Hướng dẫn giải Bài tập nộp 1

- - - - - Đề thi Giữa kỳ học kỳ 1 năm học 2022-2023 - ca 1 - - - - -

Bài 1 (Bài 1 - đề thi giữa kỳ hk1 - 2022-2023 - ca 1).
Một bài báo được đăng trên trang Vietnamnet.vn ngày 11/10 với tiêu đề "Bộ GD-ĐT đề nghị ..." có đăng số liệu của Tổng cục Thống kê tại Bác cáo điều tra lao động việc làm năm 2020. Theo đó, tỷ lệ thất nghiệp trong lực lượng lao động là $2,19\%$. Tỷ lệ lao động có trình độ cao đẳng, đại học trở lên là $14,9\%$. Trong số những người thất nghiệp, thì tỷ lệ người có trình độ cao đẳng, đại học trở lên chiếm $30,8\%$.
Chọn ngẫu nhiên một người trong lực lượng lao động.

(a) Xác suất người này có trình độ cao đẳng, đại học trở lên **và** thất nghiệp là bao nhiêu?

(b) Xác suất người này có trình độ cao đẳng, đại học trở lên **hoặc** thất nghiệp là bao nhiêu?

(c) Nếu **biết** người này có trình độ cao đẳng, đại học trở lên thì xác suất người này thất nghiệp là bao nhiêu?

(d) Nếu **biết** người này không thất nghiệp, thì xác suất người này có trình độ cao đẳng, đại học trở lên là bao nhiêu?

Hướng dẫn: Phép thử ngẫu nhiên: chọn ngẫu nhiên một người trong lực lượng lao động.

Gọi: A là biến cố "người lao động có trình độ cao đẳng, đại học trở lên".

B là biến cố "người lao động thất nghiệp".

Theo giả thiết bài toán, ta có:

$$\mathbb{P}(A) = 14,9\% = 0,149, \quad \mathbb{P}(B) = 2,19\% = 0,0219 \quad \text{và} \quad \mathbb{P}(A|B) = 30,8\% = 0,308.$$

■ (a) Xác suất người này có trình độ cao đẳng, đại học trở lên **và** thất nghiệp là:

$$\mathbb{P}(A.B) \equiv \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A|B).\mathbb{P}(B) = 0,308 \times 0,0219 \approx 0,0067.$$

■ (b) Xác suất người này có trình độ cao đẳng, đại học trở lên **hoặc** thất nghiệp là:

$$\mathbb{P}(A \cup B) \equiv \mathbb{P}(A + B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A.B) = 0,149 + 0,0219 - \big(0,308 \times 0,0219\big) \approx 0,1642.$$

■ (c) Nếu **biết** người này có trình độ cao đẳng, đại học trở lên thì xác suất người này thất nghiệp là:

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A|B).\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{0,308 \times 0,0219}{0,149} \approx 0,0453 \ .$$

■ (d) Nếu **biết** người này không thất nghiệp thì xác suất người này có trình độ cao đẳng, đại học trở lên là:

$$\mathbb{P}\left(A|\overline{B}\right) = \frac{\mathbb{P}\left(\overline{B} \cap A\right)}{\mathbb{P}(\overline{B})} = \frac{\mathbb{P}\left(\overline{B}.A\right)}{\mathbb{P}(\overline{B})} = \frac{\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B.A)}{1 - \mathbb{P}(B)} = \frac{0.149 - 0.308 \times 0.0219}{1 - 0.0219} \approx 0.1454 \ ,$$

(phần này giải thích thêm để giúp các bạn hiểu bài, không cần trình bày trong bài làm)

vì ta có $A = A.B + A.\overline{B}$ mà $(A.B) \cap (A.\overline{B}) = \emptyset$, nên áp dụng công thức cộng xác suất

ta được $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A.B) + \mathbb{P}(A.\overline{B}) - \mathbb{P}\Big((A.B) \cap (A.\overline{B})\Big) = \mathbb{P}(A.B) + \mathbb{P}(A.\overline{B}) - \mathbb{P}(\emptyset)$

suy ra $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A.B) + \mathbb{P}(A.\overline{B})$,

□

Bài 2 (Bài 2 - đề thi giữa kỳ hk1 - 2022-2023 - ca 1).
Thời gian cần thiết để sinh viên hoàn thành một bài kiểm tra 60 phút là một biến ngẫu nhiên liên tục X (đơn vị: giờ) với hàm mật độ xác suất cho bởi

$$f(x) = \begin{cases} cx^2 + x & , \ 0 \le x \le 1, \\ 0 & , \ \text{nơi khác} . \end{cases}$$

(a) Tìm c.

(b) Tìm xác suất để một sinh viên được chọn ngẫu nhiên sẽ hoàn thành trong ít hơn 30 phút.

(c) Cho biết sinh viên A cần ít nhất 15 phút để hoàn thành bài kiểm tra, tìm xác suất để sinh viên A sẽ cần ít nhất 30 phút để hoàn thành.

Hướng dẫn: ■ (a) Để hàm f đã cho là hàm mật độ xác suất, ta cần tìm số c sao cho

$$f(x) \ge 0, \ \forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{và} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \ .$$

• Ta có:
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{+\infty} f(x)dx$$
$$= \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{1} (c.x^2 + x)dx + \int_{1}^{+\infty} 0dx = \left(\frac{c}{3}.x^3 + \frac{1}{2}.x^2\right)\Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{c}{3} + \frac{1}{2} \ ,$$
mà $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ nên $\frac{c}{3} + \frac{1}{2} = 1$ do đó $c = \frac{3}{2}$.

• Ta thấy $f(x) =$ với mọi $x < 0$ hoặc $x > 1$.
Xét $0 \le x \le 1$, với $c = \frac{3}{2}$ ta có $f(x) = \frac{3}{2}.x^2 + x = x.\left(\frac{3}{2}.x + 1\right) \ge 0$ với mọi $0 \le x \le 1$.
Vậy với $c = \frac{3}{2}$ thì hàm f đã cho là hàm mật độ xác suất.

■ (b) Theo đề bài, b.n.n. X (đv: giờ) thể hiện thời gian cần thiết để một sinh viên hoàn thành một bài kiểm tra
(thời gian tối đa được phép làm bài kiểm tra là 60 phút,
còn thời gian để mỗi sinh viên hoàn thành bài thi của mình có thể khác nhau, nằm trong khoảng 0 đến 60 phút),
Ta có 30 phút $= \frac{30}{60}$giờ $= \frac{1}{2}$ giờ.
Với X là b.n.n liên tục có hàm mật độ xác suất f, nên xác suất để một sinh viên sẽ hoàn thành trong ít hơn 30 phút là

$$\mathbb{P}\left(X < \frac{1}{2}\right) = \int_{-\infty}^{\frac{1}{2}} f(x)dx = \int_{\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{\frac{1}{2}} f(x)dx = \int_{\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{3}{2}x^2 + x\right)dx = \left(\frac{1}{2}.x^3 + \frac{1}{2}.x^2\right)\Big|_{x=0}^{x=\frac{1}{2}} = 0,1875 \ .$$

■ (c) Biết sinh viên A cần ít nhất 15 phút để hoàn thành bài kiểm tra, thì xác suất để sinh viên A sẽ cần ít nhất 30 phút để hoàn thành là

$$\mathbb{P}\left(X \ge \frac{30}{60} \,\Big|\, X \ge \frac{15}{60}\right) = \frac{\mathbb{P}\left(\left(X \ge \frac{30}{60}\right) \bigcap \left(X \ge \frac{15}{60}\right)\right)}{\mathbb{P}\left(X \ge \frac{15}{60}\right)} = \frac{\mathbb{P}\left(X \ge \frac{30}{60}\right)}{\mathbb{P}\left(X \ge \frac{15}{60}\right)};$$

▷ Ta có:
$$\mathbb{P}\left(X \ge \frac{30}{60}\right) = \mathbb{P}\left(X \ge \frac{1}{2}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(X < \frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{3}{16} = \frac{13}{16},$$
và
$$\mathbb{P}\left(X \ge \frac{15}{60}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(X < \frac{15}{60}\right) = 1 - \int_{-\infty}^{\frac{15}{60}} f(x)dx = 1 - \int_{0}^{\frac{15}{60}} \left(\frac{3}{2}x^2 + x\right)dx = 1 - \left(\frac{1}{2}.x^3 + \frac{1}{2}.x^2\right)\Big|_{x=0}^{x=\frac{1}{4}} = \frac{123}{128} \ .$$

Suy ra $\mathbb{P}\left(X \ge \frac{30}{60} \,\Big|\, X \ge \frac{15}{60}\right) = \dfrac{\mathbb{P}\left(X \ge \frac{30}{60}\right)}{\mathbb{P}\left(X \ge \frac{15}{60}\right)} = \dfrac{\frac{13}{16}}{\frac{123}{128}} = \dfrac{13 \times 8}{123} \approx 0,8455.$ □

Bài 3 (Bài 3 - đề thi giữa kỳ hk1 - 2022-2023 - ca 1).
Đường kính của một sợi bán dẫn được giả sử có phân phối chuẩn với trung bình $0,5$ μm và độ lệch chuẩn $0,05$ μm.

