

Colpier Clément
Fornara Thibault
Pellegrino Guillaume
Renard Charles

26/01/13



Projet de Mathématiques appliquées
PR3003

-

Table des matières

1	Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $M(t)=(x(t),y(t))$.	4
1.1	Projection du Poids sur la composante tangentielle	5
1.2	Projection de la tension du ressort su la composante tangentielle	5
1.2.1	Methode de Guillaume, diff d'angle	6
1.2.2	Methode de Charles, Al-Kashi	7
1.3	Determination de $\ T\ $	7
1.4	Détermination de a_t	7
1.5	Détermination de l'équation différentielle	8
1.5.1	Equa diff de Guillaume	8
1.5.2	Equa diff de Charles	8
2	Dans toute la suite on supposera que $g=1$, $k=m$ et on notera $a = l_0$ et on s'intéressera particulièrement par l'équation vérifié par $x(t)$.	9
2.1	Montrer que l'équation est de la forme : $\ddot{x} + f(x, \dot{x}, a) = 0$	9
2.2	Détermination des points d'équilibre	9
2.3	Détermination de la nature des points d'équilibre	10
3	On suppose que $a = \sqrt{15}$.	12
3.1	Déterminer la valeur exacte des points d'équilibres du système.	12
3.2	Déterminer l'intégrale première du système.	12
3.3	Représenter le portrait de phase.	13
3.4	Que peut-on en déduire sur le mouvement.	13
4	On suppose maintenant que $a = \sqrt{3}$ et $x(0) = x_0 > 0$ et $\dot{x}(0) = 0$.	14
4.1	Calculer et représenter à l'aide de Matlab la période T en fonction de x_0 pour $0 < x_0 < 10$	14
5	On suppose maintenant que le système est soumis à une force de frottement $\gamma > 0$ et que l'équation devient : (E) $\ddot{x} + \gamma\dot{x} + f(x, a) = 0$.	15
5.1	Représenter le diagramme de Matlab le diagramme de bifurcation en (a, γ) pour chacun des points d'équilibres.	15
5.2	On suppose que $a = \sqrt{15}$. Pour quelles valeurs (exactes) de γ les points d'équilibres attractifs changent-ils de nature.	15
5.3	Représenter le portrait de phase pour $\gamma = 1, \gamma = 2, \gamma = 3$	15

1 Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $M(t)=(x(t),y(t))$.



La masselotte M se déplace uniquement selon la composante tangentielle. Pour déterminer l'équation différentielle on va donc particulièrement s'intéresser à l'équation sur la composante tangentielle. Pour cela, on commence à faire la somme des forces s'exerçant sur la composante tangentielle \vec{u}_t et normale \vec{u}_n selon la seconde loi de Newton (PFD) :

$$\begin{cases} P_t + T_t = ma_t \\ P_n + R_n + T_n = 0 \end{cases}$$

On s'intéresse à l'équation :

$$P_t + T_t = ma_t$$

Pour déterminer l'équation différentielle, on doit alors projeter \vec{T} et $\vec{m}g$ sur \vec{u}_t .

On projette $\vec{m}g = -mg.\vec{u}_y$ sur \vec{u}_t

1.1 Projection du Poids sur la composante tangentielle



On remarque sur le graphique que $P_t = P \cdot \cos(\alpha)$

On cherche à déterminer α . On calcule la pente a de la tige parabolique. $a = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial x^2/2}{\partial x} = x$

En $M(x_0, y_0)$ la pente a de la tige parabolique vaut donc x_0 . Cette pente a nous permet de calculer l'angle α .

En effet, on remarque graphiquement que $\tan(\alpha) = \frac{1}{a}$. On en déduit : $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{1}{x_0}\right)$

Au final on trouve donc : $P_t = P \cdot \cos(\tan^{-1}(\frac{1}{x_0}))$

Or $\cos(\tan^{-1}(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ On en déduit donc : $P_t = P \cdot \frac{1}{\sqrt{1+1/x_0^2}}$ D'où :

$$P_t = P \cdot \frac{x_0}{\sqrt{1+x_0^2}}$$

1.2 Projection de la tension du ressort sur la composante tangentielle

On projette désormais \vec{T} sur \vec{u}_t .

1.2.1 Methode de Guillaume, diff d'angle



$$\cos(\phi) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\cos(\theta) = \frac{x}{\sqrt{(1-y)^2+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^4/4}}$$

$$\text{Et : } T_t = T \cdot \cos(\alpha_2) = T \cdot \cos(\phi - \theta) = T[\cos(\phi) \cdot \cos(\theta) + \sin(\phi) \cdot \sin(\theta)]$$

On en déduit :

$$T_t = T \left[\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{x}{\sqrt{1+x^4/4}} + \sin(\cos^{-1}(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}})) \cdot \sin(\cos^{-1}(\frac{x}{\sqrt{1+x^4/4}})) \right]$$

$$\text{Or : } \sin(\cos^{-1}(u)) = \sqrt{1-u^2}$$

On trouve donc :

$$T_t = T \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{x}{\sqrt{1+x^4/4}} + \sqrt{1 - \frac{1}{1+x^2}} \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{1+x^4/4}} \right]$$

1.2.2 Methode de Charles, Al-Kashi



On note x, y les coordonnées du point M.

$$a = \sqrt{(x_M - x_P)^2 + (y_M - y_P)^2} = \sqrt{x^2 + \left(\frac{x^2}{2} - 1\right)^2} = \sqrt{x^2 + \frac{x^4}{4} - x^2 + 1} = \sqrt{\frac{x^4}{4} + 1}$$

$$b = \sqrt{(x_M - x_P)^2 + (y_M - \Delta(0))^2} = \sqrt{x^2 + \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2}\right)^2} = \sqrt{x^2 + x^4} = x\sqrt{1 + x^2}$$

note : faut-il mettre plutôt $|x|\sqrt{1 + x^2}$?

