Colpier Clément
Fornara Thibault
Pellegrino Guillaume
Renard Charles

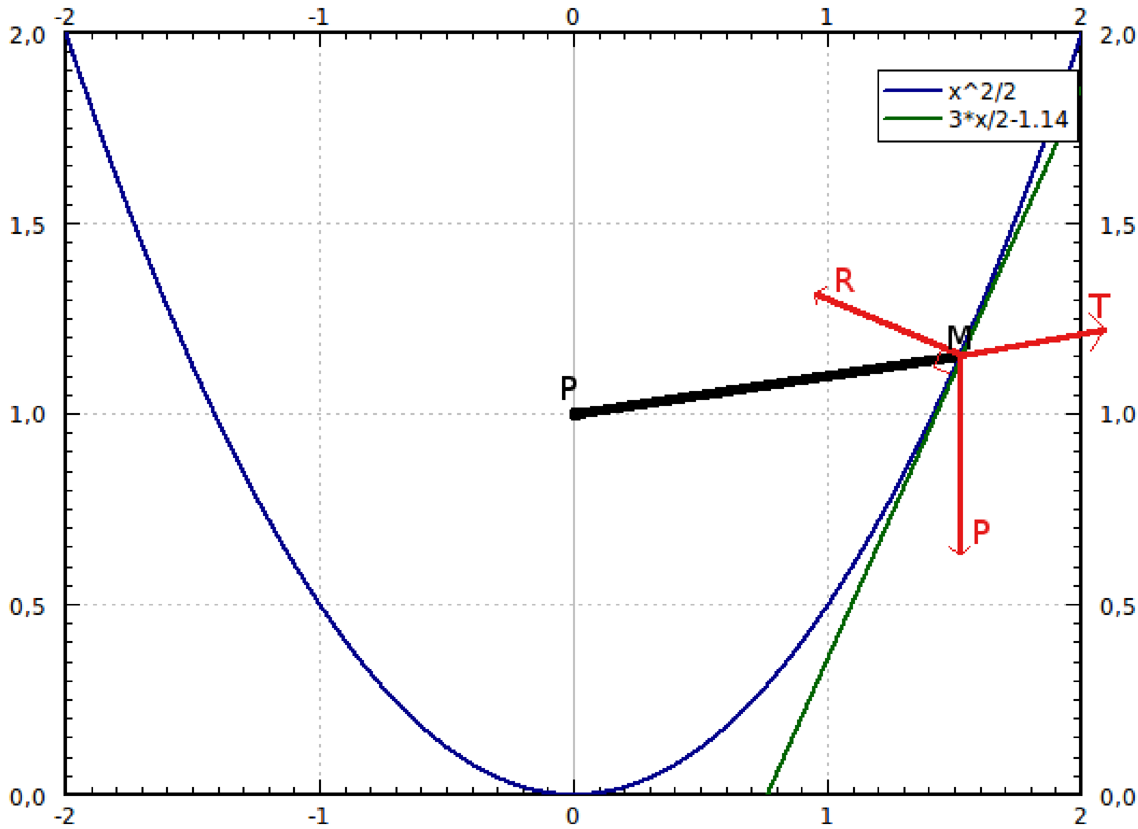
26/01/13

Projet de Mathématiques appliquées
PR3003

Table des matières

1 Déterminer l'équation différentielle vérifiée par M(t)=(x(t),y(t)).

1.1 Application de la seconde loi de Newton



La masselotte M se déplace uniquement selon la composante tangentielle. Pour déterminer l'équation différentielle on va donc particulièrement s'intéresser à l'équation sur la composante tangentielle.
Pour cela, étudie la somme des forces s'exerçant sur la composante tangentielle $\vec{u_t}$ et normale $\vec{u_n}$. Selon la seconde loi de Newton (PFD) :

$$\begin{cases} P_t + T_t = ma_t \\ P_n + R_n + T_n = 0 \end{cases}$$

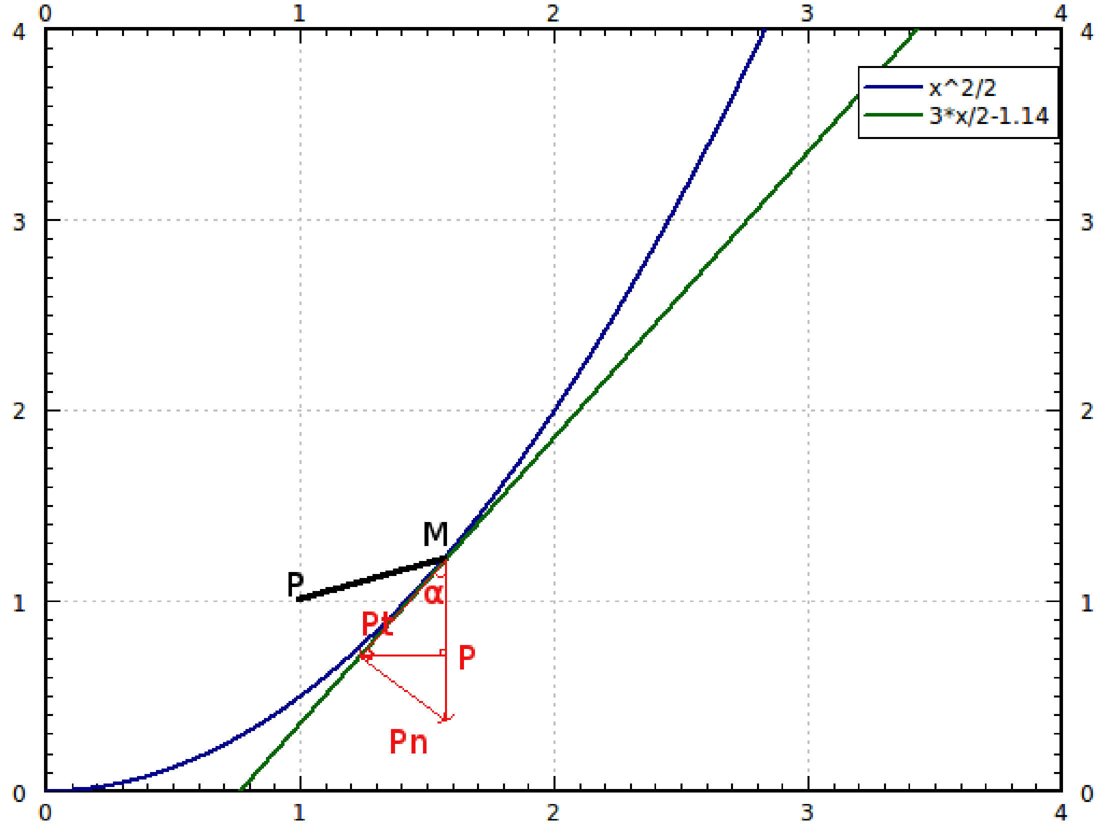
On s'intéresse à l'équation :

