Математический анализ. Третий семестр

Автор: Вячеслав Чепелин

Содержание

1. Творческий кризис Кохася

1.1. Системы Штейнера

Мудрецы и шляпы

У нас есть n мудрецов и k шляп $k \geq n$. Мудрецы стоят в ряд. Каждому мудрецу на голову надевают одну из k шляп, выбранную случайным образом. Мудрец не видит шляпу на своей собственной голове, но видит шляпы всех впереди стоящих мудрецов (тот, кто стоит последним в ряду, видит всех, кроме себя, а тот, кто стоит первым, не видит никого).

Мудрецы не могут общаться друг с другом, жестами, поворачиваться и т.д. Однако, начиная с затылка ряда (с того, кто видит больше всех), каждого мудреца по очереди спрашивают: «Какого цвета твоя шляпа?». Мудрец должен ответить одним из k возможных цветов. При этом нельзя повторять цвета. Его цель — **назвать правильный цвет**. Мудрецы могут заранее договориться об общей стратегии, чтобы максимизировать число гарантированно угаданных шляп. В этом и состоит наша задача.

Есть разные интересные простые частные решения. Для расширения кругозора тык (там с самого начало). Нас интересует нечто другое.

Идея

Что вот по-хорошему должны сделать мудрецы?
- Первый мудрец почти всегда проиграет, он не может угадать, что у него на голове
- Первый должен передать какой-то «ключ» своим коллегам перед ним и коллеги имея ключ должны угадать свой номер. То есть по факту каждый человек видит ключ(key) знает тех, кто был до него и видит тех, кто был после него:

$$key \quad 1 \quad \ldots \quad 3 \;\; ? \quad 5 \quad \ldots \quad 4$$

Мы хотим такой список, что зная $n-1$ число, мы можем понять n-ое.

Система Штейнера

Определение. Система Штейнера $S(t, n, \nu)$

КПК вообще сделал лирическое отступление про «Конструктор Ромашку». Пример странный, так что формальное объяснение:

Система Штейнера это набор из n —элементных подмножеств множества X из ν элементов таких, что любое t —элементное подмножество множества X содержалось ровно в одном из выбранных подмножеств.

В литературе чаще используют $S(t, k, \nu)$

По факту наша задача про мудрецов свелась к $S(n-1, n, k)$.

Бывает $S(4, 5, 11)$, не бывает $S(3, 4, 7)$

Решаем мудрецов $n = 4, k = 9$

Они берут конечное поле из 8 элементов: F_8. Мы знаем, что конечные поля существуют в F_{p^l}.

Есть $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}^3$, мы умеем думать об $\mathbb{R}^3$ как о коэффициентах перед i, j, k. Возьмем идею.

Возьмем 1, ξ, ξ^2 - 3 линейно независимых векторов в $\mathbb{R}^3$. Пусть у нас выполнено:

$$\xi^3 + \xi + 1 = 0$$

У нас получается нечто из 8 точек(будем ставить 0 или 1 перед $1, \xi, \xi^2$). Почему-то они удовлетворяют аксиомам поля (можете проверить).

$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ - гипербола, если $ad - bc \neq 0$.

Будем считать, что $f : (\mathbb{R} \cup \{\infty\}) \to (\mathbb{R} \cup \{\infty\})$ - **проективная прямая**

Оно представляет все точечки, кроме асимптоты. Поэтому будем считать, что $\infty \to \frac{a}{c}, -\frac{d}{c} \to \infty$. То есть у нас биективная функция.

Теорема.
$\forall \underbrace{a, b, c}_{\text{разл.}} \in \overline{\mathbb{R}} : \forall \underbrace{A, B, C}_{\text{разл.}} \in \overline{\mathbb{R}} : \exists! f$ - дробно-линейная, такая что:

$$f(a) = A, f(b) = B, f(c) = C$$

Доказательство:
Вот она:

$$\frac{y - A}{y - B} : \frac{C - A}{C - B} = \frac{x - a}{x - b} : \frac{c - a}{c - b}$$

КПК: Единственность покажете сами

Q.E.D.

А теперь склеиваем все воедино.

- Первый мудрец видит перед собой номера шляп: b, c, d. По вышесказанной теореме существует функция, которое отображает $f(2) = b, f(3) = c, f(4) = d$. Так как она единственная Первый мудрец говорит $f(1)$
- Второй мудрец имея 3 числа из 4 восстанавливает дробно-линейную функцию, а так как она единственная то получает ту же самую. Он восстанавливает свой номер и называет его
- Остальные аналогично восстанавливают свой номер

Еще решения мудрецов

X - множество, $|X| = k > 23$

Линия - это подмножество X
1. Любые две пересек. по ≤ 1 точке
2. $\forall a, b \in X : \exists!$ линия l: $a, b \in l$
3. $|l| = 4, 5, 6$

В угоду моей психике это будет сделано позже

1.2. Канторова Лестница.

Определена на $[0, 1]^2$. Это функция, которая строится

Процесс построения итерациями:

1. **Исходное состояние:** Начинаем с горизонтального отрезка от точки (0, 0) до точки (1, 1) на плоскости.

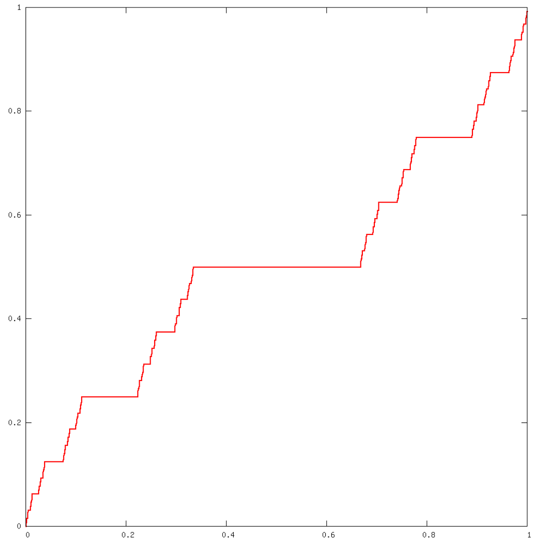
2. **Шаг 1 (n=1): Разделяем отрезок:** Делим исходный отрезок на три равные части по горизонтали (координата x). Теперь график состоит из трёх равных сегментов: восходящий, горизонтальный, восходящий.

3. **Шаг 2 (n=2): Повторяем для восходящих сегментов:** Каждый из двух наклонных сегментов, полученных на предыдущем шаге, мы обрабатываем так же, как исходный отрезок на шаге 1, но в

меньшем масштабе. Делим их на три части. На их средних третях (например, [1/9, 2/9] и [7/9, 8/9]) функция становится горизонтальной на уровнях `y = 1/4` и `y = 3/4` соответственно.

4. **Последующие шаги:** Этот процесс повторяется бесконечно. На каждом шаге `n` мы берем все `2^(n-1)` оставшихся наклонных сегментов, делим их на три части и делаем их средние трети горизонтальными на промежуточных уровнях между уже существующими.

Результат:



2. Теория Меры

2.1. Системы множеств

Определение. Полукольцо множеств $\mathcal{P}$

X - множество. $\mathcal{P} \subset 2^X$ - **полукольцо**, если:

1. $\emptyset \in \mathcal{P}$
2. $\forall A, B \in \mathcal{P}, A \cap B \in \mathcal{P}$
3. $\forall A, B \in \mathcal{P}, \exists \underbrace{B_1, ..., B_n}_{\text{диз.}} \in \mathcal{P} : A \setminus B = \bigcup\limits_{k=1}^{n} B_k$

Пример. Полукольцо ячеек в $\mathbb{R}^m$

$$a, b \in R^m : [a, b) = \{x \in \mathbb{R}^m : \forall x = 1...m : a_k \leq x_k < b_k\}$$

То есть множество таких параллелепипедов. Очевидно оно удовлетворяет всем трем аксиомам полукольца.

Еще пример

$X = \{1, ..., 6\}^m$. Покажем, что $\mathcal{P}$ - полукольцо для этого множества

1. Очевидно принадлежит.
2. $A_{c_1 c_2} \cap A_{c_5} = A_{c_1 c_2 c_5} \in P$ - работает
3. TODO

Пример. Полукольцо рациональных чисел

$[a, b)$, где $a_i, b_i \in \mathbb{Q}$

Антисвойство

$\mathcal{P}$ - полукольцо: $A, B \in \mathcal{P}$. Тогда вообще говоря $A \cup B, A \setminus B, X \setminus A, A \vartriangle B$ не лежат в $\mathcal{P}$

Свойство:

$\forall A, B_1, ..., B_k \in \mathcal{P} : \exists \underbrace{D_1, ..., D_n}_{\text{диз.}}$ - кон. количество: $A \setminus \left(\bigcup\limits_{i=1}^{k} B_i \right) = \bigsqcup\limits_{j=1}^{n} D_j$

Это доказывается по индукции

Определение. Алгебра подмножеств пространства X

$\mathcal{a} \subset 2^X$ - такой объект называется **алгеброй**, если выполнены свойства:

1. $X \in \mathcal{a}$
2. $A, B \in \mathcal{a} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{a}$

Свойства

1. $\varnothing = X \setminus X \in \mathcal{a}$
2. $A, B \in \mathcal{a} \;\; \Rightarrow \;\; A \cap B = A \setminus (A \setminus B) \in \mathcal{a}$
3. $A^c = X \setminus A \in \mathcal{a}$
4. $A \cup B = (A^c \cap B^c)^c \in \mathcal{a}$
5. Всякая алгебра есть полукольцо

Пример. Тривиальный - 2^X

Пример. Хитрый, но простой

$X = \mathbb{R}^2$. $\mathcal{a}$ состоит ограниченных множеств и из дополнений ограниченных множеств.

- $\emptyset, X \in \mathcal{a}$
- Выполняется вторая аксиома:
  1. A - огр.

2. A^c - огр. +. B - огр. $\Rightarrow (A \setminus B)^c$ - огр. +. B^c - огр. $\Rightarrow A \setminus B \subset B^c \Rightarrow$ огр.

Пример. На счётность

$X =$ бесконечное множество: $\mathcal{a} = \{A \subset X : A \text{ НБЧС или } X \setminus A \text{ НБЧС}\}$

Определение. σ-алгебра $\mathcal{a}$ подмножества X

$\mathcal{a} \in 2^X$ и выполняется:

1. $\mathcal{a}$ - алгебра
2. $\forall A_1, A_2, ... \in \mathcal{a} : \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i \in \mathcal{a}$

Свойство:

$$\forall A_1, A_2, ... \in \mathcal{a} : \bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i \in \mathcal{a}$$

2.2. Объем

Определение. Конечно аддитивная функция

$X, \mathcal{P}$ - полукольцо подмножеств X, $\varphi : \mathcal{P} \to \overline{\mathbb{R}}$. φ - **конечно аддитивная функция**, если:

1. $\varphi(\emptyset) = 0$
2. $A, A_1, ..., A_m, A = \bigsqcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ - дизъюнктное объединение, выполнено:

$$\varphi(A) = \sum_{i=1}^{m} \varphi(A_i)$$

Определение. Объем

$X, \mathcal{P}$ - полукольцо подмножеств X, $\varphi : \mathcal{P} \to \overline{\mathbb{R}}$. φ - **объем**, если:

1. $\varphi \geq 0$
2. φ - конечно-аддитивно

Пример.

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ возрастает и непрерывно. Давайте зададим $\mu_g[a, b) = g(b) - g(a)$ - тоже пример объема.