(a) Tính xác suất để đường kính của một sợi lớn hơn $0,62$ μm.

(b) Tính xác suất để đường kính của một sợi nằm giữa $0,47$ và $0,63$ μm.

(c) Đường kính sợi của 90% mẫu nhỏ hơn giá trị nào? (*Tức là, tìm x sao cho* $\mathbb{P}\big(X < x\big) = 0,9$)

Hướng dẫn:
Ta quan tâm đường kính của một sợi bán dẫn. Gọi Y là b.n.n. thể hiện đường kính của một sợi bán dẫn. Theo đề bài, Y có phân phối chuẩn, $Y \sim \mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$ với trung bình $\mu = 0,5$ và độ lệch chuẩn $\sigma = 0,05$.

■ a) Xác suất một sợi bán dẫn được chọn ngẫu nhiên có đường kính lớn hơn $0,62$ μm là

$$\mathbb{P}\big(Y \geq 0,62\big) = 1 - \mathbb{P}\big(Y < 0,62\big) = 1 - \mathbb{P}\Big(\frac{Y-\mu}{\sigma} \leq \frac{0,62-\mu}{\sigma}\Big) = 1 - \mathbb{P}\Big(Z \leq \frac{0,62-\mu}{\sigma}\Big) \quad (\text{ với } Z \sim \mathcal{N}(0;1))$$
$$= 1 - \Phi\Big(\frac{0,62-\mu}{\sigma}\Big) = 1 - \Phi\Big(\frac{0,62-0,5}{0,05}\Big) = 1 - \Phi(2.4) \approx 1 - 0,9918 = 0,0082 \ .$$

■ (b) Xác suất để đường kính của một sợi nằm giữa $0,47$ và $0,63$ μm là

$$\mathbb{P}(0,47 \leq Y \leq 0,63) = \mathbb{P}\Big(\frac{0,47-\mu}{\sigma} \leq \frac{Y-\mu}{\sigma} \leq \frac{0,63-\mu}{\sigma}\Big) = \mathbb{P}\Big(\frac{0,47-\mu}{\sigma} \leq Z \leq \frac{0,63-\mu}{\sigma}\Big)$$
$$= \Phi\Big(\frac{0,63-\mu}{\sigma}\Big) - \Phi\Big(\frac{0,47-\mu}{\sigma}\Big) = \Phi\Big(\frac{0,63-0,5}{0,05}\Big) - \Phi\Big(\frac{0,47-0,5}{0,05}\Big)$$
$$= \Phi(2,6) - \Phi(-0,6) = \Phi(2,6) - \Big[1 - \Phi(0,6)\Big] = \Phi(2,6) + \Phi(0,6) - 1 \approx 0,9953 + 0,7257 - 1 = 0,721.$$

■ (c) Đường kính sợi của 90% mẫu nhỏ hơn giá trị nào $\Leftrightarrow$ tìm số $a > 0$ sao cho $\mathbb{P}(Y < a) = 90\% = 0,9$.
Ta có

$$\mathbb{P}(Y < a) = \mathbb{P}\Big(\frac{Y-\mu}{\sigma} < \frac{a-\mu}{\sigma}\Big) = \Phi\Big(\frac{a-\mu}{\sigma}\Big)$$

cho nên

$$\mathbb{P}(Y < a) = 0,9 \ \Leftrightarrow \ \Phi\Big(\frac{a-\mu}{\sigma}\Big) = 0,9 \ \Leftrightarrow \ \frac{a-\mu}{\sigma} = \Phi^{-1}(0,9)$$
$$\Leftrightarrow \ a = \mu + \sigma \times \Phi^{-1}(0,9) \approx 0,5 + 0,05 \times 1,285 \approx 0,5643 \ .$$

Vậy đường kính sợi của 90% mẫu sợi bán dẫn nhỏ hơn giá trị $a = 0,5643$ μm. □

----- Đề thi Giữa kỳ học kỳ 1 năm học 2022-2023 - ca 2 -----

Bài 4 (Bài 1 - đề thi giữa kỳ hk1 - 2022-2023 - ca 2)**.**
Một bài báo đăng tỷ lệ thất nghiệp trong lực lượng lao động là $2,19\%$. Tỷ lệ lao động có trình độ cao đẳng, đại học trở lên là $14,9\%$. Trong số những người thất nghiệp, thì tỷ lệ người có trình độ cao đẳng, đại học trở lên chiếm $30,8\%$. Chọn ngẫu nhiên một người trong lực lượng lao động.

(a) Xác suất người này có trình độ cao đẳng, đại học trở lên **và KHÔNG** thất nghiệp là bao nhiêu?

(b) Xác suất người này có trình độ cao đẳng, đại học trở lên **hoặc KHÔNG** thất nghiệp là bao nhiêu?

(c) Nếu **biết** người này có trình độ cao đẳng, đại học trở lên thì xác suất người này thất nghiệp là bao nhiêu?

(d) Nếu **biết** người này không thất nghiệp, tính xác suất người này có trình độ cao đẳng, đại học trở lên?

Hướng dẫn: Phép thử ngẫu nhiên: chọn ngẫu nhiên một người trong lực lượng lao động.

Gọi: A là biến cố "người lao động có trình độ cao đẳng, đại học trở lên".

B là biến cố "người lao động thất nghiệp".

Theo giả thiết bài toán, ta có:

$$\mathbb{P}(A) = 14.9\% = 0.149, \quad \mathbb{P}(B) = 2.19\% = 0.0219 \quad \text{và} \quad \mathbb{P}(A|B) = 30.8\% = 0.308.$$

■ (a) Xác suất người này có trình độ cao đẳng, đại học trở lên và **KHÔNG** thất nghiệp là:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(A\cap\overline{B}\right) = \mathbb{P}\left(A.\overline{B}\right) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A|B).\mathbb{P}(B)\\ = 0.149 - 0.308\times 0.0219 \approx 0.1423.\end{aligned}$$

■ (b) Xác suất người này có trình độ cao đẳng, đại học trở lên hoặc **KHÔNG** thất nghiệp là:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(A\cup\overline{B}\right) = \mathbb{P}\left(A+\overline{B}\right) &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}\left(\overline{B}\right) - \mathbb{P}\left(A\cap\overline{B}\right)\\ &= 0.149 + (1-0.0219) - \big(0.149 - 0.308\times 0.0219\big)\\ &= 1 - 0.692\times 0.0219 \approx 0.9848.\end{aligned}$$

■ (c) Nếu **biết** người này có trình độ cao đẳng, đại học trở lên thì xác suất người này thất nghiệp là:

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(B\cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A|B).\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{0.308\times 0.0219}{0.149} \approx 0.0453.$$

■ (d) Nếu **biết** người này không thất nghiệp thì xác suất người này có trình độ cao đẳng, đại học trở lên là:

$$\mathbb{P}\left(A|\overline{B}\right) = \frac{\mathbb{P}\left(\overline{B}\cap A\right)}{\mathbb{P}(\overline{B})} = \frac{0.149 - 0.308\times 0.0219}{1-0.0219} \approx 0.1454.$$

□

Bài 5 (Bài 2 - đề thi giữa kỳ hk1 - 2022-2023 - ca 2).
Frontier là một hệ thống siêu máy tính nhanh nhất thế giới tính đến tháng 10/2022. Trong một cuộc phỏng vấn gần đây, Justin Whitt, giám đốc chương trình có nói rằng hệ thống Frontier liên tục gặp lỗi phần cứng sau vài giờ vận hành. Giả sử khoảng thời gian giữa hai lần gặp lỗi phần cứng liên tiếp (đơn vị: giờ) là biến ngẫu nhiên có hàm mật độ xác suất sau:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{6}.e^{-\frac{x}{6}} & , \quad x>0,\\[2ex] 0 & , \quad x\le 0.\end{cases}$$

(a) Tính xác suất Frontier hoạt động liên tục trong 1 ngày (24 giờ).

(b) Tính $\mathbb{E}(X)$ và $\operatorname{Var}(X)$.

