

# Домашние задания по Матлогу.

Чепелин Вячеслав

## Содержание

1	Домашнее задание 1.	2
1.1	Задача 1. . . . .	3
1.2	Задача 2. . . . .	8
1.3	Задача 3. . . . .	13
1.4	Задача 4. . . . .	30
2	Домашнее задание 2.	31
2.1	Задача 1. . . . .	31
2.2	Задача 2. . . . .	32
3	Домашнее задание 3.	33
4	Домашнее задание 4.	35
4.1	Задача № 1 . . . . .	35
4.2	Задача № 2 . . . . .	35
5	Домашнее задание 5.	37
5.1	Задание № 3. . . . .	38
5.2	Задание № 5. . . . .	39
6	Домашнее задание 7.	40
6.1	№ 5 . . . . .	40
6.2	№ 6 . . . . .	43
6.3	№ 7 . . . . .	45
6.4	№ 2 . . . . .	47
7	Информация о курсе	48

# 1 Домашнее задание 1.

Во всех задачах буду пользоваться данной таблицей:

- (1)  $\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha$
- (2)  $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)$
- (3)  $\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha \& \beta$
- (4)  $\alpha \& \beta \rightarrow \alpha$
- (5)  $\alpha \& \beta \rightarrow \beta$
- (6)  $\alpha \rightarrow \alpha \vee \beta$
- (7)  $\beta \rightarrow \alpha \vee \beta$
- (8)  $(\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \vee \beta \rightarrow \gamma)$
- (9)  $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \neg \beta) \rightarrow \neg \alpha$
- (10)  $\neg \neg \alpha \rightarrow \alpha$

## 1.1 Задача 1.

$$\vdash (A \rightarrow A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B) \quad (\text{a})$$

### Доказательство:

- (1)  $(A \rightarrow A) \rightarrow (A \rightarrow A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B)$  (A9)
- (2)
- $\vdots$  copy-paste from lection
- (8)  $A \rightarrow A$
- (9)  $(A \rightarrow A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B)$  (MP (8,1 ))

Q.E.D.

$$\vdash \neg(A \& \neg A) \quad (b)$$

Доказательство:

- (1)  $((A \& \neg A) \rightarrow A) \rightarrow ((A \& \neg A) \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg(A \& \neg A)$   
Аксиома 9  $[\alpha := (A \& \neg A), \beta = A]$
- (2)  $(A \& \neg A) \rightarrow A$   
Аксиома 4  $[\alpha := A, \beta = \neg A]$
- (3)  $(A \& \neg A) \rightarrow \neg A$   
Аксиома 5  $[\alpha := A, \beta = \neg A]$
- (4)  $((A \& \neg A) \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg(A \& \neg A)$   
Moduse Ponens 2, 1
- (5)  $\neg(A \& \neg A)$   
Moduse Ponens 3, 4

$$\vdash (A \& B) \rightarrow (B \& A) \quad (c)$$

Для доказательства этого воспользуемся Теоремой о дедукции и докажем:

$$(A \& B) \vdash (B \& A)$$

Доказательство:

- |     |                                      |                                       |
|-----|--------------------------------------|---------------------------------------|
| (1) | $A \& B \rightarrow A$               | Аксиома 4 $[\alpha := A, \beta := B]$ |
| (2) | $A \& B \rightarrow B$               | Аксиома 5 $[\alpha := A, \beta := B]$ |
| (3) | $(A \& B)$                           | Гипотеза                              |
| (4) | $A$                                  | Moduse Ponuns 3, 1                    |
| (5) | $B$                                  | Moduse Ponuns 3, 2                    |
| (6) | $B \rightarrow A \rightarrow B \& A$ | Аксиома 3 $[\alpha := B, \beta := A]$ |
| (7) | $A \rightarrow B \& A$               | Moduse Ponuns 5, 6                    |
| (8) | $B \& A$                             | Moduse Ponuns 4, 7                    |

Q.E.D.

$$\vdash (A \vee B) \rightarrow (B \vee A) \quad (d)$$

**Доказательство:**

- |     |   |   |
|-----|---|---|
| (1) | $(A \rightarrow A \vee B) \rightarrow (B \rightarrow A \vee B) \rightarrow (A \vee B \rightarrow A \vee B)$ | Аксиома 8 $[\alpha := A, \beta := B, \gamma := A \vee B]$ |
| (2) | $A \rightarrow A \vee B$  | Аксиома 6 $[\alpha := A, \beta := B]$                     |
| (3) | $B \rightarrow A \vee B$  | Аксиома 7 $[\alpha := B, \beta := A]$                     |
| (4) | $(B \rightarrow A \vee B) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow (B \vee A))$                                  | Moduse Ponuns 2, 1  |
| (5) | $(A \vee B) \rightarrow (B \vee A)$   | Moduse Ponuns 3, 4  |

Q.E.D.

$$A \& \neg A \vdash B$$

(e)

Доказательство:

(1)	$A \& \neg A \rightarrow A$	Аксиома 4 $[\alpha := A, \beta := \neg A]$
(2)	$A \& \neg A \rightarrow \neg A$	Аксиома 5 $[\alpha := A, \beta := \neg A]$
(3)	$A \& \neg A$	Гипотеза
(4)	$A$	Moduse Ponuns 3, 1
(5)	$\neg A$	Moduse Ponuns 3, 2
(6)	$(B \rightarrow A) \rightarrow (B \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg B$	Аксиома 9 $[\alpha := B, \beta := A]$
(7)	$A \rightarrow B \rightarrow A$	Аксиома 1 $[\alpha := A, \beta := B]$
(8)	$\neg A \rightarrow B \rightarrow \neg A$	Аксиома 1 $[\alpha := \neg A, \beta := B]$
(9)	$A \rightarrow \neg B \rightarrow A$	Аксиома 1 $[\alpha := A, \beta := \neg B]$
(10)	$\neg A \rightarrow \neg B \rightarrow \neg A$	Аксиома 1 $[\alpha := \neg A, \beta := \neg B]$
(11)	$B \rightarrow A$	Moduse Ponuns 4, 7
(12)	$B \rightarrow \neg A$	Moduse Ponuns 5, 8
(13)	$\neg B \rightarrow A$	Moduse Ponuns 4, 9
(14)	$\neg B \rightarrow \neg A$	Moduse Ponuns 5, 10
(15)	$(B \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg B$	Moduse Ponuns 11, 6
(16)	$\neg B$	Moduse Ponuns 12, 15
(17)	$(\neg B \rightarrow A) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg \neg B$	Аксиома 9 $[\alpha := \neg B, \beta := A]$
(18)	$(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg \neg B$	Moduse Ponuns 13, 17
(19)	$\neg \neg B$	Moduse Ponuns 14, 18
(20)	$\neg \neg B \rightarrow B$	Аксиома 10 $[\alpha := B]$
(21)	$B$	Moduse Ponuns 19, 20