Теорема. Свойства

$\mu : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$, где $\mathcal{P}$ - полукольцо. Тогда выполнено:

0. $B \subset A \Rightarrow \mu B \leq \mu A$ — монотонность объема.
1. **Усиленная монотонность**: $\forall A_1, ..., A_n, A \in \mathcal{P} : \bigsqcup\limits_{i=1}^{n} A_i \subset A$:

$$\mu A \geq \sum_{i=1}^{n} \mu A_i$$

2. **Конечная полуаддитивность**: $\forall A_1 ...., A_n : A \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$:

$$\mu A \leq \sum u A_i$$

3. $A, B, A \setminus B \in \mathcal{P} : \mu(B) < +\infty$. Тогда:

$$\mu(A \setminus B) \geq \mu A - \mu B$$

Доказательство:

1. $A \setminus (\bigsqcup A_i) = \bigsqcup\limits_{\text{кон.}} B_j$ - по модиф. условию кольца. Тогда по вышесказанному:

$$A = \bigsqcup A_i \cup \bigsqcup B_j$$

По определения объема:

$$\mu A = \sum \mu A_i + \sum \mu B_j$$

Что и требовалось показать.

2. $B_i := A \cap A_i \in \mathcal{P} : A = \bigcup\limits_{\text{кон.}} B_i$.

Теперь давайте действовать так: Обозначим за C_i - то какие части множества добавляет та или иная B_i

$$C_i = B_i \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{i-1} B_j \right)$$

Тогда $A = \bigsqcup_{i=1}^{n} C_i$. НО. Мы не можем сразу сделать вывод об объеме, так как не факт что C_i лежат у нас в полукольцо. НО каждое C_i мы можем составить из конечного числа множеств по аксиомам полукольца. Воспользуемся усиленной монотонностью и докажем требуемое.

3. Он очевиден из прошлых пунктов.

КПК: Это проверка на вашу вменяемость

Q.E.D.

2.3. Мера

Определение. Мера.
$X, \mathcal{P}$ - полукольцо: $\mu : \mathcal{P} \to \overline{\mathbb{R}}$ — **мера**, если:
1. μ - объем
2. μ - счетно-аддитивно

Замечание: Счетная аддитивность: $\forall A_1, \ldots \in \mathcal{P} : A = \bigsqcup A_i : \mu A = \sum\limits_{i=1}^{+\infty} \mu A_i$

Замечание: Объем $\not\Rightarrow$ выполняется счетная аддитивность.

Теорема об эквивалентности счетной аддитивности и счетной полуаддитивности .
$\mu : \mathcal{P} \to \overline{\mathbb{R}}$ — объем. Тогда эквивалентно:
1. μ — мера, т.е μ — счетно-аддитивна
2. μ — счетно-полуаддитивна (нет дизъюнктивности): $\forall A, A_1 \ldots \in \mathcal{P},\ \ A \subset \bigcup A_i$:

$$\mu A \leq \sum_i \mu A_i$$

Доказательство:

1 ⇒ 2. Берем второй пункт теоремы о свойствах объема, но вместо конечного объединения по k берем счетное объединение (так как у нас теперь мера, то все хорошо) и тадам, все получается.

2 ⇒ 1. Надо проверить, что:

$$A = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i \overset{?}{\Rightarrow} \mu A = \sum_{i=1}^{\infty} \mu A_i$$

Воспользуемся усиленной монотонностью, тогда для любого n будет верно:

$$\sum_{i=1}^{n} \mu A_i \leq \mu A$$

По определению счетной полуаддитивности:

$$\mu A \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu A_i$$

Итого :

$$\sum_{i=1}^{n} \mu A_i \leq \mu A \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu A_i$$

И если перейти к пределу при $n \to +\infty$ мы сразу получим то, что требуется.

Q.E.D.

Следствие: $A \in \mathcal{P}, A_n \in \mathcal{P}, \mu A_n = 0, \mu$ - объем. Пусть $A \subset \bigcup A_n$. Тогда $\mu A = 0$

Формулировка теоремы о непрерывности меры снизу.
$\mathcal{a}$ - алгебра. $\mu : \mathcal{a} \to \overline{\mathbb{R}}$ - объем. Тогда если выполнено:
1. μ — мера
2. μ — непрерывны снизу:

$$\forall A, A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{a}, \quad A_1 \subset A_2 \subset \ldots, \quad A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

То выполнено:

$$\mu A = \lim_{i \to \infty} \mu A_i$$

Теорема о непрерывности меры сверху.

$\mathcal{a}$ — алгебра, $\mu : \mathcal{a} \to \mathbb{R}$ — *конечный* объем. Тогда эквивалентно:

1. μ — мера, т.е счетно-аддитивна
2. μ — непрерывна сверху, те:

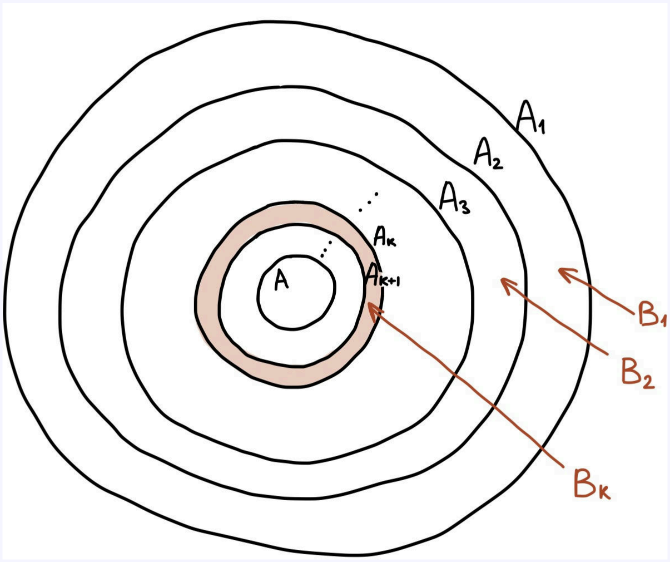
$$\forall A, A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{a}, \quad A_1 \supset A_2 \supset \ldots, \quad A = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$$

Следует:

$$\mu A = \lim_{i \to \infty} \mu A_i$$

Доказательство:

Нарисуем упрощающий рисунок:



1 ⇒ 2

Пусть $B_k := A_k \setminus A_{k+1}$. Тогда такие B_k дизъюнктивны. Отсюда получаем, что

$$A_1 = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} B_i \sqcup A$$

Так как μ мера, то получаем, что:

$$\mu A_1 = \underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} \mu B_i}_{\text{сходится}} + \mu A$$

Теперь посмотрим на «хвост» этого ряда, и аналогично первому утверждению доказательства напишем:

$$\mu A_i = \sum_{k=i}^{\infty} \mu B_k + \mu A$$

Т.к. ряд из $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu B_i$ сходится, то при $i \to +\infty$, «хвост» $\to 0$: $\sum\limits_{k=i}^{\infty} \mu B_k \underset{i\to+\infty}{\to} 0$ Делаем предельный переход в равенстве выше, и получаем:

$$\lim_{i\to\infty} \mu A_i = 0 + \mu A = \mu A$$

2 ⇒ 1.

Заметим, что из условия следует:

$$A_1 \supset A_2 \supset \dots, \quad A = \bigcap A_k = \varnothing \Rightarrow \mu A = \lim_{i\to+\infty} \mu A_i = 0$$

Мы хотим проверить счетную аддитивность, т.е.

$$C = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} C_i \overset{?}{\Rightarrow} \mu C = \sum_{i=1}^{\infty} \mu C_i$$

Для этого введем множества A_k следующим образом:

$$A_k = \bigcup_{i=k+1}^{\infty} C_i = C \setminus \left(\bigsqcup_{i=1}^{k} C_i \right)$$

Так как это конечное объединение, то $\bigsqcup\limits_{i=1}^{k} C_i \in \mathcal{a}$, а значит и правая часть $\in \mathcal{a} \Rightarrow A_k \in \mathcal{a}$
Заметим также, что $\bigcap\limits_{k=1}^{+\infty} A_k = \varnothing$, т.к. все C_i дизъюнктны, то любая точка из C содержится ровно в одном C_i, а значит в $A_{k>i}$ она уже содержаться не будет (по определению A_k), и в пересечении всех A_k её тоже не будет

Отсюда следует, что мы можем применять замечание из начала доказательства.
Осталось только заметить, что:

$$C = \bigsqcup_{i=1}^{k} C_i \sqcup A_k$$

Т.к. μ — объем:

$$\mu C = \sum_{i=1}^{k} \mu C_i + \mu A_k$$

Делаем предельный переход при $k \to +\infty$

$$\mu C = \sum_{i=1}^{+\infty} \mu C_i + 0$$

Q.E.D.

2.4. Продолжение меры.

<u>Определение.</u> Пространство с мерой

Обозначается тройкой $\left(\underbrace{X}_{\text{мн-во}}, \underbrace{\mathcal{a}}_{\sigma\text{-алг.}}, \underbrace{\mu}_{\text{мера}}\right)$

<u>Определение.</u> Полная мера

$\mu : \mathcal{P} \subset 2^X \to \overline{\mathbb{R}}$ — мера

μ — **полная мера**, если

$$(B \in \mathcal{P} : \ \mu(B) = 0) \Rightarrow (\forall A \subset B : \ A \in \mathcal{P}, \text{ а значит } \mu(A) = 0)$$

Формально: если в полукольце есть множество меры 0, то все его подмножества также лежат в полукольце, а значит тоже имеют меру 0

<u>Определение.</u> Сигма-конечная мера

$\mu : \mathcal{P} \subset 2^X \to \overline{\mathbb{R}}$ — мера (или объём)

μ — **σ-конечная мера** (или объем), если

$$\exists A_1, A_2, ... \in \mathcal{P} \quad X = \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i, \ \mu(A_i) < +\infty$$

<u>Замечание.</u> Множество измеримо, если оно лежит в области определения меры

<u>Теорема о лебеговском продолжении меры.</u>

$\mathcal{P}_0 \subset 2^X$ — полукольцо: $\mu_0 : \mathcal{P}_0 \to \overline{\mathbb{R}}$ — σ-конечная мера.

Тогда $\exists \sigma$-алгебра $\mathcal{a} : \mathcal{P}_0 \subset \mathcal{a}$ и $\exists \mu$ - мера на $\mathcal{a}$ такие, что:

1. $\mu|_{\mathcal{P}} = \mu_0$, т.е. μ — продолжение μ_0 на $\mathcal{a}$
2. μ — полная мера
3. Если $\mathcal{a}_1$ - σ-алгебра, μ_1-мера, полная, $\mathcal{P} \in \mathcal{a}_1, \mu_1|_{\mathcal{P}}$, то $\mathcal{a} \subset \mathcal{a}_1, \mu_1|_a = \mu$
4. Если $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}_2 \subset \mathcal{a} : \mu_2 \ |_{\mathcal{P}} = \mu_0$, то тогда $\mu|_{\mathcal{P}_2} = \mu_2$
5. $A \in \mathcal{a}, \mu A$ - кон, то

$$\mu A = \inf\left(\sum \mu P_k, A \subset \bigcup_{k=1}^{+\infty} P_k, \text{где } P_k \in \mathcal{P}\right)$$

К счастью, без доказательства

<u>Определение.</u> μ-измеримое множество

$A \subset X$ — μ-измеримо, если $\forall E \subset X$:

$$\mu E = \mu(A \cap E) + \mu\left(A^C \cap E\right)$$

2.5. Мера Лебега.

Автор ничего не понимает и еще в будущем будет стдеть и перепечатывать доказательство. Пока так.

Лемма. Счетная аддитивность классического объема

Счетная аддитивность классического объема $\mathcal{P}^m$ — множество всех ячеек на $\mathbb{R}^m$.

μ — классический объем. Тогда μ — σ-конечная мера.