Hướng dẫn: Gọi X là biến ngẫu nhiên thể hiện khoảng thời gian giữa hai lần gặp lỗi phần cứng liên tiếp (đv: giờ). Theo giả thiết, X có hàm mật độ xác suất

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{6}.e^{-\frac{x}{6}} & , \quad x>0,\\ 0 & , \quad x\le 0.\end{cases}$$

■ (a) Hệ thống Frontier hoạt động liên tục trong 24h khi khoảng cách giữa hai lần gặp lỗi phần cứng liên tiếp $\geq$ 24 h (tức là không có lỗi phần cứng nào ít nhất là trong vòng 24h).

Do đó, xác suất Frontier hoạt động liên tục trong 1 ngày (24 giờ) là:

$$\mathbb{P}(X\ge 24)=1-\mathbb{P}(X<24)=1-\int_{-\infty}^{24} f(x)dx=1-\int_0^{24}\frac{1}{6}.e^{-\frac{x}{6}}dx=1-\left(-e^{-\frac{x}{6}}\right)\Big|_{x=0}^{x=24}$$
$$=1-\left(-e^{-4}+e^0\right)=e^{-4}\approx 0.0183.$$

■ (b) Kỳ vọng (trung bình) của X là:

$$\mathbb{E}(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x.f(x)dx=\int_0^{+\infty}x.\frac{1}{6}.e^{-\frac{x}{6}}dx=\left(-x.e^{-\frac{x}{6}}\right)\Big|_{x=0}^{x=+\infty}+\int_0^{+\infty}e^{-\frac{x}{6}}dx$$
$$=\lim_{t\to+\infty}\frac{-t}{e^{\frac{t}{6}}}+\left(-6.e^{-\frac{x}{6}}\right)\Big|_{x=0}^{x=+\infty}=6.e^0=6.$$

- Ta có:

$$\mathbb{E}(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2.f(x)dx=\int_0^{+\infty}x^2.\frac{1}{6}.e^{-\frac{x}{6}}dx=\left(-x^2.e^{-\frac{x}{6}}\right)\Big|_{x=0}^{x=+\infty}+\int_0^{+\infty}2.x.e^{-\frac{x}{6}}dx$$
$$=\lim_{t\to+\infty}\frac{-t^2}{e^{\frac{t}{6}}}+\int_0^{+\infty}2.x.e^{-\frac{x}{6}}dx$$
$$=2.6.\int_0^{+\infty}x.\frac{1}{6}.e^{-\frac{x}{6}}dx=2.6.6=2.6^2.$$
$$\left(\text{dùng ý phía trên } \int_0^{+\infty}x.\frac{1}{6}.e^{-\frac{x}{6}}dx=6\right)$$

Do đó, phương sai của X là:

$$\operatorname{Var}(X)=\mathbb{E}\left[\left(X-\mathbb{E}(X)\right)^2\right]=\mathbb{E}(X^2)-\left(\mathbb{E}(X)\right)^2=2.6^2-6^2=6^2=36.$$

□

Bài 6 (Bài 3 - đề thi giữa kỳ hk1 - 2022-2023 - ca 2).
Số khách hàng đến một quầy thanh toán tại một siêu thị trong một giờ tuân theo phân phối Poisson với trung bình bằng bảy. Trong một giờ nhất định, tính xác suất

(a) không có hơn 3 khách hàng đến? (b) ít nhất 2 khách hàng đến?

(c) có chính xác 5 khách hàng đến?

Nhắc lại: Cho $X \sim P(\lambda)$. *Khi đó,* $\mathbb{P}(X=k) = e^{-\lambda}.\frac{\lambda^k}{k!}$ *với* $k = 0, 1, 2, \ldots$ *và* $\mathbb{E}(X) = \lambda$.

Hướng dẫn: Gọi Y là biến ngẫu nhiên thể hiện số khách hàng đến một quầy thanh toán tại siêu thị trong một giờ. Theo giả thiết bài toán, Y có phân phối Poisson với trung bình bằng 7, nghĩa là, $Y \sim \mathcal{P}(7)$. Khi đó, hàm trọng lượng xác suất của Y là

$$f(y) = \mathbb{P}(Y=y) = e^{-7}.\frac{7^y}{y!}, \quad \text{với } y = 0, 1, 2, 3, \ldots.$$

■ (a) Trong một giờ nhất định, xác suất không có hơn 3 khách hàng đến là:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y \le 3) &= \mathbb{P}(Y=0) + \mathbb{P}(Y=1) + \mathbb{P}(Y=2) + \mathbb{P}(Y=3)\\ &= e^{-7}.\frac{7^0}{0!} + e^{-7}.\frac{7^1}{1!} + e^{-7}.\frac{7^2}{2!} + e^{-7}.\frac{7^3}{3!} \approx 0.0818.\end{aligned}$$

■ (b) Trong một giờ nhất định, xác suất có ít nhất 2 khách hàng đến là:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y \ge 2) = 1 - \mathbb{P}(Y < 2) = 1 - \mathbb{P}(Y \le 1) &= 1 - \mathbb{P}(Y=0) + \mathbb{P}(Y=1)\\ &= 1 - e^{-7}.\frac{7^0}{0!} - e^{-7}.\frac{7^1}{1!} \approx 0.9927.\end{aligned}$$

■ (c) Trong một giờ nhất định, xác suất có chính xác 5 khách hàng đến là:

$$\mathbb{P}(Y=5) = e^{-7}.\frac{7^5}{5!} \approx 0.1277.$$

□

- - - - - Đề thi Giữa kỳ học kỳ 2 năm học 2021-2022 - - - - -

Bài 7 (Bài 1 - đề thi giữa kỳ hk2 - 2021-2022).
Đối với các cặp vợ chồng ở một vùng ngoại ô nào đó, xác suất để người chồng sẽ đi bỏ phiếu trong một cuộc bầu cử là $0,21$, xác suất để người vợ sẽ bỏ phiếu là $0,28$, và xác suất để cả chồng và vợ sẽ bỏ phiếu là $0,15$. Hỏi xác suất để

a) ít nhất một trong hai vợ chồng sẽ bỏ phiếu?

b) người vợ bỏ phiếu, biết rằng chồng cô ấy sẽ bỏ phiếu?

c) người chồng bỏ phiếu, biết rằng vợ ông ấy sẽ không bỏ phiếu?

Hướng dẫn: Phép thử: chọn ngẫu nhiên một cặp vợ chồng ở vùng ngoại ô và ta quan tâm việc đi bỏ phiếu bầu cử của cặp vợ chồng đó.

Gọi A là biến cố "người chồng có đi bỏ phiếu bầu", và B là biến cố "người vợ có đi bỏ phiếu bầu".

Theo đề bài, ta có các xác suất sau:

$$\mathbb{P}(A) = 0,21; \quad \mathbb{P}(B) = 0,28; \quad \text{và} \quad \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A.B) = 0,15;$$

■ a) Xác suất ít nhất một trong hai vợ chồng sẽ bỏ phiếu (tương đương với xác suất ít nhất một trong hai biến cố A hoặc B xảy ra, cũng tương đương với xác suất biến cố A xảy ra hoặc B xảy ra), là

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A+B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A.B) = 0,21 + 0,28 - 0,15 = 0,34.$$

■ b) Xác suất để người vợ bỏ phiếu, biết rằng người chồng cô ấy sẽ bỏ phiếu là

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(B.A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{0,15}{0,21} = \frac{15}{21} = \frac{5}{7} \approx 0,7143 \ .$$

■ c) Xác suất người chồng bỏ phiếu, biết rằng người vợ ông ấy sẽ không bỏ phiếu là

$$\mathbb{P}(A|\overline{B}) = \frac{\mathbb{P}(A.\overline{B})}{\mathbb{P}(\overline{B})} = \frac{\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A.B)}{1 - \mathbb{P}(B)} = \frac{0,21 - 0,15}{1 - 0,28} = \frac{0,06}{0,72} = \frac{1}{12} \approx 0,0833 \ .$$

□

Bài 8 (Bài 2 - đề thi giữa kỳ hk2 - 2021-2022).
Giả sử rằng bốn thanh tra viên tại một công ty sản xuất phải đóng dấu ngày hết hạn lên mỗi sản phẩm vào cuối dây chuyền.

- An, đóng 20% sản phẩm, không đóng dấu ngày hết hạn một lần trong mỗi 200 sản phẩm;
- Bình đóng 60% sản phẩm, không đóng dấu ngày hết hạn một lần trong mỗi 100 sản phẩm;
- Cường đóng 15% sản phẩm, không đóng dấu ngày hết hạn một lần trong mỗi 90 sản phẩm;
- Dũng đóng 5% sản phẩm, không đóng dấu ngày hết hạn một lần trong mỗi 200 sản phẩm;

Nếu một khách hàng than phiền rằng sản phẩm của họ không có thông tin thể hiện ngày hết hạn, thì xác suất để nó đã được kiểm tra bởi An là bao nhiêu?

