \widehat{MQR} = 90^o - \widehat{M'R'Q'} = \widehat{AR'Q'}$. Điều này chứng tỏ tứ giác $QQ'R'R$ là tứ giác nội tiếp. Hơn nữa, do tâm của đường tròn (V) ngoại tiếp tứ giác $QQ'R'R$ là giao của hai đường trung trực của hai đoạn QQ' và RR' nên theo định lí Talét suy ra tâm của (V) là trung điểm S của đoạn MM'.

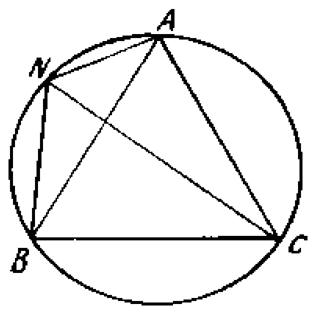
Tương tự như vậy ta sẽ chứng minh được các tứ giác $RR'P'P$ và $PP'Q'Q$ là các tứ giác nội tiếp và tâm của các đường tròn ngoại tiếp các tứ giác đó là S.

Từ đó suy ra sáu điểm P, Q, R, P', Q', R' cùng nằm trên một đường tròn có tâm là trung điểm S của đoạn MM' (đpcm).

Chú ý : Với nhận xét rằng $M \equiv O \Rightarrow M' \equiv H$ và $M \equiv H \Rightarrow M' \equiv O$ (O *và* H tương ứng là tâm đường tròn ngoại tiếp và trực tâm của ΔABC ta sẽ thấy rằng đường tròn Ole (đường tròn 9 điểm) là trường hợp đặc biệt của đường tròn sáu điểm trong bài toán đã ra.

Bài toán 110 (T10/171)

Giả sử $M \in \widehat{AB}$, ΔABC đều cạnh a. Áp dụng định lí Ptôlêmê vào tứ giác nội tiếp $MABC$ ta có :



$$AB.MC = AC.MB + BC.MA$$

Từ đó suy ra $MC = MA + MB$.

Đặt $MA = x$, $MB = y$ ta được :

$T = MA^4 + MB^4 + MC^4 = MA^4 + MB^4 + (MA + MB)^4$

$= 2(x^4 + y^4 + 2x^3y + 3x^2y^2 + 2xy^3)$ (1)

Mặt khác áp dụng định lí côsin vào ΔABM ta được :

$a^2 = MA^2 + MB^2 - 2MA.MB.\cos\widehat{AMB}$

$= x^2 + y^2 + xy$ ($\widehat{AMB} = 120^o$)

$a^4 = (x^2 + y^2 + xy)^2$

$= x^4 + y^4 + 2x^3y + 3x^2y^2 + 2xy^3$ (2)

Từ (1) và (2) ta thấy $T = MA^4 + MB^4 + MC^4 = 2a^4$. Điều này chứng tỏ T không phụ thuộc vị trí của điểm M trên đường tròn.

Bài toán 111 (T10/172)

Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Ta phải chứng minh

$\overrightarrow{GA_2} + \overrightarrow{GB_2} + \overrightarrow{GC_2} = \vec{0} \Leftrightarrow$

$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AA_2} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BB_2} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CC_2} = \vec{0} \Leftrightarrow$

$\vec{v} = \overrightarrow{AA_2} + \overrightarrow{BB_2} + \overrightarrow{CC_2} = \vec{0}$.

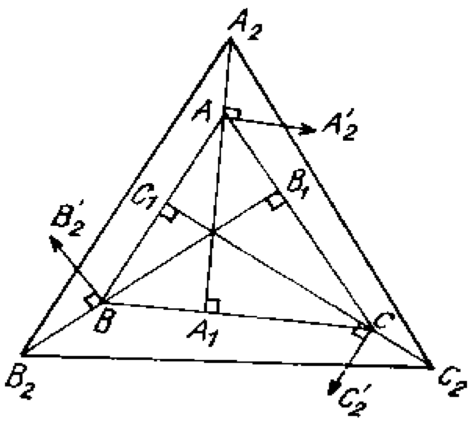
(Vì $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$).

Thật vậy quay ba vectơ $\overrightarrow{AA_2}, \overrightarrow{BB_2}, \overrightarrow{CC_2}$ quanh A, B, C lần lượt theo chiều kim đồng hồ đến $\overrightarrow{AA'_2}, \overrightarrow{BB'_2}, \overrightarrow{CC'_2}$.

Ta có $AA_1.AA_2 = 1$ (gt).

$AA_1.BC = 2S$ (S là diện tích ΔABC).

$\Rightarrow BC = 2S.AA_2 \Rightarrow BC = 2S.AA'_2$.



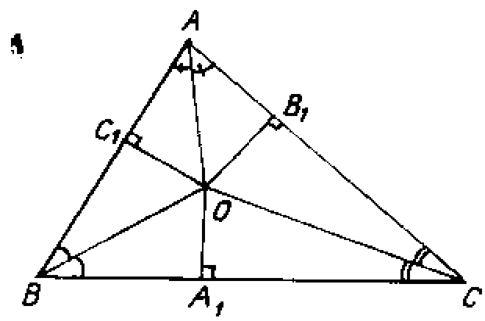
Vì $\overrightarrow{AA'_2}$ cùng phương và chiều với $\overrightarrow{BC}$ nên $\overrightarrow{BC} = 2S.\overrightarrow{AA_2}$. Tương tự ta cũng có

$\overrightarrow{CA} = 2S.\overrightarrow{BB'_2}, \overrightarrow{AB} = 2S.\overrightarrow{CC'_2}$.

$\Rightarrow \vec{0} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = 2S(\overrightarrow{AA'_2} + \overrightarrow{BB_2} + \overrightarrow{CC_2})$

$= 2S\vec{v'} \Rightarrow \vec{v'} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \vec{0}$ (vì $\vec{v}$ là ảnh của $\vec{v'}$ qua phép quay vec tơ góc 90^o).

Bài toán 112 (T9/181)



a) Đặt $B_1C_1 = a_1$, $C_1A_1 = b_1$, $A_1B_1 = C_1$

Xét Δ cân AB_1C_1 ta có :

$a_1 = (b + c - a)\sin(A/2)$

$= (b + c - a)\sqrt{(1 - \cos A)/2}$

$= (b + c - a)\sqrt{[1 - (b^2 + c^2 - a^2)/2bc]/2}$

$= [b^2 - (c - a)^2][c^2 - (a - b)^2]/4bc \leqslant$

$\leqslant \sqrt{bc}/2$ Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$.

Tương tự, từ việc xét các Δ cân BA_1C_1, CB_1A_1, ta được : $b_1 \leqslant \sqrt{ac}/2$ và $c_1 \leqslant \sqrt{ab}/2$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$.

Do đó :

$a_1 + b_1 + c_1 \leqslant (\sqrt{bc} + \sqrt{ac} + \sqrt{ab})/2 \leqslant$

$\leqslant (a + b + c)/2$ (Đpcm)

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

b) Áp dụng định lí hàm sin cho ΔBOC ta được :

$OC/\sin(B/2) = BC/\sin[(B + C)/2] = a/\cos(A/2)$

$\Rightarrow OC = a\sin(B/2)/\cos(A/2)$.

Tương tự, ta được :

$OA = b\sin(C/2)/\cos(B/2)$

$OB = c\sin(A/2)/\cos(C/2)$

Do đó :

$OA.OB.OC = abc\,tg(A/2)tg(B/2)tg(C/2)$ (1)

Từ $tg(A/2) = cotg(B/2 + C/2) =$

$= [1 - tg(B/2)tg(C/2)]/[tg(B/2) + tg(C/2)]$ rút ra

$tg(A/2)tg(B/2) + tg(B/2)tg(C/2) + tg(C/2)tg(A/2) = 1$.

Do đó, áp dụng bất đẳng thức Côsi cho ba số dương $tg(A/2)tg(B/2)$, $tg(B/2)tg(C/2)$, $tg(C/2)tg(A/2)$, ta có :

$1 \geqslant \sqrt[3]{tg^2(A/2)tg^2(B/2)tg^2(C/2)}$

$\Rightarrow tg(A/2)tg(B/2)tg(C/2) \leqslant 1/3\sqrt{3}$ (2)

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow tg(A/2) = tg(B/2) = tg(C/2) \Leftrightarrow A = B = C$. Từ (1) và (2) suy ra :

$OA.OB.OC \leqslant abc/3\sqrt{3}$ (3)

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho ba số dương $a.OA^2$, $b.OB^2$, $c.OC^2$ ta có : $OA.OB.OC/(a.OA^2 + b.OB^2 + c.OC^2) \leqslant$

$\leqslant (1/3)\sqrt[3]{OA.OB.OC/abc}$

$\leqslant 1/3\sqrt{3}$ (do (3)) (Đpcm)

Dấu "=" xảy ra

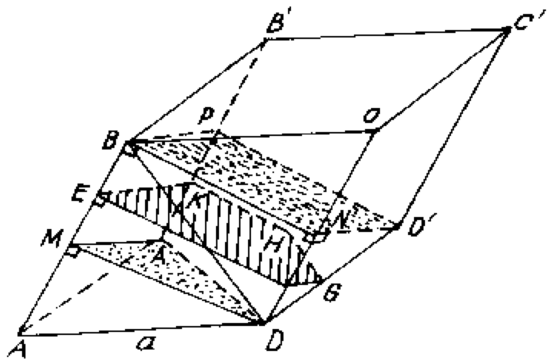
$$\begin{cases} \Leftrightarrow a.OA^2 = b.OB^2 = c.OC^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow A = B = C \end{cases}$$

$\Leftrightarrow a = b = c \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

Bài toán 113 (T10/132)

Ta chứng minh bằng cách chỉ ra một cách dựng hình hộp thỏa mãn điều kiện của đầu bài.

Trước tiên ta dựng một tứ diện đều *ABDA* có cạnh *a* rồi dựng các hình bình hành *ABCD, AA'B'B* và *AA'D'D*. Sau đó dựng hình bình hành *BB'C'C*. Hình *ABCD. A'B'C'D'* là hình hộp thỏa mãn điều kiện của đề bài. (Các bạn tự chứng minh).



Cho *M* là điểm giữa của *AB*, *N* là điểm giữa của *CD* thì vì các tam giác *ABD, ABA'* là tam giác đều nên nếu ta cắt hình hộp *ABCDAB'C'D'* bởi một mặt phẳng vuông góc với các cạnh bên *AB, CD, C'D', B'A'* tại *M* thì thiết diện thẳng sẽ là tam giác cân *A'MD*.

Nếu mặt phẳng vuông góc α cắt hình hộp tại *N* thì do các tam giác *DBC* và *DD'C* là các tam giác đều nên thiết diện thẳng đi qua *B, D'* và *P* (là điểm giữa của *A'B'*), là một hình thoi có cạnh bằng chiều cao *BN* của tam giác đều *DBC*.

Nếu mặt phẳng vuông góc α cắt hình hộp tại một điểm *E* nằm giữa *M* và *B* thì thiết diện thẳng sẽ là hình ngũ giác như ngũ giác *EFGHK*.

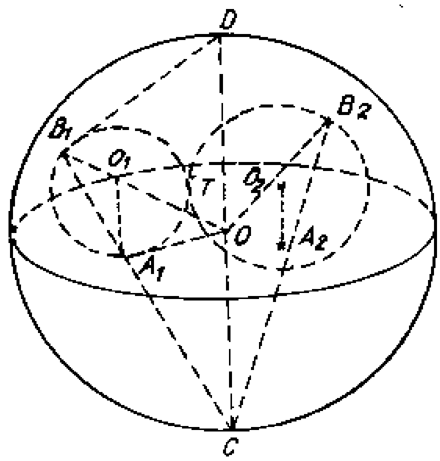
Nếu mặt phẳng vuông góc α cắt hình hộp tại một điểm nằm trong khoảng từ *A* đến *M* ta được các thiết diện thẳng là các tam giác cân.

Nếu mặt phẳng vuông góc α cắt hình hộp tại các điểm trên *D'C'* tình hình xảy ra cũng tương tự.

Tóm lại các thiết diện thẳng của hình hộp sẽ có dạng là các hình tam giác cân, các hình ngũ giác và có ba thiết diện thẳng là hình thoi.

Bài toán 114 (T9/136)

Gọi A_1, A_2 là tiếp điểm của các mặt cầu nhỏ (O_1) ; (O_2) với hình tròn lớn của nửa hình cầu đã cho ; B_1, B_2 là các tiếp điểm của các mặt cầu (O_1), (O_2) với nửa mặt cầu đã cho. *CD* là đường kính của hình cầu tâm *O* bán kính *R*, vuông góc với mặt phẳng của hình tròn lớn đã cho. Ta có : $O_iA_i \,//\, OC$; O, O_i, B_i thẳng hàng và do $O_iB_i / O_iA_i = OB_1 / OC$ nên cũng có A_i, B_i, C_i thẳng hàng (với $i = \overline{1,2}$). Lại có, tứ giác A_iODB_i nội tiếp vì $\widehat{DB_iC} = \widehat{A_iOD} = 1v$, nên :



$CA_i.CB_i = CO.CD = 2R^2$ ($i = \overline{1,2}$). Do đó C có cùng phương tích với hai mặt cầu (O_1) và (O_2), hay C nằm trên mặt đẳng phương của hai mặt cầu đó. Từ đó, gọi T là tiếp điểm của hai mặt cầu nhỏ thì ta có CT sẽ là tiếp tuyến của chúng và $CT^2 = CA_i.CB_i = 2R^2$. Vậy T thuộc mặt cầu tâm C bán kính $R\sqrt{2}$ cố định (đ.p.c.m).

Bài toán 115 (T9/137)

Từ điều kiện của đề bài ta thấy chỉ có thể xảy ra một trong hai trường hợp sau :

Trường hợp 1 : Thiết diện của [P] và tứ diện ABCD là tam giác (Trường hợp này xảy ra khi giao tuyến của [P] với một mặt nào đó của tứ diện, hoặc đi qua trọng tâm của mặt đó hoặc chia mặt đó ra làm hai phần, một phần chỉ chứa 2 điểm của mặt, còn phần kia chứa điểm còn lại cùng trọng tâm của mặt đó). Trong trường hợp này luôn tồn tại một mặt của tứ diện, giả sử mặt BCD, nằm về một phía của [P].

Gọi G_1 là trọng tâm của ΔBCD. Nối BG_1 kéo dài cắt CD tại điểm giữa I của CD. Trên BI kéo dài về phía I lấy điểm B_o sao cho $IB_o = IG_1$. Gọi G_1, I_1, B_o là chân các đường vuông góc hạ từ G_1, I, B_o xuống [P]. Do các bộ điểm (B, G_1, I, B_o) và (C, I, D) thẳng hàng nên các bộ điểm (B_1, G_1', I_1, B_o') và (C_1, I_1, D_1) cũng thẳng hàng. Áp dụng định lí về đường trung bình trong hình thang lần lượt cho các hình thang CC_1D_1D, $G_1G_1'B_o'B_o$ và $BB_1B_o'B_o$ ta được : $BB_1 + CC_1 + DD_1 =$

$$= BB_1 + 2II_1 = BB_1 + G_1G_1' = B_oB_o'$$

$$= (BB_1 + B_oB_o') + G_1G_1'$$

$$= 3G_1G_1' \qquad (1)$$

Do G là trọng tâm của tứ diện $ABCD$ nên

$$AG = 3GG_1 \qquad (2)$$

Dễ dàng chứng minh được : $\Delta AA_1G \backsim \Delta G_1G_1'G$.

