

Colpier Clément  
Fornara Thibault  
Pellegrino Guillaume  
Renard Charles

26/01/13



# Projet de Mathématiques appliquées PR3003

-

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Déterminer l'équation différentielle vérifiée par <math>M(t)=(x(t),y(t))</math>.</b>	<b>4</b>
1.1	Projection du Poids sur la composante tangentielle . . . . .	5
1.2	Projection de la tension du ressort su la composante tangentielle . . . . .	5
1.2.1	Methode de Guillaume, diff d'angle . . . . .	6
1.2.2	Methode de Charles, Al-Kashi . . . . .	7
1.3	Determination de $\ T\ $ . . . . .	7
1.4	Détermination de $a_t$ . . . . .	7
1.5	Détermination de l'équation différentielle . . . . .	8
1.5.1	Equa diff de Guillaume . . . . .	8
1.5.2	Equa diff de Charles . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Dans toute la suite on supposera que <math>g=1</math>, <math>k=m</math> et on notera <math>a = l_0</math> et on s'intéressera particulièrement par l'équation vérifié par <math>x(t)</math>.</b>	<b>9</b>
2.1	Montrer que l'équation est de la forme : $\ddot{x} + f(x, \dot{x}, a) = 0$ . . . . .	9
2.2	Détermination des points d'équilibre . . . . .	9
2.3	Détermination de la nature des points d'équilibre . . . . .	10
<b>3</b>	<b>On suppose que <math>a = \sqrt{15}</math>.</b>	<b>12</b>
3.1	Déterminer la valeur exacte des points d'équilibres du système. . . . .	12
3.2	Déterminer l'intégrale première du système. . . . .	12
3.3	Représenter le portrait de phase. . . . .	13
3.4	Que peut-on en déduire sur le mouvement. . . . .	13
<b>4</b>	<b>On suppose maintenant que <math>a = \sqrt{3}</math> et <math>x(0) = x_0 &gt; 0</math> et <math>\dot{x}(0) = 0</math>.</b>	<b>14</b>
4.1	Calculer et représenter à l'aide de Matlab la période T en fonction de $x_0$ pour $0 < x_0 < 10$ . . . . .	14
<b>5</b>	<b>On suppose maintenant que le système est soumis à une force de frottement <math>\gamma &gt; 0</math> et que l'équation devient : (E) <math>\ddot{x} + \gamma\dot{x} + f(x, a) = 0</math>.</b>	<b>14</b>
5.1	Représenter le diagramme de Matlab le diagramme de bifurcation en $(a, \gamma)$ pour chacun des points d'équilibres. . . . .	14
5.2	On suppose que $a = \sqrt{15}$ . Pour quelles valeurs (exactes) de $\gamma$ les points d'équilibres attractifs changent-ils de nature. . . . .	14
5.3	Représenter le portrait de phase pour $\gamma = 1, \gamma = 2, \gamma = 3$ . . . . .	14

# 1 Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $M(t)=(x(t),y(t))$ .



La masselotte M se déplace uniquement selon la composante tangentielle. Pour déterminer l'équation différentielle on va donc particulièrement s'intéresser à l'équation sur la composante tangentielle. Pour cela, on commence à faire la somme des forces s'exerçant sur la composante tangentielle  $\vec{u}_t$  et normale  $\vec{u}_n$  selon la seconde loi de Newton (PFD) :

$$\begin{cases} P_t + T_t = ma_t \\ P_n + R_n + T_n = 0 \end{cases}$$

On s'intéresse à l'équation :

$$P_t + T_t = ma_t$$

Pour déterminer l'équation différentielle, on doit alors projeter  $\vec{T}$  et  $\vec{m}g$  sur  $\vec{u}_t$ .

On projette  $\vec{m}g = -mg.\vec{u}_y$  sur  $\vec{u}_t$

## 1.1 Projection du Poids sur la composante tangentielle



On remarque sur le graphique que  $P_t = P \cdot \cos(\alpha)$

On cherche à déterminer  $\alpha$ . On calcule la pente  $a$  de la tige parabolique.  $a = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial x^2/2}{\partial x} = x$

En  $M(x_0, y_0)$  la pente  $a$  de la tige parabolique vaut donc  $x_0$ . Cette pente  $a$  nous permet de calculer l'angle  $\alpha$ .

En effet, on remarque graphiquement que  $\tan(\alpha) = \frac{1}{a}$ . On en déduit :  $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{1}{x_0}\right)$

Au final on trouve donc :  $P_t = P \cdot \cos(\tan^{-1}(\frac{1}{x_0}))$

Or  $\cos(\tan^{-1}(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$  On en déduit donc :  $P_t = P \cdot \frac{1}{\sqrt{1+1/x_0^2}}$  D'où :

$$P_t = P \cdot \frac{x_0}{\sqrt{1+x_0^2}}$$

## 1.2 Projection de la tension du ressort sur la composante tangentielle

On projette désormais  $\vec{T}$  sur  $\vec{u}_t$ .