Hướng dẫn: Chọn ngẫu nhiên một sản phẩm, ta quan tâm sản phẩm đó đã được đóng dấu thông tin hạn sử dụng hay chưa, và được kiểm tra bởi ai trong bốn thanh tra viên.

Gọi A, B, C và D lần lượt là các biến cố "sản phẩm được kiểm tra bởi" An, Bình, Cường và Dũng.

H là biến cố "sản phẩm KHÔNG được đóng dấu ngày hết hạn".

Theo đề bài, ta có các xác suất sau đây:

$$\mathbb{P}(A) = 20\% = 0,2; \quad \mathbb{P}(B) = 60\% = 0,6; \quad \mathbb{P}(C) = 15\% = 0,15; \quad \mathbb{P}(D) = 5\% = 0,05;$$

$$\text{và} \quad \mathbb{P}(H|A) = \frac{1}{200}; \quad \mathbb{P}(H|B) = \frac{1}{100}; \quad \mathbb{P}(H|C) = \frac{1}{90}; \quad \mathbb{P}(H|D) = \frac{1}{200};$$

Bây giờ, nếu một khách hàng than phiền rằng sản phẩm của họ không có thông tin thể hiện ngày hết hạn, thì xác suất để nó được kiểm tra bởi An được tính bởi xác suất

$$\mathbb{P}(A|H) = \frac{\mathbb{P}(A.H)}{\mathbb{P}(H)}.$$

• Ta thấy các biến cố A, B, C và D tạo thành một hệ đầy đủ các biến cố (vì chọn ngẫu nhiên một sản phẩm thì rõ ràng sản phẩm chỉ có thể được kiểm tra bởi một trong bốn thanh tra viên), nên áp dụng công thức xác suất đầy đủ (toàn phần) ta được

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(H) &= \mathbb{P}(H|A).\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(H|B).\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(H|C).\mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(H|D).\mathbb{P}(D) \\
&= \frac{1}{200} \times 0,2 + \frac{1}{100} \times 0,6 + \frac{1}{90} \times 0,15 + \frac{1}{200} \times 0,05 \approx 0,0089 \ .
\end{aligned}$$

• Lại có: $\quad \mathbb{P}(A.H) = \mathbb{P}(H|A).\mathbb{P}(A) = \dfrac{1}{200} \times 0,2 = 0,001.$

Do đó, xác suất cần tính là

$$\mathbb{P}(A|H) = \frac{\mathbb{P}(A.H)}{\mathbb{P}(H)} \approx \frac{0,001}{0,00892} \approx 0,1121.$$

□

Bài 9 (Bài 3 - đề thi giữa kỳ hk2 - 2021-2022).
Một giáo sư đại học không bao giờ kết thúc bài giảng của mình trước khi hết giờ và luôn hoàn thành bài giảng của mình trong vòng 2 phút sau giờ học. Cho X là thời gian trôi qua giữa thời điểm hết tiết học và kết thúc bài giảng của giáo sư. Giả sử hàm mật độ xác suất của X là

$$f(x) = \begin{cases} kx^2 & , \quad \text{khi } 0 \le x \le 2, \\ 0 & , \quad \text{nơi khác .} \end{cases}$$

a) Tìm k.

b) Hãy tính xác suất bài giảng kết thúc trong vòng 1 phút sau khi giờ học kết thúc.

c) Hãy tính xác suất bài giảng tiếp tục diễn ra sau khi giờ học kết thúc từ 60s tới 90s ?

d) Xác suất mà bài giảng tiếp tục trong ít nhất 90s ngoài giờ kết thúc là bao nhiêu?

Hướng dẫn:

B.n.n. X thể hiện thời gian trôi qua (tính theo phút) giữa thời điểm hết tiết học và kết thúc bài giảng.

■ a) Hàm f là hàm mật độ xác suất, khi và chỉ khi:

- $f(x) \ge 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ $\quad\Leftrightarrow\quad$ $f(x) = k.x^2 \ge 0$ với mọi $0 \le x \le 2$ $\quad\Leftrightarrow\quad$ $k > 0$.
- $1 = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_0^2 k.x^2 dx = \frac{k}{3}.(x^3)\Big|_{x=0}^{x=2} = \frac{8.k}{3}$ $\quad$ do đó $\quad k = \dfrac{3}{8}$.

■ b) Xác suất bài giảng kết thúc trong vòng 1 phút sau khi giờ học kết thúc là

$$\mathbb{P}(X \le 1) = \int_{-\infty}^{1} f(x)dx = \int_0^1 \frac{3}{8}.x^2 dx = \frac{1}{8}.(x^3)\Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{8} = 0,125.$$

■ c) Xác suất bài giảng tiếp tục diễn ra sau khi giờ học kết thúc từ 60s (= 1phút) tới 90s (= $\frac{3}{2}$phút) là

$$\mathbb{P}(1 \le X \le \frac{3}{2}) = \int_1^{3/2} f(x)dx = \int_1^{3/2} \frac{3}{8}.x^2 dx = \frac{1}{8}.(x^3)\Big|_{x=1}^{x=3/2} = \frac{19}{64} \approx 0,2969 \ .$$

■ d) Xác suất mà bài giảng tiếp tục trong ít nhất 90s (= $\frac{3}{2}$phút) ngoài giờ kết thúc là

$$\mathbb{P}(X \ge \frac{3}{2}) = 1 - \mathbb{P}(X < \frac{3}{2}) = 1 - \int_{-\infty}^{3/2} f(x)dx = 1 - \int_0^{3/2} \frac{3}{8}.x^2 dx = 1 - \frac{1}{8}.(x^3)\Big|_{x=0}^{x=3/2} = \frac{37}{64} \approx 0,5781.$$

□

(Cách khác để tính câu d): $\quad \mathbb{P}(X \ge \frac{3}{2}) = 1 - \mathbb{P}(X < \frac{3}{2}) = 1 - \Big(\mathbb{P}(X \le 1) + \mathbb{P}(1 \le X < \frac{3}{2})\Big)$)

- - - - - Đề thi Giữa kỳ học kỳ 2 năm học 2020-2021 - - - - -

Bài 10 (Bài 1 - đề thi giữa kỳ hk2 - 2020-2021).
Xác suất để một người đàn ông có vợ xem một chương trình ti vi nào đó là $0,4$ và xác suất để một người phụ nữ có chồng xem chương trình là $0,5$. Xác suất để một người đàn ông xem chương trình, biết rằng vợ ông ta cũng xem, là $0,7$. Tìm xác suất để

a) một cặp vợ chồng xem chương trình.

b) người vợ xem chương trình biết rằng chồng cô ấy cũng xem.

c) ít nhất một trong hai vợ chồng sẽ xem chương trình.

Hướng dẫn: Phép thử: chọn ngẫu nhiên một cặp vợ chồng, khảo sát xem người vợ và người chồng có xem chương trình tivi hay không.

Gọi A là biến cố "người chồng có xem chương trình", và B là biến cố "người vợ có xem chương trình".

Theo đề bài, ta có: $\mathbb{P}(A) = 0,4$, $\mathbb{P}(B) = 0,5$, và $\mathbb{P}(A|B) = 0,7$.

■ a) Xác suất để một cặp vợ chồng xem chương trình là

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A.B) = \mathbb{P}(A|B).\mathbb{P}(B) = 0,7 \times 0,5 = 0,35.$$

■ b) Xác suất để người vợ xem chương trình, biết rằng chồng cô ấy cũng xem là

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(B.A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{0,35}{0,4} = \frac{7}{8} = 0,875.$$

■ c) Xác suất để ít nhất một trong hai vợ chồng xem chương trình (tương đương với ít nhất một trong hai biến cố A hoặc B xảy ra, cũng tương đương với biến cố A xảy ra hoặc B xảy ra) là

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A + B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A.B) = 0,4 + 0,5 - 0,35 = 0,55.$$

□

Bài 11 (Bài 2 - đề thi giữa kỳ hk2 - 2020-2021).
Nhà máy có ba phân xưởng A, B, C tương ứng làm ra 25%, 35% và 40% tổng sản phẩm của nhà máy. Giả sử xác suất làm ra một sản phẩm hỏng của các phân xưởng A, B và C lần lượt là $0,01$; $0,02$ và $0,025$. Chọn ngẫu nhiên một sản phẩm từ nhà máy. Tính xác suất nhận được một sản phẩm hỏng.

