

Colpier Clément
Fornara Thibault
Pellegrino Guillaume
Renard Charles

26/01/13



Projet de Mathématiques appliquées PR3003

-

Table des matières

1	Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $M(t)=(x(t),y(t))$.	4
1.1	Projection du Poids sur la composante tangentielle	5
1.2	Projection de la tension du ressort su la composante tangentielle	5
1.2.1	Methode de Guillaume, diff d'angle	6
1.2.2	Methode de Charles, Al-Kashi	7
1.3	Determination de $\ T\ $	7
1.4	Détermination de a_t	7
1.5	Détermination de l'équation différentielle	8
1.5.1	Equa diff de Guillaume	8
1.5.2	Equa diff de Charles	8
2	Détermination des points d'équilibre	8

1 Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $M(t)=(x(t),y(t))$.



La masselotte M se déplace uniquement selon la composante tangentielle. Pour déterminer l'équation différentielle on va donc particulièrement s'intéresser à l'équation sur la composante tangentielle. Pour cela, on commence à faire la somme des forces s'exerçant sur la composante tangentielle \vec{u}_t et normale \vec{u}_n selon la seconde loi de Newton (PFD) :

$$\begin{cases} P_t + T_t = ma_t \\ P_n + R_n + T_n = 0 \end{cases}$$

On s'intéresse à l'équation :

$$P_t + T_t = ma_t$$

Pour déterminer l'équation différentielle, on doit alors projeter \vec{T} et $\vec{m}g$ sur \vec{u}_t .

On projette $\vec{m}g = -mg.\vec{u}_y$ sur \vec{u}_t

1.1 Projection du Poids sur la composante tangentielle



On remarque sur le graphique que $P_t = P \cdot \cos(\alpha)$

On cherche à déterminer α . On calcule la pente a de la tige parabolique. $a = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial x^2/2}{\partial x} = x$

En $M(x_0, y_0)$ la pente a de la tige parabolique vaut donc x_0 . Cette pente a nous permet de calculer l'angle α .

En effet, on remarque graphiquement que $\tan(\alpha) = \frac{1}{a}$. On en déduit : $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{1}{x_0}\right)$

Au final on trouve donc : $P_t = P \cdot \cos(\tan^{-1}(\frac{1}{x_0}))$

Or $\cos(\tan^{-1}(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ On en déduit donc : $P_t = P \cdot \frac{1}{\sqrt{1+1/x_0^2}}$ D'où :

$$P_t = P \cdot \frac{x_0}{\sqrt{1+x_0^2}}$$

1.2 Projection de la tension du ressort sur la composante tangentielle

On projette désormais \vec{T} sur \vec{u}_t .

1.2.1 Methode de Guillaume, diff d'angle



$$\cos(\phi) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\cos(\theta) = \frac{x}{\sqrt{(1-y)^2+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^4/4}}$$

$$\text{Et : } T_t = T \cdot \cos(\alpha 2) = T \cdot \cos(\phi - \theta) = T[\cos(\phi) \cdot \cos(\theta) + \sin(\phi) \cdot \sin(\theta)]$$

On en déduit :

$$T_t = T \left[\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{x}{\sqrt{1+x^4/4}} + \sin(\cos^{-1}(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}})) \cdot \sin(\cos^{-1}(\frac{x}{\sqrt{1+x^4/4}})) \right]$$

$$\text{Or : } \sin(\cos^{-1}(u)) = \sqrt{1-u^2}$$

On trouve donc :

$$T_t = T \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{x}{\sqrt{1+x^4/4}} + \sqrt{1 - \frac{1}{1+x^2}} \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{1+x^4/4}} \right]$$

1.2.2 Methode de Charles, Al-Kashi



On note x, y les coordonnées du point M.

$$a = \sqrt{(x_M - x_P)^2 + (y_M - y_P)^2} = \sqrt{x^2 + \left(\frac{x^2}{2} - 1\right)^2} = \sqrt{x^2 + \frac{x^4}{4} - x^2 + 1} = \sqrt{\frac{x^4}{4} + 1}$$

$$b = \sqrt{(x_M - x_P)^2 + (y_M - \Delta(0))^2} = \sqrt{x^2 + \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2}\right)^2} = \sqrt{x^2 + x^4} = x\sqrt{1 + x^2}$$

note : faut-il mettre plutôt $|x|\sqrt{1 + x^2}$?

$$c = \sqrt{(y_P - \Delta(0))^2} = \sqrt{\left(1 + \frac{x^2}{2}\right)^2} = 1 + \frac{x^2}{2}$$

