Colpier Clément
Fornara Thibault
Pellegrino Guillaume
Renard Charles

26/01/13

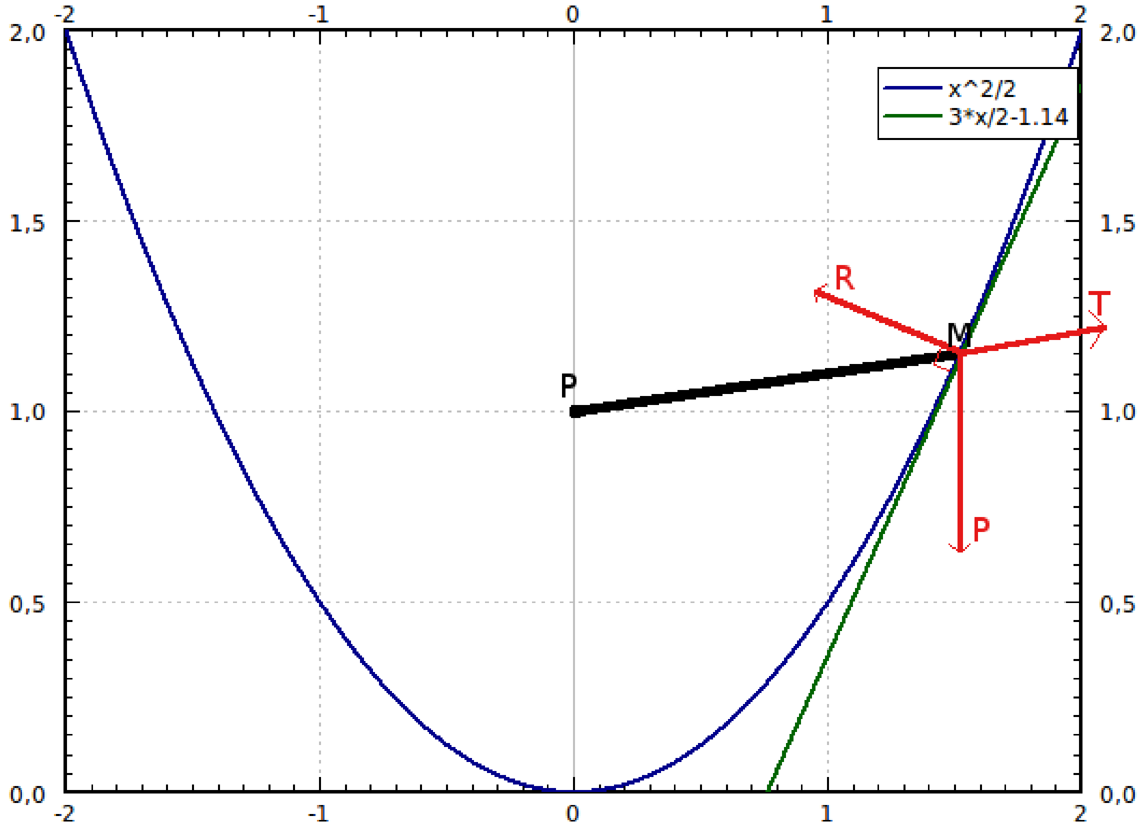
ESIEE ENGINEERING

Projet de Mathématiques appliquées
PR3003

-

Table des matières

1 Déterminer l'équation différentielle vérifiée par M(t)=(x(t),y(t)).



La masselotte M se déplace uniquement selon la composante tangentielle. Pour déterminer l'équation différentielle on va donc particulièrement s'intéresser à l'équation sur la composante tangentielle.
Pour cela, on commence à faire la somme des forces s'exerçant sur la composante tangentielle $\vec{u_t}$ et normale $\vec{u_n}$ selon la seconde loi de Newton (PFD) :

