Конспект по Матлогу. Часть 1

Штукенберг Дмитрий

под редакцией Чепелина Вячеслава

Содержание

1 Лекция 5.

1.1 Введение в исчисление предикатов

def: **Силлогизм** — «подытоживание, подсчёт, умозаключение»

def: **Категорический** — потому, что речь идёт о категориях (в философском смысле).

Определяем некоторые стандартные мыслительные блоки, с которыми у образованной аудитории есть навык работы. Цель — сделать неформальный человеческий язык чуть более формальным. Где важно: научный трактат, диспут, для исключения ошибок в рассуждениях.

Язык рассуждений понимается единым, без разделения на язык исследователя и предметный.

Пример категорического силлогизма:

$$\frac{\text{Каждый человек смертен} \qquad \text{Сократ есть человек}}{\text{Сократ смертен}}$$

Категорический силллогизм соединяет три термина:

предикат (больший термин, P)
субъект (меньший термин, S)
средний термин (M).

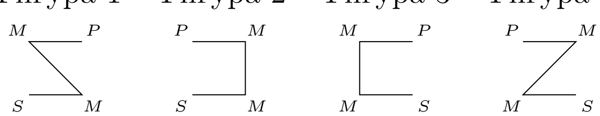
На основании соотношений P и M, а также M и S строим соотношение P и S.

Возможные соотношения:

A	Affirmato (общеутвердительное)	Матан есть раздел математики (SaP)
I	affIrmato (частноутвердительное)	Некоторые разделы математики сложны (SiP)
E	nEgo (общеотрицательное)	Никакой человек не знает всю математику
O	negO (частноотрицательное)	Некоторые разделы математики — не матан

def: Каждому силогизму соответствует **фигура**

	Фигура 1	Фигура 2	Фигура 3	Фигура 4



Большая посылка:	M—P	P—M	M—P	P—M
Меньшая посылка:	S—M	S—M	M—S	M—S
Заключение:	S—P	S—P	S—P	S—P

Расстановка соотношений вместо «—» в фигуре — модус. Например, тут — фигура 1, aaa.

$$\frac{\text{Каждый человек смертен} \qquad \text{Сократ есть человек}}{\text{Сократ смертен}}$$

Как этим пользоваться: по умозаключению (на русском языке) определяем, где в нём P, M, S и каковы между ними соотношения, находим соответствующую фигуру и модус, а дальше определяем силлогизм и его свойства в соответствии со следующими правилами.

Не все модусы осмысленны, большинство некорректно. Например фигура 1, aae:

$$\frac{\text{Каждый человек смертен} \qquad \text{Сократ есть человек}}{\text{Сократ не есть смертен}}$$

Список всех правильных модусов (из них выделяют *слабые*, выводящие частное соотношение при возможности общего — указаны курсивом):

Фигура 1	Фигура 2	Фигура 3	Фигура 4
Barbara	Cesare	Darapti	Bramantip
Celarent	Camestres	Disamis	Camenes
Darii	Festino	Datisi	Dimaris
Ferio	Baroco	Felapton	Fesapo
Barbari	*Cesaro*	Bocardo	Fresison
Celaront	*Camestros*	Ferison	*Camenos*

Некоторые модусы требуют непустоты M: это все слабые модусы и четыре сильных (указаны серым), например Darapti:

$$\frac{\text{Все единороги имеют рог} \qquad \text{Все единороги суть лошади}}{\text{Некоторые лошади имеют рог}}$$

Ограничения языка исчисления высказываний:

$$\frac{\text{Каждый человек смертен} \qquad \text{Сократ есть человек}}{\text{Сократ смертен}}$$

Цель: увеличить формализованную часть метаязыка.

Мы неформально знакомы с предикатами ($P : D \to V$) и кванторами ($\forall x.H(x) \to S(x)$).

$$\frac{\forall x.H(x) \to S(x) \qquad H(\text{Сократ})}{S(\text{Сократ})}$$

1.2 Язык исчисления предикатов

Пример:

$$\forall x.\sin x = 0 \lor (\sin x)^2 + 1 > 1$$

1. Предметные (здесь: числовые) выражения
   (a) Предметные переменные (x).
   (b) Одно- и двухместные функциональные символы «синус», «возведение в квадрат» и «сложение».
   (c) Нульместные функциональные символы «ноль» (0) и «один» (1).
2. Логические выражения
   (a) Предикатные символы «равно» и «больше»

1.2.1 Формальное определение

1. Два типа: предметные и логические выражения.
2. Предметные выражения: метапеременная θ.
   - Предметные переменные: a, b, c, $\dots$, метапеременные x, y.
   - Функциональные выражения: $f(\theta_1, \dots, \theta_n)$, метапеременные f, g, $\dots$
   - Примеры: r, $q(p(x, s), r)$.
3. Логические выражения: метапеременные α, β, γ, $\dots$
   - Предикатные выражения: $P(\theta_1, \dots, \theta_n)$, метапеременная P. Имена: A, B, C, $\dots$
   - Связки: $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \,\&\, \psi)$, $(\varphi \to \psi)$, $(\neg\varphi)$.
   - Кванторы: $(\forall x.\varphi)$ и $(\exists x.\varphi)$.

Сокращение записи и метаязык:

1. Метапеременные:
   - ψ, ϕ, π, $\dots$ — формулы
   - P, Q, $\dots$ — предикатные символы
   - θ, $\dots$ — термы
   - f, g, $\dots$ — функциональные символы
   - x, y, $\dots$ — предметные переменные
2. Скобки — как в И.В.; квантор — жадный:
$$(\forall a.\, \underbrace{A \vee B \vee C \to \exists b.\, \underbrace{D \,\&\, \neg E}_{\exists b.\dots}}_{\forall a.\dots}) \,\&\, F$$
3. Дополнительные обозначения при необходимости:
   - $(\theta_1 = \theta_2)$ вместо $E(\theta_1, \theta_2)$
   - $(\theta_1 + \theta_2)$ вместо $p(\theta_1, \theta_2)$
   - 0 вместо z
   - $\dots$

1.3 Теория моделей исчисления предикатов

Напомним формулу:
$$\forall x. \sin x = 0 \vee (\sin x)^2 + 1 > 1$$

Без синтаксического сахара:
$$\forall x.E(s(x), z) \;\vee\; G(p(q(s(x)), o), o)$$
$$\forall x.E(s(x), z) \vee G(p(q(s(x)), o), o)$$
$$\forall x.E(s(x), z) \vee G(p(q(s(x)), o), o)$$
$$\forall x.E(s(x), z) \vee G(p(q(s(x)), o), o)$$

