Otimização Heurística

OTIMIZAÇÃO NUMA CONFEITARIA

Trabalho individual I

Trabalho realizado por:

Diogo Freitas Nº104841 CDB1

Índice

Formulação das Variáveis e conhecimento do problema

Leitura e análise dos dados do enunciado

A confeitaria está a considerar 3 novos tipos de doces:

$$3\ Tipos\ De\ Doces \Rightarrow \begin{cases} D_1, & \text{Doce tipo 1} \\ D_2, & \text{Doce tipo 2} \\ D_3, & \text{Doce tipo 3} \end{cases}$$

Atendendo a um estudo de mercado, segundo o enunciado, é necessário seguir as seguintes regras:

- $D_1 \leq 6\ Mil\ KG$
- $D_2 \geq 2\ Mil\ KG$
- $D_3 \geq 1\ Mil\ KG$

A direção da Confeitaria quer que seja dada uma importância primordial a três fatores:

1. Alcançar um lucro a longo prazo de, pelo menos, 125 milhares de euros a partir destes produtos;
2. Manter o atual nível de mão de obra, ou seja, 60 empregados;
3. Travar o investimento de capital ao máximo de 55 milhares de euros.

A direção tem consciência que, provavelmente, não será possível atingir todas estas metas, em simultâneo. Pelo que, após refletir, definiu os seguintes pesos de penalização:

- 5 pontos por cada milhar de euros abaixo do nível de aspiração do lucro;
- por cada 5 trabalhadores, 4 pontos por ultrapassar e 10 pontos por ficar abaixo do valor alvo, que é 60;
- 5 pontos por cada milhar de euros acima do nível de aspiração do investimento de capital.

A contribuição de cada novo doce para o lucro, mão de obra e nível de investimento de capital é proporcional ao nível de produção. Estas contribuições, por milhar de quilogramas de doce são apresentados na tabela seguinte, juntamente com as metas:

Fator	Contribuição			Metas (unidades)
	Doces			
	D1	**D2**	**D3**	
Lucro a longo prazo	12	9	5	$\geq$ **125** (milhares de euros)
Mão-de-obra	5	2	4	= **60** (empregados)
Investimento	5	5	8	$\leq$ **55** (milhares de euros)

Criação das Variáveis

$$D_i \rightarrow toneladas\ produzidos\ do\ doce\ do\ tipo\ i$$
$$i = 1\ (Doce\ 1), 2\ (Doce\ 2), 3\ (Doce\ 3)$$

Restrições

- Lucro a longo prazo: $12D_1 + 9D_2 + 5D_3 \geq 125\ (Milhares\ de\ euros)$
- Mão de obra: $5D_1 + 2D_2 + 4D_3 = 60\ (Empregados)$
- Investimento: $5D_1 + 5D_2 + 8D_3 \leq 55\ (Milhares\ de\ euros)$
- $D_1 \leq 6\ (Restrição\ D1)$
- $D_2 \geq 2\ (Restrição\ D2)$
- $D_3 \geq 1\ (Restrição\ D3)$
- $D_1, D_2, D_3 \geq 0$

Metas

Nesta parte, será criada as respetivas variáveis para cada uma das metas:

Lucro a longo Prazo

$d_1^-: Variável\ que\ representa\ o\ quanto\ falta\ para\ atingir\ o\ número\ de\ Milhares\ de\ euros$

$d_1^- = 0$

Lucro a longo prazo: $12D_1 + 9D_2 + 5D_3 + d_1^- \geq 125\ (Milhares\ de\ euros)$

Mão de obra

$d_2^-: Variável\ que\ representa\ o\ quanto\ falta\ para\ atingir\ o\ número\ de\ trabalhadores$

$d_2^+: Variável\ que\ representa\ em\ quanto\ se\ ultrapassa\ o\ valor\ dos\ trabalhadores$

$d_2^-, d_2^+ > 0$

Mão de Obra: $5D_1 + 2D_2 + 4D_3 + d_2^- - d_2^+ = 60\ (Empregados)$

Investimento

$d_3^+: Variável\ que\ representa\ em\ quanto\ se\ ultrapassa, em\ milhares\ de\ euros, o\ valor\ do\ investimento$

$d_3^+ \geq 0$

Investimento: $5D_1 + 5D_2 + 8D_3 - d_3^+ \leq 55\ (Milhares\ de\ euros)$

Pesos

Nesta parte, serão criadas as variáveis dos pesos

$$\begin{cases} P_1^-, & \text{Penalização de 5 pontos por cada milhar de euros abaixo do nível de aspiração do lucro;} \\ P_2^-, & \text{Penalização de } \dfrac{10}{5} = 2 \text{ pontos por cada trabalhador abaixo do valor alvo;} \\ P_2^+, & \text{Penalização de } \dfrac{4}{5} = 0.8 \text{ pontos por cada trabalhador acima do valor alvo;} \\ P_3^+, & \text{Penalização de 5 pontos por cada milhar de euros acima do nível de aspiração do investimento de capital.} \end{cases}$$

Exercício a)

Modelo

$$Min\ Z = 5 \times \frac{d_1^-}{125} + \frac{10}{5} \times \frac{d_2^-}{60} + \frac{4}{5} \times \frac{d_2^+}{60} + 5 \times \frac{d_3^+}{55}$$

SUJEITO A

- Lucro a longo prazo: $12D_1 + 9D_2 + 5D_3 + d_1^- \geq 125\ (Milhares\ de\ euros)$
- Mão de obra: $5D_1 + 2D_2 + 4D_3 + d_2^- - d_2^+ = 60\ (empregados)$
- Investimento: $5D_1 + 5D_2 + 8D_3 - d_3^+ \leq 55\ (Milhares\ de\ euros)$
- $D_1 \leq 6\ (Restrição\ D1)$
- $D_2 \geq 2\ (Restrição\ D2)$
- $D_3 \geq 1\ (Restrição\ D3)$
- $\boldsymbol{D_1, D_2, D_3, d_1^-, d_2^-, d_2^+, d_3^+ \geq 0}$

Restrições rígidas

Exercício b)

Para a resolução do exercício a), foi usado a biblioteca PuLP do Python, e, em baixo, é possível visualizar os resultados.

Variáveis	**Valor**
Objective	1.336
$\boldsymbol{D_1}$	6
$\boldsymbol{D_3}$	3.4
$\boldsymbol{D_3}$	1
$\boldsymbol{d_1^-}$	17.4
$\boldsymbol{d_2^-}$	19.2
$\boldsymbol{d_2^+}$	0
$\boldsymbol{d_3^+}$	0

Interpretação das metas

Nesta fase, será feita a respetiva interpretação de cada um dos valores, até porque é necessário retirar a informação dos dados.

Começaremos por analisar o valor do "*objective*", sendo este ≈ 1.336. Por este se tratar de um problema de minimização (o objetivo é minimizar cada um dos desvios e das variáveis), o valor apresentado no objetivo é baixo, como o esperado. Ter em atenção que é difícil de se retirar conclusões deste valor, não servindo como método de comparação entre modelos.

Passando agora para análise da produção de cada um dos doces, podemos verificar os seguintes resultados:

- 6 toneladas de D_1;
- 3.4 toneladas do D_2;
- 1 tonelada do D_3.

Visualizando a produção de cada um dos doces é notório que foram produzidos o máximo de doces possível do Doce 1 e o mínimo do Doce 3. Relativamente ao Doce 2, foram produzidos mais 1.4 toneladas do valor mínimo pretendido.

O lucro a longo prazo ficou abaixo do valor alvo (125 milhares de euros) em 17.4 milhares de euros. Isto é um ponto negativo para o modelo, pois, será atingindo apenas 107.6 milhares de euros de lucro a longo prazo.

O número de trabalhadores ficou abaixo do valor alvo (60 empregados) em 19.2 (Ter em atenção que não existe 19.2 trabalhadores). Este resultado fica muito abaixo do número de trabalhadores pretendidos (60 trabalhadores) pela direção da Confeitaria.

