

Colpier Clément
Fornara Thibault
Pellegrino Guillaume
Renard Charles

26/01/13



Projet de Mathématiques appliquées
PR3003

-

Table des matières

1	Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $M(t)=(x(t),y(t))$.	4
1.1	Projection du Poids sur la composante tangentielle	5
1.2	Projection de la tension du ressort su la composante tangentielle	5
1.2.1	Methode de Guillaume, diff d'angle	6
1.2.2	Methode de Charles, Al-Kashi	7
1.3	Determination de $\ T\ $	7
1.4	Détermination de a_t	7
1.5	Détermination de l'équation différentielle	8
1.5.1	Equa diff de Guillaume	8
1.5.2	Equa diff de Charles	8
2	Dans toute la suite on supposera que $g=1$, $k=m$ et on notera $a = l_0$ et on s'intéressera particulièrement par l'équation vérifié par $x(t)$.	9
3	Détermination des points d'équilibre	9
4	Détermination de la nature des points d'équilibre	10
5	On suppose que $a = \sqrt{15}$.	11
5.1	Déterminer la valeur exacte des points d'équilibres du système.	11
5.2	Déterminer l'intégrale première du système.	11
5.3	Représenter le portrait de phase.	12
5.4	Que peut-on en déduire sur le mouvement.	12
6	On suppose maintenant que $a = \sqrt{3}$ et $x(0) = x_0 > 0$ et $\dot{x}(0) = 0$.	13
6.1	Calculer et représenter à l'aide de Matlab la période T en fonction de x_0 pour $0 < x_0 < 10$	13
7	On suppose maintenant que le système est soumis à une force de frottement $\gamma > 0$ et que l'équation devient : (E) $\ddot{x} + \gamma.\dot{x} + f(x, a) = 0$.	13
7.1	Représenter le diagramme de Matlab le diagramme de bifurcation en (a, γ) pour chacun des points d'équilibres.	13
7.2	On suppose que $a = \sqrt{15}$. Pour quelles valeurs (exactes) de γ les points d'équilibres attractifs changent-ils de nature.	13
7.3	Représenter le portrait de phase pour $\gamma = 1, \gamma = 2, \gamma = 3$	13

1 Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $M(t)=(x(t),y(t))$.



La masselotte M se déplace uniquement selon la composante tangentielle. Pour déterminer l'équation différentielle on va donc particulièrement s'intéresser à l'équation sur la composante tangentielle. Pour cela, on commence à faire la somme des forces s'exerçant sur la composante tangentielle \vec{u}_t et normale \vec{u}_n selon la seconde loi de Newton (PFD) :

$$\begin{cases} P_t + T_t = ma_t \\ P_n + R_n + T_n = 0 \end{cases}$$

On s'intéresse à l'équation :

$$P_t + T_t = ma_t$$

Pour déterminer l'équation différentielle, on doit alors projeter \vec{T} et $\vec{m}\vec{g}$ sur \vec{u}_t .

On projette $\vec{m}\vec{g} = -mg.\vec{u}_y$ sur \vec{u}_t

1.1 Projection du Poids sur la composante tangentielle



On remarque sur le graphique que $P_t = P \cdot \cos(\alpha)$

On cherche à déterminer α . On calcule la pente a de la tige parabolique. $a = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial x^2/2}{\partial x} = x$

En $M(x_0, y_0)$ la pente a de la tige parabolique vaut donc x_0 . Cette pente a nous permet de calculer l'angle α .

En effet, on remarque graphiquement que $\tan(\alpha) = \frac{1}{a}$. On en déduit : $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{1}{x_0}\right)$

Au final on trouve donc : $P_t = P \cdot \cos(\tan^{-1}\left(\frac{1}{x_0}\right))$

Or $\cos(\tan^{-1}(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ On en déduit donc : $P_t = P \cdot \frac{1}{\sqrt{1+1/x_0^2}}$ D'où :

$$P_t = P \cdot \frac{x_0}{\sqrt{1+x_0^2}}$$

1.2 Projection de la tension du ressort sur la composante tangentielle

On projette désormais \vec{T} sur \vec{u}_t .

