4. Симметричные планарные световоды

Оптические волноводы – это диэлектрические структуры, по которым может распространяться электромагнитная энергия в видимой и инфракрасной областях спектра. Реальные волноводы обычно имеют осесимметричную структуру. В области сердцевины показатель преломления n может быть постоянным или изменяться по радиусу. Два случая, соответствующие ступенчатому и градиентному профилям показателя преломления, изображены на рис. 4.1. Для обеспечения направляющих свойств необходимо, чтобы показатель преломления сердцевины превосходил показатель преломления оболочки. В большинстве применений основная доля передаваемой мощности распространяется в сердцевине и лишь малая ее часть в оболочке, причем в области непосредственно примыкающей к сердцевине. Поэтому мы будем предполагать, что оболочка снаружи не ограничена.

Анализ волн в осесимметричном волокне является достаточно сложной математической задачей. Однако основные физические закономерности распространения света по волокну могут быть поняты на примере плоской модели волоконного световода. Структура планарного световода представлена на рис. 4.2. Сердцевина толщиной $2a$ расположена между двумя слоями оболочки. Ось z расположена вдоль средней линии между границами раздела. По оси y волновод неограничен; структура является двумерной. Квадрат показателя преломления $n^2(x)$ в сердцевине может быть либо постоянным по сечению, либо изменяющимся в поперечном направлении. Расчет двумерных электромагнитных полей существенно проще, чем трехмерных, так как соответствующие задачи сводятся к скалярным.

4.1. Планарный световод со ступенчатым профилем
4.1.1. Волновая теория

Ступенчатый профиль показателя преломления задается формулой:

$$n^2(x) = \begin{cases} n_1^2, |x| < a \\ n_2^2, |x| > a \end{cases} \tag{4.1}$$

Для *TE* – поляризации поперечная компонента электрического поля $E(x,z)$ удовлетворяет уравнению (1.63) и граничным условиям (1.64). Поля вида

$$E(x,z) = \psi(x)\exp(-i\beta z) \tag{4.2}$$

называют собственными волнами (модами), величину β называют постоянной распространения или продольным волновым числом моды. Функции $\psi(x)$ удовлетворяют обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка

$$\psi''(x) + \left[k^2 n^2(x) - \beta^2\right]\psi(x) = 0\,. \tag{4.3}$$

Эти функции непрерывны вместе со своими первыми производными на границах раздела сред:

$$\psi(-a-0) = \psi(-a+0)\,,\quad \psi(a-0) = \psi(a+0)\,, \tag{4.4}$$

$$\psi'(-a-0) = \psi'(-a+0)\,,\quad \psi'(a-0) = \psi'(a+0)\,, \tag{4.5}$$

и обращаются в нуль на бесконечности

$$\psi(\pm\infty) = 0\,. \tag{4.6}$$

Таким образом, искомые распределения полей мод являются собственными функциями однородной задачи (4.3) – (4.6), а величины β^2 - ее собственными числами.

Оказывается, что постоянные распространения β лежат в интервале

$$kn_2 < \beta < kn_1\,. \tag{4.7}$$

Введем следующие обозначения. Внутреннее поперечное волновое число:

$$u = (k^2 n_1^2 - \beta^2)^{1/2}\,. \tag{4.8}$$

Внешнее поперечное волновое число:

$$w = (\beta^2 - k^2 n_2^2)^{1/2} . \tag{4.9}$$

Нормализованная частота:

$$V = ka(n_1^2 - n_2^2)^{1/2} . \tag{4.10}$$

Легко видеть, что эти величины связаны соотношением:

$$\left(ua\right)^2 + \left(wa\right)^2 = V^2 . \tag{4.11}$$

В обозначениях (4.8), (4.9) уравнение (4.3) принимает вид

$$\psi''(x) + u^2\psi(x) = 0 , \quad |x| < a \tag{4.12}$$

$$\psi''(x) - w^2\psi(x) = 0 , \quad |x| > a . \tag{4.13}$$

Из соображений симметрии следует, что функции $\psi(x)$ могут быть либо четными, либо нечетными. Рассмотрим четные решения: $\psi(-x) = \psi(x)$.

Они имеют вид:

$$\psi(x) = \begin{cases} A\cos ux, |x| < a \\ B\exp(-wx), x > a \end{cases} \tag{4.14}$$

где A и B неопределенные коэффициенты. Из граничных условий при $x = a$ (4.4), (4.5) получим

$$A\cos ua - B\exp(-wa) = 0 ,$$

$$Au\sin ua - wB\exp(-wa) = 0 . \tag{4.15}$$

Система линейных алгебраических уравнений (4.15) будет иметь нетривиальное решение при условии

$$wa = uatgua . \tag{4.16}$$

Это уравнение необходимо решать совместно с (4.11).