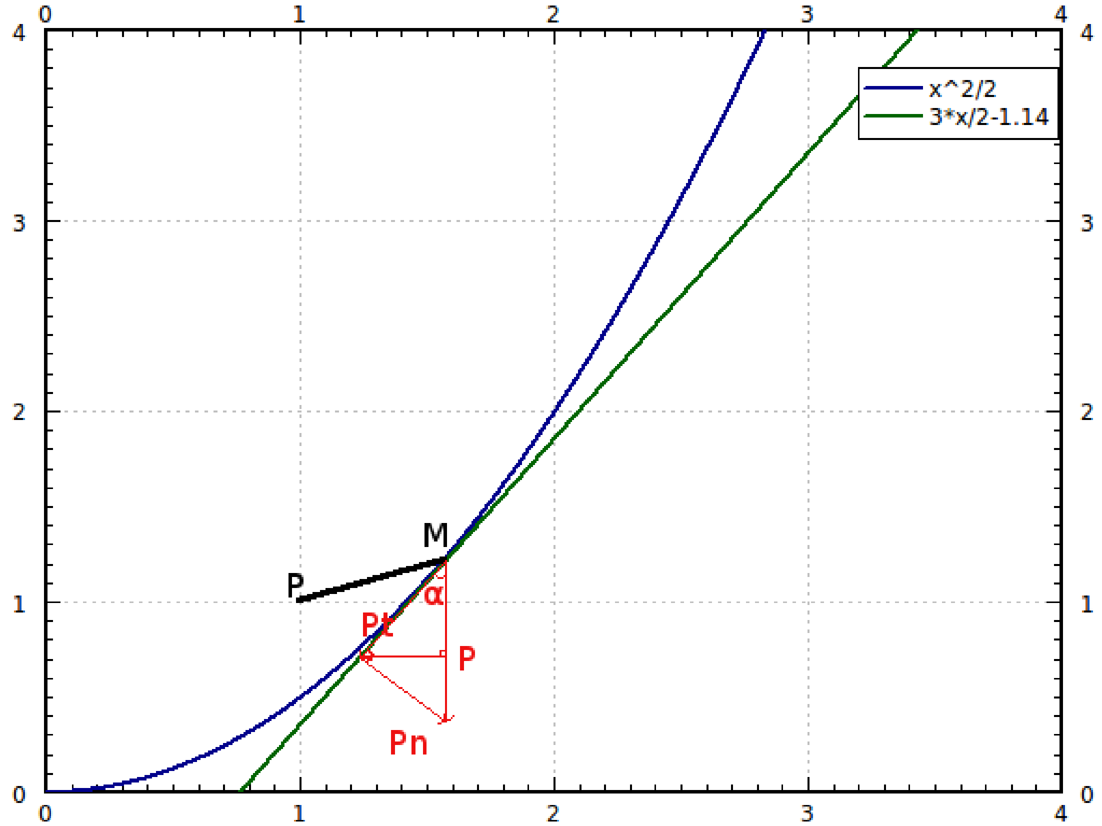
$$\begin{cases} P_t + T_t = ma_t \\ P_n + R_n + T_n = 0 \end{cases}$$

On s'intéresse à l'équation :

$$\boxed{P_t + T_t = ma_t}$$

Pour déterminer l'équation différentielle, on doit alors projeter $\vec{T}$ et $\vec{mg}$ sur $\vec{u_t}$.
On projette $\vec{mg} = -mg.\vec{u_y}$ sur $\vec{u_t}$