1. Истинностные (логические) значения:
   (a) предикаты (в том числе пропозициональные переменные = нульместные предикаты);
   (b) логические связки и кванторы.
2. Предметные значения:
   (a) предметные переменные;
   (b) функциональные символы (в том числе константы = нульместные функциональные символы)

1.3.1 Оценка исчисления предикатов

def: Оценка — упорядоченная четвёрка $\langle D, F, P, E\rangle$, где:

1. $D \neq \varnothing$ — предметное множество;
2. F — оценка для функциональных символов; пусть f_n — n-местный функциональный символ:
$$F_{f_n} : D^n \to D$$
3. P — оценка для предикатных символов; пусть T_n — n-местный предикатный символ:
$$P_{T_n} : D^n \to V \qquad V = \{\text{И}, \text{Л}\}$$
4. E — оценка для предметных переменных.
$$E(x) \in D$$

Запись и сокращения записи подобны исчислению высказываний:

$$[\![\phi]\!] \in V, \quad [\![Q(x, f(x)) \vee R]\!]^{x:=1, f(t):=t^2, R:=\text{И}} = \text{И}$$

1. Правила для связок $\vee$, $\&$, $\neg$, $\to$ остаются прежние;
2. $$[\![f_n(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)]\!] = F_{f_n}([\![\theta_1]\!], [\![\theta_2]\!], \dots, [\![\theta_n]\!])$$
3. $$[\![P_n(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)]\!] = P_{T_n}([\![\theta_1]\!], [\![\theta_2]\!], \dots, [\![\theta_n]\!])$$
4. $$[\![\forall x.\phi]\!] = \begin{cases} \text{И}, & \text{если } [\![\phi]\!]^{x:=t} = \text{И при всех } t \in D \\ \text{Л}, & \text{если найдётся } t \in D, \text{ что } [\![\phi]\!]^{x:=t} = \text{Л} \end{cases}$$
5. $$[\![\exists x.\phi]\!] = \begin{cases} \text{И}, & \text{если найдётся } t \in D, \text{ что } [\![\phi]\!]^{x:=t} = \text{И} \\ \text{Л}, & \text{если } [\![\phi]\!]^{x:=t} = \text{Л при всех } t \in D \end{cases}$$

Пример: Оценим:
$$[\![\forall a.\exists b.\neg a + 1 = b]\!]$$

1.3.2 Общезначимость и свободные переменные

def: Формула исчисления предикатов **общезначима**, если истинна при любой оценке:

$$\models \phi$$

То есть истинна при любых D, F, P и E.

Пример:

$$[\![\forall x.Q(f(x)) \lor \neg Q(f(x))]\!] = \text{И}$$

Доказательство:

Фиксируем D, F, P, E. Пусть $x \in D$. Обозначим $P_Q(F_f(E_x))$ за t. Ясно, что $t \in V$. Разберём случаи.

- Если $t = \text{И}$, то $[\![Q(f(x))]\!]^{Q(f(x)):=t} = \text{И}$, потому $[\![Q(f(x)) \lor \neg Q(f(x))]\!]^{Q(f(x)):=t} = \text{И}$
- Если $t = \text{Л}$, то $[\![\neg Q(f(x))]\!]^{Q(f(x)):=t} = \text{И}$, потому всё равно $[\![Q(f(x)) \lor \neg Q(f(x))]\!]^{Q(f(x)):=t} = \text{И}$

def: **Вхождение подформулы** в формулу — это позиция первого символа этой подформулы в формуле.

$$\text{Вхождения } x \text{ в формулу:} \quad (\forall x.A(x) \lor \exists x.B(x)) \lor C(x)$$

def: Рассмотрим формулу $\forall x.\psi$ (или $\exists x.\psi$). Здесь переменная x **связана** в ψ. Все вхождения переменной x в ψ — связанные.

def: Вхождение x в ψ **свободное**, если не находится в области действия никакого квантора по x. Переменная входит свободно в ψ, если имеет хотя бы одно свободное вхождение. $FV(\psi), FV(\Gamma)$ — множества свободных переменных в ψ, в Γ

Пример:

$$\psi[x := \theta] := \begin{cases} \psi, & \psi \equiv y, y \not\equiv x \\ \psi, & \psi \equiv \forall x.\pi \text{ или } \psi \equiv \exists x.\pi \\ \pi[x := \theta] \star \rho[x := \theta], & \psi \equiv \pi \star \rho \\ \theta, & \psi \equiv x \\ \forall y.\pi[x := \theta], & \psi \equiv \forall y.\pi \text{ и } y \not\equiv x \\ \exists y.\pi[x := \theta], & \psi \equiv \exists y.\pi \text{ и } y \not\equiv x \end{cases}$$

def: Терм θ <u>**свободен для подстановки вместо** x</u> в ψ ($\psi[x := \theta]$), если ни одно свободное вхождение переменных в θ не станет связанным после подстановки.

Свобода есть	Свободы нет
$(\forall x.P(y))[y := z]$	$(\forall x.P(y))[y := x]$
$(\forall y.\forall x.P(x))[x := y]$	$(\forall y.\forall x.P(t))[t := y]$

1.4 Теория доказательств исчисления предикатов

Рассмотрим язык исчисления предикатов. Возьмём все схемы аксиом классического исчисления высказываний и добавим ещё две схемы аксиом (здесь везде θ свободен для подстановки вместо x в φ):

11. $(\forall x.\varphi) \rightarrow \varphi[x := \theta]$
12. $\varphi[x := \theta] \rightarrow \exists x.\varphi$

Добавим ещё два правила вывода (здесь везде x не входит свободно в φ):

$$\frac{\varphi \rightarrow \psi}{\varphi \rightarrow \forall x.\psi} \text{ Правило для } \forall$$

$$\frac{\psi \rightarrow \varphi}{(\exists x.\psi) \rightarrow \varphi} \text{ Правило для } \exists$$

def: Доказуемость, выводимость, полнота, корректность — аналогично исчислению высказываний.

1.5 Теоремы о исчислении предикатов

1.5.1 Теорема о дедукции

Если $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$, то $\Gamma, \alpha \vdash \beta$. Если $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ и в доказательстве не применяются правила для кванторов по свободным переменным из α, то $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$.

Доказательство:

$(\Rightarrow)$ — как в КИВ $(\Leftarrow)$ — та же схема, два новых случая.

Перестроим: $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n \equiv \beta$ в $\alpha \rightarrow \delta_1, \alpha \rightarrow \delta_2, \ldots, \alpha \rightarrow \delta_n$.

