

Bài 1: Vectơ ngẫu nhiên rời rạc hai chiều

1) Bảng phân bố xác suất của vectơ ngẫu nhiên rời rạc hai chiều

Bài 1: Vectơ ngẫu nhiên rời rạc hai chiều

1) Bảng phân bố xác suất của vectơ ngẫu nhiên rời rạc hai chiều

- Vectơ ngẫu nhiên hai chiều (X, Y) được gọi là rời rạc nếu tất cả các biến ngẫu nhiên thành phần X, Y là rời rạc.

Bài 1: Vectơ ngẫu nhiên rời rạc hai chiều

1) Bảng phân bố xác suất của vectơ ngẫu nhiên rời rạc hai chiều

- Vectơ ngẫu nhiên hai chiều (X, Y) được gọi là rời rạc nếu tất cả các biến ngẫu nhiên thành phần X, Y là rời rạc.
- Bảng phân bố xác suất của vectơ ngẫu nhiên rời rạc hai chiều (X, Y) (hay còn gọi là bảng phân bố xác suất đồng thời của hai biến ngẫu nhiên X, Y) là

$X \backslash Y$	y_1	y_2	\dots	y_j	\dots	y_m
x_1	$p(x_1, y_1)$	$p(x_1, y_2)$	\dots	$p(x_1, y_j)$	\dots	$p(x_1, y_m)$
x_2	$p(x_2, y_1)$	$p(x_2, y_2)$	\dots	$p(x_2, y_j)$	\dots	$p(x_2, y_m)$
\vdots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
x_i	$p(x_i, y_1)$	$p(x_i, y_2)$	\dots	$p(x_i, y_j)$	\dots	$p(x_i, y_m)$
\vdots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
x_n	$p(x_n, y_1)$	$p(x_n, y_2)$	\dots	$p(x_n, y_j)$	\dots	$p(x_n, y_m)$

trong đó

- x_1, x_2, \dots, x_n là các giá trị của biến ngẫu nhiên X ,

trong đó

- x_1, x_2, \dots, x_n là các giá trị của biến ngẫu nhiên X ,
- y_1, y_2, \dots, y_m là các giá trị của biến ngẫu nhiên Y ,

trong đó

- x_1, x_2, \dots, x_n là các giá trị của biến ngẫu nhiên X ,
- y_1, y_2, \dots, y_m là các giá trị của biến ngẫu nhiên Y ,
- $p(x_i, y_j) = \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j)$ là xác suất để X bằng x_i và Y bằng y_j .

trong đó

- x_1, x_2, \dots, x_n là các giá trị của biến ngẫu nhiên X ,
- y_1, y_2, \dots, y_m là các giá trị của biến ngẫu nhiên Y ,
- $p(x_i, y_j) = \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j)$ là xác suất để X bằng x_i và Y bằng y_j .
- Ta có

$$\begin{cases} 0 \leq p(x_i, y_j) \leq 1, \ i = 1, 2, \dots, n, \ j = 1, 2, \dots, m, \\ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p(x_i, y_j) = 1. \end{cases}$$

2) Bảng phân bố xác suất của X, Y

2) Bảng phân bố xác suất của X, Y

Biến ngẫu nhiên X có bảng phân bố xác suất

X	x_1	x_2	\dots	x_n
\mathbb{P}	$\mathbb{P}(X = x_1)$	$\mathbb{P}(X = x_2)$	\dots	$\mathbb{P}(X = x_n)$

trong đó $\mathbb{P}(X = x_i) = p(x_i, y_1) + p(x_i, y_2) + \dots + p(x_i, y_m)$.

2) Bảng phân bố xác suất của X, Y

Biến ngẫu nhiên X có bảng phân bố xác suất

X	x_1	x_2	\dots	x_n
\mathbb{P}	$\mathbb{P}(X = x_1)$	$\mathbb{P}(X = x_2)$	\dots	$\mathbb{P}(X = x_n)$

trong đó $\mathbb{P}(X = x_i) = p(x_i, y_1) + p(x_i, y_2) + \dots + p(x_i, y_m)$.

Tương tự biến ngẫu nhiên Y có bảng phân bố xác suất

Y	y_1	y_2	\dots	y_m
\mathbb{P}	$\mathbb{P}(Y = y_1)$	$\mathbb{P}(Y = y_2)$	\dots	$\mathbb{P}(Y = y_m)$

trong đó $\mathbb{P}(Y = y_j) = p(x_1, y_j) + p(x_2, y_j) + \dots + p(x_n, y_j)$.

- Nhắc lại rằng hai biến ngẫu nhiên rời rạc X và Y độc lập khi và chỉ khi $\mathbb{P}(X = a, Y = b) = \mathbb{P}(X = a)\mathbb{P}(Y = b)$ với a, b là hai giá trị bất kỳ của X, Y .

- Nhắc lại rằng hai biến ngẫu nhiên rời rạc X và Y độc lập khi và chỉ khi $\mathbb{P}(X = a, Y = b) = \mathbb{P}(X = a)\mathbb{P}(Y = b)$ với a, b là hai giá trị bất kỳ của X, Y .

Trong trường hợp này thì hai biến ngẫu nhiên X và Y độc lập khi và chỉ khi

$$\mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j) = \mathbb{P}(X = x_i)\mathbb{P}(Y = y_j)$$

với mọi $i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m$.

- Nhắc lại rằng hai biến ngẫu nhiên rời rạc X và Y độc lập khi và chỉ khi $\mathbb{P}(X = a, Y = b) = \mathbb{P}(X = a)\mathbb{P}(Y = b)$ với a, b là hai giá trị bất kỳ của X, Y .

Trong trường hợp này thì hai biến ngẫu nhiên X và Y độc lập khi và chỉ khi

$$\mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j) = \mathbb{P}(X = x_i)\mathbb{P}(Y = y_j)$$

với mọi $i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m$.