1.1 Projection du Poids sur la composante tangentielle



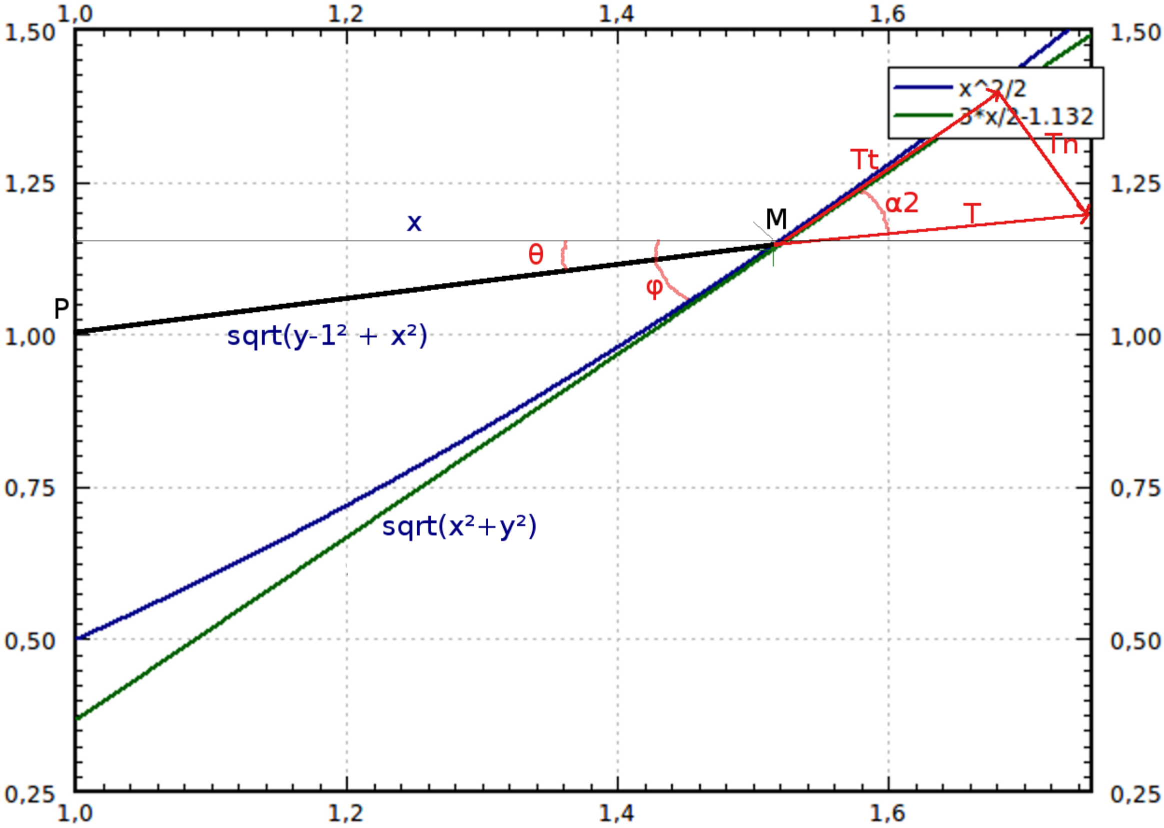
On remarque sur le graphique que $P_t = P.\cos(\alpha)$
On cherche à déterminer α. On calcule la pente a de la tige parabolique. $a = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial x^2/2}{\partial x} = x$
En $M(x_0, y_0)$ la pente a de la tige parabolique vaut donc x_0. Cette pente a nous permet de calculer l'angle α.
En effet, on remarque graphiquement que $\tan(\alpha) = \frac{1}{a}$. On en déduit : $\alpha = \tan^{-1}(\frac{1}{x_0})$
Au final on trouve donc : $P_t = P.\cos(\tan^{-1}(\frac{1}{x_0}))$
Or $\cos(\tan^{-1}(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ On en déduit donc : $P_t = P.\frac{1}{\sqrt{1+1/x_0^2}}$ D'où :

$$\boxed{P_t = P.\frac{x_0}{\sqrt{1+x_0^2}}}$$

1.2 Projection de la tension du ressort su la composante tangentielle

On projette désormais $\vec{T}$ sur $\vec{u_t}$.