Em relação ao investimento, o valor deste foi respeitado, não tendo sido mais elevado que o valor alvo (55 milhares de euros, euros). Este é um ponto muito positivo para o modelo.

De forma geral, este modelo apesar de respeitar o valor proposto para o investimento de 125 milhares euros, ele falha muito relativamente à mão de obra e ao lucro a longo Prazo, apresentado valores muito mais baixos que o esperado, atingindo um valor inferior de, aproximadamente 20 trabalhadores e 17.4 milhares de euros em lucro, respetivamente. Vendo deste ponto de vista, este modelo pode não ser uma solução final muito agradável.

Exercício c)

Nesta parte do trabalho, será necessário apresentar duas propostas alternativas, à solução obtida em b), para o plano de produção dos doces D1, D2 e D3. Os novos planos terão o seu respetivo nome/característica referidos.

Refazer o modelo mínimo dos desvios percentuais, com um peso associado diferente

Modelo Extra 1

Nesta mudança de pesos, imaginemos que agora a direção da Confeitaria tem como objetivo: obter o máximo de lucro possível, não o querendo muito abaixo do valor alvo; também refere que devemos dar alguma importância ao investimento de capital, não querendo que ele fique muito acima do valor alvo. O número de trabalhadores não tem tanta importância como as coisas referidas anteriormente.

Novos pesos

$$\begin{cases} P_1^-, & \text{Penalização de 3 pontos por cada milhar de euros abaixo do nível de aspiração do lucro;} \\ P_2^-, & \text{Penalização de 1 pontos por cada trabalhador abaixo do valor alvo;} \\ P_2^+, & \text{Penalização de 1 pontos por cada trabalhador acima do valor alvo;} \\ P_3^+, & \text{Penalização de 2 pontos por cada milhar de euros acima do nível de aspiração do investimento de capital.} \end{cases}$$

Modelo

$$Min\ Z = 3 \times \frac{d_1^-}{125} + 1 \times \frac{d_2^-}{60} + 1 \times \frac{d_2^+}{60} + 2 \times \frac{d_3^+}{55}.$$

Sujeito a:

- Lucro a longo prazo: $12D_1 + 9D_2 + 5D_3 + d_1^- \geq 125\ (Milhares\ de\ euros)$
- Mão de obra: $5D_1 + 2D_2 + 4D_3 + d_2^- - d_2^+ = 60\ (empregados)$

- Investimento: $5D_1 + 5D_2 + 8D_3 - d_3^+ \leq 55$ $(Milhares\ de\ euros)$
- $D_1 \leq 6\ Mil\ KG\ (Restrição\ D1)$
- $D_2 \geq 2\ Mil\ KG\ (Restrição\ D2)$
- $D_3 \geq 1\ Mil\ KG\ (Restrição\ D3)$
- $\boldsymbol{D_1, D_2, D_3, d_1^-, d_2^-, d_2^+, d_3^+, Q \geq 0}$

Resultados

Variáveis	**Valor**
Objective	0.607
$\boldsymbol{D_1}$	6
$\boldsymbol{D_3}$	5.333
$\boldsymbol{D_3}$	1
$\boldsymbol{d_1^-}$	0
$\boldsymbol{d_2^-}$	15.333
$\boldsymbol{d_2^+}$	0
$\boldsymbol{d_3^+}$	9.667

Agora será feita uma breve análise dos valores obtidos no output deste modelo, que difere do primeiro, pois, possui pesos diferentes, devido ao diferente objetivo.

Podemos começar por analisar o valor do “objective”, sendo este ≈ 0.607. Por este se tratar de um problema de minimização (o objetivo é minimizar cada um dos desvios e das variáveis), o valor apresentado no objetivo é baixo, como o esperado. Ter em atenção que é difícil de se retirar conclusões deste valor, não servindo como método de comparação entre modelos.

Passando agora para análise da produção de cada um dos doces, podemos verificar os seguintes resultados:

- 6 toneladas de D_1;
- 5.33 toneladas de D_2;
- 1 tonelada de $D_{3;}$

O valor do lucro a longo prazo foi respeitado, não tendo ficado abaixo do valor alvo (125 milhares de euros).

Visualizando a produção de cada um dos doces é notório que foram produzidos o máximo de doces possível do Doce 1 e o mínimo do Doce 3. Relativamente ao Doce 2, foram produzidas mais 3.33 toneladas do valor mínimo pretendido.

O número de trabalhadores ficou abaixo do valor alvo (60 empregados) em 15.33 (Ter em atenção que não existe 15.33 trabalhadores). Este resultado fica muito abaixo do número de trabalhadores pretendidos (60 trabalhadores) pela direção da Confeitaria.

Em relação ao investimento, o valor deste ficou acima do valor alvo (55 milhares de euros) em 5.95 milhares de euros.

De forma geral, este modelo respeita o valor esperado de 125 milhares de euros do lucro a longo prazo, falhando um pouco no investimento, com um valor superior ao esperado de 9.667 milhares de euros, e falhando, de forma considerável, o número de mão de obra, tendo ficado abaixo 16 valores do esperado, 60 trabalhadores. De forma geral, este modelo apresenta uma solução razoavelmente boa, apresentando um valor do investimento aceitável, sendo este não muito mais elevado que o esperado, mas um valor fraco para a mão de obra, apresentando um valor muito baixo quando comparado com o esperado.

Modelo Extra 2

Imaginemos agora uma situação em que a direção da confeitaria refere que necessita de ter os 60 trabalhadores do valor alvo obrigatoriamente, ou um valor muito próximo, independentemente do valor do final do lucro e do valor final do investimento.

Novos pesos

$$\begin{cases} P_1^-, & \text{Penalização de 1 pontos por cada milhar de euros abaixo do nível de aspiração do lucro;} \\ P_2^-, & \text{Penalização de 2 pontos por cada trabalhador abaixo do valor alvo;} \\ P_2^+, & \text{Penalização de 2 pontos por cada trabalhador acima do valor alvo;} \\ P_3^+, & \text{Penalização de 1 pontos por cada milhar de euros acima do nível de aspiração do investimento de capital.} \end{cases}$$

Modelo

$$Min\ Z = 1 \times \frac{d_1^-}{125} + 2 \times \frac{d_2^-}{60} + 2 \times \frac{d_2^+}{60} + 1 \times \frac{d_3^+}{55}.$$

Sujeito a:

- Lucro a longo prazo: $12D_1 + 9D_2 + 5D_3 + d_1^- \geq 125\ (Milhares\ de\ euros)$
- Mão de obra: $5D_1 + 2D_2 + 4D_3 + d_2^- - d_2^+ = 60\ (empregados)$
- Investimento: $5D_1 + 5D_2 + 8D_3 - d_3^+ \leq 55\ (Milhares\ de\ euros)$
- $D_1 \leq 6\ Mil\ KG\ (RestriçãoD1)$
- $D_2 \geq 2\ Mil\ KG\ (RestriçãoD2)$
- $D_3 \geq 1\ Mil\ KG\ (RestriçãoD3)$
- $\boldsymbol{D_1, D_2, D_3, d_1^-, d_2^-, d_2^+, d_3^+, Q \geq 0}$

Resultados

Variáveis	**Valor**
Objective	0.6797
$\boldsymbol{D_1}$	6
$\boldsymbol{D_3}$	2.3846
$\boldsymbol{D_3}$	6.3077
$\boldsymbol{d_1^-}$	0
$\boldsymbol{d_2^-}$	0
$\boldsymbol{d_2^+}$	0
$\boldsymbol{d_3^+}$	37.3846

Agora será feita uma breve análise dos valores obtidos no output deste modelo, que difere do primeiro, pois, possui pesos diferentes, devido ao diferente objetivo.