Do đó nếu tồn tại i, j nào đó mà

$\mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j) \neq \mathbb{P}(X = x_i)\mathbb{P}(Y = y_j)$ thì hai biến ngẫu nhiên X, Y không độc lập.

3) Hiệp phương sai và hệ số tương quan

3) Hiệp phương sai và hệ số tương quan

- Hiệp phương sai (hay còn gọi là Covariance) của hai biến ngẫu nhiên X, Y

$$\text{cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y),$$

3) Hiệp phương sai và hệ số tương quan

- Hiệp phương sai (hay còn gọi là Covariance) của hai biến ngẫu nhiên X, Y

$$\text{cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y),$$

trong đó $\mathbb{E}(XY) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i y_j p(x_i, y_j).$

3) Hiệp phương sai và hệ số tương quan

- Hiệp phương sai (hay còn gọi là Covariance) của hai biến ngẫu nhiên X, Y

$$\text{cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y),$$

trong đó $\mathbb{E}(XY) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i y_j p(x_i, y_j).$

- Hệ số tương quan giữa hai biến ngẫu nhiên X, Y

3) Hiệp phương sai và hệ số tương quan

- Hiệp phương sai (hay còn gọi là Covariance) của hai biến ngẫu nhiên X, Y

$$\text{cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y),$$

trong đó $\mathbb{E}(XY) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i y_j p(x_i, y_j).$

- Hệ số tương quan giữa hai biến ngẫu nhiên X, Y

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{\mathbb{D}(X)} \sqrt{\mathbb{D}(Y)}}$$

3) Hiệp phương sai và hệ số tương quan

- Hiệp phương sai (hay còn gọi là Covariance) của hai biến ngẫu nhiên X, Y

$$\text{cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y),$$

trong đó $\mathbb{E}(XY) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i y_j p(x_i, y_j).$

- Hệ số tương quan giữa hai biến ngẫu nhiên X, Y

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{\mathbb{D}(X)} \sqrt{\mathbb{D}(Y)}}$$

khi $\mathbb{D}(X) > 0$ và $\mathbb{D}(Y) > 0$.

3) Hiệp phương sai và hệ số tương quan

- Hiệp phương sai (hay còn gọi là Covariance) của hai biến ngẫu nhiên X, Y

$$\text{cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y),$$

trong đó $\mathbb{E}(XY) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i y_j p(x_i, y_j).$

- Hệ số tương quan giữa hai biến ngẫu nhiên X, Y

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{\mathbb{D}(X)} \sqrt{\mathbb{D}(Y)}}$$

khi $\mathbb{D}(X) > 0$ và $\mathbb{D}(Y) > 0$.

Nếu $\mathbb{D}(X) = 0$ hoặc $\mathbb{D}(Y) = 0$ thì ta quy ước $\rho(X, Y) = 0$.

- Với mọi $a, b \in \mathbb{R}$, ta có

- Với mọi $a, b \in \mathbb{R}$, ta có

$$\mathbb{D}(aX + bY) = a^2\mathbb{D}(X) + b^2\mathbb{D}(Y) + 2ab \operatorname{cov}(X, Y).$$

4) Phân bố có điều kiện và kỳ vọng có điều kiện

4) Phân bố có điều kiện và kỳ vọng có điều kiện

- Bảng phân bố xác suất của X với điều kiện ($Y = y_j$)

4) Phân bố có điều kiện và kỳ vọng có điều kiện

- Bảng phân bố xác suất của X với điều kiện ($Y = y_j$)

$X Y = y_j$	x_1	\dots	x_n
\mathbb{P}	$\mathbb{P}(X = x_1 Y = y_j)$	\dots	$\mathbb{P}(X = x_n Y = y_j)$

trong đó

$$\mathbb{P}(X = x_i|Y = y_j) = \frac{\mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j)}{\mathbb{P}(Y = y_j)}.$$

4) Phân bố có điều kiện và kỳ vọng có điều kiện

- Bảng phân bố xác suất của X với điều kiện ($Y = y_j$)

$X Y = y_j$	x_1	\dots	x_n
\mathbb{P}	$\mathbb{P}(X = x_1 Y = y_j)$	\dots	$\mathbb{P}(X = x_n Y = y_j)$

trong đó

$$\mathbb{P}(X = x_i|Y = y_j) = \frac{\mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j)}{\mathbb{P}(Y = y_j)}.$$

- Kỳ vọng của X với điều kiện ($Y = y_j$)

4) Phân bố có điều kiện và kỳ vọng có điều kiện

- Bảng phân bố xác suất của X với điều kiện ($Y = y_j$)

$X Y = y_j$	x_1	\dots	x_n
\mathbb{P}	$\mathbb{P}(X = x_1 Y = y_j)$	\dots	$\mathbb{P}(X = x_n Y = y_j)$

trong đó

$$\mathbb{P}(X = x_i|Y = y_j) = \frac{\mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j)}{\mathbb{P}(Y = y_j)}.$$

- Kỳ vọng của X với điều kiện ($Y = y_j$)

$$\mathbb{E}[X|Y = y_j] = \sum_{i=1}^n x_i \mathbb{P}(X = x_i|Y = y_j).$$

- Tương tự, bảng phân bố xác suất của Y với điều kiện ($X = x_i$)

$Y X = x_i$	y_1	\dots	y_m
\mathbb{P}	$\mathbb{P}(Y = y_1 X = x_i)$	\dots	$\mathbb{P}(Y = y_m X = x_i)$

- Tương tự, bảng phân bố xác suất của Y với điều kiện $(X = x_i)$

$Y X = x_i$	y_1	\dots	y_m
\mathbb{P}	$\mathbb{P}(Y = y_1 X = x_i)$	\dots	$\mathbb{P}(Y = y_m X = x_i)$

trong đó

$$\mathbb{P}(Y = y_j|X = x_i) = \frac{\mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j)}{\mathbb{P}(X = x_i)}.$$

