Математический Анализ

Чепелин Вячеслав

Содержание

1 Интегралы.

1.1 Неопределенный интеграл.

Дано: $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$. F называется **первообразной** функции f, если:

1. F дифференцируема на $\langle a, b\rangle$.
2. $\forall x \in \langle a, b\rangle : F'(x) = f(x)$.

Теорема 1

f - непрерывна на $\langle a, b\rangle$. Тогда f имеет первообразную на $\langle a, b\rangle$.

Доказательство:

<см теорема Барроу>

Q.E.D.

Теорема 2

F - первообразная f на $\langle a, b\rangle$. Тогда:

1. $\forall c \in \mathbb{R}$: $F + c$ тоже первообразная.
2. Если G - еще одна первообразная f, то $F - G = const$.

Доказательство:

1. Воспользуемся арифметическим свойством производной. Тривиально.
2. $(F - G)' = F' - G' = f - f = 0$. Пользуясь теоремами, так как производная везде ≥ 0, то $F - G$ неубывающая. Аналогично так как производная на промежутке ≤ 0, то $F - G$ невозврастающая. Откуда это константа.

Q.E.D.

Неопределенный интеграл f — это множество всех первообразных f.

Замечание от Славы. Кохась подразумевает, что неопределенный интеграл это множество всех первообразных на том же интервале $\langle a, b\rangle$.

Обозначается неопределенный интеграл так:

$$\int f \quad \text{или} \int f(x)dx$$

Формально: $\displaystyle\int f(x)dx = F(x) + C$

Таблица неопределенных интегралов:

Она переписывается из таблицы производных, просто в обратную сторону. Но есть две *загадочные* формулы:

$$\int \frac{dx}{1 - x^2} = \frac{1}{2} \ln \left|\frac{1 + x}{1 - x}\right| + C \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}} = \ln \left|x + \sqrt{1 + x^2}\right| + C$$

Теорема (о св-вах неопределенного интервала)

Пусть f, g - имеют первообразные F, G на $\langle a, b\rangle$. Тогда:

1. $\displaystyle\int (f+g) = \int f + \int g$
2. $\forall a \in \mathbb{R} : \displaystyle\int (af) = a \int f$
3. $\displaystyle\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \left(\int f(x)dx\right)\Big|_{x=\varphi(t)} = F(\varphi(t)) + C$
4. частный случай. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \displaystyle\int f(\alpha x + \beta) = \frac{1}{\alpha} F(\alpha x + \beta) + C$
5. f, g - дифф. на $\langle a, b\rangle$. Пусть $f'g$ и fg' имеют первообразную:

   Тогда: $\displaystyle\int fg' = fg - \int f'g$

Доказательство:

1. Очевидно из свойств производной и теоремы 2.
2. Очевидно из свойств производной и теоремы 2.
3. Очевидно из производной композиции.
4. Очевидно из свойств производной и теоремы 2.
5. Перенесите интеграл в правой части налево. Очевидно из произведения производных.

Q.E.D.

Замечание. Формула 3 часто будет использоваться для замены переменных в интегралах.

$$F(\varphi(t)) = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Давайте считать, что φ обратима. Тогда $t = \varphi^{-1}(x)$. Подставим:

$$F(x) = \left(\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\right)\Big|_{t:=\varphi^{-1}(x)}$$

Для чего это? Благодаря этому, мы умеем вычислять первообразные немного по-другому. Мы можем подставлять вместо x что-либо, а потом возвращаться обратно к x.

1.2 Выпуклые функции.

Множество $A \subset R^m$ **выпукло**, если:

$$\forall x, y \in A, [x, y] \subset A : [x, y] = \{x + t(y - x), t \in [0, 1]\} = \{(1-t)x + ty, t \in [0, 1]\}$$

$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ — **выпукла** на промежутке $\langle a, b\rangle$, если:

$$\forall x_1, x_2 \in \langle a, b\rangle : \forall \alpha \in [0, 1] : f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2)$$

Надграфик $(f,\ \langle c, d\rangle) = \{(x, y) : x \in \langle c, d\rangle, y \geq f(x)\}$

Замечание. f - выпукло на $\langle a, b\rangle \Leftrightarrow$ Надграфик $(f, \langle a, b\rangle)$ - выпуклый в R^2.

Лемма (о трех хордах)

f - выпукла на $\langle a, b\rangle \Leftrightarrow \forall x_1 < x_2 < x_3 \in \langle a, b\rangle$ выполнено:

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \leq \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$$

Доказательство:

Возьму первое неравенство. Домножу на знаменатели и оставлю плюсы:

$$(x_3-x_1)(f(x_2)-f(x_1)) \leq (x_2-x_1)(f(x_3)-f(x_1))$$

$$f(x_2) \leq \frac{x_2-x_1}{x_3-x_1}f(x_3) + \frac{x_3-x_2}{x_3-x_1}f(x_1)$$

Чего-то не хватает, вспомним, что $f(x_2) = f\left(\frac{x_2-x_1}{x_3-x_1}x_3 + \frac{x_3-x_2}{x_3-x_1}x_1\right)$. Ой, это же условие выпуклости. Так как все переходы равносильны, то это неравенство выполнено, когда f выпукла. Второе неравенство решается аналогично (позже будет добавлено в конспект).

Q.E.D.

f - **строго выпукла** на $\langle a, b\rangle$:

$$\forall x_1, x_2 \in \langle a, b\rangle : \forall \alpha \in [0, 1] : f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) < \alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2)$$

Просто меняется знак на строгий.

Теорема (об одностор. дифф-ти вып. функции)

f - выпукла на $\langle a, b\rangle$. Тогда $\forall x \in (a, b) : \exists f'_+(x), f'_-(x)$ (конечные), а также

$\forall x_1 < x_2 \in \langle a, b\rangle$ выполнено:

$$f'_-(x_1) \leq f'_+(x_1) \leq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq f'_-(x_2)$$

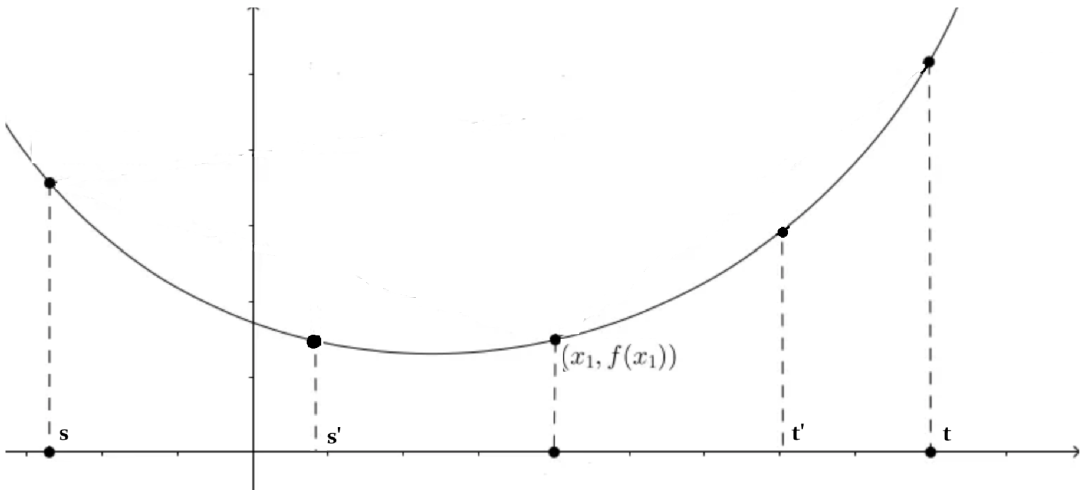
Доказательство:

Сначала докажу, что $f'_-(x_1) \leq f'_+(x_1)$. Замечу, что x_1 в таком случае не должно быть граничной (иначе предела существовать просто не будет). Значит есть какая-то s левее x_1 и какое-то t правее x_1. Посмотрю на данные выражения: $\frac{f(t)-f(x_1)}{t-x_1}$ и $\frac{f(c)-f(x_1)}{c-x_1}$.

По теореме о трех хордах: $\frac{f(c)-f(x_1)}{c-x_1} \leq \frac{f(t)-f(x_1)}{t-x_1}$.

Замечу, что при устремлении s к x_1, $\frac{f(c)-f(x_1)}{c-x_1}$ будет увеличиваться по теореме о трех хордах (см изобр, напишите т. о трех хордах для s, s', x_1).

Замечу, что при устремлении t к x_1, $\frac{f(t)-f(x_1)}{t-x_1}$ будет уменьшаться по теореме о трех хордах (см изобр, напишите т. о трех хордах для x_1, t', t).



Заметим, что первая функция ограничена сверху второй, а вторая ограничена снизу первой. Откуда существуют $f'_-(x_1), f'_+(x_1)$. Теперь применим теорему о предельном переходе в неравенствах и получим, что $f'_-(x_1) \le f'_+(x_1)$.

Теперь докажем вторую часть.