### 1.2.1 Methode de Guillaume, diff d'angle



$$\cos(\phi) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\cos(\theta) = \frac{x}{\sqrt{(1-y)^2+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^4/4}}$$

$$\text{Et : } T_t = T \cdot \cos(\alpha 2) = T \cdot \cos(\phi - \theta) = T[\cos(\phi) \cdot \cos(\theta) + \sin(\phi) \cdot \sin(\theta)]$$

On en déduit :

$$T_t = T \left[ \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{x}{\sqrt{1+x^4/4}} + \sin(\cos^{-1}(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}})) \cdot \sin(\cos^{-1}(\frac{x}{\sqrt{1+x^4/4}})) \right]$$

$$\text{Or : } \sin(\cos^{-1}(u)) = \sqrt{1-u^2}$$

On trouve donc :

$$T_t = T \cdot \left[ \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{x}{\sqrt{1+x^4/4}} + \sqrt{1 - \frac{1}{1+x^2}} \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{1+x^4/4}} \right]$$

### 1.2.2 Methode de Charles, Al-Kashi



On note  $x, y$  les coordonnées du point M.

$$a = \sqrt{(x_M - x_P)^2 + (y_M - y_P)^2} = \sqrt{x^2 + \left(\frac{x^2}{2} - 1\right)^2} = \sqrt{x^2 + \frac{x^4}{4} - x^2 + 1} = \sqrt{\frac{x^4}{4} + 1}$$

$$b = \sqrt{(x_M - x_P)^2 + (y_M - \Delta(0))^2} = \sqrt{x^2 + \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2}\right)^2} = \sqrt{x^2 + x^4} = x\sqrt{1 + x^2}$$

note : faut-il mettre plutôt  $|x|\sqrt{1 + x^2}$  ?

$$c = \sqrt{(y_P - \Delta(0))^2} = \sqrt{\left(1 + \frac{x^2}{2}\right)^2} = 1 + \frac{x^2}{2}$$

D'après le théorème d'Al-Kashi :  $x_1 = \frac{5 + \sqrt{25 - 4 \times 6}}{2} = 3$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\beta)$$

$$\cos(\beta) = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{x^4/4 + 1 + x^2 + x^4 - 1 - x^2 - x^4/4}{2x\sqrt{x^4/4 + 1}\sqrt{1 + x^2}} = \frac{x^3}{2\sqrt{x^4/4 + 1}\sqrt{1 + x^2}}$$

On trouve donc :

$$T_t = T \times \frac{x^3}{2\sqrt{x^4/4 + 1}\sqrt{1 + x^2}}$$

### 1.3 Détermination de $\|T\|$

On détermine la valeur de la tension du ressort.

$$T = k(l - l_0) = k(\sqrt{(x_M - x_P)^2 + (y_M - y_P)^2} - l_0) = k(\sqrt{x^2 + (x^2/2 - 1)^2} - l_0)$$

$$T = k(\sqrt{x^2 + x^4/4 - x^2 + 1} - l_0)$$

$$T = k(\sqrt{1 + \frac{x^4}{4}} - l_0)$$

### 1.4 Détermination de $a_t$

On a vu dans la première équation que  $a_n = 0$ . On en déduit :  $\|\vec{a}\| = a_t$

Avec une accélération normale nulle, on peut écrire la formule de l'accélération dans le repère de Frenet ainsi :

$$a_t = \|\vec{a}\|$$

$$\begin{aligned}
\text{Or } ||\vec{a}|| &= \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \pm \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}{\partial t} \\
\dot{y} &= \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial y}{\partial x} \times \frac{\partial x}{\partial t} = x\dot{x} \\
v &= \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{x}^2 x^2} = \dot{x}\sqrt{1+x^2} \\
\frac{\partial v}{\partial t} &= \ddot{x}\sqrt{1+x^2} + \frac{\dot{x}^2 x}{\sqrt{1+x^2}} \\
\text{On trouve :}
\end{aligned}$$

$$a_t = \ddot{x}\sqrt{1+x^2} + \frac{\dot{x}^2 x}{\sqrt{1+x^2}}$$

(Equation de Charles)

## 1.5 Détermination de l'équation différentielle

A l'aide de ce qu'on a calculé précédemment on développe l'équation  $mg_t + T_t = ma_t$  pour déterminer l'équation différentielle. On obtient alors :