- Tương tự, bảng phân bố xác suất của Y với điều kiện $(X = x_i)$

$Y X = x_i$	y_1	\dots	y_m
\mathbb{P}	$\mathbb{P}(Y = y_1 X = x_i)$	\dots	$\mathbb{P}(Y = y_m X = x_i)$

trong đó

$$\mathbb{P}(Y = y_j|X = x_i) = \frac{\mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j)}{\mathbb{P}(X = x_i)}.$$

- Kỳ vọng của Y với điều kiện $(X = x_i)$

- Tương tự, bảng phân bố xác suất của Y với điều kiện $(X = x_i)$

$Y X = x_i$	y_1	\dots	y_m
\mathbb{P}	$\mathbb{P}(Y = y_1 X = x_i)$	\dots	$\mathbb{P}(Y = y_m X = x_i)$

trong đó

$$\mathbb{P}(Y = y_j|X = x_i) = \frac{\mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j)}{\mathbb{P}(X = x_i)}.$$

- Kỳ vọng của Y với điều kiện $(X = x_i)$

$$\mathbb{E}[Y|X = x_i] = \sum_{j=1}^m y_j \mathbb{P}(Y = y_j|X = x_i).$$

Ví dụ 1

Cho X, Y là hai biến ngẫu nhiên rời rạc có bảng phân bố xác suất đồng thời

$X \backslash Y$	0	2	3	5
-2	0, 1	0, 15	0, 1	0
1	$5k$	$3k$	0, 05	0, 07
4	0	$2k$	0	0, 13

- Tìm k và lập bảng phân bố xác suất của các biến ngẫu nhiên X và Y . Hai biến ngẫu nhiên X và Y có độc lập không?
- Tính phương sai $\mathbb{D}(2X - 3Y)$.
- Tìm bảng phân bố xác suất của Y với điều kiện $X = 1$, tính $\mathbb{E}[Y|X = 1]$.

Lời giải

Lời giải

a) Ta có $k \geq 0$ và

$$\begin{aligned} 0,1 + 0,15 + 0,1 + 0 + 5k + 3k + 0,05 + 0,07 \\ + 0 + 2k + 0 + 0,13 = 1. \end{aligned}$$

Do đó

$$10k = 0,4 \iff k = 0,04.$$

Ta có

$$\mathbb{P}(X = -2) = 0,1 + 0,15 + 0,1 + 0 = 0,35,$$

Ta có

$$\mathbb{P}(X = -2) = 0,1 + 0,15 + 0,1 + 0 = 0,35,$$

$$\mathbb{P}(X = 1) = 5k + 3k + 0,05 + 0,07 = 0,44,$$

Ta có

$$\mathbb{P}(X = -2) = 0,1 + 0,15 + 0,1 + 0 = 0,35,$$

$$\mathbb{P}(X = 1) = 5k + 3k + 0,05 + 0,07 = 0,44,$$

$$\mathbb{P}(X = 4) = 0 + 2k + 0 + 0,13 = 0,21.$$

Ta có

$$\mathbb{P}(X = -2) = 0,1 + 0,15 + 0,1 + 0 = 0,35,$$

$$\mathbb{P}(X = 1) = 5k + 3k + 0,05 + 0,07 = 0,44,$$

$$\mathbb{P}(X = 4) = 0 + 2k + 0 + 0,13 = 0,21.$$

Do đó bảng phân bố xác suất của X

X	-2	1	4
\mathbb{P}	$0,35$	$0,44$	$0,21$

Ta có

$$\mathbb{P}(Y = 0) = 0,1 + 5k + 0 = 0,3,$$

Ta có

$$\mathbb{P}(Y = 0) = 0,1 + 5k + 0 = 0,3,$$

$$\mathbb{P}(Y = 2) = 0,15 + 3k + 2k = 0,35,$$

Ta có

$$\mathbb{P}(Y = 0) = 0,1 + 5k + 0 = 0,3,$$

$$\mathbb{P}(Y = 2) = 0,15 + 3k + 2k = 0,35,$$

$$\mathbb{P}(Y = 3) = 0,1 + 0,05 + 0 = 0,15,$$

Ta có

$$\mathbb{P}(Y = 0) = 0,1 + 5k + 0 = 0,3,$$

$$\mathbb{P}(Y = 2) = 0,15 + 3k + 2k = 0,35,$$

$$\mathbb{P}(Y = 3) = 0,1 + 0,05 + 0 = 0,15,$$

$$\mathbb{P}(Y = 5) = 0 + 0,07 + 0,13 = 0,2.$$

Ta có

$$\mathbb{P}(Y = 0) = 0,1 + 5k + 0 = 0,3,$$

$$\mathbb{P}(Y = 2) = 0,15 + 3k + 2k = 0,35,$$

$$\mathbb{P}(Y = 3) = 0,1 + 0,05 + 0 = 0,15,$$

$$\mathbb{P}(Y = 5) = 0 + 0,07 + 0,13 = 0,2.$$

Vậy Y có bảng phân bố xác suất

Y	0	2	3	5
\mathbb{P}	0,3	0,35	0,15	0,2

Ta thấy

$$\mathbb{P}(X = -2, Y = 0) = 0, 1,$$

Ta thấy

$$\mathbb{P}(X = -2, Y = 0) = 0,1,$$

$$\mathbb{P}(X = -2) = 0,35,$$

Ta thấy

$$\mathbb{P}(X = -2, Y = 0) = 0,1,$$

$$\mathbb{P}(X = -2) = 0,35,$$

$$\mathbb{P}(Y = 0) = 0,3.$$

Ta thấy

$$\mathbb{P}(X = -2, Y = 0) = 0,1,$$

$$\mathbb{P}(X = -2) = 0,35,$$

$$\mathbb{P}(Y = 0) = 0,3.$$

Do đó

$$\mathbb{P}(X = -2, Y = 0) \neq \mathbb{P}(X = -2)\mathbb{P}(Y = 0).$$

Ta thấy

$$\mathbb{P}(X = -2, Y = 0) = 0,1,$$

$$\mathbb{P}(X = -2) = 0,35,$$

$$\mathbb{P}(Y = 0) = 0,3.$$

Do đó

$$\mathbb{P}(X = -2, Y = 0) \neq \mathbb{P}(X = -2)\mathbb{P}(Y = 0).$$

Vậy hai biến ngẫu nhiên X và Y không độc lập.