Решение системы уравнений (4.16), (4.11) можно найти графически. На рис. 4.3 одновременно изображены графики функций (4.16) и (4.11). Кривая, построенная по (4.11), является окружностью, радиус которой увеличивается с ростом частоты. Горизонтальные и вертикальные координаты точек пересечения кривых определяют значения внутреннего и внешнего поперечных волновых чисел мод. При заданной частоте и заданных параметрах световода система уравнений (4.16), (4.11) имеет конечное число корней. При $V < \pi$ существует лишь один корень, определяющий волну TE_0.

При $\pi < V < 2\pi$ появляется второй корень, соответствующий волне TE_2 и так далее. Индекс волны равен числу нулей у функции $\psi(x)$ на интервале $(-\infty, +\infty)$.

Аналогично рассматривается случай нечетных решений $\psi(-x) = -\psi(x)$:

$$\psi(x) = \begin{cases} A\sin ux, |x| < a \\ B\exp(-wx), x > a \end{cases} \qquad (4.17)$$

Соответствующее характеристическое уравнение имеет вид

$$wa = -uactgua\ . \qquad (4.18)$$

Графический способ решения уравнений (4.18), (4.11) иллюстрирует рис. 4.4.

Таким образом, в планарном волноводе существует дискретный спектр волн TE_m. Число этих волн увеличивается с ростом V. Функции ψ_0 и ψ_1, соответствующие двум низшим типам волн, изображены на рис. 4.5. Критическая частота волны TE_m определяется из условия

$$V_m = \frac{\pi}{2} m \qquad (4.19)$$

При $V < V_m$ волна данного типа не существует. Как видно из рис. 4.3, 4.4 при $V \to V_m$ внешнее волновое число моды стремиться к нулю: $wa \to 0$. Это означает, что протяженность поля в оболочке неограниченно увеличивается. Если номер моды m фиксирован, а $V \to \infty$, то поле концентрируется внутри сердцевины: $wa \to \infty$, $ua \to \frac{\pi}{2} m$. При этом поперечное распределение поля стремится к синусоиде, обращающейся в нуль на границах раздела $x = \pm a$.

Точно также можно рассмотреть систему *TM* – поляризованных волн. Согласно (1.67) в этом случае вместо (4.5) необходимо использовать следующее граничное условие

$$\frac{1}{n_2^2}\psi'(-a-0) = \frac{1}{n_1^2}\psi'(-a+0), \quad \frac{1}{n_1^2}\psi'(a-0) = \frac{1}{n_2^2}\psi'(a+0)\,. \qquad (4.20)$$

Соответствующие характеристические уравнения для четных и нечетных *TM*–мод имеют вид

$$wa = \frac{n_2^2}{n_1^2} ua tg ua \ , \tag{4.21}$$

$$wa = -\frac{n_2^2}{n_1^2} ua ctg ua \ . \tag{4.22}$$

Критические частоты TM_m- мод определяются той же формулой (4.19), что и для TM_m– мод.

Безразмерную величину $\overline{\beta} = \beta/k$ называют коэффициентом замедления или эффективным показателем преломления моды. Зависимость коэффициента замедления *TE*– и *TM*–мод от нормализованной частоты изображена на рис. 4.6. С увеличением частоты замедление монотонно возрастает от значения n_2 на частоте отсечки до значения n_1 при $V \to \infty$.

Если $V < \frac{\pi}{2}$, то световод называют одномодовым; он поддерживает по одной моде в каждой поляризации. Моды TE_0 и TM_0 не имеют отсечки, то есть существуют при сколь угодно малых значениях параметра V. Однако для того, чтобы протяженность поля в оболочке была не слишком большой по сравнению с размером сердцевины, параметр V должен быть порядка единицы. В противном случае световод не сможет устойчиво направлять электромагнитную энергию в условиях реально существующих нерегулярностей. С практической точки зрения это эквивалентно существованию отсечки у волн TE_0 и TM_0. При $V >> 1$ общее число мод обеих поляризаций оценивается формулой

$$M = \frac{4}{\pi} V \ . \tag{4.23}$$

4. 1. 2. Лучевая теория

Существует простая связь между плоскими волнами и модами световода. Введем вместо продольного и поперечного (4. 8) волновых чисел угол θ_1' согласно формулам