### 1.5.1 Equa diff de Guillaume

En développant et en prenant  $k=m$ ,  $g=1$  et  $a=l_0$  (données de l'énoncé), on obtient :

$$\begin{aligned}
m.1.\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + m(\sqrt{x^4/4+1}-a).[\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.\frac{x}{\sqrt{1+x^4/4}} + \sqrt{1-\frac{1}{1+x^2}}.\sqrt{1-\frac{x^2}{1+x^4/4}}] - m.\ddot{x}\sqrt{1+x^2} - m.\frac{\dot{x}^2.x}{\sqrt{1+x^2}} &= 0 \\
\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + (\sqrt{x^4/4+1}-a).[\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.\frac{x}{\sqrt{1+x^4/4}} + \sqrt{1-\frac{1}{1+x^2}}.\sqrt{1-\frac{x^2}{1+x^4/4}}] - \ddot{x}\sqrt{1+x^2} - \frac{\dot{x}^2.x}{\sqrt{1+x^2}} &= 0 \\
\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + (\sqrt{x^4/4+1}-a).[\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.\frac{x}{\sqrt{1+x^4/4}} + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.\sqrt{\frac{x^4/4-x^2+1}{1+x^4/4}}] - \ddot{x}\sqrt{1+x^2} - \frac{\dot{x}^2.x}{\sqrt{1+x^2}} &= 0 \\
\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + [\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{x.\sqrt{x^4/4-x^2+1}}{\sqrt{1+x^2}}] - a.[\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.\frac{x}{\sqrt{1+x^4/4}} + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.\sqrt{\frac{x^4/4-x^2+1}{1+x^4/4}}] - \ddot{x}\sqrt{1+x^2} - \frac{\dot{x}^2.x}{\sqrt{1+x^2}} &= 0 \\
\frac{x}{1+x^2} + [\frac{x}{1+x^2} + \frac{x.\sqrt{x^4/4-x^2+1}}{1+x^2}] - a.[\frac{x}{(1+x^2).\sqrt{1+x^4/4}} + \frac{x.\sqrt{x^4/4-x^2+1}}{(1+x^2).\sqrt{1+x^4/4}}] - \ddot{x} - \frac{\dot{x}^2.x}{1+x^2} &= 0 \\
\frac{2x+x.\sqrt{x^4/4-x^2+1}-\dot{x}^2.x}{1+x^2} - a.\frac{x+x.\sqrt{x^4/4-x^2+1}}{(1+x^2).\sqrt{1+x^4/4}} - \ddot{x} &= 0 \\
-\frac{2x+x.\sqrt{x^4/4-x^2+1}-\dot{x}^2.x}{1+x^2} + a.\frac{x+x.\sqrt{x^4/4-x^2+1}}{(1+x^2).\sqrt{1+x^4/4}} + \ddot{x} &= 0 \\
-\frac{2x+x.\sqrt{(x^2/2-1)^2-\dot{x}^2.x}}{1+x^2} + a.\frac{x+x.\sqrt{(x^2/2-1)^2}}{(1+x^2).\sqrt{1+x^4/4}} + \ddot{x} &= 0
\end{aligned}$$

$$\frac{-x^3/2-x+\dot{x}^2x}{1+x^2} + \frac{a.x^3}{2(1+x^2).\sqrt{1+x^4/4}} + \ddot{x} = 0$$

### 1.5.2 Equa diff de Charles

On calcule maintenant l'équation différentielle du système en s'aidant des résultats précédents.

On part de l'équation  $P_t + T_t = ma_t$

avec  $T_t = k(l-l_0)$  et  $P_t = -mg$

En développant les expressions on obtient :

$$\begin{aligned}
k(\sqrt{x^4/4+1}-l_0) \times \frac{x^3}{2\sqrt{x^4/4+1}\sqrt{1+x^2}} - mg\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} &= m(\ddot{x}\sqrt{1+x^2} + \frac{\dot{x}^2 x}{\sqrt{1+x^2}}) \\
\frac{k}{m}(\frac{x^3}{2\sqrt{1+x^2}} - \frac{x^3 \times l_0}{2\sqrt{x^4/4+1}\sqrt{1+x^2}}) - \frac{xg}{\sqrt{1+x^2}} - \ddot{x}\sqrt{1+x^2} - \frac{\dot{x}^2 x}{\sqrt{1+x^2}} &= 0
\end{aligned}$$

En prenant  $k=m$ ,  $g=1$  et  $a=l_0$  (données de l'énoncé), on obtient :

