Colpier Clément
Fornara Thibault
Pellegrino Guillaume
Renard Charles

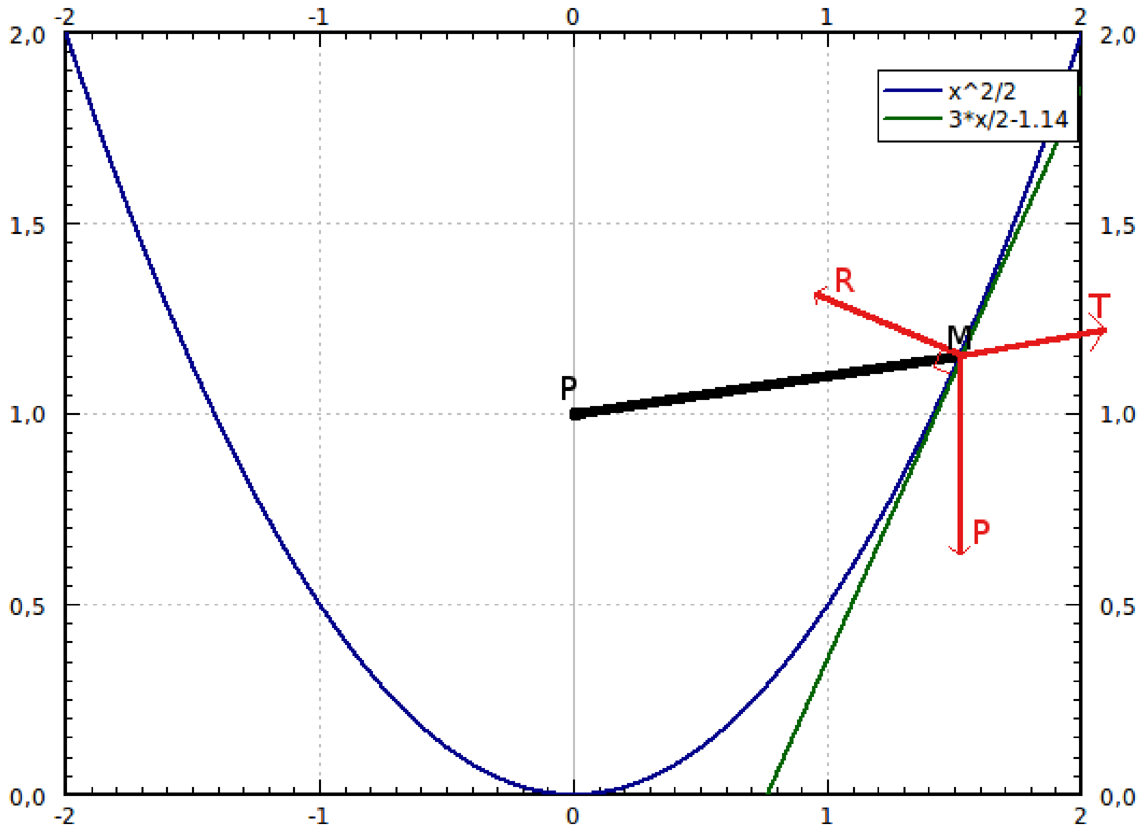
26/01/13

Projet de Mathématiques appliquées
PR3003

Table des matières

1 Déterminer l'équation différentielle vérifiée par M(t)=(x(t),y(t)).

1.1 Application de la seconde loi de Newton



La masselotte M se déplace uniquement selon la composante tangentielle. Pour déterminer l'équation différentielle on va donc particulièrement s'intéresser à l'équation sur la composante tangentielle.
Pour cela, étudie la somme des forces s'exerçant sur la composante tangentielle $\vec{u_t}$ et normale $\vec{u_n}$. Selon la seconde loi de Newton (PFD) :

$$\begin{cases} P_t + T_t = ma_t \\ P_n + R_n + T_n = 0 \end{cases}$$

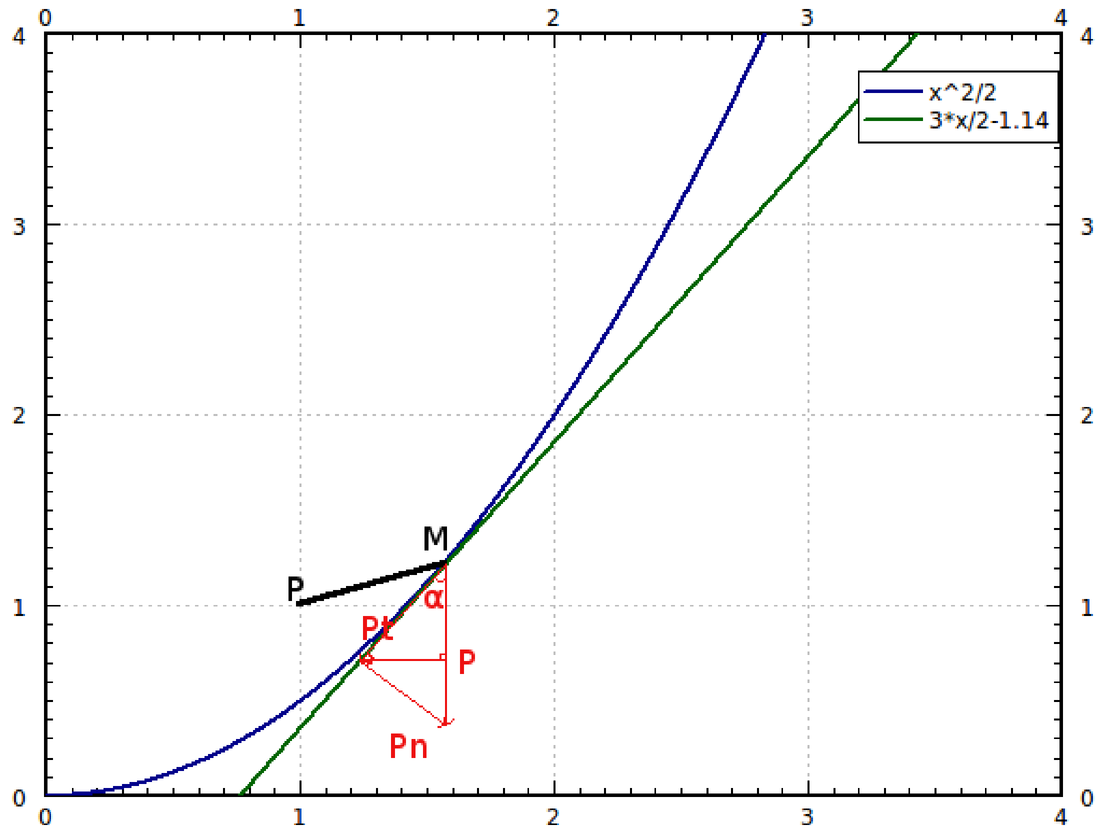
On s'intéresse à l'équation :