Từ đây kết hợp với (2) suy ra $AA_1 = 3G_1G_1'$ (3) Kết hợp (1) và (3) ta được : $AA_1 = BB_1 + CC_1 + DD_1$ (đpcm).

Trường hợp 2 : Thiết diện của [P] và tứ diện ABCD là tứ giác.

(Trường hợp này xảy ra khi giao tuyến của [P] với một mặt nào đó của tứ diện chia mặt đó ra làm hai phần : một phần chỉ chứa 1 điểm của mặt, còn phần kia chứa 2 điểm còn lại cùng trọng tâm của mặt đó). Khi ấy [P] sẽ chia không gian ra làm 2 phần : một phần chỉ chứa 2 đỉnh của tứ diện, chẳng hạn A, C, còn phần kia chứa 2 đỉnh còn lại B, D. Gọi M, N, Q là điểm giữa của AC, BD và MN. Lấy điểm O bất kì trong không gian. Ta có :

$$\overrightarrow{OQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON})$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD})\right]$$

$$= \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) \qquad (4)$$

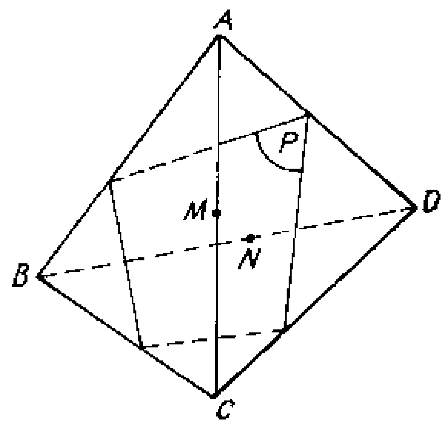
Do G là trọng tâm của tứ diện nên :

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 0$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OD} = 0$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) \qquad (5)$$

Từ (4) và (5) suy ra $Q \equiv G$. Tức 3 điểm M, G, N, thẳng hàng và $MG = GN$ (6).



Gọi M_1, N_1 là chân các đường vuông góc hạ từ M, N xuống $[P]$.

Do các bộ điểm (A, M, C) và (B, N, D) thẳng hàng nên các bộ điểm (A_1, M_1, C_1) và (B_1, N_1, D_1) cũng thẳng hàng. Áp dụng định lí về đường trung bình trong hình thang lần lượt cho các hình thang AA_1C_1C và BB_1D_1D ta có :

$$AA_1 + CC_1 = 2MM_1 \quad (7)$$

$$BB_1 + DD_1 = 2NN_1 \quad (8)$$

Đồng thời từ (6) suy ra : $MM_1 = NN_1$. Từ đây kết hợp với (7) và (8) ta được :

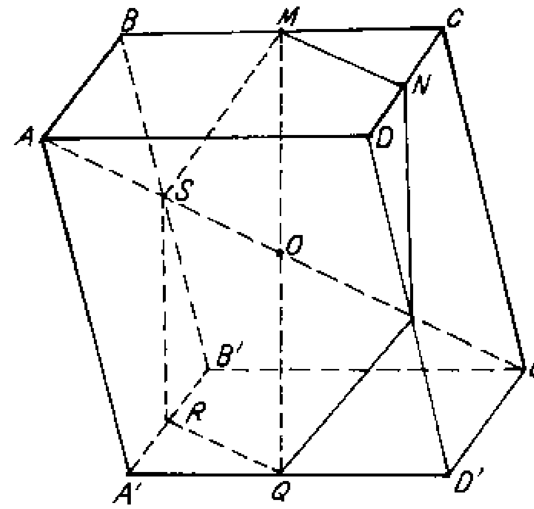
$$AA_1 + CC_1 = BB_1 + DD_1$$

Như vậy trong trường hợp này điều khẳng định của đề ra cần được thay bằng điều khẳng định sau : "Tổng của hai trong bốn đoạn thẳng AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 bằng tổng của hai đoạn còn lại".

Bài toán 116 (T10/141)

a) Ta có $BD \parallel B'D'$; $BA' \parallel C'D'$ nên mặt phẳng (BDA') // mặt phẳng $(B'CD')$. Theo định lí Talét mặt phẳng song song cách đều hai mặt phẳng (BDA') và $(B'CD')$ sẽ chứa 6 trung điểm M, N, P, Q, R, S (xem hình vẽ). Vậy lục giác $MNPQRS$ là phẳng. Với chú ý O là tâm đối xứng của hình hộp (O – giao điểm của 4 đường chéo của hình hộp) nên M và Q ; R và N ; S và P đối xứng với nhau qua O. Từ đó suy ra lục giác $MNPQRS$ có tâm đối xứng là O.

b) Sử dụng tính chất đường trung bình trong tam giác ta dễ dàng có lục giác phẳng ứng với đường chéo AC' là đều $\Leftrightarrow A'B = A'D = BD$; lục giác phẳng ứng với đường chéo $A'C$ là đều $\Leftrightarrow AB' = AD' = B'D' = BD$, lục giác phẳng ứng với đường chéo BD' là đều $\Leftrightarrow AB' = B'C = AC$. Từ đó suy ra : $AB' = A'B$;



$AD' = A'D$; $AC = BD$. Vậy hình hộp thỏa mãn đề bài là *hình hộp chữ nhật*. Gọi $x = AB$; $y = AD$; $z = AA'$ từ $A'D = BD = A'B$ ta có $x^2 + y^2 = y^2 + z^2 = z^2 + x^2 \Leftrightarrow x = y = z$. Tóm lại hình hộp thỏa mãn yêu cầu của đề bài là *hình lập phương*.

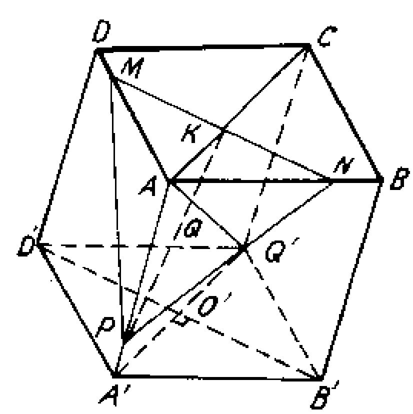
Bài toán 117 (T11/155)

a) Giả sử α là số đo góc các mặt của tam diện đều đỉnh A, O' là giao điểm của $A'C'$ và $B'D'$ a là độ dài cạnh của hình hộp. Ta có $\Delta A'B'C' = \Delta A'AC' = \Delta A'D'C'$ ($A'C'$ chung và $A'D' = D'C' = AA' = AC' = A'B' = B'C' = a$) suy ra $O'B' = O'A' = O'D'$. Vậy $\Delta D'AB'$ vuông tại A. Từ đó có $B'D'^2 = AD'^2 + AB'^2$. Nhưng $B'D'^2 = 4a^2\sin^2(\alpha/2) = 2a^2(1 - \cos\alpha)$.

$$AD'^2 = AB'^2 = 4a^2\cos^2(\alpha/2) = 2a^2(1 + \cos\alpha).$$

Vậy có : $1 - \cos\alpha = 2 + 2\cos\alpha$

hay : $\cos\alpha = -1/3$ tức là $\alpha = \arccos(-1/3)$.



b) Gọi K là giao điểm của AC với đường thẳng qua Q và song song với AA'. Ta có

$\widehat{AKQ} = \widehat{ACC'} = \widehat{QAK}$.

Suy ra ΔAKQ cân hay $QK = AQ$

Ký hiệu V_{QAMN} là thể tích của hình chóp $QAMN$. V_{PAMN} là thể tích hình chóp $PAMN$ ta có :

$$AQ/AP = QR/AP = V_{QAMN}/V_{PAMN} \quad (1)$$

Một cách tương tự ta cũng có :

$$AQ/AN = V_{QAMP}/V_{NAMP} \quad (2)$$

$$AQ/AM = V_{QAMN}/V_{MAPN} \quad (3)$$

Mặt khác ta thấy $V_{QAMN} + V_{QAMP} + V_{QANP} = V_{AMNP}$

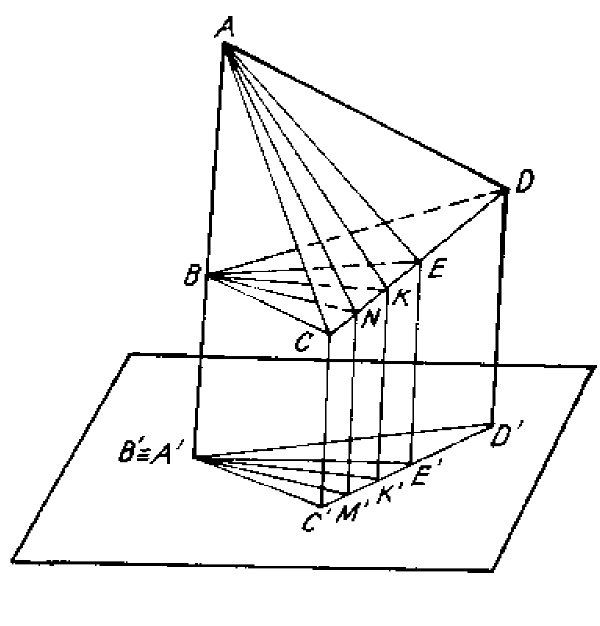
Vậy (1) + (2) + (3) cho ta đẳng thức cần chứng minh.

Bài toán 118 (T11/168)

Cách 1. Trước hết, áp dụng định lí về tính chất đường đối trung trong tam giác (Báo TH và TT, số 150 năm 1986), chứng minh rằng :

Mệnh đề 1. Mặt phẳng đối trung phát xuất từ một cạnh nào đó (AB) của tứ diện $ABCD$ chia cạnh đối diện (CD) thành hai đoạn (MC và MD) tỉ lệ với bình phương diện tích các mặt (ABC và ABD) kề với các đoạn đó.

Thật vậy, ta hãy chiếu vuông góc toàn bộ hình vẽ lên một mặt phẳng α nào đó vuông góc với AB ở A'. Gọi E, K và M lần lượt là giao điểm của cạnh CD với các mặt trung điện, phân giác, đối trung phát xuất từ cùng một cạnh AB của tứ diện ; và C', D', E', K', M' lần lượt là hình chiếu của các điểm C, D, E, K, M trên α ; $CC' \parallel DD' \parallel EE' \parallel KK' \parallel MM' \parallel AA' \perp \alpha$.



Thế thì dễ dàng thấy rằng : $\widehat{C'A'D'}$ là góc phẳng tại A' của nhị diện cạnh AB, $A'E'$, $A'K'$, $A'M'$ lần lượt là các đường trung tuyến, phân giác, đối trung phát xuất từ cùng một đỉnh A' của tam giác $A'C'D'$ và $MC : MD = M'C' : M'D'$ (1) (tính chất của phép chiếu song song). Mặt khác, theo tính chất của đường đối trung, thì :

$$M'C' : M'D' = A'C'^2 : A'D'^2 \quad (2)$$

Nhưng $A'C'$ và $A'D'$ lần lượt là hình chiếu của các đường cao ứng với cạnh AB và do đó bằng các đường cao đó của các tam giác ABC và ABD, nên :

$A'C' : A'D' = 1/2 \,.\, AB.A'C' : 1/2 \,.\, AB.A'D'$, tức là : $A'C' : A'D' = s(\Delta ABC) : s(\Delta ABD)$ (3)

Từ (1), (2), và (3) ta suy ra đ.p.c.m. :

$MC : MD = s^2(\Delta ABC) : s^2(\Delta ABD)$(4)

– Sau nữa, áp dụng định lí Céva trong hình học phẳng, chứng minh

Mệnh đề 2. Ba mặt phẳng đối trung đi qua ba cạnh (AB, AC, AD) phát xuất từ cùng một đỉnh (A) của tứ diện thì đồng trục, nghĩa là cắt nhau theo một đường thẳng (d_A) đi qua đỉnh chung đó, gọi là *đường đối – trọng tuyến* đi qua đỉnh đó.

Thật vậy, gọi N là giao điểm của cạnh DB với mặt đối trung đi qua cạnh AC và P là giao điểm của cạnh BC với mặt đối trung đi qua AD theo mệnh đề 1, ta có :

$$ND : NB = s^2(\Delta ACD) : s^2(\Delta ACB) \; ; \quad (5)$$

và : $PB : PC = s^2(\Delta ADB) : s^2(\Delta ADC)$; (6)

Từ (4), (5), (6) ta được

$$MC/MD \,.\, ND/NB \;\; PB/PC = 1 \; ; \quad (7)$$

Vì M, N, P lần lượt nằm trên các cạnh CD, DB và BC của tam giác BCD, nên viết lại (7) dưới dạng độ dài đại số thì được :

$$\overline{MC}/\overline{MD} = \,.\, \overline{ND}/\overline{NB} \,.\, \overline{PB}/\overline{PC} = -1 \quad (8)$$

Hệ thức (8) chứng tỏ rằng (định lí Céva áp dụng vào tam giác BCD với ba đường thẳng BM, CN và DP) ba đường thẳng BM, CN và DP đồng quy tại một điểm A_o nào đó. Từ đó suy ra ba mặt phẳng đối trung (ABM), (ACN) và (ADP) cắt nhau theo một đường thẳng $d_A = (AA_o)$ đi qua A.

– Cuối cùng, bất cứ hai đường đối – trọng tuyến nào cũng đồng phẳng (và do đó, đôi một cắt nhau), chẳng hạn, hai đường $d_A = (AA_o)$ và $d_B = (BB_o)$ phát xuất từ hai đỉnh A và B của tứ diện thì cùng nằm trong một mặt đối trung phát xuất từ cạnh AB nối hai đỉnh đó, mà không song song nên phải cắt nhau. Bốn đường đối – trọng tuyến d_A, d_B, d_C, d_D của tứ diện đôi một cắt nhau mà ba mặt không đồng phẳng, nên chúng *đồng quy* tại một điểm (đpcm) ; ta gọi điểm này là *điểm đối – trọng tâm* của tứ diện và kí hiệu là G'. (Trọng tâm của tứ diện kí hiệu là G).

Cách 2. – Trước hết, chứng minh :

Mệnh đề 3. Điều kiện cần và đủ để tích của ba phép đối xứng – mặt là phép đối xứng – mặt, là ba mặt phẳng đối xứng cắt nhau theo một đường thẳng (đồng trục), hoặc song song với nhau.

Chứng minh : Kí hiệu S_x là phép đối xứng – mặt qua mặt phẳng x, và giả sử $S_{zo}S_{yo}S_x = S_t$;(i)

$$\text{(i)} \Leftrightarrow S_{yo}S_x = S_{zo}S_t \; ; \qquad \text{(ii)}$$

(vì S_z^2 là phép biến hình đồng nhất).

Mỗi vế của (ii) biểu diễn một phép quay xung quanh một trục, hay một phép tịnh tiến :

$$S_{yo}S_x = Q_{q,\Phi}\,,\ (x \cap y = q) \qquad \text{(iii)}$$

$$S_{yo}S_x = T \qquad \text{(iv)}$$

tùy theo hai mặt phẳng đối xứng cắt nhau hay song song.