Дополним: обоснуем $\alpha \rightarrow \delta_n$, если предыдущие уже обоснованы.

Два новых похожих случая: правила для $\forall$ и $\exists$. Рассмотрим $\forall$.

Доказываем (n) $\alpha \rightarrow \psi \rightarrow \forall x.\varphi$ (правило для $\forall$), значит, доказано (k) $\alpha \rightarrow \psi \rightarrow \varphi$.

$(n - 0.9)$	$(\alpha \rightarrow \psi \rightarrow \varphi) \rightarrow (\alpha \,\&\, \psi) \rightarrow \varphi$	Т. о полноте КИВ
$(n - 0.6)$	$(\alpha \,\&\, \psi) \rightarrow \varphi$	М.Р. k,$n - 0.8$
$(n - 0.4)$	$(\alpha \,\&\, \psi) \rightarrow \forall x.\varphi$	Правило для $\forall$, $n - 0.6$
$(n - 0.3)$	$((\alpha \,\&\, \psi) \rightarrow \forall x.\varphi) \rightarrow (\alpha \rightarrow \psi \rightarrow \forall x.\varphi)$	Т. о полноте КИВ
(n)	$\alpha \rightarrow \psi \rightarrow \forall x.\varphi$	М.Р. $n - 0.4$, $n - 0.2$

Q.E.D.

def: $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n \models \alpha$, если α выполнено всегда, когда выполнено $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$.

Теорема

Если $\Gamma \vdash \alpha$ и в доказательстве не используются кванторы по свободным переменным из Γ, то $\Gamma \models \alpha$

1.5.2 Корректность подстановки

Теорема.

Если θ свободен для подстановки вместо x в φ, то $[\![\varphi]\!]^{x:=[\![\theta]\!]} = [\![\varphi[x := \theta]]\!]$

Доказательство (индукция по структуре φ)

- База: φ не имеет кванторов. Очевидно.
- Переход: пусть справедливо для ψ. Покажем для $\varphi = \forall y.\psi$.
  - $x = y$ либо $x \notin FV(\psi)$. Тогда: $[\![\forall y.\psi]\!]^{x:=[\![\theta]\!]} = [\![\forall y.\psi]\!] = [\![(\forall y.\psi)[x := \theta]]\!]$
  - $x \neq y$. Тогда: $[\![\forall y.\psi]\!]^{x:=[\![\theta]\!]} = [\![\psi]\!]^{y\in D;x:=[\![\theta]\!]} = \dots$

    Свобода для подстановки: $y \notin \theta$.

    $$\dots = [\![\psi]\!]^{x:=[\![\theta]\!];y\in D} = \dots$$

    Индукционное предположение.

    $$\dots = [\![\psi[x := \theta]]\!]^{y\in D} = [\![\forall y.(\psi[x := \theta])]\!] = \dots$$

    Но $\forall y.(\psi[x := \theta]) \equiv (\forall y.\psi)[x := \theta]$ (как текст). Отсюда:

    $$\dots = [\![(\forall y.\psi)[x := \theta]]\!]$$

1.5.3 Корректность исчисления предикатов

Теорема. Если $\Gamma \vdash \alpha$ и в доказательстве не используются кванторы по свободным переменным из $FV(\Gamma)$, то $\Gamma \models \alpha$

Доказательство:

Фиксируем D, F, P. Индукция по длине доказательства α: при любом E выполнено $\Gamma \models \alpha$ при длине доказательства n, покажем для $n + 1$.

- Схемы аксиом (1)..(10), правило М.Р.: аналогично И.В.
- Схемы (11) и (12), например, схема $(\forall x.\varphi) \to \varphi[x := \theta]$:

  $$[\![(\forall x.\varphi) \to \varphi[x := \theta]]\!] = [\![((\forall x.\varphi) \to \varphi)[x := \theta]]\!] = [\![(\forall x.\varphi) \to \varphi]\!]^{x:=[\![\theta]\!]} = \text{И}$$

- Правила для кванторов: например, введение $\forall$:

  Пусть $[\![\psi \to \varphi]\!] = \text{И}$. Причём $x \notin FV(\Gamma)$ и $x \notin FV(\psi)$. То есть, при любом $\S$ выполнено $[\![\psi \to \varphi]\!]^{x:=\S} = \text{И}$. Тогда $[\![\psi \to (\forall x.\varphi)]\!] = \text{И}$.

2 Лекция 6.

2.1 Теорема о полноте

Общая идея доказательства:

1. Надо справиться со слишком большим количеством вариантов. Модель задаётся как $\langle D, F, P, E\rangle$.
2. Для оценки в модели важно только какие формулы истинны. Поэтому факторизуем модели по истинности формул: модели $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ «похожи», если $[\![\varphi]\!]_{\mathcal{M}_1} = [\![\varphi]\!]_{\mathcal{M}_2}$ при всех φ.
3. Поступим так:
   (a) построим эталонное множество моделей $\mathfrak{M}$, каждая модель из него соответствует какому-то своему классу эквивалентности моделей;
   (b) докажем полноту $\mathfrak{M}$: если каждая $\mathcal{M} \in \mathfrak{M}$ предполагает $\mathcal{M} \models \varphi$, то $\vdash \varphi$;
   (c) заметим, что если $\models \varphi$, то каждая $\mathcal{M} \in \mathfrak{M}$ предполагает $\mathcal{M} \models \varphi$.
4. В ходе доказательства нас ждёт множество технических препятствий.

def: Γ — **непротиворечивое множество формул**, если $\Gamma \not\vdash \alpha \,\&\, \neg\alpha$ для любого α

Примеры:

- непротиворечиво:
  - $\Gamma = \{A \to B \to A\}$
  - $\Gamma = \{P(x, y) \to \neg P(x, y), \forall x.\forall y.\neg P(x, y)\}$;
- противоречиво:
  - $\Gamma = \{P \to \neg P, \neg P \to P\}$

    так как $P \to \neg P, \neg P \to P \;\vdash\; \neg P \,\&\, \neg\neg P$
- и ещё непротиворечиво: $\Gamma = \{P(1), P(2), P(3), \dots\}$

def: Γ — **полное непротиворечивое множество замкнутых бескванторных формул**, если:

1. Γ содержит только замкнутые бескванторные формулы;
2. если α — некоторая замкнутая бескванторная формула, то либо $\alpha \in \Gamma$, либо $\neg\alpha \in \Gamma$.

def: Γ — **полное непротиворечивое множество замкнутых формул**, если:

1. Γ содержит только замкнутые формулы;
2. если α — некоторая замкнутая формула, то либо $\alpha \in \Gamma$, либо $\neg\alpha \in \Gamma$.