$$c = \sqrt{(y_P - \Delta(0))^2} = \sqrt{\left(1 + \frac{x^2}{2}\right)^2} = 1 + \frac{x^2}{2}$$

D'après le théorème d'Al-Kashi : $x_1 = \frac{5 + \sqrt{25 - 4 \times 6}}{2} = 3$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\beta)$$

$$\cos(\beta) = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{x^4/4 + 1 + x^2 + x^4 - 1 - x^2 - x^4/4}{2x\sqrt{x^4/4 + 1}\sqrt{1 + x^2}} = \frac{x^3}{2\sqrt{x^4/4 + 1}\sqrt{1 + x^2}}$$

On trouve donc :

$$T_t = T \times \frac{x^3}{2\sqrt{x^4/4 + 1}\sqrt{1 + x^2}}$$

1.3 Détermination de $\|T\|$

On détermine la valeur de la tension du ressort.

$$T = k(l - l_0) = k(\sqrt{(x_M - x_P)^2 + (y_M - y_P)^2} - l_0) = k(\sqrt{x^2 + (x^2/2 - 1)^2} - l_0)$$

$$T = k(\sqrt{x^2 + x^4/4 - x^2 + 1} - l_0)$$

$$T = k(\sqrt{1 + \frac{x^4}{4}} - l_0)$$

1.4 Détermination de a_t

On a vu dans la première équation que $a_n = 0$. On en déduit : $\|\vec{a}\| = a_t$

Avec une accélération normale nulle, on peut écrire la formule de l'accélération dans le repère de Frenet ainsi :

$$a_t = \|\vec{a}\|$$

$$\begin{aligned}
\text{Or } ||\vec{a}|| &= \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \pm \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}{\partial t} \\
\dot{y} &= \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial y}{\partial x} \times \frac{\partial x}{\partial t} = x\dot{x} \\
v &= \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{x}^2 x^2} = \dot{x}\sqrt{1+x^2} \\
\frac{\partial v}{\partial t} &= \ddot{x}\sqrt{1+x^2} + \frac{\dot{x}^2 x}{\sqrt{1+x^2}} \\
\text{On trouve :}
\end{aligned}$$

$$a_t = \ddot{x} \cdot \sqrt{1+x^2} + \frac{\dot{x}^2 \cdot x}{\sqrt{1+x^2}}$$

(Equation de Charles)

1.5 Détermination de l'équation différentielle

A l'aide de ce qu'on a calculé précédemment on développe l'équation $mg_t + T_t = ma_t$ pour déterminer l'équation différentielle. On obtient alors :

1.5.1 Equa diff de Guillaume

En développant et en prenant $k=m$, $g=1$ et $a=l_0$ (données de l'énoncé), on obtient :

$$\begin{aligned}
m \cdot 1 \cdot \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + m(\sqrt{x^4/4+1} - a) \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{x}{\sqrt{1+x^4/4}} + \sqrt{1 - \frac{1}{1+x^2}} \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{1+x^4/4}} \right] - m \cdot \ddot{x} \cdot \sqrt{1+x^2} - m \cdot \frac{\dot{x}^2 \cdot x}{\sqrt{1+x^2}} &= 0 \\
\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + (\sqrt{x^4/4+1} - a) \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{x}{\sqrt{1+x^4/4}} + \sqrt{1 - \frac{1}{1+x^2}} \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{1+x^4/4}} \right] - \ddot{x} \cdot \sqrt{1+x^2} - \frac{\dot{x}^2 \cdot x}{\sqrt{1+x^2}} &= 0 \\
\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + (\sqrt{x^4/4+1} - a) \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{x}{\sqrt{1+x^4/4}} + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \sqrt{\frac{x^4/4-x^2+1}{1+x^4/4}} \right] - \ddot{x} \cdot \sqrt{1+x^2} - \frac{\dot{x}^2 \cdot x}{\sqrt{1+x^2}} &= 0 \\
\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \left[\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{x \cdot \sqrt{x^4/4-x^2+1}}{\sqrt{1+x^2}} \right] - a \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{x}{\sqrt{1+x^4/4}} + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \sqrt{\frac{x^4/4-x^2+1}{1+x^4/4}} \right] - \ddot{x} \cdot \sqrt{1+x^2} - \frac{\dot{x}^2 \cdot x}{\sqrt{1+x^2}} &= 0 \\
\frac{x}{1+x^2} + \left[\frac{x}{1+x^2} + \frac{x \cdot \sqrt{x^4/4-x^2+1}}{1+x^2} \right] - a \cdot \left[\frac{x}{(1+x^2) \cdot \sqrt{1+x^4/4}} + \frac{x \cdot \sqrt{x^4/4-x^2+1}}{(1+x^2) \cdot \sqrt{1+x^4/4}} \right] - \ddot{x} - \frac{\dot{x}^2 \cdot x}{1+x^2} &= 0 \\
\frac{2x+x \cdot \sqrt{x^4/4-x^2+1}-\dot{x}^2 \cdot x}{1+x^2} - a \cdot \frac{x+x \cdot \sqrt{x^4/4-x^2+1}}{(1+x^2) \cdot \sqrt{1+x^4/4}} - \ddot{x} &= 0 \\
- \frac{2x+x \cdot \sqrt{x^4/4-x^2+1}-\dot{x}^2 \cdot x}{1+x^2} + a \cdot \frac{x+x \cdot \sqrt{x^4/4-x^2+1}}{(1+x^2) \cdot \sqrt{1+x^4/4}} + \ddot{x} &= 0 \\
- \frac{2x+x \cdot \sqrt{(x^2/2-1)^2-\dot{x}^2 \cdot x}}{1+x^2} + a \cdot \frac{x+x \cdot \sqrt{(x^2/2-1)^2}}{(1+x^2) \cdot \sqrt{1+x^4/4}} + \ddot{x} &= 0
\end{aligned}$$

$$\frac{-x^3/2-x+\dot{x}^2 x}{1+x^2} + \frac{a \cdot x^3}{2(1+x^2) \cdot \sqrt{1+x^4/4}} + \ddot{x} = 0$$

1.5.2 Equa diff de Charles

On calcule maintenant l'équation différentielle du système en s'aidant des résultats précédents.