Do đó $x \cap y = z \cap t = q$ là trục của phép quay (iii) ; còn nếu $x // y$ thì $z // t$ và $x // y // z // t$ vì cùng vuông góc với phương của phép tịnh tiến (iv).

Sau nữa, áp dụng mệnh đề 3 để chứng minh mệnh đề 2. Thật vậy, dễ thấy rằng trong một tứ diện, ba mặt trung diện phát xuất từ ba cạnh của một góc tam diện cắt nhau theo một đường thẳng đi qua đỉnh của góc tam diện và trọng tâm của mặt đối diện gọi là *đường trọng tuyến* (hay trung tuyến) của tứ diện phát xuất từ đỉnh đó.

Ta xét góc tam diện $D(ABC)$, đặt $(DBC) = \alpha$, $(DCA) = \beta$, $(DAB) = \gamma$ và gọi x, y, z lần lượt là các mặt trung diện phát xuất từ các cạnh DA, DB, DC ; x', y', z' lần lượt là các mặt đối trung phát xuất từ các cạnh DA, DB, DC. Thế thì, theo định nghĩa mặt đối trung, ta có các hệ thức :

$$(\gamma, x) = (x', \beta), (\alpha, y) = (y', \gamma), (z, \alpha) = (\beta, z')$$

Từ đó, ta được :

$$S_{yo}S_x = S_{x'o}S_\beta \Rightarrow S_x = S_{yo}S_{xo}S_\beta$$

$$S_{\alpha o}S_y = S_{y'o}S_\gamma \Rightarrow S_{y'} = S_{\alpha o}S_{yo}S_\gamma$$

$$S_{zo}S_\alpha = S_{\beta o}S_{z'} \Rightarrow S_{z'} = S_{\beta o}S_{zo}S_\alpha$$

Do đó :

$$S_{z'o}S_{y'o}S_{x'} = S_\beta(S_{zo}\,S_{yo}\,S_x)S_\beta = S_{\beta o}S_tS_\beta = S_t'(\text{v})$$

Hệ thức (v) chứng tỏ rằng các mặt phẳng đối trung x', y', z' đồng trục (Vì $x' \neq y'$) : $x' \cap y' = d_A \subset z'$.

– Sau cùng lặp lại đoạn chứng minh cuối của lời giải 1.

Bài toán 119 (T12/173)

Cách đánh giá thứ nhất. Ta chứng minh rằng : với M là một điểm bất kì trong không gian ta có :

$$MD < MA + MB + MC. \qquad (1)$$

Thật vậy, theo bất đẳng thức tam giác ta có : $MD < MA + AD = MA + BC < MA + MB + MC$

Cho M trùng với O ta được :

$$OD < OA + OB + OC = r_1 + r_2 + r_3 =$$

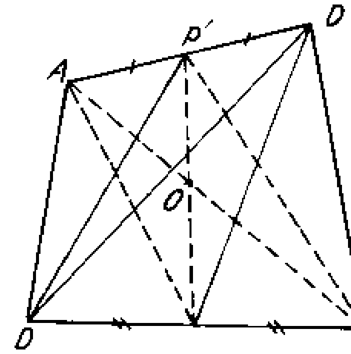
$$= 12 + 16 + 48 = 76\ cm.$$

Bất đẳng thức này nói lên rằng đỉnh thứ tư D luôn luôn nằm trong mặt cầu tâm O, bán kính $R = 76$cm.

Cách đánh giá thứ hai : Trước hết ta chứng minh rằng : Trong một tứ diện gần đều $ABCD$, trọng tâm G trùng với tâm Q mặt cầu ngoại tiếp tứ diện.

Thật vậy, dễ dàng chứng minh được rằng trong một tứ diện, ba đoạn thẳng nối trung điểm các cặp cạnh đối diện thì đồng quy tại một điểm. Điểm này là trung điểm của mỗi đoạn thẳng đó và được gọi là *trọng tâm* của tứ diện.

Gọi P và P' lần lượt là trung điểm của BC và DA (đoạn PP' còn gọi là một đường trung tuyến kép). Từ $\Delta ABC = \Delta DCB$ suy ra



$AP = DP$. Cũng vậy từ $\Delta BDA = \Delta CAD$ suy ra $BP' = CP'$. Do đó PP' là đường trung trực chung của hai đoạn thẳng BC và DA. Trung điểm của PP' chính là trọng tâm G của tứ diện.

Bởi vậy ta được : $GA = GD$, $GB = GC$. Cũng chứng minh một cách tương tự ta thấy G nằm trên đường trung trực chung của AB và DC, của CA và DB. Từ đó suy ra $GA = GB = GC = GD$, nghĩa là $G \equiv Q$, tâm của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện.

Bây giờ ta chứng minh rằng : với M là một điểm bất kì trong không gian ta có :

$MD^2 \leqslant MA^2 + MB^2 + MC^2$

Thật vậy, ta có :

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 - MD^2 =$$
$$= \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MC}^2 - \overrightarrow{MD}^2 =$$
$$= (\overrightarrow{QA} - \overrightarrow{QM})^2 + (\overrightarrow{QB} - \overrightarrow{QM})^2 +$$
$$+ (\overrightarrow{QC} - \overrightarrow{QM})^2 - (\overrightarrow{QD} - \overrightarrow{QM})^2 =$$
$$= \overrightarrow{QA}^2 + \overrightarrow{QB}^2 + \overrightarrow{QC}^2 - \overrightarrow{QD}^2 + 2\overrightarrow{QM}^2 -$$
$$- 2(\overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QB} + \overrightarrow{QC} - \overrightarrow{QD})\overrightarrow{QM}$$
$$= 2(R^2 + DM^2) -$$
$$- 2[(\overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QB} + \overrightarrow{QC} + \overrightarrow{QD}) - 2\overrightarrow{QD}]\overrightarrow{QM}$$

trong đó R và Q là bán kính và tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện. Vì $Q \equiv G$ theo chứng minh trên nên $\overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QB} + \overrightarrow{QC} + \overrightarrow{QD} = \overrightarrow{0}$.

Vậy có : $MA^2 + MB^2 + MC^2 - MD^2 =$

$$= 2(R^2 + QM^2 + 2\overrightarrow{QD} \cdot \overrightarrow{QM})$$
$$= 2(\overrightarrow{OD}^2 + \overrightarrow{QM}^2 + 2\overrightarrow{QD} \cdot \overrightarrow{QM})$$
$$= 2(\overrightarrow{QD} + \overrightarrow{QM})^2 \geqslant 0 \text{ (đpcm)}$$

Cho M trùng với O ta được :

$$OD^2 \leqslant OA^2 + OB^2 + OC^2 = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 =$$
$$= 12^2 + 16^2 + 48^2$$
$$= 4^2(3^2 + 4^2 + 12^2) = 4^2(5^2 + 12^2) =$$
$$= 4^2 . 13^2 = 52^2$$

Vậy có : $OD \leqslant 52$cm tức là đỉnh thứ tư D không bao giờ vượt ra khỏi mặt cầu đồng tâm O, bán kính $r_4 = 52cm$.

Bài toán 120 (T11/177)

Gọi A' là trọng tâm ΔSBC và O là trung điểm của BC. Khi đó A, G, A' thẳng hàng và S, A', O thẳng hàng. Đặt $SM/SB = x$, $SN/SC = y$ $(0 \leqslant x, y \leqslant 1)$. Ta có :

$V_{SAMN}/V_{SABC} = (SM/SB)(SN/SC) = xy(1)$

Mặt khác vì $M, A', N \in (AMN) \times (SBC)$ nên M, A', N thẳng hàng. Từ đó : $S_{\Delta SMN} / S_{\Delta SBO} = SM/SB \,.\, SA'/SO \Rightarrow$ $2S_{\Delta SMA'} / S_{\Delta SBC} = 2x/3$. Tương tự ta được : $2 S_{\Delta SA'N} / S_{\Delta SBC} = 2y/3 \Rightarrow$

$(S_{\Delta SMA'} + S_{\Delta SNA'}) / S_{\Delta SBC} = (x + y)/3 \Rightarrow$ $(x+y)/3 = S_{\Delta SMN}/S_{\Delta SBC} = (SM/SB)(SN/SC) = xy$ $\Rightarrow x + y = 3xy$ (2). Từ (2) và giả thiết $0 \leqslant x$, $y \leqslant 1$ suy ra $1/2 \leqslant x \leqslant 1$; $1/2 \leqslant y \leqslant 1$.

Đặt $V_1/V = xx/(3x - 1) = x^2/(3x - 1) = f(x)$

$f'(x) = x(3x - 2)/(3x - 1)^2$. Ta có bảng biến thiên :

x	1/2		2/3		1
$f'(x)$		–	0	+	
$f(x)$	1/2	↘	4/9	↗	1/2

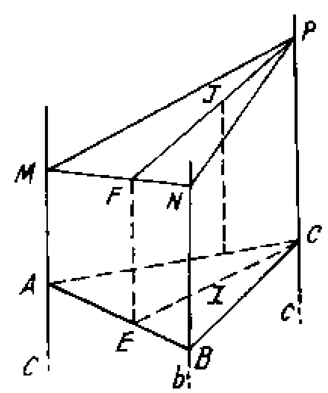
Vậy $4/9 \leqslant V_1/V \leqslant 1/2$

Bài toán 121 (T11/179)

Gọi d_a, d_b, d_c lần lượt là khoảng cách giữa các cặp đường thẳng (b, c) ; (c, a) ; (a, b) theo giả thiết

$$d_c(AM + BN) + d_a(BN + CP) + d_b(CP + AM) =$$
$$= (d_b + d_c)AM + (d_c + d_a)BN + (d_a + d_b)CP$$

là không đổi. Đặt $\alpha = d_b + d_c$, $\beta = d_c + d_a$, $\gamma = d_c + d_b$ thì α, β, γ và $\alpha AM + \beta BN + \gamma CP$ không đổi. Chọn E và F trên các đoạn AB và MN sao cho $EA/EB = FM/FN = \beta/\alpha$ thì $\alpha\overrightarrow{EA} + \beta\overrightarrow{EB} = \alpha\overrightarrow{FM} + \beta\overrightarrow{FN} = \overrightarrow{0}$



Từ đó suy ra :

$$(\alpha + \beta)\overrightarrow{EF} = (\alpha\overrightarrow{EA} + \alpha\overrightarrow{AM} + \alpha\overrightarrow{MF}) +$$
$$+ (\beta\overrightarrow{EB} + \beta\overrightarrow{BN} + \beta\overrightarrow{NF} = \alpha\overrightarrow{AM} + \beta\overrightarrow{BN}.$$

Chọn I và J trên các đoạn CE và PF sao cho $IE/IC = JF/JP = \gamma/(\alpha + \beta)$ thì ta cũng có $(\alpha + \beta + \gamma)\overrightarrow{IJ} = (\alpha + \beta)\overrightarrow{EF} + \gamma\overrightarrow{CP} =$ $= \alpha\overrightarrow{AM} + \beta\overrightarrow{BN} + \gamma\overrightarrow{CP}$. Vì M, N, P ở về cùng một phía đối với mặt phẳng (ABC) nên $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BN}, \overrightarrow{CP}$ cùng hướng, kết hợp với $\alpha AM + \beta BN + \gamma CP$ là không đổi suy ra $\alpha\overrightarrow{AM} + \beta\overrightarrow{BN} + \gamma\overrightarrow{CP}$ không đổi. Vậy $\overrightarrow{IJ} \parallel \overrightarrow{AM} \parallel \overrightarrow{BN} \parallel \overrightarrow{CP}$ và không đổi. Do A, B, C cố định nên E và I cố định. Suy ra J là điểm cố định. Như vậy hình chiếu của trọng tâm G của tam giác ABC lên mặt phẳng (MNP) luôn nhìn đoạn GJ cố định dưới một góc vuông nên nằm trên mặt cầu đường kính GJ cố định.

§5. Các bài toán quỹ tích

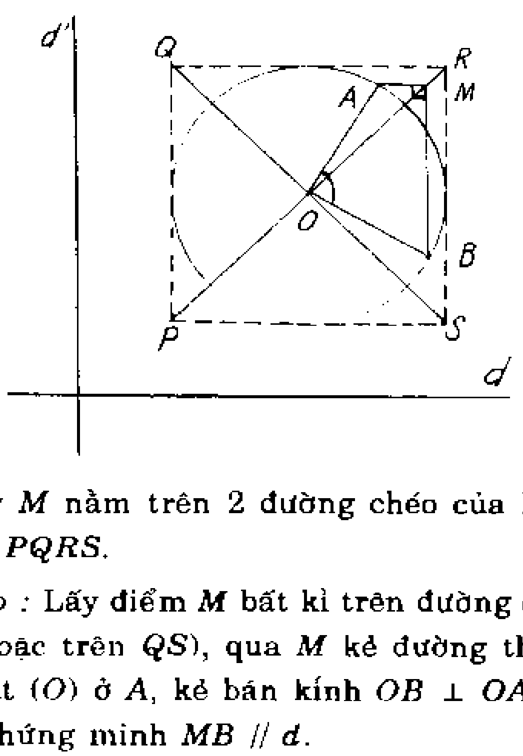
Bài toán 122 (T12/149)

Thuận : Theo giả thiết đầu bài ta luôn có tứ giác $OAMB$ (hoặc tứ giác $OABM$) nội tiếp ⇒

⇒ $\widehat{AMO} = \widehat{ABO} = 45^o$ (vì ΔAOB vuông, cân ở O) (hoặc $\widehat{AMO} = 135^o$) ⇒ OM lập với d góc 45^o

⇒ M nằm trên 2 đường thẳng đi qua O và tạo với d góc 45^o.

Giới hạn : M chỉ nằm trong hình vuông $PQRS$ ngoại tiếp (O) và có các cạnh $\parallel d$ và $\parallel d'$.



Vậy M nằm trên 2 đường chéo của hình vuông $PQRS$.

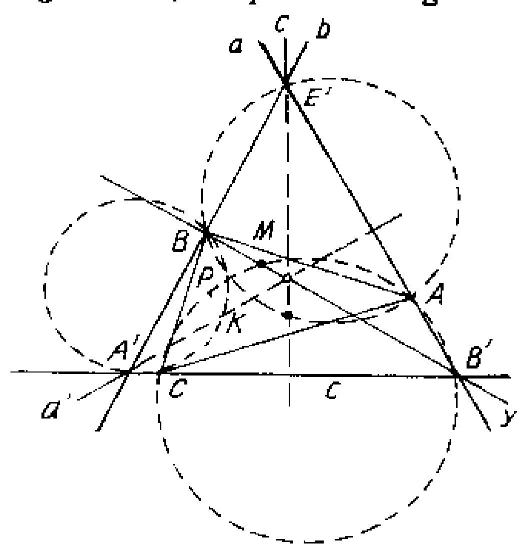
Đảo : Lấy điểm M bất kì trên đường chéo PR (hoặc trên QS), qua M kẻ đường thẳng $\parallel d$ cắt (O) ở A, kẻ bán kính $OB \perp OA$. Ta phải chứng minh $MB \parallel d$.