1.2.1 Methode de Guillaume, diff d'angle



$$\cos(\phi) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\cos(\theta) = \frac{x}{\sqrt{(1-y)^2+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^4/4}}$$

$$\text{Et : } T_t = T \cdot \cos(\alpha_2) = T \cdot \cos(\phi - \theta) = T[\cos(\phi) \cdot \cos(\theta) + \sin(\phi) \cdot \sin(\theta)]$$

On en déduit :

$$T_t = T \left[\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{x}{\sqrt{1+x^4/4}} + \sin(\cos^{-1}(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}})) \cdot \sin(\cos^{-1}(\frac{x}{\sqrt{1+x^4/4}})) \right]$$

$$\text{Or : } \sin(\cos^{-1}(u)) = \sqrt{1-u^2}$$

On trouve donc :

$$T_t = T \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{x}{\sqrt{1+x^4/4}} + \sqrt{1 - \frac{1}{1+x^2}} \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{1+x^4/4}} \right]$$

1.2.2 Methode de Charles, Al-Kashi



On note x, y les coordonnées du point M.

$$a = \sqrt{(x_M - x_P)^2 + (y_M - y_P)^2} = \sqrt{x^2 + \left(\frac{x^2}{2} - 1\right)^2} = \sqrt{x^2 + \frac{x^4}{4} - x^2 + 1} = \sqrt{\frac{x^4}{4} + 1}$$

$$b = \sqrt{(x_M - x_P)^2 + (y_M - \Delta(0))^2} = \sqrt{x^2 + \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2}\right)^2} = \sqrt{x^2 + x^4} = x\sqrt{1 + x^2}$$

note : faut-il mettre plutôt $|x|\sqrt{1 + x^2}$?

$$c = \sqrt{(y_P - \Delta(0))^2} = \sqrt{\left(1 + \frac{x^2}{2}\right)^2} = 1 + \frac{x^2}{2}$$

D'après le théorème d'Al-Kashi : $x_1 = \frac{5 + \sqrt{25 - 4 \times 6}}{2} = 3$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\beta)$$

$$\cos(\beta) = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{x^4/4 + 1 + x^2 + x^4 - 1 - x^2 - x^4/4}{2x\sqrt{x^4/4 + 1}\sqrt{1 + x^2}} = \frac{x^3}{2\sqrt{x^4/4 + 1}\sqrt{1 + x^2}}$$

On trouve donc :

$$T_t = T \times \frac{x^3}{2\sqrt{x^4/4 + 1}\sqrt{1 + x^2}}$$

1.3 Détermination de $\|T\|$

On détermine la valeur de la tension du ressort.

$$T = k(l - l_0) = k(\sqrt{(x_M - x_P)^2 + (y_M - y_P)^2} - l_0) = k(\sqrt{x^2 + (x^2/2 - 1)^2} - l_0)$$

$$T = k(\sqrt{x^2 + x^4/4 - x^2 + 1} - l_0)$$

$$T = k(\sqrt{1 + \frac{x^4}{4}} - l_0)$$

1.4 Détermination de a_t

On a vu dans la première équation que $a_n = 0$. On en déduit : $\|\vec{a}\| = a_t$

Avec une accélération normale nulle, on peut écrire la formule de l'accélération dans le repère de Frenet ainsi :

$$a_t = \|\vec{a}\|$$

$$\begin{aligned}
\text{Or } ||\vec{a}|| &= \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \pm \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}{\partial t} \\
\dot{y} &= \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial y}{\partial x} \times \frac{\partial x}{\partial t} = x\dot{x} \\
v &= \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{x}^2 x^2} = \dot{x}\sqrt{1+x^2} \\
\frac{\partial v}{\partial t} &= \ddot{x}\sqrt{1+x^2} + \frac{\dot{x}^2 x}{\sqrt{1+x^2}}
\end{aligned}$$

On trouve :

$$a_t = \ddot{x} \cdot \sqrt{1+x^2} + \frac{\dot{x}^2 \cdot x}{\sqrt{1+x^2}}$$

(Equation de Charles)

1.5 Détermination de l'équation différentielle

A l'aide de ce qu'on a calculé précédemment on développe l'équation $mg_t + T_t = ma_t$ pour déterminer l'équation différentielle. On obtient alors :

