Bài 1: Ước lượng khoảng cho kỳ vọng của biến ngẫu nhiên

Bài 1: Ước lượng khoảng cho kỳ vọng của biến ngẫu nhiên

1) Tổng thể và mẫu

Bài 1: Ước lượng khoảng cho kỳ vọng của biến ngẫu nhiên

1) Tổng thể và mẫu

- Tổng thể là tập hợp các phần tử cùng mang một dấu hiệu nào đó, dấu hiệu này phụ thuộc vào mục đích nghiên cứu.

Bài 1: Ước lượng khoảng cho kỳ vọng của biến ngẫu nhiên

1) Tổng thể và mẫu

- Tổng thể là tập hợp các phần tử cùng mang một dấu hiệu nào đó, dấu hiệu này phụ thuộc vào mục đích nghiên cứu.
- Từ tổng thể lấy ra n phần tử, khi đó n phần tử này lập nên một mẫu. Mẫu này có kích thước là n.

Giả sử mẫu số liệu có kích thước n và nhận các giá trị có thể $x_1, x_2, \ldots, x_k$ với số lần lặp lại (tần số) $r_1, r_2, \ldots, r_k$ và được cho dưới dạng bảng sau

x_1	x_2	$\ldots$	x_k
r_1	r_2	$\ldots$	r_k

Giả sử mẫu số liệu có kích thước n và nhận các giá trị có thể $x_1, x_2, \ldots, x_k$ với số lần lặp lại (tần số) $r_1, r_2, \ldots, r_k$ và được cho dưới dạng bảng sau

x_1	x_2	$\ldots$	x_k
r_1	r_2	$\ldots$	r_k

Trung bình của mẫu số liệu

$$\overline{x} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} r_i x_i}{n}.$$

Phương sai của mẫu số liệu $s^2 = \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{k} r_i x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{k} r_i x_i\right)^2}{n}\right].$

Phương sai của mẫu số liệu $s^2 = \dfrac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{k} r_i x_i^2 - \dfrac{\left(\sum_{i=1}^{k} r_i x_i\right)^2}{n}\right]$.

$s = \sqrt{s^2}$ là độ lệch tiêu chuẩn của mẫu số liệu.

Trường hợp mẫu số liệu được cho dưới dạng bảng

Khoảng $x_i - x_{i+1}$	$x_1 - x_2$	$x_2 - x_3$	$\dots$	$x_k - x_{k+1}$
Tần số r_i	r_1	r_2	$\dots$	r_k

.

Trường hợp mẫu số liệu được cho dưới dạng bảng

Khoảng $x_i - x_{i+1}$	$x_1 - x_2$	$x_2 - x_3$	$\ldots$	$x_k - x_{k+1}$
Tần số r_i	r_1	r_2	$\ldots$	r_k

.

Khi đó ta có đưa bảng trên về dạng

x_1^0	x_2^0	$\ldots$	x_k^0
r_1	r_2	$\ldots$	r_k

Trường hợp mẫu số liệu được cho dưới dạng bảng

Khoảng $x_i - x_{i+1}$	$x_1 - x_2$	$x_2 - x_3$	$\dots$	$x_k - x_{k+1}$
Tần số r_i	r_1	r_2	$\dots$	r_k

.

Khi đó ta có đưa bảng trên về dạng

x_1^0	x_2^0	$\dots$	x_k^0
r_1	r_2	$\dots$	r_k

trong đó x_i^0 là điểm giữa của khoảng $x_i - x_{i+1}$ rồi tính như ở trường hợp trước.

Giả sử biến ngẫu nhiên X có phân bố chuẩn nhưng ta chưa biết kỳ vọng $\mathbb{E}(X) = \mu$ của X. Ta tìm khoảng tin cậy của μ.

Trường hợp 1: Biết phương sai $\mathbb{D}(X) = \sigma^2$ hay biết độ lệch tiêu chuẩn $\sigma(X) = \sigma$

Giả sử biến ngẫu nhiên X có phân bố chuẩn nhưng ta chưa biết kỳ vọng $\mathbb{E}(X) = \mu$ của X. Ta tìm khoảng tin cậy của μ.