b) Kỳ vọng của X

$$\mathbb{E}(X) = (-2) \cdot 0,35 + 1 \cdot 0,44 + 4 \cdot 0,21$$

b) Kỳ vọng của X

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= (-2) \cdot 0,35 + 1 \cdot 0,44 + 4 \cdot 0,21 \\ &= 0,58.\end{aligned}$$

b) Kỳ vọng của X

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= (-2) \cdot 0,35 + 1 \cdot 0,44 + 4 \cdot 0,21 \\ &= 0,58.\end{aligned}$$

$$\mathbb{E}(X^2) = (-2)^2 \cdot 0,35 + 1^2 \cdot 0,44 + 4^2 \cdot 0,21$$

b) Kỳ vọng của X

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= (-2) \cdot 0,35 + 1 \cdot 0,44 + 4 \cdot 0,21 \\ &= 0,58.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X^2) &= (-2)^2 \cdot 0,35 + 1^2 \cdot 0,44 + 4^2 \cdot 0,21 \\ &= 5,2.\end{aligned}$$

b) Kỳ vọng của X

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= (-2) \cdot 0,35 + 1 \cdot 0,44 + 4 \cdot 0,21 \\ &= 0,58.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X^2) &= (-2)^2 \cdot 0,35 + 1^2 \cdot 0,44 + 4^2 \cdot 0,21 \\ &= 5,2.\end{aligned}$$

Phương sai của X

$$\mathbb{D}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$$

b) Kỳ vọng của X

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= (-2) \cdot 0,35 + 1 \cdot 0,44 + 4 \cdot 0,21 \\ &= 0,58.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X^2) &= (-2)^2 \cdot 0,35 + 1^2 \cdot 0,44 + 4^2 \cdot 0,21 \\ &= 5,2.\end{aligned}$$

Phương sai của X

$$\begin{aligned}\mathbb{D}(X) &= \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 \\ &= 5,2 - 0,58^2\end{aligned}$$

b) Kỳ vọng của X

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= (-2) \cdot 0,35 + 1 \cdot 0,44 + 4 \cdot 0,21 \\ &= 0,58.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X^2) &= (-2)^2 \cdot 0,35 + 1^2 \cdot 0,44 + 4^2 \cdot 0,21 \\ &= 5,2.\end{aligned}$$

Phương sai của X

$$\begin{aligned}\mathbb{D}(X) &= \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 \\ &= 5,2 - 0,58^2 \\ &= 4,8636.\end{aligned}$$

Kỳ vọng của Y

$$\mathbb{E}(Y) = 0 \cdot 0,3 + 2 \cdot 0,35 + 3 \cdot 0,15 + 5 \cdot 0,2$$

Kỳ vọng của Y

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y) &= 0 \cdot 0,3 + 2 \cdot 0,35 + 3 \cdot 0,15 + 5 \cdot 0,2 \\ &= 2,15.\end{aligned}$$

Kỳ vọng của Y

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y) &= 0 \cdot 0,3 + 2 \cdot 0,35 + 3 \cdot 0,15 + 5 \cdot 0,2 \\ &= 2,15.\end{aligned}$$

$$\mathbb{E}(Y^2) = 0^2 \cdot 0,3 + 2^2 \cdot 0,35 + 3^2 \cdot 0,15 + 5^2 \cdot 0,2$$

Kỳ vọng của Y

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y) &= 0 \cdot 0,3 + 2 \cdot 0,35 + 3 \cdot 0,15 + 5 \cdot 0,2 \\ &= 2,15.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y^2) &= 0^2 \cdot 0,3 + 2^2 \cdot 0,35 + 3^2 \cdot 0,15 + 5^2 \cdot 0,2 \\ &= 7,75.\end{aligned}$$

Kỳ vọng của Y

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y) &= 0 \cdot 0,3 + 2 \cdot 0,35 + 3 \cdot 0,15 + 5 \cdot 0,2 \\ &= 2,15.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y^2) &= 0^2 \cdot 0,3 + 2^2 \cdot 0,35 + 3^2 \cdot 0,15 + 5^2 \cdot 0,2 \\ &= 7,75.\end{aligned}$$

Phương sai của Y

$$\mathbb{D}(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - (\mathbb{E}(Y))^2$$

Kỳ vọng của Y

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y) &= 0 \cdot 0,3 + 2 \cdot 0,35 + 3 \cdot 0,15 + 5 \cdot 0,2 \\ &= 2,15.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y^2) &= 0^2 \cdot 0,3 + 2^2 \cdot 0,35 + 3^2 \cdot 0,15 + 5^2 \cdot 0,2 \\ &= 7,75.\end{aligned}$$

Phương sai của Y

$$\begin{aligned}\mathbb{D}(Y) &= \mathbb{E}(Y^2) - (\mathbb{E}(Y))^2 \\ &= 7,75 - 2,15^2\end{aligned}$$

Kỳ vọng của Y

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y) &= 0 \cdot 0,3 + 2 \cdot 0,35 + 3 \cdot 0,15 + 5 \cdot 0,2 \\ &= 2,15.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y^2) &= 0^2 \cdot 0,3 + 2^2 \cdot 0,35 + 3^2 \cdot 0,15 + 5^2 \cdot 0,2 \\ &= 7,75.\end{aligned}$$

Phương sai của Y

$$\begin{aligned}\mathbb{D}(Y) &= \mathbb{E}(Y^2) - (\mathbb{E}(Y))^2 \\ &= 7,75 - 2,15^2 \\ &= 3,1275.\end{aligned}$$