Доказательство:

1. σ-конечность очевидна: можно либо разлиновать пространство на клеточки как в тетради, либо просто взять увеличивающийся параллелепипед
2. Осталось доказать, что μ - мера. Если докажем счетную полуаддитивность, то по т. об эквив. счетной аддитивности и счетной полуадитивности, получим, что μ - мера.

$$P = [a, b),\ P_n = [a_n, b_n) :\ P \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} P_n \overset{?}{\Rightarrow} \mu P \leq \sum \mu P_n$$

Далее под фразой «чуть уменьшим» вектор из $\mathbb{R}^m$ будем подразумевать небольшое уменьшение каждой из его координат. Возьмем $\varepsilon > 0$:

1. Чуть уменьшим b и получим b' :

$$[a, b'] \subset [a, b) :\ \mu(P \setminus [a, b')) < \varepsilon$$

2. Теперь для каждого P_n немного уменьшим a_n и получим a'_n :

$$(a'_n, b_n) \supset [a_n, b_n) :\ \mu([a'_n, b_n) \setminus P_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}$$

3. Получаем, что $\underbrace{[a, b']}_{\text{компакт}} \subset \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} (a'_n, b_n)$

   Т.к. это компакт, а справа стоит открытое покрытие, то по определению существует конечное подпокрытие:

$$[a, b'] \subset \bigcup_{n=1}^{N} (a'_n, b_n)$$

Теперь в правую часть включения добавим часть точек, а слева уберем. Очевидно включение от этого не сломается:

$$[a, b') \subset \bigcup_{n=1}^{N} [a'_n, b_n)$$

По конечной аддитивности:

$$\mu[a, b) - \varepsilon \overset{(1)}{\leq} \mu[a, b') \overset{(3)}{\leq} \sum_{n=1}^{N} \mu[a'_n, b_n) \overset{(2)}{\leq} \sum_{n=1}^{N} \left(\mu[a_n, b_n) + \frac{\varepsilon}{2^n} \right)$$

$$\mu[a, b) \leq \varepsilon + \sum_{n=1}^{N} \mu[a_n, b_n) \leq 2\varepsilon + \sum_{n=1}^{+\infty} \mu[a_n, b_n)$$

Делаем предельный переход при $\varepsilon \to 0$ и получаем ровно то, что и хотели.

Q.E.D.

Определение. **Мера Лебега**

Мера Лебега в $\mathbb{R}^m$ — это результат применения теоремы о продолжении лебеговском продолжении меры к класс. объему.

$(\mathbb{R}^m, \mathcal{P}, \mu_0) \rightsquigarrow (\mathbb{R}^m, \mathfrak{M}^m, \lambda)$, где μ_0 - классический объема, λ, λ_m — мера Лебега (иногда хотим указывать размерность пространства)

Свойство:

1. Объединение, пересечение (в том числе счетные) множеств, изменимые по Лебегу тоже
2. Полнота. $\lambda A = 0, B \subset A \Rightarrow \lambda B = 0$
3. Содержит все открытые и замкнутые множества в $\mathbb{R}^m$ (доказательство см ниже)
4. E — измеримо и $\lambda(E) = 0 \Rightarrow$ у E нет внутренних точек
5. $A \in \mathcal{M}^m$, тогда $\forall \varepsilon > 0$:
   - $\exists$ открытое $G_\varepsilon : A \subset G_\varepsilon : \lambda(G_\varepsilon \setminus A) < \varepsilon$
   - $\exists$ замкнутое $F_\varepsilon : A \supset F_\varepsilon : \lambda(A \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon$

Доказательство:

5. Пусть $\lambda A < +\infty : \forall \varepsilon > 0 : \exists P_k : A \subset \bigcup P_k$ по пункту 5 теоремы о лебеговском продолжении меры

$$\lambda A \leq \sum \lambda P_k \leq \lambda A + \varepsilon$$

Заменим $P_k = [a_k, b_k]$ на $P_k' = (a_k - \alpha_k, b_k)$, так, чтобы $\lambda P_{k'} < \lambda P_k + \frac{\varepsilon}{2^k}$.

Возьмем $G_\varepsilon := \bigcup P_k'$ - открытое. Тогда:

$$\lambda A \leq \sum \lambda P_k' < \left(\sum \lambda P_k\right) + \varepsilon < \lambda + 2\varepsilon$$

Заметим, что тогда выбранное G_ε удовлетворяет условию.

Теперь для произвольного A: $\mathbb{R}^m = \bigsqcup Q_i$. $A \cap Q_i$. Существует открытое G_i, что $(A \cap Q_i) \subset G_i$

$$\lambda(G_i \setminus (A \cap Q_i)) < \frac{\varepsilon}{2^i}$$

TODO: тут не совсем понял, как мы такие G_i можем выбрать, ладно

$A = \bigsqcup (A \cap Q_i) \subset \bigcup G_i = G$ - открытое.

Ну и видно, что найденное G подходит условию.

Q.E.D.

Лемма. **О смысле жизни множеств меры 0**

$O \subset \mathbb{R}^m$ — открытое. Тогда $\exists Q_i :\ O = \bigsqcup\limits_{i=1}^{+\infty} Q_i$, где Q_i — кубические ячейки:

- можно считать, что они с рациональными координатами.
- можно даже считать, что с двоично-рациональными
- они «закопаны» внутрь области O. $Q_i \subset \overline{Q_i} \subset O$

Доказательство:

$\forall x \in O$:Возьмем $Q(x)$ - любую кубические ячейку с нужными нам из условия свойствами, в которую входит x

$$O = \bigcup_{x \in Q} Q(x) \underset{\text{шаманим}}{=} \bigcup_{i=1}^{+\infty} Q(x_i)$$

Шаманство: O — *континуальное* множество. Казалось бы, как такое посчитать. Заметим, что ячеек с двоично-рациональными координатами счетно. Так что мы просто пройдемся по ним и будем нумеровать, так что шаманство работает!

Теперь осталось сделать их дизъюнктными. Ну давайте брать лишь ту часть, которую наша ячейка добавляет и разбивать ее на ячейки, каждая из которых из очевидных соображений будет удовлетворять условию

Q.E.D.

Лемма. О смысле жизни множеств меры 0
E — измеримо, $\lambda E = 0$. Тогда $\forall \varepsilon > 0 : \exists Q_i$, такие что:

$$E \subset \bigcup_{i=1}^{+\infty} Q_i \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda Q_i < \varepsilon$$

где Q_i — кубические ячейки с двоично-рациональными координатами

Замечание: Вместо кубических ячеек можно взять шары, потому что

$$Q\left(a, \frac{r}{\sqrt{m}}\right) \subset B(a, r) \subset Q(a, r) \subset B\big(a, r\sqrt{m}\big)$$

Доказательство:

Из 5го пункта продолжения меры:

$$0 = \lambda E = \inf\left\{ \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda P_i \;\middle|\; E \subset \bigcup P_i \right\}$$

Т.к. inf равен 0, то мы можем найти там сколько угодно малое значение

Подберем покрытие E параллепипедами $P_i : \sum\limits_{i=1}^{+\infty} \lambda P_i < \frac{\varepsilon}{2}$

Теперь каждую ячейку P_i «поместим» в ячейку R_i с двоично-рациональными координатами, так чтобы

$$\lambda(R_i \setminus P_i) < \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}$$

Получается, что $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} \lambda R_i < \varepsilon$

Чтобы ячейки стали кубическими, аналогично прошлому лемме раздробим R_i

Q.E.D.

Пример неизмеримого по Лебегу множества

Зададим отношение $\sim$ на $\mathbb{R}$:

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$$

$\mathbb{R}/_\sim = A$ — т.е из каждого класса эквивалентности взяли по одной точке. Заодно можно считать, что $A \subset [0, 1]$

Заметим, что есть следующее включение:

$$[0,1] \subset \bigsqcup_{q\in\mathbb{Q}\cap[-1,1]} (A+q) \subset [-1,2]$$

Левая часть следует из того, что если взять точку $x \in [0,1]$, представителя его класса $y \in A$ и найти $x - y$, то окажется что это значение во-первых рациональное, во-вторых $\in [-1,1]$, а т.к. мы перебираем все рациональные числа, из этого отрезка в качестве смещений, то в x мы тоже попадем
Правая часть следует из того, что смещая точки из отрезка $[0,1]$ на смечение от -1 до 1, мы всегда попадаем в отрезок $[-1,2]$

Предположим A — измеримо, тогда можем посчитать меру отрезков (воспользуемся счетной аддитивностью):

$$1 \leq \sum_{q\in\mathbb{Q}\cap[-1,1]} \lambda(A+q) \leq 3$$

Пока строго обосновывать не будем, но при сдвиге мера множества не меняется
Значит $\sum \lambda(A+q)$ — сумма счетного числа одинаковых слагаемых, соответственно есть два варианта:
1. $\lambda(A+q) = 0 \Rightarrow \sum \lambda(A+q) = 0$
2. $\lambda(A+q) \neq 0 \Rightarrow \sum \lambda(A+q) = \infty$

В обоих случаях одно из неравенств не выполняется, а значит A — неизмеримое.

Регулярность меры Лебега.
$A \in \mathcal{M}^m, \forall \varepsilon > 0:$
1. $\exists$ открытое $G_\varepsilon : A \subset G_\varepsilon : \lambda(G_\varepsilon \setminus A) < \varepsilon$
2. $\exists$ замкнутое $F_\varepsilon : A \supset F_\varepsilon : \lambda(A \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon$

Доказательство:

1. a) Пусть $\lambda A < +\infty$.
   Тогда: $\lambda A = \inf\left\{\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda P_k | A \subset \bigcup_{k=1}^{+\infty} P_k\right\}$ по теореме о продолжении меры.

   Из технического описания мы можем выбрать элемент, который лежит сколь угодно близко к inf:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists(P_k) : \lambda A \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda P_k \leq \lambda A + \frac{\varepsilon}{2}$$

   Теперь осталось сделать каждое P_k открытым, чтобы их счетное объединение было тоже открытым, содержало A и было ограничено. На это мы оставили «запас» $\frac{\varepsilon}{2}$, как раз на то чтобы раздуть ячейки

   Немного уменьшим a_k и получим a_k' :

$$(a_k', b_k) \supset P_k,\ \text{ а также }\ \mu((a_k', b_k) \setminus P_k) < \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$$

   Тогда наше $G_\varepsilon := \bigcup_{k=1}^{+\infty} (a_k', b_k)$ — открытое, т.к. это счетное объединение открытых

   Очевидно, что:

   1. Т.к. $(a_k', b_k) \supset P_k \Rightarrow A \subset G_\varepsilon \Rightarrow \lambda A \leq \lambda G_\varepsilon$
   2. $\lambda G_\varepsilon \leq \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda P_k\right) + \frac{\varepsilon}{2} < \lambda A + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \lambda A + \varepsilon$

   Мы получили ровно то что хотели: $\mu(G_\varepsilon \setminus A) < \varepsilon$

б) Теперь предположим, что $\mu A = +\infty$

Тогда по σ-конечности: $\mathbb{R}^m = \bigsqcup Q_i$, где Q_i — кубические ячейки

Рассмотрим A как пересечение с этой «сеткой» и для каждого пересечения будем брать свое $G_{e,j}$ такое что:

$$A = \bigsqcup_{j=1}^{+\infty} \underbrace{A \cap Q_j}_{\subset G_{\varepsilon,j}}, \quad \lambda\left(G_{\varepsilon,j} \setminus \left(A \cap Q_j\right)\right) < \frac{\varepsilon}{2^j}$$

Тогда $G_\varepsilon := \bigcup\limits_{j=1}^{+\infty} G_{\varepsilon,j}$ — открыто, т.к. счетное объединение открытых.