1.5.1 Equa diff de Guillaume

En développant et en prenant $k=m$, $g=1$ et $a=l_0$ (données de l'énoncé), on obtient :

$$\begin{aligned}
m \cdot 1 \cdot \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + m(\sqrt{x^4/4+1} - a) \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{x}{\sqrt{1+x^4/4}} + \sqrt{1 - \frac{1}{1+x^2}} \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{1+x^4/4}} \right] - m \cdot \ddot{x} \cdot \sqrt{1+x^2} - m \cdot \frac{\dot{x}^2 \cdot x}{\sqrt{1+x^2}} &= 0 \\
\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + (\sqrt{x^4/4+1} - a) \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{x}{\sqrt{1+x^4/4}} + \sqrt{1 - \frac{1}{1+x^2}} \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{1+x^4/4}} \right] - \ddot{x} \cdot \sqrt{1+x^2} - \frac{\dot{x}^2 \cdot x}{\sqrt{1+x^2}} &= 0 \\
\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + (\sqrt{x^4/4+1} - a) \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{x}{\sqrt{1+x^4/4}} + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \sqrt{\frac{x^4/4-x^2+1}{1+x^4/4}} \right] - \ddot{x} \cdot \sqrt{1+x^2} - \frac{\dot{x}^2 \cdot x}{\sqrt{1+x^2}} &= 0 \\
\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \left[\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{x \cdot \sqrt{x^4/4-x^2+1}}{\sqrt{1+x^2}} \right] - a \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{x}{\sqrt{1+x^4/4}} + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \sqrt{\frac{x^4/4-x^2+1}{1+x^4/4}} \right] - \ddot{x} \cdot \sqrt{1+x^2} - \frac{\dot{x}^2 \cdot x}{\sqrt{1+x^2}} &= 0 \\
\frac{x}{1+x^2} + \left[\frac{x}{1+x^2} + \frac{x \cdot \sqrt{x^4/4-x^2+1}}{1+x^2} \right] - a \cdot \left[\frac{x}{(1+x^2) \cdot \sqrt{1+x^4/4}} + \frac{x \cdot \sqrt{x^4/4-x^2+1}}{(1+x^2) \cdot \sqrt{1+x^4/4}} \right] - \ddot{x} - \frac{\dot{x}^2 \cdot x}{1+x^2} &= 0 \\
\frac{2x+x \cdot \sqrt{x^4/4-x^2+1}-\dot{x}^2 \cdot x}{1+x^2} - a \cdot \frac{x+x \cdot \sqrt{x^4/4-x^2+1}}{(1+x^2) \cdot \sqrt{1+x^4/4}} - \ddot{x} &= 0 \\
- \frac{2x+x \cdot \sqrt{x^4/4-x^2+1}-\dot{x}^2 \cdot x}{1+x^2} + a \cdot \frac{x+x \cdot \sqrt{x^4/4-x^2+1}}{(1+x^2) \cdot \sqrt{1+x^4/4}} + \ddot{x} &= 0 \\
- \frac{2x+x \cdot \sqrt{(x^2/2-1)^2-\dot{x}^2 \cdot x}}{1+x^2} + a \cdot \frac{x+x \cdot \sqrt{(x^2/2-1)^2}}{(1+x^2) \cdot \sqrt{1+x^4/4}} + \ddot{x} &= 0
\end{aligned}$$

$$\frac{-x^3/2-x+\dot{x}^2 x}{1+x^2} + \frac{a \cdot x^3}{2(1+x^2) \cdot \sqrt{1+x^4/4}} + \ddot{x} = 0$$

1.5.2 Equa diff de Charles

On calcule maintenant l'équation différentielle du système en s'aidant des résultats précédents.

On part de l'équation $P_t + T_t = ma_t$

avec $T_t = k(l - l_0)$ et $P_t = -mg$

En développant les expressions on obtient :

