

Казанский государственный университет

Кафедра общей физики

## **Матричный метод описания центрированных оптических систем**

Методическая разработка к чтению курса 'ОПТИКА' для студентов  
физического факультета.

Казань 1996

Печатается по решению методической комиссии физического факультета

Составители: ст. преп. Филиппова Е.А., проф. Фишман А.И.

### Матричный метод описания центрированных оптических систем.

В практической оптике обычно ставится задача получения изображений, точно передающих форму источника. Для этого используются различные оптические системы и инструменты. Большинство из них относится к центрированным оптическим системам (ЦОС), у которых центры кривизны отражающих и преломляющих поверхностей лежат на одной прямой, называемой главной оптической осью. Теория таких систем, разработанная Гауссом, становится особенно простой, когда все распространяющиеся в них пучки лучей параксиальны, т.е. проходят на небольшом расстоянии от оптической оси системы и образуют с ней малые углы. Гомоцентричность пучка параксиальных лучей при прохождении через центрированную систему не нарушается, поэтому для каждой точки протяженного предмета система формирует стигматическое, т.е. резкое изображение. Теория Гаусса устанавливает ряд так называемых кардинальных точек и плоскостей, задание которых полностью описывает все свойства оптической системы и позволяет пользоваться ею, не рассматривая реального хода лучей в системе.

Оптическая система представляет собой совокупность преломляющих и отражающих поверхностей, разделяющих пространство, в котором распространяется луч, на последовательность однородных сред (материал линз и промежутки между ними). Соответственно, траектория луча состоит из

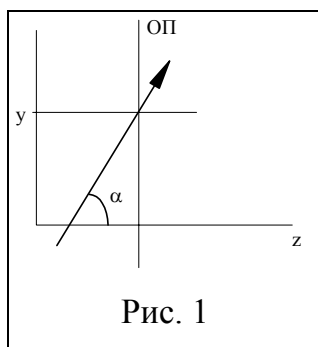


Рис. 1

отрезков прямых линий. Будем рассматривать только меридиональные лучи, т.е. лучи, лежащие в одной плоскости с главной оптической осью (ось  $z$  и, соответственно, плоскость  $yz$ ) (рис. 1).

Выберем некоторую плоскость  $Z = \text{const}$ , перпендикулярную оптической оси и назовем ее опорной плоскостью (ОП). Любой меридиональный луч можно определить заданием двух параметров: координаты  $Y$  точки пересечения луча с опорной плоскостью и угла  $\alpha$  наклона луча к оптической оси. Удобнее, однако, в

качестве второго параметра  $V$  использовать произведение показателя преломления среды  $n$  на угол  $\alpha$  :  $V = n\alpha$  .

Преобразование параметров луча при переходе от одной опорной плоскости ОП<sub>1</sub> к другой, ОП<sub>2</sub>, в параксиальном приближении будет линейным, т.е. для любой пары опорных плоскостей оно имеет вид:

$$Y_2 = A \cdot Y_1 + B \cdot V_1$$

$$V_2 = C \cdot Y_1 + D \cdot V_1$$

Это преобразование можно записать в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} Y_2 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} Y_1 \\ V_1 \end{pmatrix}$$

Опорные плоскости можно выбирать произвольно, в разных местах оптической системы. Для определенной пары плоскостей ОП<sub>1</sub> и ОП<sub>2</sub> преобразование параметров любого параксиального луча будет описываться одной и той же матрицей, элементы которой определяются оптическими свойствами пространства между ОП<sub>1</sub> и ОП<sub>2</sub>: расположением и радиусами преломляющих и отражающих поверхностей, а также показателями преломления сред, находящихся между ними. Матрица, описывающая преобразование лучей всей оптической системой, получается перемножением матриц, сопоставляемых отдельным промежуткам.

Для полного описания поведения луча в центрированной оптической системе необходимо знать матрицы преобразования для трех основных элементов: оптически однородного промежутка, преломляющей и отражающей поверхностей. Определим эти матрицы.

## 1. Матрица преобразования параметров светового луча для оптически однородного промежутка.

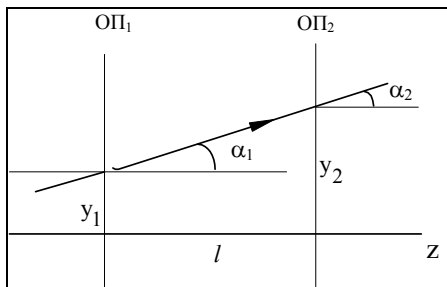


Рис. 2

Оптический промежуток зададим опорными плоскостями ОП<sub>1</sub> и ОП<sub>2</sub>. Расстояние между ними  $l$  и показатель преломления  $n$ . Из рис. 2 видно, что  $Y_2 = Y_1 + l \times \operatorname{tg} \alpha_1$ . В параксиальном приближении углы наклона лучей считаются малыми и, следовательно,  $\operatorname{tg} \alpha_1 = \alpha_1$  и  $Y_2 = Y_1 + l \times \alpha_1$ . Чтобы перейти от  $\alpha_1$  к  $V_1$ , домножим и разделим последнее слагаемое на  $n$ , тогда  $Y_2 = Y_1 + L V_1$ , где  $L = \frac{l}{n}$  - приведенная толщина оптического промежутка. Наклон луча при переходе от ОП<sub>1</sub> к ОП<sub>2</sub> не изменяется, т.е.  $V_2 = V_1$ . Таким образом, преобразование параметров луча оптически однородным промежутком можно описать с помощью матрицы Т:

$$\begin{matrix} Y_2 = Y_1 + L V_1 \\ V_2 = V_1 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} Y_2 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ V_1 \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