Ta có

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(XY) = & (-2) \cdot 0 \cdot 0,1 + (-2) \cdot 2 \cdot 0,15 + (-2) \cdot 3 \cdot 0,1 \\ & + (-2) \cdot 5 \cdot 0 + 1 \cdot 0 \cdot 5k + 1 \cdot 2 \cdot 3k \\ & + 1 \cdot 3 \cdot 0,05 + 1 \cdot 5 \cdot 0,07 + 4 \cdot 0 \cdot 0 \\ & + 4 \cdot 2 \cdot 2k + 4 \cdot 3 \cdot 0 + 4 \cdot 5 \cdot 0,13\end{aligned}$$

Ta có

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(XY) &= (-2) \cdot 0 \cdot 0,1 + (-2) \cdot 2 \cdot 0,15 + (-2) \cdot 3 \cdot 0,1 \\ &\quad + (-2) \cdot 5 \cdot 0 + 1 \cdot 0 \cdot 5k + 1 \cdot 2 \cdot 3k \\ &\quad + 1 \cdot 3 \cdot 0,05 + 1 \cdot 5 \cdot 0,07 + 4 \cdot 0 \cdot 0 \\ &\quad + 4 \cdot 2 \cdot 2k + 4 \cdot 3 \cdot 0 + 4 \cdot 5 \cdot 0,13 \\ &= 0 - 0,6 - 0,6 + 0 + 0 + 6k \\ &\quad + 0,15 + 0,35 + 0 + 16k + 0 + 2,6\end{aligned}$$

Ta có

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(XY) &= (-2) \cdot 0 \cdot 0,1 + (-2) \cdot 2 \cdot 0,15 + (-2) \cdot 3 \cdot 0,1 \\ &\quad + (-2) \cdot 5 \cdot 0 + 1 \cdot 0 \cdot 5k + 1 \cdot 2 \cdot 3k \\ &\quad + 1 \cdot 3 \cdot 0,05 + 1 \cdot 5 \cdot 0,07 + 4 \cdot 0 \cdot 0 \\ &\quad + 4 \cdot 2 \cdot 2k + 4 \cdot 3 \cdot 0 + 4 \cdot 5 \cdot 0,13 \\ &= 0 - 0,6 - 0,6 + 0 + 0 + 6k \\ &\quad + 0,15 + 0,35 + 0 + 16k + 0 + 2,6 \\ &= 22k + 1,9\end{aligned}$$

Ta có

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(XY) &= (-2) \cdot 0 \cdot 0,1 + (-2) \cdot 2 \cdot 0,15 + (-2) \cdot 3 \cdot 0,1 \\ &\quad + (-2) \cdot 5 \cdot 0 + 1 \cdot 0 \cdot 5k + 1 \cdot 2 \cdot 3k \\ &\quad + 1 \cdot 3 \cdot 0,05 + 1 \cdot 5 \cdot 0,07 + 4 \cdot 0 \cdot 0 \\ &\quad + 4 \cdot 2 \cdot 2k + 4 \cdot 3 \cdot 0 + 4 \cdot 5 \cdot 0,13 \\ &= 0 - 0,6 - 0,6 + 0 + 0 + 6k \\ &\quad + 0,15 + 0,35 + 0 + 16k + 0 + 2,6 \\ &= 22k + 1,9 \\ &= 22 \cdot 0,04 + 1,9\end{aligned}$$

Ta có

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(XY) &= (-2) \cdot 0 \cdot 0,1 + (-2) \cdot 2 \cdot 0,15 + (-2) \cdot 3 \cdot 0,1 \\ &\quad + (-2) \cdot 5 \cdot 0 + 1 \cdot 0 \cdot 5k + 1 \cdot 2 \cdot 3k \\ &\quad + 1 \cdot 3 \cdot 0,05 + 1 \cdot 5 \cdot 0,07 + 4 \cdot 0 \cdot 0 \\ &\quad + 4 \cdot 2 \cdot 2k + 4 \cdot 3 \cdot 0 + 4 \cdot 5 \cdot 0,13 \\ &= 0 - 0,6 - 0,6 + 0 + 0 + 6k \\ &\quad + 0,15 + 0,35 + 0 + 16k + 0 + 2,6 \\ &= 22k + 1,9 \\ &= 22 \cdot 0,04 + 1,9 \\ &= 2,78.\end{aligned}$$

Hiệp phương sai

$$\text{cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

Hiệp phương sai

$$\begin{aligned}\text{cov}(X, Y) &= \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \\ &= 2,78 - 0,58 \cdot 2,15\end{aligned}$$

Hiệp phương sai

$$\begin{aligned}\text{cov}(X, Y) &= \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \\ &= 2,78 - 0,58 \cdot 2,15 \\ &= 1,533.\end{aligned}$$

Hiệp phương sai

$$\begin{aligned}\text{cov}(X, Y) &= \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \\ &= 2,78 - 0,58 \cdot 2,15 \\ &= 1,533.\end{aligned}$$

Do đó

$$\mathbb{D}(2X - 3Y) = 4\mathbb{D}(X) + 9\mathbb{D}(Y) - 12\text{cov}(X, Y)$$

Hiệp phương sai

$$\begin{aligned}\text{cov}(X, Y) &= \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \\ &= 2,78 - 0,58 \cdot 2,15 \\ &= 1,533.\end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned}\mathbb{D}(2X - 3Y) &= 4\mathbb{D}(X) + 9\mathbb{D}(Y) - 12\text{cov}(X, Y) \\ &= 4 \cdot 4,8636 + 9 \cdot 3,1275 - 12 \cdot 1,533\end{aligned}$$