$$\begin{aligned}
k(\sqrt{x^4/4+1} - l_0) \times \frac{x^3}{2\sqrt{x^4/4+1}\sqrt{1+x^2}} - mg \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} &= m(\ddot{x}\sqrt{1+x^2} + \frac{\dot{x}^2 x}{\sqrt{1+x^2}}) \\
\frac{k}{m} \left(\frac{x^3}{2\sqrt{1+x^2}} - \frac{x^3 \times l_0}{2\sqrt{x^4/4+1}\sqrt{1+x^2}} \right) - \frac{xg}{\sqrt{1+x^2}} - \ddot{x}\sqrt{1+x^2} - \frac{\dot{x}^2 x}{\sqrt{1+x^2}} &= 0 \\
\text{En prenant } k=m, g=1 \text{ et } a=l_0 \text{ (données de l'énoncé), on obtient :} \\
- \frac{x^3}{2\sqrt{1+x^2}} + \frac{x^3 \times a}{2\sqrt{x^4/4+1}\sqrt{1+x^2}} + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \ddot{x}\sqrt{1+x^2} + \frac{\dot{x}^2 x}{\sqrt{1+x^2}} &= 0 \\
(-\frac{x^3}{2} + x) \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} + \frac{x^3 \times a}{2\sqrt{x^4/4+1}\sqrt{1+x^2}} + \ddot{x}\sqrt{1+x^2} + \frac{\dot{x}^2 x}{\sqrt{1+x^2}} &= 0 \\
(-\frac{x^3}{2} + x) \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} + \frac{x^3 \times a}{2\sqrt{x^4/4+1}\sqrt{1+x^2}} + \ddot{x}\sqrt{1+x^2} + \frac{\dot{x}^2 x}{\sqrt{1+x^2}} &= 0 \\
(-\frac{x^3}{2} + x) \frac{1}{1+x^2} + \frac{x^3 \times a}{2\sqrt{x^4/4+1}(1+x^2)} + \ddot{x} + \frac{\dot{x}^2 x}{\sqrt{1+x^2}} &= 0
\end{aligned}$$

$$\ddot{x} + \frac{\dot{x}^2 x - x^3/2 - x}{1+x^2} + \frac{x^3 \times a}{2\sqrt{x^4/4+1}(1+x^2)} = 0$$

2 Dans toute la suite on supposera que $g=1$, $k=m$ et on notera $a = l_0$ et on s'intéressera particulièrement par l'équation vérifié par $x(t)$.

3 Détermination des points d'équilibre

Les points d'équilibre sont les points où la vitesse du système et donc de la masselotte est nulle. Ainsi, les termes lié à la vitesse et à l'accélération du système sont nuls.

Les points d'équilibres correspondent aux solutions de l'équation :

$$\ddot{x} + \frac{x^2 x - x^3/2 - x}{1+x^2} + \frac{x^3 \times a}{2\sqrt{x^4/4+1}(1+x^2)} = 0 \text{ où } \ddot{x} = 0 \text{ et } \dot{x} = 0 \text{ Ainsi on a :}$$

$$\frac{-x^3/2-x}{1+x^2} + \frac{x^3 \times a}{2\sqrt{x^4/4+1}(1+x^2)} = 0$$

Une première solution correspond à $x_0 = 0$ et $y_0 = 0$

En multipliant de part et d'autre de l'équation par $\frac{2(1+x^2)}{x}$:

$$x^2 - \frac{x^2 \times l_0}{\sqrt{1+x^4/4}} + 2 = 0$$

$$\sqrt{1+x^4/4}(x^2+2) = x^2 \times l_0$$

$$\sqrt{1+y^2}(2y+2) = 2yl_0$$

$$(1+y^2)(4y^2+8y+4) = 4y^2 \times l_0^2$$

$$(1+y^2)(y^2+2y+1) = y^2 \times l_0^2$$

$$(\frac{1}{y}+y)(y+2+\frac{1}{y}) = l_0^2$$

On pose $X = y + \frac{1}{y}$ ($y \neq 0$) :

$$X(X+2) = l_0^2$$

$$X^2 + 2X - l_0^2 = 0$$

Dont on calcule le déterminant : $\Delta_X = 4(1+l_0^2)$

D'où les solutions intermédiaires : $X_1 = -1 - \sqrt{1+l_0^2}$

$$X_2 = -1 + \sqrt{1+l_0^2}$$

$$y + \frac{1}{y} = X$$

$$y^2 + 1 = Xy$$

$$y^2 - Xy + 1 = 0$$

Dont le déterminant est : $\Delta_y = X^2 - 4$

D'où les solutions : $y = \frac{1}{2}(X - \sqrt{X^2 - 4})$

$$y = \frac{1}{2}(X + \sqrt{X^2 - 4})$$

On peut alors trouver l'expression des ordonnées des points d'équilibre y_1, y_2, y_3, y_4 en fonction de l_0 :