## 2. Матрица преобразования параметров луча для сферической преломляющей поверхности.

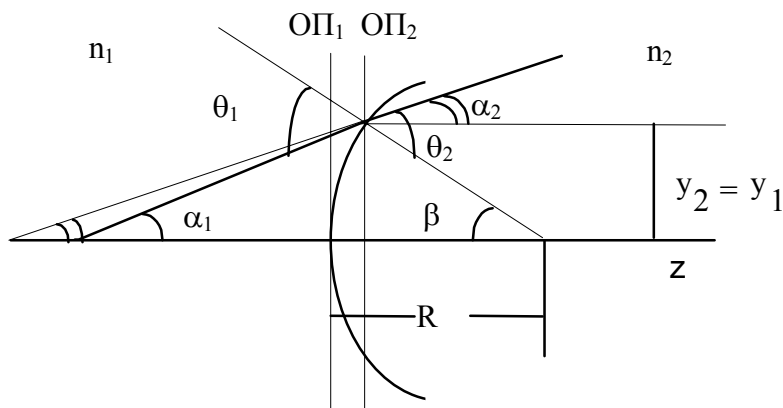


Рис. 3

Пусть радиус кривизны этой поверхности равен  $R$  и она разделяет две среды с показателями преломления  $n_1$  и  $n_2$ . Выберем опорные плоскости ОП<sub>1</sub> и ОП<sub>2</sub> по обе стороны в непосредственной близости от преломляющей поверхности (рис.3). Расстояние между ними  $R - R \cos \beta = R(1 - \cos \beta) = R \frac{\beta^2}{2}$  пренебрежимо мало. Поэтому можно считать, что луч пересекает обе плоскости на одном расстоянии от оси  $z$ , т.е.  $Y_1 = Y_2$ . Чтобы найти как преобразуется параметр  $V$ , воспользуемся законом преломления  $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$ , который в случае параксиального приближения имеет вид  $n_1 \theta_1 = n_2 \theta_2$ . По теореме о внешнем угле треугольника имеем  $\theta_1 = \beta + \alpha_1$  и  $\theta_2 = \beta + \alpha_2$ . Умножая первое из этих равенств на  $n_1$ , второе на  $n_2$  и используя закон преломления, находим  $n_2 \alpha_2 = \beta(n_2 - n_1) + n_1 \alpha_1$ . Учитывая, что  $n_1 \alpha_1 = V_1$  и  $n_2 \alpha_2 = V_2$ , имеем:

$$V_2 = V_1 - \frac{Y_1}{R}(n_2 - n_1) \quad \text{или} \quad V_2 = V_1 - \Phi Y_1, \quad \text{где} \quad \Phi = \frac{n_2 - n_1}{R} \quad - \quad \text{оптическая сила}$$

преломляющей поверхности. Вместе с  $Y_2 = Y_1$  это дает закон преобразования параметров луча при преломлении на сферической поверхности:

$$\begin{aligned} Y_2 &= Y_1 \\ V_2 &= -\Phi Y_1 + V_1 \end{aligned} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} Y_2 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\Phi & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ V_1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, матрица  $P$  преломляющей сферической поверхности имеет вид:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\Phi & 1 \end{pmatrix}.$$

Плоскую поверхность можно рассматривать как частный случай сферической с  $R \rightarrow \infty$ . Тогда  $\Phi=0$  и матрица преломления  $P$  будет единичной матрицей. Чтобы одни и те же формулы были справедливы для выпуклой и вогнутой поверхностей, значение  $R$  считают положительным, если центр кривизны лежит на оси  $z$  справа от границы (поверхность выпуклая) и отрицательным - в противном случае. Это правило является одним из положений так называемого правила знаков, используемого в геометрической оптике, которое заключается в следующем: расстояния, отсчитываемые слева направо положительны, справа налево - отрицательны; расстояния,

отсчитываемые от оси  $z$  вверх, положительны, вниз - отрицательны; углы, отсчитываемые от оси  $z$  против часовой стрелки, положительны, а по часовой стрелке - отрицательны.

### 3. Матрица преобразования параметров светового луча для сферической отражающей поверхности.

Закон отражения, с учетом знаков углов падающего и отраженного лучей, имеет вид  $\theta_1 = -\theta_2$  (угол считается положительным, если поворот луча к оси кратчайшим способом проводится по часовой стрелке). Формально закон отражения можно рассматривать как частный случай закона преломления при  $n_2 = -n_1$  и представить отражение луча как преломление в среду с отрицательным показателем преломления. Матрица преобразования параметров луча при отражении от сферической поверхности тогда будет иметь такой же вид, как и матрица преломления, если в выражении для оптической силы  $n_2$  заменить на  $(-n_1)$ :  $\Phi = -\frac{2n_1}{R}$ . Для выпуклого зеркала  $R > 0$  и оптическая сила отрицательна ( $P < 0$ ), для вогнутого - положительна ( $P > 0$ ).

Если после отражения луч движется в направлении отрицательных значений оси  $z$ , то толщина оптического промежутка  $l$  считается отрицательной. Так как для таких лучей и показатель преломления нужно считать отрицательным, то приведенная толщина  $L = \frac{l}{n}$ , будет положительной.

