

Colpier Clément  
Fornara Thibault  
Pellegrino Guillaume  
Renard Charles

26/01/13



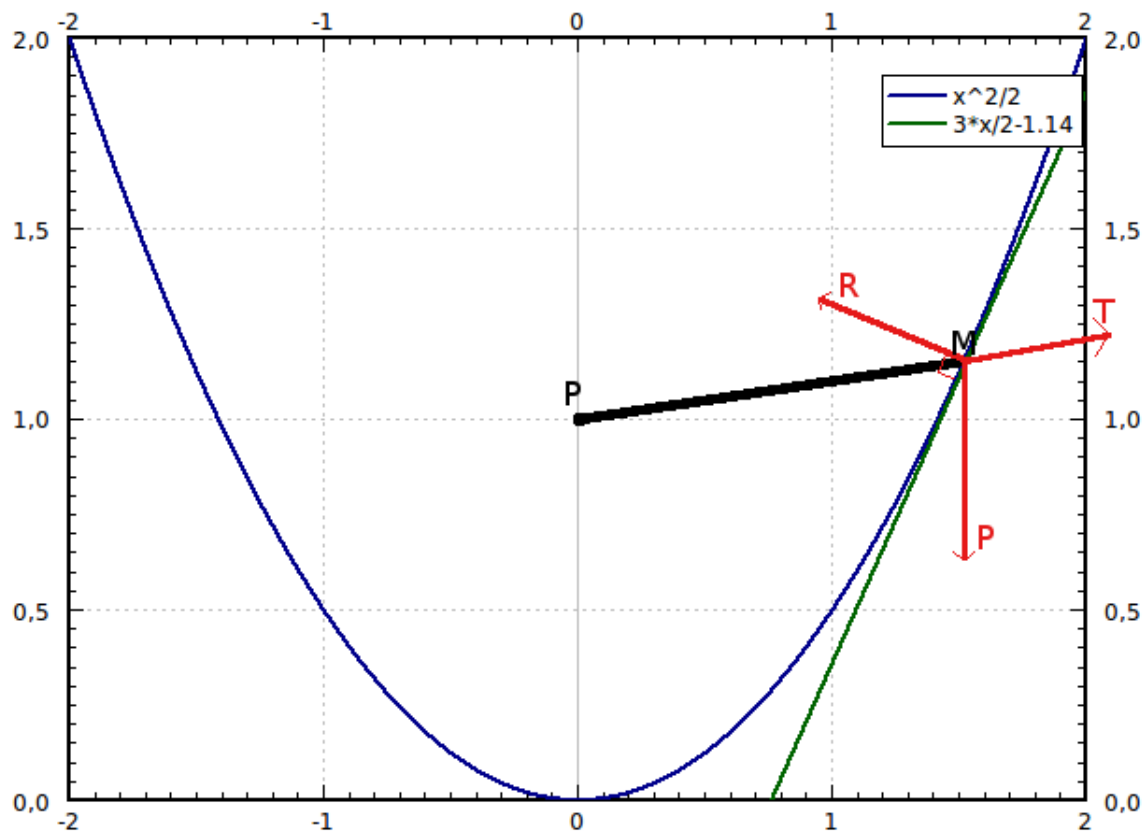
Projet de Mathématiques appliquées  
PR3003

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Déterminer l'équation différentielle vérifiée par <math>M(t)=(x(t),y(t))</math>.</b>	<b>3</b>
1.1	Application de la seconde loi de Newton . . . . .	3
1.2	Projection du Poids sur la composante tangentielle . . . . .	3
1.3	Projection de la tension du ressort su la composante tangentielle . . . . .	4
1.4	Determination de $\ T\ $ . . . . .	5
1.5	Détermination de $a_t$ . . . . .	5
1.6	Détermination de l'équation différentielle . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Dans toute la suite on supposera que <math>g=1</math>, <math>k=m</math> et on notera <math>a = l_0</math> et on s'intéressera particulièrement par l'équation vérifié par <math>x(t)</math>.</b>	<b>6</b>
2.1	Montrer que l'équation est de la forme : $\ddot{x} + f(x, \dot{x}, a) = 0$ . . . . .	6
2.2	Détermination des points d'équilibre . . . . .	6
2.3	Détermination de la nature des points d'équilibre . . . . .	7
<b>3</b>	<b>On suppose que <math>a = \sqrt{15}</math>.</b>	<b>10</b>
3.1	Déterminer la valeur exacte des points d'équilibres du système. . . . .	10
3.2	Déterminer l'intégrale première du système. . . . .	10
3.3	Représenter le portrait de phase. . . . .	11
3.4	Que peut-on en déduire sur le mouvement. . . . .	11
<b>4</b>	<b>On suppose maintenant que <math>a = \sqrt{3}</math> et <math>x(0) = x_0 &gt; 0</math> et <math>\dot{x}(0) = 0</math>.</b>	<b>11</b>
4.1	Calculer et représenter à l'aide de Matlab la période T en fonction de $x_0$ pour $0 < x_0 < 10$ . . . . .	11
<b>5</b>	<b>On suppose maintenant que le système est soumis à une force de frottement <math>\gamma &gt; 0</math> et que l'équation devient : (E) <math>\ddot{x} + \gamma\dot{x} + f(x, a) = 0</math>.</b>	<b>12</b>
5.1	Représenter le diagramme de Matlab le diagramme de bifurcation en $(a, \gamma)$ pour chacun des points d'équilibres. . . . .	12
5.2	On suppose que $a = \sqrt{15}$ . Pour quelles valeurs (exactes) de $\gamma$ les points d'équilibres attractifs changent-ils de nature. . . . .	13
5.3	Représenter le portrait de phase pour $\gamma = 1, \gamma = 2, \gamma = 3$ . . . . .	13

# 1 Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $M(t)=(x(t),y(t))$ .

## 1.1 Application de la seconde loi de Newton



La masselotte M se déplace uniquement selon la composante tangentielle. Pour déterminer l'équation différentielle on va donc particulièrement s'intéresser à l'équation sur la composante tangentielle.

