Colpier Clément
Fornara Thibault
Pellegrino Guillaume
Renard Charles

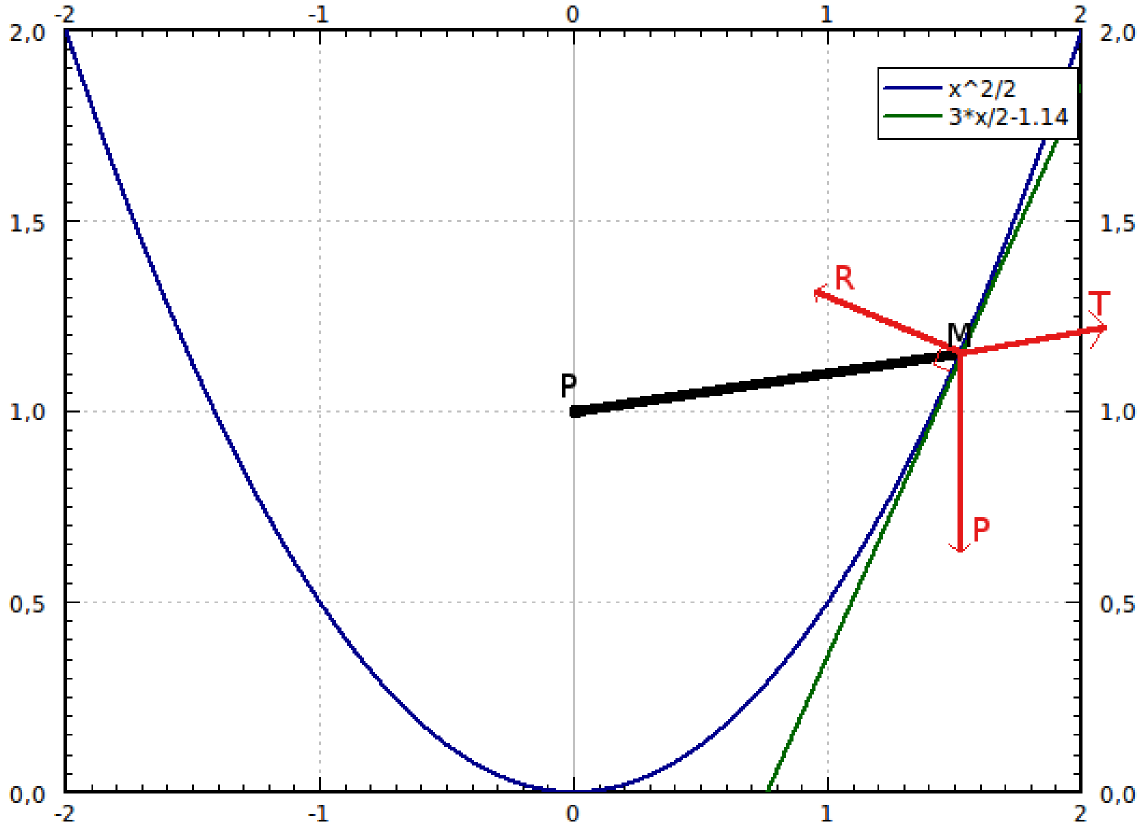
26/01/13

Projet de Mathématiques appliquées
PR3003

-

Table des matières

1 Déterminer l'équation différentielle vérifiée par M(t)=(x(t),y(t)).



La masselotte M se déplace uniquement selon la composante tangentielle. Pour déterminer l'équation différentielle on va donc particulièrement s'intéresser à l'équation sur la composante tangentielle.
Pour cela, on commence à faire la somme des forces s'exerçant sur la composante tangentielle $\vec{u_t}$ et normale $\vec{u_n}$:

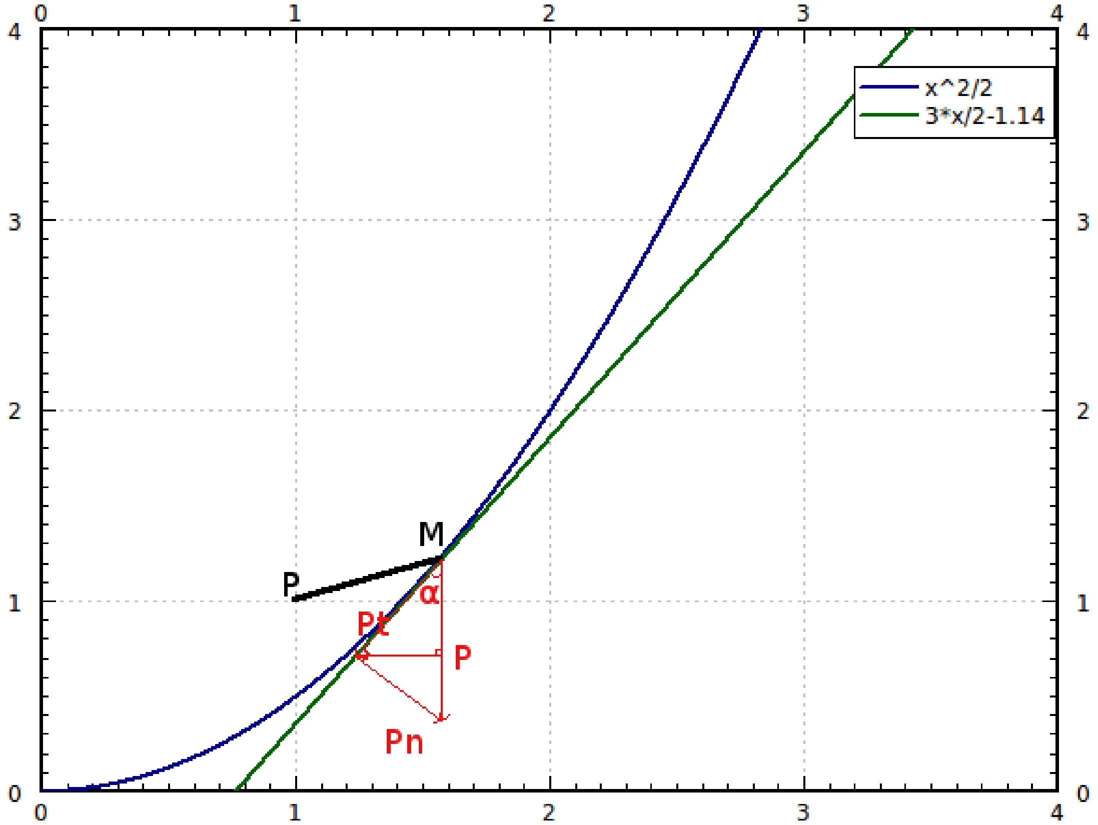
$$\begin{cases} P_t + T_t = ma_t \\ P_n + R_n + T_n = 0 \end{cases}$$

On s'intéresse à l'équation :

$$\boxed{P_t + T_t = ma_t}$$

Pour déterminer l'équation différentielle, on doit alors projeter $\vec{T}$ et $m\vec{g}$ sur $\vec{u_t}$.
On projette $m\vec{g} = -mg.\vec{u_y}$ sur $\vec{u_t}$

1.0.1 Projection du Poids sur la composante tangentielle



On remarque sur le graphique que $P_t = P.\cos(\alpha)$

On cherche à déterminer α. On calcule la pente a de la tige parabolique. $a = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial x^2/2}{\partial x} = x$

En $M(x_0, y_0)$ la pente a de la tige parabolique vaut donc x_0. Cette pente a nous permet de calculer l'angle α.

En effet, on remarque graphiquement que $\tan(\alpha) = \frac{1}{a}$. On en déduit : $\alpha = \tan^{-1}(\frac{1}{x_0})$