Trường hợp 1: Biết phương sai $\mathbb{D}(X) = \sigma^2$ hay biết độ lệch tiêu chuẩn $\sigma(X) = \sigma$

Khoảng tin cậy của μ với độ tin cậy $\beta = 1 - \alpha$ là

$$(\overline{x} - \varepsilon, \overline{x} + \varepsilon),$$

trong đó $u_{\frac{\alpha}{2}}$ là giá trị tới hạn chuẩn mức $\dfrac{\alpha}{2}$ của phân bố chuẩn tắc, $\varepsilon = u_{\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ là độ chính xác.

Ví dụ 1

Khối lượng sản phẩm là biến ngẫu nhiên có phân bố chuẩn với độ lệch tiêu chuẩn $\sigma = 1$. Cân thử 25 sản phẩm ta thu được kết quả sau

Khối lượng	18	19	20	21
Số sản phẩm	3	5	15	2

.

Hãy ước lượng khối lượng trung bình của sản phẩm bằng khoảng tin cậy với độ tin cậy $\beta = 95\%$.

Lời giải

Lời giải

Ta có

$$\sum_{i=1}^{4} r_i x_i = 491$$

Lời giải

Ta có

$$\sum_{i=1}^{4} r_i x_i = 491 \Rightarrow \overline{x} = \frac{491}{25} = 19,64.$$

Lời giải

Ta có
$$\sum_{i=1}^{4} r_i x_i = 491 \Rightarrow \overline{x} = \frac{491}{25} = 19,64.$$
Độ tin cậy $1-\alpha = 0,95$, suy ra $\alpha = 0,05$. Khi đó $\dfrac{\alpha}{2} = 0,025$. Tra bảng ta được $u_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96$.

Lời giải

Ta có
$$\sum_{i=1}^{4} r_i x_i = 491 \Rightarrow \overline{x} = \frac{491}{25} = 19,64.$$
Độ tin cậy $1-\alpha = 0,95$, suy ra $\alpha = 0,05$. Khi đó $\dfrac{\alpha}{2} = 0,025$. Tra bảng ta được $u_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96$.

Độ chính xác của ước lượng

Lời giải

Ta có

$$\sum_{i=1}^{4} r_i x_i = 491 \Rightarrow \overline{x} = \frac{491}{25} = 19,64.$$

Độ tin cậy $1-\alpha = 0,95$, suy ra $\alpha = 0,05$. Khi đó $\dfrac{\alpha}{2} = 0,025$. Tra bảng ta được $u_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96$.

Độ chính xác của ước lượng

$$\varepsilon = u_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96 \cdot \frac{1}{\sqrt{25}} = \frac{1,96}{5} = 0,392.$$

Lời giải

Ta có

$$\sum_{i=1}^{4} r_i x_i = 491 \Rightarrow \overline{x} = \frac{491}{25} = 19,64.$$

Độ tin cậy $1-\alpha = 0,95$, suy ra $\alpha = 0,05$. Khi đó $\dfrac{\alpha}{2} = 0,025$. Tra bảng ta được $u_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96$.

Độ chính xác của ước lượng

$$\varepsilon = u_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96 \cdot \frac{1}{\sqrt{25}} = \frac{1,96}{5} = 0,392.$$

Khoảng tin cậy cho khối lượng trung bình của sản phẩm

$$\begin{aligned}(\overline{x} - \varepsilon, \overline{x} + \varepsilon) &= (19,64 - 0,392; 19,64 + 0,392)\\ &= (19,248; 20,032).\end{aligned}$$

Trường hợp 2: $n \geq 30$, phương sai chưa biết

Khoảng tin cậy của μ với độ tin cậy $\beta = 1 - \alpha$ là

$$(\overline{x} - \varepsilon, \overline{x} + \varepsilon),$$

trong đó $\varepsilon = u_{\frac{\alpha}{2}} \dfrac{s}{\sqrt{n}}$ là độ chính xác.