$$\begin{aligned}
-\frac{x^3}{2\sqrt{1+x^2}} + \frac{x^3 \times a}{2\sqrt{x^4/4+1}\sqrt{1+x^2}} + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \ddot{x}\sqrt{1+x^2} + \frac{\dot{x}^2 x}{\sqrt{1+x^2}} &= 0 \\
(-\frac{x^3}{2} + x)\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} + \frac{x^3 \times a}{2\sqrt{x^4/4+1}\sqrt{1+x^2}} + \ddot{x}\sqrt{1+x^2} + \frac{\dot{x}^2 x}{\sqrt{1+x^2}} &= 0 \\
(-\frac{x^3}{2} + x)\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} + \frac{x^3 \times a}{2\sqrt{x^4/4+1}\sqrt{1+x^2}} + \ddot{x}\sqrt{1+x^2} + \frac{\dot{x}^2 x}{\sqrt{1+x^2}} &= 0 \\
(-\frac{x^3}{2} + x)\frac{1}{1+x^2} + \frac{x^3 \times a}{2\sqrt{x^4/4+1}(1+x^2)} + \ddot{x} + \frac{\dot{x}^2 x}{\sqrt{1+x^2}} &= 0
\end{aligned}$$

$$\ddot{x} + \frac{\dot{x}^2 x - x^3/2 - x}{1+x^2} + \frac{x^3 \times a}{2\sqrt{x^4/4+1}(1+x^2)} = 0$$



**2 Dans toute la suite on supposera que  $g=1$ ,  $k=m$  et on notera  $a = l_0$  et on s'intéressera particulièrement par l'équation vérifié par  $x(t)$ .**

**2.1 Montrer que l'équation est de la forme :  $\ddot{x} + f(x, \dot{x}, a) = 0$ .**

On a bien  $\ddot{x} + f(x, \dot{x}, a) = 0$ . avec  $f(x, \dot{x}, a) = \frac{\dot{x}^2 x + x^3/2 + x}{1+x^2} - \frac{x^3 \times a}{2\sqrt{x^4/4+1}(1+x^2)}$

## 2.2 Détermination des points d'équilibre

Les points d'équilibre sont les points où la vitesse du système et donc de la masselotte est nulle. Ainsi, les termes lié à la vitesse et à l'accélération du système sont nuls.

Les points d'équilibres correspondent aux solutions de l'équation :

$$\ddot{x} + \frac{\dot{x}^2 x - x^3/2 - x}{1+x^2} + \frac{x^3 \times a}{2\sqrt{x^4/4+1}(1+x^2)} = 0 \text{ où } \ddot{x} = 0 \text{ et } \dot{x} = 0 \text{ Ainsi on a :}$$

$$\frac{-x^3/2 - x}{1+x^2} + \frac{x^3 \times a}{2\sqrt{x^4/4+1}(1+x^2)} = 0$$

Une première solution correspond à  $x_0 = 0$  et  $y_0 = 0$

En multipliant de part et d'autre de l'équation par  $\frac{2(1+x^2)}{x}$  :

$$x^2 - \frac{x^2 \times l_0}{\sqrt{1+x^4/4}} + 2 = 0$$

$$\sqrt{1+x^4/4}(x^2+2) = x^2 \times l_0$$

$$\sqrt{1+y^2}(2y+2) = 2yl_0$$

$$(1+y^2)(4y^2+8y+4) = 4y^2 \times l_0^2$$

$$(1+y^2)(y^2+2y+1) = y^2 \times l_0^2$$

$$(\frac{1}{y}+y)(y+2+\frac{1}{y}) = l_0^2$$

On pose  $X = y + \frac{1}{y}$  ( $y \neq 0$ ) :

$$X(X+2) = l_0^2$$

$$X^2 + 2X - l_0^2 = 0$$

Dont on calcule le déterminant :  $\Delta_X = 4(1+l_0^2)$

D'où les solutions intermédiaires :  $X_1 = -1 - \sqrt{1+l_0^2}$

$$X_2 = -1 + \sqrt{1+l_0^2}$$

$$y + \frac{1}{y} = X$$

$$y^2 + 1 = Xy$$

$$y^2 - Xy + 1 = 0$$

Dont le déterminant est :  $\Delta_y = X^2 - 4$

D'où les solutions :

$$y = \frac{1}{2}(X - \sqrt{X^2 - 4})$$

$$y = \frac{1}{2}(X + \sqrt{X^2 - 4})$$

Cependant, il faut savoir que  $\Delta_y$  doit être positif afin que les racines soient réelles.

Pour la solution  $X = (-1 + \sqrt{1+l_0^2})^2$ , nous avons deux cas de condition d'existence :

$$- (-1 + \sqrt{1+l_0^2})^2 > 2 \Rightarrow \sqrt{1+l_0^2} > 3 \Rightarrow l_0 > \sqrt{8}$$

$$- (-1 + \sqrt{1+l_0^2})^2 < -2 \Rightarrow \sqrt{1+l_0^2} < -1 \text{ qui est une condition irréalisable}$$

Finalement, on déduit que la condition d'existence des points d'équilibres est  $l_0 > \sqrt{8}$ . On peut alors trouver l'expression des ordonnées des points d'équilibre  $y_1, y_2, y_3, y_4$  en fonction de  $l_0$  :

$$- y_0 = 0$$

(Déterminé précédemment)

$$- y_1 = \frac{1}{2}(X_1 - \sqrt{X_1 - 4}) = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{1+l_0^2}) - \frac{1}{2}(\sqrt{(-1 - \sqrt{1+l_0^2})^2 - 4})$$