## 1.2 Задача 2.

а) Докажем, что  $\vdash \alpha \rightarrow \neg\neg\alpha$ . Для этого воспользуемся Теоремой о дедукции и докажем:

$$\alpha \vdash \neg\neg\alpha$$

### Доказательство:

- (1)  $\alpha \rightarrow \neg\alpha \rightarrow \alpha$   
Аксиома 1  $[\alpha := \alpha, \beta := \neg\alpha]$
- (2)  $\alpha$   
Гипотеза
- (3)  $\neg\alpha \rightarrow \alpha$   
Moduse Ponens 2, 1
- (4)  $(\neg\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow (\neg\alpha \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow \neg\neg\alpha$   
Аксиома 9  $[\alpha := \neg\alpha, \beta := \alpha]$
- (5)  
:  
copy-paste from lection
- (12)  $\neg\alpha \rightarrow \neg\alpha$
- (13)  $(\neg\alpha \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow \neg\neg\alpha$   
Moduse Ponens 3, 4
- (14)  $\neg\neg\alpha$   
Moduse Ponens 12, 13

Q.E.D.



$$\neg A, B \vdash \neg(A \& B) \quad (b)$$

**Доказательство:**

- |     |   |   |
|-----|---|---|
| (1) | $((A \& B) \rightarrow A) \rightarrow ((A \& B) \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg(A \& B)$ | Аксиома 9 $[\alpha := (A \& B), \beta := A]$      |
| (2) | $A \& B \rightarrow A$  | Аксиома 4 $[\alpha := A, \beta := B]$             |
| (3) | $\neg A$  | Гипотеза  |
| (4) | $B$   | Гипотеза  |
| (5) | $\neg A \rightarrow (A \& B) \rightarrow \neg A$  | Аксиома 1 $[\alpha := \neg A, \beta := (A \& B)]$ |
| (6) | $(A \& B) \rightarrow \neg A$   | Moduse Ponuns 3, 5                                |
| (7) | $((A \& B) \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg(A \& B)$                                      | Moduse Ponuns 2, 1                                |
| (8) | $\neg(A \& B)$  | Moduse Ponuns 6, 7                                |

$$\neg A, \neg B \vdash \neg(A \vee B) \quad (c)$$

### Доказательство:

Докажем, что  $\neg A \vdash A \rightarrow \neg(A \vee B)$ . Для этого по теореме о дедукции, надо доказать  $\neg A, A \rightarrow \neg(A \vee B)$ . Для этого воспользуемся доказательством 1e. Откуда есть доказательство вышесказанного. Аналогично есть доказательство  $\neg B \vdash B \rightarrow \neg(A \vee B)$ . Назовем эти доказательства Леммой 1 и Леммой 2 соответственно.

Вернемся к исходному доказательству:

- (1)  $\neg A$   
Гипотеза
- (2)  $\neg B$   
Гипотеза
- (3)  $((A \vee B) \rightarrow A) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg(A \vee B)$   
Аксиома 9  $[\alpha := (A \vee B), \beta := A]$
- (4)  $(A \rightarrow \neg(A \vee B)) \rightarrow (B \rightarrow \neg(A \vee B)) \rightarrow (A \vee B \rightarrow \neg(A \vee B))$   
Аксиома 8  $[\alpha := A, \beta := B, \gamma := \neg(A \vee B)]$
- (5)  $\neg A \rightarrow \neg A \rightarrow \neg A$

Теперь воспользуемся нашими предположениями:

- (6)
- $\vdots$  copy-paste from lemma 1
- (5+n)  $A \rightarrow \neg(A \vee B)$
- (6+n)
- $\vdots$  copy-paste from lemma 2
- (5 + n + m)  $B \rightarrow \neg(A \vee B)$
- (6 + n + m)  $(B \rightarrow \neg(A \vee B)) \rightarrow (A \vee B \rightarrow \neg(A \vee B))$   
Moduse Ponuns (5 + n), 4
- (7 + n + m)  $A \vee B \rightarrow \neg(A \vee B)$   
Moduse Ponuns (5 + n + m), (6 + n + m) Q.E.D
- (8 + n + m)
- $\vdots$  copy-paste from lection
- (15 + n + m)  $A \vee B \rightarrow A \vee B$
- (16 + n + m)  $((A \vee B) \rightarrow (A \vee B)) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow \neg(A \vee B)) \rightarrow \neg(A \vee B)$   
Аксиома 9  $[\alpha := A \vee B, \beta := A \vee B]$
- (17 + n + m)  $((A \vee B) \rightarrow \neg(A \vee B)) \rightarrow \neg(A \vee B)$   
Moduse Ponuns (15 + n + m), (16 + n + m)
- (18 + n + m)  $\neg(A \vee B)$   
Moduse Ponuns (7 + n + m), (17 + n + m)