Podemos Começar por analisar o valor do “objective”, sendo este ≈ 0.6797. Por este se tratar de um problema de minimização (o objetivo é minimizar cada um dos desvios e das variáveis), o valor apresentado no objetivo é baixo, como o esperado. Ter em atenção que é difícil de se retirar conclusões deste valor, não servindo como método de comparação entre modelos.

Passando agora para análise da produção de cada um dos doces, podemos verificar os seguintes resultados:

- 6 toneladas do Doce 1;
- 2.3846 toneladas do Doce 2
- 6.3077 tonelada do Doce 3

Visualizando a produção de cada um dos doces é notório que foram produzidos o máximo de doces possível do Doce 1. Relativamente ao Doce 2 e ao Doce 3, foram produzidas mais 0.3846 e 5.3077 toneladas do valor mínimo pretendido, respetivamente.

O valor do lucro a longo prazo foi respeitado, não tendo ficado abaixo do valor alvo (125 milhares de euros).

O número de trabalhadores foi respeitado, não tendo ficado abaixo do valor alvo (60 empregados) em 15.33 (Ter em atenção que não existe 15.33 trabalhadores). Este resultado fica muito abaixo.

Em relação ao investimento, o valor deste ficou muito acima do valor alvo (55 milhares de euros) em 37.3846 milhares de euros.

De forma geral, este modelo apresenta uma solução bastante interessante a se analisar, mas, possivelmente, nada interessante a se aplicar. Apesar deste modelo respeitar o lucro a longo prazo e a mão de obra, ele falha muito em relação ao valor do investimento, apresentando uma solução que excede o valor esperado do investimento em 37.3846 milhares de euros.

Modelo MiniMax

Agora iremos abordar o mesmo problema, tendo os pesos iniciais, mas através do modelo associado ao Objetivo MiniMax, em que a função objetivo é minimizar as variáveis de desvio, representadas pela variável **Q**, que é o desvio máximo. Com isto, é acrescentado às restrições os desvios terem de ser menores que essa mesma variável **Q**, de modo a minimizá-los

Para este novo modelo, será criado uma variável **Q**, sendo esta a variável ***minimar***, que representa o desvio máximo. De seguida, será apresentado o novo modelo.

Modelo

No **Objetivo MiniMax**, pretende minimizar o desvio máximo da meta, sendo este do seguinte formato.

$$\text{Min Max Z} = 5 \times \frac{d_1^-}{125} + \frac{10}{5} \times \frac{d_2^-}{60} + \frac{4}{5} \times \frac{d_2^+}{60} + 5 \times \frac{d_3^+}{55}$$

Apesar de este ser o formato original, em termos de modelo, este será mudado para a seguinte função objetivo:

$$Min\ Z = Q$$

em que **Q** é a variável **MiniMax**

Devido a esta mudança, será necessário criar restrições adicionais.

Sujeito a:

- Lucro a longo prazo: $12D_1 + 9D_2 + 5D_3 + d_1^- \geq 125\ (Milhares\ de\ euros)$
- Mão de obra: $5D_1 + 2D_2 + 4D_3 + d_2^- - d_2^+ = 60\ (empregados)$
- Investimento: $5D_1 + 5D_2 + 8D_3 - d_3^+ \leq 55\ (Milhares\ de\ euros)$
- $D_1 \leq 6\ (RestriçãoD1)$
- $D_2 \geq 2\ (RestriçãoD2)$
- $D_3 \geq 1\ (RestriçãoD3)$
- $5 \times \frac{d_1^-}{125} \leq Q$ (desvio inferior meta 1)
- $\frac{10}{5} \times \frac{d_2^-}{60} \leq Q$ (desvio inferior meta 2)
- $\frac{4}{5} \times \frac{d_2^+}{60} \leq Q$ (desvio superior meta 2)
- $5 \times \frac{d_3^+}{55} \leq Q$ (desvio inferior meta 3)
- $\boldsymbol{D_1, D_2, D_3, d_1^-, d_2^-, d_2^+, d_3^+, Q \geq 0}$

Restrições adicionais

Resultados

Variáveis	Valor
Objective	0.5412
$\boldsymbol{D_1}$	6
$\boldsymbol{D_3}$	3.4254
$\boldsymbol{D_3}$	1.7283
$\boldsymbol{d_1^-}$	13.53
$\boldsymbol{d_2^-}$	16.236
$\boldsymbol{d_2^+}$	0
$\boldsymbol{d_3^+}$	5.953

Agora, será feita uma breve análise dos valores obtidos no output deste modelo ***MiniMax***.

Começaremos por analisar o valor do "*objective*", sendo este ≈ 0.5412. Por este se tratar de um problema de minimização (o objetivo é minimizar cada um dos desvios e das variáveis), o valor apresentado no objetivo é baixo, como o esperado. Ter em atenção que é difícil de se retirar conclusões deste valor, não servindo como método de comparação entre modelos.

Passando agora para análise da produção de cada um dos doces, podemos verificar os seguintes resultados:

- 6 toneladas do doce 1;
- 3.4254 toneladas do doce 2;
- 1.7283 toneladas do doce 3.

O lucro a longo prazo ficou abaixo do valor alvo (125 milhares de euros) em 13.53 milhares de euros.

Visualizando a produção de cada um dos doces, é notório que foram produzidos o máximo de doces possível do Doce 1. Relativamente ao Doce tipo 2 e 3, foram produzidos mais 1.4 toneladas e 1.7 toneladas do mínimo de cada um dos doces, respetivamente.

O número de trabalhadores ficou abaixo do valor alvo (60 empregados) em 16.24 (Ter em atenção que não existe 16.24 trabalhadores). Este resultado fica muito abaixo do número de trabalhadores pretendidos (60 trabalhadores) pela direção da Confeitaria.

Em relação ao investimento, o valor deste ficou acima do valor alvo (55 milhares de euros) em 5.95 milhares de euros.

De forma geral, este modelo parece ser o único que tenta distribuir as falhas por todos os desvios, não apresentando nenhum valor que tenha sido totalmente respeitado. Observando com atenção, este modelo apresenta uma solução em que o lucro a longo prazo apresenta um valor inferior ao esperado em 13.53 milhares de euros; mão de obra com menos 17 trabalhadores que o esperado; e, para finalizar, o valor do investimento que excede em 5.95 milhares de euros o valor esperado. Este modelo por tentar equilibrar as coisas, acaba por não possuir nenhum valor muito positivo, tendo de ser analisado com atenção para verificar se compensa, ou não, aplicá-lo.

Exercício d)

Nesta parte do trabalho, serão feitas as comparações dos diferentes planos de produção obtidos anteriormente, referindo se existe, planos de produção dominados ou não.

Primeiramente, é necessário que esta comparação não pode ser feita pelo valor do objetivo atribuído a cada um dos planos diferentes, sendo necessário realizar cálculos para verificar quais dos planos melhor respeitam as três metas definidas pela direção da Confeitaria.

É importante relembrar que um plano de produção é dominado se existe pelo menos uma solução que é igual ou melhor em relação a todos os objetivos, ou em pelo menos um objetivo, e não é pior em nenhum outro objetivo. Dando um simples exemplo, uma solução A é dominada por uma solução B se B é tão boa quanto A em todos os objetivos, mas é melhor do que A em pelo menos um dos objetivos. Em outras palavras, A é desnecessário e pode ser descartada porque há uma solução melhor ou igual em todos os objetivos.

Para então compararmos todos os modelos, iremos então verificar a solução final para cada uma das metas. Para isso serão realizadas as contas para cada uma das metas, que se encontram no *Jupyter notebook*. Em baixo, podemos visualizar uma tabela com as soluções finais:

Modelos/Metas	Meta1: Lucro	Meta2: Mão de Obra	Meta3: Investimento
Modelo 1 **D1=6, D2=3.4, D3=1**	107.6	40.8	55
Modelo Extra I **D1=6, D2=5.333, D3=1**	125	44.67	64.67
Modelo Extra II **D1=6, D2=2.385, D3=6.31**	125	60	92.38462
Modelo Extra MiniMax **D1=6, D2=3.43, D3=60.95**	111.47	43.76394	60.95327

Observando a tabela em cima, é possível visualizar os melhores valores de cada meta, que se encontram com fundo verde, e os piores, que se encontram com o fundo vermelho. Os valores intermediários encontram-se a amarelo.