$$y_0 = 0$$

$$y_1 = \frac{1}{2}(X_1 - \sqrt{X_1^2 - 4}) = \frac{-1 - \sqrt{1+l_0^2}}{2} - \frac{1}{2}(\sqrt{(-1 - \sqrt{1+l_0^2})^2 - 4})$$

$$= \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{1+l_0^2}) - \frac{1}{2}\sqrt{1+2\sqrt{1+l_0^2}+(1+l_0^2)-4}$$

$$= \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{1+l_0^2}) - \frac{1}{2}\sqrt{-2+2\sqrt{1+l_0^2}+l_0^2}$$

$$y_2 = \frac{X_1 + \sqrt{X_1^2 - 4}}{2} = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{1+l_0^2}) + \frac{1}{2}\sqrt{-2+2\sqrt{1+l_0^2}+l_0^2}$$

$$y_3 = \frac{X_2 - \sqrt{X_2^2 - 4}}{2} = \frac{-1 + \sqrt{1+l_0^2}}{2} - \frac{1}{2}(\sqrt{(-1 + \sqrt{1+l_0^2})^2 - 4})$$

$$= \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{1+l_0^2}) - \frac{1}{2}\sqrt{1-2\sqrt{1+l_0^2}+(1+l_0^2)-4}$$

$$= \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{1+l_0^2}) - \frac{1}{2}\sqrt{-2-2\sqrt{1+l_0^2}+l_0^2}$$

$$y_4 = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{1+l_0^2}) + \frac{1}{2}\sqrt{-2-2\sqrt{1+l_0^2}+l_0^2}$$

En considérant $y = \frac{x^2}{2} \implies x = \pm\sqrt{2y}$ on a au total 9 points d'équilibre :

$x_0 = 0$ (Déterminé au début)

$$x_1 = \sqrt{-1 - \sqrt{1+l_0^2} - \sqrt{-2+2\sqrt{1+l_0^2}+l_0^2}}$$

$$x_2 = -\sqrt{-1 - \sqrt{1+l_0^2} - \sqrt{-2+2\sqrt{1+l_0^2}+l_0^2}}$$

$$x_3 = \sqrt{-1 - \sqrt{1+l_0^2} + \sqrt{-2+2\sqrt{1+l_0^2}+l_0^2}}$$

$$x_4 = -\sqrt{-1 - \sqrt{1+l_0^2} + \sqrt{-2+2\sqrt{1+l_0^2}+l_0^2}}$$

$$\begin{aligned}
x_5 &= \sqrt{-1 + \sqrt{1 + l_0^2} - \sqrt{-2 - 2\sqrt{1 + l_0^2} + l_0^2}} \\
x_6 &= -\sqrt{-1 + \sqrt{1 + l_0^2} - \sqrt{-2 - 2\sqrt{1 + l_0^2} + l_0^2}} \\
x_7 &= \sqrt{-1 + \sqrt{1 + l_0^2} + \sqrt{-2 - 2\sqrt{1 + l_0^2} + l_0^2}} \\
x_8 &= -\sqrt{-1 + \sqrt{1 + l_0^2} + \sqrt{-2 - 2\sqrt{1 + l_0^2} + l_0^2}}
\end{aligned}$$

Il reste à déterminer la nature de ces points d'équilibre du système.

4 Détermination de la nature des points d'équilibre

=> p.25

Nous sommes dans le cas d'un système non linéaire. On pose $x_1 = x, x_2 = \dot{x}$ On a alors :

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 = f_1(x_1, x_2) \\
\dot{x}_2 &= \frac{x_1^3 \times l_0}{2\sqrt{1 + \frac{x_1^4}{4}(1 + x_1^2)}} - \frac{x_1^3}{2(1 + x_1^2)} - \frac{x_2^2 x_1}{1 + x_1^2} = f_2(x_1, x_2)
\end{aligned}$$

Pour tib et moi :

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= -\frac{x_2^2 x_1}{1 + x_1^2} + \frac{-x_1^3}{2(1 + x_1^2)} + \frac{x_1}{1 + x_1^2} - \frac{ax_1^3}{2(1 + x_1^2)(x_1^4/4 + 1)}
\end{aligned}$$