$$A, \neg B \vdash \neg(A \rightarrow B) \quad (d)$$

(1)	$A$	Гипотеза
(2)	$\neg B$	Гипотеза
(3)	$\neg B \rightarrow (A \rightarrow B) \rightarrow \neg B$	Аксиома 1 $[\alpha := \neg B, \beta := (A \rightarrow B)]$
(4)	$(A \rightarrow B) \rightarrow \neg B$	Moduse Ponuns 2, 3
(5)	$A \rightarrow (A \rightarrow B) \rightarrow A$	Аксиома 1 $[\alpha := A, \beta := (A \rightarrow B)]$
(6)	$(A \rightarrow B) \rightarrow A$	Moduse Ponuns 1, 5
(7)		
:	<a href="#">copy-paste from lection</a>	
(15)	$(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B)$	
(16)	$((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow B)$	Аксиома 2 $[\alpha := A \rightarrow B, \beta := A, \gamma := B]$
(17)	$((A \rightarrow B) \rightarrow A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow A)$	Moduse Ponuns 6, 16
(18)	$(A \rightarrow B) \rightarrow B$	Moduse Ponuns 15, 17
(19)	$((A \rightarrow B) \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg(A \rightarrow B)$	Аксиома 9 $[\alpha := A \rightarrow B, \beta := B]$
(20)	$((A \rightarrow B) \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg(A \rightarrow B)$	Moduse Ponuns 18, 19
(21)	$\neg(A \rightarrow B)$	Moduse Ponuns 4, 20

$$\neg A, B \vdash A \rightarrow B \quad (e)$$

Доказательство:

- |     |                                 |                                       |
|-----|---------------------------------|---------------------------------------|
| (1) | $\neg A$                        | Гипотеза                              |
| (2) | $B$                             | Гипотеза                              |
| (3) | $B \rightarrow A \rightarrow B$ | Аксиома 1 $[\alpha := B, \beta := A]$ |
| (4) | $A \rightarrow B$               | Moduse Ponens 2, 3                    |

### 1.3 Задача 3.

$$\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C) \quad (a)$$

Воспользуемся теоремой о дедукции и будем доказывать:

$$(A \rightarrow B), (B \rightarrow C) \vdash (A \rightarrow C)$$

#### Доказательство:

- |     |   |   |
|-----|---|---|
| (1) | $(A \rightarrow B)$   | Гипотеза  |
| (2) | $(B \rightarrow C)$   | Гипотеза  |
| (3) | $(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)$ | Аксиома 2 $[\alpha := A, \beta := B, \gamma := C]$  |
| (4) | $(B \rightarrow C) \rightarrow A \rightarrow (B \rightarrow C)$                               | Аксиома 1 $[\alpha := B \rightarrow C, \beta := A]$ |
| (5) | $A \rightarrow B \rightarrow C$   | Moduse Ponuns 2, 4                                  |
| (6) | $(A \rightarrow B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)$                               | Moduse Ponuns 1, 3                                  |
| (7) | $A \rightarrow C$   | Moduse Ponuns 5, 6                                  |

Q.E.D.

$$\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A) \quad (b)$$

Доказательство:

Воспользуемся теоремой о дедукции и будем доказывать:

$$(A \rightarrow B), \neg B \vdash \neg A$$

- |     |   |  |
|-----|---|--|
| (1) | $(A \rightarrow B)$   | Гипотеза                                   |
| (2) | $\neg B$  | Гипотеза                                   |
| (3) | $(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A$ | Аксиома 9 $[\alpha := A, \beta := B]$      |
| (4) | $\neg B \rightarrow A \rightarrow \neg B$                                 | Аксиома 1 $[\alpha := \neg B, \beta := A]$ |
| (5) | $A \rightarrow \neg B$  | Moduse Ponuns 2, 4                         |
| (6) | $(A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A$                               | Moduse Ponuns 1, 3                         |
| (7) | $\neg A$  | Moduse Ponuns 5, 6                         |

Q.E.D

$$\vdash \neg(\neg A \& \neg B) \rightarrow (A \vee B) \quad (c)$$

### Доказательство:

Воспользуемся теоремой о дедукции и будем доказывать:

$$\neg(\neg A \& \neg B) \vdash (A \vee B)$$

- |           |  |   |
|-----------|--|---|
| (1)       | $\neg(\neg A \& \neg B)$   | Гипотеза  |
| (2)       | $\neg A \rightarrow \neg B \rightarrow \neg A \& \neg B$   | Аксиома 3 $[\alpha := \neg A, \beta := \neg B]$ |
| (3)       | $A \rightarrow A \vee B$   | Аксиома 6 $[\alpha := A, \beta := B]$           |
| :         | copy-paste from 3b   |   |
| (3 + n)   | $(A \rightarrow A \vee B) \rightarrow (\neg(A \vee B) \rightarrow \neg A)$   |   |
| (4 + n)   | $\neg(A \vee B) \rightarrow \neg A$  | Moduse Ponuns 3, 3+n                            |
| (5 + n)   | $B \rightarrow A \vee B$   | Аксиома 7 $[\alpha := B, \beta := A]$           |
| :         | copy-paste from 3b   |   |
| (5 + 2n)  | $(B \rightarrow A \vee B) \rightarrow (\neg(A \vee B) \rightarrow \neg B)$   |   |
| (6 + 2n)  | $\neg(A \vee B) \rightarrow \neg B$  | Moduse Ponuns 5 + n, 5 + 2n                     |
|           | Хотим получить: $\neg(A \vee B) \rightarrow (\neg A \& \neg B)$  |   |
| (7 + 2n)  | $((\neg(A \vee B)) \rightarrow \neg B) \rightarrow ((\neg(A \vee B)) \rightarrow \neg B \rightarrow (\neg A \& \neg B)) \rightarrow ((\neg(A \vee B)) \rightarrow (\neg A \& \neg B))$                                     |   |
|           | Аксиома 2 $[\alpha := (\neg(A \vee B)), \beta := \neg B, \gamma := (\neg A \& \neg B)]$  |   |
| (8 + 2n)  | $(\neg(A \vee B) \rightarrow \neg A) \rightarrow (\neg(A \vee B) \rightarrow \neg A \rightarrow (\neg B \rightarrow (\neg A \& \neg B))) \rightarrow (\neg(A \vee B) \rightarrow (\neg B \rightarrow (\neg A \& \neg B)))$ |   |
|           | помогите, оно не влезает   |   |
|           | Аксиома 2 $[\alpha := \neg(A \vee B), \beta := \neg A, \gamma := (\neg B \rightarrow (\neg A \& \neg B))]$   |   |
| (9 + 2n)  | $(\neg(A \vee B) \rightarrow \neg A \rightarrow (\neg B \rightarrow (\neg A \& \neg B))) \rightarrow (\neg(A \vee B) \rightarrow (\neg B \rightarrow (\neg A \& \neg B)))$   |   |
|           | Moduse Ponuns (4 + n), (8 + 2n)  |   |
| (10 + 2n) | $(\neg A \rightarrow \neg B \rightarrow \neg A \& \neg B) \rightarrow \neg(A \vee B) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg B \rightarrow \neg A \& \neg B)$   |   |
|           | Аксиома 1 $[\alpha := (\neg A \rightarrow \neg B \rightarrow \neg A \& \neg B), \beta := \neg(A \vee B)]$  |   |
| (11 + 2n) | $\neg(A \vee B) \rightarrow \neg A \rightarrow (\neg B \rightarrow (\neg A \& \neg B))$  |   |
|           | Moduse Ponuns 2, 10 + 2n   |   |
| (12 + 2n) | $\neg(A \vee B) \rightarrow \neg B \rightarrow (\neg A \& \neg B)$   |   |
|           | Moduse Ponuns (11 + 2n), (9 + 2n)  |   |
| (13 + 2n) | Пропущу 13-ый + 2n шаг в угоду сохранения моей психики   |   |
|           | Moduse Ponuns 6 + 2n, 7 + 2n   |   |
| (14 + 2n) | $\neg(A \vee B) \rightarrow (\neg A \& \neg B)$  |   |
|           | Moduse Ponuns 12 + 2n, 13 + 2n   |   |
| (15 + 2n) | $(\neg(A \vee B) \rightarrow (\neg A \& \neg B)) \rightarrow (\neg(A \vee B) \rightarrow \neg(\neg A \& \neg B)) \rightarrow \neg\neg(A \vee B)$   |   |
|           | Аксиома 9 $[\alpha := \neg(A \vee B), \beta := \neg A \& \neg B]$  |   |
| (16 + 2n) | $\neg(\neg A \& \neg B) \rightarrow \neg(A \vee B) \rightarrow \neg(\neg A \& \neg B)$   |   |
|           | Аксиома 1 $[\alpha := \neg(\neg A \& \neg B), \beta := \neg(A \vee B)]$  |   |
| (17 + 2n) | $\neg\neg(A \vee B) \rightarrow (A \vee B)$  |   |
|           | Аксиома 10 $[\alpha := (A \vee B)]$  |   |

$$(18 + 2n) \quad \neg(A \vee B) \rightarrow \neg(\neg A \& B)$$

Moduse Ponuns 1, 16 + 2n

$$(19 + 2n) \quad (\neg(A \vee B) \rightarrow \neg(\neg A \& \neg B)) \rightarrow \neg\neg(A \vee B)$$

Moduse Ponuns 14 + 2n, 15 + 2n

$$(20 + 2n) \quad \neg\neg(A \vee B)$$

Moduse Ponuns 18 + 2n, 19 + 2n

$$(21 + 2n) \quad (A \vee B)$$

Moduse Ponuns 20 + 2n, 17 + 2n

Q.E.D.

Моя психика травмирована



$$\vdash A \vee B \rightarrow \neg(\neg A \& \neg B) \quad (d)$$

### Доказательство:

Сперва докажем, что:

$$\vdash A \rightarrow \neg(\neg A \& \neg B)$$

Буду пользоваться теоремой о дедукции и докажу:

$$A \vdash \neg(\neg A \& \neg B)$$

- (1)  $A$   
Гипотеза
- (2)  $((\neg A \& \neg B) \rightarrow A) \rightarrow ((\neg A \& \neg B) \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg(\neg A \& \neg B)$   
Аксиома 9  $[\alpha := (\neg A \& \neg B), \beta := A]$
- (3)  $A \rightarrow (\neg A \& \neg B) \rightarrow A$   
Аксиома 1  $[\alpha := A, \beta := (\neg A \& \neg B)]$
- (4)  $\neg A \& \neg B \rightarrow \neg A$   
Аксиома 4  $[\alpha := \neg A, \beta := \neg B]$
- (5)  $(\neg A \& \neg B) \rightarrow A$   
Moduse Ponuns 1, 3
- (6)  $((\neg A \& \neg B) \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg(\neg A \& \neg B)$   
Moduse Ponuns 5, 2
- (7)  $\neg(\neg A \& \neg B)$   
Moduse Ponuns 4, 6

Q.E.D.

Аналогично докажем

$$\vdash B \rightarrow \neg(\neg A \& B)$$

Назовем это Леммой 1 и Леммой 2 соответственно. Докажем искомое:

- (1)  $A \vee B$   
Гипотеза
- (2)  $(A \rightarrow \neg(\neg A \& \neg B)) \rightarrow (B \rightarrow \neg(\neg A \& B)) \rightarrow (A \vee B \rightarrow \neg(\neg A \& \neg B))$   
Аксиома 8  $[\alpha := A, \beta := B, \gamma := \neg(\neg A \& \neg B)]$
- $\vdots$
- (2 + n)  $B \rightarrow \neg(\neg A \& B)$   
copy-paste from lemma 2
- $\vdots$
- (2 + 2n)  $A \rightarrow \neg(\neg A \& B)$   
copy-paste from lemma 1
- (3 + 2n)  $(B \rightarrow \neg(\neg A \& B)) \rightarrow (A \vee B \rightarrow \neg(\neg A \& \neg B))$   
Moduse Ponuns (2 + 2n, 2)
- (4 + 2n)  $A \vee B \rightarrow \neg(\neg A \& \neg B)$   
Moduse Ponuns (2 + n, 3 + 2n)