Поэтому матрица  $T$  для оптического промежутка не зависит от направления луча.

Получим в качестве примера матрицу преобразования параметров луча, прошедшего через толстую линзу. Толстая линза - это оптически однородная среда с показателем преломления  $n$ , ограниченная сферическими поверхностями с радиусами кривизны  $R_1$  и  $R_2$ . Расстояние между поверхностями вдоль оптической оси равно  $l$  (толщина линзы). Считаем, что линза находится в воздухе ( $n_0 = 1$ ). Поскольку мы имеем две преломляющие поверхности и оптический промежуток между ними, выбираем опорные

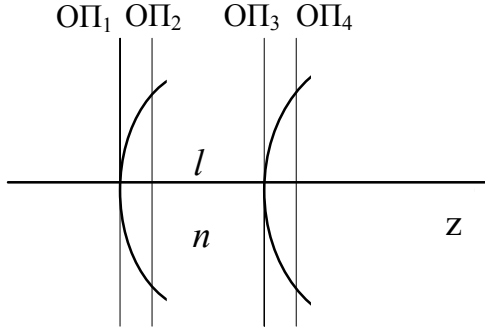


Рис. 4

плоскости в непосредственной близости от преломляющих поверхностей (рис.4). Пусть  $P_1$  и  $P_2$  - матрицы преломления для первой и второй поверхности, соответственно, а  $T$  - матрица оптического промежутка.

Обозначим:

$\begin{pmatrix} Y_1 \\ V_1 \end{pmatrix}$  - параметры некоторого луча на

ОП<sub>1</sub> (перед входом в линзу),  $\begin{pmatrix} Y_2 \\ V_2 \end{pmatrix}$  - параметры луча после преломления на

первой поверхности,  $\begin{pmatrix} Y_3 \\ V_3 \end{pmatrix}$  - после прохождения оптического промежутка с

приведенной толщиной  $L = l/n$ ,  $\begin{pmatrix} Y_4 \\ V_4 \end{pmatrix}$  - параметры на ОП<sub>4</sub> после преломления на

второй поверхности. Очевидно, что  $\begin{pmatrix} Y_4 \\ V_4 \end{pmatrix} = P_2 \begin{pmatrix} Y_3 \\ V_3 \end{pmatrix}$ , но  $\begin{pmatrix} Y_3 \\ V_3 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} Y_2 \\ V_2 \end{pmatrix}$ , т.е.

$$\begin{pmatrix} Y_4 \\ V_4 \end{pmatrix} = P_2 T \begin{pmatrix} Y_2 \\ V_2 \end{pmatrix} = P_2 T P_1 \begin{pmatrix} Y_1 \\ V_1 \end{pmatrix}.$$

Мы выразили параметры луча, вышедшего из линзы, через параметры луча, падающего на линзу. Следовательно, матрица преобразования луча в толстой линзе  $M = P_2 T P_1$  равна произведению матриц для ее отдельных элементов, взятых в обратном порядке. Выполняя перемножение, находим:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\Phi_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\Phi_1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & L \\ -\Phi_2 & 1 - L\Phi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\Phi_1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - L\Phi_1 & L \\ -(\Phi_1 + \Phi_2 - L\Phi_1\Phi_2) & 1 - L\Phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

$$\text{где } \Phi_1 = \frac{n-1}{R_1} \text{ и } \Phi_2 = \frac{1-n}{R_2}.$$



Элемент  $C$  полной матрицы преобразования  $M$ , взятый с обратным знаком, дает нам оптическую силу толстой линзы:

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 - L\Phi_1\Phi_2 .$$

Переходя от толстой линзы к тонкой, т.е. устремляя  $L \rightarrow 0$  , получим:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -(\Phi_1 + \Phi_2) & 1 \end{pmatrix} .$$

Т.е. матрица преобразования параметров луча в тонкой линзе имеет такой же вид, как матрица  $P$  преломления на одной сферической поверхности, но с оптической силой  $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$  . Следовательно оптическая сила тонкой линзы равна:

$$\Phi = \frac{n-1}{R_1} + \frac{1-n}{R_2} = (n-1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) .$$

Аналогичным способом, т.е. путем последовательного применения преобразования параметров луча отдельными элементами оптической системы, можно получить матрицу преобразования для произвольной ЦОС, если известны кривизна и взаимное расположение ее преломляющих и отражающих поверхностей, а также значения показателей преломления.

Предположим, что полная матрица некоторой ЦОС равна:

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

Зная ее элементы  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$ , можно легко найти кардинальные точки оптической системы: передний и задний фокусы ( $F_1$  и  $F_2$ ) системы, точки пересечения главных плоскостей  $H_1$  и  $H_2$  с главной оптической осью.

Известно, что задний главный фокус ЦОС - это точка, в которой собираются все лучи, падающие на систему слева параллельно главной оптической оси. Поэтому, чтобы найти положение заднего фокуса рассмотрим луч, входящий в систему параллельно оси  $z$  на некоторой высоте  $Y_1$  (рис.5).