On part de l'équation $P_t + T_t = ma_t$

avec $T_t = k(l - l_0)$ et $P_t = -mg$

En développant les expression on obtient :

$$\begin{aligned}
k(\sqrt{x^4/4+1} - l_0) \times \frac{x^3}{2\sqrt{x^4/4+1}\sqrt{1+x^2}} - mg \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} &= m(\ddot{x}\sqrt{1+x^2} + \frac{\dot{x}^2 x}{\sqrt{1+x^2}}) \\
\frac{k}{m} \left(\frac{x^3}{2\sqrt{1+x^2}} - \frac{x^3 \times l_0}{2\sqrt{x^4/4+1}\sqrt{1+x^2}} \right) - \frac{xg}{\sqrt{1+x^2}} - \ddot{x}\sqrt{1+x^2} - \frac{\dot{x}^2 x}{\sqrt{1+x^2}} &= 0 \\
\text{En prenant } k=m, g=1 \text{ et } a=l_0 \text{ (données de l'énoncé), on obtient :} \\
- \frac{x^3}{2\sqrt{1+x^2}} + \frac{x^3 \times a}{2\sqrt{x^4/4+1}\sqrt{1+x^2}} + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \ddot{x}\sqrt{1+x^2} + \frac{\dot{x}^2 x}{\sqrt{1+x^2}} &= 0 \\
(-\frac{x^3}{2} + x) \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} + \frac{x^3 \times a}{2\sqrt{x^4/4+1}\sqrt{1+x^2}} + \ddot{x}\sqrt{1+x^2} + \frac{\dot{x}^2 x}{\sqrt{1+x^2}} &= 0 \\
(-\frac{x^3}{2} + x) \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} + \frac{x^3 \times a}{2\sqrt{x^4/4+1}\sqrt{1+x^2}} + \ddot{x}\sqrt{1+x^2} + \frac{\dot{x}^2 x}{\sqrt{1+x^2}} &= 0 \\
(-\frac{x^3}{2} + x) \frac{1}{1+x^2} + \frac{x^3 \times a}{2\sqrt{x^4/4+1}(1+x^2)} + \ddot{x} + \frac{\dot{x}^2 x}{\sqrt{1+x^2}} &= 0
\end{aligned}$$

$$\ddot{x} + \frac{\dot{x}^2 x - x^3/2 - x}{1+x^2} + \frac{x^3 \times a}{2\sqrt{x^4/4+1}(1+x^2)} = 0$$

2 Dans toute la suite on supposera que $g=1$, $k=m$ et on notera $a = l_0$ et on s'intéressera particulièrement par l'équation vérifié par $x(t)$.

2.1 Montrer que l'équation est de la forme : $\ddot{x} + f(x, \dot{x}, a) = 0$.

On a bien $\ddot{x} + f(x, \dot{x}, a) = 0$. avec $f(x, \dot{x}, a) = \frac{\dot{x}^2 x + x^3/2 + x}{1+x^2} - \frac{x^3 \times a}{2\sqrt{x^4/4+1}(1+x^2)}$

2.2 Détermination des points d'équilibre

Les points d'équilibre sont les points où la vitesse du système et donc de la masselotte est nulle. Ainsi, les termes lié à la vitesse et à l'accélération du système sont nuls.

Les points d'équilibres correspondent aux solutions de l'équation :

$$\ddot{x} + \frac{\dot{x}^2 x - x^3/2 - x}{1+x^2} + \frac{x^3 \times a}{2\sqrt{x^4/4+1}(1+x^2)} = 0 \text{ où } \ddot{x} = 0 \text{ et } \dot{x} = 0 \text{ Ainsi on a :}$$

$$\frac{-x^3/2 - x}{1+x^2} + \frac{x^3 \times a}{2\sqrt{x^4/4+1}(1+x^2)} = 0$$

Une première solution correspond à $x_0 = 0$ et $y_0 = 0$

En multipliant de part et d'autre de l'équation par $\frac{2(1+x^2)}{x}$:

$$x^2 - \frac{x^2 \times l_0}{\sqrt{1+x^4/4}} + 2 = 0$$

$$\sqrt{1+x^4/4}(x^2+2) = x^2 \times l_0$$

$$\sqrt{1+y^2}(2y+2) = 2yl_0$$

$$(1+y^2)(4y^2+8y+4) = 4y^2 \times l_0^2$$

$$(1+y^2)(y^2+2y+1) = y^2 \times l_0^2$$

$$(\frac{1}{y}+y)(y+2+\frac{1}{y}) = l_0^2$$

On pose $X = y + \frac{1}{y}$ ($y \neq 0$) :

$$X(X+2) = l_0^2$$

$$X^2 + 2X - l_0^2 = 0$$

Dont on calcule le déterminant : $\Delta_X = 4(1+l_0^2)$

D'où les solutions intermédiaires : $X_1 = -1 - \sqrt{1+l_0^2}$

$$X_2 = -1 + \sqrt{1+l_0^2}$$

$$y + \frac{1}{y} = X$$

$$y^2 + 1 = Xy$$

$$y^2 - Xy + 1 = 0$$

Dont le déterminant est : $\Delta_y = X^2 - 4$

D'où les solutions :

$$y = \frac{1}{2}(X - \sqrt{X^2 - 4})$$

$$y = \frac{1}{2}(X + \sqrt{X^2 - 4})$$

Cependant, il faut savoir que Δ_y doit être positif afin que les racines soient réelles.