Возьму t на отрезке (x_1, x_2). Посмотрю на $\dfrac{f(t) - f(x_1)}{t - x_1}$ и $\dfrac{f(t) - f(x_2)}{t - x_2}$

Заметим, что исходя из этого, тк монотонно возрастает и ограниченна снизу и сверху (по тем же соображениям, что и до этого)

$$\exists \lim_{t \to x_1 + 0} \frac{f(t) - f(x_1)}{t - x_1} = f'_+(x_1)$$

и тк $\dfrac{f(t) - f(x_1)}{t - x_1} \le \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ по лемме о трех хордах, то выполнено второе неравенство.

$$\exists \lim_{t \to x_2 - 0} \frac{f(t) - f(x_2)}{t - x_2} = f'_-(x_2)$$

и тк $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \le \dfrac{f(t) - f(x_2)}{t - x_2}$ по лемме о трех хордах, то выполнено третье неравенство.

Q.E.D.

Следствие 1. f - выпукла на $\langle a, b \rangle \Rightarrow f$ непр на (a, b).

Следствие 2. f - выпукла на $\langle a, b \rangle \Rightarrow f$ не дифф. на (a, b) в не более чем счетном множестве (множество точек разрыва НБЧС). Это верно, исходя из того, что значения правосторонних пределов и левосторонних растут (теорема об одностор дифф-ти вып. функции). и берем рациональное число на таком интеравле.

todo: добавить рисунок выпуклая вниз, выпуклая вверх

Теорема (выпуклость в терминах касательных)

f - дифф. на $\langle a, b \rangle$. Тогда

f - вып. вниз $\Leftrightarrow$ График f лежит не ниже любой касательной:

$$\forall x_0, x \in \langle a, b \rangle : f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Доказательство:

Докажем в правую сторону. Возьму $x > x_0$, тогда по предыдущей теореме: $f'(x_0) \leq \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Домножу и победил. Аналогично $x < x_0$.

Докажем в левую сторону. Возьмем 3 точки, $x_1 < x_0 < x_3$:

$$f(x_3) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x_3 - x_0), \quad f(x_1) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0)$$

$f'(x_0) \leq \dfrac{f(x_3) - f(x_0)}{x_3 - x_0}$ и $\dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \leq f'(x_0)$, тогда по лемме о трех хордах f выпукло.

Q.E.D.

def: Дано множество A выпуклое в R^2. Прямая L называется **опорной** к A в точке x_0, если L проходит через x_0 и множество A лежит в одной полуплоскости (замкнутой).

Теорема (дифф. критерий выпуклости)

1) f - дифф на (a, b), непр на $\langle a, b \rangle$. Тогда f - выпукло на $\langle a, b \rangle \Leftrightarrow f'$ возрастает на (a, b).

2) f непр на $\langle a, b \rangle$, f - дважды дифф на (a, b). Тогда f - вып. $\Leftrightarrow f'' \geq 0$ на (a, b).

Доказательство:

1) $\Rightarrow$ очевидно из теоремы об односторонней дифф-ти.
$\Leftarrow$ Проверим утверждение леммы о трех хордах.

$\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c_1)$ по теореме Лагранжа. $\dfrac{f(x_2) - f(x_2)}{x_3 - x_2} = f'(c_2)$ по теореме Лагранжа.

Так как $c_1 < c_2$, а f' возрастает, то нужное неравенство выполняется.

2) f - выпуклое $\Leftrightarrow f'$ возрастает $\Leftrightarrow (f')' \geq 0$

Q.E.D.

1.3 Правило Лопиталя.

Лемма (об ускоренной сходимости)

Пусть даны $f, g : D \in R \to R$, a - предельная точка D в $\overline{\mathbb{R}}$

Пусть $\exists U(a), f, g \neq 0$ в $U(a) \cap D$ - выколотой.

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0, \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$. Тогда:

$$\forall (x_n) : x_n \to a, x_n \in D, x_n \neq a, \exists (y_n) : y_n \to a, y_n \in D, y_n \neq a : \lim_{k\to\infty} \frac{f(y_k)}{g(x_k)} < \frac{1}{k} \text{ и } \lim_{k\to\infty} \frac{g(y_k)}{g(x_k)} < \frac{1}{k}$$

Доказательство:

Давайте будем выбирать такие y_k, что:

$$\left|\frac{f(y_k)}{g(x_k)}\right| < \frac{1}{k} \text{ и } \left|\frac{g(y_k)}{g(x_k)}\right| < \frac{1}{k}$$

Очевидно, что мы сможем выбрать такие y_k. А из этого уже следует то, что нам надо.

Q.E.D.

Замечание: утверждение верно, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty, \lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$

Теорема(пр. Лопиталя)

$f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$, дифф $g' \neq 0$ на (a, b)

$\dfrac{f'(x)}{g'(x)} \xrightarrow{x\to a+0} A \in \overline{\mathbb{R}}$. Пусть $\lim\limits_{x\to a+0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ - неопределенность $\left(\dfrac{0}{0}, \dfrac{\infty}{\infty}\right)$

Тогда: $\lim\limits_{x\to a+0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a+0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

Доказательство:

Замечание о корректности: тк $g' \neq 0$, то g - строго положительно или отрицательно в какой-то окрестности a.

По Гейне. Возьму $(x_n) : x_n \to a, x_n \neq a$. Берем y_n из Лопиталя.

Теорема Коши: $\dfrac{f(x_k) - f(y_k)}{g(x_k) - g(y_k)} = \dfrac{f'(\xi_k)}{g'(\xi_k)}$, где $\xi_k \in (x_k, y_k)$.

$$\frac{f(x_k)}{g(x_k)} = \frac{f(y_k)}{g(x_k)} + \frac{f'(\xi_k)}{g'(\xi_k)}\left(1 - \frac{g(y_k)}{g(x_k)}\right)$$

Посмотрим, куда это стремится. Справа это стремится к A. Значит и слева должна.

Q.E.D.

Пример неаналитической функции:

<u>**Неаналитическая**</u> - та, которую нельзя представить в виде разложение тейлора для бесконечности.

Пример:

$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{x}}, x > 0 \\ 0, x \le 0 \end{cases}$

$\forall x : \exists f^{(k)}(0) = 0$. Если разложить ее в нуле, то она будет эквивалентна нулевой

$a_{n+1} - a_n$ - аналог производной.

<u>**Теорема (Штольца)**</u>

x_n, y_n - вещ. последовательности, $x_n \to 0, y_n \to 0$. y_n монотонный, начиная с какого-то места

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = a \in \overline{\mathbb{R}} \cup \{0\}^*$. Тогда: $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = a$.

Доказательство:

1) $a > 0, a \in \mathbb{R}$

$\forall a > \varepsilon > 0 : \exists N_1 : \forall N > N_1 : a - \varepsilon < \dfrac{x_{N+1} - x_N}{y_{N+1} - y_N} < a + \varepsilon$

Зафиксирую N. Возьму $n > N$ и напишу дроби $\dfrac{x_{N+1} - x_N}{y_{N+1} - y_N}, \dfrac{x_{N+2} - x_{N+1}}{y_{N+2} - y_{N+1}}, \dots, \dfrac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}$.

Заметим интересный факт, что (для положит. дробей) $\dfrac{p}{q} < \dfrac{r}{s} \Rightarrow \dfrac{p}{q} < \dfrac{p+r}{q+s} < \dfrac{r}{s}$. Поэтому, если мы сложим, все вышесказанные дроби так, как показано, то они будут между $a - \varepsilon$ и $a + \varepsilon$. А вышесказанные дроби положит, потому что у нас начиная с какого-то места монотонен y и $a > 0$. Поэтому:

$$a - \varepsilon < \frac{x_n - x_N}{y_n - y_N} < a + \varepsilon$$

Что я получил? Устремим $n \to \infty$ и получим по условию, что $a - \varepsilon \le \dfrac{x_N}{y_N} \le a + \varepsilon$

2) $a = +\infty$. Аналогично, только смотрим на предел с одной стороны

3) $a = [-\infty, 0)$, поменяем у $y_n := -y_n$, тогда все стало положительным = счастье.

4) $a = 0$. Считаем, что x_n, y_n монотонны (строго) с какого-то момента. Тогда дробь $\dfrac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} \to 0$ с какого-то момента. Тогда $\dfrac{y_{n+1} - y_n}{x_{n+1} - x_n} \to +\infty$, вернемся к пункту 1 и выиграем.

Q.E.D.

Замечание. Для неопределенности вида $+\infty, +\infty$ теорема верно (обе посл. монотонны). (Загадка)

<u>**Теорема (Гаусса)**</u>

Хотим доказать сумму $1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Доказательство:

1) $x_n = 1 + 2 + \ldots + n$, Хочу найти y_n такую, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = 1$. О чем нам говорит теорема Штольца? Что если y будет таким, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = 1$, то такой y_n нам подходит

$y_n = n^2$ не подходит, $y_n = \dfrac{n^2}{2}$ подходит и дает в пределе 1. Мы доказали, что $1 + 2 + 3 + \ldots + n$ эквивалетно n^2. Но это еще не то, что нам надо

2) $x_n = 1 + 2 + \ldots + n - \dfrac{n^2}{2}$, хотим опять по теореме Штольца найти чему это эквивалентно. $\lim \dfrac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \lim \dfrac{\frac{1}{2}}{y_n - y_{n-1}} = 1$. О, возьму $y_n = \dfrac{n}{2}$. И все хорошо.

