Дифференциальные уравнения.

Чепелин Вячеслав

Содержание

1 Лекция 1.

1.1 Основные определения.

def: Пусть $f : G \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, **нормальное уравнение** :

$$y' = f(x, y)$$

def: **Область определения** нормального уравнения — область определения его правой части. Обозначение $dom = G$.

Примеры уравнений и соответствующих областей определения:

1. $y' = x\sqrt{y}$, $G = \mathbb{R} \times [0, +\infty)$
2. $y' = y, G = \mathbb{R}^2$
3. $y' = -\frac{1}{x^2}, G = \{(x, y) \in \mathbb{R} | x \neq 0\}$

def: Функция $\varphi : E \to \mathbb{R}$ - **решение** уравнения, если $E = \langle a, b \rangle$:

$$\varphi'(x) \equiv f(x, \varphi(x))$$

Соглашение: На протяжении курса, будем считать, что $\forall$ предиката $P(x)$, который не определен при $x = x_0$, считаем, что $P(x_0) = 0$ - то есть ложно.

Замечание: Данное зам. помогает не требовать от φ дифференцируемости на всем E.

Следствие: Учитывая соглашение любое решение уравнение — дифференцируемая функция.

Следствие: Если f - непр. функция, то любое решение нормального уравнения непрерывно дифференцируемо.

Замечание: В нормальном уравнении символы x, y и y' - три различные независимые переменные. Пока не произведена подстановка функции, буква y никак не связана с x, а y' не олицетворяет производную.

def: **Интегральная кривая** уравнения — график его решения.

def: **Общее решение** уравнения — множество всех его решений.

def: **Общим интегралом** уравнения будем называть соотношение вида:

$$\Phi(x, y, C) = 0$$

которое неявно задает некоторые уравнения при некоторых значениях вещественного параметра C.

Замечание: Общий интеграл не всегда описывает все решения уравнения.

1.2 Уравнение в дифференциалах.

def: Пусть $P, Q : G \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, **уравнение в дифференциалах**:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

Замечание: Переменные x, y входят равноправно, поэтому его решением называется не только функция $y = \varphi(x)$, но и $x = \psi(y)$

def: Точка $(x_0, y_0) \in G$ называется **особой точкой** уравнения, если $P(x_0, y_0) = Q(x_0, y_0) = 0$

def: Пусть $T = \langle a, b \rangle$, вектор-функции $(u, v) \in \mathbb{C}^1(T \to \mathbb{R}^2)$ — **параметрические** решение уравнения, если:

1. $(u'(t), v'(t)) \neq (0, 0)$ для всех $t \in T$
2. $P(u(t), v(t))u'(t) + Q(u(t), v(t))v'(t) \equiv 0$ на T

def: **Интегральной кривой** уравнения называют годограф (множество значений) ее параметрического уравнения.

Утверждение: (Связь между обычными и параметрическими решениями).

Пусть $P, Q \in C(G)$, множество G не содержит особых точек уравнения, тогда:

1. Если $y = \varphi(x)$ — решение уравнения на E, то $r(t) = (t, \varphi(t))$ - параметрическое решение уравнения на E.
2. Если $r = (u, v)$ — параметрическое решение уравнения на T, то для любого $t_0 \in T$, найдется окрестность $U(t_0)$, такая что функции $u(t)$ и $v(t)$ при $t \in U(t_0) \cap T$ параметрически задают решение уравнения.

def: Два дифференциальных уравнения **эквивалентны** (или **равносильны**) на множестве G, если они имеют одинаковое семейство интегральных кривых на множестве G.

Теорема. Пусть $f \in C(G \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R})$. Тогда уравнение:

$$y' = f(x, y)$$

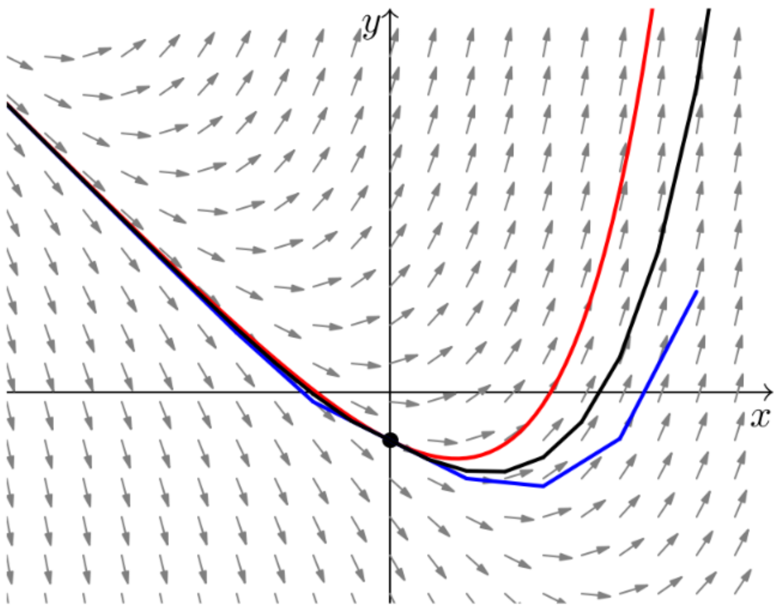
эквивалентно на множестве G уравнению:

$$dy = f(x, y)dx$$

2 Лекция 2.

2.1 Геом. смысл дифференциальных уравнений

def: Если каждой точке (x, y) области определения функции f сопоставить вектор, направленный под углом $\arctan f(x, y)$, то получится **поле направлений** $f(x, y)$.



Рассмотрим один способ построить приближение к интегральной кривой. Взяв некоторую точку (x_0, y_0) в качестве начальной, будем двигаться по направлению поля в точке (x_0, y_0) до точки с абсциссой $x_1 = x_0 + h$, ординату которой обозначим через y_1. Сделаем то же самое, что много много раз и получим **ломаную Эйлера**.

def: **Изоклиной** I_k уравнения называют множество уровня функции f:

$$I_k = \{(x, y) \in domf | f(x, y) = k\}$$

TODO: метод изоклин

2.2 Уравнение в полных дифференциалах.

def: Уравнение

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

называют **уравнением в полных дифференциалах** в области G, если для него существует **потенциал**, то есть такая дифференцируемая функция u, что для всех $x, y \in G$:

$$du = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

Теорема (общее решение УПД)

Пусть $G \subset \mathbb{R}^2$ — область, функция $u : G \to \mathbb{R}$ дифференцируема, $u'_x = P, u'_y = Q$. Тогда функция $y = \varphi(x)$ - решение уравнения УПД на промежутке E, если и только если она дифференцируема на E и при некотором $C \in \mathbb{R}$ неявно задана уравнением:

$$u(x, y) = C$$

Доказательство:

Достаточность. Дифференцируя равенство $u(x, \varphi(x)) = C$ по переменной $x \in E$, находим:

$$u'_x(x, \varphi(x)) + u'_y(x, \varphi(x))\varphi'_x \equiv 0$$

Так как $u'_x = P, u'_y = Q$, то определению функция φ является решением

Необходимость. На промежутке E верно тождество

$$P(x, \varphi(x)) + Q(x, \varphi(x))\varphi'(x) \equiv 0$$

Левая часть этого равенства совпадает с производной функции u по переменной x.

Q.E.D.

def: Уравнение

$$P(x)dx + Q(y)dy = 0$$

называют **уравнение с разделенными переменными.**

Следствие (общее решение УРП):

Пусть $P \in C(a, b), Q \in C(c, d)$. Тогда функция $y = \varphi(x)$ — решение уравнения на промежутке E, если и только если она дифференцируема на E и при некотором $C \in \mathbb{R}$ и при некотором $C \in \mathbb{R}$ неявно задана уравнением:

$$\int P(x)dx + \int Q(y)dy = C$$

Доказательство: подставим и проверим.

Утверждение (необходимое условие УПД).

Пусть потенциал $u \in C^2(G)$. Тогда:

$$P'_y = Q'_x$$

Теорема (признак УПД)

Пусть $G \subset \mathbb{R}^2$ — односвязная область $P, Q \in C^1(G), P'_y = Q'_x, (x_0, y_0) \in G$. Тогда уравнение в полных дифференциалах в области в G с потенциалом:

$$u(\overline{x}, \overline{y}) = \int\limits_{\gamma(\overline{x}, \overline{y}))} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

3 Лекция 3.