Hiệp phương sai

$$\begin{aligned}\text{cov}(X, Y) &= \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \\ &= 2,78 - 0,58 \cdot 2,15 \\ &= 1,533.\end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned}\mathbb{D}(2X - 3Y) &= 4\mathbb{D}(X) + 9\mathbb{D}(Y) - 12\text{cov}(X, Y) \\ &= 4 \cdot 4,8636 + 9 \cdot 3,1275 - 12 \cdot 1,533 \\ &= 29,2059.\end{aligned}$$

c) Ta có

$$\mathbb{P}(Y = 0|X = 1) = \frac{\mathbb{P}(X = 1, Y = 0)}{\mathbb{P}(X = 1)}$$

c) Ta có

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y = 0|X = 1) &= \frac{\mathbb{P}(X = 1, Y = 0)}{\mathbb{P}(X = 1)} \\ &= \frac{5k}{0,44}\end{aligned}$$

c) Ta có

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y = 0|X = 1) &= \frac{\mathbb{P}(X = 1, Y = 0)}{\mathbb{P}(X = 1)} \\ &= \frac{5k}{0,44} \\ &= \frac{0,2}{0,44}\end{aligned}$$

c) Ta có

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y = 0|X = 1) &= \frac{\mathbb{P}(X = 1, Y = 0)}{\mathbb{P}(X = 1)} \\ &= \frac{5k}{0,44} \\ &= \frac{0,2}{0,44} \\ &= \frac{20}{44},\end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(Y = 2|X = 1) = \frac{\mathbb{P}(X = 1, Y = 2)}{\mathbb{P}(X = 1)}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y = 2|X = 1) &= \frac{\mathbb{P}(X = 1, Y = 2)}{\mathbb{P}(X = 1)} \\ &= \frac{3k}{0,44}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y = 2|X = 1) &= \frac{\mathbb{P}(X = 1, Y = 2)}{\mathbb{P}(X = 1)} \\ &= \frac{3k}{0,44} \\ &= \frac{0,12}{0,44}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(Y = 2|X = 1) &= \frac{\mathbb{P}(X = 1, Y = 2)}{\mathbb{P}(X = 1)} \\
 &= \frac{3k}{0,44} \\
 &= \frac{0,12}{0,44} \\
 &= \frac{12}{44},
 \end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(Y = 3|X = 1) = \frac{\mathbb{P}(X = 1, Y = 3)}{\mathbb{P}(X = 1)}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y = 3|X = 1) &= \frac{\mathbb{P}(X = 1, Y = 3)}{\mathbb{P}(X = 1)} \\ &= \frac{0,05}{0,44}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y = 3|X = 1) &= \frac{\mathbb{P}(X = 1, Y = 3)}{\mathbb{P}(X = 1)} \\ &= \frac{0,05}{0,44} \\ &= \frac{5}{44},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y = 5|X = 1) &= \frac{\mathbb{P}(X = 1, Y = 5)}{\mathbb{P}(X = 1)} \\ &= \frac{0,07}{0,44} \\ &= \frac{7}{44}.\end{aligned}$$

Bảng phân bố xác suất của Y với điều kiện $X = 1$

Bảng phân bố xác suất của Y với điều kiện $X = 1$

$Y X = 1$	0	2	3	5
\mathbb{P}	$\frac{20}{44}$	$\frac{12}{44}$	$\frac{5}{44}$	$\frac{7}{44}$

Bảng phân bố xác suất của Y với điều kiện $X = 1$

$Y X = 1$	0	2	3	5
\mathbb{P}	$\frac{20}{44}$	$\frac{12}{44}$	$\frac{5}{44}$	$\frac{7}{44}$

Do đó

$$\mathbb{E}[Y|X = 1] = 0 \cdot \frac{20}{44} + 2 \cdot \frac{12}{44} + 3 \cdot \frac{5}{44} + 5 \cdot \frac{7}{44}$$

Bảng phân bố xác suất của Y với điều kiện $X = 1$

$Y X = 1$	0	2	3	5
\mathbb{P}	$\frac{20}{44}$	$\frac{12}{44}$	$\frac{5}{44}$	$\frac{7}{44}$

Do đó

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y|X = 1] &= 0 \cdot \frac{20}{44} + 2 \cdot \frac{12}{44} + 3 \cdot \frac{5}{44} + 5 \cdot \frac{7}{44} \\ &= \frac{74}{44}\end{aligned}$$

Bảng phân bố xác suất của Y với điều kiện $X = 1$

$Y X = 1$	0	2	3	5
\mathbb{P}	$\frac{20}{44}$	$\frac{12}{44}$	$\frac{5}{44}$	$\frac{7}{44}$

Do đó

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y|X = 1] &= 0 \cdot \frac{20}{44} + 2 \cdot \frac{12}{44} + 3 \cdot \frac{5}{44} + 5 \cdot \frac{7}{44} \\ &= \frac{74}{44} \\ &= \frac{37}{22}.\end{aligned}$$

Bài 2: Vectơ ngẫu nhiên liên tục hai chiều

Bài 2: Vectơ ngẫu nhiên liên tục hai chiều

1) Hàm mật độ xác suất của vectơ ngẫu nhiên liên tục hai chiều

Bài 2: Vectơ ngẫu nhiên liên tục hai chiều

1) Hàm mật độ xác suất của vectơ ngẫu nhiên liên tục hai chiều

- Vectơ ngẫu nhiên hai chiều (X, Y) được gọi là liên tục nếu tồn tại hàm $f(x, y) \geq 0$ sao cho

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^u \int_{-\infty}^v f(x, y) dx dy, \quad \forall (u, v) \in \mathbb{R}^2,$$

trong đó $F(x, y) = \mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y)$ là hàm phân bố xác suất của vectơ ngẫu nhiên hai chiều (X, Y) .