Pour cela, étudie la somme des forces s'exerçant sur la composante tangentielle  $\vec{u}_t$  et normale  $\vec{u}_n$ . Selon la seconde loi de Newton (PFD) :

$$\begin{cases} P_t + T_t = ma_t \\ P_n + R_n + T_n = 0 \end{cases}$$

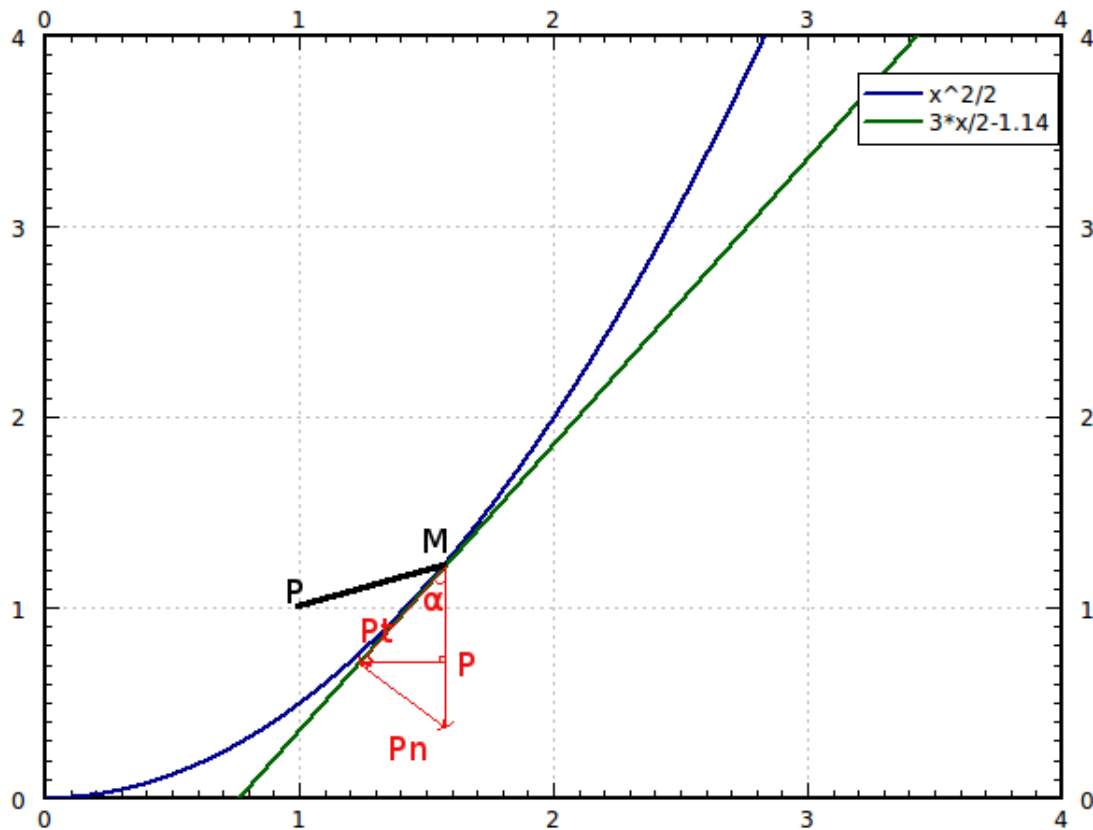
On s'intéresse à l'équation :

$$P_t + T_t = ma_t$$

Pour déterminer l'équation différentielle, on doit alors projeter  $\vec{T}$  et  $\vec{m}g$  sur  $\vec{u}_t$ .

## 1.2 Projection du Poids sur la composante tangentielle

On projette  $\vec{m}g = -mg.\vec{u}_y$  sur  $\vec{u}_t$



On projette tel que  $P_t = P \cdot \cos(\alpha)$

On cherche à déterminer  $\alpha$ . On calcule la pente  $a$  de la tige parabolique.  $a = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial x^2/2}{\partial x} = x$

En  $M(x_0, y_0)$  la pente  $a$  de la tige parabolique vaut donc  $x_0$ . Cette pente permet de calculer l'angle  $\alpha$ . En effet, on remarque graphiquement que  $\tan(\alpha) = \frac{1}{a}$ .

On en déduit :  $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{1}{x_0}\right)$

$P_t = P \cdot \cos\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{x_0}\right)\right)$

Or  $\cos(\tan^{-1}(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

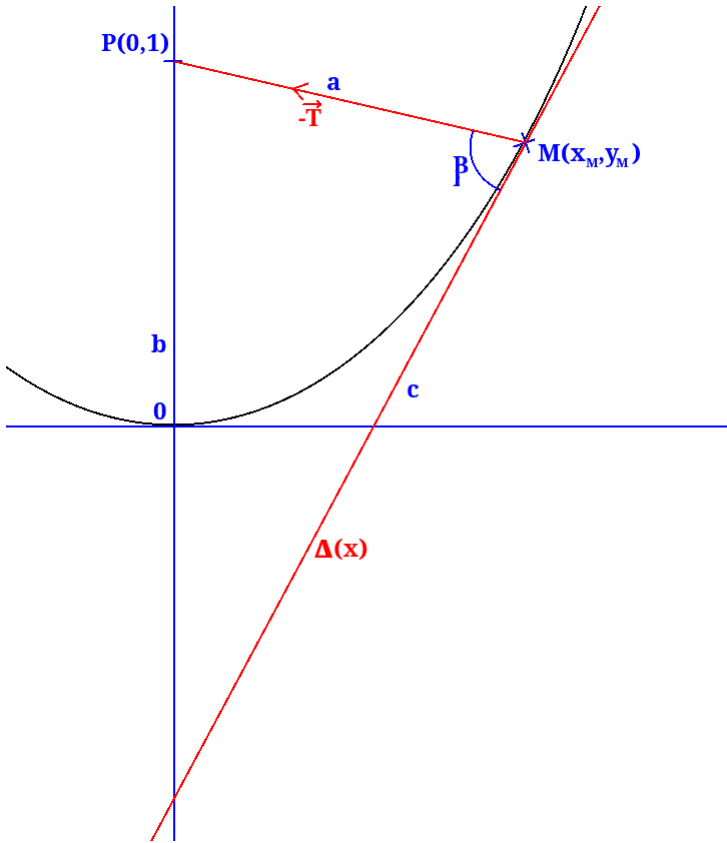
On en déduit donc :  $P_t = P \cdot \frac{1}{\sqrt{1+1/x_0^2}}$

D'où :

$$P_t = P \cdot \frac{x_0}{\sqrt{1+x_0^2}}$$

### 1.3 Projection de la tension du ressort sur la composante tangentielle

On projette désormais  $\vec{T}$  sur  $\vec{u}_t$ .