1.2.1 Methode de Guillaume, diff d'angle



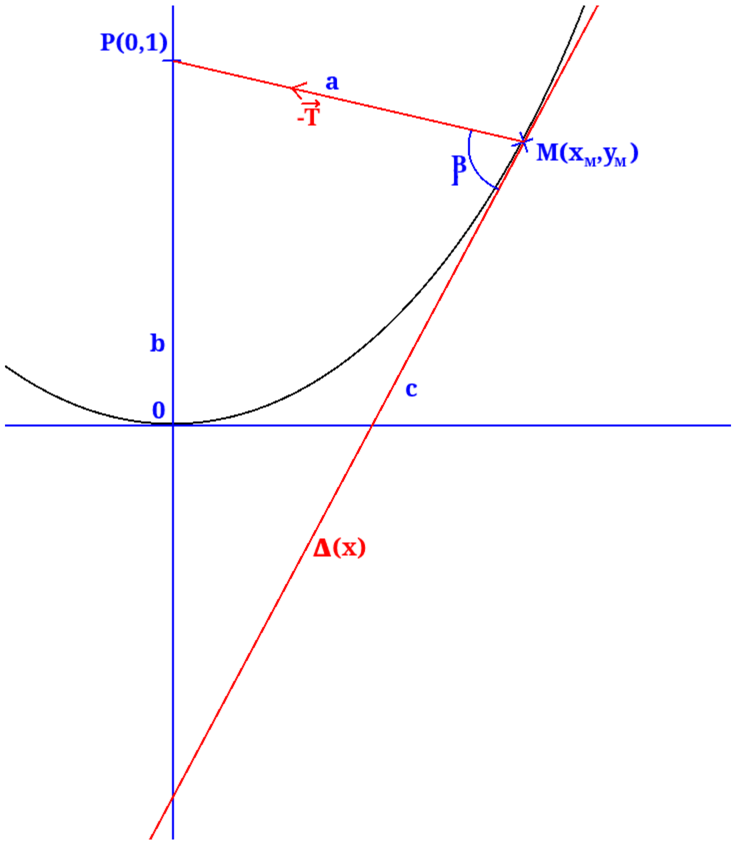
$$\cos(\phi) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\cos(\theta) = \frac{x}{\sqrt{(1-y)^2+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^4/4}}$$

Et : $T_t = T.\cos(\alpha 2) = T.\cos(\phi - \theta) = T[\cos(\phi).\cos(\theta) + \sin(\phi).\sin(\theta)]$
On en déduit :
$T_t = T[\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.\frac{x}{\sqrt{1+x^4/4}} + \sin(\cos^{-1}(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}})).\sin(\cos^{-1}(\frac{x}{\sqrt{1+x^4/4}}))]$
Or : $\sin(\cos^{-1}(u)) = \sqrt{1-u^2}$
On trouve donc :

$$\boxed{T_t = T.[\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.\frac{x}{\sqrt{1+x^4/4}} + \sqrt{1-\frac{1}{1+x^2}}.\sqrt{1-\frac{x^2}{1+x^4/4}}]}$$

1.2.2 Methode de Charles, Al-Kashi



On note x,y les coordonnées du point M.
$a = \sqrt{(x_M - x_P)^2 + (y_M - y_P)^2} = \sqrt{x^2 + (\frac{x^2}{2} - 1)} = \sqrt{x^2 + \frac{x^4}{4} - x^2 + 1} = \sqrt{\frac{x^4}{4} + 1}$
$b = \sqrt{(x_M - x_P)^2 + (y_M - \Delta(0))^2} = \sqrt{x^2 + (\frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2})^2} = \sqrt{x^2 + x^4} = x\sqrt{1 + x^2}$
note : faut-il mettre plutôt $|x|\sqrt{1+x^2}$?
$c = \sqrt{(y_p - \Delta(0))^2} = \sqrt{(1 + \frac{x^2}{2})^2} = 1 + \frac{x^2}{2}$
D'après le théorème d'Al-Kashi : $x_1 = \frac{5+\sqrt{25-4\times 6}}{2} = 3$
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \times \cos(\beta)$
$\cos(\beta) = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{x^4/4+1+x^2+x^4-1-x^2-x^4/4}{2x\sqrt{x^4/4+1}\sqrt{1+x^2}} = \frac{x^3}{2\sqrt{\frac{x^4}{4}+1}\sqrt{1+x^2}}$
On trouve donc :

$$\boxed{T_t = T \times \frac{x^3}{2\sqrt{\frac{x^4}{4}+1}\sqrt{1+x^2}}}$$

1.3 Determination de $\|T\|$

On détermine la valeur de la tension du ressort.
$T = k(l - l_0) = k(\sqrt{(x_M - x_P)^2 + (y_M - y_P)^2} - l_0) = k(\sqrt{x^2 + (x^2/2 - 1)^2} - l_0)$
$T = k(\sqrt{x^2 + x^4/4 - x^4 + 1} - l_0)$

$$\boxed{T = k(\sqrt{1 + \frac{x^4}{4}} - l_0)}$$

1.4 Détermination de a_t

On a vu dans la première équation que $a_n = 0$. On en déduit : $||\vec{a}|| = a_t$
Avec une accélération normale nulle, on peut écrire la formule de l'accélération dans le repère de Frenet ainsi :
$a_t = ||\vec{a}||$