Bài 2: Vectơ ngẫu nhiên liên tục hai chiều

1) Hàm mật độ xác suất của vectơ ngẫu nhiên liên tục hai chiều

- Vectơ ngẫu nhiên hai chiều (X, Y) được gọi là liên tục nếu tồn tại hàm $f(x, y) \geq 0$ sao cho

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^u \int_{-\infty}^v f(x, y) dx dy, \quad \forall (u, v) \in \mathbb{R}^2,$$

trong đó $F(x, y) = \mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y)$ là hàm phân bố xác suất của vectơ ngẫu nhiên hai chiều (X, Y) .

- Hàm $f(x, y)$ được gọi là hàm mật độ xác suất của vectơ ngẫu nhiên liên tục hai chiều (X, Y) .

2) Một số tính chất

2) Một số tính chất

- $f(x, y) \geq 0$ và $f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}$ với mọi $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

2) Một số tính chất

- $f(x, y) \geq 0$ và $f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}$ với mọi $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
- $\mathbb{P}((X, Y) \in D) = \iint_D f(x, y) dx dy$ với $D \subset \mathbb{R}^2$.

2) Một số tính chất

- $f(x, y) \geq 0$ và $f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}$ với mọi $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
- $\mathbb{P}((X, Y) \in D) = \iint_D f(x, y) dx dy$ với $D \subset \mathbb{R}^2$.
- $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = 1$ hay $\iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy = 1$.

- Hàm mật độ xác suất của biến ngẫu nhiên X

- Hàm mật độ xác suất của biến ngẫu nhiên X

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy, \quad x \in \mathbb{R}$$

- Hàm mật độ xác suất của biến ngẫu nhiên X

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy, \quad x \in \mathbb{R}$$

- Hàm mật độ xác suất của biến ngẫu nhiên Y

- Hàm mật độ xác suất của biến ngẫu nhiên X

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy, \quad x \in \mathbb{R}$$

- Hàm mật độ xác suất của biến ngẫu nhiên Y

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx, \quad y \in \mathbb{R}.$$

- Các hàm mật độ xác suất có điều kiện

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)},$$

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)}.$$

- Hai biến ngẫu nhiên X, Y là độc lập khi và chỉ khi

$$f(x, y) = f_X(x)f_Y(y) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Ví dụ 1

Cho vectơ ngẫu nhiên 2 chiều (X, Y) có hàm mật độ xác suất

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2} \sin(x + y) & \text{nếu } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{nếu trái lại.} \end{cases}$$

Tìm hàm mật độ xác suất của biến ngẫu nhiên X .

Lời giải

Lời giải

Nếu $x < 0$ hoặc $x > \frac{\pi}{2}$ thì $f(x, y) = 0$ với mọi $y \in \mathbb{R}$, do đó

Lời giải

Nếu $x < 0$ hoặc $x > \frac{\pi}{2}$ thì $f(x, y) = 0$ với mọi $y \in \mathbb{R}$, do đó

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy$$

Lời giải

Nếu $x < 0$ hoặc $x > \frac{\pi}{2}$ thì $f(x, y) = 0$ với mọi $y \in \mathbb{R}$, do đó

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} 0 dy \end{aligned}$$

Lời giải

Nếu $x < 0$ hoặc $x > \frac{\pi}{2}$ thì $f(x, y) = 0$ với mọi $y \in \mathbb{R}$, do đó

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} 0 dy \\ &= 0. \end{aligned}$$

Nếu $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, ta có

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy$$

Nếu $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, ta có

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy$$

$$= \int_{-\infty}^0 f(x, y) dy + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x, y) dy + \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} f(x, y) dy$$

$$= \int_{-\infty}^0 0 dy + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \sin(x+y) dy + \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} 0 dy$$

$$= \int_{-\infty}^0 0 dy + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \sin(x+y) dy + \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} 0 dy$$

$$= 0 + \left[-\frac{1}{2} \cos(x+y) \right] \bigg|_{y=0}^{y=\frac{\pi}{2}} + 0$$

$$= \int_{-\infty}^0 0 dy + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \sin(x+y) dy + \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} 0 dy$$

$$= 0 + \left[-\frac{1}{2} \cos(x+y) \right] \bigg|_{y=0}^{y=\frac{\pi}{2}} + 0$$

$$= -\frac{1}{2} \cos \left(x + \frac{\pi}{2} \right) + \frac{1}{2} \cos x$$

$$= \int_{-\infty}^0 0dy + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \sin(x+y)dy + \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} 0dy$$

$$= 0 + \left[-\frac{1}{2} \cos(x+y) \right] \bigg|_{y=0}^{y=\frac{\pi}{2}} + 0$$

$$= -\frac{1}{2} \cos \left(x + \frac{\pi}{2} \right) + \frac{1}{2} \cos x$$

$$= \frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x$$

$$= \int_{-\infty}^0 0 dy + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \sin(x+y) dy + \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} 0 dy$$

$$= 0 + \left[-\frac{1}{2} \cos(x+y) \right] \bigg|_{y=0}^{y=\frac{\pi}{2}} + 0$$

$$= -\frac{1}{2} \cos \left(x + \frac{\pi}{2} \right) + \frac{1}{2} \cos x$$

$$= \frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x$$

$$= \frac{1}{2} (\sin x + \cos x).$$

Vậy hàm mật độ xác suất của X

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(\sin x + \cos x) & \text{nếu } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{nếu } x \notin \left[0; \frac{\pi}{2}\right]. \end{cases}$$

Ví dụ 2

Cho vectơ ngẫu nhiên 2 chiều (X, Y) có hàm mật độ xác suất

$$f(x, y) = \begin{cases} k(x^2 + y^2) & \text{nếu } x^2 + y^2 \leq 4, \\ 0 & \text{nếu } x^2 + y^2 > 4. \end{cases}$$

Tìm hằng số k và hàm mật độ xác suất của biến ngẫu nhiên X .