$1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n^2}{2} + \dfrac{n}{2} + o(n)$. Пока это тупик.

Q.E.D.

Доказательство 2:

$f(x) = x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n$.

$f'(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + x^n$

$xf'(x) = x + \ldots + nx^n = (x\dfrac{d}{dx})f(x)$

$(x\dfrac{d}{dx})^N f(x) = 1^N x + 2^N x^2 + \ldots + n^N x^n$

Заметим, что $f(x) = \dfrac{x^{n+1} - 1}{x - 1} - 1$. Хочу посчитать значение функции в единице:

$$\left((x\frac{d}{dx})^N f(x)\right)(1) = \left((x\frac{d}{dx})^N \left(\frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}\right)\right)(1)$$

Заметим, что после N раз дифференцирования знаменатель будет $(x-1)^{N+1}$. Но я хочу посчитать значение функции в точке 1. Мы не можем так сделать, но заметим, что наша функция непрерывна, откуда мы знаем, что у нее есть предел в этой точке. Применим $n+1$ раз правило Лопиталя идеологически???????

Замечание от Славы. Да именно такое говорит Константин Петрович на лекции в связи с чем этот конспект хочется забросить и мне хочется выброситься в окно. Так что со всех респект и уважение, что я сижу и разбираю.

Так что же тут подразумевал Константин Петрович? У нас знаменатель будет $(x - 1)^{N+1}$. Но значение функции в точке 1 у нас есть.

Из непрерывности мы знаем, что $(1^N x + 2^N x^2 + \ldots + n^N x^n)(1) = \lim\limits_{x\to1}(1^N x + 2^N x^2 + \ldots + n^N x^n)$. И та наша формула, которую мы свернули с помощью геом. прогрессии ведет себя точно так же в окрестностях единицы. Также на самом деле числитель этой функции просто имеет множитель $(x-1)^{N+1}$. Поэтому мы можем думать, что мы ищем $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)^{N+1}\cdot h(x)}{(x-1)^{N+1}}$. Поэтому применим $N+1$ раз правило Лопиталя и знаменатель пропадет. Что мы получили? Мы получим, что теперь мы ищем предел по какой-то другой(непрерывной (тк многочлен)) функции при $x\to1$. Значит, что мы можем просто посчитать значение в точке 1. Это то, что Константи Петрович назвал идеологически применить правило Лопиталя. То есть надо умножить нашу дробь на знаменатель N раз ее продифференцировать и поделить на производную N-ой степени знаменателя:

$$= \frac{1}{(N+1)!}(\frac{d}{dx})^N \left((x-1)^{N+1}\left((x\frac{d}{dx})^N\left(\frac{x^{n+1}-1}{x-1}\right)\right)\right)$$

Дальше подставляете $N=1$ и все, ищите значение этой фигни в точке 1 и ваша жизнь прекрасна.

Q.E.D.

1.4 Определенный интеграл.

def: **Фигура** - это ограниченное подмножество в R^2. ε - множество всех возможных фигур.

$\sigma : \varepsilon \to [0, +\infty)$ — назовем **площадью**, если:

1. Аддитивно: $A_1, A_2 \in \varepsilon, A_1 \cap A_2 = \varnothing, \sigma(A_1 \cup A_2) = \sigma(A_1) + \sigma(A_2)$
2. Нормировка: $\sigma([a, b] \times [c, d]) = (b - a)(d - c)$.

Замечание. Площади существуют.

Замечание.

1. Она обладает монотонностью по включению: $A \subset B, \sigma(A) \leq \sigma(B)$, так как: $B = A + (B \setminus A) \Rightarrow \sigma(B) = \sigma(A) + \sigma(B \setminus A)$.
2. σ(вертик отрезок) $= 0$, так как его площадь всегда меньше окружающего его прямоугольника с шириной и высотой $= \forall \varepsilon > 0$.

def: $\sigma : \varepsilon \to [0, +\infty)$ — **ослабленная площадь**, если выполнено:

1. монотонна.
2. нормирована.
3. ослабленная аддитивность: Есть $E \in \varepsilon : l$ - вертик. прямая L^- - левая полуплоскость, L^+ - правая полуплоскость (замкнутая полуплоскость), тогда $E_1 = E \cap L^-, E_2 = E \cap L^+ : \sigma(E) = \sigma(E_1) + \sigma(E_2)$

Пример осл. площади:

1. $\sigma(A) = \inf(\sum \sigma(P_k), \text{где } A = \bigcup\limits_{\text{конеч}} P^k, \text{где } P_k \text{ - прямоугольник})$
2. $\sigma(A) = \inf(\sum \sigma(P_k), \text{где} A = \bigcup P^k, \text{где } P_k \text{ - прямоугольник})$

todo: написать отличие.

def: **Срезка** - $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$.

1. положительная — $f^+ = \max(f, 0)$
2. отрицательная — $f^- = \max(-f, 0)$

todo: вставить рисунок

def: $f : [a, b] \to \mathbb{R}, f \geq 0$ ПГ $(f, [a, b]) = \{(x, y) : x \in [a, b], y \in [0, f(x)]\}$.

def: $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, f - непр., σ- осл. адд площадь, тогда определенный интегралом f по отрезку $[a, b]$ назовем:

$$\int\limits_a^b f = \int\limits_a^b f(x)dx = \sigma(\text{ПГ}(f^+,[a, b])) - \sigma(\text{ПГ}(f^-,[a, b]))$$

Простейшие свойства:

1. Если $f \geq 0$ на $[a, b]$, тогда $\int\limits_a^b f \geq 0$

2. Если $f = c$ (константа), тогда $\int\limits_a^b c = c \cdot (a - b)$

3. $\int\limits_a^b (-f) = -\int\limits_a^b f$

4. $\int\limits_a^a f = 0$

Свойства интеграла:

1. Аддитивность по промежутку: $\forall c \in [a, b] : \int\limits_a^b = \int\limits_a^c + \int\limits_c^b$

2. Монотонность: $f \leq g$ - непр., то $\int\limits_a^b f(x) \leq \int\limits_a^b g(x)$.

   Говорят: Проинтегрируем неравенство $f \leq g$, на отрезке $[a, b]$.

3. $(b - a) \min_{[a,b]} f \leq \int\limits_a^b f \leq (b - a) \max\limits_{[a,b]} f$

   Делается с помощью монотонности и интегрирования $\min_{[a,b]} f \leq f \leq \max_{[a,b]}$

4. $\left| \int\limits_a^b f(x)dx \right| \leq \int\limits_a^b |f(x)|dx$

   Проинтегрируем $-|f| \leq f \leq |f|$ и получим то, что хотим.

5. **Теорема о среднем**

   Функция $f \in C([a, b])$. Тогда $\exists c \in [a, b]$, что:

$$\int\limits_a^b f = f(c)(b - a)$$

   Доказательство:

   $a = b$ - скучно. Если $a \neq b$, напишем неравенство п.3:

$$\min f \leq \frac{1}{b - a} \int\limits_a^b f \leq \max f$$

   А мы знаем, что функция непрерывна, тогда по теореме о промежуточном значении:

$$\exists\, c = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f$$

.

Q.E.D.

<u>**Интеграл с переменным верхним пределом**</u> - $\Phi : [a,b] \to R : \Phi(x) = \int\limits_a^x f$

<u>**Интеграл с переменным нижним пределом**</u> - $\psi : [a,b] \to R : \psi(x) = \int\limits_x^b f$

для $f \in C([a,b])$.

<u>**Теорема (Барроу)**</u>

В усл. определений. Доказать, что Φ дифф на $[a,b]$, $\Phi'(x) = f(x)$.

Доказательство:

$y > x : \lim\limits_{y\to x+0} \frac{\Phi(y)-\Phi(x)}{y-x} = \lim\limits_{y\to x+0} \frac{\int_a^y f - \int_a^x f}{y-x} = \lim\limits_{y\to x+0} \frac{1}{y-x}\int\limits_x^y f = \lim\limits_{y\to x+0} f(c)$,
где c лежит между x, y из теоремы о среднем.

Получим, что правосторонняя производна равна $f(x)$. Аналогично про левосторонюю. Откуда производная это $f(x)$.

Q.E.D.

Замечание Мы построили первообразную для функции f.

<u>**Теорема (формула Ньютона-Лейбница)**</u>

$f \in C([a,b])$, F - первообразная f на $[a,b]$. Тогда

$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$

Доказательство:

$F = \Phi + c$, по теореме 2. Поэтому сделаем некоторые преобразования:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \Phi(b) = \Phi(b) - \Phi(a) = (F(b) - c) - (F(a) - c) = F(b) - F(a)$$

Q.E.D.

Следствие: Этот определенный интеграл не зависит от выбора σ.