Теорема:

Пусть Γ — непротивочивое множество замкнутых (бескванторных) формул. Тогда, какова бы ни была замкнутая (бескванторная) формула φ, хотя бы $\Gamma \cup \{\varphi\}$ или $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ — непротиворечиво

Доказательство:

Пусть это не так и найдутся такие Γ, φ и α, что

$$\begin{aligned}\Gamma, \varphi &\vdash \alpha \,\&\, \neg\alpha \\ \Gamma, \neg\varphi &\vdash \alpha \,\&\, \neg\alpha\end{aligned}$$

Тогда по лемме об исключении гипотезы

$$\Gamma \vdash \alpha \,\&\, \neg\alpha$$

То есть Γ не является непротиворечивым. Противоречие.

Q.E.D.

Теорема.

Пусть Γ — непротиворечивое множество замкнутых (бескванторных) формул. Тогда найдётся полное непротиворечивое множество замкнутых (бескванторных) формул Δ, что $\Gamma \subseteq \Delta$

Доказательство:

1. Занумеруем все формулы (их счётное количество): $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$
2. Построим семейство множеств $\{\Gamma_i\}$:

   $$\Gamma_0 = \Gamma \quad \Gamma_{i+1} = \begin{cases} \Gamma_i \cup \{\varphi_i\}, & \text{если } \Gamma_i \cup \{\varphi_i\} \text{ непротиворечиво} \\ \Gamma_i \cup \{\neg\varphi_i\}, & \text{иначе} \end{cases}$$
3. Итоговое множество
   $$\Delta = \bigcup_i \Gamma_i$$
4. Непротиворечивость Δ не следует из индукции — индукция гарантирует непротиворечивость только Γ_i при натуральном (т.е. *конечном*) i, потому...

Q.E.D.

Завершение доказательства теоремы о полноте

Δ непротиворечиво:

1. Пусть Δ противоречиво, то есть
   $$\Delta \vdash \alpha \,\&\, \neg\alpha$$
2. Доказательство конечной длины и использует конечное количество гипотез $\{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n\} \subset \Delta$, то есть
   $$\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n \vdash \alpha \,\&\, \neg\alpha$$
3. Пусть $\delta_i \in \Gamma_{d_i}$, тогда
   $$\Gamma_{d_1} \cup \Gamma_{d_2} \cup \cdots \cup \Gamma_{d_n} \vdash \alpha \,\&\, \neg\alpha$$
4. Но $\Gamma_{d_1} \cup \Gamma_{d_2} \cup \cdots \cup \Gamma_{d_n} = \Gamma_{\max(d_1, d_2, \ldots, d_n)}$, которое непротиворечиво, и потому
   $$\Gamma_{d_1} \cup \Gamma_{d_2} \cup \cdots \cup \Gamma_{d_n} \nvdash \alpha \,\&\, \neg\alpha$$

Q.E.D

2.2 Модели для множеств формул

def: Моделью для множества формул F назовём такую модель $\mathcal{M}$, что при всяком $\varphi \in F$ выполнено $[\![\varphi]\!]_{\mathcal{M}} = И$.

Альтернативное обозначение: $\mathcal{M} \models \varphi$.

Теорема.

Любое непротиворечивое множество замкнутых бескванторных формул имеет модель.

2.3 Конструкция модели

def: Пусть M — полное непротиворечивое множество замкнутых бескванторных формул. Тогда модель $\mathcal{M}$ задаётся так:

1. D — множество всевозможных предметных выражений без предметных переменных. Оно непусто (язык обычно содержит много нуль-местных функций), но если пусто — добавим туда какое-нибудь одно значение, пусть "z".
2. $[\![f(\theta_1, \ldots, \theta_n)]\!] =$ "f(" $+ [\![\theta_1]\!] +$ "," $+ \cdots +$ "," $+ [\![\theta_n]\!] +$ ")"
3. $[\![P(\theta_1, \ldots, \theta_n)]\!] = \begin{cases} И, & \text{если } P(\theta_1, \ldots, \theta_n) \in M \\ Л, & \text{иначе} \end{cases}$
4. Так как $D \neq \varnothing$, то найдётся $z \in D$. Тогда $[\![x]\!] = z$. Это ничему не помешает, так как формулы замкнуты.

Лемма.

Пусть φ — бескванторная формула, тогда $\mathcal{M} \models \varphi$ тогда и только тогда, когда $\varphi \in M$.

Доказательство (индукция по длине формулы φ)

1. База. φ — предикат. Требуемое очевидно по определению $\mathcal{M}$.
2. Переход. Пусть $\varphi = \alpha \star \beta$ (или $\varphi = \neg\alpha$), причём $\mathcal{M} \models \alpha$ ($\mathcal{M} \models \beta$) тогда и только тогда, когда $\alpha \in M$ ($\beta \in M$).

   Тогда покажем требуемое для каждой связки в отдельности. А именно, для каждой связки покажем два утверждения:

   (a) если $\mathcal{M} \models \alpha \star \beta$, то $\alpha \star \beta \in M$.

   (b) если $\mathcal{M} \not\models \alpha \star \beta$, то $\alpha \star \beta \notin M$.

Q.E.D.

Если $\varphi = \alpha \to \beta$ и для любой формулы ζ, более короткой, чем φ, выполнено $\mathcal{M} \models \zeta$ тогда и только тогда, когда $\zeta \in M$, тогда:

1. если $\mathcal{M} \models \alpha \to \beta$, то $\alpha \to \beta \in M$;
2. если $\mathcal{M} \not\models \alpha \to \beta$, то $\alpha \to \beta \notin M$.

Доказательство (разбором случаев)

1. $\mathcal{M} \models \alpha \to \beta$: $[\![\alpha]\!] = Л$. Тогда по предположению $\alpha \notin M$, потому по полноте $\neg\alpha \in M$. И, поскольку в ИВ $\neg\alpha \vdash \alpha \to \beta$, то $M \vdash \alpha \to \beta$. Значит, $\alpha \to \beta \in M$, иначе по полноте $\neg(\alpha \to \beta) \in M$, что делает M противоречивым.