Cette solution est strictement négative alors que  $y(t)$  est positive, selon la rampe  $y = \frac{x^2}{2}$ . On doit alors l'éliminer.

$$- y_2 = \frac{X_1 + \sqrt{X_1 - 4}}{2} = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{1+l_0^2}) + \frac{1}{2}\sqrt{-2 + 2\sqrt{1+l_0^2} + l_0^2}$$

Cette solution est aussi à éliminer. En effet, nous avons :

$$y_2 > 0 \Rightarrow (-1 - \sqrt{1+l_0^2}) + \sqrt{(-1 - \sqrt{1+l_0^2})^2 + l_0^2} > 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{(-1 - \sqrt{1+l_0^2})^2 + l_0^2} > 1 + \sqrt{1+l_0^2}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow 0 > \sqrt{1+l_0^2} \text{ ce qui est impossible.} \\
- y_3 &= \frac{X_2 - \sqrt{X_2^2 - 4}}{2} = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{1+l_0^2}) - \frac{1}{2}\sqrt{(-1 + \sqrt{1+l_0^2})^2 - 4} \\
&= \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{1+l_0^2}) - \frac{1}{2}\sqrt{-2 - 2\sqrt{1+l_0^2} + l_0^2} \\
- y_4 &= \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{1+l_0^2}) + \frac{1}{2}\sqrt{(-1 + \sqrt{1+l_0^2})^2 - 4} \\
&= \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{1+l_0^2}) + \frac{1}{2}\sqrt{-2 - 2\sqrt{1+l_0^2} + l_0^2}
\end{aligned}$$

Seules deux solutions sont alors retenues, l'unique condition d'existence étant  $l_0 > \sqrt{8}$ .

En considérant  $y = \frac{x^2}{2} \Rightarrow x = \pm\sqrt{2y}$  on a au total 5 points d'équilibre :

$$\begin{aligned}
x_0 &= 0 \\
x_1 &= \sqrt{-1 + \sqrt{1+l_0^2} - \sqrt{-2 - 2\sqrt{1+l_0^2} + l_0^2}} \\
x_2 &= -\sqrt{-1 + \sqrt{1+l_0^2} - \sqrt{-2 - 2\sqrt{1+l_0^2} + l_0^2}} \\
x_3 &= \sqrt{-1 + \sqrt{1+l_0^2} + \sqrt{-2 - 2\sqrt{1+l_0^2} + l_0^2}} \\
x_4 &= -\sqrt{-1 + \sqrt{1+l_0^2} + \sqrt{-2 - 2\sqrt{1+l_0^2} + l_0^2}}
\end{aligned}$$

Il reste à déterminer la nature de ces points d'équilibre du système.

## 2.3 Détermination de la nature des points d'équilibre

Nous sommes dans le cas d'un système non linéaire. On pose  $x_1 = x, x_2 = \dot{x}$

On a alors :

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 = f_1(x_1, x_2) \\
\dot{x}_2 &= -\frac{x_2^2 \cdot x_1}{1+x_1^2} - \frac{x_1^3}{2(1+x_1^2)} - \frac{x_1}{1+x_1^2} + \frac{ax_1^3}{2(1+x_1^2)(x_1^4/4+1)} = f_2(x_1, x_2)
\end{aligned}$$

Aux points d'équilibre, la vitesse est nulle d'où  $x_2 = 0$  et  $\dot{x}_2 = 0$

D'où :

$$\begin{aligned}
f_1(x_1, 0) &= 0 \\
f_2(x_1, 0) &= \frac{x_1^3 \times l_0}{2\sqrt{1+\frac{x_1^4}{4}}(1+x_1^2)} - \frac{x_1^3}{2(1+x_1^2)} - \frac{x_1}{1+x_1^2}
\end{aligned}$$

On va calculer la nature des points d'équilibre en passant par la matrice Jacobienne :

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\delta f_1}{\delta x_1} & \frac{\delta f_1}{\delta x_2} \\ \frac{\delta f_2}{\delta x_1} & \frac{\delta f_2}{\delta x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\delta f_2}{\delta x_1} & 0 \end{pmatrix}$$

La nature des points d'équilibre du système est définie par la trace, le déterminant, et le discriminant du polynôme caractéristique de la matrice Jacobienne ci-dessus.

$$Tr(J) = 0$$

$$det(J) = -\frac{\delta f_2}{\delta x_1}$$

$$\Delta(J) = Tr^2(J) - 4det(J) = 4 * \frac{\delta f_2}{\delta x_1}$$

On a alors besoin de déterminer le signe de  $\frac{\delta f_2}{\delta x_1}$  aux points d'équilibre.