$$\boxed{P_t + T_t = ma_t}$$

Pour déterminer l'équation différentielle, on doit alors projeter $\vec{T}$ et $\vec{mg}$ sur $\vec{u_t}$.

1.2 Projection du Poids sur la composante tangentielle

On projette $\vec{mg} = -mg.\vec{u_y}$ sur $\vec{u_t}$



On projette tel que $P_t = P.\cos(\alpha)$

On cherche à déterminer α. On calcule la pente a de la tige parabolique. $a = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial x^2/2}{\partial x} = x$

En $M(x_0, y_0)$ la pente a de la tige parabolique vaut donc x_0. Cette pente permet de calculer l'angle α. En effet, on remarque graphiquement que $\tan(\alpha) = \frac{1}{a}$.

On en déduit : $\alpha = \tan^{-1}(\frac{1}{x_0})$

$P_t = P.\cos(\tan^{-1}(\frac{1}{x_0}))$

Or $\cos(\tan^{-1}(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

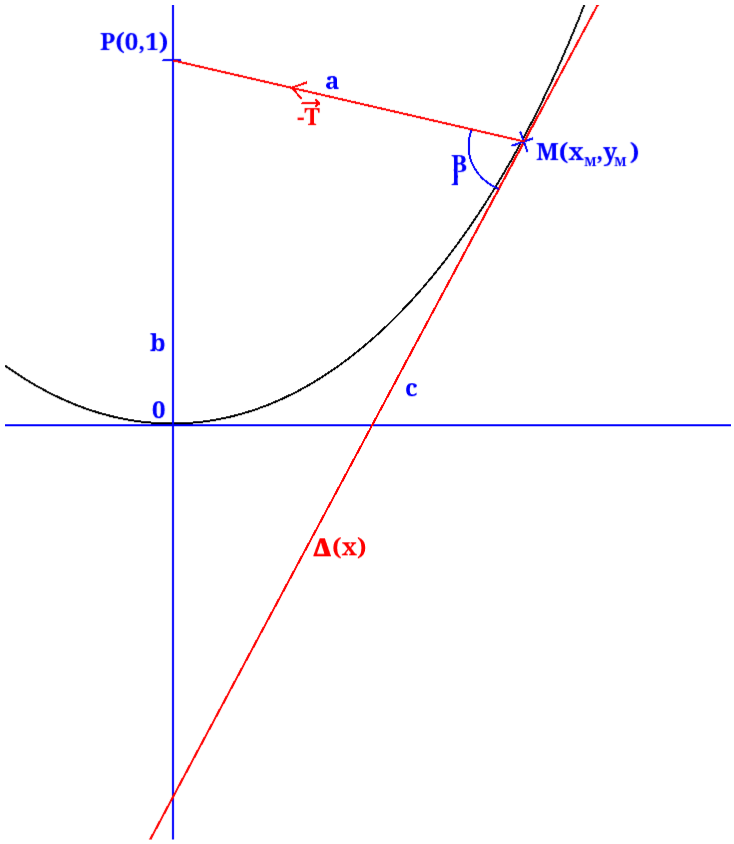
On en déduit donc : $P_t = P.\frac{1}{\sqrt{1+1/x_0^2}}$

D'où :

$$\boxed{P_t = P.\frac{x_0}{\sqrt{1+x_0^2}}}$$

1.3 Projection de la tension du ressort su la composante tangentielle

On projette désormais $\vec{T}$ sur $\vec{u_t}$.



On note x,y les coordonnées du point M. D'après le théorème de Pythagore :
$a = \sqrt{(x_M - x_P)^2 + (y_M - y_P)^2} = \sqrt{x^2 + (\frac{x^2}{2} - 1)} = \sqrt{x^2 + \frac{x^4}{4} - x^2 + 1} = \sqrt{\frac{x^4}{4} + 1}$
$b = \sqrt{(x_M - x_P)^2 + (y_M - \Delta(0))^2} = \sqrt{x^2 + (\frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2})^2} = \sqrt{x^2 + x^4} = |x|\sqrt{1 + x^2}$
$c = \sqrt{(y_p - \Delta(0))^2} = \sqrt{(1 + \frac{x^2}{2})^2} = 1 + \frac{x^2}{2}$
D'après le théorème d'Al-Kashi :
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \times \cos(\beta)$
$\cos(\beta) = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{x^4/4+1+x^2+x^4-1-x^2-x^4/4}{2x\sqrt{x^4/4+1}\sqrt{1+x^2}} = \frac{x^3}{2\sqrt{\frac{x^4}{4}+1}\sqrt{1+x^2}}$
On trouve donc :

$$\boxed{T_t = T \times \frac{x^3}{2\sqrt{\frac{x^4}{4}+1}\sqrt{1+x^2}}}$$

1.4 Determination de $\|T\|$

On détermine la valeur de la tension du ressort.
$T = k(l - l_0) = k(\sqrt{(x_M - x_P)^2 + (y_M - y_P)^2} - l_0) = k(\sqrt{x^2 + (x^2/2 - 1)^2} - l_0)$
$T = k(\sqrt{x^2 + x^4/4 - x^4 + 1} - l_0)$