Для такого луча  $\alpha_1 = 0$  и, соответственно,  $V_1 = n_1\alpha_1 = 0$  . На выходе из системы луч имеет параметры  $Y_2 = AY_1$  и  $V_2 = CY_1$  . С другой стороны  $V_2 = -n_2\alpha_2$  . Минус появился вследствие учета правила знаков. Пересечение продолжений

входящего параллельно оптической оси луча и луча, выходящего из системы, происходит в задней главной плоскости  $H_2$ . По определению фокусное расстояние  $f_2$  - это расстояние от задней главной плоскости  $H_2$  до заднего фокуса  $F_2$  системы. Оно равно  $f_2 = -\frac{Y_1}{\alpha_2} = -\frac{n_2 Y_1}{V_2} = -\frac{n_2 Y_1}{C Y_1} = -\frac{n_2}{C}$ . Найдем теперь расстояние от задней опорной плоскости ОП<sub>2</sub> до  $F_2$ .

$t_2 = -\frac{Y_2}{\alpha_2} = -\frac{n_2 Y_2}{V_2} = -\frac{n_2 A Y_1}{C Y_1} = -\frac{n_2 A}{C}$ . Зная  $f_2$  и  $t_2$  можно найти расстояние от ОП<sub>2</sub>

до  $H_2$  (расстояние отсчитываем влево, следовательно появляется знак минус):

$$z_2 = -(f_2 - t_2) = -f_2 + t_2 = \frac{n_2}{C} - \frac{A}{C} n_2 = n_2 \frac{(1-A)}{C}.$$

Аналогично можно найти положение переднего главного фокуса оптической системы и передней главной плоскости  $H_1$ . Для удобства нахождения кардинальных точек центрированной оптической системы

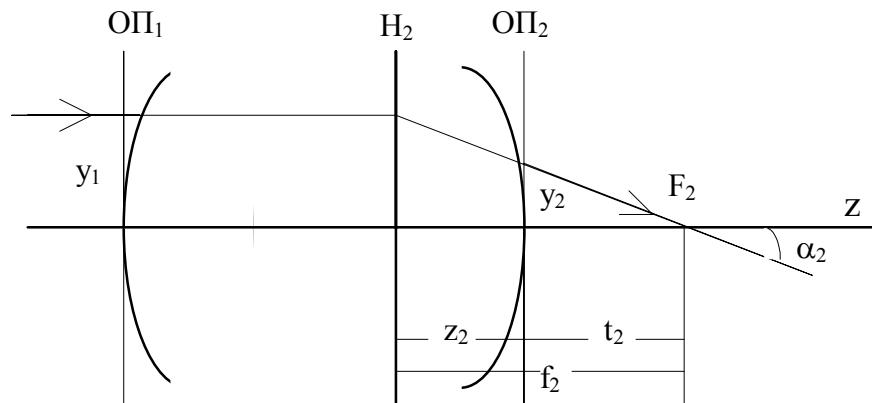


Рис.5

по известным элементам матрицы  $M$ , полученные результаты сведены в таблицу.

Фокусное расстояние оптической системы определяется элементом  $C$  матрицы преобразования. Как и у линзы, этот элемент, взятый с противоположным знаком, называется оптической силой системы  $\Phi = -C$ .

Таблица. Расстояния от опорных плоскостей до кардинальных точек ЦОС

$ОП_1 - F_1 \text{ --- } n_1 \frac{D}{C}$	$ОП_2 - F_2 \text{ --- } -n_2 \frac{A}{C}$
$H_1 - F_1 \text{ --- } f_1 = \frac{n_1}{C}$	$H_2 - F_2 \text{ --- } f_2 = -\frac{n_2}{C}$
$ОП_1 - H_1 \text{ --- } n_1 \frac{(D-1)}{C}$	$ОП_2 - H_2 \text{ --- } n_2 \frac{(1-A)}{C}$

Если элемент  $C$  матрицы  $M$  равен 0, то фокальные точки лежат в бесконечности (см. табл.). Такая система называется афокальной или телескопической. Примером может служить зрительная труба, установленная на бесконечность, когда задняя фокальная плоскость объектива совмещена с передней фокальной плоскостью окуляра. При  $C = 0$  наклон выходящего луча  $\alpha_2 = D\alpha_1$  не зависит от  $Y_l$ . Т.е. все лучи, падающие на систему под одним углом (параллельный пучок), дадут на выходе также параллельный пучок лучей.

Отношение углов наклона выходящих и входящих лучей  $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = D$  характеризует

угловое увеличение телескопической системы. Угловое увеличение зрительной трубы, определяемое элементом  $D$  матрицы  $M$ , показывает, во сколько раз угол, под которым виден бесконечно удаленный предмет в зрительную трубу, больше угла, под которым он был бы виден невооруженным глазом.

Разберем на конкретных примерах как найти кардинальные элементы и оптическую силу произвольных ЦОС.

#### Пример 1.

Рассчитать положение главных плоскостей и фокусов толстой выпукло-вогнутой стеклянной линзы, если радиус кривизны выпуклой поверхности  $R_1 = 10\text{см}$ , вогнутой  $R_2 = 5\text{см}$  и толщина линзы  $d = 3\text{см}$ .