Thật vậy, tứ giác $OAMB$ nội tiếp vì $\widehat{AMO} = \widehat{ABO} = 45^o \Rightarrow \widehat{AMB} = \widehat{AOB} = 1v$ mà $AM \parallel d$, $d \perp d' \Rightarrow MB \parallel d'$.

Kết luận : Quỹ tích của M là 2 đường chéo hình vuông ngoại tiếp đường tròn (O) và có các cạnh $\parallel d$ và $\parallel d'$.

Bài toán 123 (T11/162)

Gọi a, b, c là ba đường thẳng không đồng quy, lần lượt đi qua các đỉnh A, B, C. Góc giữa các cặp đường thẳng (a, b), (b, c), (c, a) đều bằng $\pi/3$. Khi đó A' B' C' lần lượt là giao điểm của các cặp đường thẳng (b, c), (a, c) và (a, b). $A'B'C'$ là tam giác đều thỏa mãn điều kiện của đầu bài. Gọi C_1, C_2, C_3, lần lượt là các đường tròn ngoại tiếp các tam giác $A'BC$, $AB'C$, ABC'. Các đường phân giác a', b', c', của các góc giữa các cặp (b, c), (c, a) và (a, b) lần lượt đi qua các điểm cố định K, L, M là các điểm giữa của các cung nhỏ $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CA}$, $\overset{\frown}{AB}$ thuộc các đường tròn C_1, C_2, C_3, và chúng đồng quy tại X là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác $A'B'C'$.



Vì tam giác $A'B'C'$ luôn là tam giác đều nên ba đường tròn C_1, C_2, C_3 cắt nhau tại một điểm P (gọi là điểm Torixeli). Vậy khi A', B', C', chạy trên các đường tròn C_1 trừ điểm P, C_2 trừ điểm P và C_3 trừ điểm P thì các phân giác a', b', c', quay xung quanh các điểm cố định K, L, M theo mọi phương trừ ra các phương KP, LP, MP. Dễ dàng thấy rằng các cặp phân giác (a', b'), (b', c'), (c', a') luôn hợp với nhau một góc $2\pi/3$. Từ đó thấy giao điểm X của chúng luôn luôn nhìn 2 cặp điểm của ba điểm cố định K, L, M dưới góc không đổi $\pi/3$ và nhìn cặp điểm thứ ba của 3 điểm này dưới góc $2\pi/3$. Vậy quỹ tích của X, tâm đường tròn nội tiếp các tam giác $A'B'C'$, sẽ là một đường tròn ngoại tiếp tam giác đều KLM trừ điểm P (điểm P cũng nằm trên đường tròn này).

Bài toán 124 (T11/164)

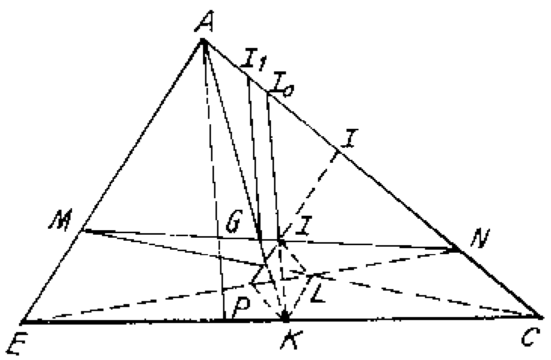
1. Quỹ tích trọng tâm ΔAMN.

Trước hết ta tìm quỹ tích trung điểm I của MN. Gọi I, J, K, L lần lượt là trung điểm của MN, NB, BC và MG. Gọi AA_1 là đường phân giác trong của $\widehat{BAC}$; I_o là giao điểm của đường thẳng đi qua K song song với AA_1 với cạnh AB hoặc AC.

Phần thuận : Ta có $IJ = 1/2MB = LK$; $IL = 1/2NC = JK$ mà $BM = NC$ nên tứ giác $IJKL$ là hình thoi và từ đó có $KI // AA_1$. Do K cố định nên I nằm trên đường thẳng cố định KI_o

Giới hạn : I nằm trên đoạn thẳng KI_o.

Phần đảo : Lấy điểm I tùy ý thuộc đoạn KI_o qua I kẻ đường thẳng song song với AB cắt AC ở I'. Gọi N là điểm đối xứng của A đối với I' (N thuộc cạnh AC) đường thẳng NI cắt cạnh AB ở M. Ta sẽ chứng minh I là trung điểm của MN và $BM = CN$.



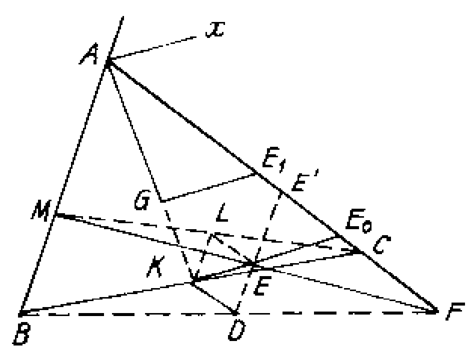
Thực vậy, I là trung điểm MN do $I'A = I'N$, $II' // AB$. Gọi J, L là trung điểm của BN, CM ta có $IJ // LK // AB$; $IL // AC // JK$ nên $IJKL$ là hình bình hành mà $KI_o // AA_1$ nên IK là đường phân giác JIL nên $IJKL$ là hình thoi. Từ đó $BM = CN$.

Kết luận : Quỹ tích của I, trung điểm của MN, là đoạn thẳng I_oK. Từ quỹ tích của I ta suy ra quỹ tích trọng tâm tam giác AMN là đoạn thẳng GI_1, ảnh của đoạn thẳng I_oK qua phép vị tự tâm A. Tỉ số 2/3 (G là trọng tâm ΔABC, $AI_1 = 2I_1I_o$).

2. Quỹ tích trọng tâm ΔAMP.

Trước hết ta tìm quỹ tích của E, trung điểm của MP. Gọi K, L, E, D lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng BC, MC, MP, BP. Ax là đường phân giác ngoài của $\widehat{BAC}$. Gọi E_o là giao của đường thẳng AC với đường thẳng qua K và song song Ax. Tương tự phần trên ta có tứ giác $KLED$ là hình thoi, $KE // AC$ và E nằm trên đoạn thẳng KE_o.

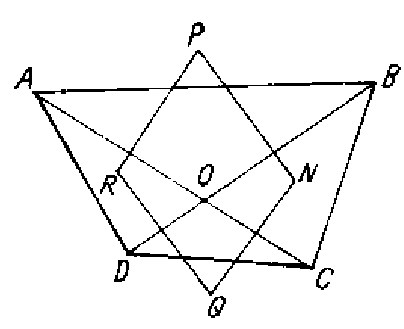
Đảo lại : lấy điểm E tùy ý thuộc KE_o, kẻ $EE' // AB$, $E' \in AC$. Lấy P đối xứng của A qua E' (có P thuộc đường thẳng AC). Đường thẳng PE cắt đoạn AB ở M. Ta chứng minh E là điểm giữa MP và $MB = CP$. Thực vậy : E là điểm giữa MP do $E'P = E'A$, $EE' // AB$. Gọi K, D là trung điểm BC và MC ta có $KLED$ là hình bình hành mà $KE // Ax$ nên KE là đường phân giác $\widehat{DKL}$. Vậy $KLED$ là hình thoi, suy ra $MB = CP$.



Vậy quỹ tích của E, trung điểm của MP, là đoạn thẳng KE_o. Từ đó quỹ tích trọng tâm ΔMAP là đoạn thẳng GE_1 ảnh của đoạn KE_o qua phép vị tự tâm A tỉ số 2/3. (G là trọng tâm ΔBAC, $AE_1 = 2E_1E_o$).

Bài 125 (T2/170)

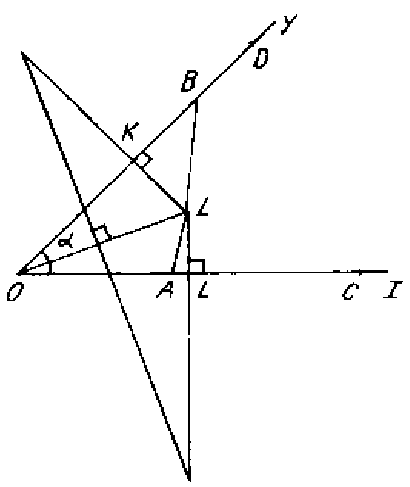
Trước hết nhận xét thấy rằng với hai điểm X, Y cho trước trong mặt phẳng thì tập hợp tất cả các điểm P thỏa mãn $PX < PY$ là nửa mặt phẳng chứa X và có bờ là đường trung trực của đoạn XY.



Trở lại bài toán, ta thấy điểm P thỏa mãn $OP < \min(AP, BP, CP, DP)$ khi và chỉ khi P đồng thời thỏa mãn $OP < AP, OP < BP, OP < CP$ và $OP < DP$. Do đó, theo nhận xét trên ta có tập hợp tất cả các điểm P thỏa mãn đề bài là phần chung của bốn nửa mặt phẳng chứa O và lần lượt có bờ là đường trung trực của các đoạn AO, BO, CO, DO. Dựng các đường trung trực của các đoạn AO, BO, CO, DO ta được tập hợp điểm cần tìm chính là miền trong của hình bình hành $MNQR$ (M, N, Q, R, là các giao điểm của bốn đường trung trực nói trên).

Bài toán 126 (T11/173)

a) Cách 1 : Trên Ox lấy điểm C và trên Oy lấy điểm D sao cho $OC = OD = a$. Gọi L và K lần lượt là trung điểm của OC, của OD. Do $OA + OB = a$ ta thấy ngay $OA = BD$ (1). Qua L và K kẻ các đường trung trực của OC và OD. Hai trung trực này cắt nhau tại I. Xét phép quay tâm I góc quay $\varphi = \pi - \alpha$ trong đó $\alpha = \widehat{xOy}$, chiều quay là chiều kim đồng hồ. Khi đó phép quay sẽ biến $\overrightarrow{CO}$ thành $\overrightarrow{OD}$ và do (1) thì A biến thành B. Nghĩa là có $IA = IB$. Vậy đường trung trực của AB đi qua điểm I cố định (đpcm).



Cách 2 :

Trước hết ta thấy hai tam giác vuông OKI và OLI bằng nhau (vì có OI chung,

$OK = OL = \dfrac{a}{2}$). Từ đó suy ra $IK = IL$ (2)

Mặt khác do $OA + OB = OL + OK = a$ suy ra $AL = BK$ (3). Do (2) và (3) ta thấy hai tam giác vuông BKI và ALI bằng nhau. Từ đó suy ra $AI = IB$ (đpcm).

b) do hai tam giác vuông BKI và ALI bằng nhau suy ra $\widehat{OBI} = \widehat{LAI}$ hay $\widehat{OBI} + \widehat{OAI} = 180^\circ$. Vậy tứ giác $OAIB$ là tứ giác nội tiếp. Do O và I là hai điểm cố định nên tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB phải nằm trên đường trung trực của OI.

Khi A chạy đến O (thì B chạy đến D) và tâm của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $OAIB$ là giao điểm O của hai đường trung trực của OI và của OD (qua K). Khi B chạy đến O (thì A chạy đến C) và tâm của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $OAIB$ là giao điểm O_2 của hai đường trung trực của OI và của OC (qua L). Đảo lại, lấy điểm O' bất kì trên đoạn O_1O_2, vẽ đường tròn $(O' ; O'O)$ cắt tia Ox và Oy tại A và B. Vì O' nằm trên đường trung trực của OI nên cũng có $O'O = O'I$. Vậy tứ giác $OAIB$ là nội tiếp (đường tròn tâm O'). Ta sẽ chứng minh $AO + BO = a$. Thật vậy, hai tam giác vuông ALI và BKI bằng nhau (vì có $IL = IK$, $\widehat{IAL} = \widehat{IBK}$ do tứ giác $OAIB$ nội tiếp). Từ đó suy ra AL = BK. Vậy ta có : (xem hình vẽ) $OA + OB =$
$= (OL - AL) + (OK + KB) =$

$= OL + OK = \dfrac{a}{2} + \dfrac{a}{2} = a$ (đpcm).

Bài toán 127 (T9/156)

Phần thuận : Gọi O là tâm, R là bán kính đường tròn ngoại tiếp, G là trọng tâm và a, b, c là 3 cạnh của ΔABC. Dễ dàng chứng minh được rằng :

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$$

và $$GA^2 + GB^2 + GC^2 =$$

$$= (a^2 + b^2 + c^2)/3$$

Ta có $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}$

nên $MA^2 = MG^2 + GA^2 + 2\overrightarrow{MG}\,\overrightarrow{GA}$

Tương tự : $MB^2 = MG^2 + GB^2 + 2\overrightarrow{MG}\,\overrightarrow{GP}$,

$MC^2 = MG^2 + GC^2 + 2\overrightarrow{MG}\,\overrightarrow{GC}$

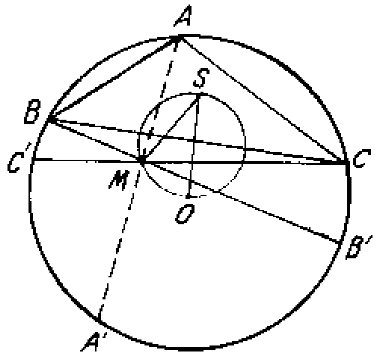
Do đó : $MA^2 + MB^2 + MC^2 =$

$= 3MG^2 + (GA^2 + GB^2 + GC^2) +$

$+ 2\overrightarrow{MG}(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC})$

$= 3MG^2 + (a^2 + b^2 + c^2)/3.$

Chứng minh tương tự đối với điểm O ta cũng có :



$$OA^2 + OB^2 + OC^2 = 3OG^2 + (a^2 + b^2 + c^2)/3$$

hay $\quad 3R^2 = 3OG^2 + (a^2 + b^2 + c^2)/3$

$$\Rightarrow OG^2 = R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)/9 \qquad (1)$$

Vì M nằm trong đường tròn nên :

$$MA.MA' = MB.MB' = MC.MC' = R^2 - OM^2$$

$$\Rightarrow MA/MA' = MA^2/(R^2 - OM^2) \ ;$$
$$MB/MB' = MB^2/(R^2 - OM^2) \ ;$$
$$MC/MC' = MC^2/(R^2 - OM^2)$$

Suy ra : $3 = \dfrac{MA}{MA'} + \dfrac{MB}{MB'} + \dfrac{MC}{MC'}$

$$= \frac{MA^2 + MB^2 + MC^2}{R^2 - OM^2}$$

$$= \frac{3MG^2 + (a^2 + b^2 + c^2)/3}{R^2 - OM^2}$$

hay $\quad OM^2 + MG^2 = R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)/9 \ (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $OM^2 + MG^2 = OG^2$. Do đó M nằm trên đường tròn đường kính OG.

Phần đảo : Trên đường tròn đường kính OG ta lấy điểm M tùy ý.

Vì $OG = \sqrt{R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)/9} < R$ nên đường tròn này hoàn toàn chứa trong đường tròn tâm $O \Rightarrow M$ nằm trong đường tròn tâm O.