$$\boxed{T = k(\sqrt{1 + \frac{x^4}{4}} - l_0)}$$

1.5 Détermination de a_t

On a vu dans la première équation que $a_n = 0$. On en déduit : $||\vec{a}|| = a_t$
Avec une accélération normale nulle, on peut écrire la formule de l'accélération dans le repère de Frenet ainsi :
$a_t = ||\vec{a}||$
Or $||\vec{a}|| = \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \pm\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}{\partial t}$
$\dot{y} = \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial y}{\partial x} \times \frac{\partial x}{\partial t} = x\dot{x}$
$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{x}^2 x^2} = \dot{x}\sqrt{1 + x^2}$

$\frac{\partial v}{\partial t} = \ddot{x}\sqrt{1+x^2} + \frac{\dot{x}^2 x}{\sqrt{1+x^2}}$
On trouve :

$$\boxed{a_t = \ddot{x}.\sqrt{1+x^2} + \frac{\dot{x}^2.x}{\sqrt{1+x^2}}}$$

1.6 Détermination de l'équation différentielle

A l'aide de ce qu'on a calculé précédemment on développe l'équation $mg_t + T_t = ma_t$ pour déterminer l'équation différentielle. On calcule maintenant l'équatio ndifférentielle du système en s'aidant des résultats précédents.
On part de l'équation $P_t + T_t = ma_t$
avec $T_t = k(l - l_0)$ et $P_t = -mg$
En développant les expression on obtient :
$-k(\sqrt{x^4/4+1} - l_0) \times \frac{x^3}{2\sqrt{x^4/4+1}\sqrt{1+x^2}} - mg\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = m(\ddot{x}\sqrt{1+x^2} + \frac{\ddot{x}^2 x}{\sqrt{1+x^2}})$
$-\frac{k}{m}(\frac{x^3}{2\sqrt{1+x^2}} - \frac{x^3 \times l_0}{2\sqrt{x^4/4+1}\sqrt{1+x^2}}) - \frac{xg}{\sqrt{1+x^2}} - \ddot{x}\sqrt{1+x^2} - \frac{\dot{x}^2 x}{\sqrt{1+x^2}} = 0$
En prenant k=m, g=1 et $a = l_0$ (données de l'énoncé), on obtient :
$-\frac{x^3}{2\sqrt{1+x^2}} + \frac{x^3 \times a}{2\sqrt{x^4/4+1}\sqrt{1+x^2}} - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - \ddot{x}\sqrt{1+x^2} - \frac{\dot{x}^2 x}{\sqrt{1+x^2}} = 0$
$\frac{x^3}{2\sqrt{1+x^2}} - \frac{ax^3}{2\sqrt{1+x^4/4}\sqrt{1+x^2}} + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \ddot{x}\sqrt{1+x^2} + \frac{\dot{x}^2 x}{\sqrt{1+x^2}} = 0$
L'équation différentielle revient donc à :

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{\dot{x}^2 x}{1+x^2} + \frac{x^3}{2(1+x^2)} - \frac{ax^3}{2\sqrt{1+x^4/4}(1+x^2)} + \frac{x}{1+x^2} = 0}$$

2 Dans toute la suite on supposera que g=1, k=m et on notera $a = l_0$ et on s'intéressera particulièrement par l'équation vérifié par x(t).

2.1 Montrer que l'équation est de la forme : $\ddot{x} + f(x, \dot{x}, a) = 0$.

On retrouve la forme $\ddot{x} + f(x, \dot{x}, a) = 0$, avec $f(x, \dot{x}, a) = \frac{\dot{x}^2 x + x^3/2 + x}{1+x^2} - \frac{x^3 \times a}{2\sqrt{x^4/4+1}(1+x^2)}$

2.2 Détermination des points d'équilibre

Les points d'équilibre sont les points où la vitesse du système et donc de la masselotte est nulle. Ainsi, les tèrmes lié à la vitesse et à l'accélération du système sont nuls.
Les points d'équilibres correspondent aux solutions de l'équation :
$\ddot{x} + \frac{\dot{x}^2 x - x^3/2 - x}{1+x^2} + \frac{x^3 \times a}{2\sqrt{x^4/4+1}(1+x^2)} = 0$ où $\ddot{x} = 0$ et $\dot{x} = 0$ aux points d'équilibre.
Ce qui revient à l'équation :
$\frac{-x^3/2 - x}{1+x^2} + \frac{x^3 \times a}{2\sqrt{x^4/4+1}(1+x^2)} = 0$
Une première solution correspond à $x_0 = 0$ et $y_0 = 0$
En multipliant de part et d'autre de l'équation par $\frac{2(1+x^2)}{x}$:
$x^2 - \frac{x^2 \times l_0}{\sqrt{1+x^4/4}} + 2 = 0$
$\sqrt{1+x^{\frac{4}{4}}}(x^2+2) = x^2 \times l_0$
$\sqrt{1+y^2}(2y+2) = 2yl_0$
$(1+y^2)(4y^2+8y+4) = 4y^2 \times l_0^2$
$(1+y^2)(y^2+2y+1) = y^2 \times l_0^2$
$(\frac{1}{y} + y)(y + 2 + \frac{1}{y}) = l_0^2$
On pose $X = y + \frac{1}{y}$ $(y \neq 0)$:
$X(X+2) = l_0^2$
$X^2 + 2X - l_0^2 = 0$
Dont on calcule le déterminant : $\Delta_X = 4(1 + l_0^2)$
D'où les solutions intermédiaires : $X_1 = -1 - \sqrt{1+l_0^2}$
$X_2 = -1 + \sqrt{1+l_0^2}$
$y + \frac{1}{y} = X$
$y^2 + 1 = Xy$
$y^2 - Xy + 1 = 0$

Dont le déterminant est : $\Delta_y = X^2 - 4$
D'où les solutions :
$y = \frac{1}{2}(X - \sqrt{X^2 - 4})$
$y = \frac{1}{2}(X + \sqrt{X^2 - 4})$
Cependant, il faut savoir que Δ_y doit être positif afin que les racines soient rélles.