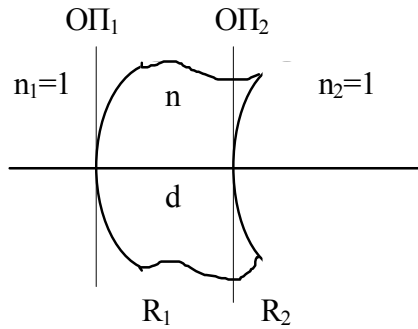


Рис. 6

Оптическая сила преломляющих поверхностей

$$\Phi_1 = \frac{n-1}{R_1} = \frac{0,5}{0,1} = 5 \text{ (дптр)}$$

$$\Phi_2 = \frac{1-n}{R_2} = -\frac{0,5}{0,05} = -10 \text{ (дптр)}$$

$$L = \frac{d}{n} = \frac{0,03}{1,5} = 0,02 \text{ (м)}.$$

Матрица преобразования параметров луча толстой линзой имеет вид

$$M = \begin{pmatrix} 1-L\Phi_1 & L \\ -(\Phi_1+\Phi_2-L\Phi_1\Phi_2) & 1-L\Phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

Зная оптические силы преломляющих поверхностей  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$ , а также приведенную толщину оптического промежутка  $L$ , можно легко найти элементы матрицы  $M$ :

$$A = 1 - L\Phi_1 = 1 - 0,02 \cdot 5 = 0,9; B = L = 0,02 \text{ м};$$

$$C = -(\Phi_1 + \Phi_2 - L\Phi_1\Phi_2) = -(5 - 10 + 0,02 \cdot 5 \cdot 10) = 4 \text{ м}^{-1}; D = 1 - L\Phi_2 = 1 + 0,02 \cdot 10 = 1,2.$$

Теперь, воспользовавшись таблицей, найдем кардинальные точки системы:

$$\text{ОП}_1 - F_1 \quad \frac{D}{C} = 0,3 \text{ м}$$

$$\text{ОП}_1 - H_1 \quad \frac{D-1}{C} = 0,05 \text{ м}$$

$$H_1 - F_1 \quad f_1 = \frac{1}{C} = 0,25 \text{ м}$$

$$\text{ОП}_2 - F_2 \quad -\frac{A}{C} = -\frac{0,9}{4} = -0,225 \text{ м}$$

$$\text{ОП}_2 - H_2 \quad \frac{1-A}{C} = \frac{0,1}{4} = 0,025 \text{ м}$$

$$H_2 - F_2 \quad f_2 = -\frac{1}{C} = -0,25 \text{ м}$$

Изобразим на рис. 7 положение главных плоскостей и фокусов.

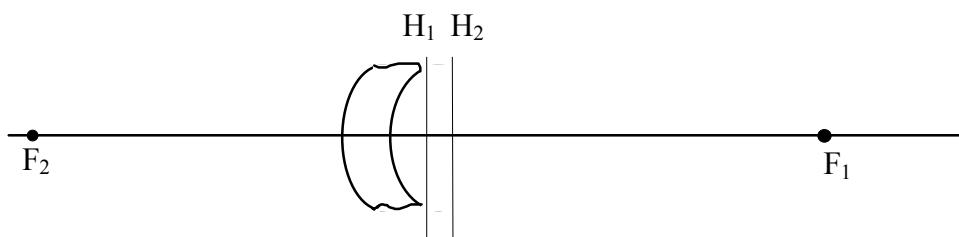


Рис. 7

*Пример 2.*

Имеются две тонкие симметричные линзы: одна собирающая с показателем преломления  $n_1 = 1,70$ , другая рассеивающая с  $n_2 = 1,51$ . Обе линзы имеют одинаковый радиус кривизны поверхностей  $R = 10$  см. Линзы сложили вплотную и погрузили в воду. Каково фокусное расстояние этой системы в воде? (Показатель преломления воды  $n_0$ ).

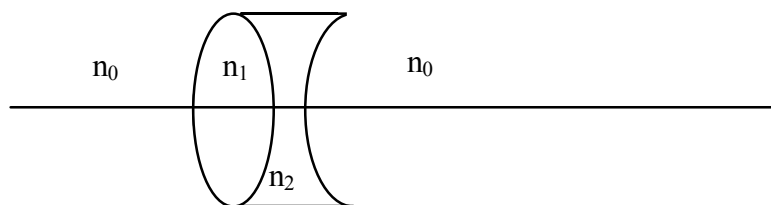


Рис.8

Оптическая система имеет три преломляющие поверхности, разделенные двумя оптически однородными промежутками, первый - толщины  $l_1$  с показателем преломления  $n_1$ , второй -  $l_2$ ,  $n_2$ . Поэтому результирующая матрица преобразования параметров луча данной системой имеет вид:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\Phi_3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\Phi_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\Phi_1 & 1 \end{pmatrix},$$

где  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$  и  $\Phi_3$  - оптические силы первой, второй и третьей преломляющих поверхностей, соответственно. Но поскольку линзы тонкие  $L_1 = \frac{l_1}{n}$  и  $L_2 = \frac{l_2}{n}$  можно считать пренебрежимо малыми, и, следовательно, матрицы оптических промежутков превращаются в единичные матрицы. Тогда

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -(\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3) & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдем оптическую силу преломляющих поверхностей:  $\Phi_1 = \frac{n_1 - n_0}{R}$ ,

$\Phi_2 = \frac{n_2 - n_1}{-R} = \frac{n_1 - n_2}{R}$ ,  $\Phi_3 = \frac{n_0 - n_2}{R}$ . Оптическая сила системы  $\Phi$  равна:

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 = \frac{n_1 - n_0}{R} + \frac{n_1 - n_2}{R} + \frac{n_0 - n_2}{R} = \frac{2(n_1 - n_2)}{R} > 0,$$