En factorisant  $f_2$ , on a :

$$f_2 = 0 = -\frac{x}{2(1+x^2)} * (x^2 - \frac{x^2 \times l_0}{\sqrt{1+\frac{x^4}{4}}} + 2)$$

car  $\ddot{x} = 0$  aux points d'équilibre.

Ici, nous avons deux éventualités pour satisfaire cette équation :

$$- \text{cas 1 : } \frac{x}{1+x^2} = 0$$

$$- \text{cas 2 : } x^2 - \frac{x^2 \times l_0}{\sqrt{1+\frac{x^4}{4}}} + 2 = 0$$

## Premier Cas

$$\frac{x}{1+x^2} = 0 \longrightarrow x = 0$$

On a alors :

$$\frac{\delta f_2}{\delta x_1} = -\frac{1}{2} \frac{\delta \frac{x}{1+x^2}}{\delta x} (x^2 - \frac{x^2 \times l_0}{\sqrt{1+\frac{x^4}{4}}} + 2) = -2 \frac{1+x^2-4x^2}{2(1+x^2)^2} \text{ Ce qui équivaut, avec l'hypothèse précédente } x = 0, \text{ à :}$$

$$\frac{\delta f_2}{\delta x_1} = -1$$

La matrice jacobienne du système pour le point d'équilibre  $x = 0$  devient donc :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

On peut alors en calculer les caractéristiques :

$$\text{tr}(J_f) = 0$$

$$\det(J_f) = 1$$

$$\Delta(J_f) = -4$$

Ce sont les caractéristiques d'un point d'équilibre centré.

## Second Cas

$$\text{Dans ce cas, } x^2 - \frac{x^2 \times l_0}{\sqrt{1+\frac{x^4}{4}}} + 2 = 0$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \frac{\delta f_2}{\delta x} &= -\frac{x}{2(1+x^2)} \left( 2x - \frac{2x \times l_0 \sqrt{1+\frac{x^4}{4}} - x^2 \times l_0 \frac{x^3}{2\sqrt{1+\frac{x^4}{4}}}}{1+\frac{x^4}{4}} \right) = -\frac{x}{2(1+x^2)} \left( 2 - \frac{2 \times l_0}{\sqrt{1+\frac{x^4}{4}}} + l_0 \frac{x^4}{2\sqrt{1+\frac{x^4}{4}}} \right) \\ &= \frac{-x^2}{2(1+x^2)} \frac{2(1+\frac{x^4}{4}) - \frac{2}{x^2} (2+x^2)(1+\frac{x^4}{4}) + \frac{x^2}{2} (2+x^2)}{1+\frac{x^4}{4}} = \frac{-x^2+2}{(1+x^2)(1+\frac{x^4}{4})} = \frac{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}{(1+x^2)(1+\frac{x^4}{4})} \end{aligned}$$

Etudier le signe de  $\frac{\delta f_2}{\delta x}$  revient donc à étudier le signe de  $-x^2 + 2$ .

On en calcule alors le discriminant pour connaître les solutions pour dresser, par la suite, un tableau de variation.

$$\Delta = 8$$

D'où les solutions :

$$x_1 = -\frac{\sqrt{8}}{2} = -\sqrt{2}$$

$$x_2 = \frac{\sqrt{8}}{2} = \sqrt{2}$$

D'où le tableau de variations suivant :

$x$	$-\infty$	$-\sqrt{2}\sqrt{2}$	$+\infty$
$\frac{\delta f_2}{\delta x_1}$	+	-	+
ENLEVER CETTE LIGNE	$-\infty$	$\begin{array}{c} \downarrow \\ 0 \end{array}$	$+\infty$

$$x=0 \quad x_1 = \sqrt{-1 + \sqrt{1+l_0^2}} - \sqrt{-2 - 2\sqrt{1+l_0^2} + l_0^2}$$

$$x_2 = -\sqrt{-1 + \sqrt{1+l_0^2}} - \sqrt{-2 - 2\sqrt{1+l_0^2} + l_0^2}$$

$$x_3 = \sqrt{-1 + \sqrt{1+l_0^2}} + \sqrt{-2 - 2\sqrt{1+l_0^2} + l_0^2}$$

$$x_4 = -\sqrt{-1 + \sqrt{1+l_0^2}} + \sqrt{-2 - 2\sqrt{1+l_0^2} + l_0^2}$$

On peut alors étudier la nature des points d'équilibre. En partant de la condition d'existence des points d'équilibre :

$$l_0 > 2\sqrt{2}$$

$$1 + l_0^2 > 9$$

$$-1 + \sqrt{1+l_0^2} > 2$$

avec :

$$\sqrt{(-1 + \sqrt{1+l_0^2})^2 - 4} > 0$$

Ce qui nous permet enfin de calculer la nature des points d'équilibre :