Analisando a tabela com atenção, podemos concluir que não há nenhum plano de produção dominado. Assim, é um pouco difícil de concluir qual deles é o melhor, pois, todos possuem coisas melhores e piores que outros modelos.

Podemos é referir que o Modelo **MiniMax** é o mais equilibrado, apresentado sempre as segundas melhores soluções para cada uma das metas.

Exercício e)

Neste exercício será necessário refazer o primeiro modelo, mas agora com níveis de prioridade, isto é, será preciso realizar uma abordagem preemptiva. É importante referir que este exercício será com 2 modelos diferentes, um com os pesos originais e outro com pesos diferentes. Em baixo, podemos visualizar uma tabela com os respetivos níveis de prioridade:

Nível Prioridade	Fator	Meta
Primeiro nível	Mão de obra	$=$ **60** (empregados)
	Investimento	$\leq$ **55** (milhões de euros)
Segundo nível	Lucro a longo prazo	$\geq$ **125** (milhões de euros)

Modelo Original

Após observar a tabela, é importante referir que o modelo que o aplicado será o seguinte:

$$\text{Lex min Z} = \{\frac{10}{5} \times \frac{d_2^-}{60} + \frac{4}{5} \times \frac{d_2^+}{60} + 5 \times \frac{d_3^+}{55},\ 5 \times \frac{d_1^-}{125}\}$$

Em baixo, podemos visualizar então a criação das variáveis e a resolução dos problemas, pelo seu nível de prioridade.

Nível Prioritário

Para este nível, começaremos então por criar as restrições, referindo quais as variáveis e qual o modelo. É importante relembrar que a mão de obra e o investimento são restrições de níveis prioritárias.

Modelo

$$Min\ Z\ = \frac{10}{5}\times\frac{d_2^-}{60}+\frac{4}{5}\times\frac{d_2^+}{60}+5\times\frac{d_3^+}{55}$$

Sujeito a:

- Mão de obra: $5D_1+2D_2+4D_3+d_2^- - d_2^+ = 60\ (Empregados)$
    - **Aproximadamente**, 60 empregados;
- Investimento: $5D_1+5D_2+8D_3-d_3^+\leq 55\ (Milhares\ de\ euros)$
    - Investimento **não superior** a 55 Milhares de euros;

Nível prioritário

- $D_1\leq 6\ (RestriçãoD1)$
- $D_2\geq 2\ (RestriçãoD2)$
- $D_3\geq 1\ (RestriçãoD3)$

Restrições rígidas

- $\boldsymbol{D_1, D_2, D_3, d_2^-, d_2^+, d_3^+ \geq 0}$

Variáveis	**Valor**
Objective	0.617
$\boldsymbol{D_1}$	6
$\boldsymbol{D_3}$	2
$\boldsymbol{D_3}$	1.875
$\boldsymbol{d_2^-}$	18.5
$\boldsymbol{d_2^+}$	0
$\boldsymbol{d_3^+}$	0

Analisando os valores com atenção, é possível reparar que $Z^* = d_2^- = 18.5 \neq 0$, logo não é possível alcançar o nível de aspiração da mão de obra, sendo necessário atualizar este modelo. Apesar de $Z^* = d_2^+ = d_3^+ = 0$, não podemos continuar devido ao que foi dito anteriormente.

Para atualizar este valor, será necessário realizar o seguinte cálculo:

$60 - d_2^- = 60 - 18.5 = \lfloor 41.5 \rfloor = 41$, ter em conta que o arredondamento será feito para baixo, pois, não existe meio trabalhador e não podemos ter trabalhadores a mais.

Então, podemos começar por atualizar os valores das metas, e em seguida podemos visualizar eles atualizados:

- Mão de obra: $5D_1+2D_2+4D_3+d_2^- - d_2^+ = 41\ (Empregados)$
    - **Aproximadamente**, 41 empregados;
- Investimento: $5D_1+5D_2+8D_3-d_3^+\leq 55\ (Milhares\ de\ euros)$

Nível prioritário

- Investimento **não superior** a 55 Milhares de euros;

- $D_1 \leq 6\ (RestriçãoD1)$
- $D_2 \geq 2\ (RestriçãoD2)$
- $D_3 \geq 1\ (RestriçãoD3)$

Restrições rígidas

- $\boldsymbol{D_1, D_2, D_3, d_2^-, d_2^+, d_3^+ \geq 0}$

Em baixo podemos visualizar os resultados:

Variáveis	Valor
Objective	0
$\boldsymbol{D_1}$	6
$\boldsymbol{D_3}$	2
$\boldsymbol{D_3}$	1.75
$\boldsymbol{d_2^-}$	0
$\boldsymbol{d_2^+}$	0
$\boldsymbol{d_3^+}$	0

Visualizando a tabela em cima, podemos verificar $Z^* = d_2^- = d_2^+ = d_3^+ = 0$, logo, é possível alcançar o nível de aspiração tanto da **Mão de Obra** como do **Investimento**.

É interessante notar que foram produzidos:

- 6 Toneladas de D_1
- 2 Toneladas de D_2
- 1.75 Toneladas de D_3

Com estes valores todos corretos, podemos então prosseguir para o próximo nível de prioridade, isto é, o nível secundário.

Nível Secundário

Neste nível, será necessário não só atualizar o modelo, como também atualizar e acrescentar algumas restrições. É importante relembrar que só podemos avançar para este nível quando os desvios do nível anterior forem zero. De seguida serão demonstradas as seguintes alterações.

Modelo

$$Min\ Z = 5 \times \frac{d_1^-}{125}$$

Sujeito a:

- Mão de obra: $5D_1 + 2D_2 + 4D_3 = 41\ (Empregados)$
- Investimento: $5D_1 + 5D_2 + 8D_3 \leq 55\ (Milhares\ de\ euros)$
- Lucro a longo prazo: $12D_1 + 9D_2 + 5D_3 + d_1^- \geq 125\ (Milhares\ de\ euros)$ Nível secundário
    - Lucro a longo prazo **não inferior** a 125 Milhares de euros;
- $D_1 \leq 6\ (RestriçãoD1)$
- $D_2 \geq 2\ (RestriçãoD2)$
- $D_3 \geq 1\ (RestriçãoD3)$

Restrições rígidas

- $\boldsymbol{D_1, D_2, D_3, d_1^-, Q \geq 0}$

Após aplicar este modelo, obtive os seguintes valores:

Variáveis	Valor
Objective	0.79
$\boldsymbol{D_1}$	6
$\boldsymbol{D_3}$	3
$\boldsymbol{D_3}$	1.25
$\boldsymbol{d_1^-}$	19.75

Visualizando a tabela em cima, é possível concluir que o $d_1^- = 19.75 \neq 0$, logo não é possivel alcançar o nível de aspiração do Lucro a Longo Prazo. Deste modo, é necessário atualizar o nível do Lucro a Longo Prazo.

Para isso, iremos fazer o seguinte cálculo:

$125 - d_1^- = 125 - 19.75 = 105.25$, neste caso, não é necessário arredondar para baixo, pois, o valor 105.25 milhar de euros existe e faz sentido.