т.е. система собирающая. Элемент  $C = -\frac{2(n_1 - n_2)}{R}$ . Тогда задний главный фокус

$$f_2 = -\frac{n_0}{C} = \frac{n_0 R}{2(n_1 - n_2)}, \text{ а передний - } f_1 = \frac{n_0}{C} = -\frac{n_0 R}{2(n_1 - n_2)}.$$

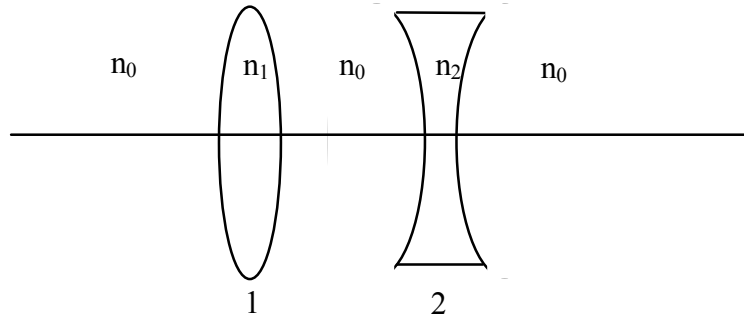


Рис. 9

Решить эту задачу можно, иначе. Система, состоящая из двух тонких линз, погруженных в воду, преобразует параметры луча следующим образом:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\Phi' & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\Phi'' & 1 \end{pmatrix}. \text{ Здесь первая матрица - матрица преобразования}$$

двояковогнутой линзой и  $\Phi'$  - оптическая сила этой же линзы; вторая - матрица оптического промежутка между линзами, а  $L$  - его приведенная длина; третья матрица - матрица преобразования двояковыпуклой линзой и  $\Phi''$  - ее оптическая сила.

$$\Phi'' = \frac{n_1 - n_0}{R} + \frac{n_0 - n_1}{-R} = \frac{2(n_1 - n_0)}{R}, \quad \Phi' = \frac{n_2 - n_0}{R} + \frac{n_0 - n_2}{R} = \frac{2(n_0 - n_2)}{R}.$$

Сближая линзы согласно условию задачи, т.е.  $L \rightarrow 0$ , получаем:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\Phi' & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\Phi'' & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -(\Phi' + \Phi'') & 1 \end{pmatrix}, \quad \Phi' + \Phi'' = \frac{2(n_1 - n_2)}{R},$$

т.е. пришли к тому же результату.

Таким образом, если известны матрицы преобразования отдельных элементов сложной оптической системы (толстые, тонкие линзы), то матрицу  $M$  всей системы можно получить путем последовательного перемножения этих матриц в обратном порядке с учетом матриц оптических промежутков.

Итак, до сих пор мы пользовались матрицей преобразования параметров лучей  $M$  между опорными плоскостями, проходящими через переднюю и заднюю преломляющие поверхности оптической системы. Зная  $M$ , можно легко найти матрицы преобразования луча между двумя главными плоскостями  $M_H$  и между двумя фокальными плоскостями  $M_F$ . Рассмотрим для примера получение  $M_H$ :  $M_H = T_2 M T_1$ , где  $T_2$  - матрица для оптического промежутка от ОП<sub>2</sub> до  $H_2$  (его толщина  $\frac{1-A}{C}$ , см. таблицу),  $T_1$  - матрица оптического промежутка от  $H_1$  до ОП<sub>1</sub> (рис. 10). Его толщина  $\frac{1-D}{C}$ .

$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$  - матрица преобразования между ОП<sub>1</sub> и ОП<sub>2</sub>. Считаем для простоты, что оптическая система находится в воздухе, т.е.  $n_1 = n_2 = 1$ .

$$M_H = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1-A}{C} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1-D}{C} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Учитывая, что детерминант всех матриц}$$

преобразования равен 1, т.е.  $AD - BC = 1$ ,  $M_H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ C & 1 \end{pmatrix}$ . Любой

луч, падающий на  $H_1$ , выйдет из  $H_2$  на той же высоте, так как  $Y_2 = AY_1 + BV_1 = 1 \cdot Y_1 + 0 \cdot V_1 = Y_1$  (это соответствует определению главных плоскостей  $H_1$  и  $H_2$ ).

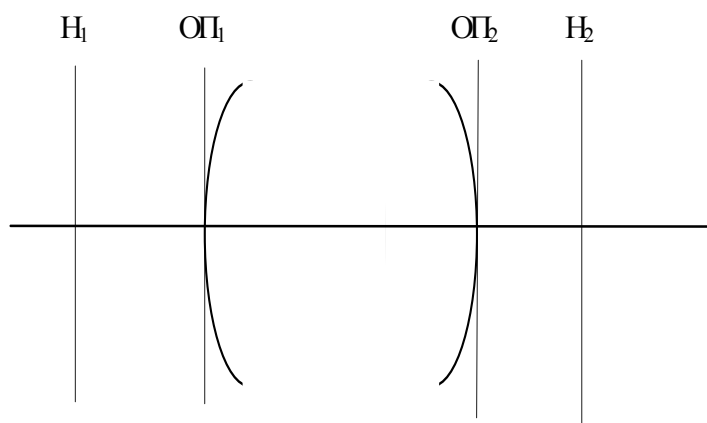


Рис. 10

Аналогично можно получить и  $M_F = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{C} \\ C & 0 \end{pmatrix}$ . Эта матрица показывает,