Aux points d'équilibre, la vitesse est nulle d'où $x_2 = 0$ et $\dot{x}_2 = 0$

D'où :

$$\begin{aligned}
f_1(x_1, 0) &= 0 \\
f_2(x_1, 0) &= \frac{x_1^3 \times l_0}{2\sqrt{1 + \frac{x_1^4}{4}(1 + x_1^2)}} - \frac{x_1^3}{2(1 + x_1^2)}
\end{aligned}$$

On va calculer la nature des points d'équilibre en passant par la matrice Jacobienne :

$$J_f = \begin{pmatrix} \frac{\delta f_1}{\delta x_1} & \frac{\delta f_1}{\delta x_2} \\ \frac{\delta f_2}{\delta x_1} & \frac{\delta f_2}{\delta x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\delta f_2}{\delta x_1} & 0 \end{pmatrix}$$

Il faut alors déterminer $\frac{\delta f_2}{\delta x_1}$:

$$\frac{\delta f_2}{\delta x_1} = \frac{3l_0 x_1^2 + l_0 x^4 - (1 + x^2) \frac{l_0 x^6}{2(1 + \frac{x^4}{4})}}{2\sqrt{1 + \frac{x^4}{4}(1 + x^2)^2}} - \frac{3x^2 + x^4}{2(1 + x^2)^2}$$

Détail du calcul de $\frac{\delta f_2}{\delta x_1}$:

(VIDE!!! voir lune à plume, je vois de quoi je parle. Pour info, c'est du calcul brut, pas "d'astuce")

On peut alors calculer les propriétés de la matrice (respectivement Déterminant, Trace, Discriminant du polynôme caractéristique) :

$$\begin{aligned}
\det(J_f) &= \frac{\delta f_2}{\delta x_1} \\
\text{tr}(J_f) &= 0 \\
\Delta(J_f) &= \text{tr}(J_f)^2 - 4 \times \det(J_f) = 4 \frac{\delta f_2}{\delta x_1}
\end{aligned}$$

Pour connaître la nature du point d'équilibre, il nous reste plus qu'à étudier le signe de $\frac{\delta f_2}{\delta x_1}$:

$$\frac{\delta f_2}{\delta x_1} = \frac{3l_0 x_1^2 + l_0 x^4 - (1 + x^2) \frac{l_0 x^6}{2(1 + \frac{x^4}{4})}}{2\sqrt{1 + \frac{x^4}{4}(1 + x^2)^2}} - \frac{3x^2 + x^4}{2(1 + x^2)^2}$$

D'après la question précédente, on a en tout point d'équilibre $\sqrt{1 + \frac{x^4}{4}} = \frac{x^2 l_0}{x^2 + 2}$, d'où :

$$\begin{aligned} \frac{\delta f_2}{dx_1} &= \frac{3l_0 x_1^2 + l_0 x^4 - \frac{1}{2}(x^2 + 2)^2(1 + x^2) \frac{l_0 x^6}{(x^2 l_0)^2}}{2(1 + x^2)^2} - \frac{3x^2 + x^4}{2(1 + x^2)^2} \\ &= \frac{-\frac{1}{2l_0} x^2 (x^2 + 2)^2 (1 + x^2) (x^2 + 2) + (3l_0 x^2 + l_0 x^2 + l_0 x^4) (x^2 + 2) - 3x^2 - x^4}{2(1 + x^2)^2} \end{aligned}$$

(Jusqu'à là, je suis sûr que c'était la bonne méthode. Le remplacement de $\sqrt{1 + \frac{x^4}{4}} = \frac{x^2 l_0}{x^2 + 2}$ est lui-aussi bon)

Le dénominateur étant positif pour tout x, on cherche le signe du numérateur, c-à-d de :

$$-\frac{1}{2l_0} x^2 (x^2 + 2)^2 (1 + x^2) (x^2 + 2) + (3l_0 x^2 + l_0 x^2 + l_0 x^4) (x^2 + 2) - 3x^2 - x^4$$