Pour la solution $X = (-1 + \sqrt{1 + l_0^2})^2$, nous avons deux cas de condition d'existance :

- $(-1 + \sqrt{1 + l_0^2})^2 > 2 \Rightarrow \sqrt{1 + l_0^2} > 3 \Rightarrow l_0 > \sqrt{8}$
- $(-1 + \sqrt{1 + l_0^2})^2 < -2 \Rightarrow \sqrt{1 + l_0^2} < -1$ qu iest une condition irréalisable

Finalement, on déduit que la condition d'existence des points d'équilibres est $l_0 > \sqrt{8}$. On peut alors trouver l'expression des ordonnées des points d'équilibre y_1, y_2, y_3, y_4 en fonction de l_0 :

- $y_0 = 0$
  (Déterminé précédemment)

- $y_1 = \frac{1}{2}(X_1 - \sqrt{X_1 - 4}) = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{1 + l_0^2}) - \frac{1}{2}(\sqrt{(-1 - \sqrt{1 + l_0^2})^2 - 4})$
  Cette solution est strictement négative alors que y(t) est positive, selon la rampe $y = \frac{x^2}{2}$. On doit alors l'éliminer.

- $y_2 = \frac{X_1 + \sqrt{X_1 - 4}}{2} = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{1 + l_0^2}) + \frac{1}{2}\sqrt{-2 + 2\sqrt{1 + l_0^2} + l_0^2}$
  Cette solution est aussi à éliminer. En effet, nous avons :
  $y_2 > 0 \Rightarrow (-1 - \sqrt{1 + l_0^2} + \sqrt{(-1 - \sqrt{1 + l_0^2})^2 + l_0^2} > 0$
  $\Rightarrow \sqrt{(-1 - \sqrt{1 + l_0^2})^2 + l_0^2} > 1 + \sqrt{1 + l_0^2}$
  $\Rightarrow 0 > \sqrt{1 + l_0^2}$ ce qui est impossible.
- $y_3 = \frac{X_2 - \sqrt{X_2 - 4}}{2} = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{1 + l_0^2}) - \frac{1}{2}\sqrt{(-1 + \sqrt{1 + l_0^2})^2 - 4}$
  $= \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{1 + l_0^2}) - \frac{1}{2}\sqrt{-2 - 2\sqrt{1 + l_0^2} + l_0^2}$

- $y_4 = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{1 + l_0^2}) + \frac{1}{2}\sqrt{(-1 + \sqrt{1 + l_0^2})^2 - 4}$
  $= \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{1 + l_0^2}) + \frac{1}{2}\sqrt{-2 - 2\sqrt{1 + l_0^2} + l_0^2}$

Seules deux solutions sont alors retenues, l'unique condition d'existance étant $l_0 > \sqrt{8}$.
En considérant $y = \frac{x^2}{2} \Longrightarrow x = \pm\sqrt{2y}$ on a au total 5 points d'équilibre :
$x_0 = 0$
$x_1 = \sqrt{-1 + \sqrt{1 + l_0^2} - \sqrt{-2 - 2\sqrt{1 + l_0^2} + l_0^2})}$
$x_2 = -\sqrt{-1 + \sqrt{1 + l_0^2} - \sqrt{-2 - 2\sqrt{1 + l_0^2} + l_0^2})}$
$x_3 = \sqrt{-1 + \sqrt{1 + l_0^2} + \sqrt{-2 - 2\sqrt{1 + l_0^2} + l_0^2}}$
$x_4 = -\sqrt{-1 + \sqrt{1 + l_0^2} + \sqrt{-2 - 2\sqrt{1 + l_0^2} + l_0^2}}$
Il reste à déterminer la nature de ces points d'équilibre du système.

2.3 Détermination de la nature des points d'équilibre

Nous sommes dans le cas d'un système non linéaire. On pose $x_1 = x, x_2 = \dot{x}$
On a alors :

$$\dot{x_1} = x_2 = f_1(x_1*, x_2*)$$

$$\dot{x_2} = -\frac{x_2^2.x_1}{1 + x_1^2} - \frac{x_1^3}{2(1 + x_1^2)} - \frac{x_1}{1 + x_1^2} + \frac{ax_1^3}{2(1 + x_1^2)(x_1^4/4 + 1)} = f_2(x_1, x_2)$$

Aux points d'équilibre, la vitesse est nulle d'où $x_2 = 0$ et $\dot{x_2} = 0$
D'où :

$$f_1(x_1*, 0) = 0$$

$$f_2(x_1*, 0) = \frac{x_1^3 \times l_0}{2\sqrt{1 + \frac{x_1^4}{4}}(1 + x_1^2)} - \frac{x_1^3}{2(1 + x_1^2)} - \frac{x}{1 + x^2}$$

On va calculer la nature des points d'équilibre en passant par la matrice Jacobienne :

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\delta f_1}{dx_1} & \frac{\delta f_1}{dx_2} \\ \frac{\delta f_2}{dx_1} & \frac{\delta f_2}{dx_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\delta f_2}{dx_1} & 0 \end{pmatrix}$$

La nature des points d'équilibre du système est définie par la trace, le déterminant, et le discriminant du polynôme caractéristique de la matrice Jacobienne ci-dessus.
$Tr(J) = 0$
$det(J) = -\frac{\delta f_2}{\delta x_1}$
$\Delta(J) = Tr^2(J) - 4det(J) = 4 * \frac{\delta f_2}{\delta x_1}$

On a alors besoin de déterminer le signe de $frac\delta f_2 \delta x_1$ aux points d'équilibre.