D'après le théorème d'Al-Kashi : $x_1 = \frac{5 + \sqrt{25 - 4 \times 6}}{2} = 3$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\beta)$$

$$\cos(\beta) = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{x^4/4 + 1 + x^2 + x^4 - 1 - x^2 - x^4/4}{2x\sqrt{x^4/4 + 1}\sqrt{1 + x^2}} = \frac{x^3}{2\sqrt{x^4/4 + 1}\sqrt{1 + x^2}}$$

On trouve donc :

$$T_t = T \times \frac{x^3}{2\sqrt{x^4/4 + 1}\sqrt{1 + x^2}}$$

1.3 Détermination de $\|T\|$

On détermine la valeur de la tension du ressort.

$$T = k(l - l_0) = k(\sqrt{(x_M - x_P)^2 + (y_M - y_P)^2} - l_0) = k(\sqrt{x^2 + (x^2/2 - 1)^2} - l_0)$$

$$T = k(\sqrt{x^2 + x^4/4 - x^2 + 1} - l_0)$$

$$T = k(\sqrt{1 + \frac{x^4}{4}} - l_0)$$

1.4 Détermination de a_t

On a vu dans la première équation que $a_n = 0$. On en déduit : $\|\vec{a}\| = a_t$

Avec une accélération normale nulle, on peut écrire la formule de l'accélération dans le repère de Frenet ainsi :

$$a_t = \|\vec{a}\|$$

$$\begin{aligned}
\text{Or } ||\vec{a}|| &= \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \pm \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}{\partial t} \\
\dot{y} &= \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial y}{\partial x} \times \frac{\partial x}{\partial t} = x\dot{x} \\
v &= \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{x}^2 x^2} = \dot{x}\sqrt{1+x^2} \\
\frac{\partial v}{\partial t} &= \ddot{x}\sqrt{1+x^2} + \frac{\dot{x}^2 x}{\sqrt{1+x^2}} \\
\text{On trouve :}
\end{aligned}$$

$$a_t = \ddot{x}\sqrt{1+x^2} + \frac{\dot{x}^2 x}{\sqrt{1+x^2}}$$

(Equation de Charles)

1.5 Détermination de l'équation différentielle

A l'aide de ce qu'on a calculé précédemment on développe l'équation $mg_t + T_t = ma_t$ pour déterminer l'équation différentielle. On obtient alors :

1.5.1 Equa diff de Guillaume

En développant et en prenant $k=m$, $g=1$ et $a=l_0$ (données de l'énoncé), on obtient :

$$\begin{aligned}
m.1.\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + m(\sqrt{x^4/4+1}-a).[\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.\frac{x}{\sqrt{1+x^4/4}} + \sqrt{1-\frac{1}{1+x^2}}.\sqrt{1-\frac{x^2}{1+x^4/4}}] - m.\ddot{x}.\sqrt{1+x^2} - m.\frac{\dot{x}^2.x}{\sqrt{1+x^2}} &= 0 \\
\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + (\sqrt{x^4/4+1}-a).[\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.\frac{x}{\sqrt{1+x^4/4}} + \sqrt{1-\frac{1}{1+x^2}}.\sqrt{1-\frac{x^2}{1+x^4/4}}] - \ddot{x}.\sqrt{1+x^2} - \frac{\dot{x}^2.x}{\sqrt{1+x^2}} &= 0 \\
\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + (\sqrt{x^4/4+1}-a).[\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.\frac{x}{\sqrt{1+x^4/4}} + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.\sqrt{\frac{x^4/4-x^2+1}{1+x^4/4}}] - \ddot{x}.\sqrt{1+x^2} - \frac{\dot{x}^2.x}{\sqrt{1+x^2}} &= 0 \\
\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + [\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{x.\sqrt{x^4/4-x^2+1}}{\sqrt{1+x^2}}] - a.[\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.\frac{x}{\sqrt{1+x^4/4}} + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.\sqrt{\frac{x^4/4-x^2+1}{1+x^4/4}}] - \ddot{x}.\sqrt{1+x^2} - \frac{\dot{x}^2.x}{\sqrt{1+x^2}} &= 0 \\
\frac{x}{1+x^2} + [\frac{x}{1+x^2} + \frac{x.\sqrt{x^4/4-x^2+1}}{1+x^2}] - a.[\frac{x}{(1+x^2).\sqrt{1+x^4/4}} + \frac{x.\sqrt{x^4/4-x^2+1}}{(1+x^2).\sqrt{1+x^4/4}}] - \ddot{x} - \frac{\dot{x}^2.x}{1+x^2} &= 0 \\
\frac{2x+x.\sqrt{x^4/4-x^2+1}-\dot{x}^2.x}{1+x^2} - a.\frac{x+x.\sqrt{x^4/4-x^2+1}}{(1+x^2).\sqrt{1+x^4/4}} - \ddot{x} &= 0 \\
-\frac{2x+x.\sqrt{x^4/4-x^2+1}-\dot{x}^2.x}{1+x^2} + a.\frac{x+x.\sqrt{x^4/4-x^2+1}}{(1+x^2).\sqrt{1+x^4/4}} + \ddot{x} &= 0 \\
-\frac{2x+x.\sqrt{(x^2/2-1)^2-\dot{x}^2.x}}{1+x^2} + a.\frac{x+x.\sqrt{(x^2/2-1)^2}}{(1+x^2).\sqrt{1+x^4/4}} + \ddot{x} &= 0 \\
\frac{-x^3/2-x+\dot{x}^2.x}{1+x^2} + \frac{a.x^3}{2(1+x^2).\sqrt{1+x^4/4}} + \ddot{x} &= 0
\end{aligned}$$