Or $||\vec{a}|| = \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \pm\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}{\partial t}$
$\dot{y} = \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial y}{\partial x} \times \frac{\partial x}{\partial t} = x\dot{x}$
$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{x}^2 x^2} = \dot{x}\sqrt{1+x^2}$
$\frac{\partial v}{\partial t} = \ddot{x}\sqrt{1+x^2} + \frac{\dot{x}^2 x}{\sqrt{1+x^2}}$
On trouve :

$$\boxed{a_t = \ddot{x}.\sqrt{1+x^2} + \frac{\dot{x}^2.x}{\sqrt{1+x^2}}}$$

(Equation de Charles)

1.5 Détermination de l'équation différentielle

A l'aide de ce qu'on a calculé précédemment on développe l'équation $mg_t + T_t = ma_t$ pour déterminer l'équation differentielle. On obtient alors :

1.5.1 Equa diff de Guillaume

En développant et en prenant k=m, g=1 et $a = l_0$ (données de l'énoncé), on obtient :

$$m.1.\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + m(\sqrt{x^4/4+1} - a).[\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.\frac{x}{\sqrt{1+x^4/4}} + \sqrt{1-\frac{1}{1+x^2}}.\sqrt{1-\frac{x^2}{1+x^4/4}}] - m.\ddot{x}.\sqrt{1+x^2} - m.\frac{\dot{x}^2.x}{\sqrt{1+x^2}} = 0$$

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + (\sqrt{x^4/4+1} - a).[\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.\frac{x}{\sqrt{1+x^4/4}} + \sqrt{1-\frac{1}{1+x^2}}.\sqrt{1-\frac{x^2}{1+x^4/4}}] - \ddot{x}.\sqrt{1+x^2} - \frac{\dot{x}^2.x}{\sqrt{1+x^2}} = 0$$

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + (\sqrt{x^4/4+1} - a).[\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.\frac{x}{\sqrt{1+x^4/4}} + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.\sqrt{\frac{x^4/4-x^2+1}{1+x^4/4}}] - \ddot{x}.\sqrt{1+x^2} - \frac{\dot{x}^2.x}{\sqrt{1+x^2}} = 0$$

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + [\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{x.\sqrt{x^4/4-x^2+1}}{\sqrt{1+x^2}}] - a.[\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.\frac{x}{\sqrt{1+x^4/4}} + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.\sqrt{\frac{x^4/4-x^2+1}{1+x^4/4}}] - \ddot{x}.\sqrt{1+x^2} - \frac{\dot{x}^2.x}{\sqrt{1+x^2}} = 0$$

$$\frac{x}{1+x^2} + [\frac{x}{1+x^2} + \frac{x.\sqrt{x^4/4-x^2+1}}{1+x^2}] - a.[\frac{x}{(1+x^2).\sqrt{1+x^4/4}} + \frac{x.\sqrt{x^4/4-x^2+1}}{(1+x^2).\sqrt{1+x^4/4}}] - \ddot{x} - \frac{\dot{x}^2.x}{1+x^2} = 0$$

$$\frac{2x+x.\sqrt{x^4/4-x^2+1}-\dot{x}^2.x}{1+x^2} - a.\frac{x+x.\sqrt{x^4/4-x^2+1}}{(1+x^2).\sqrt{1+x^4/4}} - \ddot{x} = 0$$

$$-\frac{2x+x.\sqrt{x^4/4-x^2+1}-\dot{x}^2.x}{1+x^2} + a.\frac{x+x.\sqrt{x^4/4-x^2+1}}{(1+x^2).\sqrt{1+x^4/4}} + \ddot{x} = 0$$

$$-\frac{2x+x.\sqrt{(x^2/2-1)^2}-\dot{x}^2.x}{1+x^2} + a.\frac{x+x.\sqrt{(x^2/2-1)^2}}{(1+x^2).\sqrt{1+x^4/4}} + \ddot{x} = 0$$

$$\boxed{\frac{-x^3/2-x+\dot{x}^2x}{1+x^2} + \frac{a.x^3}{2(1+x^2).\sqrt{1+x^4/4}} + \ddot{x} = 0}$$