Pour la solution $X = (-1 + \sqrt{1+l_0^2})^2$, nous avons deux cas de condition d'existence :

$$- (-1 + \sqrt{1+l_0^2})^2 > 2 \Rightarrow \sqrt{1+l_0^2} > 3 \Rightarrow l_0 > \sqrt{8}$$

$$- (-1 + \sqrt{1+l_0^2})^2 < -2 \Rightarrow \sqrt{1+l_0^2} < -1 \text{ qui est une condition irréalisable}$$

Finalement, on déduit que la condition d'existence des points d'équilibres est $l_0 > \sqrt{8}$. On peut alors trouver l'expression des ordonnées des points d'équilibre y_1, y_2, y_3, y_4 en fonction de l_0 :

$$- y_0 = 0$$

(Déterminé précédemment)

$$- y_1 = \frac{1}{2}(X_1 - \sqrt{X_1^2 - 4}) = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{1+l_0^2}) - \frac{1}{2}(\sqrt{(-1 - \sqrt{1+l_0^2})^2 - 4})$$

Cette solution est strictement négative alors que $y(t)$ est positive, selon la rampe $y = \frac{x^2}{2}$. On doit alors l'éliminer.

$$- y_2 = \frac{X_1 + \sqrt{X_1^2 - 4}}{2} = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{1+l_0^2}) + \frac{1}{2}\sqrt{-2 + 2\sqrt{1+l_0^2} + l_0^2}$$

Cette solution est aussi à éliminer. En effet, nous avons :

$$y_2 > 0 \Rightarrow (-1 - \sqrt{1+l_0^2}) + \sqrt{(-1 - \sqrt{1+l_0^2})^2 + l_0^2} > 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{(-1 - \sqrt{1+l_0^2})^2 + l_0^2} > 1 + \sqrt{1+l_0^2}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow 0 > \sqrt{1+l_0^2} \text{ ce qui est impossible.} \\
- y_3 &= \frac{x_2 - \sqrt{x_2^2 - 4}}{2} = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{1+l_0^2}) - \frac{1}{2}\sqrt{(-1 + \sqrt{1+l_0^2})^2 - 4} \\
&= \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{1+l_0^2}) - \frac{1}{2}\sqrt{-2 - 2\sqrt{1+l_0^2} + l_0^2} \\
- y_4 &= \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{1+l_0^2}) + \frac{1}{2}\sqrt{(-1 + \sqrt{1+l_0^2})^2 - 4} \\
&= \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{1+l_0^2}) + \frac{1}{2}\sqrt{-2 - 2\sqrt{1+l_0^2} + l_0^2}
\end{aligned}$$

Seules deux solutions sont alors retenues, l'unique condition d'existence étant $l_0 > \sqrt{8}$.

En considérant $y = \frac{x^2}{2} \Rightarrow x = \pm\sqrt{2y}$ on a au total 5 points d'équilibre :

$$\begin{aligned}
x_0 &= 0 \\
x_1 &= \sqrt{-1 + \sqrt{1+l_0^2} - \sqrt{-2 - 2\sqrt{1+l_0^2} + l_0^2}} \\
x_2 &= -\sqrt{-1 + \sqrt{1+l_0^2} - \sqrt{-2 - 2\sqrt{1+l_0^2} + l_0^2}} \\
x_3 &= \sqrt{-1 + \sqrt{1+l_0^2} + \sqrt{-2 - 2\sqrt{1+l_0^2} + l_0^2}} \\
x_4 &= -\sqrt{-1 + \sqrt{1+l_0^2} + \sqrt{-2 - 2\sqrt{1+l_0^2} + l_0^2}}
\end{aligned}$$

Il reste à déterminer la nature de ces points d'équilibre du système.

2.3 Détermination de la nature des points d'équilibre

Nous sommes dans le cas d'un système non linéaire. On pose $x_1 = x, x_2 = \dot{x}$

On a alors :

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 = f_1(x_1, x_2) \\
\dot{x}_2 &= -\frac{x_2^2 \cdot x_1}{1+x_1^2} - \frac{x_1^3}{2(1+x_1^2)} - \frac{x_1}{1+x_1^2} + \frac{ax_1^3}{2(1+x_1^2)(x_1^4/4+1)} = f_2(x_1, x_2)
\end{aligned}$$

Aux points d'équilibre, la vitesse est nulle d'où $x_2 = 0$ et $\dot{x}_2 = 0$

D'où :

$$\begin{aligned}
f_1(x_1, 0) &= 0 \\
f_2(x_1, 0) &= \frac{x_1^3 \times l_0}{2\sqrt{1+\frac{x_1^4}{4}}(1+x_1^2)} - \frac{x_1^3}{2(1+x_1^2)} - \frac{x_1}{1+x_1^2}
\end{aligned}$$

On va calculer la nature des points d'équilibre en passant par la matrice Jacobienne :

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\delta f_1}{\delta x_1} & \frac{\delta f_1}{\delta x_2} \\ \frac{\delta f_2}{\delta x_1} & \frac{\delta f_2}{\delta x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\delta f_2}{\delta x_1} & 0 \end{pmatrix}$$

La nature des points d'équilibre du système est définie par la trace, le déterminant, et le discriminant du polynôme caractéristique de la matrice Jacobienne ci-dessus.

$$Tr(J) = 0$$

$$det(J) = -\frac{\delta f_2}{\delta x_1}$$

$$\Delta(J) = Tr^2(J) - 4det(J) = 4 * \frac{\delta f_2}{\delta x_1}$$

On a alors besoin de déterminer le signe de $\frac{\delta f_2}{\delta x_1}$ aux points d'équilibre.