- $x_2 = 0$   
D'après le tableau de variation,  $\frac{\delta f_2}{\delta x} < 0$ .  
 $tr(J_f) = 0$   
 $det(J_f) > 0$   
 $\Delta(J_f) < 0$   
Il s'agit d'un point centre.
- $x_1 = \sqrt{-1 + \sqrt{1 + l_0^2} - \sqrt{-2 - 2\sqrt{1 + l_0^2} + l_0^2}}$   
RESTE A DEMONTRER QUE C'EST UN POINT CENTRE.
- $x_2 = -\sqrt{-1 + \sqrt{1 + l_0^2} - \sqrt{-2 - 2\sqrt{1 + l_0^2} + l_0^2}}$   
RESTE A DEMONTRER QUE C'EST UN POINT CENTRE.
- $x_3 = \sqrt{-1 + \sqrt{1 + l_0^2} + \sqrt{-2 - 2\sqrt{1 + l_0^2} + l_0^2}} > \sqrt{2}$   
Car racine carrée d'une somme de expressions supérieures à zéro, dont l'une supérieur à 2. D'après le tableau de variation,  $\frac{\delta f_2}{\delta x} > 0$ . Ainsi :  
 $tr(J_f) = 0$   
 $det(J_f) < 0$   
 $\Delta(J_f) > 0$   
Il s'agit d'un point selle.
- $x_4 = -\sqrt{-1 + \sqrt{1 + l_0^2} + \sqrt{-2 - 2\sqrt{1 + l_0^2} + l_0^2}} < -\sqrt{2}$   
Car racine carrée d'une somme de expressions supérieures à zéro, dont l'une supérieur à 2. D'après le tableau de variation,  $\frac{\delta f_2}{\delta x} > 0$ . Ainsi :  
 $tr(J_f) = 0$   
 $det(J_f) < 0$   
 $\Delta(J_f) > 0$   
Il s'agit d'un point selle.

LA CE SERAIT SYMPA DE FAIRE UN SCHEMA AVEC EN GROS LES  $x_n$  PLACÉS A PEU PRES.

### 3 On suppose que $a = \sqrt{15}$ .

#### 3.1 Déterminer la valeur exacte des points d'équilibres du système.

#### 3.2 Déterminer l'intégrale première du système.

On rappelle que  $v = \dot{x}\sqrt{1+x^2}$  et  $\frac{\delta v}{\delta t} = \ddot{x}\sqrt{1+x^2} + \frac{\dot{x}^2 \cdot x}{\sqrt{1+x^2}}$   
On va intégrer cette équation différentielle.

$$\ddot{x} + \frac{\dot{x}^2 x}{1+x^2} + \frac{1}{2} \frac{x^3}{1+x^2} + \frac{x}{1+x^2} - \frac{a \cdot x^3}{2(1+x^2)\sqrt{x^4/4+1}} = 0$$

On multiplie cette équation par  $\sqrt{1+x^2}$  :

$$\ddot{x}\sqrt{1+x^2} + \frac{\dot{x}^2 x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{2} \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{a \cdot x^3}{2\sqrt{1+x^2}\sqrt{x^4/4+1}} = 0$$

On remarque ainsi que l'équation s'écrit de la forme :

$$\frac{\delta v}{\delta t} + \sqrt{1+x^2} f(x) = 0$$

avec  $f(x) = \frac{1}{2} \frac{x^3}{1+x^2} + \frac{x}{1+x^2} - \frac{a \cdot x^3}{2(1+x^2)\sqrt{x^4/4+1}}$

On multiplie cette équation par  $v$ . On a alors :

$$v \cdot \frac{\delta v}{\delta t} + \dot{x}(1+x^2)f(x) = 0$$

En intégrant l'équation, on a alors :

$$\int v \cdot \frac{\delta v}{\delta t} + \dot{x}(1+x^2)f(x) dt = C$$

Ce qui revient à écrire :

$$\int v dv + \int (1+x^2)f(x) dx = C$$

En intégrant l'équation, on obtient :

$$\boxed{\frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{8}x^4 + \frac{x^2}{2} - a\sqrt{\frac{x^4}{4}+1} = C}$$

### 3.3 Représenter le portrait de phase.

A partir de l'intégrale première, on détermine le portrait de phase pour  $a = \sqrt{15}$ .