1.5.2 Equa diff de Charles

On calcule maintenant l'équation différentielle du système en s'aidant des résultats précédents.

On part de l'équation $P_t + T_t = ma_t$

avec $T_t = k(l-l_0)$ et $P_t = -mg$

En développant l'expression on obtient :

$$\begin{aligned}
k(\sqrt{x^4/4+1}-l_0) \times \frac{x^3}{2\sqrt{x^4/4+1}\sqrt{1+x^2}} - mg\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} &= m(\ddot{x}\sqrt{1+x^2} + \frac{\dot{x}^2 x}{\sqrt{1+x^2}}) \\
\frac{k}{m}(\frac{x^3}{2\sqrt{1+x^2}} - \frac{x^3 \times l_0}{2\sqrt{x^4/4+1}\sqrt{1+x^2}}) - \frac{xg}{\sqrt{1+x^2}} - \ddot{x}\sqrt{1+x^2} - \frac{\dot{x}^2 x}{\sqrt{1+x^2}} &= 0 \\
\text{En prenant } k=m, g=1 \text{ et } a=l_0 \text{ (données de l'énoncé), on obtient :} \\
-\frac{x^3}{2\sqrt{1+x^2}} + \frac{x^3 \times a}{2\sqrt{x^4/4+1}\sqrt{1+x^2}} + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \ddot{x}\sqrt{1+x^2} + \frac{\dot{x}^2 x}{\sqrt{1+x^2}} &= 0 \\
(-\frac{x^3}{2} + x)\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} + \frac{x^3 \times a}{2\sqrt{x^4/4+1}\sqrt{1+x^2}} + \ddot{x}\sqrt{1+x^2} + \frac{\dot{x}^2 x}{\sqrt{1+x^2}} &= 0 \\
(-\frac{x^3}{2} + x)\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} + \frac{x^3 \times a}{2\sqrt{x^4/4+1}\sqrt{1+x^2}} + \ddot{x}\sqrt{1+x^2} + \frac{\dot{x}^2 x}{\sqrt{1+x^2}} &= 0 \\
(-\frac{x^3}{2} + x)\frac{1}{1+x^2} + \frac{x^3 \times a}{2\sqrt{x^4/4+1}(1+x^2)} + \ddot{x} + \frac{\dot{x}^2 x}{\sqrt{1+x^2}} &= 0 \\
\ddot{x} + \frac{\dot{x}^2 x - x^3/2 - x}{1+x^2} + \frac{x^3 \times a}{2\sqrt{x^4/4+1}(1+x^2)} &= 0
\end{aligned}$$

2 Détermination des points d'équilibre

Les points d'équilibre sont les points où la vitesse du système et donc de la masselotte est nulle. Ainsi, les termes liés à la vitesse et à l'accélération du système sont nuls.

On part donc de l'équation :

$$\ddot{x} + \frac{x^2x - x^3/2 - x}{1+x^2} + \frac{x^3 \times a}{2\sqrt{x^4/4+1}(1+x^2)} = 0 \text{ où } \ddot{x} = \frac{\dot{x}^2x - x^3/2 - x}{1+x^2} = 0$$