$$\beta = kn_1 \sin\theta_1', \quad u = kn_1 \cos\theta_1' \tag{4.24}$$

и представим в (4.14) и (4.17) тригонометрические функции в экспоненциальной форме. Тогда поле моды внутри сердцевины выразится в виде суперпозиции двух плоских волн

$$\exp(-ikn_1 z \sin\theta_1' \pm ikn_1 x \cos\theta_1'). \tag{4.25}$$

Угол θ_1' имеет смысл угла падения на границы раздела сред $x = \pm a$. Легко видеть, что условие (4.7), определяющее диапазон возможных значений постоянной распространения β, сводится к условию полного отражения: $\sin\theta_1' > \dfrac{n_2}{n_1}$.

Таким образом, мода состоит из двух плоских волн, встречных по x направлений. Каждую из этих мод можно представлять себе как образованную отражением другой волны на границе раздела. Для обеспечения этого самосогласованного режима должно выполняться условие поперечного резонанса: полный набег фазы плоской волны при двойном проходе сердцевины и отражении от двух границ должен быть величиной, кратной 2π:

$$4kan_1 \cos\theta_1' + 2\varphi_{E,H} = 2\pi m, \quad m = 0, 1, 2, \ldots \tag{4.26}$$

где фазы $\varphi_{E,H}$ определены формулами (2.45), (2.46).

Согласно (2.41), (4.24), (4.9) угол преломления θ_2' в среду n_2 связан с внешним волновым числом w формулой

$$w = kn_2 \left|\cos\theta_2'\right|. \tag{4.27}$$

Выражая в (4.26) углы θ_1' и θ_2' через волновые числа моды u, w, получим характеристические уравнения для TE – поляризации

$$arctg\,\frac{w}{u} = ua - \frac{\pi}{2}m, \quad m = 0, 1, 2, .. \tag{4.28}$$

и для TM - поляризации

$$arctg\left(\frac{n_1^2}{n_2^2}\frac{w}{u}\right) = ua - \frac{\pi}{2}m, \quad m = 0, 1, 2, .. \tag{4.29}$$

Эти уравнения полностью эквивалентны полученным ранее уравнениям (4.16), (4.18), (4.21), (4.22). Действительно, вычисляя тангенс от обеих частей уравнений (4.28) и (4.29), при четных m получим уравнения (4.16), (4.21), а при нечетных m - уравнения (4.18) и (4.22).

Таким образом, метод лучевой оптики позволяет провести полное исследование мод в волноводе со ступенчатым профилем показателя преломления. Кроме того, такой способ позволяет понять механизм распространения и образования мод с помощью явления полного внутреннего отражения. Однако для более сложных структур применение метода лучевой оптики может оказаться затруднительным. В таких случаях легче решать непосредственно уравнения Максвелла с соответствующими граничными условиями.

4. 1. 3. Числовая апертура световода

В теории и практике волноведущих устройств и систем в оптическом диапазоне волн важную роль играет понятие числовой апертуры. Как уже упоминалось, волноведущие свойства световодов обусловлены явлением полного внутреннего отражения. Пусть луч света падает на торец световода под углом θ_0 (рис. 4.7). Показатель преломления внешней среды обозначим через n_0; обычно $n_0 < n_{1,2}$. Преломленный луч, распространяясь в сердцевине, достигает границы раздела сердцевины с оболочкой под углом падения θ_1'. Этот луч не проникает в оболочку и остается в сердцевине только в том случае, если угол падения θ_1' равен или больше угла полного внутреннего отражения. Таким образом, для граничного луча имеем

$$n_0 \sin\theta_0 = n_1 \sin\theta_1, \quad n_1 \sin\theta_1' = n_2, \quad \theta_1 + \theta_1' = \frac{\pi}{2}. \qquad (4.30)$$

Исключая из этой системы углы θ_1 и θ_1', получим

$$n_0 \sin\theta_0 = \left(n_1^2 - n_2^2\right)^{1/2}. \qquad (4.31)$$

Угол падения θ_0, соответствующий соотношению (4.31), ограничивает конус входных лучей, направляемых световодом. Величина $n_0 \sin\theta_0$ носит название числовой апертуры и обозначается через *NA*:

$$NA = n_0 \sin\theta_0 = \left(n_1^2 - n_2^2\right)^{1/2}. \qquad (4.32)$$

Числовая апертура световодов определяется разностью квадратов показателей преломления сердцевины и оболочки и обычно не превышает величину 0,3. Например, кварцевые световоды, широко применяющиеся в современных системах связи, имеют разность показателей преломления $n_1 - n_2 = 10^{-2} \div 10^{-3}$ при $n_1 = 1,46$. Из (4.32) получаем:

$$NA = (n_1^2 - n_2^2)^{1/2} \approx \left[2n_1(n_1 - n_2)\right]^{1/2} = 0,17 \div 0,05.$$