$$\boxed{P_t + T_t = ma_t}$$

Pour déterminer l'équation différentielle, on doit alors projeter $\vec{T}$ et $\vec{mg}$ sur $\vec{u_t}$.

1.2 Projection du Poids sur la composante tangentielle

On projette $\vec{mg} = -mg.\vec{u_y}$ sur $\vec{u_t}$



On projette tel que $P_t = P.\cos(\alpha)$

On cherche à déterminer α. On calcule la pente a de la tige parabolique. $a = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial x^2/2}{\partial x} = x$

En $M(x_0, y_0)$ la pente a de la tige parabolique vaut donc x_0. Cette pente permet de calculer l'angle α. En effet, on remarque graphiquement que $\tan(\alpha) = \frac{1}{a}$.

On en déduit : $\alpha = \tan^{-1}(\frac{1}{x_0})$

$P_t = P.\cos(\tan^{-1}(\frac{1}{x_0}))$

Or $\cos(\tan^{-1}(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

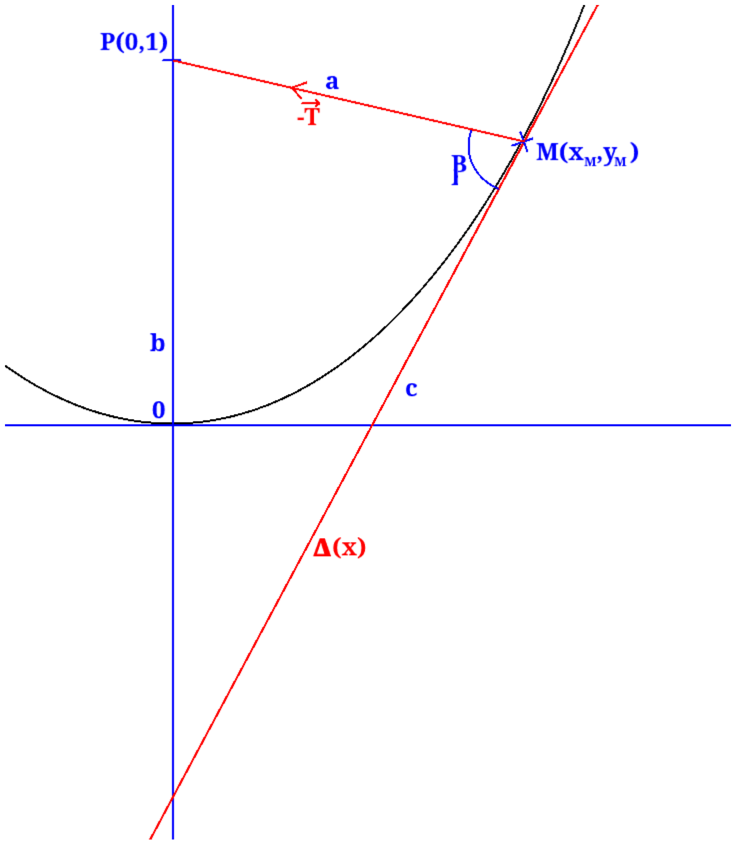
On en déduit donc : $P_t = P.\frac{1}{\sqrt{1+1/x_0^2}}$

D'où :

$$\boxed{P_t = P.\frac{x_0}{\sqrt{1+x_0^2}}}$$

1.3 Projection de la tension du ressort su la composante tangentielle

On projette désormais $\vec{T}$ sur $\vec{u_t}$.



On note x,y les coordonnées du point M. D'après le théorème de Pythagore :
$a = \sqrt{(x_M - x_P)^2 + (y_M - y_P)^2} = \sqrt{x^2 + (\frac{x^2}{2} - 1)} = \sqrt{x^2 + \frac{x^4}{4} - x^2 + 1} = \sqrt{\frac{x^4}{4} + 1}$
$b = \sqrt{(x_M - x_P)^2 + (y_M - \Delta(0))^2} = \sqrt{x^2 + (\frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2})^2} = \sqrt{x^2 + x^4} = |x|\sqrt{1 + x^2}$
$c = \sqrt{(y_p - \Delta(0))^2} = \sqrt{(1 + \frac{x^2}{2})^2} = 1 + \frac{x^2}{2}$
D'après le théorème d'Al-Kashi :
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \times \cos(\beta)$
$\cos(\beta) = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{x^4/4+1+x^2+x^4-1-x^2-x^4/4}{2x\sqrt{x^4/4+1}\sqrt{1+x^2}} = \frac{x^3}{2\sqrt{\frac{x^4}{4}+1}\sqrt{1+x^2}}$
On trouve donc :

$$\boxed{T_t = T \times \frac{x^3}{2\sqrt{\frac{x^4}{4}+1}\sqrt{1+x^2}}}$$

1.4 Determination de $\|T\|$

On détermine la valeur de la tension du ressort.
$T = k(l - l_0) = k(\sqrt{(x_M - x_P)^2 + (y_M - y_P)^2} - l_0) = k(\sqrt{x^2 + (x^2/2 - 1)^2} - l_0)$
$T = k(\sqrt{x^2 + x^4/4 - x^4 + 1} - l_0)$

$$\boxed{T = k(\sqrt{1 + \frac{x^4}{4}} - l_0)}$$

1.5 Détermination de a_t

On a vu dans la première équation que $a_n = 0$. On en déduit : $||\vec{a}|| = a_t$
Avec une accélération normale nulle, on peut écrire la formule de l'accélération dans le repère de Frenet ainsi :
$a_t = ||\vec{a}||$
Or $||\vec{a}|| = \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \pm\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}{\partial t}$
$\dot{y} = \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial y}{\partial x} \times \frac{\partial x}{\partial t} = x\dot{x}$
$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{x}^2x^2} = \dot{x}\sqrt{1 + x^2}$