En factorisant f_2, on a :
$f_2 = 0 = -\frac{x}{2(1+x^2)} * (x^2 - \frac{x^2 \times l_0}{\sqrt{1+\frac{x^4}{4}}} + 2)$
car $\ddot{x} = 0$ aux points d'équilibre.

Ici, nous avons deux éventualités pour satisfaire cette équation :

- cas 1 : $\frac{x}{1+x^2} = 0$
- cas 2 : $x^2 - \frac{x^2 \times l_0}{\sqrt{1+\frac{x^4}{4}}} + 2 = 0$

Premier Cas

$\frac{x}{1+x^2} = 0 \longrightarrow x = 0$
On a alors :
$\frac{\delta f_2}{\delta x_1} = \frac{-1}{2} \frac{\delta \frac{x}{1+x^2}}{\delta x}(x^2 - \frac{x^2 \times l_0}{\sqrt{1+\frac{x^4}{4}}} + 2) = -2\frac{1+x^2-4x^2}{2(1+x^2)^2}$ Ce qui équivaut, avec l'hypothèse précédente $x = 0$, à :

$$frac\delta f_2 \delta x_1 = -1$$

La matrice jacobienne du système pour le point d'équilibre $x = 0$ devient donc :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

On peut alors en calculer les caractéristique :
$tr(J_f) = 0$
$det(J_f) = 1$
$\Delta(J_f) = -4$
Ce sont les caractéristiques d'un point d'équilibre centré.

Second Cas

Dans ce cas, $x^2 - \frac{x^2 \times l_0}{\sqrt{1+\frac{x^4}{4}}} + 2 = 0$
On a alors :
$\frac{\delta f_2}{\delta x} = -\frac{x}{2(1+x^2)}(2x - \frac{2x \times l_0 \sqrt{1+\frac{x^4}{4}} - x^2 \times l_0 \frac{x^3}{2\sqrt{1+\frac{x^4}{4}}}}{1+\frac{x^4}{4}}) = -\frac{x}{2(1+x^2)}(2 - \frac{2 \times l_0}{\sqrt{1+\frac{x^4}{4}}} + l_0 \frac{x^4}{2\sqrt{1+\frac{x^4}{4}}^{3/2}})$
$= \frac{-x^2}{2(1+x^2)} \frac{2(1+\frac{x^4}{4}) - \frac{2}{x^2}(2+x^2)(1+\frac{x^4}{4}) + \frac{x^2}{2}(2+x^2)}{1+\frac{x^4}{4}} = \frac{-x^2+2}{(1+x^2)(1+\frac{x^4}{4})} = \frac{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}{(1+x^2)(1+\frac{x^4}{4})}$
Etudier le signe de $\frac{\delta f_2}{\delta x}$ revient donc à étudier le signe de $-x^2 + 2$.
On en calcule alors le discriminant pour connaitre les solutions pour dresser, par la suite, un tableau de variation. $\Delta = 8$
D'où les solutions :
$x_1 = -\frac{\sqrt{8}}{-2} = -\sqrt{2}$
$x_2 = \frac{\sqrt{8}}{-2} = \sqrt{2}$

D'où le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$ $\quad -\sqrt{2}$ $\quad \sqrt{2}$ $\quad +\infty$
$\frac{\delta f_2}{\delta x_1}$	$+$ $\quad -$ $\quad +$

Avec $\frac{\delta f_2}{\delta x_1} = 0$ pour $x = \pm\sqrt{2}$. Les points d'équilibre sont les suivants :
$x = 0$
$x_1 = \sqrt{-1 + \sqrt{1+l_0^2} - \sqrt{-2 - 2\sqrt{1+l_0^2} + l_0^2})}$
$x_2 = -\sqrt{-1 + \sqrt{1+l_0^2} - \sqrt{-2 - 2\sqrt{1+l_0^2} + l_0^2})}$
$x_3 = \sqrt{-1 + \sqrt{1+l_0^2} + \sqrt{-2 - 2\sqrt{1+l_0^2} + l_0^2}}$
$x_4 = -\sqrt{-1 + \sqrt{1+l_0^2} + \sqrt{-2 - 2\sqrt{1+l_0^2} + l_0^2}}$

On peut alors étudier leur nature.

Nature des points d'équilibre

En partant de la condition d'existence des points d'équilibre :
$l_0 > 2\sqrt{2}$
$1 + l_0^2 > 9$
$-1 + \sqrt{1+l_0^2} > 2$
avec :
$\sqrt{(-1 + \sqrt{1+l_0^2})^2 - 4} > 0$
Ce qui nous permet enfin de calculer la nature des points d'équilibre :

- $x_0 = 0$
  D'après le tableau de variation, $\frac{\delta f_2}{\delta x}$<0.
  $tr(J_f) = 0$
  $det(J_f) > 0$
  $\Delta(J_f) < 0$
  Il s'agit d'un point centre.
- $x_1 = \sqrt{-1 + \sqrt{1+l_0^2} - \sqrt{-2 - 2\sqrt{1+l_0^2} + l_0^2})}$
  Correspondant à : $y_3 = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{1+l_0^2}) - \frac{1}{2}\sqrt{(-1 + \sqrt{1+l_0^2})^2 - 4}$
  On pose :
  $A = -1 + \sqrt{1+l_0^2}$
  $B = \sqrt{(-1 + \sqrt{1+l_0^2})^2 - 4} = \sqrt{A^2 - 4}$
  $y = \frac{1}{2}(A - B)$
  D'après le théorème des trois maisons, on a :
  $B > \sqrt{A^2} - \sqrt{4}$
  $B > A - 2$
  $A - B < 2$
  $\frac{1}{2}(A - B) < 1$
  $y_3 < 1$
  $\frac{x_1^2}{2} < 1$
  $x_1^2 < 2$
  D'où : $x_1 < \sqrt{2}$ et $x_1 > -\sqrt{2}$
  D'après le tableau de variations, $\frac{\delta f_2}{\delta x_1} < 0$. Ainsi :
  $tr(J_f) = 0$
  $det(J_f) > 0$
  $\Delta(J_f) < 0$
  Il s'agit d'un point centre.
- $x_2 = -\sqrt{-1 + \sqrt{1+l_0^2} - \sqrt{-2 - 2\sqrt{1+l_0^2} + l_0^2})}$

Il s'agit de l'opposé de x_1, on est donc aussi dans le cas de $\frac{\delta f_2}{\delta x_1} < 0$.
x_2 est donc, comme x_1, un point centre.