Vì M thuộc đường tròn đường kính OG nên $OM^2 + MG^2 = OG^2$. Do đó theo cách chứng minh ở phần thuận ta có :

$$OM^2 + (MA^2 + MB^2 + MC^2)/3 - (a^2 + b^2 + c^2)/9$$

$$= R^2 - (a^2 + b^2 - c^2)/9$$

hay $\quad MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3(R^2 - OM^2)$.

Gọi A', B', C' lần lượt là giao điểm của MA, MB, MC với đường tròn tâm O.

Cũng theo cách chứng minh ở phần thuận ta có :

$$\frac{MA}{MA'} + \frac{MB}{MB'} + \frac{MC}{MC'} = \frac{MA^2 + MB^2 + MC^2}{R^2 - OM^2}$$

$$= \frac{3(R^2 - OM^2)}{R^2 - OM^2} = 3$$

Nhận thấy khi ΔABC đều thì $O \equiv G$ suy ra $M \equiv O \equiv G$; còn khi ΔABC không đều, thì $O \not\equiv G$ nên tồn tại đường tròn đường kính OG.

Kết luận : Khi ΔABC đều thì $M \equiv O \equiv G$.

Khi ΔABC không đều thì quỹ tích của M là đường tròn đường kính OG trong đó O và G lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp và trọng tâm của ΔABC.

Bài toán 128 (T9/183)

Do M nằm trong đường tròn $MA.MA' = MB.MB' = MC.MC' = R^2 - OM^2$. Suy ra :

$$MA/MA' + MB/MB' + MC/MC' =$$
$$+ \ MA^2/(MA \,.\, MA') +$$
$$+ MB^2/(MB \,.\, MB') + MC^2/(MC \,.\, MC') =$$
$$= (MA^2 + MB^2 + MC^2) \,/\, (R^2 - OM^2) \qquad (2)$$

Gọi G là trọng tâm ΔABC. Với X là điểm bất kì trong mặt phẳng, ta có :

$$\overrightarrow{XA} = \overrightarrow{XG} + \overrightarrow{GA}$$
$$\overrightarrow{XB} = \overrightarrow{XG} + \overrightarrow{GB}$$
$$\overrightarrow{XC} = \overrightarrow{XG} + \overrightarrow{GC}$$

Lấy bình phương vô hướng ở hai vế của mỗi đẳng thức trên, rồi cộng vế theo vế 3 đẳng thức nhận được ta có :

$$XA^2 + XB^2 + XC^2 = 3XG^2 + GA^2 + GB^2 +$$
$$GC^2 + 2\overrightarrow{XG}(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) = 3XG^2 + GA^2 +$$

$+ \ GB^2 + GC^2$ lần lượt cho $X \equiv M$, $X \equiv O$, từ đẳng thức trên, ta được :

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 =$$
$$= 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$$
$$3R^2 = OA^2 + OB^2 + OC^2 = 3OG^2 + GA^2 +$$

$+ \ GB^2 + GC^2$. Suy ra :

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3(MG^2 + R^2 - OG^2) (3)$$

Từ (2) và (3) ta có :

$$(1) \Leftrightarrow 3(MG^2 + R^2 - OG^2) / (R^2 - OM^2) \leqslant 3$$

$\Leftrightarrow MG^2 + OM^2 \leqslant OG^2$ (4) Xảy ra :

a) ΔABC đều. Khi đó $O \equiv G$ và do đó (4) $\Leftrightarrow MO^2 = O \Leftrightarrow M \equiv O$.

b) ΔABC không đều. Khi đó (4) $\Leftrightarrow M \in$ hình tròn đường kính OG. Vậy, với lưu ý O, G cố định và $OG < R$, ta được :

a) Nếu ΔABC đều thì tập điểm cần tìm là tập gồm duy nhất điểm O.

b) Nếu ΔABC không đều thì tập điểm cần tìm là hình tròn đường kính OG.

Bài toán 129 (T11/172)

Gọi O là tâm và R là bán kính của mặt cầu.

Vì A_i, A'_j $(i = \overline{1,n})$ thuộc mặt cầu và mọi $A_iA'_j$ đồng quy tại M nên

$\overline{MA}_i . \overline{MA}'_i = OM^2 - R^2 \Leftrightarrow \overline{A_iM} . \overline{MA'_i} = = R^2 - OM^2$.

Do đó $\sum_{i=1}^{n} (\overline{A_iM}/\overline{MA'_i}) = k$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} MA_i^2/(R^2 - OM^2) = k$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} MA_i^2 = kR^2 - kMO^2 \ (*)$$

Gọi G là điểm được xác định bởi hệ thức

$$\vec{OG} = \frac{1}{n+k}\sum_{i=1}^{n} \vec{OA_i}$$

$$\Leftrightarrow (n+k)\vec{OG} = \sum_{i=1}^{n} \vec{OA_i}$$

$$\Leftrightarrow (n+k)\vec{OG} = \sum_{i=1}^{n} (\vec{OG} + \vec{GA_i})$$

$$\Leftrightarrow k\vec{OG} = \sum_{i=1}^{n} \vec{GA_i}$$

Khi đó, ta có :

$$(*) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} (\vec{MG} + \vec{GA_i})^2 = kR^2 - k(\vec{MG} - \vec{OG})^2$$

$$\Leftrightarrow nMG^2 + 2\vec{MG} . \sum_{i=1}^{n} \vec{GA_i} + \sum_{i=1}^{n} GA_i^2 =$$

$$= kR^2 - kMG^2 + 2k\vec{MG} . \vec{OG} - kOG^2.$$

$$(n+k)MG^2 = kR^2 - kOG^2 - \sum_{i=1}^{n} GA_i^2 \ (**)$$

$$\text{Mà } \sum_{i=1}^{n} GA_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (\vec{OA_i} - \vec{OG})^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} OA_i^2 - 2\vec{OG} . \sum_{i=1}^{n} \vec{OA_i} + nOG^2 =$$

$$= nR^2 - 2\vec{OG}(n+k)\vec{OG} + nOG^2$$

$$= nR^2 - (n+2k).OG^2$$

Vì vậy (**)

$\Leftrightarrow (n+k)MG^2 = kR^2 - kOG^2 - nR^2 +$
$+ (n+2k)OG^2 \Leftrightarrow (n+k)MG^2 =$
$= (n+k)OG^2 + (k-n)R^2$

$$\Leftrightarrow MG = \sqrt{OG^2 + \left(\frac{k-n}{k+n}\right) R^2}$$

(Vì $k \geq n$ nên $\frac{k-n}{k+n} \geq 0$)

Vậy quỹ tích điểm M là mặt cầu tâm G bán kính $\sqrt{OG^2 + \left(\frac{k-n}{k+n}\right) R^2}$ trong đó G là điểm được xác định bởi hệ thức

$$\vec{OG} = \frac{1}{n+k}\sum_{i=1}^{n} \vec{OA_i}$$

Bài toán 130 (T11/174)

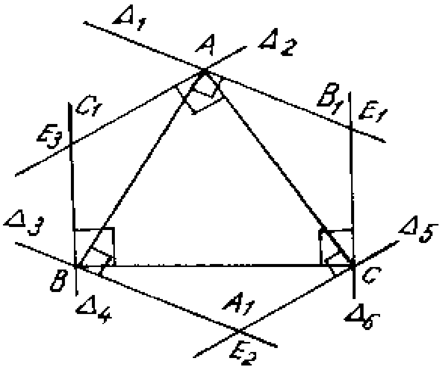
Qua A dựng các mặt phẳng P_1, P_2 tương ứng vuông góc với AB, AC. Qua B dựng các mặt phẳng P_3, P_4 tương ứng vuông góc với BA, BC. Qua C dựng các mặt phẳng P_5, P_6 tương ứng vuông góc với CA, CB.

Gọi Δ_i là giao tuyến của P_i và P, $i = \overline{1,6}$.

Xuất phát từ nhận xét rằng, tia Oy lập với tia Ox cho trước trong không gian một góc nhọn khi và chỉ khi Oy nằm ở nửa không gian chứa tia Ox và có bờ là mặt phẳng α đi qua O và vuông góc với Ox, ta thấy :

Do các góc $\widehat{DAB}$, $\widehat{DAC}$, $\widehat{DBA}$, $\widehat{DBC}$, $\widehat{DCA}$, $\widehat{DCB}$ là các góc nhọn nên D phải nằm trong phần không gian bị giới hạn bởi 6 mặt phẳng P_i, $i = \overline{1,6}$. Vì vậy, nếu gọi H là hình chiếu vuông góc của D trên (P) thì do $DH \parallel P_i$ $\forall i = \overline{1,6}$ (vì cùng vuông góc với (P)), H phải nằm trong phần của (P) bị giới hạn bởi 6 đường thẳng Δ_i, $i = \overline{1,6}$. Do ΔABC là Δ nhọn nên 6 đường thẳng này cắt nhau tạo thành lục giác lồi $AE_1CE_2BE_3$ (xem hình vẽ). Như vậy, H phải nằm ở phần trong của lục giác lồi $AE_1CE_2BE_3$.

Ngược lại, lấy một điểm H' bất kì ở phần trong của lục giác lồi $AE_1CE_2BE_3$, ta sẽ chỉ ra một điểm D' trong không gian sao cho $D'H' \perp P$ và tứ diện $ABCD'$ là tứ diện có tất cả các mặt đều là các Δ nhọn. Thật vậy,



dựng $H'x \perp P$. Trên $H'x$ lấy điểm D' sao cho $D'H' > (1/2)\max\{AB, BC, CA\}$. Ta có :

Do $H'x \parallel P_i$, $i = \overline{1,6}$ (vì cùng $\perp$ với P) và do H' nằm ở phần trong của lục giác $AE_1CE_2BE_3$ nên $H'x$ nằm ở trong phần không gian bị giới hạn bởi 6 mặt phẳng P_i, $i = \overline{1,6}$. Do đó các góc $\widehat{D'AB}$, $\widehat{D'AC}$, $\widehat{D'BA}$, $\widehat{D'BC}$, $\widehat{D'CA}$, $\widehat{D'CB}$ là các góc nhọn.

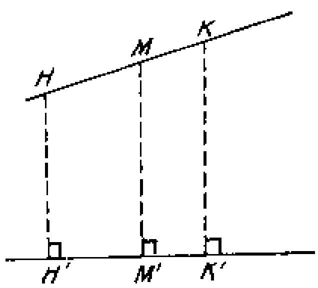
Hơn nữa do $D'H' > \max\{AB, BC, CA\}/2$ nên D' nằm ở ngoài các hình cầu đường kính AB, BC và CA. Suy ra các góc $\widehat{AD'B}$, $\widehat{BD'C}$, $\widehat{CD'A}$ là các góc nhọn.

Từ đó suy ra tứ diện $ABCD'$ là tứ diện có tất cả các mặt đều là các Δ nhọn.

Vậy quỹ tích của hình chiếu vuông góc của D trên P là phần trong của lục giác lồi $AE_1CE_2BE_3$.

Bài toán 131 (T10/181)

Kí hiệu d_{1M}, d_{2M}, d_{3M}, d_{4M} lần lượt là khoảng cách từ điểm m tùy ý đến các mặt đối diện với các đỉnh A, B, C, D của tứ diện $ABCD$. Ta gọi điểm M có tính chất (*) nếu : M nằm trong hoặc trên biên tứ diện và thỏa mãn :



$$d_{1M} = d_{2M} + d_{3M} + d_{4M}.$$

Dễ thấy rằng nếu H, K là 2 điểm có tính chất (*) thì mọi điểm M thuộc đường thẳng HK mà nằm trong hoặc trên biên tứ diện cũng có tính chất (*). Thật vậy, gọi H', K', M' lần lượt là hình chiếu vuông góc của H, K, M lên mặt phẳng (BCD).

Đặt $\overrightarrow{HM} = x\overrightarrow{HK}$, thì $\overrightarrow{H'M'} = x\overrightarrow{H'K'}$ và

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HH'} + \overrightarrow{H'M'} \qquad (1)$$

$$x\overrightarrow{HH'} = x\overrightarrow{HK} + x\overrightarrow{KK'} + x\overrightarrow{K'H'} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\overrightarrow{MM'} = (1-x)\overrightarrow{HH'} + x.\overrightarrow{KK'}$. Vì MM', HH', KK' cùng hướng nên :

$$MM' = (1-x)HH' + xKK'$$

hay $\quad d_{1M} = (1-x)d_{1H} + xd_{1K}$

$$d_{2M} = (1-x)d_{2H} + xd_{2K}$$
$$d_{3M} = (1-x)d_{3H} + xd_{3K}$$
$$d_{4M} = (1-x)d_{4H} + xd_{4K}$$

Để ý rằng $d_{1H} = d_{2H} + d_{3H} + d_{4H}$;

$$d_{1K} = d_{2K} + d_{3K} + d_{4K}$$

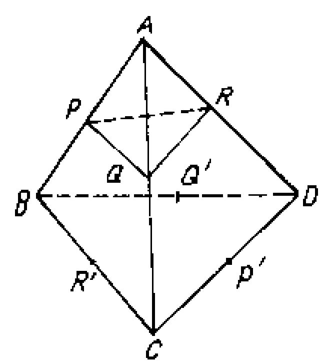
nên $d_{1M} = d_{2M} + d_{3M} + d_{4M}$ tức M có tính chất (*)

Gọi P, Q, R lần lượt là giao điểm của AB, AC, AD với mặt phân giác của các nhị diện cạnh CD, DB, BC thì rõ ràng P, Q, R có tính chất (*).

Từ nhận xét trên suy ra mọi điểm M trên biên của ΔPQR cũng có tính chất (*) và do đó mọi điểm M trong ΔPQR cũng có tính chất (*) (Chỉ việc nối M với P cắt cạnh QR sẽ suy ra được điều này).

Bây giờ giả sử tồn tại điểm M có tính chất (*) mà $M \notin$ mp (PQR). Khi đó đường thẳng AM cắt mp (PQR) tại M' nằm trong hoặc trên biên của ΔPQR. Do M và M' có tính chất (*) nên điểm A có tính chất (*) (nhận xét trên). Điều này vô lí. Vậy điểm M có tính chất (*) khi và chỉ khi M nằm trong hoặc trên biên của ΔPQR. Do đầu bài M nằm trong tứ diện nên các điểm M thỏa mãn $d_{1M} = d_{2M} + d_{3M} + d_{4M}$ là miền trong của ΔPQR.

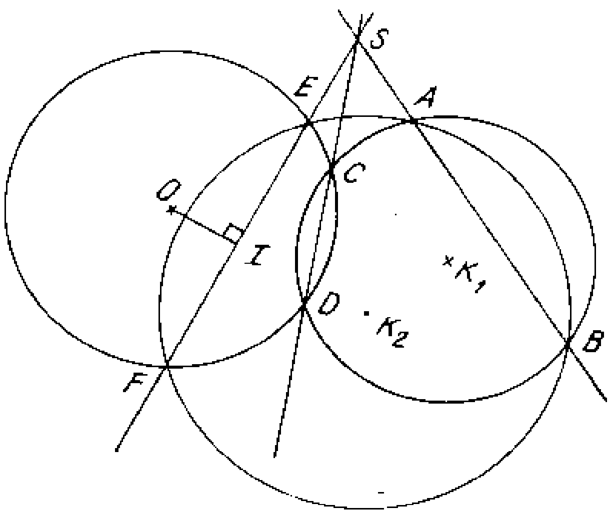
Tương tự như vậy ta suy ra tập hợp điểm M thỏa mãn bài toán là miền trong của bốn tam giác PQR, PQR', QRP', RPQ' với P', Q', R' lần lượt là giao điểm của CD, DB, BC với mặt phân giác của các nhị diện cạnh AB, AC, AD.