2. $\mathcal{M} \models \alpha \to \beta$: $[\![\alpha]\!] = \text{И}$ и $[\![\beta]\!] = \text{И}$. Рассуждая аналогично, используя $\alpha, \beta \vdash \alpha \to \beta$, приходим к $\alpha \to \beta \in M$.
3. $\mathcal{M} \not\models \alpha \to \beta$. Тогда $[\![\alpha]\!] = \text{И}$, $[\![\beta]\!] = \text{Л}$, то есть $\alpha \in M$ и $\neg\beta \in M$. Также, $\alpha, \neg\beta \vdash \neg(\alpha \to \beta)$, отсюда $M \vdash \neg(\alpha \to \beta)$. Предположим, что $\alpha \to \beta \in M$, то $M \vdash \alpha \to \beta$ — отсюда $\alpha \to \beta \notin M$.

Завершение доказательства теоремы о существовании модели

Доказательство:

Пусть M — непротиворечивое множество замкнутых бескванторных формул.

По теореме о пополнении существует M' — полное непротиворечивое множество замкнутых бескванторных формул, что $M \subseteq M'$.

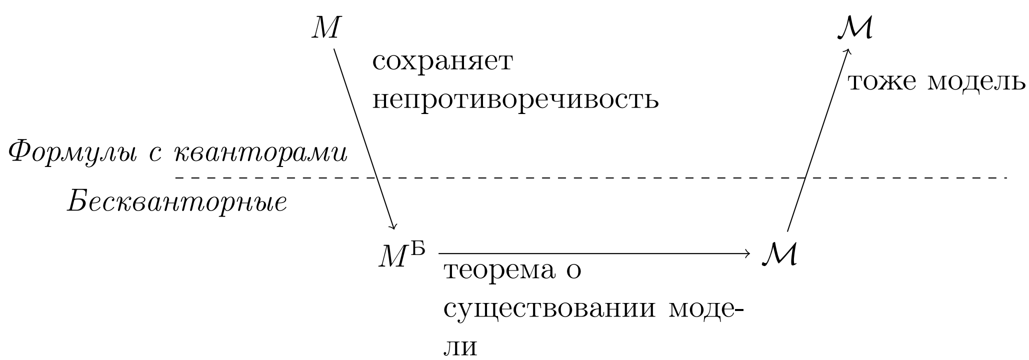
По лемме M' имеет модель, эта модель подойдёт для M.

2.4 Теорема Гёделя о полноте

Теорема Гёделя о полноте исчисления предикатов

Если M — непротиворечивое множество замкнутых формул, то оно имеет модель.

Схема доказательства



def: Формула φ имеет **поверхностные кванторы (находится в предварённой форме)**, если соответствует грамматике

$$\varphi ::= \forall x.\varphi \mid \exists x.\varphi \mid \tau$$

где τ — формула без кванторов

Теорема.

Для любой замкнутой формулы ψ найдётся такая формула φ с поверхностными кванторами, что $\vdash \psi \to \varphi$ и $\vdash \varphi \to \psi$

Индукция по структуре, применение теорем о перемещении кванторов.

Построение M^*

- Пусть M — полное непротиворечивое множество замкнутых формул с поверхностными кванторами (очевидно, счётное). Построим семейство непротиворечивых множеств замкнутых формул M_k.
- Пусть d_i^k — семейство *свежих* констант, в M не встречающихся.

- Индуктивно построим M_k:
  - База: $M_0 = M$
  - Переход: положим $M_{k+1} = M_k \cup S$, где множество S получается перебором всех формул $\varphi_i \in M_k$.
    1. φ_i — формула без кванторов, пропустим;
    2. $\varphi_i = \forall x.\psi$ — добавим к S все формулы вида $\psi[x := \theta]$, где θ — всевозможные замкнутые термы, использующие символы из M_k;
    3. $\varphi_i = \exists x.\psi$ — добавим к S формулу $\psi[x := d_i^{k+1}]$, где d_i^{k+1} — некоторая свежая, ранее не использовавшаяся в M_k, константа.

Лемма. Если M непротиворечиво, то каждое множество из M_k — непротиворечиво

Доказательство по индукции, база очевидна ($M_0 = M$). Переход:

- пусть M_k непротиворечиво, но M_{k+1} — противоречиво: $M_k, M_{k+1} \setminus M_k \vdash A \,\&\, \neg A$.
- Тогда (т.к. доказательство finite длины): $M_k, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n \vdash A \,\&\, \neg A$, где $\gamma_i \in M_{k+1} \setminus M_k$.
- По теореме о дедукции: $M_k \vdash \gamma_1 \to \gamma_2 \to \cdots \to \gamma_n \to A \,\&\, \neg A$.
- Научимся выкидывать первую посылку: $M_k \vdash \gamma_2 \to \cdots \to \gamma_n \to A \,\&\, \neg A$.
- И по индукции придём к противоречию: $M_k \vdash A \,\&\, \neg A$.

Q.E.D.

Лемма. Если $M_k \vdash \gamma \to W$ и $\gamma \in M_{k+1} \setminus M_k$, то $M_k \vdash W$.

Доказательство:

Покажем, как дополнить доказательство до $M_k \vdash W$, в зависимости от происхождения γ:

- Случай $\forall x.\varphi$: $\gamma = \varphi[x := \theta]$.

  Допишем в конец доказательства:

$\forall x.\varphi$	(гипотеза)
$(\forall x.\varphi) \to (\varphi[x := \theta])$	(сх. акс. 11)
γ	(M.P.)
W	(M.P.)

- Случай $\exists x.\varphi$: $\gamma = \varphi[x := d_i^{k+1}]$

  Перестроим доказательство $M_k \vdash \gamma \to W$: заменим во всём доказательстве d_i^{k+1} на y. Коллизий нет: под квантором d_i^{k+1} не стоит, переменной не является. Получим доказательство $M_k \vdash \gamma[d_i^{k+1} := y] \to W$ и дополним его:

$\varphi[x := y] \to W$	$\varphi[x := d_i^{k+1}][d_i^{k+1} := y]$
$(\exists y.\varphi[x := y]) \to W$	y не входит в W
$(\exists x.\varphi) \to (\exists y.\varphi[x := y])$	доказуемо (упражнение)
$\ldots$	
$(\exists x.\varphi) \to W$	доказуемо как $(\alpha \to \beta) \to (\beta \to \gamma) \vdash \alpha \to \gamma$
$\exists x.\varphi$	гипотеза
W	

Q.E.D.

def: $M^* = \bigcup_k M_k$

Теорема M^* непротиворечиво.

Доказательство:

От противного: доказательство противоречия конечной длины, гипотезы лежат в максимальном M_k, тогда M_k противоречив.

def: $M^{\text{Б}}$ — множество всех бескванторных формул из M^*.