что все лучи, падающие на переднюю фокальную плоскость под одним углом

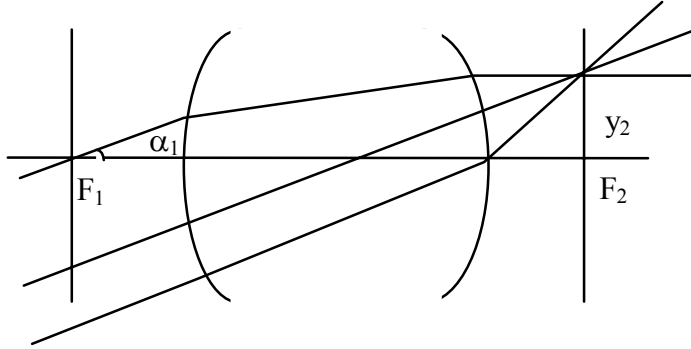


рис 11

$\alpha_1$  (рис.11), но на разной высоте (параллельный пучок лучей), пересекут заднюю фокальную плоскость в одной точке, координата  $Y_2$  которой зависит только от наклона

$\alpha_1$  падающих лучей и не зависит от  $Y_1$ . Действительно:

$$Y_2 = AY_1 + BV_1 = -\frac{1}{C}\alpha_1 = f_2\alpha_1.$$

Используя матрицу  $M_H$  или  $M_F$  легко найти матрицу  $M_{ab}$  преобразования параметров луча между произвольными плоскостями ОП<sub>a</sub> и ОП<sub>b</sub> (рис. 12).

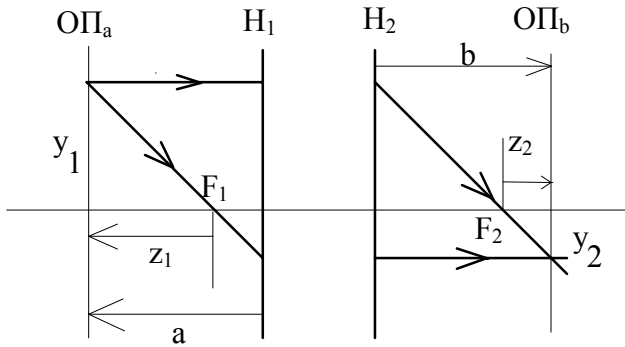


Рис.12

Пусть  $a$  - расстояние от  $H_1$  до ОП<sub>a</sub> ( $a < 0$ , если ОП<sub>a</sub> слева от  $H_1$ ),  $b$  - расстояние от  $H_2$  до ОП<sub>b</sub>. Считая, что оптическую систему окружает среда с показателем преломления  $n_1 = n_2 = 1$ , получаем  $M_{ab} = T_2 M_H T_1$ , здесь  $T_2$  - матрица преобразования оптического

промежутка  $H_2 - ОП_b$ , матрица  $T_1$  - промежутка  $H_1 - ОП_a$ .

$$M_{ab} = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ C & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+bC & b \\ C & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1+bC & -a-abC+b \\ C & 1-aC \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\frac{b}{f_2} & -a+\frac{ab}{f_2}+b \\ -\frac{1}{f_2} & 1+\frac{a}{f_2} \end{pmatrix}, \text{ т.к. } C = -\frac{1}{f_2}.$$



Иногда бывает удобно определять положение ОП<sub>а</sub> и ОП<sub>б</sub> относительно фокусов  $F_1$  и  $F_2$ , вводя расстояния  $z_1$  от  $F_1$  до ОП<sub>а</sub> ( $z_1 = a - f_1$ ) и  $z_2$  от  $F_2$  до ОП<sub>б</sub>

( $z_2 = b - f_2$ ). Тогда  $M_{ab} = \begin{pmatrix} -\frac{z_2}{f_2} & \frac{z_1 z_2}{f_2} + f_2 \\ -\frac{1}{f_2} & \frac{z_1}{f_2} \end{pmatrix}$ . Пусть расстояния  $a$  и  $b$  (или  $z_1$  и  $z_2$ )

выбраны так, что правый верхний элемент матрицы  $M_{ab}$  равен 0, т.е.

$-\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f_2}$  или  $z_1 z_2 = -f_2^2$ . Тогда  $Y_2 = \left(1 - \frac{b}{f_2}\right) Y_1$ . Это значит, что все лучи,

выходящие под любым углом  $\alpha$  из точки  $O$  с координатой  $Y_1$  на плоскости ОП<sub>а</sub>, пройдут через одну и ту же точку  $O'$  с координатой  $Y_2$  на плоскости ОП<sub>б</sub>.

Т.е. гомоцентрический пучок параксиальных лучей, идущих из  $O$ , на выходе из системы будет гомоцентрическим и образует в точке  $O'$  стигматическое изображение точки  $O$ . Поскольку для любой точки на плоскости ОП<sub>а</sub> существует сопряженная точка на плоскости ОП<sub>б</sub>, оптическая система

отображает плоскость ОП<sub>а</sub> на ОП<sub>б</sub> с увеличением  $\gamma = \frac{Y_2}{Y_1} = 1 - \frac{b}{f_2} = \frac{b}{a}$ .

Положение сопряженных плоскостей связано основным соотношением

$-\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f_2}$ . Разберем теперь конкретные примеры использования полученных

результатов.