Q.E.D

$$\vdash (\neg A \vee \neg B) \rightarrow \neg(A \& B) \quad (e)$$

Сперва докажем, что:

$$\vdash \neg A \rightarrow \neg(A \& B)$$

Для этого по теореме о дедукции докажем, что:

$$\neg A \vdash \neg(A \& B)$$

- (1)  $\neg A$   
Гипотеза
- (2)  $A \& B \rightarrow A$   
Аксиома 4  $[\alpha := A, \beta := B]$
- (3)  $((A \& B) \rightarrow A) \rightarrow ((A \& B) \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg(A \& B)$   
Аксиома 9  $[\alpha := (A \& B), \beta := A]$
- (4)  $\neg A \rightarrow (A \& B) \rightarrow \neg A$   
Аксиома 1  $[\alpha := \neg A, \beta := (A \& B)]$
- (5)  $A \& B \rightarrow \neg A$   
Moduse Ponuns 1, 4
- (6)  $(A \& B \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg(A \& B)$   
Moduse Ponuns 2, 3
- (7)  $\neg(A \& B)$   
Moduse Ponuns 5, 6

Q.E.D.

Аналогично докажем, что

$$\vdash \neg B \rightarrow \neg(A \& B)$$

Назовем это Леммой 1 и Леммой 2 соответственно.

Теперь докажем искомое:

- (1)  $(\neg A \rightarrow \neg(A \& B)) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg(A \& B)) \rightarrow (\neg A \vee \neg B \rightarrow \neg(A \& B))$   
Аксиома 8  $[\alpha := \neg A, \beta := \neg B, \gamma := \neg(A \& B)]$
- $\vdots$
- (1 + n)  $\neg A \rightarrow \neg(A \& B)$   
copy-paste from lemma 1
- $\vdots$
- (1 + 2n)  $\neg B \rightarrow \neg(A \& B)$   
copy-paste from lemma 2
- (2 + 2n)  $(\neg B \rightarrow \neg(A \& B)) \rightarrow ((\neg A \vee \neg B) \rightarrow \neg(A \& B))$   
Moduse Ponuns 1 + n, 1
- (3 + 2n)  $(\neg A \vee \neg B) \rightarrow \neg(A \& B)$   
Moduse Ponuns 1 + 2n, 2 + 2n

Q.E.D.

$$\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg A \vee B) \quad (f)$$

**Соглашение:** В дальнейшем доказательстве буду пользоваться ранее доказанными фактами, они будут как бы вставляться в доказательство, а снизу будет подписано, чем я пользовался (иначе это займет бесконечность времени)

Используем теорему о дедукции и будем доказывать

$$(A \rightarrow B) \vdash (\neg A \vee B)$$

- (1)  $A \rightarrow B$   
Гипотеза
- (2)  $B \rightarrow \neg A \vee B$   
Аксиома 7 [ $\alpha := B, \beta := \neg A$ ]
- (3)  $(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B \rightarrow \neg A \vee B) \rightarrow (A \rightarrow \neg A \vee B)$   
Аксиома 2 [ $\alpha := A, \beta := B, \gamma := \neg A \vee B$ ]
- (4)  $(A \rightarrow B \rightarrow \neg A \vee B) \rightarrow (A \rightarrow \neg A \vee B)$   
Moduse Ponuns 1, 3
- (5)  $(B \rightarrow \neg A \vee B) \rightarrow A \rightarrow (B \rightarrow \neg A \vee B)$   
Аксиома 1 [ $\alpha := (B \rightarrow \neg A \vee B), \beta := A$ ]
- (6)  $A \rightarrow B \rightarrow \neg A \vee B$   
Moduse Ponuns 2, 5
- (7)  $A \rightarrow \neg A \vee B$   
Moduse Ponuns 6, 4
- (8)  $\neg A \rightarrow \neg A \vee B$   
Аксиома 6 [ $\alpha := \neg A, \beta := B$ ]
- (9)  $(A \rightarrow (A \vee \neg A)) \rightarrow (\neg A \rightarrow (A \vee \neg A)) \rightarrow (A \vee \neg A \rightarrow (A \vee \neg A))$   
Аксиома 9 [ $\alpha := A, \beta := \neg A, \gamma := (A \vee \neg A)$ ]
- (10)  $(\neg A \rightarrow \neg A \vee B) \rightarrow (A \vee \neg A \rightarrow \neg A \vee B)$   
Moduse Ponuns 7, 9
- (11)  $A \vee \neg A \rightarrow \neg A \vee B$   
Moduse Ponuns 8, 10
- (12)  $A \vee \neg A$   
 $\alpha \vee \neg \alpha$  по 3i
- (13)  $\neg A \vee B$   
Moduse Ponuns 12, 11

Q.E.D.

$$\vdash A \& B \rightarrow A \vee B \quad (g)$$

Доказательство:

Используем теорему о дедукции и будем доказывать

$$A \& B \vdash A \vee B$$

- (1)  $A \& B$   
Гипотеза
- (2)  $A \& B \rightarrow A$   
Аксиома 4  $[\alpha := A, \beta := B]$
- (3)  $A \rightarrow A \vee B$   
Аксиома 6  $[\alpha := A, \beta := B]$
- (4)  $A$   
Moduse Ponuns 1, 2
- (5)  $A \vee B$   
Moduse Ponuns 4, 3

Q.E.D.

$$\vdash ((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A \quad (h)$$

### Доказательство:

**Соглашение:** В дальнейшем доказательстве буду пользоваться ранее доказанными фактами, они будут как бы вставляться в доказательство, а снизу будет подписано, чем я пользовался (иначе это займет бесконечность времени)