On note  $x, y$  les coordonnées du point M. D'après le théorème de Pythagore :

$$a = \sqrt{(x_M - x_P)^2 + (y_M - y_P)^2} = \sqrt{x^2 + (\frac{x^2}{2} - 1)^2} = \sqrt{x^2 + \frac{x^4}{4} - x^2 + 1} = \sqrt{\frac{x^4}{4} + 1}$$

$$b = \sqrt{(x_M - x_P)^2 + (y_M - \Delta(0))^2} = \sqrt{x^2 + (\frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2})^2} = \sqrt{x^2 + x^4} = |x|\sqrt{1 + x^2}$$

$$c = \sqrt{(y_P - \Delta(0))^2} = \sqrt{(1 + \frac{x^2}{2})^2} = 1 + \frac{x^2}{2}$$

D'après le théorème d'Al-Kashi :

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\beta)$$

$$\cos(\beta) = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{x^4/4 + 1 + x^2 + x^4 - 1 - x^2 - x^4/4}{2x\sqrt{x^4/4 + 1}\sqrt{1 + x^2}} = \frac{x^3}{2\sqrt{x^4/4 + 1}\sqrt{1 + x^2}}$$

On trouve donc :

$$T_t = T \times \frac{x^3}{2\sqrt{x^4/4 + 1}\sqrt{1 + x^2}}$$

## 1.4 Détermination de $\|T\|$

On détermine la valeur de la tension du ressort.

$$T = k(l - l_0) = k(\sqrt{(x_M - x_P)^2 + (y_M - y_P)^2} - l_0) = k(\sqrt{x^2 + (x^2/2 - 1)^2} - l_0)$$

$$T = k(\sqrt{x^2 + x^4/4 - x^2 + 1} - l_0)$$

$$T = k(\sqrt{1 + \frac{x^4}{4}} - l_0)$$

## 1.5 Détermination de $a_t$

On a vu dans la première équation que  $a_n = 0$ . On en déduit :  $\|\vec{a}\| = a_t$

Avec une accélération normale nulle, on peut écrire la formule de l'accélération dans le repère de Frenet ainsi :

$$a_t = \|\vec{a}\|$$

$$\text{Or } \|\vec{a}\| = \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}{\partial t}$$

$$\dot{y} = \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial y}{\partial x} \times \frac{\partial x}{\partial t} = x\dot{x}$$

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \dot{x}\sqrt{1 + x^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \ddot{x}\sqrt{1+x^2} + \frac{\dot{x}^2 x}{\sqrt{1+x^2}}$$

On trouve :

$$a_t = \ddot{x} \cdot \sqrt{1+x^2} + \frac{\dot{x}^2 x}{\sqrt{1+x^2}}$$

## 1.6 Détermination de l'équation différentielle

A l'aide de ce qu'on a calculé précédemment on développe l'équation  $mg_t + T_t = ma_t$  pour déterminer l'équation différentielle. On calcule maintenant l'équation différentielle du système en s'aidant des résultats précédents.

On part de l'équation  $P_t + T_t = ma_t$

avec  $T_t = k(l - l_0)$  et  $P_t = -mg$

En développant les expressions on obtient :

$$-k(\sqrt{x^4/4 + 1} - l_0) \times \frac{x^3}{2\sqrt{x^4/4 + 1}\sqrt{1+x^2}} - mg \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = m(\ddot{x}\sqrt{1+x^2} + \frac{\dot{x}^2 x}{\sqrt{1+x^2}})$$

$$-\frac{k}{m}(\frac{x^3}{2\sqrt{1+x^2}} - \frac{x^3 \times l_0}{2\sqrt{x^4/4 + 1}\sqrt{1+x^2}}) - \frac{xg}{\sqrt{1+x^2}} - \ddot{x}\sqrt{1+x^2} - \frac{\dot{x}^2 x}{\sqrt{1+x^2}} = 0$$

En prenant  $k=m$ ,  $g=1$  et  $a = l_0$  (données de l'énoncé), on obtient :

$$-\frac{x^3}{2\sqrt{1+x^2}} + \frac{x^3 \times a}{2\sqrt{x^4/4 + 1}\sqrt{1+x^2}} - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - \ddot{x}\sqrt{1+x^2} - \frac{\dot{x}^2 x}{\sqrt{1+x^2}} = 0$$

$$\frac{x^3}{2\sqrt{1+x^2}} - \frac{ax^3}{2\sqrt{1+x^4/4}\sqrt{1+x^2}} + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \ddot{x}\sqrt{1+x^2} + \frac{\dot{x}^2 x}{\sqrt{1+x^2}} = 0$$

L'équation différentielle revient donc à :

$$\ddot{x} + \frac{\dot{x}^2 x}{1+x^2} + \frac{x^3}{2(1+x^2)} - \frac{ax^3}{2\sqrt{1+x^4/4}(1+x^2)} + \frac{x}{1+x^2} = 0$$

**2 Dans toute la suite on supposera que  $g=1$ ,  $k=m$  et on notera  $a = l_0$  et on s'intéressera particulièrement par l'équation vérifiée par  $x(t)$ .**

**2.1 Montrer que l'équation est de la forme :  $\ddot{x} + f(x, \dot{x}, a) = 0$ .**

On retrouve la forme  $\ddot{x} + f(x, \dot{x}, a) = 0$ , avec  $f(x, \dot{x}, a) = \frac{\dot{x}^2 x + x^3/2 + x}{1+x^2} - \frac{x^3 \times a}{2\sqrt{x^4/4 + 1}(1+x^2)}$

## 2.2 Détermination des points d'équilibre

Les points d'équilibre sont les points où la vitesse du système et donc de la masselotte est nulle. Ainsi, les termes liés à la vitesse et à l'accélération du système sont nuls.