4. 1. 4. Вытекающие моды

У исследованных в предыдущих разделах мод постоянные распространения β являются вещественными числами (в пренебрежении диэлектрическими потерями). Поля этих мод экспоненциально спадают в оболочку. Такие моды принято называть поверхностными. Однако полученные характеристические уравнения, кроме конечного числа вещественных корней, имеют бесконечное число комплексных корней: $\beta = \beta' - i\beta''$. Их невозможно найти описанным графическим методом. Эти корни соответствуют так называемым вытекающим модам. Парциальные плоские волны, образующие эти моды, падают на границу раздела под углами, меньшими угла полного внутреннего отражения. Поэтому часть мощности высвечивается в оболочку. Поля этих мод экспоненциально нарастают при удалении от границы раздела вглубь оболочки. В световоде с профилем (4.1) эти волны не имеют практического значения из–за больших радиационных потерь. Однако при других распределениях показателя преломления вытекающие волны могут обладать малыми радиационными потерями ($\beta'' \ll \beta'$) и вносить существенный вклад в передачу световой мощности. Рассмотрим два примера таких световодов.

Волновод типа "канал в диэлектрике" (рис. 4.8). Вещественная часть постоянной распространения моды удовлетворяет условию: $\beta' < kn_1$. Модули коэффициентов отражения парциальных плоских волн при скользящем падении близки к единице (см. рис. 2.2а). Поэтому при большом значении параметра $ka\left(n_2^2 - n_1^2\right)^{1/2}$ низшие вытекающие моды имеют малые радиационные потери.

Волновод с двухслойной оболочкой (рис. 4.9). Вещественная часть постоянной распространения моды лежит в интервале: $kn_2 < \beta' < kn_1$. Так как на внутренних границах раздела имеет место эффект полного отражения, то радиационное затухание вытекающих мод экспоненциально уменьшается с увеличением толщины промежуточной оболочки. Эти волны называют туннелирующими. Терминология заимствована из квантовой механики, где частица имеет конечную вероятность преодолеть классически запрещенный потенциальный барьер (эффект туннелирования).

4. 1. 5. Фазовая и групповая скорости мод

Рассмотрим монохроматическую волну с частотой ω_0, падающую на торец световода ($z=0$) и возбуждающую в плоскости $z=0$ одну моду:

$$E\left(x,0,t\right) = \psi(x)e^{i\omega_0 t}. \tag{4.33}$$

Если на вход световода подан световой импульс, то

$$E\left(x,0,t\right) = \psi(x)\, f(t). \tag{4.34}$$

Функцию $f(t)$ можно представить в виде интеграла Фурье:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t}d\omega, \tag{4.35}$$

где

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt. \tag{4.36}$$

Очевидно, что в произвольном сечении световода поле будет иметь вид:

$$E\left(x,z,t\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \psi\left(x\right)F\left(\omega\right)e^{i(\omega t-\beta z)}d\omega, \tag{4.37}$$

где $\beta(\omega)$ – постоянная распространения моды.

Предположим, для определенности, что входной импульс имеет гауссову форму с длительностью *T*:

$$f(t) = e^{i\omega_0 t} \exp\left(-\frac{t^2}{2T^2}\right). \tag{4.38}$$

Из (4.36) и (4.38) получим выражение для спектра:

$$F(\omega) = (2\pi)^{1/2} T \exp\left\{-\frac{T^2(\omega-\omega_0)^2}{2}\right\}. \tag{4.39}$$

Спектр имеет гауссову форму с шириной спектральной линии $\delta\omega = 1/T$. Обычно

$$\frac{\delta\omega}{\omega_0} = \frac{1}{\omega_0 T} \ll 1. \tag{4.40}$$

Это означает, что в импульсе длительностью *T* содержится много периодов световых колебаний. Например для $T = 10^{-9}$ с=1нс на длине волны $\lambda_0 = 0{,}8$ мкм ($\omega_0 = 2{,}4 \cdot 10^{15} c^{-1}$) имеем $\delta\omega/\omega_0 = 4 \cdot 10^{-7}$.