Étude de signe du polynôme :

on pose,

$$-\frac{1}{2l_0} x^2 (x^2 + 2)^2 (1 + x^2) (x^2 + 2) + (3l_0 x^2 + l_0 x^2 + l_0 x^4) (x^2 + 2) - 3x^2 - x^4 = 0$$

Le polynôme est factorisable par x^2 et on obtient un polynôme d'ordre 8

$$-1x^8/l_0 - 7x^6/l_0 - 18x^4/l_0 + x^2(n6l_0 - 1 - 20/l_0) + (8l_0 - 1 - 8l_0) = 0$$

On pose :

$$V = -1/l_0$$

$$Y = (6l_0 - 1 - 20/l_0)$$

$$Z = (8l_0 - 1 - 8/l_0)$$

$$\text{on a : } Vx^8 + 7Vx^6 + 18Vx^4 + Yx^2 + Z = 0$$

le polynôme est d'ordre 8 c'est donc un ordre pair donc il admet au maximum deux racines.

Or le coefficient de l'ordre 8 est impair et z est négatif donc le polynôme admet deux racines de signes contraires.

on peut donc factoriser le polynôme par un polynôme d'ordre 6 et par un polynôme d'ordre 2

5 On suppose que $a = \sqrt{15}$.

5.1 Déterminer la valeur exacte des points d'équilibres du système.

5.2 Déterminer l'intégrale première du système.

On rappelle que $v = \dot{x}\sqrt{1+x^2}$ et $\frac{\delta v}{\delta t} = \ddot{x}\sqrt{1+x^2} + \frac{\dot{x}^2 x}{\sqrt{1+x^2}}$

On va intégrer cette équation différentielle.

$$\ddot{x} + \frac{\dot{x}^2 x}{1+x^2} + \frac{1}{2} \frac{x^3}{1+x^2} + \frac{x}{1+x^2} - \frac{a.x^3}{2(1+x^2)\sqrt{x^4/4+1}} = 0$$

On multiplie cette équation par $\sqrt{1+x^2}$:

$$\ddot{x}\sqrt{1+x^2} + \frac{\dot{x}^2 x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{2} \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{a.x^3}{2\sqrt{1+x^2}\sqrt{x^4/4+1}} = 0$$

On remarque ainsi que l'équation s'écrit de la forme :

$$\frac{\delta v}{\delta t} + \sqrt{1+x^2} f(x) = 0$$

$$\text{avec } f(x) = \frac{1}{2} \frac{x^3}{1+x^2} + \frac{x}{1+x^2} - \frac{a.x^3}{2(1+x^2)\sqrt{x^4/4+1}}$$

On multiplie cette équation par v. On a alors :

$$v \cdot \frac{\delta v}{\delta t} + \dot{x}(1+x^2)f(x) = 0$$

En intégrant l'équation, on a alors :

$$\int v \cdot \frac{\delta v}{\delta t} + \dot{x}(1+x^2)f(x) dt = C$$

Ce qui revient à écrire :

$$\int v dv + \int (1+x^2)f(x) dx = C$$

En intégrant l'équation, on obtient :

$$\boxed{\frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{8}x^4 + \frac{x^2}{2} - a\sqrt{\frac{x^4}{4}+1} = C}$$

5.3 Représenter le portrait de phase.

A partir de l'intégrale première, on détermine le portrait de phase pour $a = \sqrt{15}$.