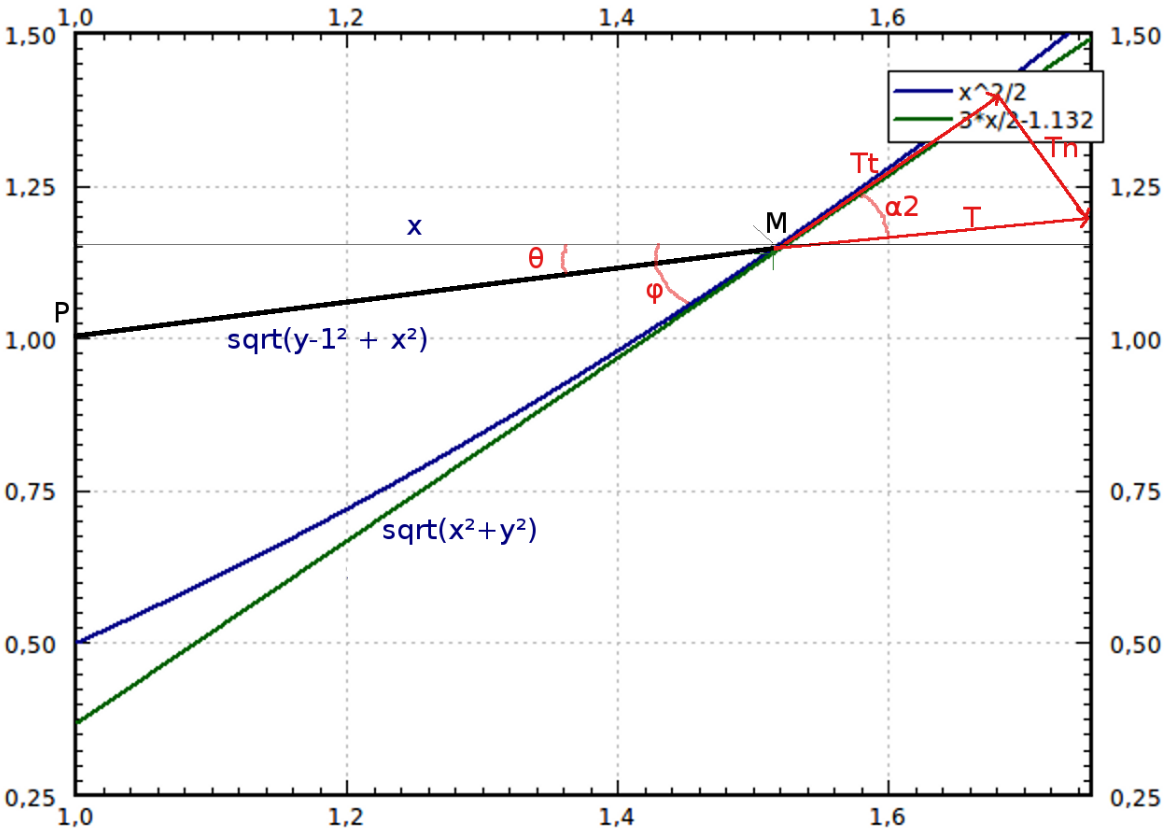
Au final on trouve donc : $P_t = P.\cos(\tan^{-1}(\frac{1}{x_0}))$

Or $\cos(\tan^{-1}(x)) = \frac{1}{1+x^2}$ On en déduit donc : $P_t = P.\frac{1}{1+1/x_0^2}$ D'où :

$$\boxed{P_t = P.\frac{x_0}{1+x_0^2}}$$

1.0.2 Projection de la tension du ressort su la composante tangentielle

On projette désormais $\vec{T}$ sur $\vec{u_t}$.



$\cos(\phi) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$\cos(\theta) = \frac{x}{\sqrt{(1-y)^2+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^4/4}}$

Et : $T_t = T.\cos(\alpha 2) = T.\cos(\phi - \theta) = T[\cos(\phi).\cos(\theta) + \sin(\phi).\sin(\theta)]$

On en déduit :

$T_t = T[\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.\frac{x}{\sqrt{1+x^4/4}} + \sin(\cos^{-1}(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}})).\sin(\cos^{-1}(\frac{x}{\sqrt{1+x^4/4}}))]$

Or : $\sin(\cos^{-1}(u)) = \sqrt{1-u^2}$

On trouve donc :

$$\boxed{T_t = T.[\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.\frac{x}{\sqrt{1+x^4/4}} + \sqrt{1-\frac{1}{1+x^2}}.\sqrt{1-\frac{x^2}{1+x^4/4}}]}$$

1.0.3 Détermination de a_t

On a vu dans la première équation que $a_n = 0$. On en déduit : $||\vec{a}|| = a_t$ On peut ainsi écrire : $a_t = ||\vec{a}||$

Or $||\vec{a}|| = \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}{\partial t}$

On trouve :

$$\boxed{a_t = \ddot{x}.\sqrt{1+x^2} + \frac{\dot{x}^2.x}{\sqrt{1+x^2}}}$$

(Equation de Charles)

1.0.4 Détermination de l'équation différentielle

A l'aide de ce qu'on a calculé précédemment on développe l'équation $mg_t + T_t = ma_t$ pour déterminer l'équation différentielle. On obtient alors :

$$\boxed{mg.\frac{x}{1+x^2} + k(l-l_0).[\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.\frac{x}{\sqrt{1+x^4/4}} + \sqrt{1-\frac{1}{1+x^2}}.\sqrt{1-\frac{x^2}{1+x^4/4}}] - \ddot{x}.\sqrt{1+x^2} - \frac{\dot{x}^2.x}{\sqrt{1+x^2}} = 0}$$

Equa diff de Charles :

$$\boxed{\ddot{x}.\sqrt{1+x^2}+\frac{5x^3/8+x^2/4+\dot{x}.x}{1+x^2}+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{l_0(5x^3/4+x^2/2)}{2\sqrt{1+x^4/4}\sqrt{1+x^2}}=0}$$