Hướng dẫn: Phép thử: chọn ngẫu nhiên một sản phẩm từ nhà máy.
Gọi A là biến cố "sản phẩm làm bởi phân xưởng A";
B là biến cố "sản phẩm làm bởi phân xưởng B";
C là biến cố "sản phẩm làm bởi phân xưởng C";
H là biến cố "sản phẩm làm ra bị hỏng".

Theo đề bài, ta có: $\mathbb{P}(A) = 25\% = 0,25$; $\mathbb{P}(B) = 35\% = 0,35$; và $\mathbb{P}(C) = 40\% = 0,4$;
$\mathbb{P}(H|A) = 0,01$; $\mathbb{P}(H|B) = 0,02$; và $\mathbb{P}(H|C) = 0,025$.

Chọn ngẫu nhiên một sản phẩm của nhà máy, thì rõ ràng sản phẩm này phải được làm bởi phân xưởng A hoặc phân xưởng B hoặc phân xưởng C.

Suy ra A, B và C tạo thành một hệ đầy đủ các biến cố, nên áp dụng công thức xác suất đầy đủ (toàn phần) ta có xác suất nhận được một sản phẩm hỏng là

$$\mathbb{P}(H) = \mathbb{P}(H|A).\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(H|B).\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(H|C).\mathbb{P}(C) = 0,01 \times 0,25 + 0,02 \times 0,35 + 0,025 \times 0,4 = 0,0195 .$$

□

Bài 12 (Bài 3 - đề thi giữa kỳ hk2 - 2020-2021).
Độ pH nước được lấy mẫu từ một hồ nước là một biến ngẫu nhiên Y với hàm mật độ xác suất cho bởi:

$$f(y) = \begin{cases} \frac{3}{8}.(7-y)^2 & , \quad \text{nếu} \quad 5 \le y \le 7, \\ 0 & , \quad \text{nơi khác} \ . \end{cases}$$

a) Tìm $\mathbb{E}(Y)$ và Var (Y).

b) Tìm một khoảng ngắn hơn $(5;7)$ trong đó ít nhất ba phần tư các số đo pH phải nằm trong đó.

c) Bạn có kỳ vọng là sẽ rất thường xuyên nhận được một số đo pH dưới $5,5$ không? Tại sao?

Hướng dẫn:

■ a) Y là biến ngẫu nhiên liên tục có hàm mật độ xác suất f, ta có kỳ vọng (trung bình) của Y là

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y.f(y)dy &= \int_{-\infty}^{5} y.f(y)dy + \int_{5}^{7} y.f(y)dy + \int_{7}^{+\infty} y.f(y)dy \\ &= \int_{-\infty}^{5} y.\,0\,dy \ + \int_5^7 y.f(y)dy \ + \int_7^{+\infty} y.\,0\,dy = 0 + \int_5^7 y.\frac{3}{8}.(7-y)^2dy \ + 0 \\ &= \int_5^7 \frac{3}{8}.(49y - 14y^2 + y^3)dy = \frac{3}{8}.\Big(\frac{49}{2}.y^2 - \frac{14}{3}.y^3 + \frac{1}{4}.y^4\Big)\Big|_{y=5}^{y=7} = 5,5 \ ;\end{aligned}$$

và ta có

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2.f(y)dy &= \int_{-\infty}^{5} y^2.f(y)dy + \int_5^7 y^2.f(y)dy + \int_7^{+\infty} y^2.f(y)dy \\ &= \int_5^7 y^2.\frac{3}{8}.(7-y)^2dy \\ &= \int_5^7 \frac{3}{8}.(49y^2 - 14y^3 + y^4)dy = \frac{3}{8}.\Big(\frac{49}{3}.y^3 - \frac{14}{4}.y^4 + \frac{1}{5}.y^5\Big)\Big|_{y=5}^{y=7} = 30,4 \ ;\end{aligned}$$

do đó, phương sai của Y là $\quad \text{Var}(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - \big(\mathbb{E}(Y)\big)^2 = 30,4 - (5,5)^2 = 0.15.$

■ b) Tìm một khoảng ngắn hơn $(5;7)$ trong đó ít nhất ba phần tư các số đo pH phải nằm trong đó, nghĩa là, tìm một khoảng dạng $(a;b) \subset (5;7)$ (tức là $5 \le a < b \le 7$) sao cho $\mathbb{P}(a < Y < b) \ge \frac{3}{4}$.

- - - - - Đoạn chứng minh này các bạn không cần phải trình bày trong bài làm nếu đề có hỏi - - - - -

Biến ngẫu nhiên Y có hàm mật độ xác suất f, thì ta có hàm phân phối xác suất (tích luỹ) của Y

$$F(u) := \mathbb{P}(Y \le u) = \int_{-\infty}^{u} f(y)dy, \qquad \text{là hàm không giảm ,}$$

$$\text{tức là} \quad F(u) = \mathbb{P}(Y \le u) = \int_{-\infty}^{u} f(y)dy \ \le \ \int_{-\infty}^{w} f(y)dy = \mathbb{P}(Y \le w) = F(w), \quad \forall u \le w,$$

$$\text{hơn nữa} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)dy = \int_5^7 f(y)dy = 1,$$

do đó tồn tại số thực b $(5 < b \le 7)$ sao cho $\int_{-\infty}^{b} f(y)dy = \int_5^b f(y)dy \ge \frac{3}{4}$.

Vậy, ta đã chứng minh rằng tồn tại số thực b $(5 < b \le 7)$ thoả $\quad \mathbb{P}(5 < Y < b) = \int_5^b f(y)dy \ge \frac{3}{4}$.

Vì câu hỏi chỉ yêu cầu tìm một khoảng ngắn hơn $(5;7)$, do đó, chỉ cần tìm số b sao cho $\mathbb{P}(5 < Y < b) \geq \frac{3}{4}$.

Ta có
$$\int_5^b f(y)dy = \int_5^b \frac{3}{8}.(7-y)^2 dy = \int_5^b \frac{3}{8}.(49-14y+y^2)dy = \frac{3}{8}.(49y - 7.y^2 + \frac{1}{3}.y^3)\Big|_{y=5}^{y=b}$$
$$= \frac{1}{8}.b^3 - \frac{21}{8}.b^2 + \frac{147}{8}.b - \frac{335}{8},$$

do đó, $\mathbb{P}(5 < Y < b) = \frac{3}{4} \iff \frac{1}{8}.b^3 - \frac{21}{8}.b^2 + \frac{147}{8}.b - \frac{335}{8} = \frac{3}{4}$.

Giải phương trình trên với điều kiện $5 < b < 7$ ta tìm được $b \approx 5,75$ (*làm tròn lên*).

Suy ra, với $\varepsilon \geq 0$ thoả $b + \varepsilon < 7$ (tương đương với $\varepsilon < 7 - b = 7 - 5,75 = 1,25$) thì ta luôn có
$$\frac{3}{4} = \mathbb{P}(5 < Y < b) \leq \mathbb{P}(5 < Y < b + \varepsilon) \quad \text{hay} \quad \frac{3}{4} \leq \mathbb{P}(5 < Y < 5,75 + \varepsilon).$$

Vậy khoảng cần tìm là $(5\ ;\ 5,75 + \varepsilon)$ với $0 \leq \varepsilon < 1,25$ bất kỳ, thoả yêu cầu $\frac{3}{4} \leq \mathbb{P}(5 < Y < 5,75 + \varepsilon)$.

Nói thêm, sau khi tìm được $b = 5,75$ ta có thể kiểm tra lại:
$$\mathbb{P}(5 < Y < 5,75 + \varepsilon) \geq \mathbb{P}(5 < Y < 5,75) = \int_5^{5,75} f(y)dy \approx 0.75586 \geq \frac{3}{4} \quad (\textit{thoả yêu cầu bài toán}).$$

■ c) Ta tính xác suất: $\mathbb{P}\big(Y < 5,5\big) = \int_{-\infty}^{5,5} f(y)dy = \int_5^{5,5} \frac{3}{8}.(7-y)^2 dy \approx 0,5781.$

Vì $\mathbb{P}\big(Y < 5,5\big) = 0,5781$ là nhỏ hơn nhiều so với mức $\geq 0,8$ (vì câu hỏi hỏi rằng "có kỳ vọng sẽ **rất** thường xuyên"), do đó, không kỳ vọng sẽ rất thường xuyên nhận được một số đo pH dưới 5,5.

□

Bài 13 (Bài 4 - đề thi giữa kỳ hk2 - 2020-2021).

