Simulation 6

(a)

$$g(y) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda y}, & y > 0 \\ 0, & y < 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} G(a), & x = a \\ \lambda e^{-\lambda x}, & a < x < b \\ (1 - G(b)) + g(b), & x = b \end{cases}$$

$G(y)$ is the cdf of $g(y)$.

$$G(y) = \int_{-\infty}^{y} g(y) \cdot dy$$

$$= \int_{0}^{y} g(y) \cdot dy$$

$$= \int_{0}^{y} \lambda e^{-\lambda y} \cdot dy$$

$$= \lambda \left. \frac{e}{-\lambda} \right]_0$$

$$= \lambda \left[\frac{e^{-\lambda y}}{-\lambda} - \frac{1}{-\lambda} \right]$$

$$= \lambda \left[\frac{1 - e^{-\lambda y}}{\lambda} \right]$$

$$= 1 - e^{-\lambda y}$$

$$G(a) = 1 - e^{-\lambda a}$$

$$G(b) = 1 - e^{-\lambda b}$$

$$1 - G(b) = 1 - \left(1 - e^{-\lambda b}\right)$$

$$= e^{-\lambda b}$$

$$= e^{-\lambda b}$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda a}, & x = a \\ \lambda e^{-\lambda x}, & a < x < b \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ldots \\ e^{-\lambda b}, & x = b \end{cases}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = 1 - e^{-\lambda a} + \int_a^b \lambda e^{-\lambda x}\,dx + e^{-\lambda b}$$

$$= 1 - e^{-\lambda a} + \lambda \left. \frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda} \right]_a^b + e^{-\lambda b}$$

$$= 1 - e^{-\lambda a} + \lambda \left[\frac{e^{-\lambda b}}{-\lambda} - \frac{e^{-\lambda a}}{-\lambda} \right] + e^{-\lambda b}$$

$$= 1 - e^{-\lambda a} + \lambda \left[\frac{e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}}{\lambda} \right] + e^{-\lambda b}$$

$$= 1 - e^{-\lambda a} + e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b} + e^{-\lambda b}$$

$$= 1$$

The above steps shows that the function I derived is right.

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda a}, & x = a \\ 1 - e^{-\lambda a} + \int^{x} \lambda e^{-\lambda x}\,dx, & a < x < b \end{cases}$$

$$F(x) \quad \begin{cases} 1-e^{\cdots} + \int_a \lambda e^{\cdots} \\ 1, \quad x=b \end{cases}$$

$$\int_a^x \lambda e^{-\lambda x} \cdot dx = \lambda \left. \frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda} \right]_a^x$$

$$= \lambda \left[\frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda} - \frac{e^{-\lambda a}}{-\lambda} \right]$$

$$= \lambda \left[\frac{e^{-\lambda a} - e^{-\lambda x}}{\lambda} \right]$$

$$= e^{-\lambda a} - e^{-\lambda x}$$

$$F(x) = \begin{cases} 1-e^{-\lambda a}, & x=a \\ 1-e^{-\lambda x}, & a<x<b \\ 1, & x=b \end{cases}$$

$$F(x) = R$$

$$\Rightarrow X = F^{-1}(R)$$

$$x=a: \quad 1-e^{-\lambda a} = R$$

$$\Rightarrow R = 1-e^{-\lambda a}, \quad x=a$$