Ví dụ 2

Trọng lượng của một loại sản phẩm là một biến ngẫu nhiên có phân bố chuẩn. Cân thử 100 sản phẩm loại này ta thu được kết quả

Trọng lượng (g)	40 – 42	42 – 44	44 – 46	46 – 48	48 – 50	50 – 52
Số sản phẩm	7	13	25	35	15	5

Với độ tin cậy 95%, hãy tìm khoảng tin cậy của trọng lượng trung bình của loại sản phẩm trên.

Lời giải

Lời giải

Ta có bảng

x_i	41	43	45	47	49	51
r_i	7	13	25	35	15	5

Lời giải

Ta có bảng

x_i	41	43	45	47	49	51
r_i	7	13	25	35	15	5

Khi đó

$$\sum_{i=1}^{6} r_i x_i = 4606,$$

Lời giải

Ta có bảng

x_i	41	43	45	47	49	51
r_i	7	13	25	35	15	5

Khi đó

$$\sum_{i=1}^{6} r_i x_i = 4606, \quad \sum_{i=1}^{6} r_i x_i^2 = 212764.$$

Lời giải

Ta có bảng

x_i	41	43	45	47	49	51
r_i	7	13	25	35	15	5

Khi đó

$$\sum_{i=1}^{6} r_i x_i = 4606, \quad \sum_{i=1}^{6} r_i x_i^2 = 212764.$$

Do đó

$$\overline{x} = \frac{4606}{100} = 46,06,$$

Lời giải

Ta có bảng

x_i	41	43	45	47	49	51
r_i	7	13	25	35	15	5

Khi đó

$$\sum_{i=1}^{6} r_i x_i = 4606, \quad \sum_{i=1}^{6} r_i x_i^2 = 212764.$$

Do đó

$$\overline{x} = \frac{4606}{100} = 46,06,$$

$$s^2 = \frac{1}{99}\left(212764 - \frac{4606^2}{100}\right)$$

Lời giải

Ta có bảng

x_i	41	43	45	47	49	51
r_i	7	13	25	35	15	5

Khi đó

$$\sum_{i=1}^{6} r_i x_i = 4606, \quad \sum_{i=1}^{6} r_i x_i^2 = 212764.$$

Do đó

$$\overline{x} = \frac{4606}{100} = 46,06,$$

$$s^2 = \frac{1}{99}\left(212764 - \frac{4606^2}{100}\right) = \frac{1699}{275}$$

Lời giải

Ta có bảng

x_i	41	43	45	47	49	51
r_i	7	13	25	35	15	5

Khi đó

$$\sum_{i=1}^{6} r_i x_i = 4606, \quad \sum_{i=1}^{6} r_i x_i^2 = 212764.$$

Do đó

$$\overline{x} = \frac{4606}{100} = 46,06,$$

$$s^2 = \frac{1}{99}\left(212764 - \frac{4606^2}{100}\right) = \frac{1699}{275} \Rightarrow s \approx 2,49.$$

Độ tin cậy 95%, suy ra $1-\alpha = 0,95$ hay $\alpha = 0,05$. Khi đó $\dfrac{\alpha}{2} = 0,025$, do đó $u_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96$.

Độ tin cậy 95%, suy ra $1-\alpha=0,95$ hay $\alpha=0,05$. Khi đó $\dfrac{\alpha}{2}=0,025$, do đó $u_{\frac{\alpha}{2}}=1,96$.
Độ chính xác của ước lượng

Độ tin cậy 95%, suy ra $1-\alpha = 0,95$ hay $\alpha = 0,05$. Khi đó $\dfrac{\alpha}{2} = 0,025$, do đó $u_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96$.

Độ chính xác của ước lượng

$$\varepsilon = u_{\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} = 1,96 \cdot \frac{2,49}{\sqrt{100}} \approx 0,49.$$

Khoảng tin cậy của trọng lượng trung bình của loại sản phẩm

Độ tin cậy 95%, suy ra $1-\alpha = 0,95$ hay $\alpha = 0,05$. Khi đó $\dfrac{\alpha}{2} = 0,025$, do đó $u_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96$.
Độ chính xác của ước lượng

$$\varepsilon = u_{\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} = 1,96 \cdot \frac{2,49}{\sqrt{100}} \approx 0,49.$$