Les points d'équilibres correspondent aux solutions de l'équation :

$$\ddot{x} + \frac{\dot{x}^2 x - x^3/2 - x}{1+x^2} + \frac{x^3 \times a}{2\sqrt{x^4/4 + 1}(1+x^2)} = 0 \text{ où } \ddot{x} = 0 \text{ et } \dot{x} = 0 \text{ aux points d'équilibre.}$$

Ce qui revient à l'équation :

$$\frac{-x^3/2 - x}{1+x^2} + \frac{x^3 \times a}{2\sqrt{x^4/4 + 1}(1+x^2)} = 0$$

Une première solution correspond à  $x_0 = 0$  et  $y_0 = 0$

En multipliant de part et d'autre de l'équation par  $\frac{2(1+x^2)}{x}$  :

$$x^2 - \frac{x^2 \times l_0}{\sqrt{1+x^4/4}} + 2 = 0$$

$$\sqrt{1+x^4/4}(x^2 + 2) = x^2 \times l_0$$

$$\sqrt{1+y^2}(2y + 2) = 2yl_0$$

$$(1+y^2)(4y^2 + 8y + 4) = 4y^2 \times l_0^2$$

$$(1+y^2)(y^2 + 2y + 1) = y^2 \times l_0^2$$

$$(\frac{1}{y} + y)(y + 2 + \frac{1}{y}) = l_0^2$$

On pose  $X = y + \frac{1}{y}$  ( $y \neq 0$ ) :

$$X(X + 2) = l_0^2$$

$$X^2 + 2X - l_0^2 = 0$$

Dont on calcule le déterminant :  $\Delta_X = 4(1 + l_0^2)$

D'où les solutions intermédiaires :  $X_1 = -1 - \sqrt{1 + l_0^2}$

$$X_2 = -1 + \sqrt{1 + l_0^2}$$

$$y + \frac{1}{y} = X$$

$$y^2 + 1 = Xy$$

$$y^2 - Xy + 1 = 0$$

Dont le déterminant est :  $\Delta_y = X^2 - 4$

D'où les solutions :

$$y = \frac{1}{2}(X - \sqrt{X^2 - 4})$$

$$y = \frac{1}{2}(X + \sqrt{X^2 - 4})$$

Cependant, il faut savoir que  $\Delta_y$  doit être positif afin que les racines soient réelles.

Pour la solution  $X = (-1 + \sqrt{1 + l_0^2})^2$ , nous avons deux cas de condition d'existence :

- $(-1 + \sqrt{1 + l_0^2})^2 > 2 \Rightarrow \sqrt{1 + l_0^2} > 3 \Rightarrow l_0 > \sqrt{8}$
- $(-1 + \sqrt{1 + l_0^2})^2 < -2 \Rightarrow \sqrt{1 + l_0^2} < -1$  qui est une condition irréalisable

Finalement, on déduit que la condition d'existence des points d'équilibre est  $l_0 > \sqrt{8}$ . On peut alors trouver l'expression des ordonnées des points d'équilibre  $y_1, y_2, y_3, y_4$  en fonction de  $l_0$  :

- $y_0 = 0$   
(Déterminé précédemment)
- $y_1 = \frac{1}{2}(X_1 - \sqrt{X_1^2 - 4}) = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{1 + l_0^2}) - \frac{1}{2}(\sqrt{(-1 - \sqrt{1 + l_0^2})^2 - 4})$   
Cette solution est strictement négative alors que  $y(t)$  est positive, selon la rampe  $y = \frac{x^2}{2}$ . On doit alors l'éliminer.
- $y_2 = \frac{X_1 + \sqrt{X_1^2 - 4}}{2} = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{1 + l_0^2}) + \frac{1}{2}\sqrt{-2 + 2\sqrt{1 + l_0^2} + l_0^2}$   
Cette solution est aussi à éliminer. En effet, nous avons :  
 $y_2 > 0 \Rightarrow (-1 - \sqrt{1 + l_0^2}) + \sqrt{(-1 - \sqrt{1 + l_0^2})^2 + l_0^2} > 0$   
 $\Rightarrow \sqrt{(-1 - \sqrt{1 + l_0^2})^2 + l_0^2} > 1 + \sqrt{1 + l_0^2}$   
 $\Rightarrow 0 > \sqrt{1 + l_0^2}$  ce qui est impossible.
- $y_3 = \frac{X_2 - \sqrt{X_2^2 - 4}}{2} = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{1 + l_0^2}) - \frac{1}{2}\sqrt{(-1 + \sqrt{1 + l_0^2})^2 - 4}$   
 $= \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{1 + l_0^2}) - \frac{1}{2}\sqrt{-2 - 2\sqrt{1 + l_0^2} + l_0^2}$
- $y_4 = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{1 + l_0^2}) + \frac{1}{2}\sqrt{(-1 + \sqrt{1 + l_0^2})^2 - 4}$   
 $= \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{1 + l_0^2}) + \frac{1}{2}\sqrt{-2 - 2\sqrt{1 + l_0^2} + l_0^2}$

Seules deux solutions sont alors retenues, l'unique condition d'existence étant  $l_0 > \sqrt{8}$ .

En considérant  $y = \frac{x^2}{2} \Rightarrow x = \pm\sqrt{2y}$  on a au total 5 points d'équilibre :

$$x_0 = 0$$

$$x_1 = \sqrt{-1 + \sqrt{1 + l_0^2} - \sqrt{-2 - 2\sqrt{1 + l_0^2} + l_0^2}}$$

$$x_2 = -\sqrt{-1 + \sqrt{1 + l_0^2} - \sqrt{-2 - 2\sqrt{1 + l_0^2} + l_0^2}}$$

$$x_3 = \sqrt{-1 + \sqrt{1 + l_0^2} + \sqrt{-2 - 2\sqrt{1 + l_0^2} + l_0^2}}$$

$$x_4 = -\sqrt{-1 + \sqrt{1 + l_0^2} + \sqrt{-2 - 2\sqrt{1 + l_0^2} + l_0^2}}$$

Il reste à déterminer la nature de ces points d'équilibre du système.