Замечание: Откажемся от соглашения $a \le b$ и введем для $d < c$:

$$\int\limits_c^d = -\int\limits_d^c = F(d) - F(c)$$

Микротеорема (Линейность интеграла)

Для $f, g \in C([a, b])$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, выполнено:

$$\int\limits_a^b \alpha f + \beta g = \alpha \int\limits_a^b f + \beta \int\limits_a^b g$$

Доказательство:

$(\alpha F + \beta G)\Big|_a^b = \alpha F\Big|_a^b + \beta F|_a^b$ из линейности неопредел. интеграла. Q.E.D.

Теорема (Интегрирование по частям)

$f, g \in C^1([a, b])$. Тогда $\int\limits_a^b fg' = fg\Big|_a^b - \int\limits_a^b f'g$

Доказательство:

Из теоремы о свойствах неопределенного интеграла:

$$fg = \text{првобр}(fg' + f'g) \Rightarrow \int\limits_a^b (fg' + f'g) = fg\Big|_a^b$$

Q.E.D.

Теорема (о замене переменных)

$f \in C(\langle a, b\rangle),\ \varphi\langle \alpha, \beta\rangle \to \langle a, b\rangle,\ \varphi \in C^1,\ [p, q] \subset \langle \alpha, \beta\rangle$. Тогда:

$$\int\limits_p^q f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int\limits_{\varphi(p)}^{\varphi(q)} f(x)dx$$

Доказательство:

F - первообразная f, тогда $F(\varphi(t))$ - первообразная $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ и все получается.

Q.E.D.

1:09 мат анализ кохась лекция 2. Я ничего не понял про нижние два замечания

Замечание. Может показаться, что множество $\varphi([p, q])$ шире $[\varphi(p), \varphi(q)]$.

Замечание. Может быть, что $\varphi(p) > \varphi(q)$

I_f - среднее значение f на $[a,b]$ $\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f$

Теорема (Неравенство Чебышёва)

$f,g\in C([a,b])$ обе возрастают. Тогда $I_f\cdot I_g\le I_{fg}$, то есть

$$\int\limits_a^b f\cdot\int\limits_a^b g\le (b-a)\int\limits_a^b fg$$

Доказательство:

Тк функции возрастают, то $\forall x,y\in[a,b]:(f(x)-f(y))(g(x)-g(y))\ge 0$.

$$f(x)g(x)-f(y)g(x)-f(x)g(y)+f(y)g(y)\ge 0$$

Давайте зафиксируем y и проинтегрируем по x и поделю на $b-a$. Получу:

$$I_{fg}-f(y)I_g-I_fg(y)+f(y)g(y)\ge 0$$

Давайте зафиксируем x и проинтегрируем по y и поделю на $b-a$. Получу:

$$I_{fg}-I_fI_g-I_gI_f+I_{fg}\ge 0$$

Q.E.D.

Пример (Ш. Эрмит)

Пусть мы хотим посчитать $H_n=\frac{1}{n!}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi^2}{4}-t^2\right)^n\cos tdt$

$\int\limits_a^b fg'=fg\Big|_b^a-\int\limits_a^b f'g$. Воспользуюсь этим в дальнейших рассуждениях

$$H_n=\left[\begin{array}{l} f=\left(\frac{\pi^2}{4}-t^2\right)^n \\ g=\cos t\end{array}\right]=\left(\frac{\pi^2}{4}-t^2\right)^n\sin t\Big|_{\pi/2}^{\pi/2}+\frac{2}{(n-1)!}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}t(\frac{\pi^2}{4}-t^2)^{n-1}\sin tdt$$

я не хочу это писать 1:30 2 лекция

$H_n=(4n-2)H_{n-1}-\pi^2H_{n-2}=P(\pi^2)$ - многочлен, от π^2, где $\deg P\le n$.

Теорема (Пи иррационально)

π - иррационально. Проверим, что π^2 иррационально.

Доказательство:

Пусть $\pi^2=\frac{p}{q}$. Тогда $q^nH_n=\frac{q^n}{n!}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\frac{\pi^2}{4}-t^2\right)^n\cos t\ dt=q^nP(\pi^2)$ - целое число. А слева неотрицательная функция.

$0 < q^n H_n \leq \frac{q^n}{n!} 4^n \pi = \frac{(4q)^n}{n!} \pi \to 0$, но с другой стороны, оно должно быть целым. Противоречие.

Q.E.D.

def: $f : [a.b] \to \mathbb{R}$ **кусочно-непрерывной.**

$\exists A \ = \{x_1, \ldots, x_n\} \subset [a, b]$. Такая функция будет непрерывны на $[a, b]$, кроме этих точек, а в них происходят скачки.

def: $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ - **почти первообразная** функции f.

F - непр и $\exists A = \{x_1, \ldots, x_n\} \subset [a, b]$. $\forall x \in [a, b] \backslash A : \exists F'(x) = f(x)$ и $\forall x \in A : \exists F'_+(x), F'_-(x)$

f - кусочно-непрерывно на $[a, b]$. $x_0 = a, x_n = b$. Положим $\int\limits_a^b = \sum\limits_{i=1}^{n+1} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f\Big|_{[x_{i-1}, x_i]}$

Утверждение. Если f - кусочно - непрерывна тогда: $\int\limits_a^b f = F(b) - F(a)$.

Утверждение очевидно по определению.

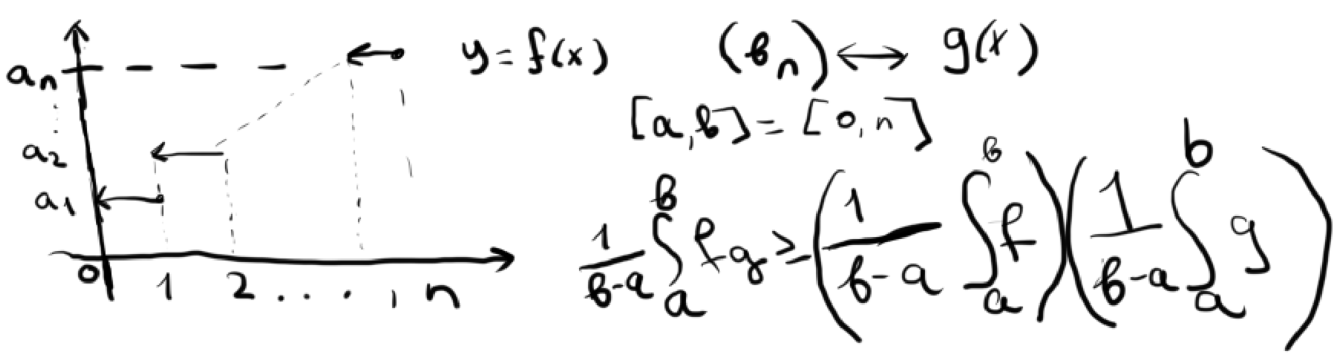
Следствие: Все теоремы, использующие в доказательство только формулу Ньютона-Лейбница у нас уже доказаны!

Пример (Неравенство Чебышева для сумм)

$a_1 \leq \ldots \leq a_n, b_1 \leq \ldots \leq b_n$.

Тогда $\left(\frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i\right) \geq \left(\frac{1}{n} \sum a_i\right) \left(\frac{1}{n} \sum b_i\right)$

Доказательство:



Возьмем доску Константина Петровича для лучшего понимания. Давайте возьмем две функции $f(x)$, $g(x)$, как показано на рисунке. Вспомним, что у нас есть неравенство Чебышева, которое записано на правой стороне доски. Тогда очевидно подстановкой в него наших $f(x), g(x)$ и $a = 0, b = n$, мы получим нужное неравенство. Q.E.D.

1.5 Приложение к определенным интегралам.

Введем некоторые обозначения:

$\text{Segm}([a, b])$ - множество всевозможных отрезков, лежащих в $[a, b]$

$\varPhi : \text{Segm}([a, b]) \to \mathbb{R}$ - **функция для промежутка**.

Введем **аддитивные функции для промежутка**:

$$\forall [p, q] \in \text{Segm}[a, b] : \forall c \in (p, q) : \varPhi([p, c]) + \varPhi(c, q) = \varPhi([p, q])$$

def: $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, $\varPhi : \text{Segm}(\langle a, b\rangle) \to \mathbb{R}$ - а.ф.п:

f - **плотность** $\varPhi$: $\forall \Delta \in \text{Segm}(\langle a, b\rangle)$:$inf_{\Delta} f \cdot len(\Delta) \leq \varPhi(\Delta) \leq sup_{\Delta} f \cdot len(\Delta)$

Теорема(о вычисл. а.ф.п.по ее плотности)

Дана плотность $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, $\varPhi : \text{Segm}(\langle a, b\rangle)$ - а.ф.п., f - непр.

Тогда $\forall \Delta \in \text{Segm}(\langle a, b\rangle)$, $\varPhi(\Delta) = \int\limits_{\Delta} f$

Доказательство:

Н.У.О. считаем, что $\Delta = [a, b]$. Тогда возьмем $F(x)$, такую что:

$$F(x) = \left[\begin{array}{c} 0, x = a \\ \varPhi([a, x]), x \in (a, b) \end{array}\right.$$

Проверим, что F - первообразная f:

$F'_{+}(x) = \dfrac{F(x+h) - F(h)}{h} = \dfrac{\varPhi([a, x+h]) - \Phi([a, x])}{h} = \dfrac{\varPhi(x, x+h)}{h} \in [\min f, \max f]$ на промежутке $x + x_0$ из ее плотности

Получили, что правосторонняя производная f и левостороняя производные существуют.