По непротиворечивому множеству M можем построить $M^{\text{Б}}$ и для него построить модель $\mathcal{M}$. Покажем, что эта модель годится для M^* (и для M, так как $M \subset M^*$).

Лемма. $\mathcal{M}$ есть модель для M^*.

Доказательство Покажем, что при $\varphi \in M^*$ выполнено $\mathcal{M} \models \varphi$. Докажем индукцией по количеству кванторов в φ.

- База: φ без кванторов. Тогда $\varphi \in M^{\text{Б}}$, отсюда $\mathcal{M} \models \varphi$ по построению $\mathcal{M}$.
- Переход: пусть утверждение выполнено для всех формул с n кванторами. Покажем, что это выполнено и для $n+1$ кванторов.
  - Рассмотрим $\varphi = \exists x.\psi$, случай квантор всеобщности — аналогично.
  - Раз $\exists x.\psi \in M^*$, то существует k, что $\exists x.\psi \in M_k$.
  - Значит, $\psi[x := d_i^{k+1}] \in M_{k+1}$.
  - По индукционному предположению, $\mathcal{M} \models \psi[x := d_i^{k+1}]$ — в формуле n кванторов.
  - Но тогда $[\![\psi]\!]^{x:=[\![d_i^{k+1}]\!]} = \text{И}$.
  - Отсюда $\mathcal{M} \models \exists x.\psi$.

Q.E.D.

Формулировка и доказательство теоремы Гёделя

Теорема Гёделя о полноте исчисления предикатов

Если M — замкнутое непротиворечивое множество формул, то оно имеет модель.

Доказательство:

- Построим по M множество формул с поверхностными кванторами M'.
- По M' построим непротиворечивое множество замкнутых бескванторных формул $M^{\text{Б}}$ ($M^{\text{Б}} \subseteq M^*$, теорема о непротиворечивости M^*).
- Дополним его до полного, построим для него модель $\mathcal{M}$ (теорема о существовании модели).
- $\mathcal{M}$ будет моделью и для M' ($M' \subseteq M^*$, лемма о модели для M^*), и, очевидно, для M.

2.5 Полнота исчисления предикатов

Следствие из теоремы Гёделя о полноте Исчисление предикатов полно.

Доказательство:

- Пусть это не так, и существует формула φ, что $\models \varphi$, но $\nvdash \varphi$.
- Тогда рассмотрим $M = \{\neg\varphi\}$.
- M непротиворечиво: если $\neg\varphi \vdash A \mathbin{\&} \neg A$, то $\vdash \varphi$ (упражнение).
- Значит, у M есть модель $\mathcal{M}$, и $\mathcal{M} \models \neg\varphi$.
- Значит, $[\![\neg\varphi]\!] = \text{И}$, поэтому $[\![\varphi]\!] = \text{Л}$, поэтому $\not\models \varphi$. Противоречие.

2.6 Непротиворечивость исчисления предикатов

Теорема. Если у множества формул M есть модель $\mathcal{M}$, оно непротиворечиво.

Доказательство:

Пусть противоречиво: $M \vdash A\&\neg A$, в доказательстве использованы гипотезы $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$. Тогда $\vdash \delta_1 \to \delta_2 \to \cdots \to \delta_n \to A \mathbin{\&} \neg A$, то есть $[\![\delta_1 \to \delta_2 \to \cdots \to \delta_n \to A \mathbin{\&} \neg A]\!] = \text{И}$ (корректность). Поскольку все $[\![\delta_i]\!]_{\mathcal{M}} = \text{И}$, то и $[\![A \mathbin{\&} \neg A]\!]_{\mathcal{M}} = \text{И}$ (анализ таблицы истинности импликации). Однако $[\![A \mathbin{\&} \neg A]\!] = \text{Л}$. Противоречие.

Следствие: Исчисление предикатов непротиворечиво

Доказательство:

Рассмотрим $M = \varnothing$ и любую классическую модель.

Доказательства опираются на непротиворечивость метатеории.

Q.E.D.

2.7 Теорема Гёделя о компактности

Если Γ — некоторое семейство бескванторных формул, то Γ имеет модель тогда и только тогда, когда любое его конечное подмножество имеет модель.

Доказательство:

($\Rightarrow$): очевидно

($\Leftarrow$): пусть каждое конечное подмножество имеет модель. Тогда Γ непротиворечиво:

Иначе для любой σ выполнено $\Gamma \vdash \sigma$. В частности, для $\gamma \in \Gamma$ выполнено $\Gamma \vdash \neg\gamma$. Доказательство имеет конечную длину и использует конечное количество формул $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in \Gamma$. Тогда рассмотрим $\Sigma = \{\gamma, \gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$ и модель $\mathcal{S}$ для неё. Тогда:

1. $\models_S \gamma$ (определение модели)
2. $\models_S \neg\gamma$ (теорема о корректности: $\Sigma \vdash \neg\gamma$, значит $\Sigma \models \neg\gamma$ в любой модели)

Значит, Γ имеет модель (вспомогательная теорема к теореме Гёделя о полноте).

Q.E.D.

3 Лекция 7:

3.1 Машина Тьюринга

def: Машина Тьюринга:

1. Внешний алфавит $q_1, \ldots, q_n$, выделенный символ-заполнитель q_ε
2. Внутренний алфавит (состояний) $s_1, \ldots, s_k$; s_s — начальное, s_f — допускающее, s_r — отвергающее.
3. Таблица переходов $\langle k, s\rangle \Rightarrow \langle k', s', \leftrightarrow\rangle$

def: Состояние машины Тьюринга:

1. Бесконечная лента с символом-заполнителем q_ε, текст конечной длины.
2. Головка над определённым символом.
3. Символ состояния (состояние в узком смысле) — символ внутреннего алфавита.

Машина, меняющая все 0 на 1, а все 1 — на 0.

1. Внешний алфавит $\varepsilon, 0, 1$.
2. Внутренний алфавит s_s, s_f (начальное и допускающее состояния соответственно).
3. Переходы:

	ε	0	1
s_s	$\langle s_f, \varepsilon, \cdot\rangle$	$\langle s_s, 1, \rightarrow\rangle$	$\langle s_s, 0, \rightarrow\rangle$
s_f	$\langle s_f, \varepsilon, \cdot\rangle$	$\langle s_f, 0, \cdot\rangle$	$\langle s_f, 1, \cdot\rangle$

def: **Язык** — множество строк

def: Язык L **разрешим**, если существует машина Тьюринга, которая для любого слова w переходит в допускающее состояние, если $w \in L$, и в отвергающее, если $w \notin L$.