Используем теорему о дедукции и будем доказывать:

$$(A \rightarrow B) \rightarrow A \vdash A$$

- (1)  $(A \rightarrow B) \rightarrow A$   
Гипотеза
- (2)  $(\neg A \rightarrow A) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg \neg A$   
Аксиома 9  $[\alpha := \neg A, \beta := A]$
- (3)  $(\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (\neg A \rightarrow (A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow (\neg A \rightarrow A)$   
Аксиома 2  $[\alpha := \neg A, \beta := (A \rightarrow B), \gamma := A]$
- (4)  $\neg A \rightarrow A \rightarrow B$   
 $A, \neg A \vdash B$  по заданию 1e
- (5)  $((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow \neg A \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow A)$   
Аксиома 1  $[\alpha := ((A \rightarrow B) \rightarrow A), \beta := \neg A]$
- (6)  $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B) \rightarrow A$   
Moduse Ponuns 1, 5
- (7)  $(\neg A \rightarrow (A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow (\neg A \rightarrow A)$   
Moduse Ponuns 4, 3
- (8)  $\neg A \rightarrow A$   
Moduse Ponuns 6, 7
- (9)  $\neg A \rightarrow \neg A$   
 $\alpha \rightarrow \alpha$ , доказано на лекции
- (10)  $(\neg A \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg \neg A$   
Moduse Ponuns 8, 2
- (11)  $\neg \neg A$   
Moduse Ponuns 9, 10
- (12)  $\neg \neg A \rightarrow A$   
Аксиома 10  $[\alpha := A]$
- (13)  $A$   
Moduse Ponuns 11, 12

$$\vdash A \vee \neg A \quad (i)$$

**Соглашение:** В дальнейшем доказательстве буду пользоваться ранее доказанными фактами, они будут как бы вставляться в доказательство, а снизу будет подписано, чем я пользовался (иначе это займет бесконечность времени)

**Доказательство:**

- (1)  $A \rightarrow A \vee \neg A$   
Аксиома 6  $[\alpha := A, \beta := \neg A]$
- (2)  $\neg\neg(A \vee \neg A) \rightarrow (A \vee \neg A)$   
Аксиома 10  $[\alpha := A \vee \neg A]$
- (3)  $(\neg(A \vee \neg A) \rightarrow (A \vee \neg A)) \rightarrow (\neg(A \vee \neg A) \rightarrow \neg(A \vee \neg A)) \rightarrow \neg\neg(A \vee \neg A)$   
Аксиома 9  $[\alpha := \neg(A \vee \neg A), \beta := A \vee \neg A]$
- (4)  $\neg(A \vee \neg A) \rightarrow \neg(A \vee \neg A)$   
 $\alpha \rightarrow \alpha$ , доказано на лекции
- (5)  $(\neg(A \vee \neg A) \rightarrow \neg A) \rightarrow (\neg(A \vee \neg A) \rightarrow \neg A \rightarrow (A \vee \neg A)) \rightarrow (\neg(A \vee \neg A) \rightarrow (A \vee \neg A))$   
Аксиома 2  $[\alpha := \neg(A \vee \neg A), \beta := \neg A, \gamma := A \vee \neg A]$
- (6)  $\neg A \rightarrow A \vee \neg A$   
Аксиома 7  $[\alpha := \neg A, \beta := A]$
- (7)  $(\neg A \rightarrow A \vee \neg A) \rightarrow \neg(A \vee \neg A) \rightarrow (\neg A \rightarrow A \vee \neg A)$   
Аксиома 1  $[\alpha := \neg A \rightarrow A \vee \neg A, \beta := \neg(A \vee \neg A)]$
- (8)  $\neg(A \vee \neg A) \rightarrow (\neg A \rightarrow A \vee \neg A)$   
Moduse Ponuns 6, 7
- (9)  $(A \rightarrow A \vee \neg A) \rightarrow (\neg(A \vee \neg A) \rightarrow \neg A)$   
 $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha)$ , доказано в 3b
- (10)  $\neg(A \vee \neg A) \rightarrow \neg A$   
Moduse Ponuns 1, 9
- (11)  $(\neg(A \vee \neg A) \rightarrow (\neg A \rightarrow A \vee \neg A)) \rightarrow (\neg(A \vee \neg A) \rightarrow (A \vee \neg A))$   
Moduse Ponuns 10, 5
- (12)  $\neg(A \vee \neg A) \rightarrow (A \vee \neg A)$   
Moduse Ponuns 8, 11
- (13)  $(\neg(A \vee \neg A) \rightarrow \neg(A \vee \neg A)) \rightarrow \neg\neg(A \vee \neg A)$   
Moduse Ponuns 12, 3
- (14)  $\neg\neg(A \vee \neg A)$   
Moduse Ponuns 4, 13
- (15)  $A \vee \neg A$   
Moduse Ponuns 14, 2

Q.E.D.

$$\vdash (A \& B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B \rightarrow C) \quad (j)$$

Доказательство:

Если я докажу:

$$(A \& B \rightarrow C), A, B \vdash C$$

То воспользуясь теоремой о дедукции получу искомое.

Докажем:

- (1)  $(A \& B) \rightarrow C$   
Гипотеза
- (2)  $A$   
Гипотеза
- (3)  $B$   
Гипотеза
- (4)  $A \rightarrow B \rightarrow A \& B$   
Аксиома 3 [ $\alpha := A, \beta := B$ ]
- (5)  $B \rightarrow A \& B$   
Moduse Ponuns 2, 4
- (6)  $A \& B$   
Moduse Ponuns 3, 5
- (7)  $C$   
Moduse Ponuns 6, 1

Q.E.D.