En factorisant f_2 , on a :

$$f_2 = 0 = -\frac{x}{2(1+x^2)} * (x^2 - \frac{x^2 \times l_0}{\sqrt{1+\frac{x^4}{4}}} + 2)$$

car $\ddot{x} = 0$ aux points d'équilibre.

Ici, nous avons deux éventualités pour satisfaire cette équation :

$$- \text{cas 1 : } \frac{x}{1+x^2} = 0$$

$$- \text{cas 2 : } x^2 - \frac{x^2 \times l_0}{\sqrt{1+\frac{x^4}{4}}} + 2 = 0$$

Premier Cas

$$\frac{x}{1+x^2} = 0 \longrightarrow x = 0$$

On a alors :

$$\frac{\delta f_2}{\delta x_1} = -\frac{1}{2} \frac{\delta \frac{x}{1+x^2}}{\delta x} (x^2 - \frac{x^2 \times l_0}{\sqrt{1+\frac{x^4}{4}}} + 2) = -2 \frac{1+x^2-4x^2}{2(1+x^2)^2} \text{ Ce qui équivaut, avec l'hypothèse précédente } x = 0, \text{ à :}$$

$$\frac{\delta f_2}{\delta x_1} = -1$$

La matrice jacobienne du système pour le point d'équilibre $x = 0$ devient donc :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

On peut alors en calculer les caractéristiques :

$$\text{tr}(J_f) = 0$$

$$\det(J_f) = 1$$

$$\Delta(J_f) = -4$$

Ce sont les caractéristiques d'un point d'équilibre centré.

Second Cas

$$\text{Dans ce cas, } x^2 - \frac{x^2 \times l_0}{\sqrt{1+\frac{x^4}{4}}} + 2 = 0$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \frac{\delta f_2}{\delta x} &= -\frac{x}{2(1+x^2)} \left(2x - \frac{2x \times l_0 \sqrt{1+\frac{x^4}{4}} - x^2 \times l_0 \frac{x^3}{2\sqrt{1+\frac{x^4}{4}}}}{1+\frac{x^4}{4}} \right) = -\frac{x}{2(1+x^2)} \left(2 - \frac{2 \times l_0}{\sqrt{1+\frac{x^4}{4}}} + l_0 \frac{x^4}{2\sqrt{1+\frac{x^4}{4}}} \right) \\ &= \frac{-x^2}{2(1+x^2)} \frac{2(1+\frac{x^4}{4}) - \frac{2}{x^2}(2+x^2)(1+\frac{x^4}{4}) + \frac{x^2}{2}(2+x^2)}{1+\frac{x^4}{4}} = \frac{-x^2+2}{(1+x^2)(1+\frac{x^4}{4})} = \frac{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}{(1+x^2)(1+\frac{x^4}{4})} \end{aligned}$$

Etudier le signe de $\frac{\delta f_2}{\delta x}$ revient donc à étudier le signe de $-x^2 + 2$.

On en calcule alors le discriminant pour connaître les solutions pour dresser, par la suite, un tableau de variation.

$$\Delta = 8$$

D'où les solutions :

$$x_1 = -\frac{\sqrt{8}}{2} = -\sqrt{2}$$

$$x_2 = \frac{\sqrt{8}}{2} = \sqrt{2}$$

D'où le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}\sqrt{2}$	$+\infty$
$\frac{\delta f_2}{\delta x_1}$	+	-	+
ENLEVER CETTE LIGNE	$-\infty$	$\begin{array}{c} \downarrow \\ 0 \end{array}$	$\begin{array}{c} \downarrow \\ 0 \end{array}$

$$x=0 \quad x_1 = \sqrt{-1 + \sqrt{1 + l_0^2} - \sqrt{-2 - 2\sqrt{1 + l_0^2} + l_0^2}}$$

$$x_2 = -\sqrt{-1 + \sqrt{1 + l_0^2} - \sqrt{-2 - 2\sqrt{1 + l_0^2} + l_0^2}}$$

$$x_3 = \sqrt{-1 + \sqrt{1 + l_0^2} + \sqrt{-2 - 2\sqrt{1 + l_0^2} + l_0^2}}$$

$$x_4 = -\sqrt{-1 + \sqrt{1 + l_0^2} + \sqrt{-2 - 2\sqrt{1 + l_0^2} + l_0^2}}$$

On peut alors étudier la nature des points d'équilibre. En partant de la condition d'existence des points d'équilibre :

$$l_0 > 2\sqrt{2}$$

$$1 + l_0^2 > 9$$

$$-1 + \sqrt{1 + l_0^2} > 2$$

avec :

$$\sqrt{(-1 + \sqrt{1 + l_0^2})^2 - 4} > 0$$

Ce qui nous permet enfin de calculer la nature des points d'équilibre :

$$- x_2 = 0$$

D'après le tableau de variation, $\frac{\delta f_2}{\delta x} < 0$.

$$tr(J_f) = 0$$

$$det(J_f) > 0$$

$$\Delta(J_f) < 0$$

Il s'agit d'un point centre.

$$- x_1 = \sqrt{-1 + \sqrt{1 + l_0^2} - \sqrt{-2 - 2\sqrt{1 + l_0^2} + l_0^2}}$$

RESTE A DEMONSTRER QUE C'EST UN POINT CENTRE.