$\frac{\partial v}{\partial t} = \ddot{x}\sqrt{1+x^2} + \frac{\dot{x}^2 x}{\sqrt{1+x^2}}$
On trouve :

$$\boxed{a_t = \ddot{x}.\sqrt{1+x^2} + \frac{\dot{x}^2.x}{\sqrt{1+x^2}}}$$

1.6 Détermination de l'équation différentielle

A l'aide de ce qu'on a calculé précédemment on développe l'équation $mg_t + T_t = ma_t$ pour déterminer l'équation différentielle. On calcule maintenant l'équatio ndifférentielle du système en s'aidant des résultats précédents.
On part de l'équation $P_t + T_t = ma_t$
avec $T_t = k(l - l_0)$ et $P_t = -mg$
En développant les expression on obtient :
$-k(\sqrt{x^4/4+1} - l_0) \times \frac{x^3}{2\sqrt{x^4/4+1}\sqrt{1+x^2}} - mg\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = m(\ddot{x}\sqrt{1+x^2} + \frac{\ddot{x}^2 x}{\sqrt{1+x^2}})$
$-\frac{k}{m}(\frac{x^3}{2\sqrt{1+x^2}} - \frac{x^3 \times l_0}{2\sqrt{x^4/4+1}\sqrt{1+x^2}}) - \frac{xg}{\sqrt{1+x^2}} - \ddot{x}\sqrt{1+x^2} - \frac{\dot{x}^2 x}{\sqrt{1+x^2}} = 0$
En prenant k=m, g=1 et $a = l_0$ (données de l'énoncé), on obtient :
$-\frac{x^3}{2\sqrt{1+x^2}} + \frac{x^3 \times a}{2\sqrt{x^4/4+1}\sqrt{1+x^2}} - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - \ddot{x}\sqrt{1+x^2} - \frac{\dot{x}^2 x}{\sqrt{1+x^2}} = 0$
$\frac{x^3}{2\sqrt{1+x^2}} - \frac{ax^3}{2\sqrt{1+x^4/4}\sqrt{1+x^2}} + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \ddot{x}\sqrt{1+x^2} + \frac{\dot{x}^2 x}{\sqrt{1+x^2}} = 0$
L'équation différentielle revient donc à :

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{\dot{x}^2 x}{1+x^2} + \frac{x^3}{2(1+x^2)} - \frac{ax^3}{2\sqrt{1+x^4/4}(1+x^2)} + \frac{x}{1+x^2} = 0}$$

2 Dans toute la suite on supposera que g=1, k=m et on notera $a = l_0$ et on s'intéressera particulièrement par l'équation vérifié par x(t).

2.1 Montrer que l'équation est de la forme : $\ddot{x} + f(x, \dot{x}, a) = 0$.

On retrouve la forme $\ddot{x} + f(x, \dot{x}, a) = 0$, avec $f(x, \dot{x}, a) = \frac{\dot{x}^2 x + x^3/2 + x}{1+x^2} - \frac{x^3 \times a}{2\sqrt{x^4/4+1}(1+x^2)}$

2.2 Détermination des points d'équilibre

Les points d'équilibre sont les points où la vitesse du système et donc de la masselotte est nulle. Ainsi, les tèrmes lié à la vitesse et à l'accélération du système sont nuls.
Les points d'équilibres correspondent aux solutions de l'équation :
$\ddot{x} + \frac{\dot{x}^2 x - x^3/2 - x}{1+x^2} + \frac{x^3 \times a}{2\sqrt{x^4/4+1}(1+x^2)} = 0$ où $\ddot{x} = 0$ et $\dot{x} = 0$ aux points d'équilibre.
Ce qui revient à l'équation :
$\frac{-x^3/2 - x}{1+x^2} + \frac{x^3 \times a}{2\sqrt{x^4/4+1}(1+x^2)} = 0$
Une première solution correspond à $x_0 = 0$ et $y_0 = 0$
En multipliant de part et d'autre de l'équation par $\frac{2(1+x^2)}{x}$:
$x^2 - \frac{x^2 \times l_0}{\sqrt{1+x^4/4}} + 2 = 0$
$\sqrt{1+x^{\frac{4}{4}}}(x^2+2) = x^2 \times l_0$
$\sqrt{1+y^2}(2y+2) = 2yl_0$
$(1+y^2)(4y^2+8y+4) = 4y^2 \times l_0^2$
$(1+y^2)(y^2+2y+1) = y^2 \times l_0^2$
$(\frac{1}{y} + y)(y + 2 + \frac{1}{y}) = l_0^2$
On pose $X = y + \frac{1}{y}$ $(y \neq 0)$:
$X(X+2) = l_0^2$
$X^2 + 2X - l_0^2 = 0$
Dont on calcule le déterminant : $\Delta_X = 4(1 + l_0^2)$
D'où les solutions intermédiaires : $X_1 = -1 - \sqrt{1 + l_0^2}$
$X_2 = -1 + \sqrt{1 + l_0^2}$
$y + \frac{1}{y} = X$
$y^2 + 1 = Xy$
$y^2 - Xy + 1 = 0$

Dont le déterminant est : $\Delta_y = X^2 - 4$
D'où les solutions :
$y = \frac{1}{2}(X - \sqrt{X^2-4})$
$y = \frac{1}{2}(X + \sqrt{X^2-4})$
Cependant, il faut savoir que Δ_y doit être positif afin que les racines soient rélles.