Então, podemos começar por atualizar os valores das metas, e em seguida podemos visualizar eles atualizados:

- Mão de obra: $5D_1 + 2D_2 + 4D_3 = 41\ (Empregados)$
- Investimento: $5D_1 + 5D_2 + 8D_3 \leq 55\ (Milhares\ de\ euros)$
- Lucro a longo prazo: $12D_1 + 9D_2 + 5D_3 + d_1^- \geq 105.25\ (Milhares\ de\ euros)$ Nível secundário
    - Lucro a longo prazo **não inferior** a 105.25 Milhares de euros;
- $D_1 \leq 6\ (RestriçãoD1)$
- $D_2 \geq 2\ (RestriçãoD2)$
- $D_3 \geq 1\ (RestriçãoD3)$

Restrições rígidas

- $\boldsymbol{D_1, D_2, D_3, d_1^-, Q \geq 0}$

Em baixo podemos visualizar os resultados:

Variáveis	Valor
Objective	0
$\boldsymbol{D_1}$	6
$\boldsymbol{D_3}$	3
$\boldsymbol{D_3}$	1.25
$\boldsymbol{d_1^-}$	0

Visualizando os resultados em cima, é possível concluir que $Z^* = d_1^- = 0$, logo, é possível alcançar o nível de aspiração do **Lucro a Longo Prazo**.

Os níveis de produção permaneceram inalterados, uma vez que, devido às limitações do modelo, o lucro máximo atingível já não era capaz de ultrapassar os 125 milhares de euros. Assim, era esperado que a solução ótima se mantivesse inalterada.

Conclusão

Podemos então concluir que, após realizar esta abordagem preemptiva, chegámos à conclusão de que foram produzidas:

- 6 Toneladas de D_1
- 3 Toneladas de D_2
- 1.25 Toneladas de D_3

Falando agora dos valores de cada uma das restrições, o **Lucro a Longo Prazo** foi de 105.25 milhares de euros (19.75 milhares de euros inferior ao valor alvo); o **Investimento** foi de 55 milhares de euros, respeitando o valor alvo; a **Mão de Obra** foi de 41 trabalhadores (19 trabalhadores abaixo do valor alvo).

Analisando os valores com atenção, este modelo não só não parece ser um excelente modelo, como também parece que os pedidos da direção da confeitaria não foram totalmente respeitados, devido aos valores das variáveis que impossibilitaram tal coisa. A mão de obra ficou muito abaixo do valor alvo, algo negativo para o modelo

Modelo Extra com pesos diferentes

Nesta parte, será feito outro modelo, mas com pesos diferentes (estes pesos foram escolhidos de forma propositada para os valores finais serem diferentes)

$$\text{Lex min Z} = \{1 \times \frac{d_2^-}{60} + 3 \times \frac{d_2^+}{60} + 3 \times \frac{d_3^+}{55},\ 1 \times \frac{d_1^-}{125}\}$$

Em baixo, podemos visualizar então a criação das variáveis e a resolução dos problemas, pelo seu nível de prioridade.

Nível Prioritário

Para este nível, começaremos então por criar as restrições, referindo quais as variáveis e qual o modelo. É importante relembrar que a mão de obra e o investimento são restrições de níveis prioritárias.

Modelo

$$Min\ Z\ = 3 \times \frac{d_2^-}{60} + 3 \times \frac{d_2^+}{60} + 1 \times \frac{d_3^+}{55}$$

Sujeito a:

- Mão de obra: $5D_1 + 2D_2 + 4D_3 + d_2^- - d_2^+ = 60\ (Empregados)$
  - **Aproximadamente**, 60 empregados;
- Investimento: $5D_1 + 5D_2 + 8D_3 - d_3^+ \leq 55\ (Milhares\ de\ euros)$
  - Investimento **não superior** a 55 Milhares de euros;

Nível prioritário

- $D_1 \leq 6\ (RestriçãoD1)$
- $D_2 \geq 2\ (RestriçãoD2)$
- $D_3 \geq 1\ (RestriçãoD3)$

Restrições rígidas

- $\boldsymbol{D_1, D_2, D_3, d_2^-, d_2^+, d_3^+ \geq 0}$

Variáveis	**Valor**
Objective	0.673
$\boldsymbol{D_1}$	6
$\boldsymbol{D_3}$	2
$\boldsymbol{D_3}$	6.5
$\boldsymbol{d_2^-}$	0
$\boldsymbol{d_2^+}$	0
$\boldsymbol{d_3^+}$	37

Analisando os valores com atenção, é possível reparar que $Z^* = d_3^+ = 37 \neq 0$, logo não é possível alcançar o nível de aspiração do Investimento, sendo necessário atualizar este modelo. Apesar de $Z^* = d_2^+ = d_2^- = 0$, não podemos continuar devido ao que foi dito anteriormente.

Para atualizar este valor, será necessário realizar o seguinte cálculo:

$55 + d_3^+ = 55 + 37 = 92$, sendo assim, a nova meta do investimento passa a ser 92 milhares de euros

Então, podemos começar por atualizar os valores das metas, e em seguida podemos visualizar eles atualizados:

- Mão de obra: $5D_1 + 2D_2 + 4D_3 + d_2^- - d_2^+ = 60\ (Empregados)$
  - **Aproximadamente**, 41 empregados;
- Investimento: $5D_1 + 5D_2 + 8D_3 - d_3^+ \leq 92\ (Milhares\ de\ euros)$
  - Investimento **não superior** a 55 Milhares de euros;

Nível prioritário

- $D_1 \leq 6\ (RestriçãoD1)$
- $D_2 \geq 2\ (RestriçãoD2)$
- $D_3 \geq 1\ (RestriçãoD3)$

Restrições rígidas

- $\boldsymbol{D_1, D_2, D_3, d_2^-, d_2^+, d_3^+ \geq 0}$

Em baixo podemos visualizar os resultados:

Variáveis	**Valor**
Objective	0
$\boldsymbol{D_1}$	6
$\boldsymbol{D_3}$	2
$\boldsymbol{D_3}$	6.5
$\boldsymbol{d_2^-}$	0
$\boldsymbol{d_2^+}$	0
$\boldsymbol{d_3^+}$	0

Visualizando a tabela em cima, podemos verificar $Z^* = d_2^- = d_2^+ = d_3^+ = 0$, logo, é possível alcançar o nível de aspiração tanto da **Mão de Obra** como do **Investimento**.

É interessante notar que foram produzidos:

- 6 Toneladas de D_1
- 2 Toneladas de D_2
- 6.5 Toneladas de D_3

Com estes valores todos corretos, podemos então prosseguir para o próximo nível de prioridade, isto é, o nível secundário.

Nível Secundário

Neste nível, será necessário não só atualizar o modelo, como também atualizar e acrescentar algumas restrições. É importante relembrar que só podemos avançar para este nível quando os desvios do nível anterior forem zero. De seguida serão demonstradas as seguintes alterações.

Modelo

$$Min\ Z \ = \ 1 \times \frac{d_1^-}{125}$$

Sujeito a:

- Mão de obra: $5D_1 + 2D_2 + 4D_3 = 60\ (Empregados)$
- Investimento: $5D_1 + 5D_2 + 8D_3 \leq 92\ (Milhares\ de\ euros)$
- Lucro a longo prazo: $12D_1 + 9D_2 + 5D_3 + d_1^- \geq 125\ (Milhares\ de\ euros)$ } Nível secundário
    - Lucro a longo prazo **não inferior** a 125 Milhares de euros;
- $D_1 \leq 6\ (RestriçãoD1)$
- $D_2 \geq 2\ (RestriçãoD2)$
- $D_3 \geq 1\ (RestriçãoD3)$

Restrições rígidas

- $\boldsymbol{D_1, D_2, D_3, d_1^-, Q \geq 0}$

Após aplicar este modelo, obtive os seguintes valores:

Variáveis	**Valor**
Objective	0.02
$\boldsymbol{D_1}$	6
$\boldsymbol{D_3}$	2
$\boldsymbol{D_3}$	6.5
$\boldsymbol{d_1^-}$	0

Visualizando os resultados em cima, é possível concluir que $Z^* = d_1^- = 0$, logo, é possível alcançar o nível de aspiração do **Lucro a Longo Prazo**. É importante referir que, estranhamente, o valor do **Objective** não foi igual a zero, tendo atingido um valor muito próximo deste, nomeadamente, 0.02.