Так как функция $F(\omega)$ отлична от нуля в очень узкой области, то в пределах этой области мы можем считать, что поле моды $\psi(x)$ не меняется, а $\beta(\omega)$ представить вблизи центральной частоты ω_0 в виде отрезка тейлоровского разложения:

$$\beta(\omega) = \beta^{(0)} + \beta^{(1)}(\omega-\omega_0) + \frac{1}{2}\beta^{(2)}(\omega-\omega_0)^2, \tag{4.41}$$

где

$$\beta^{(m)} = \left.\frac{d^m\beta}{d\omega^m}\right|_{\omega=\omega_0}.$$

Подставляя (4.39) и (4.41) в (4.37) и выполняя интегрирование, получим следующее выражение для поля в произвольном сечении *z*:

$$E(x,z,t) = \psi(x)\frac{T}{\left(T^2 + i\beta^{(2)}z\right)^{1/2}} e^{i\omega_0 t - i\beta^{(0)}z} \cdot \exp\left\{-\frac{\left(t-\beta^{(1)}z\right)^2}{2\left(T^2 + i\beta^{(2)}z\right)}\right\}. \tag{4. 42}$$

Квадрат модуля поля (он имеет смысл усредненной по периоду быстрых осцилляций $2\pi/\omega_0$ мгновенной интенсивности) равен

$$|E|^2 = |\psi|^2 \frac{T^2}{\left(T^4 + \left(\beta^{(2)}z\right)^2\right)^{1/2}} \exp\left\{-\frac{\left(t-\beta^{(1)}z\right)^2 T^2}{T^4 + \left(\beta^{(2)}z\right)^2}\right\}. \qquad (4.\ 43)$$

Рассмотрим сначала случай, когда в (4.41) можно ограничиться только первыми двумя членами (линейное приближение, $\beta^{(2)} = 0$). Из (4.42) следует, что в процессе распространения по световоду огибающая сигнала – гауссовский импульс – остается невозмущенной. При этом фаза (первый экспоненциальный множитель в (4.42)) и огибающая сигнала (второй сомножитель) распространяются вдоль оси z с разными скоростями. Фаза распространяется со скоростью

$$\upsilon_\Phi = \frac{\omega_0}{\beta^{(0)}} = \frac{\omega}{\beta(\omega)}\bigg|_{\omega=\omega_0} = c\Big/\frac{\beta}{k}\bigg|_{k=k_0}, \quad k = \frac{\omega}{c}, \qquad (4.44)$$

которая называется фазовой скоростью моды. Огибающая сигнала распространяется со скоростью, которую называют групповой скоростью моды:

$$\upsilon_{гр} = \frac{1}{\beta^{(1)}} = 1\Big/\frac{d\beta(\omega)}{d\omega}\bigg|_{\omega=\omega_0} = c\Big/\frac{d\beta}{dk}\bigg|_{k=k_0}. \qquad (4.45)$$

Обсудим теперь, к чему приводит учет третьего члена в разложении (4.41). Если $\beta^{(2)} \neq 0$, то, как следует из (4.43), гауссов импульс в процессе распространения расширяется. Это явление называют внутримодовой дисперсией. На достаточно больших расстояниях $\left(z\left|\beta^{(2)}\right| \gg T^2\right)$ ширина импульса $T(z)$ линейно возрастает с увеличением z:

$$T(z) = z\left|\beta^{(2)}\right|\Big/T = z\left|\beta^{(2)}\right|\delta\omega. \qquad (4.46)$$

Описанный подход можно применить и к проблеме передачи сигнала плоской волной, распространяющейся вдоль оси z в однородной изотропной среде с показателем преломления $n(\omega)$:

$$E(z,t) \propto \exp(i\omega t - iknz).$$

Здесь роль постоянной распространения β играет величина kn. Поэтому фазовая и групповая скорости плоской волны определяются формулами:

$$\upsilon_{\Phi} = c/n, \tag{4.47}$$

$$\upsilon_{гр} = c/N, \tag{4.48}$$

где N – так называемый групповой показатель преломления среды:

$$N = \frac{d}{dk}(kn) = n + k\frac{dn}{dk} = n + \omega\frac{dn}{d\omega} = n - \lambda\frac{dn}{d\lambda} \qquad (\lambda = 2\pi/k). \tag{4.49}$$

4. 2. Планарные световоды с градиентными профилями

Передача информации по оптическим волноводам обычно осуществляется с помощью передачи последовательности импульсов световой энергии. Каждый импульс в процессе распространения расширяется. Это приводит к снижению информационной емкости, так как близко расположенные импульсы невозможно различить на выходном конце световода.