- $x_3 = \sqrt{-1 + \sqrt{1 + l_0^2} + \sqrt{-2 - 2\sqrt{1 + l_0^2} + l_0^2}} > \sqrt{2}$
  Car racine carrée d'une somme de expressions supérieures à zéro, dont l'une supérieur à 2. D'après le tableau de variation, $\frac{\delta f_2}{\delta x} > 0$. Ainsi :
  $tr(J_f) = 0$
  $det(J_f) < 0$
  $\Delta(J_f) > 0$
  Il s'agit d'un point selle.
- $x_4 = -\sqrt{-1 + \sqrt{1 + l_0^2} + \sqrt{-2 - 2\sqrt{1 + l_0^2} + l_0^2}} < -\sqrt{2}$
  Puisqu'il s'agit de l'opposé de x_3. D'après le tableau de variation, $\frac{\delta f_2}{\delta x} > 0$.
  x_4 est donc, comme x_3, un point selle.

On représente les x_n sur le portrait de phase.

3 On suppose que $a = \sqrt{15}$.

3.1 Déterminer la valeur exacte des points d'équilibres du système.

On détermine les valeurs numériques des points d'équilibres pour $a = \sqrt{15}$. On a :
$x_0 = 0$
$x_1 = \sqrt{3 - \sqrt{5}} = 0.874$
$x_2 = \sqrt{3 - \sqrt{5}} = -0.874$
$x_3 = -\sqrt{3 + \sqrt{5}} = 2.288$
$x_4 = -\sqrt{3 + \sqrt{5}} = -2.288$

3.2 Déterminer l'intégrale première du système.

On rappelle que $v = \dot{x}\sqrt{1 + x^2}$ et $\frac{\delta v}{\delta t} = \ddot{x}\sqrt{1 + x^2} + \frac{\dot{x}^2.x}{\sqrt{1+x^2}}$
On va intégrer cette équation différentielle.

$$\ddot{x} + \frac{\dot{x}^2 x}{1 + x^2} + \frac{1}{2}\frac{x^3}{1 + x^2} + \frac{x}{1 + x^2} - \frac{a.x^3}{2(1 + x^2)\sqrt{x^4/4 + 1}} = 0$$

On multiplie cette équation par $\sqrt{1 + x^2}$:

$$\ddot{x}\sqrt{1 + x^2} + \frac{\dot{x}^2 x}{\sqrt{1 + x^2}} + \frac{1}{2}\frac{x^3}{\sqrt{1 + x^2}} + \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} - \frac{a.x^3}{2\sqrt{1 + x^2}\sqrt{x^4/4 + 1}} = 0$$

On remarque ainsi que l'équation s'écrit de la forme :

$$\frac{\delta v}{\delta t} + \sqrt{1 + x^2} f(x) = 0$$

avec $f(x) = \frac{1}{2}\frac{x^3}{1+x^2} + \frac{x}{1+x^2} - \frac{a.x^3}{2(1+x^2)\sqrt{x^4/4+1}}$
On multiplie cette équation par v. On a alors :
$v.\frac{\delta v}{\delta t} + \dot{x}(1 + x^2)f(x) = 0$
En intégrant l'équation, on a alors :
$\int v.\frac{\delta v}{\delta t} + \dot{x}(1 + x^2)f(x)dt = C$
Ce qui revient à écrire :
$\int vdv + \int (1 + x^2)f(x)dx = C$
En intégrant l'équation, on obtient :

$$\boxed{\frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{8}x^4 + \frac{x^2}{2} - a\sqrt{\frac{x^4}{4} + 1} = C}$$

3.3 Représenter le portrait de phase.

A partir de l'intégrale première, on détermine le portrait de phase pour $a = \sqrt{15}$.