2. Возьмем дополнение и проделаем все рассуждения про него. А дальше, у получившегося открытого множества возьмем дополнение и заметим, что его разница с A как раз есть ε

Q.E.D.

2.6. Произведение мер

Определение. Произведение мер
$(X, \mathcal{A}, \mu), (Y, \mathcal{B}, \nu)$, μ, ν - сигма-конечные.

$P = \{A \times B \mid A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}$ - полукольцо измеримых прямоугольников

Мера, полученная из m_0(из теоремы о произведении мер) по теореме о Лебеговском продолжении меры, на P обозначается $\mu \times \nu$.

Соответствующее пространство и сигма алгебра обозначаются:

$$(X \times Y, \mathcal{A} \times \mathcal{B}, \mu \times \nu)$$

Теорема. Произведение мер
$(X, \mathcal{A}, \mu), (Y, \mathcal{B}, \nu)$. Тогда:
- m_0 мера на P, где $m_0(A \times B) = \mu A \cdot \nu B$
- μ, ν - сигма-конечные, откуда m_0 - сигма-конечная

Доказательство:
$x_{A \times B}(x, y) = x_{A(x)} \cdot x_{B(y)}$

$P = \bigsqcup_{\text{счетно}} P_k, P = A \times B, P_k = A_k \times B_k$

TODO: ТУТ ЧТО-ТО НЕПОНЯТНОЕ

Q.E.D.

Принцип Кавальери.
$(X, \mathcal{A}, \mu)$ и $(Y, \mathcal{B}, \nu)$. Меры μ, ν - σ-конечные и полные

$m = \mu \times v$. Построим $(X \times Y, A \otimes B, m), C \in A \otimes B$

Тогда:
1. При п.в $x : C_x \in$ B, где $C_x = \{y : (x, y) \in C\}$ - «типо сечение»
2. $x \mapsto \nu(C_x)$ измеримо* на X, $* : \exists \overline{f}$ всюду совпадает с f почти везде.
3. $mC = \int_X \nu(C_x) d\mu$

Доказательство:
Замечание:
1. C измеримое $\not\Rightarrow \forall x : C_x$ - измеримо
2. $\forall x, \forall y : C_x, C^y$ измеримы $\not\Rightarrow C$ измеримое

Рассмотрим **много случаев**

Пусть D - это класс (множество) подмножеств $X \times Y$, для которых принцип верен

(1) Простой случай:

$C = A \times B$, где $A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}$. Покажем, что $C \in D$, то есть что принцип выполнен:
1. $C_x = B, x \in A$ или $C_x = \emptyset, x \notin A$. Очевидно, что это измеримо при любых x
2. $x \mapsto \nu(C_x)$ это $\nu B \chi_A(x)$
3. $m(c) = \mu A \nu B = \int_X \nu B \cdot \chi_{A(x)} d\mu$

(2) Случай дизъюнктных входящих:

E_i - дизъюнктны и $E_i \in D$. Покажем, что $E = \bigsqcup\limits_{i=1}^{+\infty} E_i \in D$, то есть что принцип выполнен:

1. $E_x = \bigsqcup\limits_{i=1}^{+\infty} (E_i)_x$ - измеримо при п.в x $(E_i)_x \Rightarrow E_x$ измеримо при почти всех x
2. $\nu E_x = \sum \nu(E_i)_x$, тогда получим, что это будет сумма неотрицательных изм. функций.

Откуда $x \mapsto \nu(C_x)$ - измеримо*

3. $\int_X \nu E_x \,\mathrm{d}\mu = \int_X \sum \nu(E_i)_x \,\mathrm{d}\mu \underset{\text{по т. об инт. полож рядов}}{=} = \sum\limits_i \left(\int_X \nu(E_i)_x \,\mathrm{d}\mu \right) = \sum\limits_i \mu E_i = mE$

(3) Случай пересечения входящих в D:

$E_i \in D, mE_i < +\infty, E_1 \supset E_2 \supset \ldots$ Заметим, что:

$(E_i)_x \subset (E_1)_x, \int \nu(E_1)_x d\mu = mE_1 < +\infty \Rightarrow \nu(E_1)_x$ п.в конечна $\Rightarrow \nu(E_i)_x$ п.в. конечна

Покажем, что $E := \bigcap\limits_{i=1}^{+\infty} E_i \in D$, то есть что принцип выполнен:

1. E_x измеримо, как пересечение измеримых
2. $\nu(E_i)_x \underset{i \to +\infty}{\to} \nu E_x$ по непрерывности меры v сверху (измеримо, как предел измеримых)
3. $\int_X \nu E_x \,\mathrm{d}\mu = \lim\limits_{i \to \infty} \int_X \nu(E_i)_x \,\mathrm{d}\mu = \lim\limits_{i \to +\infty} mE_i = mE$ - по непрерывности меры m сверху.

Промежуточный итог: $\mathcal{P} = \mathcal{A} \times \mathcal{B} : \bigcap\limits_i \bigcup\limits_j A_{ij} \in D$, где $A_{ij} \in \mathcal{P}$

(4) Множества меры 0:

$mE = 0$. Покажем, что $E \in D$

$\exists$ (почему?) $H = \bigcap\limits_i \bigcup\limits_j P_{ij}$, такой что $E \subset H, mH = 0, H \in D$ по построению

$0 = mH = \int_X \nu H_x d\mu \Rightarrow \nu H_x = 0$ при п.в. x

1. $\forall x : E_x \subset H_x \Rightarrow E_x$ измеримо
2. $\nu E_x = 0$
3. $\int \nu E_x d\mu = 0 = mE$

(5) Без куска меры 0:

C - измеримо, $mC < +\infty . C = H \setminus e$, где $me = 0, e \in D, H = \bigcap \bigcup P_{ij} \in D$

1. $C_x = H_x \setminus e_x$ - изм. почти везде, так как $e \subset H$
2. $x \mapsto \nu C_x = \nu H_x - \nu e_x$ - измеримо.
3. $\int_X \nu C_x d\mu = \int_X \nu H_x d\mu = mH = mC$

(6) Любое:

$X = \bigsqcup\limits_{i=1}^{+\infty} X_i, Y = \bigsqcup\limits_{j=1}^{+\infty} Y_j, \mu X_i < +\inf, \nu Y_i < +\infty$

$X \times Y = \bigsqcup\limits_{i,j} (X_i \times Y_j)$

$C = \bigsqcup\limits_{i,j} \big((X_i \times Y_j) \cap C \big)$ - то что внутри принадлежит по пункту 5., а итог верен по пункту 2.

Q.E.D.

Следствие о равенстве интеграла Лебега и определенного интеграла

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ - непр $f \geq 0$. Тогда:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{[a,b]} f\,\mathrm{d}\lambda_1$$

Доказательство:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lambda_2(\Pi\Gamma([a, b], f)) = \int_{[a,b]} f(x) d\lambda_1$$

Q.E.D.

Определение. **Сечение функции**

$f : C \to \overline{\mathbb{R}}, C \subset X \times Y$

$\forall x \in X : f_x(y) = f(x, y), y \in C_x$

$\forall y \in Y : f_y(x) = f(x, y), x \in C_y$

Теорема Тоннели.

$(X, \mathcal{A}, \mu), (Y, \mathcal{B}, \nu)$ - m, ν - σ-кон и полные, $m = \mu \times \nu$

$f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}, f \geq 0, f - \mathrm{m}$ - изм

Тогда:

1. при п.в. $x : f_x$ - измеримо относительно σ-алгебры $\mathcal{B}$
2. $x \mapsto \varphi(x) = \int_Y f_x d\mu$ - изм* на X
3. $\int_{X \times Y} dm = \int_X \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_X \left(\int_Y f(x, y)\,\mathrm{d}\nu(y)\right) \mathrm{d}\mu(x)$

Аналогичные рассуждения можно повторить по y.

Доказательство:

0) $f = \chi_C, C \subset X \times Y$ - изм.

$f_{x(y)} = \chi_{C_x}(y)$ при почти всех C_x изм. мн-во в $X \Rightarrow$ при этих x, f_x - измеримо.

$$\varphi(x) = \int_Y \chi_{C_x} y\,\mathrm{d}\nu(y) = \nu C_x \text{ - измеримо как функция по принципу Кавальери}$$

$$mC = \int_{X \times Y} \chi_C\,\mathrm{d}m = \int_X \nu(C_x)\,\mathrm{d}\mu = \int \varphi(x)\,\mathrm{d}\mu$$

1) f - ступ. $f = \sum_k \alpha_k \left(\chi_{C_k}\right)_X$ - используем первый пункт и линейность интеграла

2) $f \geq 0$, f-изм. $f = \lim g_n$, g_n - ступ, $0 \leq g_n < f$ - по теореме о характеристики функций с помощью ступ. $g_n \leq g_{n+1}$

$$\varphi(x) = \int_Y f_X\,\mathrm{d}\nu \underset{\text{Теорема Леви}}{=} \lim_{n \to +\infty} \int (g_n)_x\,\mathrm{d}\nu$$

Обозначим $\varphi_n(x) = \int (g_n)_x\,\mathrm{d}\nu$: $0 \leq \varphi_{n(x)} \leq \varphi_{n+1}(x)$

$$\int_X \varphi(x)\,\mathrm{d}\mu = \lim \int_X \varphi_n(x) d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_X \left(\int_Y g_{n(x,y)}\,\mathrm{d}\nu \right) \mathrm{d}\nu =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \int_{X\times Y} g_n\,\mathrm{d}\mu = \int_{X\times Y} f\,\mathrm{d}\mu$$

Q.E.D.

Определение. Бета - функция

$$\mathrm{B}(s,t) = \int_0^1 x^{s-1}(1-x)^{t-1}\,\mathrm{d}x, s, t > 0$$

Пример
$B(s,t) = \frac{\Gamma(s)\cdot\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)}$

Доказательство:

$$\Gamma(s)\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{s-1}e^{-x} \left(\int_0^{+\infty} y^{t-1}e^{-y}\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

Сделаем замену $y = u - x$:

$$\int_0^{+\infty} x^{s-1} \left(\int_0^{+\infty} (u-x)^{t-1}e^{-u}\,\mathrm{d}u \right) \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} x^{s-1}(u-x)^{t-1}e^{-u} d\lambda_2 =$$

$$= \int ... \left(\int ...dx \right) du = \int_0^{+\infty} e^u \left(\int_0^u x^{s-1}(u-x)^{t-1}\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}u =$$

$$= \int_0^{+\infty} e^u \int_0^1 (uv)^{s-1} \cdot u^{???}$$

дальше не распарсил свои записи, позже допишу

Q.E.D.

Пример. Объем шара в $\mathbb{R}^m$
Выведем привычные нам формулы для шаров в $\mathbb{R}^m$

Пусть $\alpha_m = \lambda_m(B(0,1)), \lambda_m(B(0,r)) = \alpha_m \cdot r^m$

$$\alpha_m = \int_{-1}^1 \alpha_{m-1}(1-y^2)^{\frac{n-1}{2}}\,\mathrm{d}y \underset{[t=y^2]}{=} \alpha_{m-1} \int_0^1 t^{-2}(1-t)^{\frac{m-1}{2}}\,\mathrm{d}y = \alpha_{m-1}\mathrm{B}\left(\frac{1}{2}, \frac{m+1}{2}\right) = \alpha_{m-1}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)}$$

$$a_m = a_{m-1}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)} = ... = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)} = \frac{\sqrt{\pi^{n+1}}\cdot\frac{3}{2}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)}$$

3. Интеграл

3.1. Основные определения

Определение. Разбиение множества E

Разбиением множества E называется его разбиение на конечное количество множеств, то есть:

$$E = \bigsqcup E_i$$

Определение. Ступенчатая функция

$f : X \to \mathbb{R}$ — называется **ступенчатой**, если:

$$\exists e_i : X = \bigsqcup_{\text{кон.}} e_i : \ \forall i \ f\big|_{e_i} = \text{const}$$

При этом такое разбиение называется **допустимым**.