3.1 Интегрирующий множитель.

def: Функция $u : G \to \mathbb{R}$ называются **интегрирующим множителем** уравнения $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ в области G, если $\mu(x, y) \neq 0$ для любой точки $(x, y) \in G$ и уравнение

$$\mu(x, y)P(x, y)dx + \mu(x, y)Q(x, y)dy = 0$$

является уравнением в полных дифференциалах.

Замечание: мы хотим получить УПД и чтобы его получить, мы хотим, чтобы $P'_y = Q'_x$, для этого добавляем множитель μ.

def: Пусть $p_2(x) \neq 0$ при $x \in (a, b), q_1(y) \neq 0$ при $y \in (c, d)$. Тогда функция

$$\mu(x, y) = \frac{1}{p_2(x)q_1(y)}$$

является интегрирующем множителем для уравнения:

$$p_1(x)q_1(y)dx + p_2(x)q_2(y)dy = 0$$

Такое уравнение называются уравнением с **разделяющимися переменными**.

Условие для интегрирующего множества: Пусть $P, Q \in C^1(G)$. Определим условия для интегрирующего множителя из $\mathbb{C}^1(G)$. Необходимо:

$$\mu'_y P - \mu'_x Q = (Q'_x - P'_y)\mu$$

3.2 Линейное уравнение.

def: Дифференциальное уравнение:

$$y' = p(x)y + q(x)$$

называется **линейным уравнением** первого порядка.

def: Линейное уравнение называется **однородным**, если $q = 0$, иначе уравнение называется **неоднородным**.

Приведение линейного уравнения 1 порядка к УПД:

$$y' = p(x)y + q(x)$$

Заменим y' на $\dfrac{dy}{dx}$:

$$(py + q)dx - dy = 0$$

Условие $P'_y = Q'_x$ здесь не выполнено. Посмотрим на условие для интегрирующего множества. Оно принимает вид:

$$\mu'_y(pu + q) + \mu'_x = -p\mu$$

Попробуем найти интегрирующий множитель, зависящий только от переменной x. В этом случае получим:

$$\mu' = -p\mu$$

Одно из его решений:

$$\mu = e^{-\int p}$$

Откуда мы можем решать его, как уравнение в дифференциалах

3.3 Уравнение с разделяющимися переменными.

$$p_1(x)q_1(y)dx + p_2(x)q_2(y)dy = 0$$

Проблема в том, что умножая на интегрирующий множитель $\dfrac{1}{q_1(y)p_2(x)}$ возможно лишь в области, где знаменатель не обращается в ноль. Случай $q_1(y) = 0$ и $p_2(x) = 0$ требуют особого рассмотрения.

Разбив всю область поиска интегральных кривых на необходимое количество частей, нужно рассмотреть исходное уравнение на каждой части отдельно. На каждой такой подобласти его можно разделить на $q_1(y)p_2(x)$ не опасаясь.

Остается изучить поведение найденных интегральных кривых вблизи границы и мы победим.

3.4 Линейное уравнение первого порядка

Теорема (общее решение ЛУ 1-го порядка)

Пусть $E = \langle a, b\rangle, p, q \in C(E), \mu = e^{-\int p}$. Тогда общее решение имеет вид:

$$y = \frac{C + \int q\mu}{\mu}, C \in \mathbb{R}$$

Доказательство:

После приведения к УПД, получаем:

$$y'e^{-\int p} - pye^{-\int p} = qe^{-\int p}$$

Левая часть - производная y и $e^{-\int p}$. Получаем:

$$(ye^{-\int p})' = qe^{-\int p}$$

Следовательно:

$$ye^{-\int p} = C + \int qe^{-\int p}$$

Q.E.D.

Следствие (Общее решение ЛОУ первого порядка):

Пусть $E = \langle a, b\rangle$, $p \in C(E)$. Тогда уравнение

$$y' = p(x)y$$

имеет вид:

$$y = Ce^{\int p}, C \in \mathbb{R}, x \in E$$

Метод Лагранжа.

1. Решим вспомогательное уравнение $y' = p(x)y$
2. Заменим в решении C на $C(x)$
3. Подставим полученное φ в исходное уравнение и найдем $C(x)$
4. Победа!