Pour la solution $X = (-1+\sqrt{1+l_0^2})^2$, nous avons deux cas de condition d'existance :

- $(-1+\sqrt{1+l_0^2})^2 > 2 \Rightarrow \sqrt{1+l_0^2} > 3 \Rightarrow l_0 > \sqrt{8}$
- $(-1+\sqrt{1+l_0^2})^2 < -2 \Rightarrow \sqrt{1+l_0^2} < -1$ qu iest une condition irréalisable

Finalement, on déduit que la condition d'existence des points d'équilibres est $l_0 > \sqrt{8}$. On peut alors trouver l'expression des ordonnées des points d'équilibre y_1, y_2, y_3, y_4 en fonction de l_0 :

- $y_0 = 0$
  (Déterminé précédemment)

- $y_1 = \frac{1}{2}(X_1 - \sqrt{X_1-4}) = \frac{1}{2}(-1-\sqrt{1+l_0^2}) - \frac{1}{2}(\sqrt{(-1-\sqrt{1+l_0^2})^2-4})$
  Cette solution est strictement négative alors que y(t) est positive, selon la rampe $y = \frac{x^2}{2}$. On doit alors l'éliminer.

- $y_2 = \frac{X_1+\sqrt{X_1-4}}{2} = \frac{1}{2}(-1-\sqrt{1+l_0^2}) + \frac{1}{2}\sqrt{-2+2\sqrt{1+l_0^2}+l_0^2}$
  Cette solution est aussi à éliminer. En effet, nous avons :
  $y_2 > 0 \Rightarrow (-1-\sqrt{1+l_0^2} + \sqrt{(-1-\sqrt{1+l_0^2})^2+l_0^2} > 0$
  $\Rightarrow \sqrt{(-1-\sqrt{1+l_0^2})^2+l_0^2} > 1+\sqrt{1+l_0^2}$
  $\Rightarrow 0 > \sqrt{1+l_0^2}$ ce qui est impossible.
- $y_3 = \frac{X_2-\sqrt{X_2-4}}{2} = \frac{1}{2}(-1+\sqrt{1+l_0^2}) - \frac{1}{2}\sqrt{(-1+\sqrt{1+l_0^2})^2-4}$
  $= \frac{1}{2}(-1+\sqrt{1+l_0^2}) - \frac{1}{2}\sqrt{-2-2\sqrt{1+l_0^2}+l_0^2}$

- $y_4 = \frac{1}{2}(-1+\sqrt{1+l_0^2}) + \frac{1}{2}\sqrt{(-1+\sqrt{1+l_0^2})^2-4}$
  $= \frac{1}{2}(-1+\sqrt{1+l_0^2}) + \frac{1}{2}\sqrt{-2-2\sqrt{1+l_0^2}+l_0^2}$

Seules deux solutions sont alors retenues, l'unique condition d'existance étant $l_0 > \sqrt{8}$.
En considérant $y = \frac{x^2}{2} \implies x = \pm\sqrt{2y}$ on a au total 5 points d'équilibre :
$x_0 = 0$
$x_1 = \sqrt{-1+\sqrt{1+l_0^2} - \sqrt{-2-2\sqrt{1+l_0^2}+l_0^2})}$
$x_2 = -\sqrt{-1+\sqrt{1+l_0^2} - \sqrt{-2-2\sqrt{1+l_0^2}+l_0^2})}$
$x_3 = \sqrt{-1+\sqrt{1+l_0^2} + \sqrt{-2-2\sqrt{1+l_0^2}+l_0^2}}$
$x_4 = -\sqrt{-1+\sqrt{1+l_0^2} + \sqrt{-2-2\sqrt{1+l_0^2}+l_0^2}}$
Il reste à déterminer la nature de ces points d'équilibre du système.

2.3 Détermination de la nature des points d'équilibre

Nous sommes dans le cas d'un système non linéaire. On pose $x_1 = x, x_2 = \dot{x}$
On a alors :

$$\dot{x_1} = x_2 = f_1(x_1*, x_2*)$$

$$\dot{x_2} = -\frac{x_2^2.x_1}{1+x_1^2} - \frac{x_1^3}{2(1+x_1^2)} - \frac{x_1}{1+x_1^2} + \frac{ax_1^3}{2(1+x_1^2)(x_1^4/4+1)} = f_2(x_1, x_2)$$

Aux points d'équilibre, la vitesse est nulle d'où $x_2 = 0$ et $\dot{x_2} = 0$
D'où :

$$f_1(x_1*, 0) = 0$$

$$f_2(x_1*,0) = \frac{x_1^3 \times l_0}{2\sqrt{1+\frac{x_1^4}{4}}(1+x_1^2)} - \frac{x_1^3}{2(1+x_1^2)} - \frac{x}{1+x^2}$$

On va calculer la nature des points d'équilibre en passant par la matrice Jacobienne :

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\delta f_1}{dx_1} & \frac{\delta f_1}{dx_2} \\ \frac{\delta f_2}{dx_1} & \frac{\delta f_2}{dx_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\delta f_2}{dx_1} & 0 \end{pmatrix}$$

La nature des points d'équilibre du système est définie par la trace, le déterminant, et le discriminant du polynôme caractéristique de la matrice Jacobienne ci-dessus.
$Tr(J) = 0$
$det(J) = -\frac{\delta f_2}{\delta x_1}$
$\Delta(J) = Tr^2(J) - 4det(J) = 4 * \frac{\delta f_2}{\delta x_1}$

On a alors besoin de déterminer le signe de $frac\delta f_2 \delta x_1$ aux points d'équilibre.

En factorisant f_2, on a :
$f_2 = 0 = -\frac{x}{2(1+x^2)} * (x^2 - \frac{x^2 \times l_0}{\sqrt{1+\frac{x^4}{4}}} + 2)$
car $\ddot{x} = 0$ aux points d'équilibre.