$$- x_2 = -\sqrt{-1 + \sqrt{1 + l_0^2} - \sqrt{-2 - 2\sqrt{1 + l_0^2} + l_0^2}}$$

RESTE A DEMONSTRER QUE C'EST UN POINT CENTRE.

$$- x_3 = \sqrt{-1 + \sqrt{1 + l_0^2} + \sqrt{-2 - 2\sqrt{1 + l_0^2} + l_0^2}} > \sqrt{2}$$

Car racine carrée d'une somme de expressions supérieures à zéro, dont l'une supérieur à 2. D'après le tableau de variation, $\frac{\delta f_2}{\delta x} > 0$. Ainsi :

$$tr(J_f) = 0$$

$$det(J_f) < 0$$

$$\Delta(J_f) > 0$$

Il s'agit d'un point selle.

$$- x_4 = -\sqrt{-1 + \sqrt{1 + l_0^2} + \sqrt{-2 - 2\sqrt{1 + l_0^2} + l_0^2}} < -\sqrt{2}$$

Car racine carrée d'une somme de expressions supérieures à zéro, dont l'une supérieur à 2. D'après le tableau de variation, $\frac{\delta f_2}{\delta x} > 0$. Ainsi :

$$tr(J_f) = 0$$

$$det(J_f) < 0$$

$$\Delta(J_f) > 0$$

Il s'agit d'un point selle.

On représente les x_n sur le portrait de phase.

3 On suppose que $a = \sqrt{15}$.

3.1 Déterminer la valeur exacte des points d'équilibres du système.

On détermine les valeurs numériques des points d'équilibres pour $a = \sqrt{15}$. On a :

$$x_0 = 0$$

$$x_1 = \sqrt{3 - \sqrt{5}} = 0.874$$

$$x_2 = \sqrt{3 - \sqrt{5}} = -0.874$$

$$x_3 = -\sqrt{3 + \sqrt{5}} = 2.288$$

$$x_4 = -\sqrt{3 + \sqrt{5}} = -2.288$$

3.2 Déterminer l'intégrale première du système.

On rappelle que $v = \dot{x}\sqrt{1+x^2}$ et $\frac{\delta v}{\delta t} = \ddot{x}\sqrt{1+x^2} + \frac{\dot{x}^2 \cdot x}{\sqrt{1+x^2}}$

On va intégrer cette équation différentielle.

$$\ddot{x} + \frac{\dot{x}^2 x}{1+x^2} + \frac{1}{2} \frac{x^3}{1+x^2} + \frac{x}{1+x^2} - \frac{a \cdot x^3}{2(1+x^2)\sqrt{x^4/4+1}} = 0$$

On multiplie cette équation par $\sqrt{1+x^2}$:

$$\ddot{x}\sqrt{1+x^2} + \frac{\dot{x}^2 x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{2} \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{a \cdot x^3}{2\sqrt{1+x^2}\sqrt{x^4/4+1}} = 0$$

On remarque ainsi que l'équation s'écrit de la forme :

$$\frac{\delta v}{\delta t} + \sqrt{1+x^2} f(x) = 0$$

$$\text{avec } f(x) = \frac{1}{2} \frac{x^3}{1+x^2} + \frac{x}{1+x^2} - \frac{a \cdot x^3}{2(1+x^2)\sqrt{x^4/4+1}}$$

On multiplie cette équation par v . On a alors :

$$v \cdot \frac{\delta v}{\delta t} + \dot{x}(1+x^2)f(x) = 0$$

En intégrant l'équation, on a alors :

$$\int v \cdot \frac{\delta v}{\delta t} + \dot{x}(1+x^2)f(x)dt = C$$

Ce qui revient à écrire :

$$\int v dv + \int (1+x^2)f(x)dx = C$$

En intégrant l'équation, on obtient :

$$\frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{8}x^4 + \frac{x^2}{2} - a\sqrt{\frac{x^4}{4} + 1} = C$$

3.3 Représenter le portrait de phase.

A partir de l'intégrale première, on détermine le portrait de phase pour $a = \sqrt{15}$.