4 Лекция 4.

4.1 Замена переменных дифференциальном уравнения.

$x = p(u, v), y = q(u, v)$

Цель такой замены — упростить и свести к известному виду.

Дифференциалы прежних переменных преобразуются по формулам:

$$dx = p'_u du + p'_v dv \quad dy = q'_u du + q'_v dv$$

<u>**Теорема (замена переменных в ДУ)**</u>

Пусть G - область в $\mathbb{R}^2_{x,y}$. $\Phi : G \subset \mathbb{R}^2_{x,y} \to \mathbb{R}^2_{u,v}$ — диффеоморфизм, $F : G \to \mathbb{R}^2$.

$$H = (F \circ \Phi^{-1})(\Phi^{-1})'$$

Тогда отображение Φ устанавливает взаимно-однозначное соответствие между интегральными кривыми уравнений:

$$F(r)dr = 0, r \in G$$

$$H(s)ds = 0, s \in \Phi(G)$$

Замечание: Это имеет такой смысл: у вас есть диффеоморфизм между двумя областями — ваша функция замены переменных из $\Phi : x, y \to u, v$ мы берем обратную и производную и выигрываем

4.2 Однородное уравнение

<u>**def:**</u> Функция $F(x.y)$ называется **однородной функцией** степени α, если при всех допустимых t, x, y верно равенство:

$$F(tx, ty) = t^\alpha F(x, y)$$

<u>**def:**</u> Пусть P, Q — однородные функции одинаковой степени. Тогда уравнение вида:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

называется **однородным уравнением**.

Давайте сведем однородно уравнение к уравнением с разделяющимися переменными.

1. Сделаем замену $x = u, y = uv$

   Замечание: поскольку переменные u и x совпадают, то переменную u обычно не вводят, а полагают:

   $$y = xv$$

   При этом $dy = vdx + xdv$

2. Подставим замену и получим:

$$P(x, xv)dx + Q(x, xv)(vdx + xdv) = 0$$

$$x^\alpha P(1, v)dx + x^\alpha Q(1, v)(vdx + xdv) = 0$$

$$(P(1, v) + Q(1, v)v)dx + Q(1, v)xdv = 0$$

Уравнения, сводящиеся к однородному

Уравнения в нормальной форме:

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

сводится к однородному при переходе к дифференциалам.

Более общее уравнение

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$$

сводится к однородному, если сдвинуть систему координат в точку пересечения прямых $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2 = 0$. То есть если сделать замену:

$$x = x_0 + u, \quad y = y_0 + v$$

Геом. свойство однородного уравнения — гомотетия относительно начала координат любую интегральную кривую однородного уравнения переводит в другую его интегральную кривую.

4.3 Уравнение Бернулли

def: Уравнением Бернулли называют уравнение вида:

$$y' = p(x)y = +q(x)y^\alpha$$

где $a \notin \{0, 1\}, a \in \mathbb{R}$

Давайте научимся его решать:

Возьмем $z = y^{1-\alpha}$

Тогда $z' = (1 - \alpha)y^{-\alpha}y'$, откуда

$$y^{-\alpha}y' = \frac{z'}{1 - \alpha}$$

Поделим левую часть исходного уравнения на y^α, подставляя $z = y^{1-\alpha}$, а также умножая обе части на $(1 - \alpha)$ получим:

$$z' = (1 - \alpha)p(x)z + (1 - \alpha)q(x)$$

Таким образом замена $z = y^{1-\alpha}$ сводит уравнение Бернулли к линейному, а его мы уже умеем решать

Уравнение Риккати

<u>**def:**</u> **Уравнением Риккати** называют уравнение вида:

$$y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x)$$

Чтобы такое решить, надо решить правое уравнение относительное y и сделать подстановку $y = z + \varphi$. Так оно сведется к уравнению Бернулли и победится.

<u>Теорема (Луивилль)</u>

Уравнение

$$y' = y^2 + x^\alpha$$

интегрируется в квадратурах, если и только если $\alpha/(2\alpha + 4) \in \mathbb{Z}$ или $\alpha = -2$

5 Информация о курсе.

Поток — y2024.
Группы M3138-M3139.
Преподаватель — Бабушкин Максим Владимирович.