Ici, nous avons deux éventualités pour satisfaire cette équation :

- cas 1 : $\frac{x}{1+x^2} = 0$
- cas 2 : $x^2 - \frac{x^2 \times l_0}{\sqrt{1+\frac{x^4}{4}}} + 2 = 0$

Premier Cas

$\frac{x}{1+x^2} = 0 \longrightarrow x = 0$
On a alors :
$\frac{\delta f_2}{\delta x_1} = \frac{-1}{2} \frac{\delta \frac{x}{1+x^2}}{\delta x}(x^2 - \frac{x^2 \times l_0}{\sqrt{1+\frac{x^4}{4}}} + 2) = -2\frac{1+x^2-4x^2}{2(1+x^2)^2}$ Ce qui équivaut, avec l'hypothèse précédente $x = 0$, à :

$$frac\delta f_2 \delta x_1 = -1$$

La matrice jacobienne du système pour le point d'équilibre $x = 0$ devient donc :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

On peut alors en calculer les caractéristique :
$tr(J_f) = 0$
$det(J_f) = 1$
$\Delta(J_f) = -4$
Ce sont les caractéristiques d'un point d'équilibre centré.

Second Cas

Dans ce cas, $x^2 - \frac{x^2 \times l_0}{\sqrt{1+\frac{x^4}{4}}} + 2 = 0$
On a alors :
$\frac{\delta f_2}{\delta x} = -\frac{x}{2(1+x^2)}(2x - \frac{2x \times l_0\sqrt{1+\frac{x^4}{4}} - x^2 \times l_0 \frac{x^3}{2\sqrt{1+\frac{x^4}{4}}}}{1+\frac{x^4}{4}}) = -\frac{x}{2(1+x^2)}(2 - \frac{2 \times l_0}{\sqrt{1+\frac{x^4}{4}}} + l_0 \frac{x^4}{2\sqrt{1+\frac{x^4}{4}}^{3/2}})$
$= \frac{-x^2}{2(1+x^2)} \frac{2(1+\frac{x^4}{4}) - \frac{2}{x^2}(2+x^2)(1+\frac{x^4}{4}) + \frac{x^2}{2}(2+x^2)}{1+\frac{x^4}{4}} = \frac{-x^2+2}{(1+x^2)(1+\frac{x^4}{4})} = \frac{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}{(1+x^2)(1+\frac{x^4}{4})}$
Etudier le signe de $\frac{\delta f_2}{\delta x}$ revient donc à étudier le signe de $-x^2 + 2$.
On en calcule alors le discriminant pour connaitre les solutions pour dresser, par la suite, un tableau de variation. $\Delta = 8$
D'où les solutions :
$x_1 = -\frac{\sqrt{8}}{-2} = -\sqrt{2}$
$x_2 = \frac{\sqrt{8}}{-2} = \sqrt{2}$

D'où le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$ $-\sqrt{2}$ $\sqrt{2}$ $+\infty$
$\frac{\delta f_2}{\delta x_1}$	$+$ $-$ $+$

Avec $\frac{\delta f_2}{\delta x_1} = 0$ pour $x = \pm\sqrt{2}$. Les points d'équilibre sont les suivants :
$x = 0$
$x_1 = \sqrt{-1 + \sqrt{1 + l_0^2} - \sqrt{-2 - 2\sqrt{1 + l_0^2} + l_0^2})}$
$x_2 = -\sqrt{-1 + \sqrt{1 + l_0^2} - \sqrt{-2 - 2\sqrt{1 + l_0^2} + l_0^2})}$
$x_3 = \sqrt{-1 + \sqrt{1 + l_0^2} + \sqrt{-2 - 2\sqrt{1 + l_0^2} + l_0^2}}$
$x_4 = -\sqrt{-1 + \sqrt{1 + l_0^2} + \sqrt{-2 - 2\sqrt{1 + l_0^2} + l_0^2}}$

On peut alors étudier leur nature.

Nature des points d'équilibre

En partant de la condition d'existence des points d'équilibre :
$l_0 > 2\sqrt{2}$
$1 + l_0^2 > 9$
$-1 + \sqrt{1 + l_0^2} > 2$
avec :
$\sqrt{(-1 + \sqrt{1 + l_0^2})^2 - 4} > 0$
Ce qui nous permet enfin de calculer la nature des points d'équilibre :

- $x_0 = 0$
  D'après le tableau de variation, $\frac{\delta f_2}{\delta x}$<0.
  $tr(J_f) = 0$
  $det(J_f) > 0$
  $\Delta(J_f) < 0$
  Il s'agit d'un point centre.
- $x_1 = \sqrt{-1 + \sqrt{1 + l_0^2} - \sqrt{-2 - 2\sqrt{1 + l_0^2} + l_0^2})}$
  Correspondant à : $y_3 = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{1 + l_0^2}) - \frac{1}{2}\sqrt{(-1 + \sqrt{1 + l_0^2})^2 - 4}$
  On pose :
  $A = -1 + \sqrt{1 + l_0^2}$
  $B = \sqrt{(-1 + \sqrt{1 + l_0^2})^2 - 4} = \sqrt{A^2 - 4}$
  $y = \frac{1}{2}(A - B)$
  D'après le théorème des trois maisons, on a :
  $B > \sqrt{A^2} - \sqrt{4}$
  $B > A - 2$
  $A - B < 2$
  $\frac{1}{2}(A - B) < 1$
  $y_3 < 1$
  $\frac{x_1^2}{2} < 1$
  $x_1^2 < 2$
  D'où : $x_1 < \sqrt{2}$ et $x_1 > -\sqrt{2}$
  D'après le tableau de variations, $\frac{\delta f_2}{\delta x_1} < 0$. Ainsi :
  $tr(J_f) = 0$
  $det(J_f) > 0$
  $\Delta(J_f) < 0$
  Il s'agit d'un point centre.
- $x_2 = -\sqrt{-1 + \sqrt{1 + l_0^2} - \sqrt{-2 - 2\sqrt{1 + l_0^2} + l_0^2})}$

Il s'agit de l'opposé de x_1, on est donc aussi dans le cas de $\frac{\delta f_2}{\delta x_1} < 0$.
x_2 est donc, comme x_1, un point centre.