§6. Các bài toán dựng hình

Bài toán 132 (T8/143)

Giả sử tâm O của vòng tròn (O) không nằm trên đường thẳng (AB). Vẽ hai vòng tròn (K_1) và (K_2) tùy ý, nhưng qua A, B và cắt (O) tương ứng ở C, D và E, F. Khi đó các đường thẳng AB, CD, EF phải đồng quy tại S tâm đẳng phương của (O), (K_1), (K_2). Nghĩa là các đường thẳng CD và EF luôn gặp nhau trên đường thẳng AB cố định. Điều đó chứng tỏ S *phải cố định*. (Vì nếu có (K_3) cũng qua A, B và cắt (O) tại G, H thì GH cũng gặp CD trên AB tại chính điểm S là giao của AB và CD). Do vậy S hoàn toàn xác định, bằng cách dựng 1 vòng tròn (K_1) tùy ý qua A, B cắt (O) ở C, D rồi cho đường thẳng CD cắt AB ở S. Từ S dựng 1 cát tuyến (SEF) với (O) sao cho $EF = d$ cho trước, là một bài toán quen biết. ((SEF) là tiếp tuyến vẽ từ S với vòng tròn tâm O bán kính $OI = \sqrt{R^2 - d^2/4} = 1/2.\sqrt{4R^2 - d^2}$ với R là bán kính (O)). Cuối cùng vì $\overline{SA}.\overline{SB} = \overline{SC}.\overline{SD} = \overline{SE}.\overline{SF}$ nên tứ giác $ABEF$ nội tiếp và đường tròn $(ABEF)$ chính là đường tròn (K) phải dựng, thỏa mãn mọi điều kiện của bài toán. Rõ ràng là nếu $0 < d \leq 2R$ thì trong trường hợp đó bài toán luôn có nghiệm (đặc biệt nếu $d = 2R$ thì chỉ có 1 nghiệm).



Giả sử $O \in (AB)$ mà $OA \neq OB$ thì ta vẫn xác định được S và bài toán cũng luôn có nghiệm với điều kiện $O < d < 2R$. Còn $OA = OB$ thì S ở vô tận (vì $CD \parallel AB$ do đó EF cũng dựng được $\parallel AB$, với điều kiện $O < d < 2R$. (vì nếu $d = 2R$ thì E, F, A, B thẳng hàng vì đường tròn suy biến thành đường thẳng).

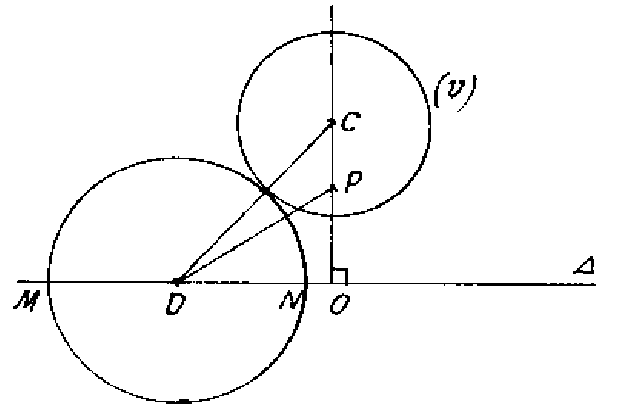
Bài toán 133 (T8/147)

Vì tính đối xứng nên nếu tồn tại điểm P thỏa mãn các điều kiện của đầu bài thì P phải nằm trên đường thẳng CO trục đối xứng chung của đường tròn (v) và đường thẳng Δ ; và sẽ có 2 điểm P như vậy, đối xứng với nhau qua Δ.

Lấy một điểm P bất kì trên nửa đường thẳng OC và đặt $OP = x$. Gọi D là điểm giữa của MN. Ta có :

$$PM.PN\sin\alpha = x.MN$$

$$\Rightarrow \quad PM.PN = x.MN/\sin\alpha \qquad (1)$$



Trong ΔPMN ta có :

$$4PD^2 = 2(PM^2 + PN^2) - MN^2 =$$
$$= 2(MN^2 + 2PM.PN\cos\alpha) - MN^2 =$$
$$= MN^2 + 4PM.PN\cos\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow PM.PN = \frac{4PD^2 - MN^2}{4\cos\alpha} \qquad (2)$$

từ (1) và (2) suy ra :

$$4\cot g\alpha = (4PD^2 - MN^2)/x.MN \qquad (3)$$

Lần lượt xét các tam giác vuông POD và COD ta được :

$$4PD^2 = 4(OD^2 + x^2) = 4x^2 + 4(CD^2 - d^2)$$

Do $2CD = MN + 2R$ nên $4CD^2 = MN^2 + 4R^2 + 4MN.R$. Vì vậy : $4PD^2 = 4x^2 + 4MN.R + 4(R^2 - d^2) + MN^2$

$$\Rightarrow 4PD^2 - MN^2 =$$
$$= 4MN.R + 4x^2 + 4(R^2 - d^2) \qquad (4)$$

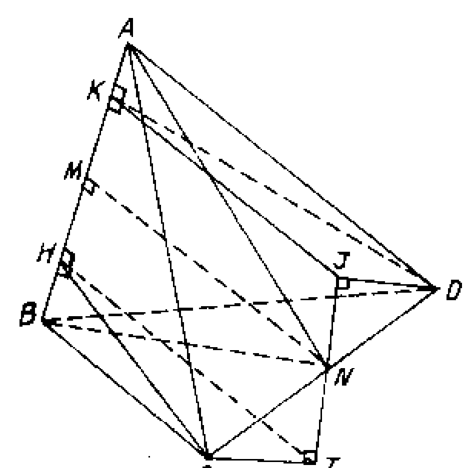
Từ (3) và (4) ta thấy nên chọn $x = \sqrt{d^2 - R^2}$ thì sẽ có

$$\cot g\alpha = R/\sqrt{d^2 - R^2} = \text{const}.$$

Từ các lập luận trên suy ra điểm P nằm trên OC và cách O một khoảng $PO = \sqrt{d^2 - R^2}$ thỏa mãn tất cả các điều kiện của đề bài, và khi đó $\widehat{MPN} = \alpha = \text{arctg}\dfrac{\sqrt{d^2 - R^2}}{R}$. Điểm P' đối xứng với P qua Δ cũng có tính chất tương tự như điểm P.

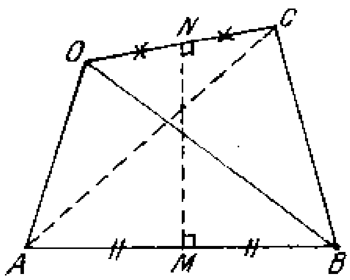
Bài toán 134 (T10/140)

Xét một tứ diện $ABCD$ có các mặt phân giác trùng với các mặt trung diện. Giả sử P



là mặt phân giác qua cạnh AB. Khi đó P đi qua trung điểm N của cạnh CD. Gọi I, J là hình chiếu của C, D trên P ; H, K, M là hình chiếu của I, J, N trên AB. Vì N là trung điểm của $CO \Rightarrow N$ là trung điểm của IJ và $CI = DJ$. Vì P là mặt phân giác của tứ diện nên $\widehat{JKD} = \widehat{IHC} \Rightarrow CI/HI = DJ/KJ \Rightarrow HI = KJ \Rightarrow IJKH$ là hình chữ nhật $\Rightarrow IH \perp IJ$.

Vì $IH \perp IJ$. và $IH \perp CJ \Rightarrow IH \perp$ mp(CIJ) $\Rightarrow IH \perp CD$. Vì $IH \perp CD$ mà $MN \parallel IH$ (do cùng nằm trên P và cùng vuông góc với AB) nên $MN \perp CO \Rightarrow MN$ là đường vuông góc chung của AB và $CD \Rightarrow$ đường vuông góc chung của AB và CD đi trung điểm N của CD. Chứng minh tương tự, ta có M là trung điểm của AB.



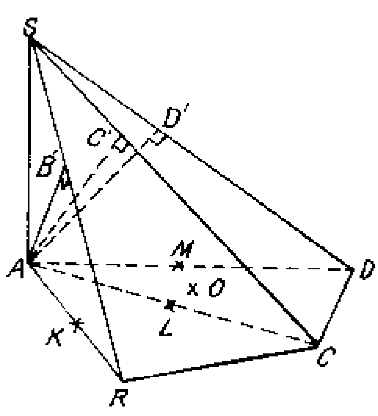
Xét phép đối xứng qua trục MN. Qua phép đối xứng đó thì $C \to D$, $A \to B$, đoạn $AC \to$ đoạn $BD \Rightarrow AC = BD$. Chứng minh tương tự, $AB = CD$ và $AD = BC$. Như vậy tứ diện có các mặt trung diện trùng với các mặt phân giác là tứ diện gần đều. Ngược lại, giả sử $ABCD$ là tứ diện gần đều. Xét một mặt trung diện nào đó của tứ diện, chẳng hạn mặt ABN (M, N là trung điểm AB, CD). Do $AB = CD$, $AC = BD$, $AD = BC \Rightarrow$

$\Delta BCD = \Delta ADC \Rightarrow AN = BN \Rightarrow MN \perp AB$. Tương tự $MN \perp CD \Rightarrow$ tứ diện $ABDN$ là ảnh của tứ diện $BACN$ qua phép đối xứng qua trục $MN \Rightarrow ((ABN), (ABD)) = ((ABN), (ABC)) \Rightarrow ABN$ cũng chính là mặt phân giác của tứ diện.

Vậy những tứ diện gần đều và chỉ những tứ diện đó có các mặt trung diện trùng với các mặt phân giác.

Bài toán 135 (T9/148)

Điều kiện cần. Giả sử có mặt cầu tâm O đi qua A, B, C, D, B', C', D'. Khi đó giao của mặt cầu này và mặt phẳng dáy là đường tròn đi qua $ABCD$. Vậy đáy $ABCD$ là tứ giác nội tiếp.



Gọi K, L, M lần lượt là trung điểm của AB, AC, AD. Ta thấy K, L, M không thẳng hàng vì B, C, D không thẳng hàng.

Mặt cầu tâm O cắt mặt phẳng SAB theo đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông ABB', có tâm K. Vậy $OK \perp$ mp SAB do đó $OK \perp SA$. Tương tự $OL \perp SA$, $OM \perp SA$. Vậy O, K, L, M nằm trên cùng một mặt phẳng vuông góc với SA. Nhưng vì K, L, M không thẳng hàng nên mặt phẳng đó chính là mặt phẳng đáy của chóp, nói khác đi SA là đường cao của chóp.

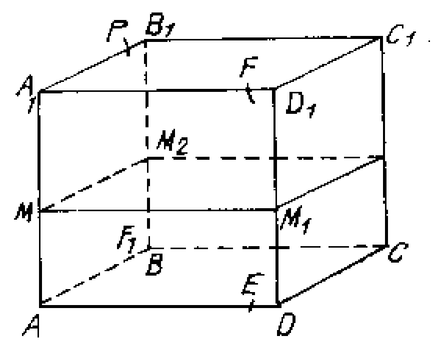
Điều kiện đủ : Giả sử $ABCD$ nội tiếp được trong một đường tròn (tâm O) và $SA \perp$ mf $ABCD$.

Ta có $OK \perp AB$ lại có $OK \perp SA$ nên $OK \perp$ mf SAB. Do $KA = KB = KB'$ nên $OA = OB = OB'$, vậy B' nằm trên mặt cầu tâm O đi qua A, B, C, D. Tương tự C', D' cũng nằm trên mặt cầu đó.

Bài toán 136 (T10/150)

Gọi hình lập phương là $A_1B_1C_1D_1ABCD$ cạnh a. Không mất tính tổng quát ta giả sử M thuộc AA_1. Trước hết ta nhận thấy rằng muốn thiết diện là hình vuông thì góc M của thiết diện phải là góc vuông tức là thiết diện có hai cạnh vuông góc với nhau tại M. Do góc nhị diện AA_1 là một vuông nên trong hai cạnh của thiết diện đi qua M phải có ít nhất một cạnh vuông góc với AA_1 và do đó độ dài cạnh đó cũng phải bằng a.

Nếu M là A (hoặc A_1) thì trong các cạnh của hình vuông phải có cạnh là AB hoặc AD do đó thiết diện phải là $ABCD$. Nhưng khi đó có thể xem M ở trên AB hoặc AA_1 nên lại có thể thiết diện là AA_1D_1D hoặc AA_1B_1B. Vậy là có 3 thiết diện là hình vuông và nếu chỉ kể các thiết diện cắt hình lập phương thành hai phần ở hai phía thì không có thiết diện hình vuông nào qua một đỉnh của hình lập phương.



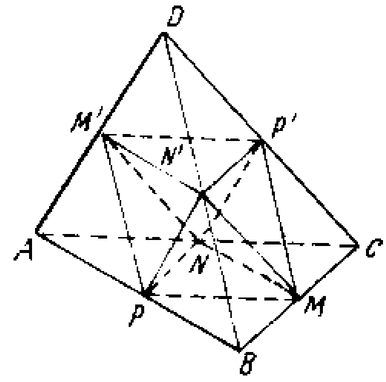
Nếu M ở phần trong của cạnh AA_1 thì lại khác. Kẻ MM_1 song song với AD và MM_2 song song với AB. Do nhận xét trên, thiết diện hình vuông qua M phải là 5 hình vuông có các cạnh là MM_1 và MM_2, MM_2 và ME, MM_2 và MF, MM_1 và MH, MM_1 và MK và hai mặt AA_1B_1B và AA_1D_1D.

Bài toán 137 (T11/170)

Xét tứ giác $MPM'P'$ ta có : MP //= $AC/2$, $M'P'$ //= $AC/2$ ⇒ MP //= $M'P'$ ⇒ tứ giác $MPM'P'$ là hình bình hành. Tương tự như trên ta cũng sẽ chứng minh được các tứ giác $NPN'P'$ và $MNM'N'$ là các hình bình hành.

Từ đó suy ra MM', NN' và PP' luôn cắt nhau tại điểm giữa của mỗi đoạn. Từ đây, do sáu điểm M, M', N, N', P, và P' không đồng phẳng, suy ra sáu điểm đó nằm trên một mặt cầu khi và chỉ khi $MM' = NN' = PP'$. Điều này xảy ra khi và chỉ khi các tứ giác $MPM'P'$, $NPN'P'$, $MNM'N'$ là các hình chữ nhật (do các tứ giác đó luôn là các hình bình hành (*)).

