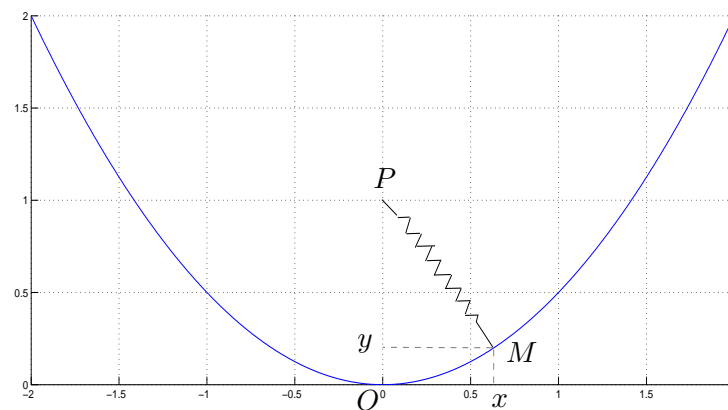


**Projet de mathématiques appliquées**

**Travail à réaliser**

Le but de ce projet est l'étude du point de vue des équations différentielles du système mécanique suivant :

Une masselotte  $M$ , de masse  $m$ , coulisse sans frottement, sur une tige parabolique de longueur infinie dont la forme est donnée dans le plan vertical  $(Ox, Oy)$  par l'équation  $(\mathcal{C}) \quad y = \frac{x^2}{2}$ . Elle est soumise à l'action d'un ressort de raideur  $k$ , et de longueur au repos  $l_0$ , dont l'extrémité est fixé au point  $P(0; 1)$ . Dans la suite on note  $x(t)$  et  $y(t)$  les coordonnées de  $M$  dans le plan à l'instant  $t$ .



1. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par  $M(t) = (x(t), y(t))$ .
2. Dans toute la suite on supposera que  $g = 1$ ,  $k = m$  et on notera  $a = l_0$  et on s'intéressera particulièrement à l'équation vérifiée par  $x(t)$ .
  - (a) Montrer que l'équation est de la forme : **(E)**  $\ddot{x} + f(x, \dot{x}, a) = 0$ .
  - (b) Déterminer en fonction de  $a$  les points d'équilibre du système.
  - (c) Quelle est en fonction de  $a$ , la nature des points d'équilibre.
3. On suppose que  $a = \sqrt{15}$ .
  - (a) Déterminer la valeur exacte des points d'équilibre du système.
  - (b) Déterminer l'intégrale première du système.
  - (c) Représenter le portrait de phase.
  - (d) Que peut-on en déduire sur le mouvement.

4. On suppose maintenant que  $a = \sqrt{3}$  et que  $x(0) = x_0 > 0$  et  $\dot{x}(0) = 0$ .  
*Calculer et représenter à l'aide de Matlab la période  $T$  en fonction de  $x_0$  pour  $0 < x_0 < 10$ .*
5. On suppose maintenant que le système est soumis à une force de frottement  $\gamma > 0$  et que l'équation devient :  
**(E)**  $\ddot{x} + \gamma\dot{x} + f(x, a) = 0$  .
  - (a) *Représenter à l'aide de matlab le diagramme de bifurcation en  $(a, \gamma)$  pour chacun des points d'équilibre.*
  - (b) On suppose que  $a = \sqrt{15}$ .  
*Pour quelles valeurs (exactes) de  $\gamma$  les points d'équilibres attractifs changent-ils de nature.*
  - (c) *Représenter les portrait de phase pour  $\gamma = 1, \gamma = 2$  et  $\gamma = 3$ .*

#### - D - Consignes à respecter

- Le travail se fait en quadrinômes, (c'est à dire ni 2, ni 3, ni 5 mais 4).  
 Vous devez constituer des quadrinômes et signaler par mail (o.decambry@esiee.fr) ou tout autre moyen, leur composition avant le 10/12/12 .
  - Le travail fait l'objet d'un rapport qui sera le support de la note. Il doit être réalisé à l'aide d'un traitement de texte mathématique (Latex, Word, Open office,...) en respectant les usages en vigueur dans un texte scientifique. La forme du document et la qualité de la rédaction seront prises en compte dans la note.
  - Si vous utilisez des documents (livres, photocopiés, articles, page internet ...) pour rédiger votre rapport, vous devez obligatoirement mentionner vos sources.
  - Le logiciel de calcul à utiliser est nécessairement Matlab.
  - Les documents les plus longs ne sont pas nécessairement les meilleurs : pensez à trier les sorties graphiques les plus intéressantes et les plus parlantes. Un ordre de grandeur : pas plus de 20 pages (code Matlab, et sorties graphiques comprises).
  - C'est un travail en quadrinôme faisant appel à l'autonomie. Il n'est pas interdit de se parler entre quadrinôme et ni d'échanger des idées : c'est comme cela que la science avance.  
 En revanche le travail final remis est propre à chaque quadrinôme : chaque quadrinôme doit faire un travail original de mise en oeuvre des idées (donc des programmes informatiques), d'explication, et de présentation.
- Les copiages, les plagiats, et les fraudes seront sanctionnés.**
- Le travail est à remettre au plus tard le 26/01/13 : tout retard sera pénalisé par un retrait de points sur la note.