Q.E.D.

Пример: Площадь криволинейного сектора.

$[a, b] \subset [0, 2\pi)$

$\rho : [a, b] \to \mathbb{R}, \rho > 0$

$\varphi \in [a, b] \to (\varphi, \rho(\varphi))$

Введем определение: **Сектор** $[\alpha, \beta] = \{(\varphi, r) \subset R^2 : \varphi \in [\alpha, b], 0 \leq r \leq p(\varphi)\}$

$\varPhi : \Delta = \sigma(\text{Сектора})$, $\Delta \in \text{Segm}([a, b])$

Теорема.

В указанных условия, а так же $\rho : [a, b] \to \mathbb{R}, \rho > 0$ и непрерывна. $[\alpha, \beta] \in \text{Segm}([a, b])$. Тогда:

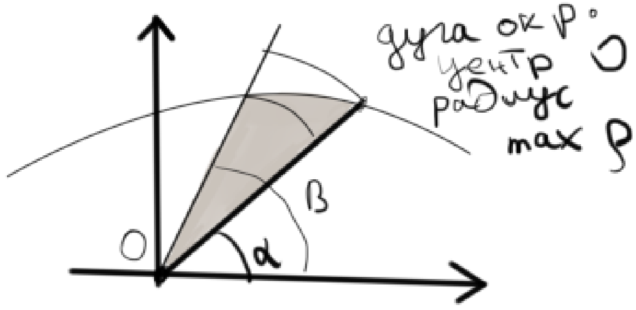
$$\varPhi([\alpha, \beta]) = \frac{1}{2} \int\limits_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi)\, d\varphi$$

Доказательство:

Если мы докажем, что $\frac{1}{2}\rho^2(\varphi)$ - плотность $\varPhi$, тогда по предыдущей теореме, мы получим, что данная формула будет верна. Будем опрделять определение плотности.

$\Delta = [\alpha, \beta]$, откуда Сектор$[\alpha, \beta] \subset$ Криволинейного вектора$(O, \max \rho, [\alpha, \beta])$.

Криволинейный вектор в в данном случае подразумевает сектор окружности, нарисованный на чертеже. Так же на нем вы видите серым - Сектор$[\alpha, \beta]$.



Как мы знаем из геометрии: площадь сектора окружности $= \dfrac{\alpha}{2}R^2$.

Откуда из монотонности площади:

$$\varPhi([\alpha, \beta]) \leq \sigma(\text{Крив. вектор}) = \frac{1}{2}(\beta - \alpha)(\max_{[a,b]} \rho)^2$$

Аналогично можно оценить нижним сектором. То есть:

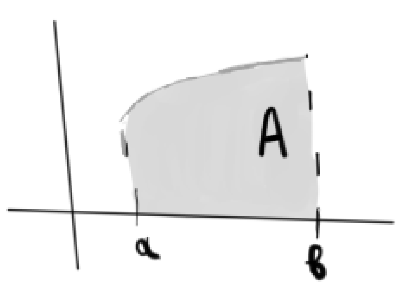
$$\frac{1}{2}(\beta - \alpha)(\min_{[a,b]} \rho)^2 \leq \varPhi([\alpha, \beta]) \leq \frac{1}{2}(\beta - \alpha)(\max_{[a,b]} \rho)^2$$

Откуда это и правда плотность, поэтому верно.

Q.E.D.

Кохась: хочу эксперимент

$\sigma(\Pi\Gamma(f, [a, b])) = \int\limits_a^b f\,dx$, где $f \geq 0, f$ - непрерывно. $\gamma(t) = \begin{pmatrix} x = x(t) \\ y(x) = y(t) \end{pmatrix}$, $\gamma : [p, q] \to R^2$.



Замечание от Славы: вообще $x(t)$ должно монотонно возрастать, иначе странные загагулины будут давать одну и ту же площадь, но КПК про это ничего не сказал.

Причем γ - гладкое изообраужение (дифференцируема столько раз сколько надо).

Получилась какая-то кривая (как на рисуночке сверху), и я хочу смотреть подграфики такой кривой. Тогда:

$$\sigma A = \int_a^b "y(x)" dx = \begin{bmatrix} x = x(t) \\ y = y(t) \end{bmatrix} = \int_p^q y(t)x'(t)dt$$

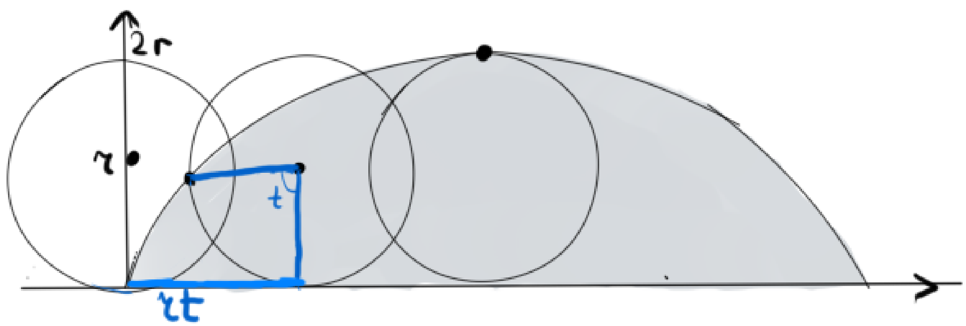
Теперь мы умеем вычислять интегралы не только в декартовых координатах.

todo: вставить 2 формулы 1.50

Пример:

$\begin{cases} x(t) = r(t - \sin(t)), r \in R \\ y(t) = r(1 - \cos(t)), t \in [0, 2\pi] \end{cases}$ - путь, который описывается данной формулой - **циклоид**.

Фиксируем точку в нуле и катим окружность по нашему полю. Мы знаем, что x монотоннен



И теперь я хочу найти площадь серого подграфика:

$$S = \int_0^{2\pi r} y(x)dx = \begin{bmatrix} x(t) = r(t - \sin t) \\ y(t) = r(1 - \cos t) \end{bmatrix} = \int_0^{2\pi} r^2(1 - \cos t)^2 dt = r^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 = 3\pi r^2$$

Пример (Изопометрическое неравентсво.)

$G \subset \mathbb{R}^2$ - выпукло, замкнуто, ограниченно.

Пусть $diam(G) = \sup\limits_{a,b \in G} (\rho(a,b))$ - диаметр. $diam(G) = d$. Тогда: $\sigma(G) \leq \frac{\pi}{4} d^2$

todo: тут во-первых скипнут рисунок, во-вторых я не осознал 2:20

$\rho(\varphi) = \max(r : (\varphi, r)_{max} \in G)$ - непрерывна.

Упражнение: доказать непрерывность (возможно спросят на экзамене)

$\overline{\varphi} = \varphi + \frac{\pi}{2}$

$$\sigma(G) = \frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \rho^2(\varphi)\,d\varphi = \frac{1}{2}\left(\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} + \int\limits_{\frac{-\pi}{2}}^{0}\right) = \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{-\pi}{2}}^{0} \rho^2(\varphi)\,d\varphi + \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \rho^2\left(\overline{\varphi} - \frac{\pi}{2}\right)\,d\overline{\varphi} =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0} \rho^2(\varphi) + \rho^2(\varphi - \frac{\pi}{2})d\varphi = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{"}AB^2\text{"} d\varphi \leq \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} d^2 d\varphi = \frac{d^2\pi}{4}$$

Теорема (обобщ. теорема о плотности)

$\varPhi : Segm(\langle a, b\rangle) \to \mathbb{R}$ - а.ф.п. $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ - непрерывно.

Пусть $\forall \Delta \in Segm(\langle a, b\rangle)$ заданы m_Δ, M_Δ - функции от сегмента:

1. $m_\Delta \cdot l(\Delta) \leq \varPhi(\Delta) \leq M_\Delta \cdot l(\Delta)$
2. $\forall x \in \Delta : m_\Delta \leq f(x) \leq M_\Delta$
3. $\forall$ фикс. $x \in \langle a, b\rangle$, $M_\Delta - m_\Delta \to 0$, при $l(\Delta) \to 0$ и $x \in \Delta$

Тогда f - плотность $\varPhi$.