Conclusão

Podemos então concluir que, após realizar esta abordagem preemptiva, chegámos à conclusão de que foram produzidas:

- 6 Toneladas de D_1
- 2 Toneladas de D_2
- 6.5 Toneladas de D_3

Falando agora dos valores de cada uma das restrições, o **Lucro a Longo Prazo** foi de 125 milhares de euros exatamente igual ao seu valor alvo; o **Investimento** foi de 92 milhares de euros, tendo ficado acima do seu valor alvo em 37 milhares de euros; a **Mão de Obra** foi de 60 trabalhadores, exatamente igual ao seu valor alvo.

Analisando os valores com atenção, este modelo apresenta 2 soluções perfeitas, sendo estas o lucro a longo prazo e a mão de obra, respeitando por completo os objetivos da confeitaria. Por outro lado, o modelo falha completamente em relação ao investimento, apresentando uma solução superior a 37 milhares de euros que o valor alvo.

Anexos

Nesta parte do trabalho, serão apresentados pormenores extras do trabalho, não sendo necessária a visualização destes para a compreensão dos resultados, sendo apenas um extra do mesmo.

Código do exercício A/B

```
import pandas as pd
from pulp import LpMaximize, LpMinimize, LpProblem, LpStatus, lpSum, LpVariable
from pulp import GLPK
#
# Nota: (LpMinimize or 1, which is the default) or maximization (LpMaximize or -1)
#
# Create the model
model = LpProblem(name="TrabalhoIndividual", sense=LpMinimize)

#
# Initialize the decision variables
x = {i: LpVariable(name=f"x{i}", lowBound=0) for i in range(1, 4)}
dm1 = LpVariable(name=f"dm1", lowBound=0)
dm2 = LpVariable(name=f"dm2", lowBound=0)
dM2 = LpVariable(name=f"dM2", lowBound=0)
dM3 = LpVariable(name=f"dM3", lowBound=0)

# Add the constraints to the model
model += (12 * x[1] + 9 * x[2] + 5 * x[3] + dm1 >= 125, "Lucro a longo prazo, milhares de euros")
model += (5 * x[1] + 2 * x[2] + 4 * x[3] + dm2 - dM2 == 60, "Mao de obra")
model += (5 * x[1] + 5 * x[2] + 8 * x[3] - dM3 <= 55, "Investimento, milhares de euros")
model += (x[1] <= 6, "Restricao D1")
model += (x[2] >= 2, "Restricao D2")
model += (x[3] >= 1, "Restricao D3")

# Add the objective function to the model
vam = [125, 60, 60, 55]
peso = [5, 10/5, 4/5, 5]
obj_func = (peso[0]/vam[0]) * dm1 + (peso[1]/vam[1]) * dm2 + (peso[2]/vam[2]) * dM2 + (peso[3]/vam[3]) * dM3
model += obj_func
#
# Formulação (visualização do modelo matemático de forma a conferir os dados)
model
```

Output

```
objective: 1.3359999999999999
x1: 6.0
x2: 3.4
x3: 1.0
dm1: 17.4
dm2: 19.2
dM2: 0.0
dM3: 0.0
Lucro_a_longo_prazo,_milhares_de_euros: -3.552713678800501e-15
Mao_de_obra: 0.0
Investimento,_milhares_de_euros: 0.0
Restricao_D1: 0.0
Restricao_D2: 1.4
Restricao_D3: 0.0
```

Código do exercício C

Modelo Extra I

```
import pandas as pd
from pulp import LpMaximize, LpMinimize, LpProblem, LpStatus, lpSum, LpVariable
from pulp import GLPK
#
# Nota: (LpMinimize or 1, which is the default) or maximization (LpMaximize or -1)
#
# Create the model
model = LpProblem(name="TrabalhoIndividual", sense=LpMinimize)

#
# Initialize the decision variables
x = {i: LpVariable(name=f"x{i}", lowBound=0) for i in range(1, 4)}
dm1 = LpVariable(name=f"dm1", lowBound=0)
dm2 = LpVariable(name=f"dm2", lowBound=0)
dM2 = LpVariable(name=f"dM2", lowBound=0)
dM3 = LpVariable(name=f"dM3", lowBound=0)

# Add the constraints to the model
model += (12 * x[1] + 9 * x[2] + 5 * x[3] + dm1 >= 125, "Lucro a longo prazo, milhares de euros")
model += (5 * x[1] + 2 * x[2] + 4 * x[3] + dm2 - dM2 == 60, "Mao de obra")
model += (5 * x[1] + 5 * x[2] + 8 * x[3] - dM3 <= 55, "Investimento, milhares de euros")
model += (x[1] <= 6, "Restricao D1")
model += (x[2] >= 2, "Restricao D2")
model += (x[3] >= 1, "Restricao D3")

# Add the objective function to the model
vam = [125, 60, 60, 55]
peso = [3, 1, 1, 2]
obj_func = (peso[0]/vam[0]) * dm1 + (peso[1]/vam[1]) * dm2 + (peso[2]/vam[2]) * dM2 + (peso[3]/vam[3]) * dM3
model += obj_func
#
# Formulação (visualização do modelo matemático de forma a conferir os dados)
model
```

Output

```
objective: 0.6070702727272728
x1: 6.0
x2: 5.33333
x3: 1.0
dm1: 0.0
dm2: 15.3333
dM2: 0.0
dM3: 9.66667
Lucro_a_longo_prazo,_milhares_de_euros: -2.9999999995311555e-05
Mao_de_obra: -4.000000000026205e-05
Investimento,_milhares_de_euros: -1.9999999999242846e-05
Restricao_D1: 0.0
Restricao_D2: 3.33333
Restricao_D3: 0.0
```

Modelo Extra II

```python
import pandas as pd
from pulp import LpMaximize, LpMinimize, LpProblem, LpStatus, lpSum, LpVariable
from pulp import GLPK
#
# Nota: (LpMinimize or 1, which is the default) or maximization (LpMaximize or -1)
#
# Create the model
model = LpProblem(name="TrabalhoIndividual", sense=LpMinimize)

#
# Initialize the decision variables
x = {i: LpVariable(name=f"x{i}", lowBound=0) for i in range(1, 4)}
dm1 = LpVariable(name=f"dm1", lowBound=0)
dm2 = LpVariable(name=f"dm2", lowBound=0)
dM2 = LpVariable(name=f"dM2", lowBound=0)
dM3 = LpVariable(name=f"dM3", lowBound=0)

# Add the constraints to the model
model += (12 * x[1] + 9 * x[2] + 5 * x[3] + dm1 >= 125, "Lucro a longo prazo, milhares de euros")
model += (5 * x[1] + 2 * x[2] + 4 * x[3] + dm2 - dM2 == 60, "Mao de obra")
model += (5 * x[1] + 5 * x[2] + 8 * x[3] - dM3 <= 55, "Investimento, milhares de euros")
model += (x[1] <= 6, "Restricao D1")
model += (x[2] >= 2, "Restricao D2")
model += (x[3] >= 1, "Restricao D3")

# Add the objective function to the model
vam = [125, 60, 60, 55]
peso = [1, 2, 2, 1]
obj_func = (peso[0]/vam[0]) * dm1 + (peso[1]/vam[1]) * dm2 + (peso[2]/vam[2]) * dM2 + (peso[3]/vam[3]) * dM3
model += obj_func
#
# Formulação (visualização do modelo matemático de forma a conferir os dados)
model
```

Output

```
objective: 0.67972
x1: 6.0
x2: 2.38462
x3: 6.30769
dm1: 0.0
dm2: 0.0
dM2: 0.0
dM3: 37.3846
Lucro_a_longo_prazo,_milhares_de_euros: 2.999999999886427e-05
Mao_de_obra: 0.0
Investimento,_milhares_de_euros: 1.9999999999242846e-05
Restricao_D1: 0.0
Restricao_D2: 0.38461999999999996
Restricao_D3: 5.30769
```