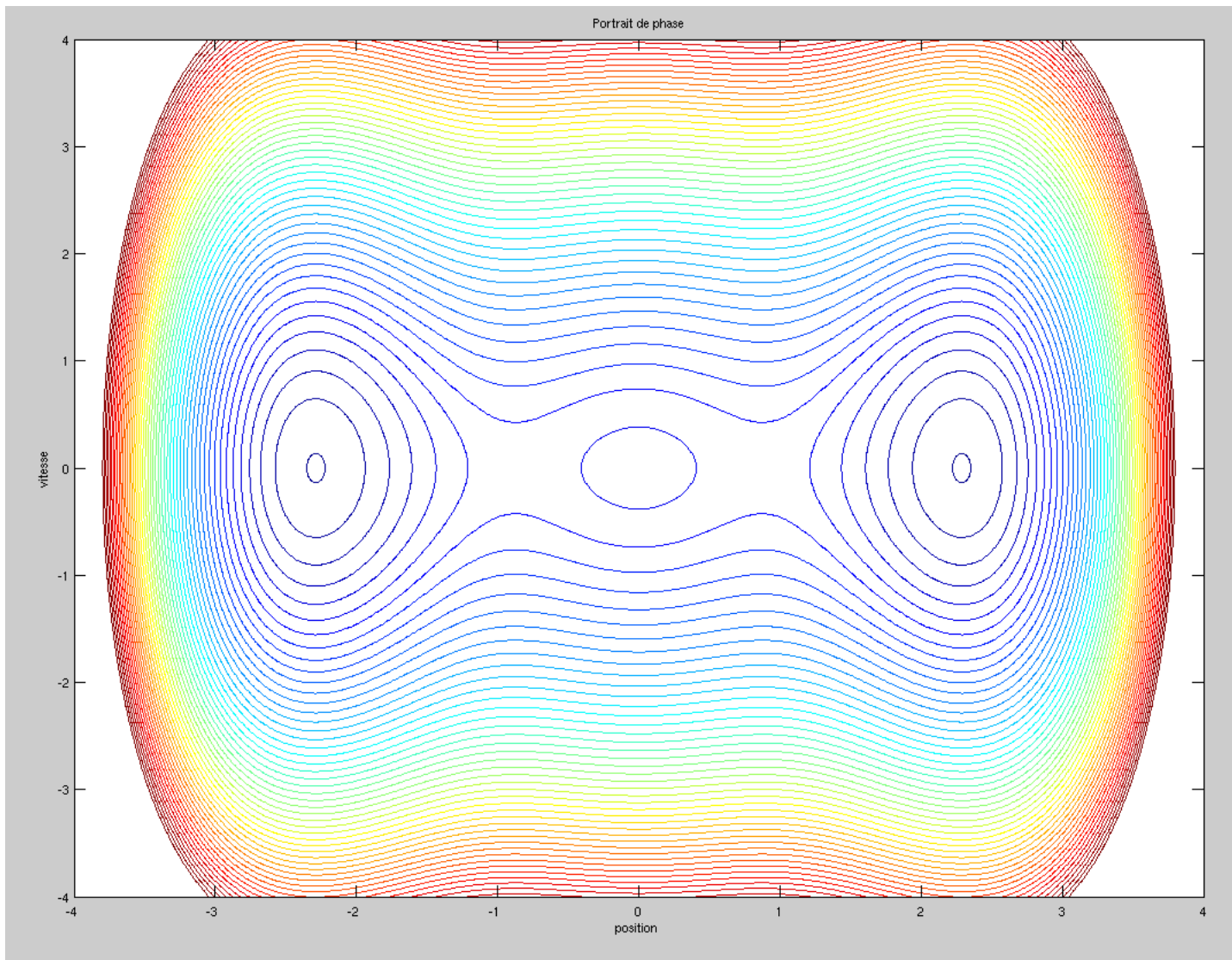


FIGURE 1 – Portrait de phase. $a = \sqrt{15}$

5.4 Que peut-on en déduire sur le mouvement.

On remarque trois points d'équilibres en $(0,0)$, $(2.3,0)$ et $(-2.3,0)$. En ces points le mouvement tend à s'arrêter. On remarque aussi deux points selles en $(-0.8,0)$ et $(0.8,0)$. En ces points le système est instable et le mouvement tend à s'accélérer.

- 6** On suppose maintenant que $a = \sqrt{3}$ et $x(0) = x_0 > 0$ et $\dot{x}(0) = 0$.
- 6.1** Calculer et représenter à l'aide de Matlab la période T en fonction de x_0 pour $0 < x_0 < 10$.
- 7** On suppose maintenant que le système est soumis à une force de frottement $\gamma > 0$ et que l'équation devient : (E) $\ddot{x} + \gamma\dot{x} + f(x, a) = 0$.
- 7.1** Représenter le diagramme de Matlab le diagramme de bifurcation en (a, γ) pour chacun des points d'équilibres.
- 7.2** On suppose que $a = \sqrt{15}$. Pour quelles valeurs (exactes) de γ les points d'équilibres attractifs changent-ils de nature.
- 7.3** Représenter le portrait de phase pour $\gamma = 1, \gamma = 2, \gamma = 3$.