Доказательство:

Н.у.о мы работаем на $[a, b]$. $F(x) = \begin{cases} \varPhi([a, x]), x > a \\ 0, x = a \end{cases}$

Напишем то, что нам дает условие в конкретной точке x:

$$m_\Delta \leq \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \leq M_\Delta, \text{ где } \Delta = [x, x+h], h > 0$$

$$m_\Delta \leq f(x) \leq M_\Delta$$

Вычтем из одного другое:

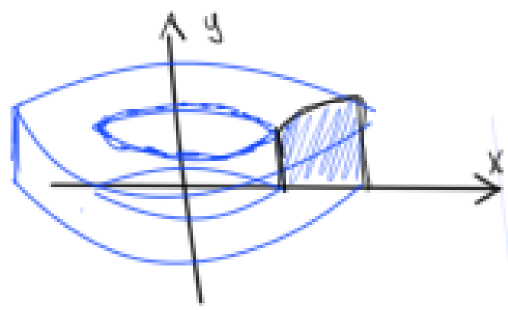
$$\left|\frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x)\right| \leq M_\Delta - m_\Delta$$

Устремим h к нулю и получим, что $M_\Delta - m_\Delta \to 0$. Откуда $\left|\frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x)\right| \to 0$, а это $f(x) = F'_+(x)$. Аналогично $f(x) = F'_i(x)$.

Q.E.D.

1.48 - 4 лекция - кохась рассказывает интересную историю про отрубленные пальцы

Пример (Объем вращения фигур)



$a > 0, b > 0, f > 0$. Вращаем ПГ$(f[a,b])$ вокруг оси Oy. Получается вот что-то такое(см рисунок). Хочу найти объем этой фигуры

$\Phi([a,b]) = Vol(\{(x,y,z) : a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2, 0 \leq z \leq f(\sqrt{x^2+y^2})\})$. Тогда выполнено:

$$\Phi([a,b]) = 2\pi \int\limits_a^b x f(x) dx$$

Доказательство:

A_1 - прямоугольник, такой что его высота $= \min\limits_{(a,b)} f$. $A_1 = [a,b] \times [0, \min f]$

$Vol A_1 = \pi b^2 \min f - \pi a^2 \min f$

A_2 - прямоугольник, такой что его высота $= \max\limits_{(a,b)} f$. $A_2 = [a,b] \times [0, \max f]$

$Vol A_2 = \pi b^2 \max f - \pi a^2 \max f$.

$\forall \Delta$ положим $m_\Delta = \pi \min_\Delta f \cdot \min(2x)$, $M_\Delta = \pi \max_\Delta f \cdot \max 2x$, $x \in \Delta$

Тогда: как мы только что доказали:

$$\Phi(\Delta) \leq Vol(A_2(\Delta)) = \pi \max f \cdot (\overline{b} + \overline{a})(\overline{b} - \overline{a}) \leq M_\Delta(\overline{b} - \overline{a}) \leq M_\Delta l(\Delta)$$

Выше в формуле подразумеваются текущие $\overline{a}, \overline{b}$ для Δ. Аналогично для m_Δ.

При $x \in \Delta : m_\Delta \leq \pi f(x) 2x \leq M_\Delta$ - очевидно.

Фиксируем x : $M_\Delta - m_\Delta \to 0$ при $\Delta \to 0$ - очевидно. Откуда выполнено условие теоремы о плотности а это то, что нам и требовалось.

Q.E.D.

Пути:

$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^m$. То есть $t \to (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \ldots, \gamma_m(t)) = \gamma(t)$. Мы обычно думаем, что они непрерывны

$\lim\limits_{\tau \to 0} \dfrac{\gamma(t+\tau) - \gamma(t)}{\tau}$ - интересно как меняется.

$\gamma'(t) = (\gamma_1'(t), \gamma_2'(t), \ldots, \gamma_m'(t))$ - **вектор скорости**.

Носитель пути - траектория пути.

<u>def:</u> Функция l, заданная на множестве гладких путей (непрерывны, дифференцируемы) называется длиной пути, если выполняются следующие условия:

1. $l \geq 0$
2. аддитивна: $\forall [a,b]$, $\forall \gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^m$ для любого $c \in [a,b] : l(\gamma) = l(\gamma\Big|_{[a,c]}) + l(\gamma\Big|_{[c,b]})$
3. $\gamma, \overline{\gamma}$ — два пути. $C_\gamma, C_{\overline{\gamma}}$ — носители пути.

   Если $\exists T : C_\gamma \to C_{\overline{\gamma}}$ — сжатие ($\forall M, N : \rho(T(M), T(N)) \leq \rho(M, N)$), то $l(\overline{\gamma}) \leq l(\gamma)$
4. γ - линейный путь, то $l(\gamma) = \rho(A, B)$, где A - начало, B - конец.

А такая штука вообще существует?

Замечание: Из свойства 3 следует, что длина хорды меньше длины дуги.

Замечание: При растяжении длина пути растет.

Замечание: Длина пути не меняется при движениях пространства R^m (очевидно из свойства 3).

<u>Теорема:</u>

$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^m$ - C^1 - непрерывно дифференцируемо. Тогда $l(\gamma) = \int\limits_a^b ||\gamma'(t)||dt$.

Доказательство:

Считаем γ - инъективный.

$[p,q] \in Segm[a,b] : \varPhi([p,q]) = l(\gamma\Big|_{[p,q]})$. Проверим $||\gamma'(t)||$ - плотность $\varPhi$.

$\Delta : \forall i = 1, \dots, m : m_i(\Delta) = \min_\delta |\gamma_i'(t)|$, $M_i(\Delta) = \max |\gamma_i'(t)|$.

Возьму $m_\Delta = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^m m_i^2(\Delta)}$, $M_\Delta = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^m M_i^2(\Delta)}$. Проверяем 1, 2, 3 из обобщенной теоремы о плотности. 2 и 3 очевидно выполнены.

Проверим 1: $m_\Delta l(\Delta) \leq \varPhi(\Delta) \leq M_\Delta l(\Delta)$. Завожу $\overline{\gamma} : \Delta \to R^m$ - линейный путь: $\gamma(t) = (M_1(\Delta)t, M_2(\Delta)t, \dots, M_m(\Delta)t)$. Строю $T : C_\gamma \to C_{\overline{\gamma}}$, такое, что $\gamma(t) \to \overline{\gamma}(t)$. Проверим, что это растяжение. Давайте считать расстояние. $\rho(\gamma(t_0), \gamma(t_1)) = \sqrt{\sum\limits_{i=1} (\gamma_i(t_0) - \gamma_i(t_1))^2}$. По теореме Лагранжа:

$$\sqrt{\sum_{i=1} (\gamma_i(t_0) - \gamma_i(t_1))^2} = \sqrt{\sum \gamma_i'(\tau_i)(t_0 - t_1)^2} = \sqrt{\sum \gamma_i'(\tau_i)}|t_0 - t_1| \leq M_{[t_0,t_1]}|t_0 - t_1|$$

$$\leq M_\Delta |t_0 - t_1| = \rho(T(\gamma(t_0)), T(\gamma(t_1)) = \rho(\overline{\gamma}(t_0), \overline{\gamma}(t_1))$$

Откуда выполнен пункт один и выполнена обобщенная теорема о плотности.

Q.E.D.

Примеры:

1. В $\mathbb{R}^2 : \gamma(t) = (x(t), y(t))$ - обычные декартовы.

$$l = \int\limits_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$$

2. $\mathbb{R}^2$, полярные координаты $r(t)$,$\varphi(t)$

$$l = \int\limits_a^b \sqrt{((r(t)\cos\varphi(t))')^2 + ((r(t)\sin\varphi(t))')^2} = \int\limits_a^b \sqrt{r(t)^2 + r'(t)^2} dt$$

3. Длина графика $x(t) = t, y(t) = f(t)$.

$$l = \int\limits_a^b \sqrt{1 + y'(x)^2} dx$$

Вернемся к вопросу существованию такой штуки.

Существование длины пути - Супремум длин вписанных ломаных. Разбиваю отрезок на n кусочков и считаю сумму длины ломанных: $a = x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$

Теперь будем рассматривать пути в $\mathbb{R}^1$.

$l(\gamma) = \sup(\sum \gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1}) | a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b)$.

Замечание: $\gamma \in C^1 : l(\gamma) = \int\limits_a^b |\gamma'(t)| dt$.

Замечание: Пусть f - любая из $[a, b] \to \mathbb{R}$. Тогда **вариация функции** на [a,b]:

$$\mathrm{Var}_a^b f = \sup(\sum_{k=1}^n |f(t_k) - f(t_{k-1})|)$$

Пример: $f(x) = \begin{cases} 1, x \in \mathbb{Q} \\ 0, x \in \mathbb{R}, x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$, $\mathrm{Var}_a^b f = +\infty$

Если для f выполнено: $\mathrm{Var}_a^b f < +\infty$, то она называется **ограниченной** вариации.

Экскурсия в зоопарк.

Кривая Пеано - это путь в $\mathbb{R}^2$, такой, что я сначала разбиваю отрезок $[0, 1]$ на 4 равных части так, что отображение первой части отрезка находится в части 1(см рисунок), второй части отрезка в части 2 и так далее. Потом повторяю то же самое в каждом квадратике. Потом повторяю то же самое в каждом квадратике квадратика и так далее. Изображение внизу описывает это построение поэтапно.

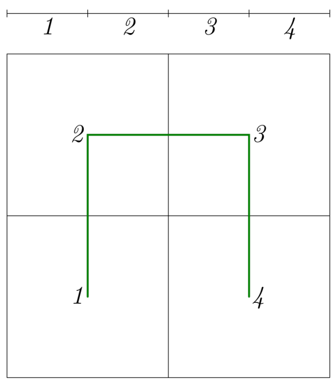


Fig. 1.