## 2.3 Détermination de la nature des points d'équilibre

Nous sommes dans le cas d'un système non linéaire. On pose  $x_1 = x, x_2 = \dot{x}$

On a alors :

$$\dot{x}_1 = x_2 = f_1(x_1, x_2)$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{x_2^2 \cdot x_1}{1 + x_1^2} - \frac{x_1^3}{2(1 + x_1^2)} - \frac{x_1}{1 + x_1^2} + \frac{ax_1^3}{2(1 + x_1^2)(x_1^4/4 + 1)} = f_2(x_1, x_2)$$

Aux points d'équilibre, la vitesse est nulle d'où  $x_2 = 0$  et  $\dot{x}_2 = 0$

D'où :

$$f_1(x_1, 0) = 0$$

$$f_2(x_1, 0) = \frac{x_1^3 \times l_0}{2\sqrt{1 + \frac{x_1^4}{4}}(1 + x_1^2)} - \frac{x_1^3}{2(1 + x_1^2)} - \frac{x}{1 + x^2}$$

On va calculer la nature des points d'équilibre en passant par la matrice Jacobienne :

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\delta f_1}{\delta x_1} & \frac{\delta f_1}{\delta x_2} \\ \frac{\delta f_2}{\delta x_1} & \frac{\delta f_2}{\delta x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\delta f_2}{\delta x_1} & 0 \end{pmatrix}$$

La nature des points d'équilibre du système est définie par la trace, le déterminant, et le discriminant du polynôme caractéristique de la matrice Jacobienne ci-dessus.

$$Tr(J) = 0$$

$$det(J) = -\frac{\delta f_2}{\delta x_1}$$

$$\Delta(J) = Tr^2(J) - 4det(J) = 4 * \frac{\delta f_2}{\delta x_1}$$

On a alors besoin de déterminer le signe de  $\frac{\delta f_2}{\delta x_1}$  aux points d'équilibre.

En factorisant  $f_2$ , on a :

$$f_2 = 0 = -\frac{x}{2(1+x^2)} * (x^2 - \frac{x^2 \times l_0}{\sqrt{1 + \frac{x^4}{4}}} + 2)$$

car  $\ddot{x} = 0$  aux points d'équilibre.

Ici, nous avons deux éventualités pour satisfaire cette équation :

$$\circ \text{ cas 1 : } \frac{x}{1+x^2} = 0$$

$$\circ \text{ cas 2 : } x^2 - \frac{x^2 \times l_0}{\sqrt{1 + \frac{x^4}{4}}} + 2 = 0$$

### Premier Cas

$$\frac{x}{1+x^2} = 0 \longrightarrow x = 0$$

On a alors :

$$\frac{\delta f_2}{\delta x_1} = -\frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta x} \left( \frac{x}{1+x^2} \right) (x^2 - \frac{x^2 \times l_0}{\sqrt{1 + \frac{x^4}{4}}} + 2) = -2 \frac{1+x^2-4x^2}{2(1+x^2)^2} \text{ Ce qui équivaut, avec l'hypothèse précédente } x = 0, \text{ à :}$$

$$\frac{\delta f_2}{\delta x_1} = -1$$

La matrice jacobienne du système pour le point d'équilibre  $x = 0$  devient donc :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

On peut alors en calculer les caractéristiques :

$$tr(J_f) = 0$$

$$det(J_f) = 1$$

$$\Delta(J_f) = -4$$

Ce sont les caractéristiques d'un point d'équilibre centré.

### Second Cas

$$\text{Dans ce cas, } x^2 - \frac{x^2 \times l_0}{\sqrt{1 + \frac{x^4}{4}}} + 2 = 0$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \frac{\delta f_2}{\delta x} &= -\frac{x}{2(1+x^2)} \left( 2x - \frac{2x \times l_0 \sqrt{1 + \frac{x^4}{4}} - x^2 \times l_0 \frac{x^3}{2\sqrt{1 + \frac{x^4}{4}}}}{1 + \frac{x^4}{4}} \right) = -\frac{x}{2(1+x^2)} \left( 2 - \frac{2 \times l_0}{\sqrt{1 + \frac{x^4}{4}}} + l_0 \frac{x^4}{2\sqrt{1 + \frac{x^4}{4}}^{3/2}} \right) \\ &= \frac{-x^2}{2(1+x^2)} \frac{2(1 + \frac{x^4}{4}) - \frac{2}{x^2}(2+x^2)(1 + \frac{x^4}{4}) + \frac{x^2}{2}(2+x^2)}{1 + \frac{x^4}{4}} = \frac{-x^2 + 2}{(1+x^2)(1 + \frac{x^4}{4})} = \frac{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}{(1+x^2)(1 + \frac{x^4}{4})} \end{aligned}$$

Etudier le signe de  $\frac{\delta f_2}{\delta x}$  revient donc à étudier le signe de  $-x^2 + 2$ .

On en calcule alors le discriminant pour connaître les solutions pour dresser, par la suite, un tableau de variation.  $\Delta = 8$

D'où les solutions :

$$x_1 = -\frac{\sqrt{8}}{-2} = -\sqrt{2}$$

$$x_2 = \frac{\sqrt{8}}{-2} = \sqrt{2}$$



D'où le tableau de variations suivant :

$x$	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$+\infty$
$\frac{\delta f_2}{\delta x_1}$	+		-	+
$f_2$	$-\infty$	$-0$	$0$	$+\infty$

Les points d'équilibre sont les suivants :

$$x = 0$$

$$x_1 = \sqrt{-1 + \sqrt{1 + l_0^2} - \sqrt{-2 - 2\sqrt{1 + l_0^2} + l_0^2}}$$

$$x_2 = -\sqrt{-1 + \sqrt{1 + l_0^2} - \sqrt{-2 - 2\sqrt{1 + l_0^2} + l_0^2}}$$

$$x_3 = \sqrt{-1 + \sqrt{1 + l_0^2} + \sqrt{-2 - 2\sqrt{1 + l_0^2} + l_0^2}}$$

$$x_4 = -\sqrt{-1 + \sqrt{1 + l_0^2} + \sqrt{-2 - 2\sqrt{1 + l_0^2} + l_0^2}}$$

On peut alors étudier leur nature.