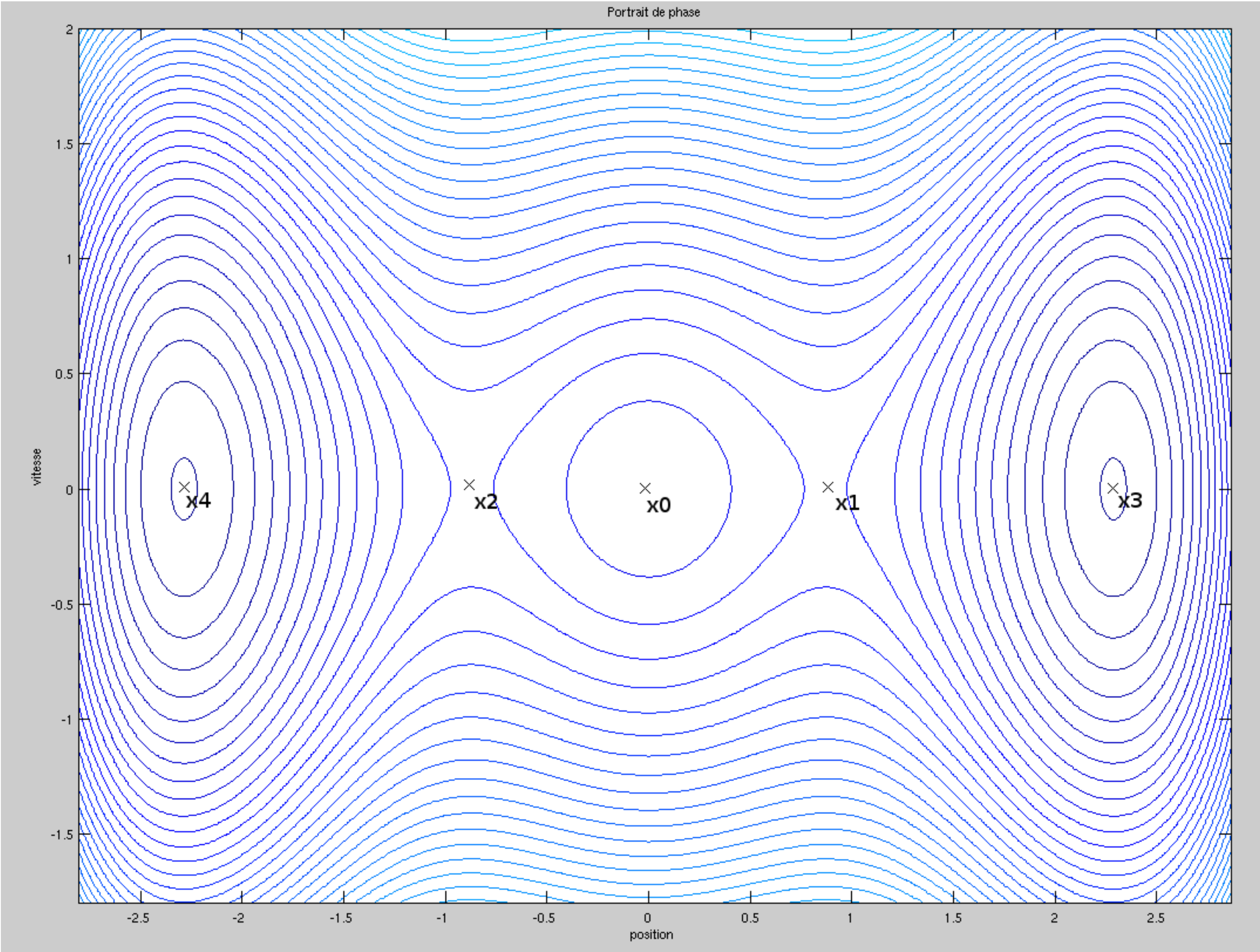


FIGURE 1 – Portrait de phase. $a = \sqrt{15}$

3.4 Que peut-on en déduire sur le mouvement.

On remarque trois points centres en (0,0), (2.288,0) et (-2.288,0). En ces points le système est stable. Contrairement à une spirale attractive, le mouvement du pendule ne va pas ralentir mais il ne va pas non plus s'accélérer. On remarque aussi deux points selles en (-0.874,0) et (0.874,0). En ces points le système est instable et le mouvement tend à s'accélérer en s'éloignant de cette position.

4 On suppose maintenant que $a = \sqrt{3}$ et $x(0) = x_0 > 0$ et $\dot{x}(0) = 0$.

4.1 Calculer et représenter à l'aide de Matlab la période T en fonction de x_0 pour $0 < x_0 < 10$.

On peut déterminer la période T des oscillations en calculant cette intégrale :
$T = 2\int_{t(x_{min})}^{t(x_{max})} dt$

L'intégrale première du système peut s'écrire sous la forme : $\frac{v^2}{2} + G(x) = 0$ avec $\boxed{G(x) = \frac{1}{8}x^4 + \frac{x^2}{2} - a\sqrt{\frac{x^4}{4} + 1}}$

C correspond à la valeur initiale : $C = G(x_0)$ pour $x_0 > 0$

Puisque $\frac{1}{2}\dot{x}^2(1+x^2) + G(x) = G(x_0)$. On a alors $\dot{x} = \sqrt{\frac{2(G(x_0)-G(x))}{1+x^2}}$

Connaissant $\frac{\delta x}{\delta t}$, on peut simplifier le calcul de l'intégrale pour la période T :
$T = 2\int_{x_{min}}^{x_{max}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{2(G(x_0)-G(x))}}dx$
On intègre de 0 à x_0. On a alors :

$$\boxed{T = 2\int_{0}^{x_0} \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{2(G(x_0)-G(x))}}dx}$$

Matlab peut réaliser l'intégration. On lui demande d'intégrer sur plusieurs valeurs de x_0, afin de pouvoir tracer la courbe de la période en fonction de x_0.