- $x_3 = \sqrt{-1 + \sqrt{1+l_0^2} + \sqrt{-2 - 2\sqrt{1+l_0^2} + l_0^2}} > \sqrt{2}$
  Car racine carrée d'une somme de expressions supérieures à zéro, dont l'une supérieur à 2. D'après le tableau de variation, $\frac{\delta f_2}{\delta x} > 0$. Ainsi :
  $tr(J_f) = 0$
  $det(J_f) < 0$
  $\Delta(J_f) > 0$
  Il s'agit d'un point selle.
- $x_4 = -\sqrt{-1 + \sqrt{1+l_0^2} + \sqrt{-2 - 2\sqrt{1+l_0^2} + l_0^2}} < -\sqrt{2}$
  Puisqu'il s'agit de l'opposé de x_3. D'après le tableau de variation, $\frac{\delta f_2}{\delta x} > 0$.
  x_4 est donc, comme x_3, un point selle.

On représente les x_n sur le portrait de phase.

3 On suppose que $a = \sqrt{15}$.

3.1 Déterminer la valeur exacte des points d'équilibres du système.

On détermine les valeurs numériques des points d'équilibres pour $a = \sqrt{15}$. On a :
$x_0 = 0$
$x_1 = \sqrt{3 - \sqrt{5}} = 0.874$
$x_2 = \sqrt{3 - \sqrt{5}} = -0.874$
$x_3 = -\sqrt{3 + \sqrt{5}} = 2.288$
$x_4 = -\sqrt{3 + \sqrt{5}} = -2.288$

3.2 Déterminer l'intégrale première du système.

On rappelle que $v = \dot{x}\sqrt{1+x^2}$ et $\frac{\delta v}{\delta t} = \ddot{x}\sqrt{1+x^2} + \frac{\dot{x}^2.x}{\sqrt{1+x^2}}$
On va intégrer cette équation différentielle.

$$\ddot{x} + \frac{\dot{x}^2 x}{1+x^2} + \frac{1}{2}\frac{x^3}{1+x^2} + \frac{x}{1+x^2} - \frac{a.x^3}{2(1+x^2)\sqrt{x^4/4+1}} = 0$$

On multiplie cette équation par $\sqrt{1+x^2}$:

$$\ddot{x}\sqrt{1+x^2} + \frac{\dot{x}^2 x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{2}\frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{a.x^3}{2\sqrt{1+x^2}\sqrt{x^4/4+1}} = 0$$

On remarque ainsi que l'équation s'écrit de la forme :

$$\frac{\delta v}{\delta t} + \sqrt{1+x^2} f(x) = 0$$

avec $f(x) = \frac{1}{2}\frac{x^3}{1+x^2} + \frac{x}{1+x^2} - \frac{a.x^3}{2(1+x^2)\sqrt{x^4/4+1}}$
On multiplie cette équation par v. On a alors :
$v.\frac{\delta v}{\delta t} + \dot{x}(1+x^2)f(x) = 0$
En intégrant l'équation, on a alors :
$\int v.\frac{\delta v}{\delta t} + \dot{x}(1+x^2)f(x)dt = C$
Ce qui revient à écrire :
$\int vdv + \int(1+x^2)f(x)dx = C$
En intégrant l'équation, on obtient :

$$\boxed{\frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{8}x^4 + \frac{x^2}{2} - a\sqrt{\frac{x^4}{4}+1} = C}$$

3.3 Représenter le portrait de phase.

A partir de l'intégrale première, on détermine le portrait de phase pour $a = \sqrt{15}$.