Khoảng tin cậy của trọng lượng trung bình của loại sản phẩm

$$\begin{aligned}(\overline{x}-\varepsilon, \overline{x}+\varepsilon) &= (46,06-0,49; 46,06+0,49)\\ &= (45,57; 46,55).\end{aligned}$$

Trường hợp 3: $n < 30$, phương sai chưa biết

Khoảng tin cậy với độ tin cậy $\beta = 1 - \alpha$ là

$$(\overline{x} - \varepsilon, \overline{x} + \varepsilon),$$

trong đó $\varepsilon = t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\dfrac{s}{\sqrt{n}}$, $t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ là giá trị tới hạn Student với $n-1$ bậc tự do mức $\dfrac{\alpha}{2}$.

Ví dụ 3

Để ước lượng tuổi thọ trung bình một loại sản phẩm, người ta chọn ra 26 sản phẩm và thu được kết quả sau:

Tuổi thọ (giờ)	190	195	198	200	204	205
Số sản phẩm	5	4	2	8	6	1

.

Giả sử tuổi thọ sản phẩm tuân theo phân bố chuẩn, hãy ước lượng tuổi thọ trung bình của sản phẩm trên với độ tin cậy 95%.

Lời giải

Ta có

$$\sum_{i=1}^{6} r_i x_i = 5155,$$

Lời giải

Ta có

$$\sum_{i=1}^{6} r_i x_i = 5155, \quad \sum_{i=1}^{6} r_i x_i^2 = 1022729.$$

Lời giải

Ta có

$$\sum_{i=1}^{6} r_i x_i = 5155, \quad \sum_{i=1}^{6} r_i x_i^2 = 1022729.$$

Do đó

$$\overline{x} = \frac{5155}{26} \approx 198,27,$$

Lời giải

Ta có

$$\sum_{i=1}^{6} r_i x_i = 5155, \quad \sum_{i=1}^{6} r_i x_i^2 = 1022729.$$

Do đó

$$\overline{x} = \frac{5155}{26} \approx 198,27,$$

$$s^2 = \frac{1}{25}\left(1022729 - \frac{5155^2}{26}\right)$$

Lời giải

Ta có

$$\sum_{i=1}^{6} r_i x_i = 5155, \quad \sum_{i=1}^{6} r_i x_i^2 = 1022729.$$

Do đó

$$\overline{x} = \frac{5155}{26} \approx 198,27,$$

$$s^2 = \frac{1}{25}\left(1022729 - \frac{5155^2}{26}\right) = \frac{16929}{650}$$

Lời giải

Ta có

$$\sum_{i=1}^{6} r_i x_i = 5155, \quad \sum_{i=1}^{6} r_i x_i^2 = 1022729.$$

Do đó

$$\begin{aligned}
\overline{x} &= \frac{5155}{26} \approx 198,27,\\
s^2 &= \frac{1}{25}\left(1022729 - \frac{5155^2}{26}\right)\\
&= \frac{16929}{650}\\
\Rightarrow s &= \sqrt{\frac{16929}{650}}
\end{aligned}$$

Lời giải

Ta có

$$\sum_{i=1}^{6} r_i x_i = 5155, \quad \sum_{i=1}^{6} r_i x_i^2 = 1022729.$$

Do đó

$$\begin{aligned}
\overline{x} &= \frac{5155}{26} \approx 198,27, \\
s^2 &= \frac{1}{25}\left(1022729 - \frac{5155^2}{26}\right) \\
&= \frac{16929}{650} \\
\Rightarrow s &= \sqrt{\frac{16929}{650}} \\
&\approx 5,103.
\end{aligned}$$

Độ tin cậy $1-\alpha = 0,95$, suy ra $\alpha = 0,05$. Tra bảng ta được $t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) = t_{0,025}(25) = 2,060$.