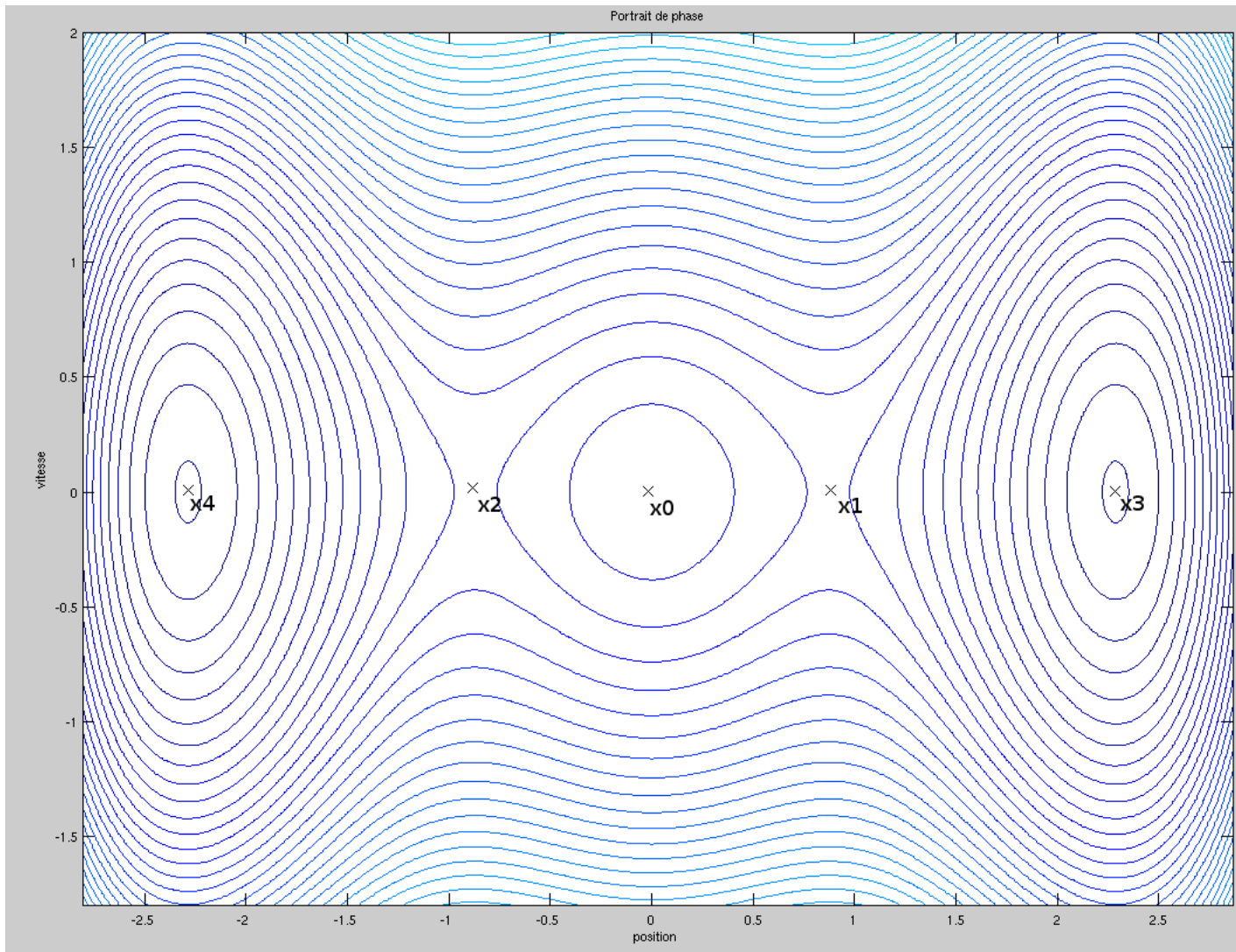


FIGURE 1 – Portrait de phase. $a = \sqrt{15}$

3.4 Que peut-on en déduire sur le mouvement.

On remarque trois points centres en $(0,0)$, $(2.288,0)$ et $(-2.288,0)$. En ces points le système est stable. Contrairement à une spirale attractive, le mouvement du pendule ne va pas ralentir mais il ne va pas non plus s'accélérer. On remarque aussi deux points selles en $(-0.874,0)$ et $(0.874,0)$. En ces points le système est instable et le mouvement tend à s'accélérer en s'éloignant de cette position.

4 On suppose maintenant que $a = \sqrt{3}$ et $x(0) = x_0 > 0$ et $\dot{x}(0) = 0$.

4.1 Calculer et représenter à l'aide de Matlab la période T en fonction de x_0 pour $0 < x_0 < 10$.

On peut déterminer la période T des oscillations en calculant cette intégrale :

$$T = 2 \int_{t(x_{min})}^{t(x_{max})} dt$$

L'intégrale première du système peut s'écrire sous la forme : $\frac{v^2}{2} + G(x) = 0$ avec $G(x) = \frac{1}{8}x^4 + \frac{x^2}{2} - a\sqrt{\frac{x^4}{4} + 1}$

C correspond à la valeur initiale : $C = G(x_0)$ pour $x_0 > 0$

Puisque $\frac{1}{2}\dot{x}^2(1+x^2) + G(x) = G(x_0)$. On a alors $\dot{x} = \sqrt{\frac{2(G(x_0)-G(x))}{1+x^2}}$

Connaissant $\frac{\delta x}{\delta t}$, on peut simplifier le calcul de l'intégrale pour la période T :

$$T = 2 \int_{x_{min}}^{x_{max}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{2(G(x_0)-G(x))}} dx$$

On intègre de 0 à x_0 . On a alors :

$$T = 2 \int_0^{x_0} \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{2(G(x_0)-G(x))}} dx$$

Matlab peut réaliser l'intégration. On lui demande d'intégrer sur plusieurs valeurs de x_0 , afin de pouvoir tracer la courbe de la période en fonction de x_0 .