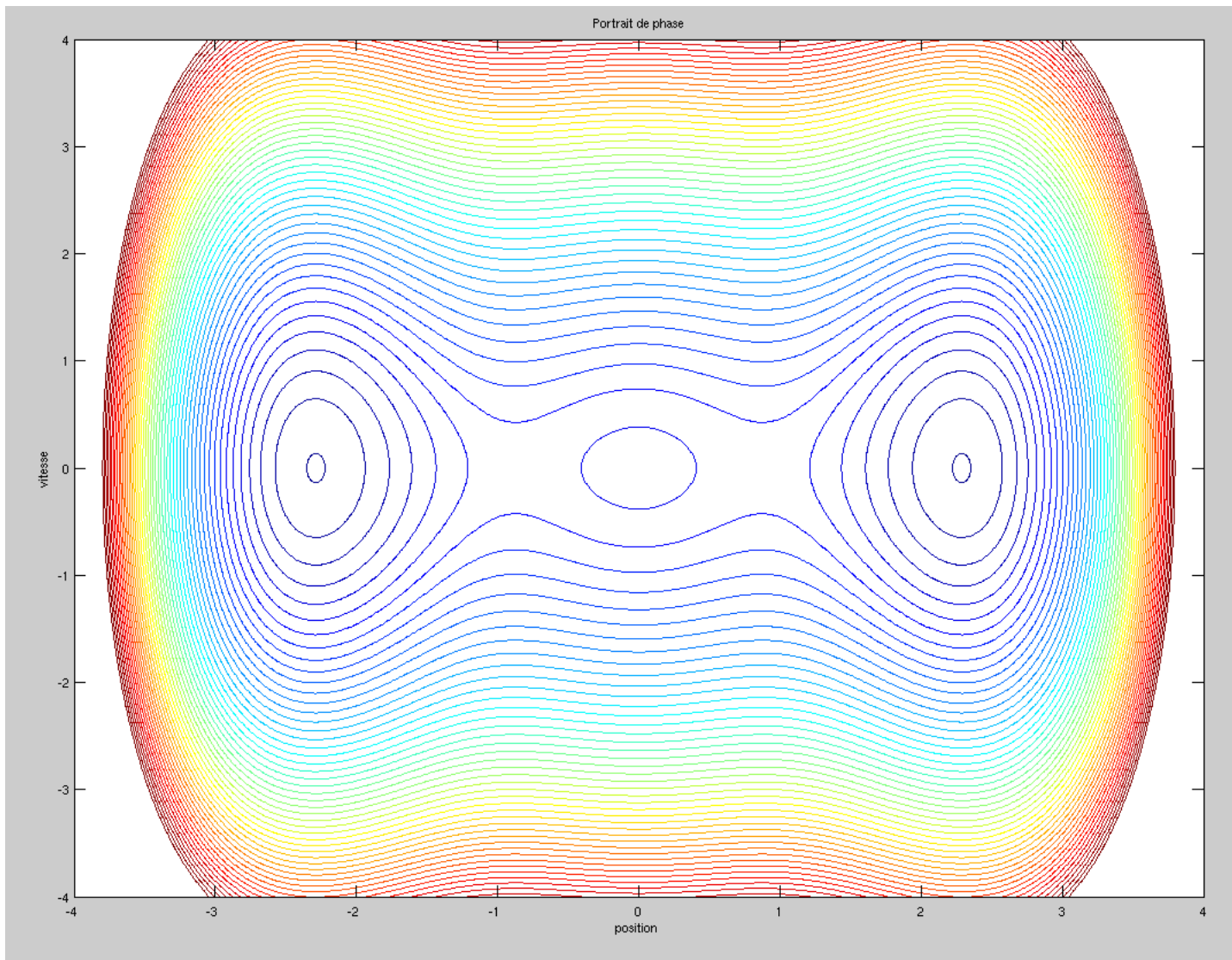


FIGURE 1 – Portrait de phase.  $a = \sqrt{15}$

### 3.4 Que peut-on en déduire sur le mouvement.

On remarque trois points d'équilibres en  $(0,0)$ ,  $(2.3,0)$  et  $(-2.3,0)$ . En ces points le mouvement tend à s'arrêter. On remarque aussi deux points selles en  $(-0.8,0)$  et  $(0.8,0)$ . En ces points le système est instable et le mouvement tend à s'accélérer.

- 4 On suppose maintenant que  $a = \sqrt{3}$  et  $x(0) = x_0 > 0$  et  $\dot{x}(0) = 0$ .
- 4.1 Calculer et représenter à l'aide de Matlab la période  $T$  en fonction de  $x_0$  pour  $0 < x_0 < 10$ .
- 5 On suppose maintenant que le système est soumis à une force de frottement  $\gamma > 0$  et que l'équation devient : (E)  $\ddot{x} + \gamma\dot{x} + f(x, a) = 0$ .
- 5.1 Représenter le diagramme de Matlab le diagramme de bifurcation en  $(a, \gamma)$  pour chacun des points d'équilibres.
- 5.2 On suppose que  $a = \sqrt{15}$ . Pour quelles valeurs (exactes) de  $\gamma$  les points d'équilibres attractifs changent-ils de nature.
- 5.3 Représenter le portrait de phase pour  $\gamma = 1, \gamma = 2, \gamma = 3$ .