Modelo MiniMax

```python
import pandas as pd
from pulp import LpMaximize, LpMinimize, LpProblem, LpStatus, lpSum, LpVariable
from pulp import GLPK
#
# Nota: (LpMinimize or 1, which is the default) or maximization (LpMaximize or -1)
#
# Create the model
model = LpProblem(name="TrabalhoIndividual", sense=LpMinimize)
vam = [125, 60, 60, 55]
peso = [5, 10/5, 4/5, 5]
#
# Initialize the decision variables
x = {i: LpVariable(name=f"x{i}", lowBound=0) for i in range(1, 4)}
dm1 = LpVariable(name=f"dm1", lowBound=0)
dm2 = LpVariable(name=f"dm2", lowBound=0)
dM2 = LpVariable(name=f"dM2", lowBound=0)
dM3 = LpVariable(name=f"dM3", lowBound=0)
Q = LpVariable(name=f"Q", lowBound=0)

# Add the constraints to the model
model += (12 * x[1] + 9 * x[2] + 5 * x[3] + dm1 >= 125, "Lucro a longo prazo, milhares de euros")
model += (5 * x[1] + 2 * x[2] + 4 * x[3] + dm2 - dM2 == 60, "Mao de obra")
model += (5 * x[1] + 5 * x[2] + 8 * x[3] - dM3 <= 55, "Investimento, milhares de euros")
model += (x[1] <= 6, "Restricao D1")
model += (x[2] >= 2, "Restricao D2")
model += (x[3] >= 1, "Restricao D3")
model += ((peso[0]/vam[0]) * dm1 <= Q, "desvio_inf_meta_1")
model += ((peso[1]/vam[1]) * dm2 <= Q, "desvio_inf_meta_2")
model += ((peso[2]/vam[2]) * dM2 <= Q, "desvio_sup_meta_2")
model += ((peso[3]/vam[3]) * dM3  <= Q, "desvio_sup_meta_3")

# Add the objective function to the model

obj_func = Q
model += obj_func
#
# Formulação (visualização do modelo matemático de forma a conferir os dados)
model
```

Output

```
objective: 0.541203
x1: 6.0
x2: 3.42539
x3: 1.72829
dm1: 13.5301
dm2: 16.2361
dM2: 0.0
dM3: 5.95323
Lucro_a_longo_prazo,_milhares_de_euros: 6.000000000128125e-05
Mao_de_obra: 4.0000000002038405e-05
Investimento,_milhares_de_euros: 4.0000000002038405e-05
Restricao_D1: 0.0
Restricao_D2: 1.4253900000000002
Restricao_D3: 0.7282900000000001
desvio_inf_meta_1: 1.0000000000287557e-06
desvio_inf_meta_2: 3.33333333379926e-07
desvio_sup_meta_2: -0.541203
desvio_sup_meta_3: -2.72727272765394e-07
```

Código do exercício e)

Modelo Original

Condições prioritários

```python
import pandas as pd
from pulp import LpMaximize, LpMinimize, LpProblem, LpStatus, lpSum, LpVariable
from pulp import GLPK
#
# Nota: (LpMinimize or 1, which is the default) or maximization (LpMaximize or -1)
#
# Create the model
model = LpProblem(name="TrabalhoIndividual", sense=LpMinimize)

#
# Initialize the decision variables
x = {i: LpVariable(name=f"x{i}", lowBound=0) for i in range(1, 4)}
dm2 = LpVariable(name=f"dm2", lowBound=0)
dM2 = LpVariable(name=f"dM2", lowBound=0)
dM3 = LpVariable(name=f"dM3", lowBound=0)

# Add the constraints to the model
model += (5 * x[1] + 2 * x[2] + 4 * x[3] + dm2 - dM2 == 60, "Mao de obra")
model += (5 * x[1] + 5 * x[2] + 8 * x[3] - dM3 <= 55, "Investimento, milhares de euros")
model += (x[1] <= 6, "Restricao D1")
model += (x[2] >= 2, "Restricao D2")
model += (x[3] >= 1, "Restricao D3")

# Add the objective function to the model
vam = [125, 60, 60, 55]
peso = [5, 10/5, 4/5, 5]
obj_func = (peso[1]/vam[1]) * dm2 + (peso[2]/vam[2]) * dM2 + (peso[3]/vam[3]) * dM3
model += obj_func
#
# Formulação (visualização do modelo matemático de forma a conferir os dados)
model
```

```
objective: 0.6166666666666667
x1: 6.0
x2: 2.0
x3: 1.875
dm2: 18.5
dM2: 0.0
dM3: 0.0
Mao_de_obra: 0.0
Investimento,_milhares_de_euros: 0.0
Restricao_D1: 0.0
Restricao_D2: 0.0
Restricao_D3: 0.875
```

Atualização do modelo

```
import pandas as pd
from pulp import LpMaximize, LpMinimize, LpProblem, LpStatus, lpSum, LpVariable
from pulp import GLPK
#
# Nota: (LpMinimize or 1, which is the default) or maximization (LpMaximize or -1)
#
# Create the model
model = LpProblem(name="TrabalhoIndividual", sense=LpMinimize)

#
# Initialize the decision variables
x = {i: LpVariable(name=f"x{i}", lowBound=0) for i in range(1, 4)}
dm2 = LpVariable(name=f"dm2", lowBound=0)
dM2 = LpVariable(name=f"dM2", lowBound=0)
dM3 = LpVariable(name=f"dM3", lowBound=0)

# Add the constraints to the model
model += (5 * x[1] + 2 * x[2] + 4 * x[3] + dm2 - dM2 == 41, "Mao de obra")
model += (5 * x[1] + 5 * x[2] + 8 * x[3] - dM3 <= 55, "Investimento, milhares de euros")
model += (x[1] <= 6, "Restricao D1")
model += (x[2] >= 2, "Restricao D2")
model += (x[3] >= 1, "Restricao D3")

# Add the objective function to the model
vam = [125, 60, 60, 55]
peso = [5, 10/5, 4/5, 5]
obj_func = (peso[1]/vam[1]) * dm2 + (peso[2]/vam[2]) * dM2 + (peso[3]/vam[3]) * dM3
model += obj_func
#
# Formulação (visualização do modelo matemático de forma a conferir os dados)
model
```

```
objective: 0.0
x1: 6.0
x2: 2.0
x3: 1.75
dm2: 0.0
dM2: 0.0
dM3: 0.0
Mao_de_obra: 0.0
Investimento,_milhares_de_euros: -1.0
Restricao_D1: 0.0
Restricao_D2: 0.0
Restricao_D3: 0.75
```

Condições secundárias

```python
import pandas as pd
from pulp import LpMaximize, LpMinimize, LpProblem, LpStatus, lpSum, LpVariable
from pulp import GLPK
#
# Nota: (LpMinimize or 1, which is the default) or maximization (LpMaximize or -1)
#
# Create the model
model = LpProblem(name="TrabalhoIndividual", sense=LpMinimize)

#
# Initialize the decision variables
x = {i: LpVariable(name=f"x{i}", lowBound=0) for i in range(1, 4)}
dm1 = LpVariable(name=f"dm1", lowBound=0)

# Add the constraints to the model
model += (12 * x[1] + 9 * x[2] + 5 * x[3] + dm1 >= 125, "Lucro a longo prazo, milhares de euros")
model += (5 * x[1] + 2 * x[2] + 4 * x[3] == 41, "Mao de obra")
model += (5 * x[1] + 5 * x[2] + 8 * x[3] <= 55, "Investimento, milhares de euros")
model += (x[1] <= 6, "Restricao D1")
model += (x[2] >= 2, "Restricao D2")
model += (x[3] >= 1, "Restricao D3")

# Add the objective function to the model
vam = [125, 60, 60, 55]
peso = [5, 10/5, 4/5, 5]
obj_func = (peso[0]/vam[0]) * dm1
model += obj_func
#
# Formulação (visualização do modelo matemático de forma a conferir os dados)
model
```

```
objective: 0.79
x1: 6.0
x2: 3.0
x3: 1.25
dm1: 19.75
Lucro_a_longo_prazo,_milhares_de_euros: 0.0
Mao_de_obra: 0.0
Investimento,_milhares_de_euros: 0.0
Restricao_D1: 0.0
Restricao_D2: 1.0
Restricao_D3: 0.25
```