Độ tin cậy $1-\alpha = 0,95$, suy ra $\alpha = 0,05$. Tra bảng ta được $t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) = t_{0,025}(25) = 2,060$.
Độ chính xác của ước lượng

Độ tin cậy $1-\alpha = 0,95$, suy ra $\alpha = 0,05$. Tra bảng ta được $t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) = t_{0,025}(25) = 2,060$.
Độ chính xác của ước lượng

$$\varepsilon = t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}} = 2,060 \cdot \frac{5,103}{\sqrt{26}} \approx 2,06.$$

Vậy khoảng tin cậy về tuổi thọ trung bình của sản phẩm

$$(\overline{x}-\varepsilon, \overline{x}+\varepsilon) = (198,27-2,06; 198,27+2,06)$$
$$= (196,21; 200,33).$$

Bài 2: Ước lượng tỷ lệ

Bài 2: Ước lượng tỷ lệ

• Giả sử tổng thể ta đang nghiên cứu gồm N phần tử, trong đó có M phần tử có tính chất A nào đó. Khi đó $p = \dfrac{M}{N}$ là tỷ lệ các phần tử có tính chất A của tổng thể. Thông thường p chưa biết, cần ước lượng p.

• Gọi f là tỷ lệ phần tử mang tính chất A trong mẫu kích thước n chọn ra từ tổng thể.

• Gọi f là tỷ lệ phần tử mang tính chất A trong mẫu kích thước n chọn ra từ tổng thể.
Đặt
$$\varepsilon = u_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}.$$
Khoảng tin cậy cho tỷ lệ phần tử mang tính chất A với độ tin cậy $\beta = 1-\alpha$ là $(f-\varepsilon, f+\varepsilon)$.

• Gọi f là tỷ lệ phần tử mang tính chất A trong mẫu kích thước n chọn ra từ tổng thể.
Đặt

$$\varepsilon = u_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}.$$

Khoảng tin cậy cho tỷ lệ phần tử mang tính chất A với độ tin cậy $\beta = 1-\alpha$ là $(f-\varepsilon, f+\varepsilon)$.
Điều kiện của n và f

$$\begin{cases} nf > 10 \\ n(1-f) > 10 \end{cases}$$

Ví dụ 1

Người ta lấy ngẫu nhiên từ lô hàng ra 200 sản phẩm thì thấy có 182 sản phẩm đạt yêu cầu chất lượng.

a) Với độ tin cậy 95%, hãy ước lượng tỷ lệ sản phẩm đạt yêu cầu chất lượng của lô hàng.

b) Giả sử lô hàng có 6000 sản phẩm, với độ tin cậy 95% hãy ước lượng số sản phẩm đạt yêu cầu của cả lô hàng.

Lời giải

Lời giải

a) Ta có $n = 200$, $f = \dfrac{182}{200} = 0,91$.

Lời giải

a) Ta có $n = 200$, $f = \dfrac{182}{200} = 0,91$.

Ta thấy

$$\begin{cases} nf = 182 > 10 \\ n(1-f) = 18 > 10 \end{cases}$$

Độ tin cậy $1 - \alpha = 0,95$, suy ra $\alpha = 0,05$. Khi đó $\dfrac{\alpha}{2} = 0,025$. Tra bảng ta được $u_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96$.

Độ chính xác của ước lượng

Độ chính xác của ước lượng

$$\varepsilon = u_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}} = 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,91(1-0,91)}{200}} \approx 0,04.$$

Khoảng tin cậy cho tỷ lệ sản phẩm đạt yêu cầu chất lượng của lô hàng

Độ chính xác của ước lượng

$$\varepsilon = u_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{f(1-f)}{n}} = 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,91(1-0,91)}{200}} \approx 0,04.$$

Khoảng tin cậy cho tỷ lệ sản phẩm đạt yêu cầu chất lượng của lô hàng

$$(f-\varepsilon; f+\varepsilon) = (0,91-0,04; 0,91+0,04) = (0,87; 0,95).$$

b) Gọi M là số sản phẩm đạt yêu cầu của cả lô hàng. Khi đó tỷ lệ sản phẩm đạt yêu cầu chất lượng của lô hàng là $\dfrac{M}{6000}$.

b) Gọi M là số sản phẩm đạt yêu cầu của cả lô hàng. Khi đó tỷ lệ sản phẩm đạt yêu cầu chất lượng của lô hàng là $\dfrac{M}{6000}$.

Theo câu a) ta có

$$0,87 < \frac{M}{6000} < 0,95 \Longleftrightarrow 5220 < M < 5700.$$