$$\vdash A \& (B \vee C) \rightarrow (A \& B) \vee (A \& C) \quad (k)$$

### Доказательство:

Воспользуемся теоремой о дедукции, надо доказать:

$$A \& (B \vee C) \vdash (A \& B) \vee (A \& C)$$

- (1)  $A \& (B \vee C)$   
Гипотеза
- (2)  $A \& (B \vee C) \rightarrow A$   
Аксиома 4  $[\alpha := A, \beta := B \vee C]$
- (3)  $A \& (B \vee C) \rightarrow (B \vee C)$   
Аксиома 5  $[\alpha := A, \beta := B \vee C]$
- (4)  $A$   
Moduse Ponuns 1, 2
- (5)  $B \vee C$   
Moduse Ponuns 1, 3
- (6)  $A \rightarrow B \rightarrow A \& B$   
Аксиома 3  $[\alpha := A, \beta := B]$
- (7)  $A \rightarrow C \rightarrow A \& C$   
Аксиома 3  $[\alpha := A, \beta := C]$
- (8)  $(B \rightarrow (A \& B) \vee (A \& C)) \rightarrow (C \rightarrow (A \& B) \vee (A \& C)) \rightarrow (B \vee C \rightarrow (A \& B) \vee (A \& C))$   
Аксиома 8  $[\alpha := B, \beta := C, \gamma := (A \& B) \vee (A \& C)]$
- (9)  $(B \rightarrow A \& B) \rightarrow (B \rightarrow A \& B \rightarrow (A \& B) \vee (A \& C)) \rightarrow (B \rightarrow (A \& B) \vee (A \& C))$   
Аксиома 2  $[\alpha := B, \beta := A \& B, \gamma := (A \& B) \vee (A \& C)]$
- (10)  $B \rightarrow A \& B$   
Moduse Ponuns 4, 6
- (11)  $(B \rightarrow A \& B \rightarrow (A \& B) \vee (A \& C)) \rightarrow (B \rightarrow (A \& B) \vee (A \& C))$   
Moduse Ponuns 10, 9
- (12)  $(A \& B) \rightarrow (A \& B) \vee (A \& C)$   
Аксиома 6  $[\alpha := (A \& B), \beta := (A \& C)]$
- (13)  $(A \& B \rightarrow (A \& B) \vee (A \& C)) \rightarrow B \rightarrow (A \& B \rightarrow (A \& B) \vee (A \& C))$   
Аксиома 1  $[\alpha := A \& B \rightarrow (A \& B) \vee (A \& C), \beta := B]$
- (14)  $(B \rightarrow A \& B \rightarrow (A \& B) \vee (A \& C))$   
Moduse Ponuns 12, 13
- (15)  $B \rightarrow (A \& B) \vee (A \& C)$   
Moduse Ponuns 14, 11



- (16)  $(C \rightarrow A \& C) \rightarrow (C \rightarrow A \& C \rightarrow (A \& B) \vee (A \& C)) \rightarrow (C \rightarrow (A \& B) \vee (A \& C))$   
 Аксиома 2  $[\alpha := C, \beta := A \& C, \gamma := (A \& B) \vee (A \& C)]$
- (17)  $B \rightarrow A \& B$   
 Moduse Ponuns 4, 7
- (18)  $(C \rightarrow A \& C \rightarrow (A \& B) \vee (A \& C)) \rightarrow (C \rightarrow (A \& B) \vee (A \& C))$   
 Moduse Ponuns 17, 16
- (19)  $(A \& C) \rightarrow (A \& B) \vee (A \& C)$   
 Аксиома 7  $[\alpha := (A \& C), \beta := (A \& B)]$
- (20)  $(A \& C \rightarrow (A \& B) \vee (A \& C)) \rightarrow C \rightarrow (A \& C \rightarrow (A \& B) \vee (A \& C))$   
 Аксиома 1  $[\alpha := A \& C \rightarrow (A \& B) \vee (A \& C), \beta := C]$
- (21)  $(C \rightarrow A \& \rightarrow (A \& B) \vee (A \& C))$   
 Moduse Ponuns 19, 20
- (22)  $C \rightarrow (A \& B) \vee (A \& C)$   
 Moduse Ponuns 21, 18
- (23)  $(C \rightarrow (A \& B) \vee (A \& C)) \rightarrow (B \vee C \rightarrow (A \& B) \vee (A \& C))$   
 Moduse Ponuns 15, 8
- (24)  $B \vee C \rightarrow (A \& B) \vee (A \& C)$   
 Moduse Ponuns 22, 23
- (25)  $(A \& B) \vee (A \& C)$   
 Moduse Ponuns 5, 24

$$\vdash (A \rightarrow B \rightarrow C) \rightarrow (A \& B \rightarrow C) \quad (1)$$

Доказательство:

По теореме о дедукции:

$$(A \rightarrow B \rightarrow C), A \& B \vdash C$$

- (1)  $A \rightarrow B \rightarrow C$   
Гипотеза
- (2)  $A \& B$   
Гипотеза
- (3)  $A \& B \rightarrow A$   
Аксиома 4  $[\alpha := A, \beta := B]$
- (4)  $A \& B \rightarrow B$   
Аксиома 5  $[\alpha := A, \beta := B]$
- (5)  $A$   
Moduse Ponuns 2, 3
- (6)  $B$   
Moduse Ponuns 2, 4
- (7)  $B \rightarrow C$   
Moduse Ponuns 5, 1
- (8)  $C$   
Moduse Ponuns 6, 7

Q.E.D.