Chiều rộng của các sợi vải có phân phối chuẩn với trung bình 950 mm và độ lệch chuẩn 10 mm.

a) Xác suất một sợi vải được chọn ngẫu nhiên có chiều rộng nằm giữa 947 mm và 958 mm?

b) Tìm giá trị xấp xỉ cho a sao cho sợi vải được chọn ngẫu nhiên có độ rộng nhỏ hơn a với xác suất $0,8531$?

Hướng dẫn: Ta quan tâm chiều rộng của sợi vải. Gọi X là b.n.n. thể hiện chiều rộng một sợi vải. Theo đề bài, X có phân phối chuẩn, $X \sim \mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$ với trung bình $\mu = 950$mm và độ lệch chuẩn $\sigma = 10$mm.

■ a) Xác suất một sợi vải được chọn ngẫu nhiên có chiều rộng nằm giữa 947mm và 958mm là
$$\mathbb{P}\big(947 \leq X \leq 958\big) = \mathbb{P}\Big(\frac{947-\mu}{\sigma} \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{958-\mu}{\sigma}\Big) = \mathbb{P}\Big(\frac{947-\mu}{\sigma} \leq Z \leq \frac{958-\mu}{\sigma}\Big) \quad (\text{ với } Z \sim \mathcal{N}(0;1))$$
$$= \Phi\Big(\frac{958-\mu}{\sigma}\Big) - \Phi\Big(\frac{947-\mu}{\sigma}\Big) = \Phi\Big(\frac{958-950}{10}\Big) - \Phi\Big(\frac{947-50}{10}\Big)$$
$$\approx 0,78814 - 0,38209 = 0,4061\ .$$

■ b) Tìm giá trị xấp xỉ a sao cho sợi vải được chọn ngẫu nhiên có độ rộng nhỏ hơn a với xác suất $0,8531$. Nghĩa là, tìm số thực $a > 0$ sao cho $\mathbb{P}(X < a) = 0,8531$. Ta có
$$\mathbb{P}(X < a) = \mathbb{P}\Big(\frac{X\mu}{\sigma} < \frac{a-\mu}{\sigma}\Big) = \Phi\Big(\frac{a-\mu}{\sigma}\Big)$$

cho nên
$$\mathbb{P}(X < a) = 0,8531 \iff \Phi\Big(\frac{a-\mu}{\sigma}\Big) = 0,8531 \iff \frac{a-\mu}{\sigma} = \Phi^{-1}(0,8531)$$
$$\iff a = \mu + \sigma \times \Phi^{-1}(0,8531) \approx 950 + 10 \times 1,05 = 960,5\ .$$

Vậy $a \approx 960,5$mm thì sợi vải được chọn ngẫu nhiên có độ rộng nhỏ hơn a với xác suất $0,8531$. □

- - - - - Một số bài tập khác - - - - -

Bài 14 (Bài 1 - đề1 - đề thi giữa kỳ hk1 - 2019-2020).
Một dây chuyền lắp ráp nhận các chi tiết từ hai nhà máy khác nhau. Tỷ lệ chi tiết do nhà máy thứ nhất cung cấp là 60%, của nhà máy thứ hai là 40%. Tỷ lệ chính phẩm của nhà máy thứ nhất là 90%, của nhà máy thứ hai là 85%.
Lấy ngẫu nhiên một chi tiết trên dây chuyền và thấy rằng nó tốt. Tìm xác suất để chi tiết đó do nhà máy thứ nhất sản xuất.

Hướng dẫn: Phép thử: chọn ngẫu nhiên một chi tiết trên dây chuyền lắp ráp.
Thông tin mà ta quan tâm:
- chi tiết do nhà máy thứ nhất hay nhà máy thứ hai cung cấp;
- chi tiết có tốt hay không (có phải là chính phẩm hay không);

Gọi A là biến cố "chi tiết do nhà máy thứ nhất cung cấp";
B là biến cố "chi tiết do nhà máy thứ hai cung cấp";
G là biến cố "chi tiết tốt (là chính phẩm)";
Theo đề bài, ta có các xác suất sau:

$$\mathbb{P}(A) = 60\% = 0,6; \qquad \mathbb{P}(B) = 40\% = 0,4; \qquad \mathbb{P}(G|A) = 90\% = 0,9; \qquad \mathbb{P}(G|B) = 85\% = 0,85.$$

Bây giờ, lấy ngẫu nhiên một chi tiết trên dây chuyền và thấy rằng nó tốt, tức là biết biến cố G đã xảy ra. Thì xác suất để chi tiết tốt đó do nhà máy thứ nhất sản xuất là

$$\mathbb{P}(A|G) = \frac{\mathbb{P}(A.G)}{\mathbb{P}(G)}.$$

• Biến cố A và B tạo thành một hệ đầy đủ các biến cố (bởi vì lấy ngẫu nhiên một chi tiết thì rõ ràng chi tiết đó chỉ có thể được cung cấp bởi nhà máy thứ nhất hoặc bởi nhà máy thứ 2, tức là, chỉ một trong hai biến cố A hoặc biến cố B xảy ra, và $A.B = \emptyset$),
nên áp dụng công thức xác suất đầy đủ (toàn phần) ta có

$$\mathbb{P}(G) = \mathbb{P}(G|A).\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(G|B).\mathbb{P}(B) = 0,9 \times 0,6 + 0,85 \times 0,4 = 0,88 \ ;$$

• Hơn nữa, từ công thức xác suất có điều kiện ta lại có: $\mathbb{P}(A.G) = \mathbb{P}(G|A).\mathbb{P}(A) = 0,9 \times 0,6 = 0,54.$

Suy ra, chọn ngẫu nhiên một chi tiết và thấy nó tốt, thì xác suất để chi tiết tốt đó do nhà máy thứ nhất cung cấp là

$$\mathbb{P}(A|G) = \frac{\mathbb{P}(A.G)}{\mathbb{P}(G)} = \frac{0,54}{0,88} = \frac{27}{44} \approx 0,6136.$$

□

Bài 15 (Bài 2 - đề1 - đề thi giữa kỳ hk1 - 2019-2020).
Tỷ lệ thời gian Y mà một robot công nghiệp hoạt động trong suốt một tuần 40 giờ là một biến ngẫu nhiên có hàm mật độ xác suất

$$f(xy) = \begin{cases} 2y & , \ 0 \le y \le 1, \\ 0 & , \ \text{nơi khác}\ . \end{cases}$$

a) Tìm $\mathbb{E}(Y)$ và $\mathrm{Var}(Y)$.

b) Đối với các robot đang được nghiên cứu, lợi nhuận X mỗi tuần được cho bởi $X = 200Y - 60$. Tìm $\mathbb{E}(X)$ và $\mathrm{Var}(X)$.

Hướng dẫn: B.n.n. Y thể hiện tỷ lệ thời gian một robot công nghiệp hoạt động trong suốt một tuần 40 giờ.
■ a) Kỳ vọng (trung bình) của b.n.n. Y với hàm mật độ xác suất f được tính bởi

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y.f(y)dy &= \int_{-\infty}^{0} y.f(y)dy + \int_{0}^{1} y.f(y)dy + \int_{1}^{+\infty} y.f(y)dy \\ &= \int_{-\infty}^{0} y.0dy + \int_{0}^{1} y.2ydy + \int_{1}^{+\infty} y.0dy = \int_{0}^{1} 2y^2dy = \frac{2}{3}.(y^3)\Big|_{y=0}^{y=1} = \frac{2}{3} = 0,6667 .\end{aligned}$$

• Ta có

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2.f(y)dy &= \int_{-\infty}^{0} y^2.f(y)dy + \int_{0}^{1} y^2.f(y)dy + \int_{1}^{+\infty} y^2.f(y)dy \\ &= \int_{-\infty}^{0} y^2.0dy + \int_{0}^{1} y^2.2ydy + \int_{1}^{+\infty} y^2.0dy = \int_{0}^{1} 2y^3dy = \frac{2}{4}.(y^4)\Big|_{y=0}^{y=1} = \frac{2}{4} ,\end{aligned}$$

Suy ra

$$\mathrm{Var}(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - \Big(\mathbb{E}(Y)\Big)^2 = \frac{2}{4} - \Big(\frac{2}{3}\Big)^2 = \frac{2}{4} - \frac{4}{9} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18} \approx 0,0556 .$$

■ b) Lợi nhuận X được tính bởi $X = 200Y - 60$. Ta có kỳ vọng (trung bình) của X được tính như sau

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(200.Y - 60) = 200.\mathbb{E}(Y) - 60 = 200 \times 0,6667 - 60 = 73,34 .$$

Mặt khác, áp dụng $\mathrm{Var}\big(a.Y + b\big) = \mathrm{Var}\big(a.Y\big) = a^2.\mathrm{Var}\big(Y\big)$ với $a, b \in \mathbb{R}$ bất kỳ, ta có phương sai của X là

$$\mathrm{Var}\big(X\big) = \mathrm{Var}\big(200.Y - 60\big) = \mathrm{Var}\big(200.Y\big) = 200^2.\mathrm{Var}\big(Y\big) = 200^2 \times 0,0556 = 2224 .$$

□

Bài 16 (Bài 4 - đề1 - đề thi giữa kỳ hk1 - 2019-2020).
Thời gian cho đến khi cần sạc lại pin cho máy tính xách tay trong điều kiện bình thường là phân phối chuẩn với trung bình 260 phút và độ lệch chuẩn là 50 phút. Hỏi xác suất pin sử dụng kéo dài hơn bốn giờ là bao nhiêu?