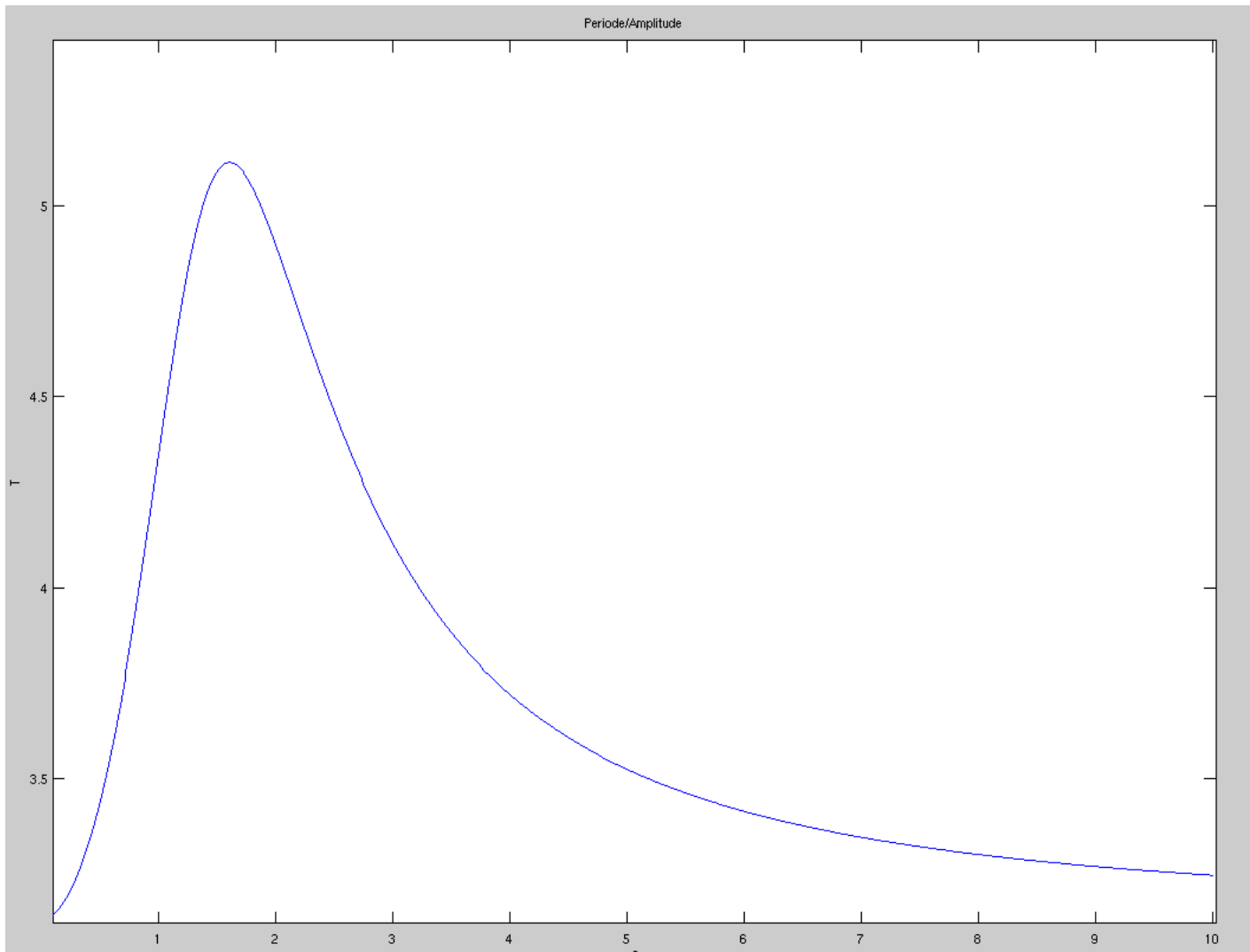


FIGURE 2 – Période T du système oscillatoire en fonction de x_0

5 On suppose maintenant que le système est soumis à une force de frottement $\gamma > 0$ et que l'équation devient : (E) $\ddot{x} + \gamma \dot{x} + f(x, a) = 0$.

5.1 Représenter le diagramme de Matlab le diagramme de bifurcation en (a, γ) pour chacun des points d'équilibres.

L'équation différentielle s'écrit désormais :

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \frac{\dot{x}^2 x}{1+x^2} + \frac{1}{2} \frac{x^3}{1+x^2} + \frac{x}{1+x^2} - \frac{a x^3}{2(1+x^2)\sqrt{x^4/4+1}} = 0$$

On a toujours :

$$x_0 = 0$$

$$x_1 = \sqrt{-1 + \sqrt{1+l_0^2} - \sqrt{-2 - 2\sqrt{1+l_0^2} + l_0^2}}$$

$$x_2 = -\sqrt{-1 + \sqrt{1+l_0^2} - \sqrt{-2 - 2\sqrt{1+l_0^2} + l_0^2}}$$

$$x_3 = \sqrt{-1 + \sqrt{1+l_0^2} + \sqrt{-2 - 2\sqrt{1+l_0^2} + l_0^2}}$$

$$x_4 = -\sqrt{-1 + \sqrt{1+l_0^2} + \sqrt{-2 - 2\sqrt{1+l_0^2} + l_0^2}}$$

Il faut calculer pour chaque points d'équilibres :

D= Calcul du discriminant du polynôme caractéristique

S= Somme des 2 valeurs propres

P= Produit des 2 valeurs propres

Pour cela, on étudie la matrice du système linéaire associée.

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\delta f_1}{\delta x_1} & \frac{\delta f_1}{\delta x_2} \\ \frac{\delta f_2}{\delta x_1} & \frac{\delta f_2}{\delta x_2} \end{pmatrix}$$

On a toujours

$$\dot{x}_1 = x_2 = f_1(x_1^*, x_2^*)$$

D'où $\frac{\delta f_1}{\delta x_1} = 0$ et $\frac{\delta f_1}{\delta x_2} = 1$

Le terme supplémentaire n'a pas une dérivée nulle par rapport à x_2 : $\frac{\delta \gamma x_2}{\delta x_2} = \gamma$

. Nous obtenons ainsi la nouvelle matrice Jacobienne associée au système avec forces de frottements :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\delta f_2}{\delta x_1} & \gamma \end{pmatrix}$$

$$tr(J) = \gamma$$

$$det(J) = -\frac{\delta f_2}{\delta x_1}$$

$$\Delta(J) = tr^2(J) - 4det(J) = \gamma^2 + 4\frac{\delta f_2}{\delta x_1}$$

5.2 On suppose que $a = \sqrt{15}$. Pour quelles valeurs (exactes) de γ les points d'équilibres attractifs changent-ils de nature.

5.3 Représenter le portrait de phase pour $\gamma = 1, \gamma = 2, \gamma = 3$.

On calcule l'intégrale première du système afin de pouvoir déterminer le diagramme de phase. On a :

$$\boxed{\frac{1}{2}v^2 + \gamma.v + \frac{1}{8}x^4 + \frac{x^2}{2} - a\sqrt{\frac{x^4}{4} + 1} = C}$$

IL FAUT UTILISER LA METHODE 2 (local)