1.5.2 Equa diff de Charles

On calcule maintenant l'équatio ndifférentielle du système en s'aidant des résultats précédents.
On part de l'équation $P_t + T_t = ma_t$
avec $T_t = k(l - l_0)$ et $P_t = -mg$
En développant les expression on obtient :
$k(\sqrt{x^4/4+1} - l_0) \times \frac{x^3}{2\sqrt{x^4/4+1}\sqrt{1+x^2}} - mg\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = m(\ddot{x}\sqrt{1+x^2} + \frac{\ddot{x}^2 x}{\sqrt{1+x^2}})$
$\frac{k}{m}(\frac{x^3}{2\sqrt{1+x^2}} - \frac{x^3 \times l_0}{2\sqrt{x^4/4+1}\sqrt{1+x^2}}) - \frac{xg}{\sqrt{1+x^2}} - \ddot{x}\sqrt{1+x^2} - \frac{\dot{x}^2 x}{\sqrt{1+x^2}} = 0$
En prenant k=m, g=1 et $a = l_0$ (données de l'énonce), on obtient :
$-\frac{x^3}{2\sqrt{1+x^2}} + \frac{x^3 \times a}{2\sqrt{x^4/4+1}\sqrt{1+x^2}} + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \ddot{x}\sqrt{1+x^2} + \frac{\dot{x}^2 x}{\sqrt{1+x^2}} = 0$
$(-\frac{x^3}{2} + x)\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} + \frac{x^3 \times a}{2\sqrt{x^4/4+1}\sqrt{1+x^2}} + \ddot{x}\sqrt{1+x^2} + \frac{\dot{x}^2 x}{\sqrt{1+x^2}} = 0$
$(-\frac{x^3}{2} + x)\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} + \frac{x^3 \times a}{2\sqrt{x^4/4+1}\sqrt{1+x^2}} + \ddot{x}\sqrt{1+x^2} + \frac{\dot{x}^2 x}{\sqrt{1+x^2}} = 0$
$(-\frac{x^3}{2} + x)\frac{1}{1+x^2} + \frac{x^3 \times a}{2\sqrt{x^4/4+1(1+x^2)}} + \ddot{x} + \frac{\dot{x}^2 x}{\sqrt{1+x^2}} = 0$

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{\dot{x}^2 x - x^3/2 - x}{1+x^2} + \frac{x^3 \times a}{2\sqrt{x^4/4+1(1+x^2)}} = 0}$$

2 Dans toute la suite on supposera que g=1, k=m et on notera $a = l_0$ et on s'intéressera particulièrement par l'équation vérifié par x(t).

2.1 Montrer que l'équation est de la forme : (E) $\ddot{x} + f(x, \dot{x}, a) = 0$.

2.2 Déterminer en fonction de a les points d'équilibres du système.

2.3 Quelle est en fonction de a, la nature des points d'équilibres.

3 On suppose que $a = \sqrt{15}$.

3.1 Déterminer la valeur exacte des points d'équilibres du système.

3.2 Déterminer l'intégrale première du système.

3.3 Représenter le portrait de phase.

3.4 Que peut-on en déduire sur le mouvement.

4 On suppose maintenant que $a = \sqrt{3}$ et $x(0) = x_0 > 0$ et $\dot{x}(0) = 0$.

4.1 Calculer et représenter à l'aide de Matlab la période T en fonction de x_0 pour $0 < x_0 < 10$.

5 On suppose maintenant que le système est soumis à une force de frottement $\gamma > 0$ et que l'équation devient : (E) $\ddot{x} + \gamma.\dot{x} + f(x, a) = 0$.

5.1 Représenter le diagramme de Matlab le diagramme de bifurcation en (a, γ) pour chacun des points d'équilibres.

5.2 On suppose que $a = \sqrt{15}$. Pour quelles valeurs (exactes) de γ les points d'équilibres attractifs changent-ils de nature.

5.3 Représenter le portrait de phase pour $\gamma = 1, \gamma = 2, \gamma = 3$.