Lời giải

Lời giải

Đặt $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$, khi đó

$$f(x, y) = \begin{cases} k(x^2 + y^2) & \text{với } (x, y) \in D, \\ 0 & \text{với } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus D. \end{cases}$$

Sử dụng tính chất $\iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy = 1$ của hàm mật độ xác suất ta có

$$\begin{aligned} 1 &= \iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy = \iint_D f(x, y) dx dy + \iint_{\mathbb{R}^2 \setminus D} f(x, y) dx dy \\ &= \iint_D k(x^2 + y^2) dx dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 &= \iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy = \iint_D f(x, y) dx dy + \iint_{\mathbb{R}^2 \setminus D} f(x, y) dx dy \\ &= \iint_D k(x^2 + y^2) dx dy + \iint_{\mathbb{R}^2 \setminus D} 0 dx dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 &= \iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy = \iint_D f(x, y) dx dy + \iint_{\mathbb{R}^2 \setminus D} f(x, y) dx dy \\ &= \iint_D k(x^2 + y^2) dx dy + \iint_{\mathbb{R}^2 \setminus D} 0 dx dy \\ &= k \iint_D (x^2 + y^2) dx dy + 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
1 &= \iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy = \iint_D f(x, y) dx dy + \iint_{\mathbb{R}^2 \setminus D} f(x, y) dx dy \\
&= \iint_D k(x^2 + y^2) dx dy + \iint_{\mathbb{R}^2 \setminus D} 0 dx dy \\
&= k \iint_D (x^2 + y^2) dx dy + 0 \\
&= k \iint_D (x^2 + y^2) dx dy.
\end{aligned}$$

Đặt $I = \iint_D (x^2 + y^2) dx dy$, với $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$.

Khi đó $kI = 1$, như vậy để tìm k thì ta cần tính tích phân I .

Đặt $I = \iint_D (x^2 + y^2) dx dy$, với $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$.

Khi đó $kI = 1$, như vậy để tìm k thì ta cần tính tích phân I .

Chuyển sang tọa độ cực

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi. \end{cases}$$

Đặt $I = \iint_D (x^2 + y^2) dx dy$, với $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$.

Khi đó $kI = 1$, như vậy để tìm k thì ta cần tính tích phân I .
Chuyển sang tọa độ cực

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi. \end{cases}$$

Khi đó

$$I = \iint_{\Delta} r^3 dr d\varphi,$$

với

$$\Delta = \{(r, \varphi) : 0 \leq r \leq 2, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}.$$

Do đó

$$I = \int_0^2 \left[\int_0^{2\pi} r^3 d\varphi \right] dr$$

Do đó

$$I = \int_0^2 \left[\int_0^{2\pi} r^3 d\varphi \right] dr = \int_0^2 2\pi r^3 dr$$

Do đó

$$I = \int_0^2 \left[\int_0^{2\pi} r^3 d\varphi \right] dr = \int_0^2 2\pi r^3 dr = 2\pi \int_0^2 r^3 dr = 8\pi.$$

Từ $kI = 1$, ta suy ra $k = \frac{1}{8\pi}$.

Hàm mật độ xác suất của biến ngẫu nhiên X

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy.$$

Hàm mật độ xác suất của biến ngẫu nhiên X

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy.$$

• Nếu $|x| > 2$ thì $x^2 + y^2 > 4$ với mọi $y \in \mathbb{R}$. Do đó $f(x, y) = 0$ với mọi $y \in \mathbb{R}$. Vậy $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = 0$.

- Nếu $|x| \leq 2$, khi đó bất phương trình $x^2 + y^2 \leq 4$ tương đương với $-\sqrt{4 - x^2} \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}$

- Nếu $|x| \leq 2$, khi đó bất phương trình $x^2 + y^2 \leq 4$ tương đương với $-\sqrt{4 - x^2} \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}$ còn bất phương trình $x^2 + y^2 > 4$ tương đương với $y \notin [-\sqrt{4 - x^2}, \sqrt{4 - x^2}]$.

• Nếu $|x| \leq 2$, khi đó bất phương trình $x^2 + y^2 \leq 4$ tương đương với $-\sqrt{4 - x^2} \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}$ còn bất phương trình $x^2 + y^2 > 4$ tương đương với $y \notin [-\sqrt{4 - x^2}, \sqrt{4 - x^2}]$.

Do đó

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{8\pi}(x^2 + y^2) & \text{nếu } -\sqrt{4 - x^2} \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}, \\ 0 & \text{nếu } y \notin [-\sqrt{4 - x^2}, \sqrt{4 - x^2}]. \end{cases}$$

Vậy

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy$$

Vậy

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy \\ &= \int_{-\infty}^{-\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy + \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy + \int_{\sqrt{4-x^2}}^{+\infty} f(x, y) dy \end{aligned}$$

Vậy

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy \\ &= \int_{-\infty}^{-\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy + \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy + \int_{\sqrt{4-x^2}}^{+\infty} f(x, y) dy \\ &= \int_{-\infty}^{-\sqrt{4-x^2}} 0 dy + \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \frac{1}{8\pi} (x^2 + y^2) dy + \int_{\sqrt{4-x^2}}^{+\infty} 0 dy \end{aligned}$$

$$= 0 + \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \frac{1}{8\pi}(x^2 + y^2)dy + 0$$

$$= 0 + \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \frac{1}{8\pi}(x^2 + y^2)dy + 0$$
$$= \left[\frac{1}{8\pi} \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right) \right] \bigg|_{y=-\sqrt{4-x^2}}^{y=\sqrt{4-x^2}}$$

$$\begin{aligned}
&= 0 + \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \frac{1}{8\pi}(x^2 + y^2)dy + 0 \\
&= \left[\frac{1}{8\pi} \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right) \right] \bigg|_{y=-\sqrt{4-x^2}}^{y=\sqrt{4-x^2}} \\
&= \frac{1}{6\pi}(x^2 + 2)\sqrt{4 - x^2}.
\end{aligned}$$

Vậy

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{6\pi}(x^2 + 2)\sqrt{4 - x^2} & \text{nếu } |x| \leq 2, \\ 0 & \text{nếu } |x| > 2. \end{cases}$$