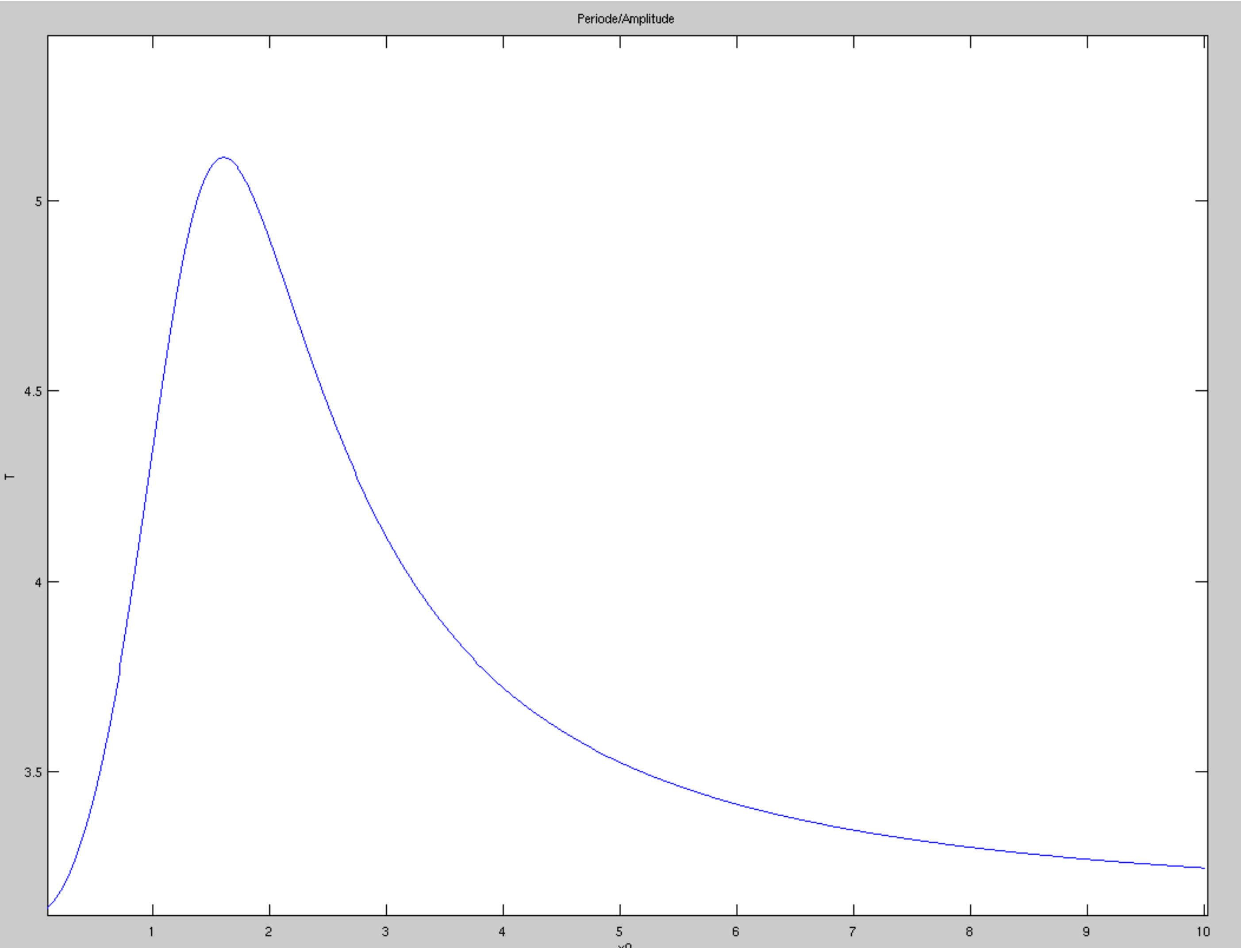


FIGURE 2 – Période T du système oscillatoire en fonction de x_0

5 On suppose maintenant que le système est soumis à une force de frottement $\gamma > 0$ et que l'équation devient : (E) $\ddot{x} + \gamma.\dot{x} + f(x,a) = 0$.

5.1 Représenter le diagramme de Matlab le diagramme de bifurcation en (a, γ) pour chacun des points d'équilibres.

L'équation différentielle s'écrit désormais :

$$\ddot{x} + \gamma.\dot{x} + \frac{\dot{x}^2 x}{1+x^2} + \frac{1}{2}\frac{x^3}{1+x^2} + \frac{x}{1+x^2} - \frac{a.x^3}{2(1+x^2)\sqrt{x^4/4+1}} = 0$$

Il faut calculer pour chaque points d'équilibres :
D= Calcul du discriminant du polynôme caractéristique
S= Somme des 2 valeurs propres

P= Produit des 2 valeurs propres

Pour cela, on étudie la matrice du système linéaire associée.

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\delta f_1}{\delta x_1} & \frac{\delta f_1}{\delta x_2} \\ \frac{\delta f_2}{\delta x_1} & \frac{\delta f_2}{\delta x_2} \end{pmatrix}$$

On a toujours : $\dot{x_1} = x_2 = f_1(x_1*, x_2*)$
D'où $\frac{\delta f_1}{\delta x_1} = 0$ et $\frac{\delta f_1}{\delta x_2} = 1$
Le terme supplémentaire n'a pas une dérivée nulle par rapport à x_2 : $\frac{\delta \gamma x_2}{\delta x_2} = \gamma$
Nous obtenons ainsi la nouvelle matrice Jacobienne associée au système avec forces de frottements :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\delta f_2}{\delta x_1} & \gamma \end{pmatrix}$$

$tr(J) = \gamma$
$det(J) = -\frac{\delta f_2}{\delta x_1}$
$\Delta(J) = tr^2(J) - 4det(J) = \gamma^2 + 4\frac{\delta f_2}{\delta x_1}$

5.2 On suppose que $a = \sqrt{15}$. Pour quelles valeurs (exactes) de γ les points d'équilibres attractifs changent-ils de nature.

Comme nous venons de le voir, en ajoutant une force de frottement, un facteur γ est ajouté à l'équation, la trace et le discriminant sont modifiés. De plus, pour les points attractifs $frac\delta f_2 \delta x_1 < 0$. Nous nous intéressons donc aux trois points centres que nous avons trouvé dans les questions précédentes : $x = 0$
$x_1 = \sqrt{-1 + \sqrt{1 + l_0^2} - \sqrt{-2 - 2\sqrt{1 + l_0^2} + l_0^2})}$
$x_2 = -\sqrt{-1 + \sqrt{1 + l_0^2} - \sqrt{-2 - 2\sqrt{1 + l_0^2} + l_0^2})}$

On étudie les signes de la trace et de Delta. On détermine les racines de delta. On pose : $0 = gamma^2 + 4\frac{\delta f_2}{\delta x_1}$
$\Delta = -16.\frac{\delta f_2}{\delta x_1}$

5.3 Représenter le portrait de phase pour $\gamma = 1, \gamma = 2, \gamma = 3$.

On calcul l'intégrale première du système afin de pouvoir déterminer le diagramme de phase. On a :

$$\boxed{\frac{1}{2}v^2 + \gamma.v + \frac{1}{8}x^4 + \frac{x^2}{2} - a\sqrt{\frac{x^4}{4} + 1} = C}$$

Il faut utiliser la deuxième méthode (local)