Пример: Характеристическая функция $\chi_{e_k} = \begin{cases} 1, & x \in e_k \\ 0, & x \notin e_k \end{cases}$

Свойства

1. Если f, g — ступенчатые функции, то $\exists$ разбиение, допустимое для обоих
2. f, g — ступенчатые, $\alpha \in \mathbb{R}$. Тогда:

$$f + g, \ fg, \ \max(f, g), \ \min(f, g), \ |f|, \ \alpha f - \text{ступенчатые}$$

Определение. Лебеговские множества.

Пусть есть $f : E \subset X \to \overline{\mathbb{R}}$ и $a \in \mathbb{R}$. Тогда следующие 4 множества называются **Лебеговскими**:

1. $E(f < a) = \{x \in E, \ f(x) < a\}$
2. $E(f \leq a) = \{x \in E, \ f(x) \leq a\}$
3. $E(f \geq a) = \{x \in E, \ f(x) \geq a\}$
4. $E(f > a) = \{x \in E, \ f(x) > a\}$

Замечания:

- $E(f > a) = (E(f \leq a))^c$
- $E(f \leq a) = \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} E\left(f < a + \frac{1}{n}\right)$

Определение. Измеримая функция

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ — пространство с мерой. Возьмем $f : E \subset X \to \overline{\mathbb{R}}$, $E \in \mathcal{A}$. Тогда f — **измерима** на E, если

$$\forall a \in \mathbb{R} : \ E(f < a) \in \mathcal{A}$$

(аналогично для еще 3х случаев)

Замечание: Если f измеримо на X говорят, что X просто **измеримо**. Если $X = \mathbb{R}^m$, $\mathcal{A} = \mathfrak{m}^m$, то говорят, что X **измеримо по Лебегу**

Свойства:

1. f — измерима $\Rightarrow \forall a \in \mathbb{R} : \ E(f = a) = E(f \geq a) \cap E(f \leq a)$ — измеримо
2. f — измерима $\Rightarrow \forall \alpha \in \mathbb{R} : \ \alpha f$ — измерима
3. f — измерима на $E_k \Rightarrow f$ — измерима на $E = \bigcup E_k$
4. f — измерима на E, $E' \subset E, E' \in \mathcal{A} \Rightarrow$ измерима на E'
5. $f \neq 0$ на E, измерима $\Rightarrow \frac{1}{f}$ — измерима
6. $f \geq 0, \ \alpha > 0$ — измерима $\Rightarrow f^\alpha$ — измерима

Теорема. **Об измеримости пределов и супремумов.**
f_n — измеримые функции на X. Тогда:
1. $\sup f_n$, $\inf f_n$ — измеримы.
2. $\overline{\lim} f_n$, $\underline{\lim} f_n$ — измеримы.
3. Если $\forall x \quad \exists \lim\limits_{n \to +\infty} (f_n(x)) = f(x)$, то f — измерима.

Доказательство:
1) Пусть $g(x) := \sup f_n(x)$
Докажем, что

$$X(g > a) = \bigcup_n X(f_n > a)$$

Если это верно, то справа стоит счетное объединение измеримых множеств $\Rightarrow$ оно измеримо

Чтобы это показать, докажем включение в обе стороны.

Покажем, что

$$X(g > a) \subset \bigcup_n X(f_n > a)$$

Рассмотрим какой-нибудь $x \in X(g > a)$. По определению множества $X(g > a): \ g(x) > a \Rightarrow$ $\sup f_n(x) = g(x) > a$. Тогда по техническому описанию $\sup: \ \exists n : f_n(x) > a$. Значит x лежит в правой части тоже.

Покажем, что

$$X(g > a) \supset \bigcup_n X(f_n > a)$$

Рассмотрим какой-нибудь $x \in \bigcup_n X(f_n > a)$. Это значит, что $\exists n : \ x \in X(f_n > a)$.

По определению этого множества $f_n(x) > a \Rightarrow g(x) = \sup f_n(x) > a$

2) Распишем верхни предел по определению (для нижнего все будет аналогчино)
$\sphericalangle \ s_n := \sup(f_n(x), f_{n+1}(x), ...)$
Заметим, что по предыдущему пункту s_n — измерим (т.к. она sup измеримых)

$\overline{\lim} f_n(x) = \inf_n(s_n)$
Аналогично $\overline{\lim} f_n(x)$ — измерима, т.к. s_n измеримы

3) Очевидно: так как если $\exists \lim \Rightarrow \overline{\lim} = \lim = \underline{\lim}$

Q.E.D.

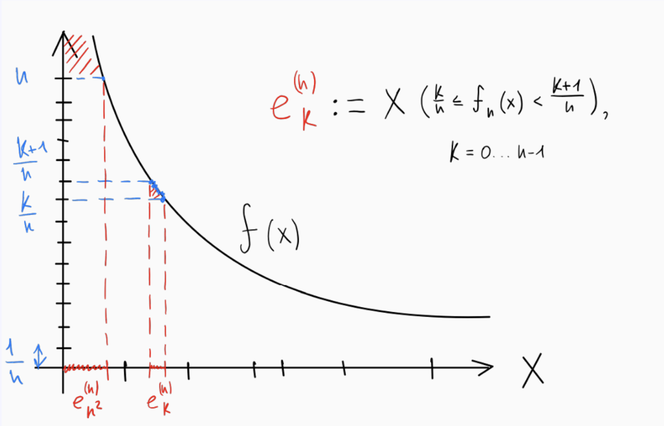
Следствие. f - измеримо $\Rightarrow |f|, f^+, f^-$ - измеримы

Теорема. **Характеризация измеримых функций с помощью ступенчатых**

$f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $f \geq 0$,f — измеримо. Тогда $\exists f_n$ — ступенчатые функции:

1. $0 \leq f_n \leq f$
2. $\forall x : \lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x)$

Доказательство:



Выберем $n \in \mathbb{N}$ и нарежем ось «y» сначала на n отрезков длины 1, а потом каждый из них на отрезки длины $\frac{1}{n}$. И введем следующие обозначения:

$$e_k^{(n)} := X\left(\frac{k}{n} \le f < \frac{k+1}{n}\right),\ k = 0, 1, ..., n^2 - 1$$

$$e_{n^2}^{(n)} = X(f \ge n)$$

Заметим, что X разбилось на $n^2 + 1$ дизъюнктных кусков: $X = \bigsqcup_k e_k^{(n)}$.

Замечание: Концептуально функция не обязательно убывающая, мы просто делим на куски и возможно, что $e_k^{(n)}$ будут не непрерывны, как на рисунке.

Построим теперь ступенчатую функцию g_n :

$$0 \le g_n := \sum_{k=0}^{n^2} \frac{k}{n} \cdot \chi_{e_k^{(n)}} \le f$$

Левое неравенство очевидно, т.к. каждое из слагаемых не меньше 0
Правое неравенство следует из того, что на $e_k^{(n)}$ значение функции $f \ge \frac{k}{n}$, а в сумме мы рассматриваем функцию, у которой на $e_k^{(n)}$ значение в точности равно $\frac{k}{n}$. Неравенство становится очевидным.

Найдем предельную функцию:

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = f(x) = \begin{cases} +\infty, & \text{если } f(x) = +\infty, \left(\text{т.к. } \forall n: \ x \in e_{n^2}^{(n)} \Rightarrow g_n(x) = n\right) \\ f(x), & \text{если } f(x) < +\infty, \left(\text{т.к. НСНМ } n > f(x)\ x \in e_k^{(n)} \overset{(\star)}{\Rightarrow} |f(x) - g_n(x)| < \frac{1}{n}\right) \end{cases}$$

$(\star)$: Т.к. $n > f(x)$, то $k < n^2$, а по определению $e_k^{(n)}$ значения на этом множестве g_n отличаются от f не более, чем на $\frac{k+1}{n} - \frac{k}{n} = \frac{1}{n}$.

Теперь определим f_n так, чтобы они были монотонными:

$$f_n(x) := \max(g_1, g_2, ..., g_n)$$

Очевидно, что $f_n = \max(g_1, ..., g_n)$, $0 \le f_n \le f_{n+1} \le f$ и они ступенчатые.

Q.E.D.

Todo: сверьте следствия

Следствие 1:

$f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ — измеримая. Тогда $\exists f_n$ — ступенчатые, что:
1. $\forall x\ \forall n: \ |f_n| \le |f|$
2. $\forall x: \ \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$

Доказательство:

Очевидно, что f^+, f^- — измеримы, и при этом $f^+, f^- \ge 0$. Тогда по теореме:
1. $\exists h_n$ — ступ.: $\ h_n \uparrow, \ \ 0 \le h_n \le f^+, \ \ \lim h_n = f^+$
2. $\exists g_n$ — ступ.: $\ g_n \uparrow, \ \ 0 \le g_n \le f^-, \ \ \lim g_n = f^-$

По свойству ступенчатых функций $h_n - g_n$ — тоже ступенчатая. И при этом: $h_n - g_n \to f^+ - f^- = f$
Тогда $\sphericalangle\ f_n := h_n - g_n$ и докажем что они подходят.

Второе условие выполнено за счет предпоследней строчки

Докажем первое условие, по определению срезок:

$$\forall x: \ f^+(x) = 0 \text{ или } f^-(x) = 0$$

Поэтому

$$\forall x\ \forall n: \ |f_n| = |h_n(x) - g_n(x)| = h_n(x) \text{ или } g_n(x)$$

И при этом

$$h_n(x) \le f^+(x) \le |f| \ \text{ и } \ g_n(x) \le f^-(x) \le |f|$$

Получается, что $|f_n| < |f|$ — ровно то, что надо

Q.E.D.

Следствие 2:
f, g — измеримы. Тогда fg — тоже измеримо

Доказательство:

Рассмотрим $f_n \to f, \ g_n \to g$ — ступенчатые из нашей теоремы. При этом $f_n, \ g_n$ — конечные (т.к. сутпенчатые). Тогда по свойству поточечной сходимости:

$$f_n g_n \to fg$$

(будем считать, что $0 \cdot \pm\infty = 0$)

Q.E.D.

Следствие 3:
f, g — измеримы. Считаем, что $\nexists x\ f(x) = \pm\infty, \ g(x) = \mp\infty$. Тогда $f + g$ — измеримо

Доказательство:

$\exists f_n, \ g_n$ — ступенчатые из нашей теоремы. Тогда по свойству поточечной сходимости:

$$f_n + g_n \to f + g$$

Q.E.D.

3.2. Преобразование меры Ω при сдвигах и линейных отображениях

Лемма о сохранении измеримости при непрерывном отображении .

$T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ — непрерывно, $\forall E \in \mathcal{M}^m : \lambda_m E = 0$ выполняется: $\lambda T(E) = 0$. Тогда:

$$\forall A \in \mathcal{M}^m \ : TA \in \mathcal{M}^n$$

Доказательство:

Будем брать наше оставшееся множество и по регулярности меры лебега брать $F_{e,n}$. Будем обозначать их просто замкнутое F_n внутри него и уменьшать наше ост. множество. Заметим, что тогда получится:

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \cup \mathrm{C},$$

F_n — компакт, $\lambda C = 0$.

$$TA = \bigcup_{n=1}^{\infty} T(F_n) \cup T(\mathrm{C})$$

$T(F_j)$ — компакт (как образ компакта), $\lambda T(\mathrm{C}) = 0 \Rightarrow TA$ — измеримо.

Q.E.D.

Теорема о сохранении измеримости при гладком отображении.