Atualização do modelo

```
import pandas as pd
from pulp import LpMaximize, LpMinimize, LpProblem, LpStatus, lpSum, LpVariable
from pulp import GLPK
#
# Nota: (LpMinimize or 1, which is the default) or maximization (LpMaximize or -1)
#
# Create the model
model = LpProblem(name="TrabalhoIndividual", sense=LpMinimize)

#
# Initialize the decision variables
x = {i: LpVariable(name=f"x{i}", lowBound=0) for i in range(1, 4)}
dm1 = LpVariable(name=f"dm1", lowBound=0)

# Add the constraints to the model
model += (12 * x[1] + 9 * x[2] + 5 * x[3] + dm1 >= 105.25, "Lucro a longo prazo, milhares de euros")
model += (5 * x[1] + 2 * x[2] + 4 * x[3] == 41, "Mao de obra")
model += (5 * x[1] + 5 * x[2] + 8 * x[3] <= 55, "Investimento, milhares de euros")
model += (x[1] <= 6, "Restricao D1")
model += (x[2] >= 2, "Restricao D2")
model += (x[3] >= 1, "Restricao D3")

# Add the objective function to the model
vam = [125, 60, 60, 55]
peso = [5, 10/5, 4/5, 5]
obj_func = (peso[0]/vam[0]) * dm1
model += obj_func
#
# Formulação (visualização do modelo matemático de forma a conferir os dados)
model
```

```
objective: 0.0
x1: 6.0
x2: 3.0
x3: 1.25
dm1: 0.0
Lucro_a_longo_prazo,_milhares_de_euros: 0.0
Mao_de_obra: 0.0
Investimento,_milhares_de_euros: 0.0
Restricao_D1: 0.0
Restricao_D2: 1.0
Restricao_D3: 0.25
```

Modelo Extra

Nível Prioritário

```python
import pandas as pd
from pulp import LpMaximize, LpMinimize, LpProblem, LpStatus, lpSum, LpVariable
from pulp import GLPK
#
# Nota: (LpMinimize or 1, which is the default) or maximization (LpMaximize or -1)
#
# Create the model
model = LpProblem(name="TrabalhoIndividual", sense=LpMinimize)

#
# Initialize the decision variables
x = {i: LpVariable(name=f"x{i}", lowBound=0) for i in range(1, 4)}
dm2 = LpVariable(name=f"dm2", lowBound=0)
dM2 = LpVariable(name=f"dM2", lowBound=0)
dM3 = LpVariable(name=f"dM3", lowBound=0)

# Add the constraints to the model
model += (5 * x[1] + 2 * x[2] + 4 * x[3] + dm2 - dM2 == 60, "Mao de obra")
model += (5 * x[1] + 5 * x[2] + 8 * x[3] - dM3 <= 55, "Investimento, milhares de euros")
model += (x[1] <= 6, "Restricao D1")
model += (x[2] >= 2, "Restricao D2")
model += (x[3] >= 1, "Restricao D3")

# Add the objective function to the model
vam = [125, 60, 60, 55]
peso = [1, 3, 3, 1]
obj_func = (peso[1]/vam[1]) * dm2 + (peso[2]/vam[2]) * dM2 + (peso[3]/vam[3]) * dM3
model += obj_func
#
# Formulação (visualização do modelo matemático de forma a conferir os dados)
model
```

```
objective: 0.6727272727272727
x1: 6.0
x2: 2.0
x3: 6.5
dm2: 0.0
dM2: 0.0
dM3: 37.0
Mao_de_obra: 0.0
Investimento,_milhares_de_euros: 0.0
Restricao_D1: 0.0
Restricao_D2: 0.0
Restricao_D3: 5.5
```

Atualização do modelo

```
import pandas as pd
from pulp import LpMaximize, LpMinimize, LpProblem, LpStatus, lpSum, LpVariable
from pulp import GLPK
#
# Nota: (LpMinimize or 1, which is the default) or maximization (LpMaximize or -1)
#
# Create the model
model = LpProblem(name="TrabalhoIndividual", sense=LpMinimize)

#
# Initialize the decision variables
x = {i: LpVariable(name=f"x{i}", lowBound=0) for i in range(1, 4)}
dm2 = LpVariable(name=f"dm2", lowBound=0)
dM2 = LpVariable(name=f"dM2", lowBound=0)
dM3 = LpVariable(name=f"dM3", lowBound=0)

# Add the constraints to the model
model += (5 * x[1] + 2 * x[2] + 4 * x[3] + dm2 - dM2 == 60, "Mao de obra")
model += (5 * x[1] + 5 * x[2] + 8 * x[3] - dM3 <= 92, "Investimento, milhares de euros")
model += (x[1] <= 6, "Restricao D1")
model += (x[2] >= 2, "Restricao D2")
model += (x[3] >= 1, "Restricao D3")

# Add the objective function to the model
vam = [125, 60, 60, 55]
peso = [1, 3, 3, 1]
obj_func = (peso[1]/vam[1]) * dm2 + (peso[2]/vam[2]) * dM2 + (peso[3]/vam[3]) * dM3
model += obj_func
#
# Formulação (visualização do modelo matemático de forma a conferir os dados)
model
```

```
objective: 0.0
x1: 6.0
x2: 2.0
x3: 6.5
dm2: 0.0
dM2: 0.0
dM3: 0.0
Mao_de_obra: 0.0
Investimento,_milhares_de_euros: 0.0
Restricao_D1: 0.0
Restricao_D2: 0.0
Restricao_D3: 5.5
```

Nível secundário

```
import pandas as pd
from pulp import LpMaximize, LpMinimize, LpProblem, LpStatus, lpSum, LpVariable
from pulp import GLPK
#
# Nota: (LpMinimize or 1, which is the default) or maximization (LpMaximize or -1)
#
# Create the model
model = LpProblem(name="TrabalhoIndividual", sense=LpMinimize)

#
# Initialize the decision variables
x = {i: LpVariable(name=f"x{i}", lowBound=0) for i in range(1, 4)}
dm1 = LpVariable(name=f"dm1", lowBound=0)

# Add the constraints to the model
model += (12 * x[1] + 9 * x[2] + 5 * x[3] + dm1 >= 125, "Lucro a longo prazo, milhares de euros")
model += (5 * x[1] + 2 * x[2] + 4 * x[3] == 60, "Mao de obra")
model += (5 * x[1] + 5 * x[2] + 8 * x[3] <= 92, "Investimento, milhares de euros")
model += (x[1] <= 6, "Restricao D1")
model += (x[2] >= 2, "Restricao D2")
model += (x[3] >= 1, "Restricao D3")

# Add the objective function to the model
vam = [125, 60, 60, 55]
peso = [1, 3, 3, 1]
obj_func = (peso[0]/vam[0]) * dm1
model += obj_func
#
# Formulação (visualização do modelo matemático de forma a conferir os dados)
model
```

```
objective: 0.02
x1: 6.0
x2: 2.0
x3: 6.5
dm2: 0.0
dM2: 0.0
dM3: 0.0
Lucro_a_longo_prazo,_milhares_de_euros: 0.0
Mao_de_obra: 0.0
Investimento,_milhares_de_euros: 0.0
Restricao_D1: 0.0
Restricao_D2: 0.0
Restricao_D3: 5.5
```