3.1.1 Неразрешимость задачи останова

def: Рассмотрим все возможные описания машин Тьюринга. Составим упорядоченные пары: описание машины Тьюринга и входная строка. Из них выделим язык останавливающихся на данном входе машин Тьюринга.

Теорема

Язык всех останавливающихся машин Тьюринга неразрешим

Доказательство:

От противного. Пусть $S(x, y)$ — машина Тьюринга, определяющая, остановится ли машина x, примененная к строке y.

W(x) = if (S(x,x)) { while (true); return 0; } else { return 1; }

Что вернёт $S(code(W), code(W))$?

Q.E.D.

Кодируем состояния:

1. внешний алфавит: n 0-местных функциональных символов $q_1, \ldots, q_n$; q_ε — символ-заполнитель.

2. список: ε и $c(l, s)$; «abc» представим как $c(q_a, c(q_b, c(q_c, \varepsilon)))$.
3. положение головки: «$ab\underline{p}q$» как $(c(q_b, c(q_a, \varepsilon)), c(q_p, c(q_q, \varepsilon)))$.
4. внутренний алфавит: k 0-местных функциональных символов $s_1, \ldots, s_k$. Из них выделенные s_s — начальное и s_f — допускающее состояние.

Достижимые состояния:

Предикатный символ $F_{x,y}(w_l, w_r, s)$: если у машины x с начальной строкой y состояние s достижимо на строке $rev(w_l)@w_r$.

Будем накладывать условия: семейство формул C_m.

Очевидно, начальное состояние достижимо:

$$C_0 := F_{x,y}(\varepsilon, y, s_s)$$

Кодируем переходы:

1. Занумеруем переходы.
2. Закодируем переход m:

$$\langle k, s\rangle \Rightarrow \langle k', s', \rightarrow\rangle, \text{ в случае } q_k \neq q_\varepsilon$$

   $C_m = \forall w_l.\forall w_r.F_{x,y}(w_l, c(q_k, w_r), s_s) \rightarrow F_{x,y}(c(q_{k'}, w_l), w_r, s_{s'})$
   (здесь требуется, чтобы под головкой находился непустой символ q_k, потому мы обязательно требуем, чтобы лента была непуста)
3. Переход посложнее:

$$\langle k, s\rangle \Rightarrow \langle k', s', \leftarrow\rangle, \text{ в случае } q_k \neq q_\varepsilon$$

   $C_m = \forall w_l.\forall w_r.\forall t.F_{x,y}(c(t, w_l), c(q_k, w_r), s_s) \rightarrow F_{x,y}(w_l, c(t, c(q_{k'}, w_r)), s_{s'}) \& \forall w_l.\forall w_r.F_{x,y}(\varepsilon, c(q_k, w_r), s_s) \rightarrow F_{x,y}(\varepsilon, c(q_\varepsilon, c(q_{k'}, w_r)), s_{s'})$
4. и т.п.

Итоговая формула:

$$C = C_0 \,\&\, C_1 \,\&\, \cdots \,\&\, C_n$$

«правильное начальное состояние и правильные переходы между состояниями»

Теорема:

Состояние s со строкой $rev(w_l)@w_r$ достижимо тогда и только тогда, когда $C \vdash F_{x,y}(w_l, w_r, s)$

Доказательство:

($\Leftarrow$) Рассмотрим модель: предикат $F_{x,y}(w_l, w_r, s)$ положим истинным, если состояние достижимо. Это — модель для C (по построению C_m). Значит, доказуемость влечёт истинность (по корректности).

($\Rightarrow$) Индукция по длине лога исполнения.

Неразрешимость исчисления предикатов: доказательство

Теорема. Язык всех доказуемых формул исчисления предикатов неразрешим

Т.е. нет машины Тьюринга, которая бы по любой формуле α определяла, доказуема ли она.

Доказательство:

Пусть существует машина Тьюринга, разрешающая любую формулу. На её основе тогда несложно построить некоторую машину Тьюринга, перестраивающую любую машину S (с допускающим состоянием s_f и входом y) в её ограничения C и разрешающую формулу ИП $C \to \exists w_l.\exists w_r.F_{S,y}(w_l, w_r, s_f)$. Эта машина разрешит задачу останова.

Q.E.D.

3.2 Аксиоматика Пеано и формальная арифметика

«Бог создал целые числа, всё остальное — дело рук человека.»
Леопольд Кронекер, 1886 г.

1. Рациональные ($\mathbb{Q}$).

   $Q = \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ — множество всех простых дробей.

   $\langle p, q \rangle$ — то же, что $\frac{p}{q}$

   $\langle p_1, q_1 \rangle \equiv \langle p_2, q_2 \rangle$, если $p_1 q_2 = p_2 q_1$

   $\mathbb{Q} = Q/_{\equiv}$

2. Вещественные ($\mathbb{R}$). $X = \{A, B\}$, где $A, B \subseteq \mathbb{Q}$ — дедекиндово сечение, если:

   (a) $A \cup B = \mathbb{Q}$

   (b) Если $a \in A$, $x \in \mathbb{Q}$ и $x \le a$, то $x \in A$

   (c) Если $b \in B$, $x \in \mathbb{Q}$ и $b \le x$, то $x \in B$

   (d) A не содержит наибольшего.

   $\mathbb{R}$ — множество всех возможных дедекиндовых сечений.

   $\sqrt{2} = \{\{x \in \mathbb{Q} \mid x < 0 \vee x^2 < 2\}, \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0 \,\&\, x^2 > 2\}\}$

Целые числа тоже попробуем определить

$$\mathbb{Z} : \dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$$

- $Z = \{\langle x, y \rangle \mid x, y \in \mathbb{N}_0\}$
- Интуиция: $\langle x, y \rangle = x - y$
- $$\begin{array}{rcl} \langle a, b \rangle + \langle c, d \rangle & = & \langle a + c, b + d \rangle \\ \langle a, b \rangle - \langle c, d \rangle & = & \langle a + d, b + c \rangle \end{array}$$
- Пусть $\langle a, b \rangle \equiv \langle c, d \rangle$, если $a + d = b + c$. Тогда $\mathbb{Z} = Z/_{\equiv}$
- $0 = [\langle 0, 0 \rangle],\ 1 = [\langle 1, 0 \rangle],\ -7 = [\langle 0, 7 \rangle]$

3.3 Натуральные числа: аксиоматика Пеано

$$\mathbb{N} : 1, 2, \ldots \text{ или } \mathbb{N}_0 : 0, 1, 2, \ldots$$

def: N (или, более точно, $\langle N, 0, (')\rangle$) *соответствует* **аксиоматике Пеано**, если следующее определено/выполнено:

1. Операция «штрих» $(') : N \to N$, причём нет $a, b \in N$, что $a \neq b$, но $a' = b'$.