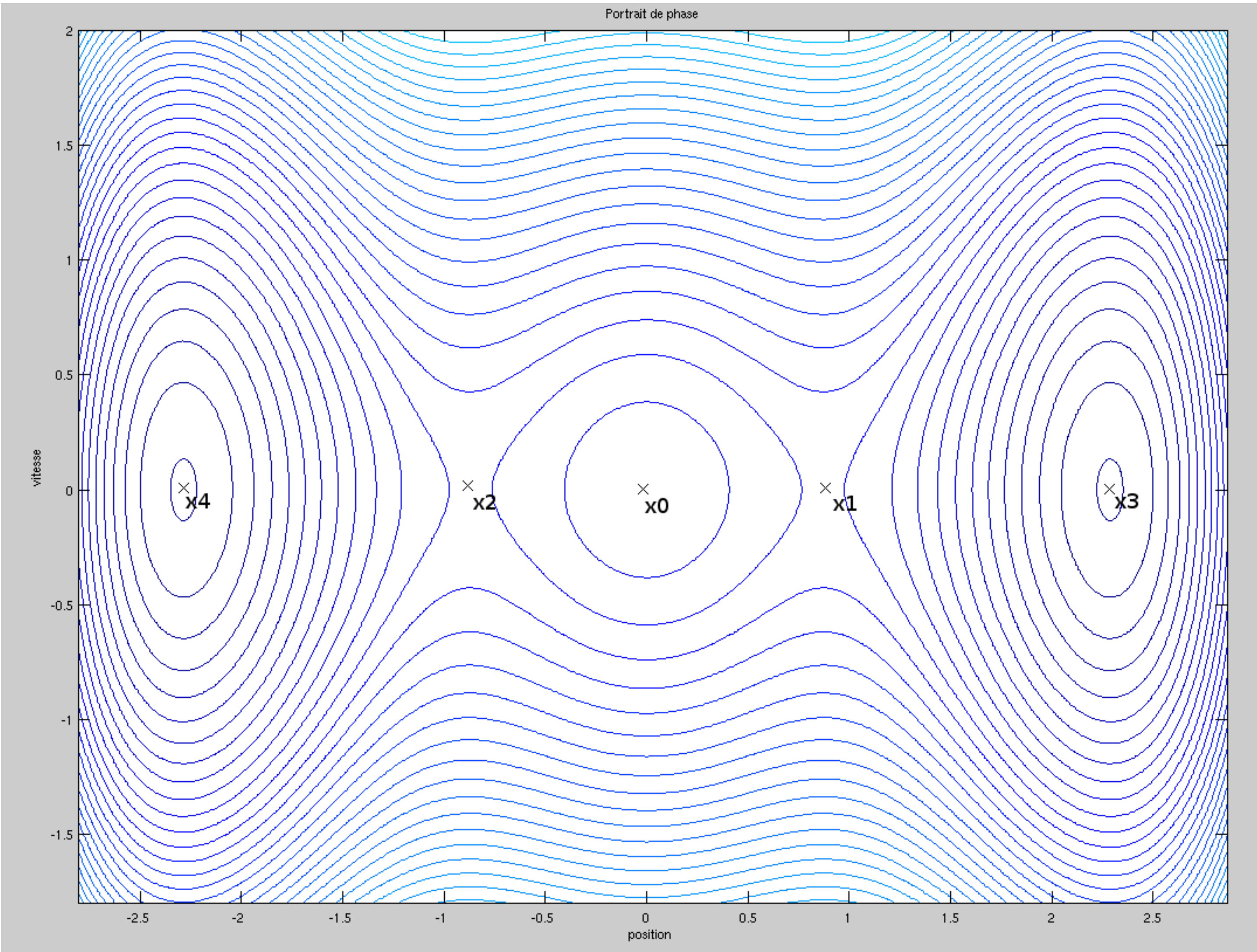


FIGURE 1 – Portrait de phase. $a = \sqrt{15}$

3.4 Que peut-on en déduire sur le mouvement.

On remarque trois points centres en (0,0), (2.288,0) et (-2.288,0). En ces points le système est stable. Contrairement à une spirale attractive, le mouvement du pendule ne va pas ralentir mais il ne va pas non plus s'accélérer. On remarque aussi deux points selles en (-0.874,0) et (0.874,0). En ces points le système est instable et le mouvement tend à s'accélérer en s'éloignant de cette position.

4 On suppose maintenant que $a = \sqrt{3}$ et $x(0) = x_0 > 0$ et $\dot{x}(0) = 0$.

4.1 Calculer et représenter à l'aide de Matlab la période T en fonction de x_0 pour $0 < x_0 < 10$.

On peut déterminer la période T des oscillations en calculant cette intégrale :
$T = 2\int_{t(x_{min})}^{t(x_{max})} dt$

L'intégrale première du système peut s'écrire sous la forme : $\frac{v^2}{2} + G(x) = 0$ avec $\boxed{G(x) = \frac{1}{8}x^4 + \frac{x^2}{2} - a\sqrt{\frac{x^4}{4} + 1}}$

C correspond à la valeur initiale : $C = G(x_0)$ pour $x_0 > 0$

Puisque $\frac{1}{2}\dot{x}^2(1 + x^2) + G(x) = G(x_0)$. On a alors $\dot{x} = \sqrt{\frac{2(G(x_0) - G(x))}{1+x^2}}$

Connaissant $\frac{\delta x}{\delta t}$, on peut simplifier le calcul de l'intégrale pour la période T :
$T = 2\int_{x_{min}}^{x_{max}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{2(G(x_0)-G(x))}}dx$
On intègre de 0 à x_0. On a alors :

$$\boxed{T = 2\int_0^{x_0} \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{2(G(x_0)-G(x))}}dx}$$

Matlab peut réaliser l'intégration. On lui demande d'intégrer sur plusieurs valeurs de x_0, afin de pouvoir tracer la courbe de la période en fonction de x_0.