$O \subset \mathbb{R}^m$ - открытая. $\Phi : O \to \mathbb{R}^m$, $\Phi \in C^1$

Тогда $\forall A \subset O$ - измеримых по Лебегу $\Phi(A)$ тоже измеримо по Лебегу

Доказательство:

Φ - непрерывно. Откуда достаточно проверить, что $\lambda A = 0 \Rightarrow \lambda\Phi(A) = 0$. Тогда сработает предыдущая лемма и мы победим.

По лемме о структуре открытых множеств:

$$\lambda E = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \underset{\text{кубы}}{(Q_k)} : A \subset \bigcup_{k=1}^{+\infty} Q_k : \ \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda Q_k < \varepsilon$$

Рассмотрим два случая:

1. Пусть $A \subset \underbrace{\overline{P}}_{\substack{\text{замкн.}\\ \text{пар-ед}}} \subset O$. Т.к. $\overline{P}$ — компакт, а Φ' — непрерывно, то она достигает своего максимума:

$$L := \max_{x \in \overline{P}} \|\Phi'(x)\|$$

Тогда по теореме Лагранжа:

$$\forall x, y \in \overline{P} : \ |\Phi(x) - \Phi(y)| \leq L \cdot |x - y|$$

Отсюда следует следующие включение для образа шара:

$$\Phi(B(x_0, r)) \subset B(\Phi(x_0), Lr)$$

Покроем наше начальное множество кубами (по лемме так можно), а затем каждый куб поместим в шар такого радиуса, чтобы он лежал в нем целиком

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{+\infty} Q(x_i, r_i) \subset \bigcup_{i=1}^{+\infty} B(x_i, r_i\sqrt{m}) \subset \bigcup_{i=1}^{+\infty} Q(x_i, r_i\sqrt{m})$$

Также по лемме о стр. открытых множеств нам известно, что :

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \lambda Q(x_i, r_i) \leq \varepsilon \Rightarrow \sum_{i=1}^{+\infty} Q(x_i, r_i\sqrt{m}) \leq \varepsilon \cdot \sqrt{m}^m$$

Теперь посмотрим, что происходит с образом:

$$\Phi(A) \subset \bigcup_{i=1}^{+\infty} \Phi\big(B(x_i, r_i\sqrt{m})\big) \subset \bigcup_{i=1}^{+\infty} B\big(\Phi(x_i), Lr_i\sqrt{m}\big) \subset \bigcup_{i=1}^{+\infty} Q\big(\Phi(x_i), Lr_i\sqrt{m}\big)$$

По счетной полуаддитивности:

$$\mu\Phi(A) \leq \sum_{i=1}^{+\infty} \mu Q\big(\Phi(x_i), Lr_i\sqrt{m}\big) = L^m \sum_{i=1}^{+\infty} \mu Q\big(\Phi(x_i), r_i\sqrt{m}\big) \leq L^m \cdot \varepsilon \cdot \sqrt{m}^m$$

Т.к. $L^m \cdot \sqrt{m}^m$ — контанта, то можем на нее забить и получить, что

$$\mu\Phi(A) < \varepsilon \Rightarrow \mu\Phi(A) = 0$$

Идея: мы берем искомое множество, берем покрытие его шариками. Шарики перекидываем в прообраз, их ограничиваем сверху шариками, а их параллелепипедами, чтобы оценить меру.

2. Общий случай, то есть $A \subset O$

$O = \bigsqcup Q_i$ — где, Q_i — кубические ячейки (мы так можем сделать по лемме о структуре (смысле жизни) открытых множеств)

Тогда $\overline{Q_i} \in O$, а значит работает пункт 1:

$$\left.\begin{array}{l} A = \bigsqcup (A \cap Q_i) \\ \lambda(A \cap Q_i) = 0 \end{array}\right\} \overset{\text{по пункту 1.}}{\Rightarrow} \lambda\Phi(A \cap Q_i) = 0 \Rightarrow \Phi A = \bigcup \Phi(A \cap Q_i) \Rightarrow \lambda\Phi(A) = 0$$

Q.E.D.

Теорема о мерах, инвариантных относительно сдвигов.

μ — мера на $\mathfrak{m}^m$

1. Пусть μ — инвариантна, относительно сдвигов, т.е:

$$\forall A \in \mathfrak{m}^m \ \forall v \in \mathbb{R}^m \quad \mu(A) = \mu(A + v)$$

2. Для любого ограниченного $A \in \mathfrak{m}^m$: $\mu(A) < +\infty$

Тогда

$$\exists k \in [0, +\infty] \quad \mu = k \cdot \lambda \quad (\Leftrightarrow \forall A \in \mathfrak{m}^m : \ \mu A = k \cdot \lambda A)$$

Лемма

$(X, \mathcal{A}, \_), (X', \mathcal{A}', \nu')$ — два пространства с мерой. $T : X \to X'$ — биекция. Тогда

$$\nu := \nu' \circ T, \quad (\nu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}) \text{ — мера}$$

Доказательство:
Проверим счетную аддитивность $A = \bigsqcup A_k$
Тогда должно быть:

$$\nu A = \nu'(TA) = \nu'\left(T\left(\bigsqcup A_k\right)\right) = \nu'\left(\bigsqcup TA_k\right) = \sum \nu'(TA_k) = \sum \nu A_k$$

Получается счетная аддитивность есть, значит ν — мера

Q.E.D.

Теорема. (Инвариантность относительно ортогонального преобразования)
$T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ - линейное отображение, ортогонально. Тогда:

$$\forall A \in \mathfrak{m}^m : T(A) \in \mathfrak{m}^m \quad \text{и} \quad \lambda A = \lambda T(A)$$

Доказательство:
1. $T(A) \in \mathfrak{m}^m$ по теореме 1, так как T - гладкая функция.
2. У нас сохранение меры $\mu A = \lambda(T(A))$, так как T биективно (? это вроде как следует из того, что оно ортогонально, но я чет сомневаюсь) При этом μ инвариантна относительно сдвигов:

$$\mu(A + \nu) = \lambda(T(A + \nu)) = \lambda(T(A) + T\nu) + \lambda(T(A)) = \mu A$$

Заметим также, что T шар с центром в 0 переводит в шар с центром в 0 того же радиуса

$$T(B(0, r)) = B(0, r)$$

Откуда $\lambda T(B(0, r)) = \mu B(0, r)$. Уже откуда получаем, что $\mu < +\infty$ на любом ограниченном. Откуда выполнена теорема о мерах, инвариантных относительно сдвигов и в данном случае $k = 1$.

Q.E.D.

Теорема о преобразовании меры Лебега при линейном отображении.
$V \in \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$
Тогда

$$\forall E \in \mathcal{M}^m \quad V(E) \in \mathcal{M}^m \quad \text{и} \quad \lambda(V(E)) = |\det V| \cdot \lambda E$$

Доказательство:
Рассмотрим два случая:
1. $\det V = 0 \Rightarrow \dim(\mathrm{Im}\, V) \leq m - 1$. А тогда $\lambda(Im\, V) = 0 \Rightarrow \lambda(VE) = 0$. Получили, что хотели
2. $\det V \neq 0$ Пусть $\mu E := \lambda V(E)$ — мера инвариантная относительно сдвигов $\Rightarrow \exists k : \mu = k\lambda$
   Найдем k. Пусть $E :=$ единичный куб на векторах g_i. $V(g_i) = s_i h_i$ (по предыдущей лемме), тогда $V(E)$ — параллелепипед, порожденный векторами $s_i h_i$. Посчитаем:

$$\mu E = \lambda V(E) = (s_1 ... s_m) \quad \lambda E = 1$$

   Получили, что $k = |\det V|$

Q.E.D.

3.3. Сходимость по мере и сходимость почти везде

Определение. Множество полной меры
E — **множество полной меры** в $X \Rightarrow \mu(X \setminus E) = 0$

Теорема. Измеримость функции непрерывной на множестве полной меры
$E \subset \mathbb{R}^2, e \subset E, \lambda_{m(e)} = 0\ f : E \to \mathbb{R}$ непрерывны на $E' = E \setminus e$.

Тогда f измеримая.

Доказательство:
$E'(f < a) = H$ - открытое подмножество в E' по топологическому определению

$\exists G$ - открытое в $\mathbb{R}^m$ такое что $H = G \cap E'$

$$E(f < a) = E'(f < a) \cup e(f < a)$$

$E'(f < a)$ — измеримое, $e(f < a)$ - подмножество e, имеющего $\lambda e = 0$.

Q.E.D.

Определение. Свойство, выполняющееся почти везде
$(X, \mathcal{a}, \mu),\ E \in \mathcal{a}, w(x)$ — высказывание, зависящее от x, $w(x)$ выполняется (истинно) **почти везде**, если

$$\mu e = 0, \text{ где } e = \{x \in E \mid\ w(x) - \text{ложно}\}$$

Свойства:

Пусть $\forall n$ задано высказывание $\omega_n(x)$ и оно выполняющееся почти везде.
Тогда мегаутверждение $w(x) := w_1(x) \wedge w_2(x) \wedge \ldots$ — выполняющееся почти везде.

Определение. Сходимость почти везде
$f, f_n : E \to \overline{\mathbb{R}}$, $f_n \to f$ **почти везде**, если:

$$\mu\{x \in E \mid\ f_n(x) \nrightarrow f(x)\} = 0$$

Свойства:
1. $f_n, f : X \to \overline{\mathbb{R}},\ \mu$ — полная, $f_n \to f$ почти везде на X и $\forall n\ f_n$ — измеримая, тогда f — измерима
2. μ — полная мера, f — измерима, g — еще одна функция и $f = g$ почти везде, тогда g — измерима

Определение. Сходимость по мере
$(X, \mathcal{a}, \mu)$ — пространство с мерой, $f_n, f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ — измеримы, почти везде конечны.

Тогда $f_n \to f$ **по мере** μ (при $n \to +\infty$)

$$f_n \underset{\mu}{\Longrightarrow} f : \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \mu X(|f_n - f| \geq \varepsilon) \to 0$$

Теорема Лебега о сходимости почти везде и сходимости по мере.
$f_n, f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ — измеримы, почти всюду конечны, $f_n \to f$ — почти всюду, $\mu X < +\infty$

Тогда:

$$f_n \underset{\mu}{\Longrightarrow} f$$

Доказательство:
Подменим f_n, f — на множествах меры 0, так чтобы $f_n \to f$ всюду и f, f_n — конечны
- Рассмотрим частный случай:
  $f_n \to 0 \quad \forall x$ последовательность $f_n(x)$ — монотонна по n, и тогда $f \equiv 0$:
$$X(|f_n - f| \geq \varepsilon) = X(|f_n| \geq \varepsilon) \supset X\big(|f_{n+1}| \geq \varepsilon\big) \supset \dots$$
$$\bigcap_n X(|f_n| \geq \varepsilon) = \varnothing \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\mu X(|f_n| \geq \varepsilon) \to 0}_{\text{по непрерывности сверху}}$$
- Общий случай:
  $f_n \to f$
  $\varphi_n(x) := \sup_{k \geq n} |f_k(x) - f(x)|$

  Заметим, что: $\forall x: \ \varphi_n(x) \to 0$, причем $\varphi_n \geq 0$ и монотонна, тогда по частному случаю:
$$X(|f_n - f| \geq \varepsilon) \subset X(\varphi_n \geq \varepsilon)$$
$$\mu X(|f_n - f| \geq \varepsilon) \leq \mu X(\varphi_n \geq \varepsilon) \to 0$$

Q.E.D.