Hướng dẫn: Gọi W là b.n.n. thể hiện thời gian cho đến khi cần sạc lại pin cho máy tính.
Theo đề, W có phân phối chuẩn, $W \sim \mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$ với trung bình $\mu = 260$ phút và độ lệch chuẩn $\sigma = 50$ phút.
Khi đó, xác suất pin sử dụng kéo dài hơn 4 giờ ($= 4 \times 60$ phút $= 240$ phút) là

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(W > 240) = 1 - \mathbb{P}(W \le 240) = 1 - \mathbb{P}\Big(\frac{W-\mu}{\sigma} \le \frac{240-\mu}{\sigma}\Big) &= 1 - \Phi\Big(\frac{240-\mu}{\sigma}\Big) = 1 - \Phi\Big(\frac{240-260}{50}\Big) \\ &= 1 - \Phi(-0,4) \\ &= \Phi(0,4) = 0,6554 .\end{aligned}$$

□

Bài 17 (Bài 3 - đề2 - đề thi giữa kỳ hk1 - 2019-2020).
Bài kiểm tra trắc nghiệm chứa 25 câu hỏi, mỗi câu hỏi có bốn câu trả lời. Giả sử một học sinh chỉ đoán ngẫu nhiên để trả lời.

(a) Tính xác suất để học sinh đó có nhiều hơn 20 câu trả lời đúng.

(b) Tính xác suất để học sinh đó có ít hơn 5 câu trả lời đúng.

(c) (không bắt buộc) Giả sử bài kiểm tra trắc nghiệm có 200 câu hỏi. Sử dụng một xấp xỉ phù hợp để tính xác suất học sinh đó có ít nhất 100 câu trả lời đúng.

Hướng dẫn: Ta quan tâm số câu trả lời đúng trong số 25 câu hỏi.

Gọi X là biến ngẫu nhiên thể hiện số câu trả lời đúng trong tổng số 25 câu hỏi.

Theo đề bài, X có phân phối nhị thức, $X \sim B(n,p)$ với $n = 25$ và $p =$ xác suất để chọn được câu trả lời đúng cho một câu hỏi, nên $p = \dfrac{1}{4}$ (vì mỗi câu hỏi có 4 câu trả lời để lựa chọn).

■ (a) Xác suất để học sinh đó có nhiều hơn 20 câu trả lời đúng là

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X>20) &= \mathbb{P}(X=21) + \mathbb{P}(X=22) + \mathbb{P}(X=23) + \mathbb{P}(X=24) + \mathbb{P}(X=25)\\ &= C_n^{21}.p^{21}.(1-p)^{n-21} + C_n^{22}.p^{22}.(1-p)^{n-22} + C_n^{23}.p^{23}.(1-p)^{n-23} + C_n^{24}.p^{24}.(1-p)^{n-24}\\ &\quad + C_n^{25}.p^{25}.(1-p)^{n-25}\\ &= C_{25}^{21}.\left(\frac{1}{4}\right)^{21}.\left(1-\frac{1}{4}\right)^{25-21} + C_{25}^{22}.\left(\frac{1}{4}\right)^{22}.\left(1-\frac{1}{4}\right)^{25-22} + C_{25}^{23}.\left(\frac{1}{4}\right)^{23}.\left(1-\frac{1}{4}\right)^{25-23}\\ &\quad + C_{25}^{24}.\left(\frac{1}{4}\right)^{24}.\left(1-\frac{1}{4}\right)^{25-24} + C_{25}^{25}.\left(\frac{1}{4}\right)^{25}.\left(1-\frac{1}{4}\right)^{25-25}\\ &\approx 0\ .\end{aligned}$$

■ (b) Xác suất để học sinh đó có ít hơn 5 câu trả lời đúng là

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X<5) &= \mathbb{P}(X=0) + \mathbb{P}(X=1) + \mathbb{P}(X=2) + \mathbb{P}(X=3) + \mathbb{P}(X=4)\\ &= C_n^{0}.p^{0}.(1-p)^{n-0} + C_n^{1}.p^{1}.(1-p)^{n-1} + C_n^{2}.p^{2}.(1-p)^{n-2} + C_n^{3}.p^{3}.(1-p)^{n-3}\\ &\quad + C_n^{4}.p^{4}.(1-p)^{n-4}\\ &= C_{25}^{0}.\left(\frac{1}{4}\right)^{0}.\left(1-\frac{1}{4}\right)^{25-0} + C_{25}^{1}.\left(\frac{1}{4}\right)^{1}.\left(1-\frac{1}{4}\right)^{25-1} + C_{25}^{2}.\left(\frac{1}{4}\right)^{2}.\left(1-\frac{1}{4}\right)^{25-2}\\ &\quad + C_{25}^{3}.\left(\frac{1}{4}\right)^{3}.\left(1-\frac{1}{4}\right)^{25-3} + C_{25}^{4}.\left(\frac{1}{4}\right)^{4}.\left(1-\frac{1}{4}\right)^{25-4}\\ &\approx 0,2137\ .\end{aligned}$$

■ (c) Bây giờ, giả sử bài trắc nghiệm có $n = 200$ câu hỏi. Ta thấy $p = \dfrac{1}{4} = 0,25$ nên $0,1 < p < 0,9$, hơn nữa $n \times p = 200 \times \dfrac{1}{4} = 50 \geq 5$ và $n \times (1-p) = 200 \times \dfrac{3}{4} = 150 \geq 5$, do đó, ta có thể sử dụng phân phối chuẩn $\mathcal{N}\big(n.p\,;\ n.p.(1-p)\big)$ để tính xấp xỉ cho phân phối nhị thức $B(n,p)$ của X.

Cụ thể, ta có, xác suất học sinh đó có ít nhất 100 câu trả lời đúng là

$$\mathbb{P}(X \geq 100) = 1 - \mathbb{P}(X < 100) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 99) = 1 - \mathbb{P}(X < 99 + 0,5\,) \quad (\textit{hiệu chỉnh sự liên tục})$$

$$(X \text{ có phân phối nhị thức, } X \sim B(n,p)) \quad = 1 - \mathbb{P}\left(\frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}} < \frac{99 + 0,5 - \mathbb{E}(X)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}}\right)$$

$$(\text{dùng } Z \text{ có phân phối chuẩn để xấp xỉ, } Z \sim \mathcal{N}(0;1)) \quad \approx 1 - \mathbb{P}\left(\ Z\ <\ \frac{99 + 0,5 - \mathbb{E}(X)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}}\right)$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{99 + 0,5 - \mathbb{E}(X)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}}\right)$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{99 + 0,5 - n.p}{\sqrt{n.p.(1-p)}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{99 + 0,5 - 200 \times \frac{1}{4}}{\sqrt{200 \times \frac{1}{4}.(1-\frac{1}{4})}}\right)$$

$$\approx 1 - \Phi\,(\,8,0833\,) \approx 1 - 1 = 0\ .$$

□

> Không cần quá chú trọng đến phần hiệu chỉnh sự liên tục: " $1 - \mathbb{P}(X \leq 99) = 1 - \mathbb{P}(X < 99 + 0,5)$".
> Chỉ cần biết cách dùng phân phối chuẩn để xấp xỉ cho phân phối nhị thức khi thoả các điều kiện .

Bài 18. Ở một quốc gia, nồng độ cholesterol của một người được lấy ngẫu nhiên được mô hình bằng một phân phối chuẩn với trung bình 200 và độ lệch chuẩn 20. Đơn vị: 1 mg/100 ml.

(a) Xác suất để một người được chọn ngẫu nhiên trong quốc gia đó có mức cholesterol dưới 160 là bao nhiêu?

(b) Hỏi tỷ lệ dân số có mức cholesterol từ 170 tới 230.