Và cũng chính do (*) ta suy ra các tứ giác nói trên sẽ là các hình chữ nhật khi và chỉ khi $AC \perp BD$, $AD \perp BC$ và $AB \perp CD$, nghĩa là $ABCD$ là tứ diện có trực tâm. Vậy sáu



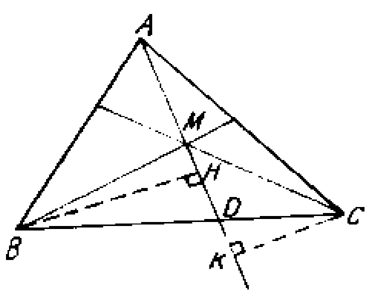
điểm M, M', N, N', P, P' cùng nằm trên một mặt cầu khi và chỉ khi tứ điểm A, B, C, D là tứ đỉnh của một tứ diện có trực tâm.

Chú ý : Kết luận của bài toán vẫn không thay đổi khi bỏ điều kiện "***không đồng phẳng***" của tứ điểm A, B, C, D. Dĩ nhiên, khi đó trong lời giải phải xét thêm trường hợp tứ điểm này đồng phẳng.

§7. Cực trị hình học

Bài toán 138 (T7/133)

a) Tam giác ABC có ba góc nhọn hay là tam giác vuông. Kí hiệu S là diện tích, D là giao của AM với BC, H và K tương ứng là chân đường vuông góc hạ từ B và C tới AM. Ta có :



Hình 3

$$MA.BC = MA(BD + DC) \geqslant MA(BH + CK)$$

hay $\quad MA.BC \geqslant 2(S_{ABM} + S_{ACM}) \qquad (1)$

Phân tích hoàn toàn tương tự ta cũng có :

$$MB.CA \geqslant 2(S_{ABM} + S_{BCM}) \qquad (3)$$

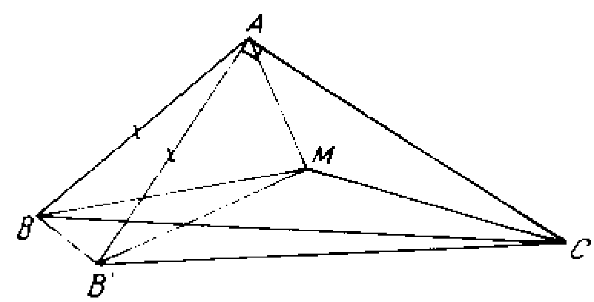
$$MC.AB \geqslant 2(S_{BCM} + S_{ACM}) \qquad (2)$$

Cộng (1), (2), (3) vế theo vế ta được :

$$MA.BC + MB.CA + MC.AB \geqslant 4S_{ABC}$$

đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi H là trực tâm của tam giác ABC. Vậy điểm cần tìm M là trực tâm của tam giác ABC.

b) Tam giác ABC có góc tù tại A.



Hình 4

Kẻ AB' vuông góc với AC và $AB' = AB$. Giả sử M khác A và M nằm trong tam giác $AB'C$ (nếu không thế ta kẻ $AC' \perp AB$, $AC' = AC$ và chứng minh tương tự).

Vì $\widehat{AB'B} = \widehat{ABB'}$ nên $\widehat{MB'B} > \widehat{MBB'}$ ⇒ $MB > MB'$ và $\widehat{CB'B} > \widehat{CBB'} \rightarrow CB > CB'$.

Vậy $MA.BC + MB.AC + MC.AB > MA.B'C + AC.MB' + MC.AB'$. Nhưng theo trường hợp a)

$$MA.B'C + MB'.AC + MC.AB' >$$

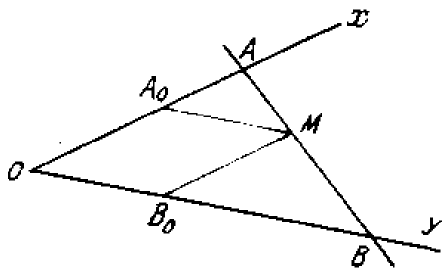
$$4S_{AB'C} = 2AB'.AC = 2AB.AC$$

Vậy trong trường hợp này điểm cần tìm M là đỉnh A của góc tù khi $M \equiv A$ thì $MA.BC + MB.AC + MC.AB = 2AB.AC$.

Bài toán 139 (T9/134)

Trước tiên ta chứng minh cát tuyến AB thỏa mãn :

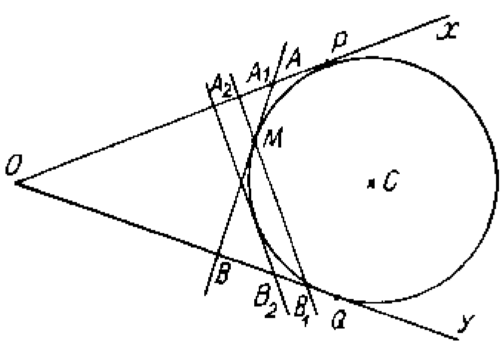
$$\frac{a}{OA} + \frac{b}{OB} = k$$



sẽ luôn đi qua điểm cố định M. Thật vậy, đặt $a/k=a_0$, $b/k = b_0$ ta có $a_0/OA + b_0/OB = 1$ (1). Lấy trên OX điểm A_0 sao cho $OA_0 = a_0$. Qua A_0 kẻ đường song song với Oy, đường này cắt AB tại M. Qua M kẻ đường song song với Ox, cắt Oy tại B_0.

Ta có :
$OA_0/OA = BM/BA$ và $OB_0/OB = AM/AB \Rightarrow$ $OA_0/OA + OB_0/OB = 1$. Nhưng đã có $OA_0 = a_0$ và (1) $\rightarrow OB_0 = b_0$ tức M là điểm cố định trên AB.

Bài toán trở thành xác định cát tuyến AB qua M cố định sao cho chu vi ΔOAB nhỏ nhất.



Qua M vẽ đường tròn (c) tâm C tiếp xúc với Ox tại P và Oy tại Q. Kẻ A_1B_1 bất kì, qua M và là cát tuyến của vòng tròn (c). $A_2B_2 \parallel A_1B_1$ và tiếp xúc với (C). Ta thấy ngay chu vi của ΔOA_2B_2 nhỏ hơn chu vi ΔOA_1B_1 và bằng $OP + OQ$ hay $2OP$. Mặt khác AB qua M tiếp xúc với (c) nên ΔOAB có chu vi bằng chu vi của ΔOA_2B_2 bằng $2OP$, vậy A, B chính là hai điểm cần tìm.

Để xác định A và B ta làm như sau : Xác định điểm M cố định bằng cặp điểm A_0B_0. Vẽ vòng tròn (c') tâm C' tiếp xúc với Ox, Oy. Sao cho đoạn OM nằm ngoài (c') OM kéo dài cắt (c') tại M'. Qua M kẻ đường song song với $M'C'$, cắt OC' tại C. Dễ dàng chứng minh vòng tròn tâm C bán kính CM tiếp xúc với Ox và Oy.

Qua M vẽ tiếp tuyến của vòng tròn tâm C này. Giao điểm của tiếp tuyến với Ox và Oy cho ta các điểm A, B cần tìm.

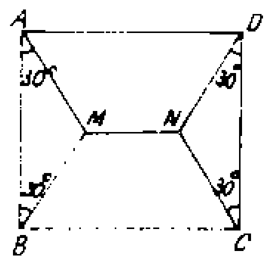
Bài toán 140 (T10/146)

a) Có thể có một cách xây dựng như hình 1. Khi đó tổng độ dài con đường phải xây dựng là :

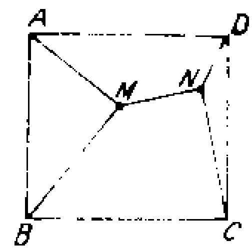
$10\sqrt{3} + 10$km

và dễ thấy $10\sqrt{3} + 10 < 28$.

b) Ta chứng minh cách làm trên là cách tốt nhất.



Hình 1

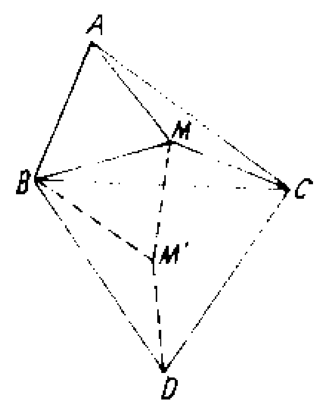


Hình 2

Trước hết ta chứng minh là con đường ngắn nhất phải có dạng như hình 2 với M, N là 2 điểm nào đó trong hình vuông. Thật vậy từ A đến D có 1 đường đi. Vì từ B và C có thể đến được A nên phải có con đường nối từ B và C đến con đường nối A và D. Gọi M và N là 2 điểm chạm đầu tiên của 2 con đường từ B và từ C với con đường nối A với D. Muốn con đường là ngắn nhất thì các đoạn đường AM, MN, ND, BM, CN phải thẳng và ta có hình 2.

Bây giờ ta chứng minh trong số các đường có dạng ở hình 2, đường ngắn nhất có tổng độ dài bằng $10\sqrt{3} + 10$

Trước hết ta chứng minh bổ đề sau.

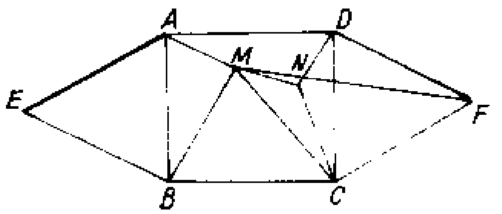


Bổ đề : Cho tam giác ABC và một điểm M bất kì. Dựng tam giác đều BCD về phía ngoài ΔABC. Khi đó ta có $MA + MB + MC \geqslant AD$ và dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi M là giao của AD với đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD.

Chứng minh : Quay tam giác ABC và điểm M quanh B góc 60°, khi đó C trùng với D còn M trùng với M'. Dễ dàng chứng minh

$MA + MB + MC = AM + MM' + M'D \geq AD$ và dấu bằng xảy ra khi M và $M' \in AD$ hay M là giao của AD với đường tròn ngoại tiếp ΔBCD.

Ta tiếp tục chứng minh bài toán của chúng ta. Dựng về phía ngoài hình vuông $ABCD$ các tam giác đều ABE và CDF. Ứng dụng bổ đề vào ΔMCD và điểm N ta có : $NM + NC + ND \geq MF$. Lại ứng dụng bổ đề vào ΔABF và điểm M ta có $MA + MB + MF \geq EF$.



Vậy :

$MA + MB + MN + ND + NC \geq EF$.

Mà dễ dàng tính được $EF = 10 + 10\sqrt{3}$ (đpcm)

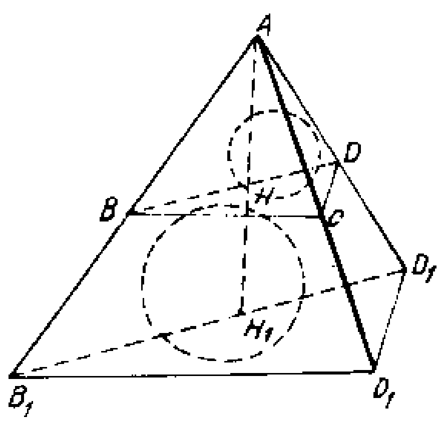
Bài toán 141 (T8/144)

Dựng mặt phẳng song song với mặt phẳng (DBC) và tiếp xúc với mặt cầu có bán kính R_1 cắt các đường thẳng AB, AC và AD tương ứng ở B_1, C_1 và D_1. Từ A hạ đường vuông góc với mặt phẳng (DBC) cắt (DBC) và (B_1D_1C) ở H và H_1. Đặt $AH = h_1$. Ta có $AH_1 = AH + HH_1 = h_1 + 2R_1$. Do $AB_1C_1D_1$ là hình vị tự của $ABCD$ theo tỉ số AH_1/AH với tâm A nên ta có $AH/AH_1 = r/R_1$ (mặt cầu bán kính R_1 là mặt cầu nội tiếp tứ diện $AB_1C_1D_1$). Từ đó

$$\frac{r}{R_1} = \frac{h_1}{2R_1 + h_1} = \frac{h_1 - 2r}{(2R_1 + h_1) - 2R_1} =$$

$$= \frac{R_1 - 2r}{h_1} = 1 - \frac{2r}{h_1}$$

$$\Leftrightarrow 1/R_1 = 1/r - 2/h_1 \qquad (1)$$



Hoàn toàn tương tự ta cũng có :

$1/R_2 = 1/r - 2/h_2$; $1/R_3 = 1/r - 2/h_3$;

$1/R_4 = 1/r - 2/h_4$

nên có $1/R_1 + 1/R_2 + 1/R_3 + 1/R_4 =$

$= 4/r - 2(1/h_1 + 1/h_2 + 1/h_3 + 1/h_4)$

với h_1, h_2, h_3, h_4 là các đường cao của tứ diện $ABCD$ tương ứng các đỉnh A, B, C, D. Gọi V là thể tích tứ diện $ABCD$.

Ta có : $1/h_1 + 1/h_2 + 1/h_3 + 1/h_4 =$

$= S_1/3V + S_2/3V + S_3/3V + S_4/3V$

$$= \frac{(S_1 + S_2 + S_3 + S_4)r}{3rV} = \frac{V}{rV} = \frac{1}{r}$$

Với S_1, S_2, S_3, S_4 là diện tích các mặt đối diện đỉnh A, B, C, D của tứ diện.

Vậy $1/R_1 + 1/R_2 + 1/R_3 + 1/R_4 =$

$= 4/r - 2.1/r = 2/r$.

Theo bất đẳng thức Bunhiacôpxki ta có :

$(R_1 + R_2 + R_3 + R_4)(1/R_1 + 1/R_2 + 1/R_3 + 1/R_4) \geq 16 \Leftrightarrow R_1 + R_2 + R_3 + R_4 \geq 8r$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của tổng $R_1 + R_2 + R_3 + R_4$ là $8r$ và đạt được khi tứ diện $ABCD$ có các bán kính mặt cầu bàng tiếp bằng nhau tức là tứ diện $ABCD$ có diện tích các mặt bằng nhau (theo (1)) và do đó tứ diện là gần đều.

Bài toán 142 (T9/149)

a) Kẻ $Ay' \parallel By$, $DD' \parallel BA$ với D' trên Ay'. Khi đó $AD' = BD$ và $a/Ac + b/AD' = k$

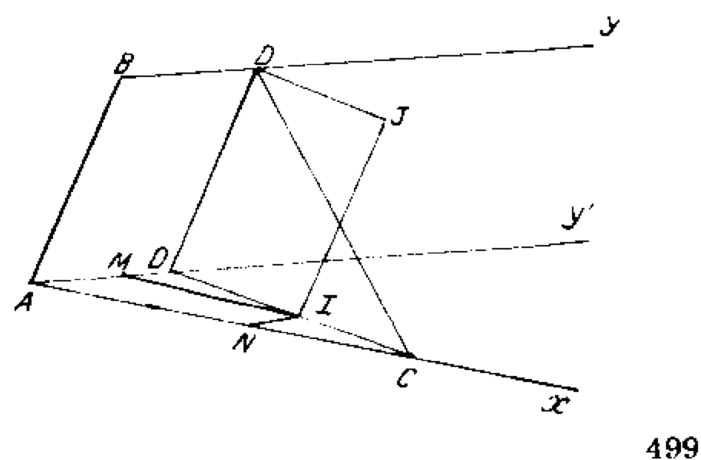
Gọi I là điểm chia trong $D'C$ theo tỉ lệ $a : b$. Kẻ hình bình hành $AMIN$ (M trên Ay', N trên Ax). Ta có :

$AM/AD' = NI/AD' = IC/CD' = IC/(ID' + IC) =$

$= b/(a + b)$.