### Nature des points d'équilibre

En partant de la condition d'existence des points d'équilibre :

$$l_0 > 2\sqrt{2}$$

$$1 + l_0^2 > 9$$

$$-1 + \sqrt{1 + l_0^2} > 2$$

avec :

$$\sqrt{(-1 + \sqrt{1 + l_0^2})^2 - 4} > 0$$

Ce qui nous permet enfin de calculer la nature des points d'équilibre :

$$\circ x_0 = 0$$

D'après le tableau de variation,  $\frac{\delta f_2}{\delta x} < 0$ .

$$tr(J_f) = 0$$

$$det(J_f) > 0$$

$$\Delta(J_f) < 0$$

Il s'agit d'un point centre.

$$\circ x_1 = \sqrt{-1 + \sqrt{1 + l_0^2} - \sqrt{-2 - 2\sqrt{1 + l_0^2} + l_0^2}}$$

$$\text{Correspondant à : } y_3 = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{1 + l_0^2}) - \frac{1}{2}\sqrt{(-1 + \sqrt{1 + l_0^2})^2 - 4}$$

On pose :

$$A = -1 + \sqrt{1 + l_0^2}$$

$$B = \sqrt{(-1 + \sqrt{1 + l_0^2})^2 - 4} = \sqrt{A^2 - 4}$$

$$y = \frac{1}{2}(A - B)$$

D'après le théorème des trois maisons, on a :

$$B > \sqrt{A^2 - 4}$$

$$B > A - 2$$

$$A - B < 2$$

$$\frac{1}{2}(A - B) < 1$$

$$y_3 < 1$$

$$\frac{x_1^2}{2} < 1$$

$$x_1^2 < 2$$

$$\text{D'où : } x_1 < \sqrt{2} \text{ et } x_1 > -\sqrt{2}$$

D'après le tableau de variations,  $\frac{\delta f_2}{\delta x_1} < 0$ . Ainsi :

$$tr(J_f) = 0$$

$$det(J_f) > 0$$

$$\Delta(J_f) < 0$$

Il s'agit d'un point centre.

$$\circ x_2 = -\sqrt{-1 + \sqrt{1 + l_0^2} - \sqrt{-2 - 2\sqrt{1 + l_0^2} + l_0^2}}$$

Il s'agit de l'opposé de  $x_1$ , on est donc aussi dans le cas de  $\frac{\delta f_2}{\delta x_1} < 0$ .

$x_2$  est donc, comme  $x_1$ , un point centre.

$$\circ x_3 = \sqrt{-1 + \sqrt{1 + l_0^2} + \sqrt{-2 - 2\sqrt{1 + l_0^2} + l_0^2}} > \sqrt{2}$$

Car racine carrée d'une somme de expressions supérieures à zéro, dont l'une supérieur à 2. D'après le tableau de variation,  $\frac{\delta f_2}{\delta x} > 0$ . Ainsi :

$$tr(J_f) = 0$$

$$det(J_f) < 0$$

$$\Delta(J_f) > 0$$

Il s'agit d'un point selle.

$$\circ x_4 = -\sqrt{-1 + \sqrt{1 + l_0^2} + \sqrt{-2 - 2\sqrt{1 + l_0^2} + l_0^2}} < -\sqrt{2}$$

Puisqu'il s'agit de l'opposé de  $x_3$ . D'après le tableau de variation,  $\frac{\delta f_2}{\delta x} > 0$ .

$x_4$  est donc, comme  $x_3$ , un point selle.

On représente les  $x_n$  sur le portrait de phase.

### 3 On suppose que $a = \sqrt{15}$ .

#### 3.1 Déterminer la valeur exacte des points d'équilibres du système.

On détermine les valeurs numériques des points d'équilibres pour  $a = \sqrt{15}$ . On a :

$$x_0 = 0$$

$$x_1 = \sqrt{3 - \sqrt{5}} = 0.874$$

$$x_2 = \sqrt{3 - \sqrt{5}} = -0.874$$

$$x_3 = -\sqrt{3 + \sqrt{5}} = 2.288$$

$$x_4 = -\sqrt{3 + \sqrt{5}} = -2.288$$

#### 3.2 Déterminer l'intégrale première du système.

On rappelle que  $v = \dot{x}\sqrt{1+x^2}$  et  $\frac{\delta v}{\delta t} = \ddot{x}\sqrt{1+x^2} + \frac{\dot{x}^2 \cdot x}{\sqrt{1+x^2}}$

On va intégrer cette équation différentielle.

$$\ddot{x} + \frac{\dot{x}^2 x}{1+x^2} + \frac{1}{2} \frac{x^3}{1+x^2} + \frac{x}{1+x^2} - \frac{a \cdot x^3}{2(1+x^2)\sqrt{x^4/4+1}} = 0$$

On multiplie cette équation par  $\sqrt{1+x^2}$  :

$$\ddot{x}\sqrt{1+x^2} + \frac{\dot{x}^2 x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{2} \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{a \cdot x^3}{2\sqrt{1+x^2}\sqrt{x^4/4+1}} = 0$$

On remarque ainsi que l'équation s'écrit de la forme :

$$\frac{\delta v}{\delta t} + \sqrt{1+x^2}f(x) = 0$$

avec  $f(x) = \frac{1}{2} \frac{x^3}{1+x^2} + \frac{x}{1+x^2} - \frac{a \cdot x^3}{2(1+x^2)\sqrt{x^4/4+1}}$

On multiplie cette équation par  $v$ . On a alors :

$$v \cdot \frac{\delta v}{\delta t} + \dot{x}(1+x^2)f(x) = 0$$

En intégrant l'équation, on a alors :

$$\int v \cdot \frac{\delta v}{\delta t} + \dot{x}(1+x^2)f(x)dt = C$$

Ce qui revient à écrire :

$$\int v dv + \int (1+x^2)f(x)dx = C$$

En intégrant l'équation, on obtient :

$$\boxed{\frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{8}x^4 + \frac{x^2}{2} - a\sqrt{\frac{x^4}{4}+1} = C}$$

### 3.3 Représenter le portrait de phase.

A partir de l'intégrale première, on détermine le portrait de phase pour  $a = \sqrt{15}$ .