(c) Xác suất để chọn ngẫu nhiên 10 người thì có ít nhất 2 người có mức cholesterol từ 170 tới 230 ?

Hướng dẫn: Ta quan tâm nồng độ Cholesterol của một người.

Gọi X là b.n.n. thể hiện nồng độ Cholesterol của một người,

theo đề bài X có phân phối chuẩn $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$ với trung bình $\mu = 200$ và độ lệch chuẩn $\sigma = 20$.

■ (a) Xác suất để một người được chọn ngẫu nhiên có mức cholesterol dưới 160 là

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X<160) &= \mathbb{P}\Big(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{160-\mu}{\sigma}\Big) = \Phi\Big(\frac{160-\mu}{\sigma}\Big)\\ &= \Phi\Big(\frac{160-200}{20}\Big) = \Phi(-2) = 1-\Phi(2) = 1-0,9972 = 0,0028\ .\end{aligned}$$

■ (b) Tỷ lệ dân số có mức cholesterol từ 170 tới 230 = "xác suất để một người có mức cholesterol từ 170 tới 230" , là

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(170 \le X \le 230) &= \mathbb{P}\Big(\frac{170-\mu}{\sigma} \le \frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{230-\mu}{\sigma}\Big)\\ &= \Phi\Big(\frac{230-\mu}{\sigma}\Big) - \Phi\Big(\frac{170-\mu}{\sigma}\Big) = \Phi\Big(\frac{230-200}{20}\Big) - \Phi\Big(\frac{170-200}{20}\Big)\\ &= \Phi(1,5) - \Phi(-1,5) = \Phi(1,5) - \big(1-\Phi(1,5)\big) = 2\times\Phi(1,5) - 1 = 2\times 0,9332 - 1 = 0,8664\ .\end{aligned}$$

■ (c) Ta quan tâm số người có mức cholesterol từ 170 đến 230 trong tổng số 10 người.

Gọi Y là b.n.n. thể hiện số người có mức cholesterol từ 170 đến 230 trong tổng số 10 người,

thì Y có phân phối nhị thức $B(n;p)$ với $n = 10$

và $p =$ " xác suất để 1 người có mức cholesterol từ 170 đến 230 " $= 0,8864$ (tính ở câu (b)).

Do đó, xác suất để có ít nhất 2 người có mức cholesterol từ 170 đến 230 trong số 10 người là

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y\ge 2) = 1-\mathbb{P}(Y<2) &= 1-\mathbb{P}(Y=0)-\mathbb{P}(Y=1) = 1 - C_n^0.p^0.(1-p)^{n-0} - C_n^1.p^1.(1-p)^{n-1}\\ &= 1 - C_{10}^0.(0,8864)^0.(1-0,8864)^{10-0} - C_{10}^1.(0,8864)^1.(1-0,8864)^{10-1}\\ &\approx 1-0-0 = 1.\end{aligned}$$

□

Bài 19. Một nhà sản xuất thực phẩm sử dụng một máy cắt để cắt bánh và các đồ ăn nhẹ. Giả sử doanh thu mỗi giờ của công ty ở mức 200\$. Tuy nhiên, máy cắt bị hỏng trung bình khoảng hai lần trong mỗi ngày mà nó hoạt động.

Nếu Y là số sự cố mỗi ngày, doanh thu hàng ngày tạo ra bởi máy được xác định bởi $R = 1600 - 50.Y^2$. Tìm doanh thu hàng ngày dự kiến.

Hướng dẫn: Ta quan tâm số lần máy cắt bị hỏng trong một ngày mà nó hoạt động.

Y là b.n.n. thể hiện số lần máy cắt bị hỏng trong một ngày mà nó hoạt động,
thì Y có phân phối Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ với tham số $\lambda > 0$.

• Theo đề bài, máy cắt bị hỏng trung bình hai lần trong mỗi ngày nó hoạt động ,
nghĩa là trung bình (kỳ vọng) của b.n.n. Y là $\mathbb{E}(Y) = 2$,

• mà Y có phân phối Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ nên $\mathbb{E}(Y) = \lambda$, suy ra $\lambda = 2$.

☐ Doanh thu một ngày tạo ra bởi máy cắt được xác định bởi $R = 1600 - 50.Y^2$;

Do đó, doanh thu dự kiến một ngày (⇔ mức doanh thu kỳ vọng của một ngày) là

$$\mathbb{E}(R) = \mathbb{E}\big(1600 - 50.Y^2\big) = 1600 - 50.\mathbb{E}\big(Y^2\big) \ ,$$

lại có: $\mathrm{Var}(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - \Big(\mathbb{E}(Y)\Big)^2$ nên $\mathbb{E}(Y^2) = \mathrm{Var}(Y) + \Big(\mathbb{E}(Y)\Big)^2$,

hơn nữa, Y có phân phối Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ nên $\mathbb{E}(Y) = \lambda$ và $\mathrm{Var}(Y) = \lambda$, suy ra

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(R) = 1600 - 50.\mathbb{E}\big(Y^2\big) &= 1600 - 50.\Big[\mathrm{Var}(Y) + \Big(\mathbb{E}(Y)\Big)^2\Big] \\ &= 1600 - 50.\Big[\lambda + \lambda^2\Big] = 1600 - 50 \times 6 = 1300 \ .\end{aligned}$$

☐

Bài 20. Cánh quạt trên thị trường có 2 loại là loại 3 cánh và loại 5 cánh. Tại một cửa hàng điện dân dụng có bán cánh quạt thuộc hai nhà sản xuất A và B chiếm tỉ lệ về số lượng lần lượt là 10% và 90%. Cánh quạt 3 cánh của nhà sản xuất A chiếm 39% và của nhà sản xuất B chiếm 54%. Một khách hàng đến và chọn mua ngẫu nhiên một cánh quạt tại cửa hàng này.

(a) Tính xác suất khách hàng mua loại cánh quạt 3 cánh.

(b) Nếu khách hàng trên mua loại 3 cánh, tính xác suất cánh quạt đó thuộc nhà sản xuất A?

Hướng dẫn: Phép thử ngẫu nhiên: chọn mua ngẫu nhiên một cánh quạt tại cửa hàng.

☐ Gọi S là biến cố "1 cánh quạt là loại 3 cánh", thì $\overline{S}$ là biến cố "1 cánh quạt là loại 5 cánh"
(vì trên thị trường chỉ có 2 loại cánh quạt là loại 3 cánh hoặc là loại 5 cánh)

☐ Gọi D là biến cố "1 cánh quạt là của nhà sản xuất A" $\Rightarrow$ $\overline{D}$ là biến cố "1 cánh quạt là của nhà sản xuất B";
(vì tại cửa hàng chỉ có 2 loại cánh quạt là của nhà sản xuất A hoặc là của nhà sản xuất B)

☐ Theo đề bài, ta có

$$\mathbb{P}(D) = 10\% = 0,1; \quad \mathbb{P}(\overline{D}) = 90\% = 0,9;$$

- "Cánh quạt loại 3 cánh của n.s.x. A chiếm 39%" tức là $\mathbb{P}(S|D) = 39\% = 0,39$;
- "Cánh quạt loại 3 cánh của n.s.x. B chiếm 54%" tức là $\mathbb{P}(S|\overline{D}) = 54\% = 0,54$;

■ (a) Xác suất khách mua loại cánh quạt 3 cánh (= "xác suất để một cánh quạt được chọn mua ngẫu nhiên tại cửa hàng là loại 3 cánh") là $\mathbb{P}(S) = ?$;

Ta có D và $\overline{D}$ tạo thành một hệ đầy đủ các biến cố
(vì rõ ràng, 1 cánh quạt ở cửa hàng thì chỉ có thể là của n.s.x. A hoặc của n.s.x. B)
nên áp dụng công thức xác suất toàn phần (đầy đủ) ta được

$$\mathbb{P}(S) = \mathbb{P}(S\,|\,D).\,\mathbb{P}(D) + \mathbb{P}(S\,|\,\overline{D}).\,\mathbb{P}(\overline{D}) = 0,39 \times 0,1 + 0,54 \times 0,9 = 0,525 \ .$$

■ (b) Nếu khách hàng mua loại 3 cánh, xác suất cánh quạt đó thuộc nhà sản xuất A là

$$\mathbb{P}(D\,|\,S) = \frac{\mathbb{P}\big(D.S\big)}{\mathbb{P}(S)} = \frac{\mathbb{P}(S\,|\,D).\mathbb{P}(D)}{\mathbb{P}(S)} = \frac{0,39 \times 0,1}{0,525} \approx 0,0743 \ .$$

☐

- - - Hết - - -