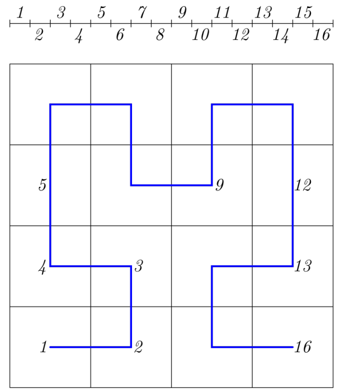


Fig. 2.

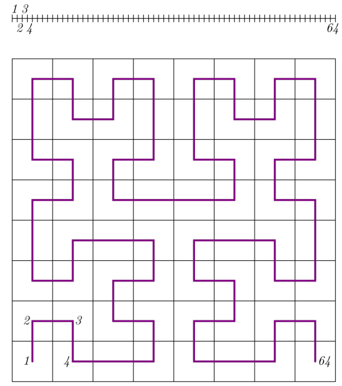
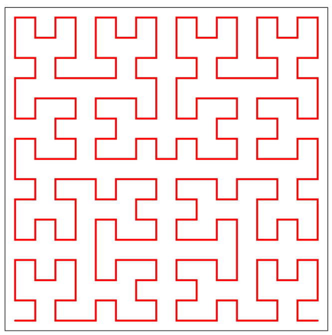
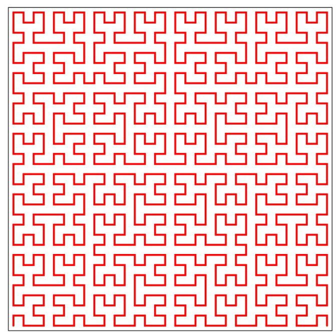
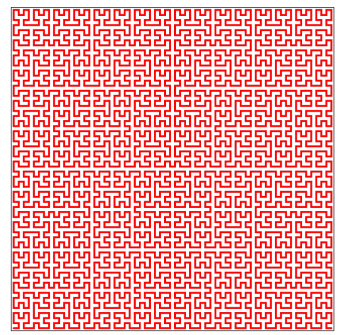


Fig. 3.







Заметим, что у нас биекция между $\mathbb{R}$ и в $\mathbb{R}^2$.

1.6 Верхний и нижний пределы последовательностей

<u>**def:**</u> (x_n) - вещ. последовательность $L \in \mathbb{R}$ - <u>**частичный предел**</u> $x_n : \exists (n_k) : n_1 < n_2 < \ldots : \lim\limits_{n \to \infty} x_{n_k} = L$.

<u>**def:**</u> x_n - вещ. последовательность. Рассмотрим $y_n = \sup(x_n, x_{n+1}, \ldots), z_n = \inf(x_n, x_{n+1}, \ldots)$. y_n - <u>**верхне огибающая**</u>, z_n - <u>**нижне огибающая**</u>.

y_n - не возрастает, z_n - не убывает. $\forall n : z_n \leq x_n \leq y_n$

Если изменить конечное число членов последовательности, то y_n, z_n изменятся конечное число раз.

<u>**Верхний предел последовательности**</u>— $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = \lim y_n \in \overline{R}$

<u>**Нижний предел последовательности**</u>— $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = \lim y_n \in \overline{R}$

<u>**Теорема (о свойствах верхнего и нижнего предела)**</u>

$(x_n), (\overline{x_n})$ — произвольные вещ последовательности

1. $\underline{\lim} x_n \leq \overline{\lim} x_n$
2. Если $\forall n : x_n \leq \overline{x_n}$, то $\overline{\lim} x_n \leq \overline{\lim}\overline{x_n}$ и $\underline{\lim} x_n \leq \underline{\lim}\overline{x_n}$

   Замечание от Славы: На самом деле здесь можно сказать, что $\exists N$ начиная с которого выполнено $x_n \leq \overline{x_n}$, но КПК почему-то решил так ввести это свойство.
3. $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \geq 0$. Тогда $\overline{\lim} \lambda x_n = \lambda \overline{\lim} x_n$ и $\underline{\lim} \lambda x_n = \lambda \underline{\lim} x_n$. (Считаем $0 \cdot \infty = 0$)
4. $\overline{\lim}(-x_n) = -\underline{\lim} x_n$
5. $\overline{\lim}(x_n + \overline{x}_n) \leq \overline{\lim} x_n + \overline{\lim}\overline{x}_n$
6. Пусть $t_n \to l \in \mathbb{R}$. Тогда $\overline{\lim}(x_n + t_n) = \overline{\lim}(x_n) + l$ и $\underline{\lim}(x_n + t_n) = \underline{\lim}(x_n) + l$
7. $t_m \to l > 0 (l \in \mathbb{R})$. Тогда $\overline{\lim}(t_n x_n) = l \overline{\lim}(x_n)$ и $\underline{\lim}(t_n x_n) = l \underline{\lim}(x_n)$

Доказательство:

1. т.к. $\forall n : z_n \leq x_n \leq y_n$, то используем теорему о предельном переходе и получим то, что нам надо.
2. Используем теорему о предельном переходе и получим то, что нам надо.
3. Очевидно из свойств предела.
4. Очевидно из свойств супремума.
5. $\sup(x_n + \overline{x_n}, \ldots) \leq \sup(x_n, \ldots) + \sup(\overline{x}_n)$ - первое значение в паре не больше $\sup(x_n, \ldots)$, второе не больше $\sup(\overline{x}_n)$.
6. $\forall \varepsilon > 0 : \exists N_0 : \forall x > N_0 : x_k + l - \varepsilon < x_k + t_k < x_k + l + \varepsilon$ - верно из условия.

   Возьмем $N > N_0$ при $n \geq N$ выполнено, откуда перейдем к супремумам множеств:

   $$y_N + l - \varepsilon \leq \sup(x_N + t_N, x_{N+1} + t_{N+1}, \ldots) \leq y_N + l + \varepsilon$$

   Устремлю N к бесконечностти:

   $$\overline{\lim} y_n + l - \varepsilon \leq \lim \sup(...) \leq \overline{\lim} y_n + l + \varepsilon$$

7. Аналогично прошлому пункту.

Q.E.D.

Теорема (техническое определение верхнего предела).

(x_n) - произвольная вещ. последовательность.

1. $\overline{\lim} x_n = +\infty \Leftrightarrow x_n$ - не ограничено сверху
2. $\overline{\lim} x_n = -\infty \Leftrightarrow x_n \to -\infty$.
3. $\overline{\lim} x_n = l \Leftrightarrow$
   (a) $\forall \varepsilon > 0 : \exists : \forall n > N : x_n < l + \varepsilon$
   (b) $\forall \varepsilon > 0$ неравенство $l - \varepsilon \leq x_n$ выполнено для бесконечного множества x-ов

Доказательство:

1. Очевидно.
2. $x_n \leq y_n$ Тогда по теореме о предельном переходе(или двух городовых) $x_n \to -\infty$. А в обратную сторону очевидно из определения предела.
3. $\Rightarrow \forall \varepsilon : \exists N : \forall n > N : x_n \leq y_n < \varepsilon + l$ - пункт а доказан просто определением предела y_n.

   $\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n > N : l - \varepsilon < y_n$.

   Тогда по техническому описанию супремума $\exists k \geq n : l - \varepsilon < x_k \leq y_n$. Потом возьмите $n > k$ и так далее. Мы научились делать бесконечное кол-во таких k-шек, откуда пункт б доказан.

   $\Leftarrow y_n$ - убывающая. Если мы имеем а, то $\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n > N : x_n < l + \varepsilon$. Из этого следует $y_n \leq l + \varepsilon$. И благодаря пункту б у нас выполнено техническое описание супремума то есть $y_n \to l$

Q.E.D.

Теорема

$\exists \lim(x_n) = L \in \overline{\mathbb{R}} \Leftrightarrow \underline{\lim} x_n = \overline{\lim} x_n = L$.

Доказательство:

$L = +\infty$ - см прошлую теорему. Аналогично с $-\infty$.

$L \in \mathbb{R}$. В правую сторону очевидно из технического описания. В левую сторону: $z_n \leq x_n \leq y_n$ по теореме о двух городовых верно.

Q.E.D.

Теорема о характеризации верхнего предела как частичного

(x_n) - вещ последовательность. Тогда:

1. Если $l \in \overline{\mathbb{R}} -$ частичный предел x_m, то $\underline{\lim} x_n \leq l \leq \overline{\lim} x_n$
2. $\exists n_k, m_k : x_{n_k} \to \overline{\lim} x_n, x_{m_k} \to \underline{\lim} x_n$

Доказательство:

1. $x_{n_k} \to l$: $z_{n_k} \leq x_{n_k} \leq y_{n_k}$. Устремим к $+\infty$ и получис то, что надо.

2. Очевидно из технического описания супремума и техн. описания верхнего предела (будем выбирать все более и более близкие к l).

Q.E.D.

1.7 Интегральные суммы.

def: $[a, b]$ **дробление** отрезка $[a, b]$ (на n частей):

$x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$.