Ainsi on a :

$$\frac{x^3 \times a}{2\sqrt{x^4/4+1}(1+x^2)} = 0$$

En multipliant de part et d'autre de l'équation par $\frac{2(1+x^2)}{x}$:

$$x^2 - \frac{x^2 \times l_0}{\sqrt{1+x^4/4}} + 2 = 0 \quad \sqrt{1+x^4/4}(x^2+2) = x^2 \times l_0$$

$$\sqrt{1+y^2}(2y+2) = 2yl_0$$

$$(1+y^2)(4y^2+8y+4) = 4y^2 \times l_0^2$$

$$(1+y^2)(y^2+2y+1) = y^2 \times l_0^2$$

$$(\frac{1}{y}+y)(y+2+\frac{1}{y}) = l_0^2$$

On pose $X = y + \frac{1}{y}$ ($y \neq 0$) :

$$X(X+2) = l_0^2$$

$$x^2 + 2X - l_0^2 = 0$$

Dont on calcule le déterminant : $\Delta_X = 4(1+l_0^2)$

D'où les solutions intermédiaires : $X_1 = -1 - \sqrt{1+l_0^2}$

$$X_2 = -1 + \sqrt{1+l_0^2}$$

$$y + \frac{1}{y} = X$$

$$y^2 + 1 = Xy$$

$$y^2 - Xy + 1 = 0$$

Dont le déterminant est : $\Delta_y = X^2 - 4$

D'où les solutions : $y_1 = \frac{1}{2}(X - \sqrt{X^2 - 4})$

$$y_1 = \frac{1}{2}(X + \sqrt{X^2 - 4})$$

On peut alors trouver l'expression des points d'équilibre y_1, y_2, y_3, y_4 en fonction de l_0 :

$$y_1 = \frac{1}{2}(X_1 - \sqrt{X_1^2 - 4}) = \frac{-1 - \sqrt{1+l_0^2}}{2} - \frac{1}{2}(\sqrt{(-1 - \sqrt{1+l_0^2})^2 - 4})$$

$$= \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{1+l_0^2}) - \frac{1}{2}\sqrt{1+2\sqrt{1+l_0^2}+(1+l_0^2)-4}$$

$$= \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{1+l_0^2}) - \frac{1}{2}\sqrt{2+2\sqrt{1+l_0^2}+l_0^2-4}$$

$$y_2 = \frac{X_1 + \sqrt{X_1^2 - 4}}{2} = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{1+l_0^2}) + \frac{1}{2}\sqrt{2+2\sqrt{1+l_0^2}+l_0^2-4}$$

$$y_3 = \frac{X_2 - \sqrt{X_2^2 - 4}}{2} = \frac{-1 + \sqrt{1+l_0^2}}{2} - \frac{1}{2}(\sqrt{(-1 + \sqrt{1+l_0^2})^2 - 4})$$

$$= \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{1+l_0^2}) - \frac{1}{2}\sqrt{1-2\sqrt{1+l_0^2}+(1+l_0^2)-4}$$

$$= \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{1+l_0^2}) - \frac{1}{2}\sqrt{2-2\sqrt{1+l_0^2}+l_0^2-4}$$

$$y_4 = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{1+l_0^2}) + \frac{1}{2}\sqrt{2-2\sqrt{1+l_0^2}+l_0^2-4}$$

Il reste à déterminer la nature de ces points d'équilibre du système.

- 3 Dans toute la suite on supposera que $g=1$, $k=m$ et on notera $a = l_0$ et on s'intéressera particulièrement par l'équation vérifié par $x(t)$.
 - 3.1 Montrer que l'équation est de la forme : (E) $\ddot{x} + f(x, \dot{x}, a) = 0$.
 - 3.2 Déterminer en fonction de a les points d'équilibres du système.
 - 3.3 Quelle est en fonction de a , la nature des points d'équilibres.
- 4 On suppose que $a = \sqrt{15}$.
 - 4.1 Déterminer la valeur exacte des points d'équilibres du système.
 - 4.2 Déterminer l'intégrale première du système.
 - 4.3 Représenter le portrait de phase.
 - 4.4 Que peut-on en déduire sur le mouvement.
- 5 On suppose maintenant que $a = \sqrt{3}$ et $x(0) = x_0 > 0$ et $\dot{x}(0) = 0$.
 - 5.1 Calculer et représenter à l'aide de Matlab la période T en fonction de x_0 pour $0 < x_0 < 10$.
- 6 On suppose maintenant que le système est soumis à une force de frottement $\gamma > 0$ et que l'équation devient : (E) $\ddot{x} + \gamma \dot{x} + f(x, a) = 0$.
 - 6.1 Représenter le diagramme de Matlab le diagramme de bifurcation en (a, γ) pour chacun des points d'équilibres.
 - 6.2 On suppose que $a = \sqrt{15}$. Pour quelles valeurs (exactes) de γ les points d'équilibres attractifs changent-ils de nature.
 - 6.3 Représenter le portrait de phase pour $\gamma = 1, \gamma = 2, \gamma = 3$.