Tương tự

$AN/AC = a/(b + a)$.



Vậy

$$AM/AD' + AN/AC = 1.$$

Do đó $AM = b/k$, $AN = a/b$.

Vậy M, N và do đó I là những điểm cố định. Gọi IJ là đoạn thẳng thuộc đường thẳng qua I, song song với AB và bị chắn bởi hai mặt phẳng song song, một mặt chứa Ax, một mặt chứa By. Khi đó đoạn IJ cố định và nằm trong mặt phẳng $(DD'C)$ cắt DC.

b) Hai tam giác ABD và $AD'D$ bằng nhau. Vậy thể tích chóp $C.ABD$ bằng thể tích chóp $C.AD'D$. Do đường cao hạ từ D của tứ diện $CAD'D$ là không đổi nên thể tích tứ diện đó nhỏ nhất khi diện tích $AD'C$ nhỏ nhất. Vậy thể tích $ABCD$ nhỏ nhất khi diện tích $AD'C$ nhỏ nhất.

Ta có

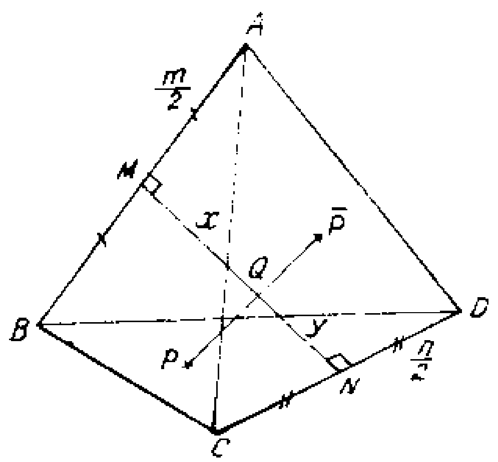
$$\frac{S_{AMN}}{S_{AD'C}} = \frac{AM}{AD'} \cdot \frac{AN}{AC} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{AM/AD' + AN/AC}{2}\right)^2 = 1/4$$

và có dấu bằng khi $AM/AD' = AN/AC$ hay $AN/AC = 1/2$, $AC = 2AN = 2a/k$ (do đó $BD = AD' = 2b/k$).

Bài toán 143 (T12/153)

Kí hiệu $m = AB$, $n = CD$, (từ đó $mn = c^2$). Cho M, N là trung điểm của AB và CD. Dễ dàng chứng minh MN là đường vuông góc chung của AB và CD.



Cho P là điểm bất kì trong không gian và $\overline{P}$ là điểm đối xứng với nó qua MN. Khi đó $A\overline{P} = BP$ và $C\overline{P} = DP$. Từ đó :

$f(P) = AP + A\overline{P} + CP + C\overline{P}$

Nếu Q là giao điểm của $P\overline{P}$ và MN thì AQ là trung tuyến của $\Delta AP\overline{P}$ và CQ là trung tuyến của $\Delta CP\overline{P}$. Từ đó :

$AP + A\overline{P} \geqslant 2AQ$ $CP + C\overline{P} \geqslant 2CQ$. Vậy

$f(P) = AP + A\overline{P} + CP + CP \geqslant 2(AQ + CQ)$.

Đặt $x = MQ$, $y = NQ$. Khi đó

$$AQ + CQ = \sqrt{x^2 + m^2/4} + \sqrt{y^2 + n^2/4} \geqslant$$

$$\geqslant \sqrt{(x+y)^2 + (m+n)^2/4}$$

(do bất đẳng thức Bunhiacôpski).

Ta có $m^2/4 = BN^2 - MN^2 =$

$$= NB^2 - (r + y)^2.$$

Do đó $m^2/4 + n^2/4 + (x + y)^2 =$

$$= BN^2 + n^2/4 = (a^2 + b^2)/2.$$

Vậy $(x + y)^2 + (m + n)^2/4 = (a^2 + b^2 + c^2)/2$.

Từ đó

$f(P) \geqslant 2(AQ + CQ) \geqslant 2\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)/2}$

$f(P) \geqslant \sqrt{2(a^2 + b^2 + c^2)}$.

Dấu bằng xảy ra khi $x/m = y/n$ tức là khi $QM/QN = AB/CD$.

Bài toán 144 (T12/154)

Từ M hạ các đường vuông góc ME, MF, MH lần lượt xuống các mặt phẳng (OBC), (OCA), (OAB). Khi đó ta có :

$$V_{MOBC}/V_{AOBC} = ME/AO;$$

$$V_{MOCA}/V_{BOCA} = MF/BO;$$

$$V_{MOAB}/V_{COAB} = MH/CO.$$

Do đó $ME/AO + MF/BO + MH/CO = 1$. Kí hiệu $ME = a$, $MF = b$, $MH = c$, $AO = x$, $BO = y$, $CO = z$ ta có $a/x + b/y + c/z = 1$.

a) Ta có

$(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})^2 =$

$= (\sqrt{a/x} \cdot \sqrt{x} + \sqrt{b/y} \cdot \sqrt{y} + \sqrt{c/z} \cdot \sqrt{z})^2 \leqslant$

$\leqslant (a/x + b/y + c/z)(x + y + z) = x + y + z$

và có dấu bằng khi

$\sqrt{a/x} / \sqrt{x} = \sqrt{b/y} / \sqrt{y} = \sqrt{c/y} / \sqrt{z}$

Vậy $x + y + z$ nhỏ nhất khi

$\sqrt{a} / x = \sqrt{b} / y = \sqrt{c} / z = \}$

$= (\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) / (x + y + z) =$

$= (\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) / (\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})^2$

hay $x = \sqrt{a}\,(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})$

$y = \sqrt{b}\,(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})$

$z = \sqrt{c}\,(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})$

b) Do tam diện vuông nên $AB^2 + BC^2 + CA^2 =$

$= (OA^2 + OB^2) + (OB^2 + OC^2) +$

$+ (OC^2 + OA^2) = 2(x^2 + y^2 + z^2)$.

Ta có

$(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2} + \sqrt[3]{c^2})^3 =$

$= (\sqrt[3]{x^2}\ \sqrt[3]{a/x}\ \sqrt[3]{a/x} + \sqrt[3]{y^2}.\sqrt[3]{b/y}.\sqrt[3]{b/y} +$

$+ \sqrt[3]{???^{-2}}.\ \sqrt[3]{c/z}\ \sqrt[3]{c/z}\ ???^3 \leq$

$\leq (x^2 + y^2 + z^2)(a/x + b/y + c/z)^2 =$

$= x^2 + y^2 + z^2$

Vậy $OA^2 + OB^2 + OC^2$ nhỏ nhất khi bất đẳng thức trên có dấu = tức là

$a/x : x^2 = b/y : y^2 = c/z : z^2$

$\sqrt[3]{a^2}/x^2 = \sqrt[3]{b^2}/y^2 = \sqrt[3]{c^2}/z^2 =$

$= (\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2} + \sqrt[3]{c^2})/(x^2 + y^2 + z^2)$

$= (\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2} + \sqrt[3]{c^2})/(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2} + \sqrt[3]{c^2})^3$

hay $x = \sqrt[3]{a}\,(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2} + \sqrt[3]{c^2})$

$y = \sqrt[3]{b}\,(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2} + \sqrt[3]{c^2})$

Bài toán 145 (T12/164)

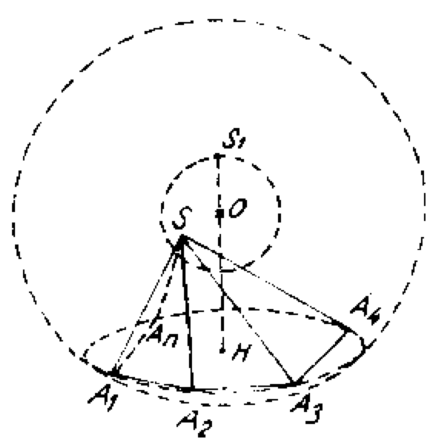
Ta có kết quả quen biết sau : trong số các đa giác n cạnh nội tiếp cung một đường tròn thì đa giác đều có diện tích lớn nhất.

Gọi O là tâm hình cầu H là chân đường vuông góc hạ từ O xuống mặt phẳng $A_1A_2 \ldots A_n$. Gọi ? ? ? là giao điểm của đường thẳng OH với mặt cầu nhỏ cách xa mặt phẳng $A_1A_2 \ldots A_n$ nhất. Đặt $x = OH$ ta có $0 \leq x \leq 4$. Với mỗi x ta có quan hệ thể tích :

$V_{S.A_1A_2\ldots A_n} \leq V_{S_1.A_1A_2\ldots A_n} =$

$= \dfrac{1}{3} S_1H\,.\,\text{dt}\,(A_1A_2 \ldots A_n) \leq$

$\leq \dfrac{1}{3} S_1H\ \text{dt}\,(B_1B_2 \ldots B_n)$.



ở đó $B_1B_2 \ldots B_n$ là đa giác đều n cạnh nội tiếp trong cùng một đường tròn ngoại tiếp đa giác $A_1A_2 \ldots A_n$.

Có $S_1H = x + 1$; $R^2 = HA_1^2$

$= OA_1^2 - OH^2 = 16 - x^2$;

dt $(B_1 \ldots B_n) = n/2\,(16 - x^2)\sin(2\pi/n)$.

Vậy

$V_{S.A_1\ldots A_n} \leq \dfrac{n}{6}\sin\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)(x + 1)(16 - x^2)$

$x \in [0, 4]$

Xét $f(x) = (x + 1)(16 - x^2)$

$= -x^3 - x^2 + 16x + 16$

với $x \in [0, 4]$

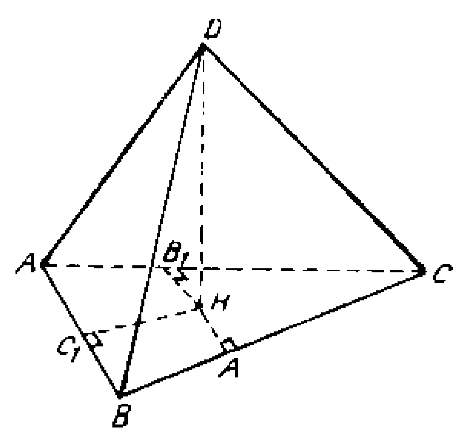
$f'(x) = -3x^2 - 2x + 16$;

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 2$ (do $x \in [0, 45]$. Vậy :

$f_{max} = \max\{f(0), f(2), f4\} = f2 = 36$. Từ đó :

$V_{S.A_1A_2\ldots A_n} \leq 6a\sin\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)$ và thể tích hình chóp $S.A_1A_2 \ldots A_n$ lớn nhất bằng $6n\sin(2\pi/n)$ đạt được khi $A_1 \ldots A_n$ là đa giác đều nội tiếp trong đường tròn thiết diện cách tâm O một khoảng $x = 2$, còn S' trên mặt cầu nhỏ cách xa thiết diện nhất.

Bài toán 146 (T9/147)



Hạ $DH \perp (ABC)$, $HA_1 \perp BC$, $HB_1 \perp CA$ và $HC_1 \perp AB$. Khi đó ta cũng có $DA_1 \perp BC$, $DB_1 \perp CA$ và $DC_1 \perp AB$

Đặt $HA_1 = |x|$, $HB_1 = |y|$ và $HC_1 = |z|$

Ta quy ước $x > 0$ khi A và H nằm cùng phía đối với đường thẳng BC ; $x < 0$ trong trường hợp ngược lại ; $x = 0$ khi H nằm trên BC. Quy ước tương tự đối với y và z. Khi đó ta sẽ có :

$$ax + by + cz = 2S_{ABC}$$

Từ điều kiện đề bài suy ra diện tích toàn phần tứ diện $ABCD$ nhỏ nhất khi và chỉ khi diện tích xung quanh (kí hiệu S_{xq}) của tứ diện đó nhỏ nhất. Ta có :

$$2S_{xq} = a\sqrt{x^2 + h^2} + b\sqrt{y^2 + h^2} + c\sqrt{z^2 + h^2}$$

Suy ra

$$4S_{xq}^2 = a^2(x^2 + h^2) + b^2(y^2 + h^2) + c^2(z^2 + h^2) + 2ab\sqrt{(x^2 + h^2)(y^2 + h^2)} + 2ac\sqrt{(x^2 + h^2)(z^2 + h^2)} + 2bc\sqrt{(y^2 + h^2)(z^2 + h^2)}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacốpxki cho các bộ số (x, y, h, h) ; (x, z, h, h) ; (y, z, h, h) từ (1) ta được :

$$4S_{xq}^2 \geqslant a^2(x^2 + h^2) + b^2(y^2 + h^2) + c^2(z^2 + h^2) + 2ab(xy + h^2) + 2ac(xz + h^2) + 2bc(yz + h^2) \quad (2)$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $x/h = y/h = z/h$ hay $x = y = z$. Sau khi khai triển và rút gọn vế phải của (2) ta có :

$$(2) \Leftrightarrow 4S_{xq}^2 \geqslant (a + b + c)^2h^2 + (ax + by + cz)^2$$

$$\Leftrightarrow 4S_{xq}^2 \geqslant (a + b + c)^2 . h^2 . 4S_{ABC}^2$$

$$\Leftrightarrow S_x \geqslant \sqrt{\frac{(a + b + c)^2h^2}{4} + S_{ABC}^2} = const.$$

Từ đó suy ra S_{xq} nhận giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $x = y = z$. Vậy diện tích toàn phần tứ diện $ABCD$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $x = y = z$ tức khi và chỉ khi hình chiếu của D xuống mặt phẳng (ABC) trùng với tâm đường tròn nội tiếp ΔABC.

MỤC LỤC

Chịu trách nhiệm xuất bản :
Giám đốc PHẠM VĂN AN
Tổng biên tập NGUYỄN NHƯ Ý

Chịu trách nhiệm nội dung :
NGUYỄN CẢNH TOÀN
NGÔ ĐẠT TỨ

Ban tuyển chọn :
Phần thứ nhất : VŨ DƯƠNG THỤY, NGÔ ĐẠT TỨ
ĐẶNG QUAN VIỄN
Phần thứ hai : NGUYỄN VĂN MẬU, NGUYỄN KHẮC MINH,
NGUYỄN ĐĂNG PHẤT, ĐẶNG HÙNG THẮNG,
NGÔ ĐẠT TỨ

Biên tập :
Phần thứ nhất : VŨ KIM THỦY
Phần thứ hai : LÊ THỐNG NHẤT

Biên tập kĩ thuật :
NGUYỄN TRỌNG THIỆP

Trình bày bìa :
TRẦN TIỂU LÂM

Sửa bản in :
PHẠM VĂN CẨN

Sắp chữ :
TRUNG TÂM CHẾ BẢN - ĐỒ HỌA (NXB GIÁO DỤC)

In 6.000 cuốn tại nhà máy in Diên Hồng, 57 Giảng Võ, Hà Nội. Giấy phép xuất b
số 52/CXB-146 cấp ngày 8-1-1997
In xong và nộp lưu chiểu tháng 6 năm 1997

40 NĂM
NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC
1957 - 1997

Giá : **42.000đ**