Ранг дробления(мелкость) - $\max |x_k - x_{k-1}|$

Оснащение дробления - $\{\xi_1, \ldots, \xi_n\} : \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$

Пусть задана $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Тогда **Риманова сумма**: $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$.

Теорема(об интеграле, как о пределе частичных сумм)

$f \in C([a, b])$. Тогда $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall$ дробления $(x_0, \ldots, x_m)$ ранга $< \delta$. Тогда $\forall$ оснащ.:

$$\left| \int\limits_a^b f(x)dx - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \right| < \varepsilon$$

Доказательство:

Используем теорему Кантора о равномерной непрерывности:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x, \overline{x} \in [a, b] : |x - \overline{x}| < \delta : |f(x) - f(\overline{x})| < \varepsilon$$

$$\int\limits_a^b f(x)dx - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx - f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx - \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(\xi_i)dx = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} (f(x) - f(\xi_i))dx$$

Теперь возьму δ и ϵ из теоремы Кантора, возьму любое дробление ранга меньше δ, получу, что $|x_i - \xi_i| < \delta$ и $|\xi_i - x_{i-1}| < \delta$. Откуда выполнено теорема Кантора и разность $|f(x) - f(\xi_i)| < \varepsilon$. Откуда:

$$\left| \int\limits_a^b f(x)dx - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \right| \le \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} |(f(x) - f(\xi_i))|dx \le \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \varepsilon dx = \varepsilon(b - a)$$

Откуда по теореме о бюрократном учете получим искомое.

Q.E.D.

$w(\delta) = \sup\limits_{t, x \in [a, b], |x - t| < \delta} |f(t) - f(x)|$ — **модуль непрерывности**.

Теорема (об интегральной сумме центральных прямоугольников)

$f \in C^2([a, b])$, $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, $\delta = max(x_i - x_{i-1}), \xi_i = \dfrac{(x_{i-1} + x_i)}{2}$.

Тогда:

$$\left|\sum_{i=1}^{m} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - \int\limits_a^b f(x)dx\right| \leq \frac{\delta^2}{8}\int\limits_a^b |f''(x)|dx$$

Теорема (формула трапеций)

в тех же условиях:

$$\left|\sum_{i=1}^{n} (\frac{f(x_i) + f(x_{i-1})}{2}(x_i - x_{i-1})) - \int\limits_a^b f(x)dx\right| \leq \frac{\delta^2}{8}\int\limits_a^b |f''(x)|dx$$

Доказательство:

$$\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx = \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)(x-\xi_i)'dx = f(x)(x-\xi_i)\Big|_{x_{i-1}}^{x_i} - \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)(x-\xi_i)dx =$$

$$= (f(x_i) + f(x_{i-1}))\cdot\frac{x_i - x_{i-1}}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f'(x)((x-x_{i-1})(x_i - x))'dx =$$

$$= [\psi_i(x) = (x - x_{i-1})(x_i - x)] = ... + \frac{1}{2}f'(x)\psi_i(x)\Big|_{x_{i-1}}^{x_i} - \frac{1}{2}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f''(x)\psi_i(x)dx$$

Тогда:

$$\left|\sum \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{2}(x_i - x_{i-1}) - \int\limits_a^b f(x)dx\right| = \left|\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f''(x)\psi_i(x)dx\right|$$

Заметим, что $\psi(x)$, которая является функцией из частей $\psi_i(x)$ будет непрерывной, откуда я могу ее интегрировать и сделать замену на нее:

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f''(x)\psi(x)dx\right| = \left|\frac{1}{2}\int\limits_a^b f''(x)\psi_(x)dx\right| \leq \frac{1}{2}\int\limits_a^b \left|f''(x)\psi(x)\right|dx \leq \frac{\delta^2}{8}\int\limits_a^b |f''(x)|dx$$

Q.E.D.

Формула Эйлера - Маклорена (простейшая)

$f \in C^2([m,n])$, $m, n \in \mathbb{R}$. Тогда:

$$\sum_{i=m}^{n} f(i) - \frac{1}{2}f(m) - \frac{1}{2}f(n) = \int\limits_m^n f(x)dx + \frac{1}{2}\int\limits_m^n f''(x)\{x\}(1-\{x\})dx$$

Доказательство:

Очевидно :)

Это буквально прошлая теорема, просто надо очень долго пялится в формулу. $\psi(x) = (1 - \{x\})\{x\}$. Попяльтесь в формулу и тоже поймете.

Q.E.D.

Примеры:

$f(x) = x^p$ $(p > -1)$

$$1^p + 2^p + \ldots + n^p = \int\limits_1^n x^p dx + \frac{1}{2}(n^p + 1) + \frac{1}{2}\int\limits_1^n p(p-1)x^{p-2}\{x\}(1 - \{x\}) =$$

$$= \frac{n^{p+1}}{p+1} - \frac{1}{p+1} + \frac{n^p}{2} + \frac{1}{2} + O(\max(1, n^{p-1}) = \frac{n^{p+!}}{p+1} + \frac{n^p}{2} + O(max(1, n^{p-1}))$$

Торжественный момент, применим формулу для $p = 1$:

$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} + 0$ — Мы доказали теорему Гаусса.

Применим формулу для $p = -1$:

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} = \ln n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} + \int\limits_1^n \frac{1}{x^3}\{x\}(1 - \{x\})dx$

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} = \ln n + \gamma + o(1)$. Причем $\gamma \in [\frac{1}{2}, \frac{5}{8}]$ - **Постоянная Эйлера**

Формула Валлиса

$I_n = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!}\frac{\pi}{2}, n - \text{четная} \\ \frac{(n-1)!!}{n!!}, n - \text{неч} \end{cases}$

КПК: Используйте формулу интегрирования по частям. Двойной факториал - одной четности

$x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$\sin^{2k+1} x \le \sin^{2k} x \le \sin^{2k-1} x$ - очевидное неравенство. Проинтегрируем по $0, \frac{\pi}{2}$, получим:

$$\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!} \le \frac{(2k-1)!!}{2k!!} \cdot \frac{\pi}{2} \le \frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!}$$

$$\left(\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}\right)^2 \frac{1}{2k+1} \le \frac{\pi}{2} \le \left(\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}\right)^2 \frac{1}{2k}$$

Правая часть - левая часть $\left(\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}\right)^2 (\frac{1}{2k} \cdot \frac{1}{2k+1}) \le \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2k} \to 0$

Получили, что левая и правые величины стремятся к $\frac{\pi}{2}$.

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}\right)^2\frac{1}{k}=\pi$$ — **Формула Валлиса**

Формула Стирлинга

Воспользуемся формулой Эйлера - Маклорена для $f(x)=\ln x$:

$$\ln 1+\ln 2+\ldots+\ln n=\int\limits_1^n \ln x dx+\frac{\ln n}{2}-\frac{1}{2}\int\limits_1^n\frac{1}{x^2}\{x\}(1-\{x\})dx=$$

$$n\ln n-n+1+\frac{\ln n}{2}-\frac{1}{2}\int\limits_1^n\frac{1}{x^2}\{x\}(1-\{x\})dx=n\ln n-n+\frac{\ln 2}{2}+C_1+o(1)$$

А давайте теперь возвем экспоненту от правой и левой части:

$$n!=e^{n\ln n}e^{-n}e^{\frac{\ln n}{2}}e^{C_i+o(1)}$$

Получили, что $n!\sim\dfrac{n^n}{e^n}\sqrt{n}\cdot c$, где $c=e^{C_1}$.

А теперь давайте сочетать и найдем эту c.

$(2k)!!=k!\cdot 2^k, (2k-1)!!=\dfrac{(2k)!}{k!\cdot 2^k}$. С учетом этого воспользуемся формулой Валлиса:

$$\sqrt{\pi}=\lim_{k\to\infty}\left(\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}\right)\frac{1}{\sqrt{k}}=\lim_{k\to\infty}\frac{2^{2k}(k!)^2}{(2k)!}\frac{1}{\sqrt{k}}=\lim_{k\to\infty}\frac{2^{2k}k^{2k}e^{-2k}k\cdot c^2}{(2k)^{2k}e^{-2k}\sqrt{2k}\cdot c}\frac{1}{\sqrt{k}}=\frac{c}{\sqrt{2}}$$

Откуда $c=\sqrt{2\pi}$

$n!\sim\dfrac{n^n}{e^n}\sqrt{n}\cdot\sqrt{2\pi}$ — **Формула Стирлинга**

1.8 Несобственные интегралы.

def: **Допустимая функция** на $[a, b) : (-\infty < a < b \leq +\infty)$

$\forall A \in (a, b) : f$ - кусочно непрерывная на $[a, A]$

def: $\mathit{\Phi}(A) := \int\limits_a^A f(x)dx$

Если $\exists \lim\limits_{A \to b-0} \mathit{\Phi}(A) \in \overline{R}$ - этот предел называется **несобственным интегралом**

2 Информация о курсе

Поток — y2024.
Группы M3138-M3139.
Преподаватель — Кохась Константин Петрович.

Сенко учит мат. анализ и ты учи!