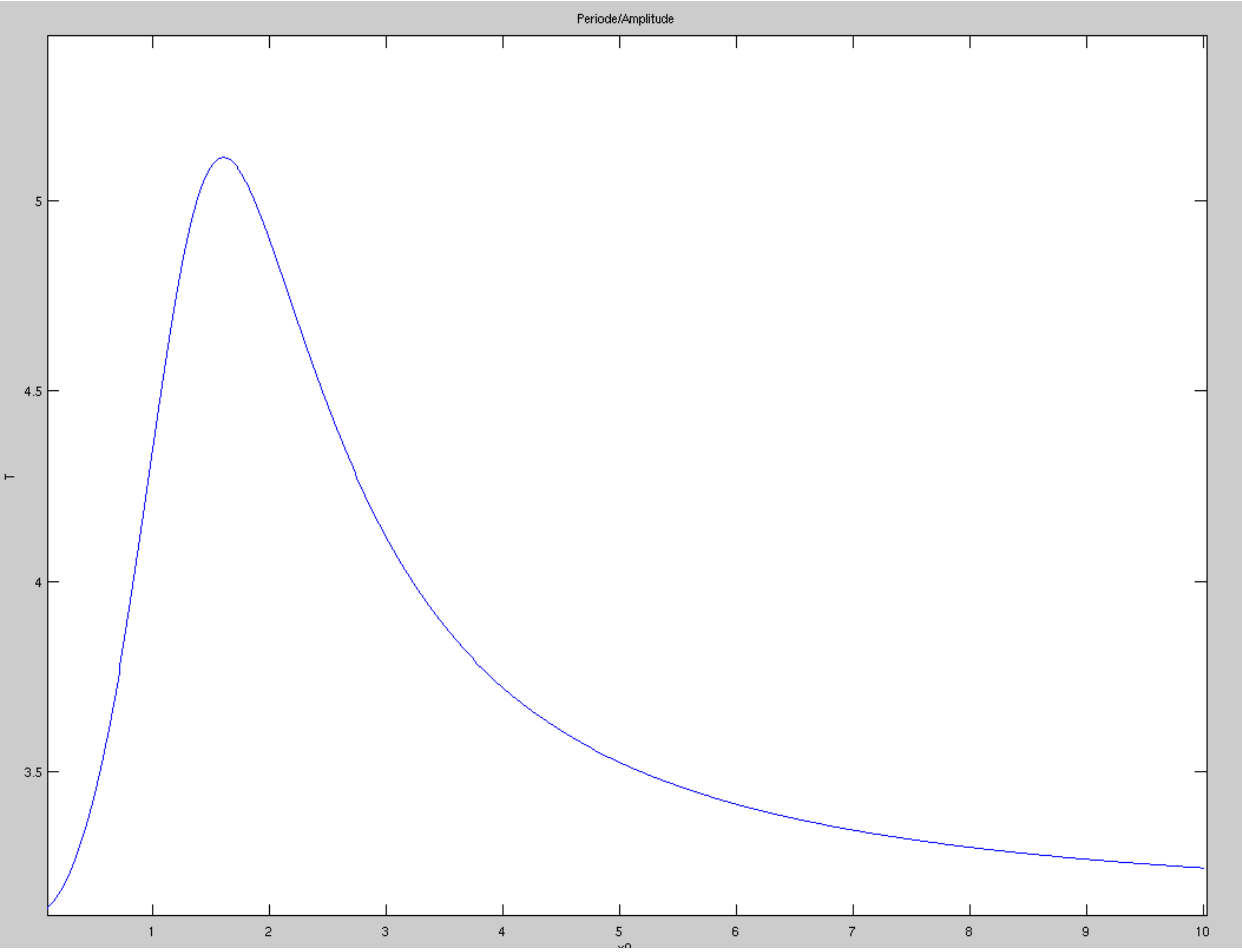


FIGURE 2 – Période T du système oscillatoire en fonction de x_0

5 On suppose maintenant que le système est soumis à une force de frottement $\gamma > 0$ et que l'équation devient : (E) $\ddot{x} + \gamma.\dot{x} + f(x, a) = 0$.

5.1 Représenter le diagramme de Matlab le diagramme de bifurcation en (a, γ) pour chacun des points d'équilibres.

L'équation différentielle s'écrit désormais :

$$\ddot{x} + \gamma.\dot{x} + \frac{\dot{x}^2 x}{1+x^2} + \frac{1}{2}\frac{x^3}{1+x^2} + \frac{x}{1+x^2} - \frac{a.x^3}{2(1+x^2)\sqrt{x^4/4+1}} = 0$$

Il faut calculer pour chaque points d'équilibres :
D= Calcul du discriminant du polynôme caractéristique
S= Somme des 2 valeurs propres

P= Produit des 2 valeurs propres

Pour cela, on étudie la matrice du système linéaire associée.

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\delta f_1}{\delta x_1} & \frac{\delta f_1}{\delta x_2} \\ \frac{\delta f_2}{\delta x_1} & \frac{\delta f_2}{\delta x_2} \end{pmatrix}$$

On a toujours : $\dot{x_1} = x_2 = f_1(x_1*, x_2*)$
D'où $\frac{\delta f_1}{\delta x_1} = 0$ et $\frac{\delta f_1}{\delta x_2} = 1$
Le terme supplémentaire n'a pas une dérivée nulle par rapport à x_2 : $\frac{\delta \gamma x_2}{\delta x_2} = \gamma$
Nous obtenons ainsi la nouvelle matrice Jacobienne associée au système avec forces de frottements :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\delta f_2}{\delta x_1} & \gamma \end{pmatrix}$$

$tr(J) = \gamma$
$det(J) = -\frac{\delta f_2}{\delta x_1}$
$\Delta(J) = tr^2(J) - 4det(J) = \gamma^2 + 4\frac{\delta f_2}{\delta x_1}$

5.2 On suppose que $a = \sqrt{15}$. Pour quelles valeurs (exactes) de γ les points d'équilibres attractifs changent-ils de nature.

Comme nous venons de le voir, en ajoutant une force de frottement, un facteur γ est ajouté à l'équation, la trace et le discriminant sont modifiés.
De plus, pour les points attractifs $\frac{\delta f_2}{\delta x_1} < 0$.
Nous nous intéressons donc aux trois points centres que nous avons trouvé dans les questions précédentes :
$x = 0$
$x_1 = \sqrt{-1 + \sqrt{1 + l_0^2} - \sqrt{-2 - 2\sqrt{1 + l_0^2} + l_0^2})}$
$x_2 = -\sqrt{-1 + \sqrt{1 + l_0^2} - \sqrt{-2 - 2\sqrt{1 + l_0^2} + l_0^2})}$
On étudie les signes de la trace et de Delta.
On détermine les racines de delta.
On pose :
$0 = \gamma^2 + 4\frac{\delta f_2}{\delta x_1}$
$\Delta = -16.\frac{\delta f_2}{\delta x_1}$
Les racines sont donc : $\pm 0.5\sqrt{\frac{-16\delta f_2}{\delta x_1}}$ Soient : $\pm 2\sqrt{\frac{-\delta f_2}{\delta x_1}}$
On a alors le tableau de variation suivant :

γ	-∞		-2√(df2/dx1)		0		2√(df2/dx1)		+∞
tr(J)		+		-	0	-		+	
det(J)		+		+		+		+	
Δ(J)		-	0	-		+	0	+	

Lorsque gamma vaut $\pm 2\sqrt{\frac{-\delta f_2}{\delta x_1}}$, le discriminant est nul. x_0, x_1 et x_2 (qui étaient des centres avant d'avoir ajouté les frottements) ne sont plus des points critiques. On constate également que de part et d'autre de ces valeurs, ces points changes de nature. Ils changent également de nature de part et d'autre de 0. A gauche de 0

ils sont attractifs et à droite ils sont répulsifs. Quant γ vaut 0, ces points critiques sont des centres (il n'y a pas de frottement).
Les points critiques attractifs changent de nature lorsque gamma vaut :
$\frac{+}{-}2\sqrt{\frac{-\delta f_2}{\delta x_1}}$ ou 0.

5.3 Représenter le portrait de phase pour $\gamma = 1, \gamma = 2, \gamma = 3$.

L'intégrale première du système avec les frottements n'étant pas calculable, on est contraint d'utiliser la deuxième méthode pour déterminer le portrait de phase pour :
$\gamma = 1$
$\gamma = 2$
$\gamma = 3$
La deuxième méthode permet de calculer le portrait de phase local construit à partir de solutions déterminés numériquement.