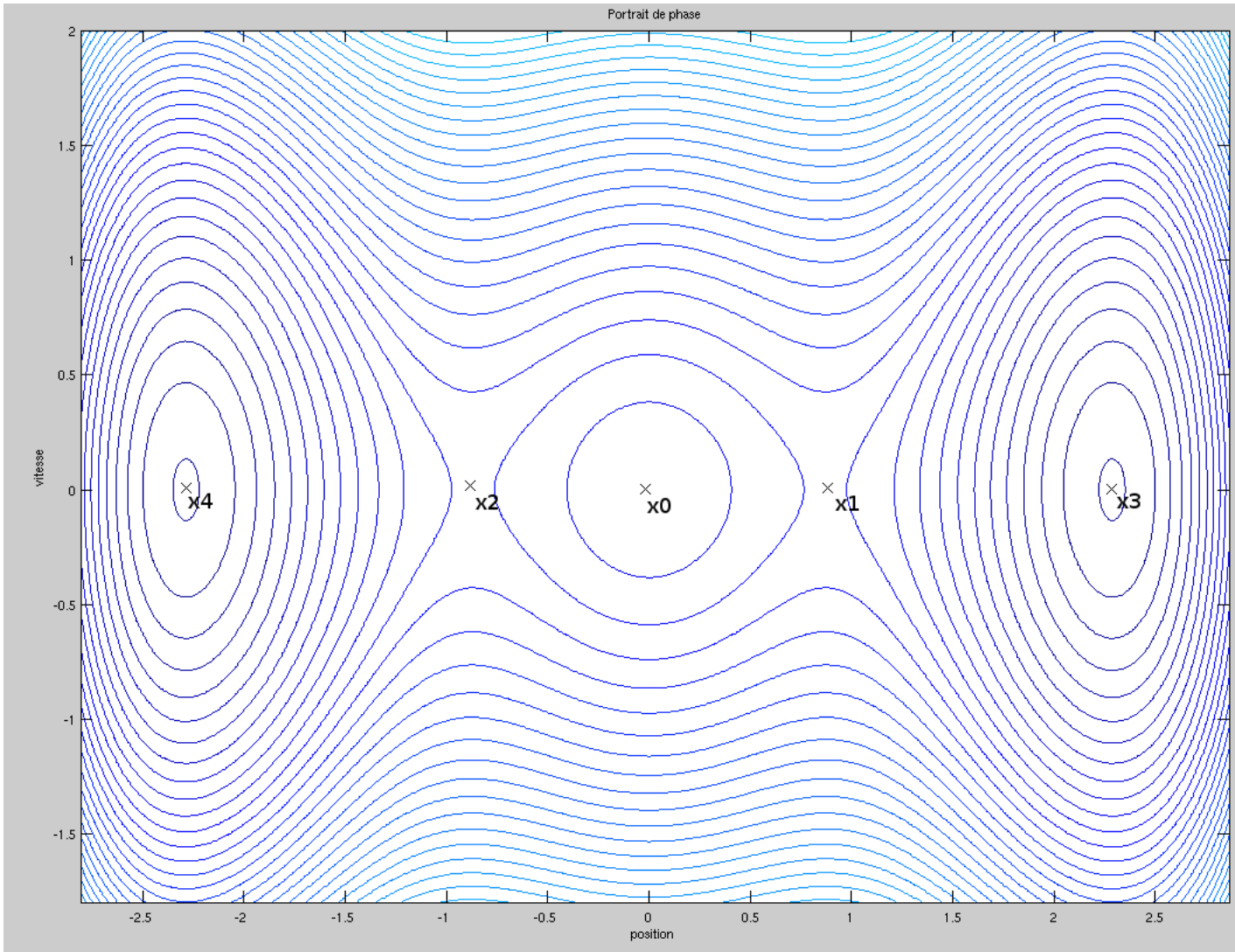


FIGURE 1 – Portrait de phase.  $a = \sqrt{15}$

### 3.4 Que peut-on en déduire sur le mouvement.

On remarque trois points centres en  $(0,0)$ ,  $(2.288,0)$  et  $(-2.288,0)$ . En ces points le système est stable. Contrairement à une spirale attractive, le mouvement du pendule ne va pas ralentir mais il ne va pas non plus s'accélérer. On remarque aussi deux points selles en  $(-0.874,0)$  et  $(0.874,0)$ . En ces points le système est instable et le mouvement tend à s'accélérer en s'éloignant de cette position.

## 4 On suppose maintenant que $a = \sqrt{3}$ et $x(0) = x_0 > 0$ et $\dot{x}(0) = 0$ .

### 4.1 Calculer et représenter à l'aide de Matlab la période T en fonction de $x_0$ pour $0 < x_0 < 10$ .

On peut déterminer la période T des oscillations en calculant cette intégrale :

$$T = 2 \int_{t(x_{min})}^{t(x_{max})} dt$$

L'intégrale première du système peut s'écrire sous la forme :  $\frac{v^2}{2} + G(x) = 0$  avec  $G(x) = \frac{1}{8}x^4 + \frac{x^2}{2} - a\sqrt{\frac{x^4}{4} + 1}$

C correspond à la valeur initiale :  $C = G(x_0)$  pour  $x_0 > 0$

Puisque  $\frac{1}{2}\dot{x}^2(1+x^2) + G(x) = G(x_0)$ . On a alors  $\dot{x} = \sqrt{\frac{2(G(x_0)-G(x))}{1+x^2}}$

Connaissant  $\frac{\delta x}{\delta t}$ , on peut simplifier le calcul de l'intégrale pour la période T :

$$T = 2 \int_{x_{min}}^{x_{max}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{2(G(x_0)-G(x))}} dx$$

On intègre de 0 à  $x_0$ . On a alors :

$$T = 2 \int_0^{x_0} \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{2(G(x_0)-G(x))}} dx$$

Matlab peut réaliser l'intégration. On lui demande d'intégrer sur plusieurs valeurs de  $x_0$ , afin de pouvoir tracer la courbe de la période en fonction de  $x_0$ .