Основной причиной расширения импульса в многомодовом световоде со ступенчатым профилем показателя преломления является различие групповых скоростей отдельных мод (межмодовая дисперсия). В планарном градиентном световоде за счет соответствующего выбора профиля межмодовую дисперсию можно свести к нулю, а в круглом градиентном световоде существенно уменьшить. Соответствующие оптимальные профили имеют форму, близкую к параболическому профилю.

4.2.1. Градиентный световод с нулевой межмодовой дисперсией

Рассмотрим профиль

$$n^2(x) = \frac{n_0^2}{ch^2 \frac{x}{b}}. \tag{4.50}$$

Для этого профиля решения краевой задачи (4.3), (4.6), определяющей *TE*–моды, выражаются через функции Лежандра:

$$\psi_m(x) = P_\nu^{m-\nu}\left(th\frac{x}{b}\right) \quad m = 0,1,2... \tag{4.51}$$

где

$$\nu = \left(k^2 n_0^2 b^2 + \frac{1}{4}\right)^{1/2} - \frac{1}{2}. \tag{4.52}$$

Постоянные распространения мод определяются формулой

$$\beta_m = \frac{\nu - m}{b}. \tag{4. 53}$$

Функции Лежандра $P_\nu^{m-\nu}$ при целочисленных значениях m сводятся к элементарным функциям. Для двух низших волн имеем:

$$\psi_0(x) = 1\Big/ch^\nu \frac{x}{b}, \tag{4. 54}$$

$$\psi_1(x) = sh\frac{x}{b}\Big/ch^\nu \frac{x}{b}. \tag{4. 55}$$

Из (4.45) и (4.53) видно, что групповая скорость моды не зависит от номера моды m.

Из (4.52) и (4.53) следует, что при выполнении условия $kn_0 b \gg 1$ световод будет поддерживать большое число мод: $M = \nu \approx kn_0 b$. В этом случае для постоянных распространения мод справедливо приближение

$$\beta_m \approx kn_0 - \frac{m + \frac{1}{2}}{b}. \tag{4.56}$$

Определим эффективный размер поля основной моды в многомодовом световоде. Используя в (4.54) при $|x| \ll b$ аппроксимацию $ch^2\frac{x}{b} \approx \exp\left(\frac{x^2}{b^2}\right)$,

получим

$$\psi_0(x) \approx \exp\left(-\frac{x^2}{2s^2}\right), \tag{4.57}$$

где $s = \left(\dfrac{b}{kn_0}\right)^{1/2} = b/M^{1/2}$ - размер пятна основной моды. Таким образом, поле основной моды имеет гораздо меньшую протяженность, чем масштаб b изменения показателя преломления. Поэтому нефизичное поведение показателя преломления при $|x| \ge b$ не оказывает заметного влияния на свойства низших мод.

4.2.2. Световод с параболическим профилем показателя преломления

Для параболического профиля:

$$n^2(x) = n_0^2\left(1 - \frac{x^2}{b^2}\right) \qquad (4.58)$$

решение краевой задачи (4.3), (4.6) имеет вид

$$\psi_m(x) = H_m\left(\frac{x}{s}\right)\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{x^2}{s^2}\right),\ m = 0,1,,2,... \qquad (4.59)$$

где

$$s = \left(\frac{b}{kn_0}\right)^{1/2} \qquad (4.60)$$

размер пятна основной моды, H_m - полиномы Эрмита:

$$H_m(x) = (-1)^m \exp\left(x^2\right)\frac{d^m}{dx^m}\exp\left(-x^2\right), \qquad (4.61)$$

$$H_0(x) = 1,\ H_1(x) = 2x,\ H_2(x) = 4x^2 - 2,...$$

Постоянные распространения выражаются формулой

$$\beta_m = kn_0\left(1 - \frac{2m+1}{kn_0 b}\right)^{1/2}. \qquad (4.62)$$

В пренебрежении материальной дисперсией для погонной задержки сигнала (величины обратной групповой скорости моды) получим

$$\tau_m = \frac{1}{c}\frac{d\beta_m}{dk} = \frac{n_0}{2c}\left(\frac{kn_0}{\beta_m} + \frac{\beta_m}{kn_0}\right). \qquad (4.63)$$

Отличие величины β_m / kn_0 от единицы при $kn_0 b \gg 1$ имеет порядок $1/kn_0 b$. Выражение $\frac{1}{2}\left(\frac{\beta_m}{kn_0}+\frac{kn_0}{\beta_m}\right)$ отличается от единицы на величину, которая имеет квадратичный порядок малости. Поэтому групповые задержки мод оказываются с высокой степенью точности одинаковыми:

$$\tau_m = \frac{n_0}{c} \quad . \tag{4.64}$$

Как мы видим, свойства мод у световодов с профилями (4.50) и (4.58) весьма близки.