Теорема Рисса.
$(X, \mathcal{A}, \mu)$, $f_n, f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ — измеримы, почти всюду конечны, $f_n \underset{\mu}{\Longrightarrow} f$ - сходимость по мере

Тогда $\exists n_k$ - строго возрастающая последовательность, по которой $f_{n_k} \to f$ почти везде при $k \to \infty$

Доказательство:

По определению сходимости по мере:
$$\forall k: \ \mu X\left(|f_n - f| \geq \frac{1}{k}\right) \to 0$$

Тогда возьмем n_k так, чтобы:
$$\forall n > n_k : \mu X\left(|f_n - f| \geq \frac{1}{k}\right) < \frac{1}{2^k}$$

Очевидно, что такие n_k существуют из-за предела. Будем считать, что $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$

Проверим, что $f_{n_k} \to f$ почти всюду. Введем вот такие множества:
$$E_k = \bigcup_{j=k}^{+\infty} X\left(\left|f_{n_j} - f\right| \geq \frac{1}{j}\right)$$
$$E_1 \supset E_2 \supset \dots$$
$$\begin{cases} E_0 = \bigcap\limits_{k=1}^{+\infty} E_k \\ \mu E_k \leq \sum\limits_{j=k}^{+\infty} \mu X\left(\left|f_{n_j} - f\right| \geq \frac{1}{j}\right) \leq \sum \frac{1}{2^i} = \frac{2}{2^k} \to 0 \end{cases}$$

Откуда по непрерывности сверху $\mu E_0 = 0$

Проверим, что для всех x не в E_0 $f_{n_k}(x) \to f(x)$:

$\exists n, x \notin E_n$, т.е. при

$$\forall j \geq n: \ \left|f_{n_j}(x) - f(x)\right| < \frac{1}{j}$$

А это определение сходимости.

Q.E.D.

3.4. Интеграл Лебега и все с ним связанное.

У нас есть $(X, \mathcal{A}, \mu)$

Определение. Интеграл ступенчатой функции (Альфа версия)

$f = \sum \lambda_k \chi_{E_k}, f \geq 0, X = \bigsqcup_{\text{кон}} E_k$

Полагаем:

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu := \sum \underbrace{\lambda_k \mu E_k}_{0 \cdot \infty = 0} \in [0, +\infty]$$

Свойства

1. Интеграл не зависит от разложения

   $f = \sum \tilde{\lambda}_j \chi_{F_j}$

   Тогда $f = \sum\limits_{k,j} \widetilde{\lambda}_k \chi_{E_k \cap F_j}$

   $\int_X f = \sum\limits_{k,j} \lambda_k \mu(E_k \cap F_j)$
2. $f \leq g \Rightarrow \int_X f \leq \int_X g$

Определение. Интеграл неотрицательной измеримой функции (Бета версия)

f - измерима, $f \geq 0$

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu := \sup_{0 \leq \underbrace{g}_{\text{ступ.}} \leq f} \left(\int_X g \, \mathrm{d}\mu \right)$$

Замечания

1. Если f - ступ., то в силу свойства 2.
2. $f \geq 0 \Rightarrow 0 \leq \int_X f \, \mathrm{d}\mu \leq +\infty$
3. g - ступ., $g \leq f \Rightarrow \int_X g \leq \int_X f$

Определение. Суммируемая функция

f — суммируемая функция, если $\displaystyle\int_X f^+, \int_X f^-$ — конечны (положительная и отрицательная срезка)

Определение. Интеграл суммируемой функции

f - измерима и суммируемая функция, $f^+ = \max(f, 0)$, $f^- = \max(-f, 0)$. Тогда:

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu := \int_X f^+ \, \mathrm{d}\mu - \int_X f^- \, \mathrm{d}\mu$$

Определение. Интеграл по подмножеству

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ - пространство с мерой, $E \in \mathcal{A}$, f - измерима на X

$$\int_E f \, \mathrm{d}\mu := \int_X f \chi_E \, \mathrm{d}\mu$$

Здесь f — суммируема на E, если $\int_E f^+, \int_E f^-$ конечны

Замечания

α - определение: f - ступ., $\int_E f = \sum \lambda_k \mu(E_k \cap E)$

β - определение: $\int_E f = \sup_{0 \leq \underbrace{g}_{\text{ступ., на E}} \leq f} \left(\int_E g \, \mathrm{d}\mu \right)$

Свойства

1. Монотонность (по функции):

   f, g — суммируемы, $f \leq g$. Тогда $\int_X f \leq \int_X g$

   Доказательство
   1. $f, g \geq 0$ - очевидно
   2. f, g - любого знака - TODO просто расписать неравенства

   ### Замечание
   f - сумм. $\Leftrightarrow \int |f|$ - конечен
   - $\Leftarrow$: $f^+, f^- \leq |f|$
   - $\Rightarrow$: $|f| = f^+ + f^-$ - интегрируем, но пока не умеем :(

2. $\int_E 1 \, \mathrm{d}\mu = \mu E$, $\int_E 0 \, \mathrm{d}\mu = 0$
3. $\mu E = 0$, f - изм. $\Rightarrow \int_E f \, \mathrm{d}\mu = 0$
4. $\int_E (-f) \, \mathrm{d}\mu = -\int_E d \, \mathrm{d}\mu$

   $\alpha > 0$, $\int_E \alpha f \, \mathrm{d}\mu = \alpha \int_E f \, \mathrm{d}\mu$
5. $\int_E f \, \mathrm{d}\mu$ - существует $\Rightarrow \left| \int_E f \, \mathrm{d}\mu \right| \leq \int_E |f| \, \mathrm{d}\mu$

   Доказательство: $-|f| \leq f \leq |f|$
6. f - изм. на E, $\mu E < +\infty$, $a \leq f \leq b$

   Тогда $a \mu E \leq \int_E f \, \mathrm{d}\mu \leq b \mu E$

   Следствие: $\mu E < +\infty$, f - изм., огр. $\Rightarrow f$ - сумм.
7. f - сумм. на $E \Rightarrow f$ - почти везде конечен на E

   Суть доказательства: если f больше нуля и интеграл по E конечен и равен супремуму интегралов ступенчатых функций на E. Если мера множества бесконечности f - $\tilde{E}$ больше нуля, то $g := n \chi_{\tilde{E}}$

Лемма

$A = \bigsqcup A_k$ — измеримо, $g \geq 0$ — ступенчатая. Тогда:

$$\int_A g \, \mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_i} g \, \mathrm{d}\mu$$

Доказательство:

Т.к. g — ступенчата, предствим ее в виде $g = \sum\limits_{\text{кон}} \lambda_i \chi_{E_i}$, где E_i — допустимое разбиение

Тогда найдем интеграл:

$$\int_A g = \sum_{i, \text{ кон.}} \lambda_i \mu(E_i \cap A) = \sum_{i, \text{ кон.}} \lambda_i \sum_{k=1}^{+\infty} \mu(E_i \cap A_k) =$$

$$= \sum_i \sum_k \lambda_i \mu(E_i \cap A_k) \overset{(\star)}{=} \sum_k \sum_i \lambda_i \mu(E_i \cap A_k) = \sum_k \int_{A_k} g \, \mathrm{d}\mu$$

$(\star)$: в прошлом семестре обсуждалось, что в рядах можно переставлять слагаемые, если все слагаемые неотрицательные, а у нас именно такие

Q.E.D.

Счетная аддитивность интеграла (по множеству).

$A = \bigsqcup A_k$ — измеримо, $f \geq 0 : X \to \overline{\mathbb{R}}$ — измерима на A: Тогда:

$$\int_A f \, \mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_i} f \, \mathrm{d}\mu$$

Доказательство:

Давайте докажем два неравенства $(\leq), (\geq)$.

$(\leq)$:

$\sphericalangle$ ступенчатую функцию g: $0 \leq g \leq f$:

$$\int_A g = \sum \int_{A_i} g \leq \sum \int_{A_i} f$$

По определению интеграла для измеримой функции:

$$\int_A f = \sup_g \int_A g \leq \sum \int_{A_i} f$$

$(\geq)$:

1. $\sqsupset A = A_1 \sqcup A_2$

   Возьмем ступенчатые функции g_1, g_2 с общим разбиением E_k :

   $$0 \leq g_1 \leq f \cdot \chi_{A_1} \quad 0 \leq g_2 \leq f \cdot \chi_{A_2}$$

   Т.е. функция g_1 тождественный 0 вне A_1, а на A_1 : $g_1 \leq f$. Аналогично для g_2

   Найдем их явное представление:

   $$g_1 = \sum \lambda_i' \chi_{E_i} \quad g_2 = \sum \lambda_i'' \chi_{E_i}$$

   Тогда очевидно, что когда мы их сложим, они будут меньше f на всем A (т.к. A_1, A_2 — дизъ. то ровно одна из g_1, g_2 на ней $\neq 0$, а каждая из них по отдельности меньше f)

   $$0 \leq g_1 + g_2 \leq f \cdot \chi_A$$

   Проинтегрируем все это дело:

   $$\int_{A_1} g_1 + \int_{A_2} g_2 \overset{(\star)}{=} \int_A (g_1 + g_2) \leq \int_A f$$

   $(\star)$: равенство станет очевидным, если написать интеграл по определению

   Теперь перейдем к sup по g_1 :

   $$\int_{A_1} f + \int_{A_2} g_2 \leq \int_A f$$

   И перейдем к sup по g_2 :

   $$\int_{A_1} f + \int_{A_2} f \leq \int_A f$$

2. $\sqsupset A = \bigsqcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ — доказывается индукцией по 1-му пункту

3. $A = \bigsqcup\limits_{i=1}^{+\infty} A_i = A_1 \sqcup A_2 \sqcup \ldots \sqcup A_n \sqcup B_n$, где $B_n = \bigsqcup\limits_{i=n+1}^{+\infty} A_i$

$$\int_A f = \sum_{i=1}^{n} \int_{A_i} f + \int_{B_n} f \geq \sum_{i=1}^{n} \int_{A_i} f$$

Делаем предельный переход при $n \to +\infty$ и получаем нужное нам неравенство

Q.E.D.

<u>Теорема.</u> Леви
$(X, \mathcal{A}, \mu)$, f_n — измеримо (на X),$\forall n : 0 \leq f_n \leq f_{n+1}$ почти везде
$f(x) := \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ — почти везде определена. Тогда:

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu = \int_X f \,\mathrm{d}\mu$$

Доказательство:

f — измеримо по т. об измеримости $\sup, \lim$.

$(\leq)$:

$$f_n \leq f \Rightarrow \int_X f_n \leq \int_X f \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \int_X f_n \leq \int_X f$$

$(\geq)$:
Заметим, что нам достаточно доказать, что

$$\forall \text{ ступ. } 0 \leq g \leq f : \quad \lim_{n\to+\infty} \int_X f_n \geq \int_X g$$

Этого нам хватит, т.к. мы сделаем справа переход к $\sup$ по g и получим наше неравенсвто

И еще трюк: нам достаточно проверить, что

$$\forall c \in (0,1) \quad \lim \int_X f_n \geq c \cdot \int_X g$$

Чтобы, проверив это свойство, понять то что мы хотим доказать, то надо просто перейти к $\sup$ по c

Теперь начнем это доказывать:

$$E_n = X(f_n \geq cg) \quad \bigcup E_n = X,$$

Сделаем оговорку, что на множествах меры 0, мы подменим наши функции на нулевые (уже так делали). Интеграл и предел это не почувствует, а значит мы не ничего не сломаем, но при этом получим такое сильное условие.

$$\ldots \subset E_n \subset E_{n+1} \subset \ldots$$

$$\int_X f_n \geq \int_{E_n} f_n \geq c \cdot \int_{E_n} g,$$

перейдем к пределу (так как интегралы возрастают):

$$\lim \int_X f_n \geq \underbrace{\lim c \int_{E_n} g = c \cdot \int_X g}_{\substack{\text{непрерывность снизу} \\ v : E \mapsto \int_E g}}$$

Q.E.D.