### *Пример 3.*

Перед выпуклой поверхностью стеклянной выпукло - плоской линзы толщиной  $d = 9$  см находится предмет. Изображение этого предмета образуется на плоской поверхности линзы, которая служит экраном. Определить поперечное увеличение, если радиус кривизны выпуклой поверхности линзы  $R = 2,5$  см.

Поперечное увеличение  $\frac{Y_2}{Y_1}$ , даваемое оптической системой, определяется двумя параметрами  $(\frac{Y_2}{Y_1} = 1 - \frac{b}{f_2})$ ,  $f_2$  - задним фокусным расстоянием и  $b$  - расстоянием от задней главной плоскости  $H_2$  до плоскости изображения. Плоскостью изображения в данном случае является плоская поверхность линзы. Следовательно, если мы найдем положение задней главной плоскости и заднего фокуса, то задача будет решена.

Воспользуемся матрицей преобразования толстой линзы и найдем ее элементы  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  для заданной плоско-выпуклой линзы.

$$M = \begin{pmatrix} 1 - L\Phi_1 & L \\ -(\Phi_1 + \Phi_2 - L\Phi_1\Phi_2) & 1 - L\Phi_2 \end{pmatrix}$$

$$L = \frac{d}{n} = \frac{0,09}{1,5} = 0,06 \text{ (м)}; \quad \Phi_1 = \frac{n-1}{R_1} = \frac{0,05}{0,025} = 20 \text{ (дптр)}; \quad \Phi_2 = \frac{1-n}{R_2} = \frac{1-n}{\infty} = 0$$

$$A = 1 - L\Phi_1 = 1 - 0,06 \cdot 20 = -0,2; \quad B = L = 0,06 \text{ (м)};$$

$$C = -(\Phi_1 + \Phi_2 - L\Phi_1\Phi_2) = -20 \text{ (м}^{-1}\text{)}; \quad D = 1 - L\Phi_2 = 1 - 0 = 1.$$

Проверкой правильности вычисления параметров является равенство 1 детерминанта матрицы  $M$ . Воспользуемся теперь таблицей и определим  $b$  и  $f_2$ :

$$b = H_2 - \text{ОП}_2 = \frac{1-A}{C} = -0,06 \text{ (м)};$$

$$f_2 = -\frac{1}{C} = 0,05 \text{ (м)}$$

$$\gamma = \frac{Y_2}{Y_1} = 1 - \frac{b}{f_2} = 1 - \frac{0,06}{0,05} = -0,2.$$

Следовательно, изображение, даваемое данной оптической системой, действительное, уменьшенное ( $|\gamma| < 1$ ) и перевернутое ( $\gamma < 0$ ).

#### Пример 4.

У двояковыпуклой тонкой линзы серебрится одна из поверхностей. Найти фокусное расстояние  $f$  полученного таким образом зеркала. Радиус кривизны

чистой поверхности  $r_1$ , радиус кривизны посеребренной поверхности  $r_2$ . Показатель преломления материала линзы  $n$ . Линза находится в воздухе.

Матрица преобразования параметров луча, прошедшего такую оптическую систему  $M = P_3 T_2 P_2 T_1 P_1$ , здесь  $P_1$  и  $P_3$  - матрицы преломления на прозрачной поверхности при входе и выходе луча из линзы, соответственно;  $P_2$  - матрица преобразования параметров луча при отражении от посеребренной поверхности;  $T_1, T_2$  - матрицы оптического промежутка линзы при прямом и обратном ходе луча. Найдем эти матрицы:  $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\Phi_1 & 1 \end{pmatrix}$ , где  $\Phi_1 = \frac{n-1}{r_1}$  - оптическая сила поверхности радиуса  $r_1$ ;  $T_1 = \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  - единичная матрица, т.к. линза тонкая и  $L = 0$ ;  $P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\Phi_2 & 1 \end{pmatrix}$ . Поскольку вторая поверхность отражающая, луч теперь направлен в сторону отрицательных значений  $z$ . Это учитывается тем, что длины и показатели преломления берутся с отрицательным знаком. Следовательно,  $\Phi_2 = \frac{-n-n}{-r_2} = \frac{2n}{r_2}$ .  $r_2$  также отрицателен согласно правилу знаков.

$T_2 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-l}{-n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , так как  $L \rightarrow 0$ .  $T_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\Phi_3 & 1 \end{pmatrix}$ , где  $\Phi_3 = \frac{-1-(-n)}{r_1} = \frac{n-1}{r_1}$ , показатели преломления отрицательны, так как луч по-прежнему движется в сторону отрицательных значений  $z$ , а  $r_1$  - положителен.

Тогда:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\Phi_3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\Phi_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\Phi_1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -(\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3) & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \text{Элемент } C &= -(\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3) = -\left(\frac{n-1}{r_1} + \frac{n-1}{r_1} + \frac{2n}{r_2}\right) = \frac{2(n-1)}{r_1} + \frac{2n}{r_2} = \\ &= -\frac{2(n-1)r_2 + 2nr_1}{r_1 \cdot r_2}. \text{ Фокусное расстояние } f = -\frac{1}{C} = \frac{r_1 \cdot r_2}{2(n-1)r_2 + 2nr_1}. \end{aligned}$$

Рекомендуемая литература:

1. Бутиков Е.И. Оптика. Высшая школа. 1986г. Стр. 337-344.
2. Матвеев А.Н. Оптика. Высшая школа. 1985г. Стр. 123-133.