4.2.3. Метод ВКБ

Существует всего лишь несколько градиентных профилей, которые позволяют получить точные аналитические решения волновых уравнений для полей мод. Большинство из них не представляет никакого практического интереса. Кроме того, полученные решения обычно нельзя выразить через простые функции. Поэтому возрастает роль приближенных, но универсальных методов расчета. Метод Венцеля – Крамерса – Бриллюэна (ВКБ – метод) разработан в квантовой механике. Он позволяет найти приближенные решения краевой задачи (4.3), (4.6) в случае световодов с медленно меняющимся показателем преломления.

Метод заключается в следующем. Вместо постоянной распространения β будем использовать пропорциональную ей величину $\bar{\beta} = \beta / k$ - коэффициент замедления моды. Введем функцию

$$p(x) = \left(n^2(x) - \bar{\beta}^2\right)^{1/2} . \tag{4.65}$$

Для направляемых мод и колоколообразного распределения $n^2(x)$ эта функция обращается в нуль в двух точках x_1 и x_2. Они называются каустиками моды. Постоянные распространения *TE*–мод находятся из характеристического уравнения:

$$k\int_{x_1}^{x_2} p(x)\,dx = \pi\left(m + \frac{1}{2}\right), \; m = 0,1,2,... \tag{4.66}$$

Соответствующие собственные функции в области между каустиками имеют осциллирующий характер:

$$\psi(x)=\frac{1}{|p|^{1/2}}\cos\left(k\int_x^{x_2}p(x)dx-\frac{\pi}{4}\right),\ x_1<x<x_2. \qquad (4.67)$$

Вне каустик собственные функции монотонно убывают:

$$\psi(x)=\frac{1}{2|p|^{1/2}}\exp\left(-k\left|\int_{x_2}^{x}p(x)dx\right|\right),\ x>x_2. \qquad (4.68)$$

Вблизи каустик ВКБ – приближение теряет смысл, так как функции $\psi(x)$ обращаются в бесконечность. Однако вне малой окрестности каустик ВКБ – приближение правильно передает характер поведения поля.

С помощью ВКБ – метода вычислим погонную задержку сигнала $\tau=\frac{1}{c}\frac{d\beta}{dk}$. Перепишем характеристическое уравнение (4.66) в виде

$$\int_{x_1}^{x_2}\left(k^2n^2(x)-\beta^2\right)^{1/2}dx=\pi\left(m+\frac{1}{2}\right),\ m=0,1,2,... \qquad (4.69)$$

Продифференцируем это уравнение по k:

$$-\beta\frac{d\beta}{dk}\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{\left(k^2n^2(x)-\beta^2\right)^{1/2}}+k\int_{x_1}^{x_2}\frac{n(x)N(x)dx}{\left(k^2n^2(x)-\beta^2\right)^{1/2}}=0, \qquad (4.70)$$

где $N=\frac{d}{dk}(kn)$ – групповой показатель преломления среды.

Отсюда получим

$$\tau=\frac{1}{c\bar{\beta}}\int_{x_1}^{x_2}\frac{n(x)N(x)dx}{\left(n^2(x)-\bar{\beta}^2\right)^{1/2}}\Bigg/\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{\left(n^2(x)-\bar{\beta}^2\right)^{1/2}}. \qquad (4.71)$$

Если материальной дисперсии нет ($N=n$), то погонная задержка моды принимает вид:

$$\tau=\frac{1}{c\bar{\beta}}\int_{x_1}^{x_2}\frac{n^2(x)dx}{\left(n^2(x)-\bar{\beta}^2\right)^{1/2}}\Bigg/\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{\left(n^2(x)-\bar{\beta}^2\right)^{1/2}}. \qquad (4.72)$$

4. 2. 4. Связь лучевых и модовых представлений

Траектории лучей, распространяющихся в градиентной среде с показателем преломления $n(x,z)$, можно исследовать с помощью системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Наряду с координатой луча x введем переменную, которая характеризует наклон луча, - импульс p. По определению

$$p = n\sin\theta, \tag{4. 73}$$

где θ– угол между касательной к траектории и осью z. Величины x и p на траектории луча изменяются в соответствии с уравнениями Гамильтона:

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{\partial H}{\partial x},\ \frac{dx}{dz} = \frac{\partial H}{\partial p}, \tag{4.74}$$

где функция Гамильтона (гамильтониан) равна

$$H(p,x,z) = -\left(n^2(x,z) - p^2\right)^{1/2}. \tag{4.75}$$

В регулярном волокне n^2, а следовательно и функция H, не зависят от z:

$$\frac{\partial H}{\partial z} = 0. \tag{4.76}$$

Поэтому

$$\frac{dH}{dz} = \frac{\partial H}{\partial z} + \frac{\partial H}{\partial p}\frac{dp}{dz} + \frac{\partial H}{\partial x}\frac{dx}{dz} = \frac{\partial H}{\partial z} = 0. \tag{4.77}$$

Таким образом, на траектории луча сохраняется величина

$$-H = \left(n^2(x) - p^2\right)^{1/2} = n(x)\cos\theta. \tag{4.78}$$

Эта формула по существу представляет собой закон преломления Снеллиуса, примененный к случаю непрерывной среды.

На траектории луча величины $x(z)$ и $p(z)$ являются периодическими функциями координаты z. Траектория луча в фазовой плоскости (x,p) имеет вид замкнутой кривой, определяемой уравнением:

$$p = \pm\left(n^2(x) - H^2\right)^{1/2}. \tag{4.79}$$

Импульс меняет знак в точках поворота луча x_1, x_2, которые находятся, как нули подкоренного выражения в (4.79): $H^2 = n^2(x_1) = n^2(x_2)$.

Сравнивая выражения (4.65), (4.78), (4.79), заключаем, что связь между волновыми и лучевыми представлениями устанавливаются формулой

$$H = -\overline{\beta}\,. \tag{4.80}$$

Моду можно рассматривать как совокупность лучей с разрешенными согласно правилу квантования (4.66) значениями гамильтониана *H*. Условие (4.66) имеет тот же физический смысл, что и фазовое условие (4.26) в световоде со ступенчатым профилем. Полуцелый индекс в правой части (4.66) возник из – за того, что фаза коэффициента отражения парциальной волны от каустики, как следует из (4.67), равна $\pi/2$. Лучи заполняют область между двумя каустиками $x = x_1$ и $x = x_2$, которые являются огибающими для этого семейства лучей. Положение каустик зависит от номера моды. Условием того, что луч (или мода) удерживаются световодом служит неравенство: $x_2 < a$. Заметим, что при преломлении на торце световода луч сохраняет значение импульса (4.73) (закон Снеллиуса). Поэтому из (4.79) следует, что конус лучей удерживаемых световодом (числовая апертура), определяется выражением:

$$n_0 \sin\theta_0 = \left(n^2\left(x\right) - n^2(a)\right)^{1/2}, \tag{4. 81}$$

где n_0– показатель преломления внешней среды. Числовая апертура максимальна на оси и уменьшается до нуля к его периферии.

Лучи, удерживаемые световодом, занимают в фазовом пространстве область, граница которой определяется уравнением:

$$p = \pm\left(n^2\left(x\right) - n^2\left(a\right)\right)^{1/2}. \tag{4. 82}$$

Левая часть уравнения (4.66) с точностью до множителя $k/2$ равна площади цикла (4.79) в фазовой плоскости $\left(x, p\right)$. Поэтому в многомодовом световоде общее число распространяющихся мод равно деленной на λ площади фазового пространства, которую занимают лучи, удерживаемые световодом.

Задачи

4.1. Используя уравнения Гамильтона показать, что задержка сигнала, рассчитанная по оптической длине лучевой траектории, выражается формулой (4.71).

4.2. Показать, что в световоде (4.50) траектории лучей проходящих через точку $x=0$, $z=0$ описываются формулой

$$x = b\,arsh\left[\left(sh\frac{x_2}{b}\right)sin\frac{z}{b}\right]. \qquad (4.83)$$

Все траектории (они отличаются значениями точек поворота x_2) пересекаются по оси z в точках $z = m\pi b$, $m = 0,1,2,...$

4.3. Показать, что для квадратичного профиля (4.58) ВКБ – формула для групповой задержки (4.72) совпадает со строгой формулой (4.63).

4.4. Показать, что в рамках метода ВКБ постоянные распространения мод в световоде с профилем (4.50) выражаются формулой (4.56).