   Если $x = y'$, то x назовём следующим за y, а y — предшествующим x.
2. Константа $0 \in N$: нет $x \in N$, что $x' = 0$.
3. Индукция. Каково бы ни было свойство («предикат») $P : N \to V$, если:
   (a) $P(0)$
   (b) При любом $x \in N$ из $P(x)$ следует $P(x')$

   то при любом $x \in N$ выполнено $P(x)$.

Как построить? Например, в стиле алгебры Линденбаума:

1. N — язык, порождённый грамматикой $\nu ::= \texttt{0} \mid \nu$«`'`»
2. 0 — это «`0`», x' — это $x +$ «`'`»

3.3.1 Обозначения и определения

def: $1 = 0'$, $2 = 0''$, $3 = 0'''$, $4 = 0''''$, $5 = 0'''''$, $6 = 0''''''$, $7 = 0'''''''$, $8 = 0''''''''$, $9 = 0'''''''''$

def:

$$a + b = \begin{cases} a, & \text{если } b = 0 \\ (a + c)', & \text{если } b = c' \end{cases}$$

Например,

$$2 + 2 = 0'' + 0'' = (0'' + 0')' = ((0'' + 0)')' = ((0'')')' = 0'''' = 4$$

def:

$$a \cdot b = \begin{cases} 0, & \text{если } b = 0 \\ a \cdot c + a, & \text{если } b = c' \end{cases}$$

3.4 Уточнение исчисления предикатов

- Пусть требуется доказывать утверждения про равенство. Введём $E(p, q)$ — предикат «равенство».
- Однако $\nvdash E(p, q) \to E(q, p)$: если $D = \{0, 1\}$ и $E(p, q) ::= (p > q)$, то $\not\models E(p, q) \to E(q, p)$.
- Конечно, можем указывать $\forall p.\forall q.E(p, q) \to E(q, p) \vdash \varphi$.
- Но лучше добавим аксиому $\forall p.\forall q.E(p, q) \to E(q, p)$.
- Добавив необходимые аксиомы, получим *теорию первого порядка.*

3.5 Теория первого порядка

def: **Теорией первого порядка** назовём исчисление предикатов с дополнительными («нелогическими» или «математическими»):

- предикатными и функциональными символами;
- аксиомами.

Сущности, взятые из исходного исчисления предикатов, назовём *логическими*

3.6 Порядок логики/теории

Порядок	Кванторы	Формализует суждения...	Пример
нулевой	запрещены	об отдельных значениях	И.В.
первый	по предметным переменным	о множествах	И.П.
	$\{2, 3, 5, 7, \dots\} = \{t \mid \forall p.\forall q.(p \neq 1 \,\&\, q \neq 1) \to (t \neq p \cdot q)\}$		
второй	по предикатным переменным	о множествах множеств	Типы
	$S = \{\{t \mid P(t)\} \mid \varphi[p := P]\}$		
	...		

Пример логики 2 порядка

$\alpha \to \beta \to \alpha$ (сх. акс. 1) $\qquad \forall a.\forall b.a \to b \to a$

```
let rec map f l = match l with
| [] -> []
| l1::ls -> f l1 :: map f ls
map ((+) 1) [1;2;3] = [2;3;4]
```

$map : \forall a.\forall b.(a \to b) \to a$ `list` $\to b$ `lis`

3.7 Формальная арифметика

def: Формальная арифметика — теория первого порядка, со следующими добавленными нелогическими ...

- двухместными функциональными символами $(+)$, $(\cdot)$; одноместным функциональным символом $(')$, нульместным функциональным символом 0;
- двухместным предикатным символом $(=)$;
- восемью нелогическими *аксиомами*:

  (A1) $a = b \to a = c \to b = c$ $\quad$ (A5) $a + 0 = a$
  (A2) $a = b \to a' = b'$ $\quad$ (A6) $a + b' = (a + b)'$
  (A3) $a' = b' \to a = b$ $\quad$ (A7) $a \cdot 0 = 0$
  (A4) $\neg a' = 0$ $\quad$ (A8) $a \cdot b' = a \cdot b + a$

- нелогической схемой аксиом индукции $\psi[x := 0] \,\&\, (\forall x.\psi \to \psi[x := x']) \to \psi$ с метапеременными x и ψ.

Пример: Докажем, что $a = a$:

Пусть $\top ::= 0 = 0 \to 0 = 0 \to 0 = 0$, тогда:

(1)	$a = b \to a = c \to b = c$	(Акс. A1)
(2)	$(a = b \to a = c \to b = c) \to \top \to (a = b \to a = c \to b = c)$	(Сх. акс. 1)
(3)	$\top \to (a = b \to a = c \to b = c)$	(М.Р. 1, 2)
(4)	$\top \to (\forall c.a = b \to a = c \to b = c)$	(Введ. $\forall$)
(5)	$\top \to (\forall b.\forall c.a = b \to a = c \to b = c)$	(Введ. $\forall$)
(6)	$\top \to (\forall a.\forall b.\forall c.a = b \to a = c \to b = c)$	(Введ. $\forall$)
(7)	$\top$	(Сх. акс 1)
(8)	$(\forall a.\forall b.\forall c.a = b \to a = c \to b = c)$	(М.Р. 7, 6)
(9)	$(\forall a.\forall b.\forall c.a = b \to a = c \to b = c) \to$ $\to (\forall b.\forall c.a + 0 = b \to a + 0 = c \to b = c)$	(Сх. акс. 11)
(10)	$\forall b.\forall c.a + 0 = b \to a + 0 = c \to b = c$	(М.Р. 8, 9)
(12)	$\forall c.a + 0 = a \to a + 0 = c \to a = c$	(М.Р. 10, 11)
(14)	$a + 0 = a \to a + 0 = a \to a = a$	(М.Р. 12, 13)
(15)	$a + 0 = a$	(Акс. A5)
(16)	$a + 0 = a \to a = a$	(М.Р. 15, 14)
(17)	$a = a$	(М.Р. 15, 16)

4 Информация о курсе.

Поток — y2024.
Группы M3132-M3139.
Преподаватель — Штукенберг Дмитрий Григорьевич.

Нам пизда, ребятки.