<u>Теорема.</u> Линейность интеграла Лебега

$f, g \geq 0$ — измеримы на E

Тогда:

$$\int_E f + g = \int_E f + \int_E g$$

Доказательство:

1. f, g — ступенчатые, то есть $f = \sum \alpha_k \chi_{E_k}$, $g = \sum \beta_k \chi_{E_k}$, где E_k — общее допустимое разбиение

$$\int_E f + g = \sum (\alpha_k + \beta_k) \mu(E_k \cap E) = \sum \alpha_k \mu(E_k \cap E) + \sum \beta_k \mu(E_k \cap E) = \int_E f + \int_E g$$

2. f, g — измеримы
   $\exists$ ступ. $f_n : 0 \leq f_n \leq f_{n+1} \quad f_n \to f$
   $\exists$ ступ. $g_n : 0 \leq g_n \leq g_{n+1} \quad g_n \to g$

$$\int_E f + g \xleftarrow[n \to +\infty]{\text{т. Леви}} \int_E f_n + g_n \overset{}{\underset{\text{1й пункт}}{=\!=\!=}} \int_E f_n + \int_E g_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\text{т. Леви}} \int_E f + \int_E g$$

Q.E.D.

<u>Теорема об интегрировании положительных рядов.</u>

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ — пространство с мерой

$u_n \geq 0 : X \to \overline{\mathbb{R}}$ — измеримо на E

Тогда:

$$\int_E \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) \mathrm{d}\mu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E u_n(x) \, \mathrm{d}\mu(x)$$

Доказательство:

$S_n(x) = u_1(x) + \ldots + u_n(x)$ — эта последовательность монотонно неубывающая, сделаем предельный переход:

$$S_n \to S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

тогда, по теореме Леви:

$$\int_E S_n \to \int_E S$$

Распишем левую часть по линейности:

$$\int_E S_n = \sum_{k=1}^n \int_E u_k$$

Ну а тогда:

$$\int_E S \leftarrow \int_E S_n = \sum_{k=1}^n \int_E u_k \to \sum_{n=1}^\infty \int_E u_n$$

$$\int_E \sum_{n=1}^\infty u_n = \sum_{n=1}^\infty \int_E u_n$$

Q.E.D.

Пример:
(x_n) — вещественная последовательность
$\sum a_n$ — абс. сходящийся числовой ряд
Тогда:

$$\sum \frac{a_n}{\sqrt{|x - x_n|}} \text{ абс. сходится при п.в. } x \in \mathbb{R}$$

Доказательство:

Нам достаточно доказать эту сходимость п.в. на $\forall A : [-A, A]$
По следствию:

$$\int_{[-A,A]} \frac{|a_n|}{\sqrt{|x-x_n|}} \, \mathrm{d}\lambda_m \xlongequal[\text{будет док. позже}]{\text{этот переход}} |a_n| \int_{-A}^{A} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{|x-x_n|}} \overset{(\star)}{\leq}$$
$$\overset{(\star)}{\leq} |a_n| \int_{-A-x_n}^{A-x_n} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{|x|}} \overset{(\star\star)}{\leq} |a_n| \int_{-A}^{A} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{|x|}} = 2 \cdot |a_n| \int_0^A \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{|x|}} = 4\sqrt{A}|a_n|$$

$(\star)$: Замена переменной $x \mapsto x - x_n$
$(\star\star)$: Это становится очевидно, если построить график

Так как $|a_n|$ — сходится, то по следствию предыдущей теоремы, исходный ряд абсолютно сходится

Q.E.D.

Хотим подумать над тем как связана сходимость по мере и интегральная сходимость.

В правую сторону сработает, а вот в левую нет.

<u>Теорема Лебега о мажорированной сходимости по мере.</u>
$(X, \mathcal{a}, \mu), f_n, f$ — изм., п.в. кон $f_n \underset{\mu}{\Rightarrow} f$

Пусть существует $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$:
1. $\forall n : |f_n(x)| \leq g(x)$ п.в
2. g - суммируема

Тогда $\int_X |f_n - f| \, \mathrm{d}\mu \to 0$ и уж тем более $\int_X f_n \, \mathrm{d}\mu \to \int_X f \, \mathrm{d}\mu$

Доказательство:
Упростим жизнь
1. Пусть мера конечная, то есть $\mu X < +\infty$

Зафиксируем $\varepsilon > 0 : X_n = X(|f_n - f| \geq \varepsilon)$. Мы знаем, что $\mu X_n \to 0$

$$\int_X |f_n - f| \, d\mu = \int_{X_n} + \int_{X_n^c} \leq \int_{X_n} 2g d\mu + \int_{X_n^c} \varepsilon d\mu$$

Расширим немного наш диапазон:

$$\int_{X_n} 2g d\mu + \int_{X_n^c} \varepsilon d\mu < \int_{X_n} 2g d\mu + \int_X \varepsilon d\mu$$

НСНМ по абсолютной непрерывности интеграла:

$$\int_{X_n} 2g d\mu + \int_X \varepsilon d\mu \underset{\text{НСНМ}}{<} \frac{\varepsilon}{2} + \varepsilon \mu X = \varepsilon \cdot \text{const}$$

2. Докажем теперь для случая $\mu X = +\infty$

Загадка: Пусть g - суммируемое. $g \geq 0 : \forall \varepsilon > 0 : \exists A \subset X : \mu A < +\infty : \int_{X \setminus A} g < \varepsilon$

Ну давайте решим загадку:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \text{ ступ. } h : 0 \leq h \leq g \text{ и тогда для нее выполнено: } \int_X h > \int g_X - \varepsilon$$

Возьмем $A = X(h \neq 0)$, тогда:

$$0 \leq \int_{X \setminus A} g \overset{\text{так как h = 0}}{\underset{\text{на этом мн.}}{=}} \int_{X \setminus A} g - h \leq \int_X g - h < \varepsilon$$

Откуда загадка показана. Вернемся к док-ву:

$$\int_X | \ f_n - f \ | \ d\mu = \int_A + \int_{A^c} \leq \int_A |f_n - f| + \int_{A^c} \overset{(\star)}{\underset{\text{нсим}}{<}} \varepsilon + 2\varepsilon$$

$(\star)$ в данном случае интеграл по мн-ву A удовлетворяет первому пункту, с помощью него и оценим сверху его как ε

Q.E.D.

Теорема Лебега о мажорированной сходимости по интегралу.
$(X, \mathcal{A}, \mu), f_n, f -, f_n, f : X \to \overline{\mathbb{R}}, f_n \to f$ п.в

Пусть: $\exists g : X \to \overline{\mathbb{R}}$:
1. $\forall n \ | \ f_n| \leq g$ п.в
2. g - сумм

Тогда $\int_X |f_n - f| \, \mathrm{d}\mu \to 0$ и уж тем более $\int_X f_n \to \int_X f$

Доказательство:

f_n, f - суммы, как в прошлой теореме. Введем:

$$h_n = \sup(|f_n - f|, |f_{n+1} - f|, \ldots)$$

Заметим, что h_n убывающая и $0 \leq h_n \leq 2g$. Хочу теорему Леви, а для нее нужна возрастающая

КПК 🙂: Хи-хи, сделаем маленькую хитрость

Будем рассматривать $2g - h_n$. Заметим, что они будут возрастать и ≥ 0.А значит можно применить теорему Леви:

$$\int_X 2g - h_n \underset{n\to\infty}{\to} \int_X 2g \Rightarrow \int_X h \to 0 \text{ и! } \int_X |f_n - f| \leq \int_X h$$

Откуда и получили, что нам надо.

Q.E.D.

<u>Теорема Фату.</u>

$(X, \mathcal{A}, \mu)$, $f_n \geq 0$ измеримо $f_n \to f$ п.в и $\exists C > 0\ \forall n :\quad \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu < C$

Тогда

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu \leq C$$

Доказательство:

$$g_n = \inf(f_n, f_{n+1}, \ldots)$$

Заметим, что $g_n \leq g_{n+1}$, $g_n \to \underline{\lim} f_n = f$ почти везде

$$\int_X g_n = \int_X f_n \leq C$$

$$\int f \underset{\text{по т. Леви}}{\leq} C$$

Q.E.D.

Замечание: $f_n = nK_{[0,\frac{1}{m}]}$, при $n \to \infty$ стремится к нулю. $\int_{\mathbb{R}} f_n = 1$, $\int_{\mathbb{R}} f = 0$

Замечание: Можно ли убрать условие $f_n \geq 0$. Возьмем $h_n = -f_n$ и и проиграли

Следствие: В условии теоремы можно заменить $f_n \to f$ п.в на фразу $f_n \underset{\mu}{\Rightarrow} f$ и теорема будет работать.

Следствие (от которого едет крыша): $f_n \geq 0$ - изм. Тогда: $\int_X (\underline{\lim} f_n) \,\mathrm{d}\mu \leq \underline{\lim}\left(\int_X f_n \,\mathrm{d}\mu\right)$

Доказательство

Давайте введем g_n — из доказательства теоремы Фату

Выберем $(n_k) : \int_X f_{n_k} \to \underline{\lim} \int_X f_n$, при этом

$$\int_X \underline{\lim} f_n \xleftarrow[\text{т. Леви}]{} \int_X g_{n_k} \leq \int_X f_{n_k} \xrightarrow[\text{из усл. выше}]{} \underline{\lim} \int_X f_n$$

Q.E.D.

4. Хуй знает где

Определение. Борелевская сигма-алгебра
$\mathcal{B}$ — **борелевская** σ-алгебра в $\mathbb{R}^m$ — минимальная σ-алгебра, содержащая все открытые множества

$B \in \mathcal{B}$ — называется **борелевским множеством**

Следствия:
1. $\forall A \subset \mathcal{M}^m \ \exists B, C$ — борелевские, такие что $B \subset A \subset C, \quad \lambda_m(C \setminus A) = \lambda_m(A \setminus B) = 0$

   Доказательство:

   $B := \bigcup_n F_{\frac{1}{n}} \quad C := \bigcap_n G_{\frac{1}{n}}$
2. $\forall A \in \mathcal{M}^m$ представимо в виде $A = B \cup N$, где B — борелевское, а $\lambda N = 0$
3. Регулярность меры Лебега

Определение. Множество полной меры
E — **множество полной меры** в $X \Rightarrow \mu(X \setminus E) = 0$

Теорема. Измеримость функции непрерывной на множестве полной меры
$E \subset \mathbb{R}^2, e \subset E, \lambda_{m(e)} = 0 \ f : E \to \mathbb{R}$ непрерывны на $E' = E \setminus e$.

Тогда f измеримая.

Доказательство:
$E'(f < a) = H$ - открытое подмножество в E' по топологическому определению

$\exists G$ - открытое в $\mathbb{R}^m$ такое что $H = G \cap E'$

$$E(f < a) = E'(f < a) \cup e(f < a)$$

$E'(f < a)$ — измеримое, $e(f < a)$ - подмножество e, имеющего $\lambda e = 0$.

Q.E.D.

Определение. Мера Лебега-Стилтьеса
$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ возрастает. $\mu g([a, b)) := g(b - 0) - g(a - 0)$ - сигма-конечная мера

Применим теорему о Лебеговском продолжении меры. Получим σ-алгебру $\mathcal{A}, \mu_g : A \to \overline{\mathbb{R}}$, сигма-конечная и полная

$\mu_g|_{P^1}$ - это мера Лебега Стилтьеса

5. Информация о курсе

Поток — y2024.

Группы M3238-M3239.

Преподаватель — Кохась Константин Петрович.

Уже по традиции здесь будут мои announcements:

01.10.2025 - нам пизда