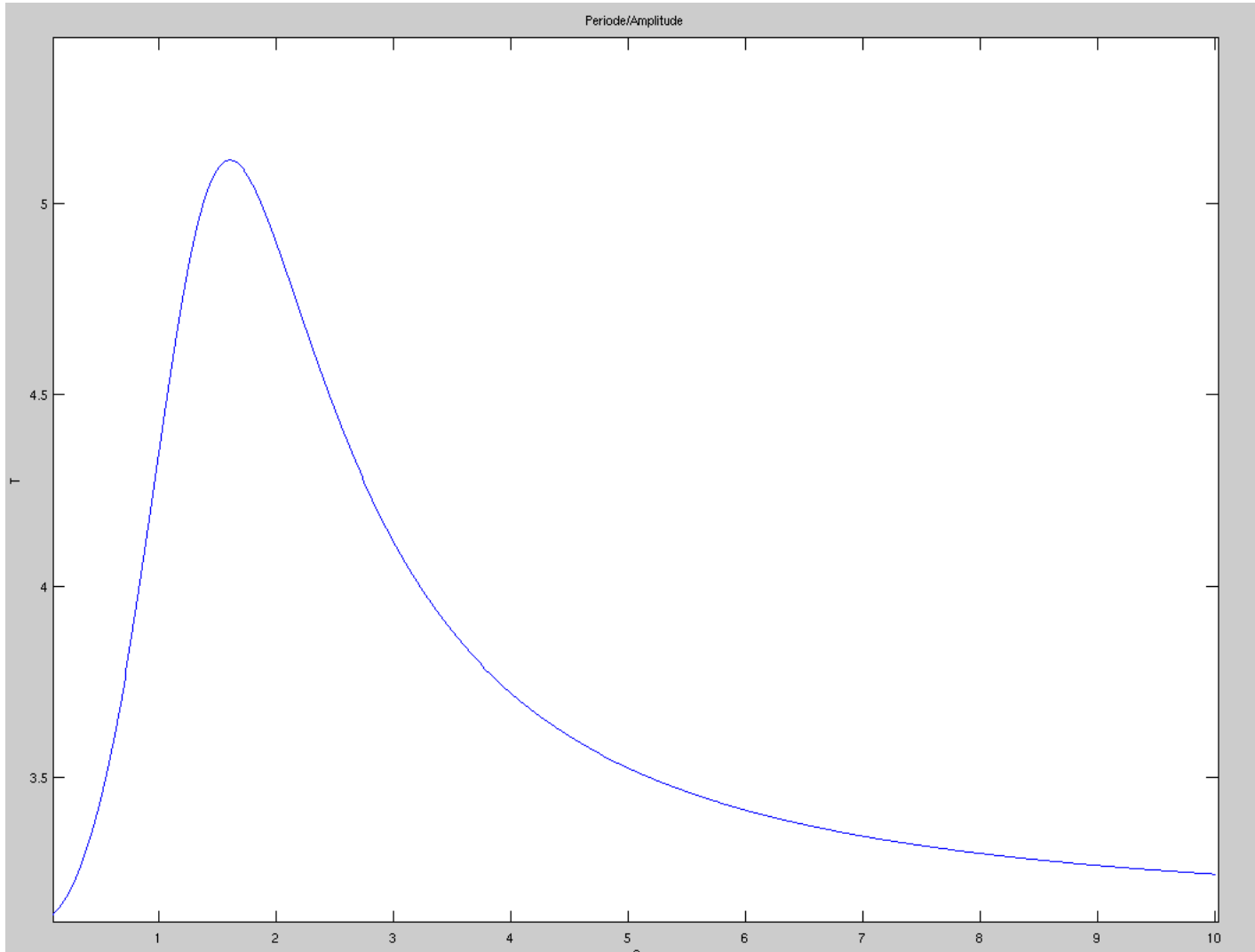


FIGURE 2 – Période T du système oscillatoire en fonction de  $x_0$

**5 On suppose maintenant que le système est soumis à une force de frottement  $\gamma > 0$  et que l'équation devient : (E)  $\ddot{x} + \gamma \dot{x} + f(x, a) = 0$ .**

**5.1 Représenter le diagramme de Matlab le diagramme de bifurcation en  $(a, \gamma)$  pour chacun des points d'équilibres.**

L'équation différentielle s'écrit désormais :

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \frac{\dot{x}^2 x}{1+x^2} + \frac{1}{2} \frac{x^3}{1+x^2} + \frac{x}{1+x^2} - \frac{a \cdot x^3}{2(1+x^2)\sqrt{x^4/4+1}} = 0$$

Il faut calculer pour chaque points d'équilibres :

D= Calcul du discriminant du polynôme caractéristique

S= Somme des 2 valeurs propres

P= Produit des 2 valeurs propres

Pour cela, on étudie la matrice du système linéaire associée.

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\delta f_1}{\delta x_1} & \frac{\delta f_1}{\delta x_2} \\ \frac{\delta f_2}{\delta x_1} & \frac{\delta f_2}{\delta x_2} \end{pmatrix}$$

On a toujours :  $\dot{x}_1 = x_2 = f_1(x_1^*, x_2^*)$

D'où  $\frac{\delta f_1}{\delta x_1} = 0$  et  $\frac{\delta f_1}{\delta x_2} = 1$

Le terme supplémentaire n'a pas une dérivée nulle par rapport à  $x_2$  :  $\frac{\delta \gamma x_2}{\delta x_2} = \gamma$

Nous obtenons ainsi la nouvelle matrice Jacobienne associée au système avec forces de frottements :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\delta f_2}{\delta x_1} & \gamma \end{pmatrix}$$

$$tr(J) = \gamma$$

$$det(J) = -\frac{\delta f_2}{\delta x_1}$$

$$\Delta(J) = tr^2(J) - 4det(J) = \gamma^2 + 4\frac{\delta f_2}{\delta x_1}$$

**5.2 On suppose que  $a = \sqrt{15}$ . Pour quelles valeurs (exactes) de  $\gamma$  les points d'équilibres attractifs changent-ils de nature.**

**5.3 Représenter le portrait de phase pour  $\gamma = 1, \gamma = 2, \gamma = 3$ .**

On calcule l'intégrale première du système afin de pouvoir déterminer le diagramme de phase. On a :

$$\boxed{\frac{1}{2}v^2 + \gamma \cdot v + \frac{1}{8}x^4 + \frac{x^2}{2} - a\sqrt{\frac{x^4}{4} + 1} = C}$$

Il faut utiliser la deuxième méthode (local)