$$\vdash (A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A) \quad (m)$$

### Доказательство:

- (1)  $(A \rightarrow (A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)) \rightarrow (\neg A \rightarrow (A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)) \rightarrow (A \vee \neg A \rightarrow (A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A))$   
Аксиома 7  $[\alpha := A, \beta := \neg A, \gamma := (A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)]$
- (2)  $(A \rightarrow (B \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow A) \rightarrow (A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow (A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A))$   
Аксиома 2  $[\alpha := A, \beta := B \rightarrow A, \gamma := (A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)]$
- (3)  $A \rightarrow B \rightarrow A$   
Аксиома 1  $[\alpha := A, \beta := B]$
- (4)  $(A \rightarrow (B \rightarrow A) \rightarrow (A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow (A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A))$   
Moduse Ponuns 3, 2
- (5)  $(B \rightarrow A) \rightarrow (A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$   
Аксиома 7  $[\alpha := (B \rightarrow A), \beta := (A \rightarrow B)]$
- (6)  $((B \rightarrow A) \rightarrow (A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)) \rightarrow A \rightarrow ((B \rightarrow A) \rightarrow (A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A))$   
Аксиома 1  $[\alpha := (B \rightarrow A) \rightarrow (A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A), \beta := A]$
- (7)  $A \rightarrow (B \rightarrow A) \rightarrow (A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$   
Moduse Ponuns 5, 6
- (8)  $A \rightarrow (A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$   
Moduse Ponuns 7, 4
- (9)  $(\neg A \rightarrow (A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)) \rightarrow (A \vee \neg A \rightarrow (A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A))$   
Moduse Ponuns 8, 1
- (10)  $(\neg A \rightarrow A \rightarrow B) \rightarrow (\neg A \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow (A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)) \rightarrow (\neg A \rightarrow (A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A))$   
Аксиома 2  $[\alpha := \neg A, \beta := (A \rightarrow B), \gamma := (A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)]$
- (11)  $\neg A \rightarrow A \rightarrow B$   
 $A, \neg A \vdash B$  по заданию 1e
- (12)  $(\neg A \rightarrow (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)) \rightarrow (\neg A \rightarrow (A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A))$   
Moduse Ponuns 11, 10
- (13)  $(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$   
Аксиома 6  $[\alpha := (A \rightarrow B), \beta := (B \rightarrow A)]$
- (14)  $((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)) \rightarrow A \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A))$   
Аксиома 1  $[\alpha := (B \rightarrow A) \rightarrow (A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A), \beta := \neg A]$
- (15)  $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$   
Moduse Ponuns 13, 14
- (16)  $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$   
Moduse Ponuns 15, 12
- (17)  $A \vee \neg A \rightarrow (A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$   
Moduse Ponuns 16, 9
- (18)  $(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$   
по 3i
- (19)  $A \vee \neg A$   
Moduse Ponuns 18, 17

Q.E.D.

$$\vdash (A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow C) \vee (C \rightarrow A) \quad (n)$$

Временно обозначу за  $F := (A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow C)$

- (1)  $(A \rightarrow F \vee (C \rightarrow A)) \rightarrow (\neg A \rightarrow F \vee (C \rightarrow A)) \rightarrow (A \vee \neg A \rightarrow F \vee (C \rightarrow A))$   
Аксиома 8  $[\alpha := A, \beta := \neg A, \gamma := F \vee (C \rightarrow A)]$
- (2)  $(A \rightarrow (C \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow (C \rightarrow A) \rightarrow F \vee (C \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow F \vee (C \rightarrow A))$   
Аксиома 2  $[\alpha := A, \beta := C \rightarrow A, \gamma := F \vee (C \rightarrow A)]$
- (3)  $A \rightarrow C \rightarrow A$   
Аксиома 1  $[\alpha := A, \beta := C]$
- (4)  $(A \rightarrow (C \rightarrow A) \rightarrow F \vee (C \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow F \vee (C \rightarrow A))$   
Moduse Ponuns 3, 2
- (5)  $(C \rightarrow A) \rightarrow F \vee (C \rightarrow A)$   
Аксиома 7  $[\alpha := (C \rightarrow A), \beta := F]$
- (6)  $((C \rightarrow A) \rightarrow F \vee (C \rightarrow A)) \rightarrow A \rightarrow ((C \rightarrow A) \rightarrow F \vee (C \rightarrow A))$   
Аксиома 1  $[\alpha := ((C \rightarrow A) \rightarrow F \vee (C \rightarrow A)), \beta := A]$
- (7)  $A \rightarrow (C \rightarrow A) \rightarrow F \vee (C \rightarrow A)$   
Moduse Ponuns 5, 6
- (8)  $A \rightarrow F \vee (C \rightarrow A)$   
Moduse Ponuns 7, 4
- (9)  $(\neg A \rightarrow F \vee (C \rightarrow A)) \rightarrow (A \vee \neg A \rightarrow F \vee (C \rightarrow A))$   
Moduse Ponuns 8, 1
- (10)  $\neg A \rightarrow A \rightarrow B$   
 $A, \neg A \vdash B$  по заданию 1e
- (11)  $(\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (\neg A \rightarrow (A \rightarrow B) \rightarrow F) \rightarrow (\neg A \rightarrow F)$   
Аксиома 2  $[\alpha := \neg A, \beta := (A \rightarrow B), \gamma := F]$
- (12)  $(\neg A \rightarrow (A \rightarrow B) \rightarrow F) \rightarrow (\neg A \rightarrow F)$   
Moduse Ponuns 10, 11
- (13)  $(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow C)$   
Аксиома 6  $[\alpha := (A \rightarrow B), \beta := (B \rightarrow C)]$
- (14)  $((A \rightarrow B) \rightarrow F) \rightarrow \neg A \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow F)$   
Аксиома 1  $[\alpha := (A \rightarrow B) \rightarrow F, \beta := \neg A]$
- (15)  $(\neg A \rightarrow (A \rightarrow B) \rightarrow F)$   
Moduse Ponuns 13, 14
- (16)  $\neg A \rightarrow F$   
Moduse Ponuns 15, 12

- (17)  $(\neg A \rightarrow F) \rightarrow (\neg A \rightarrow F \rightarrow F \vee (C \rightarrow A)) \rightarrow (\neg A \rightarrow F \vee (C \rightarrow A))$   
[Аксиома 2](#) [ $\alpha := \neg A, \beta := F, \gamma := F \vee (C \rightarrow A)$ ]
- (18)  $(\neg A \rightarrow F \rightarrow F \vee (C \rightarrow A)) \rightarrow (\neg A \rightarrow F \vee (C \rightarrow A))$   
[Moduse Ponuns 16, 17](#)
- (19)  $F \rightarrow F \vee (C \rightarrow A)$   
[Аксиома 7](#) [ $\alpha := F, \beta := (C \rightarrow A)$ ]
- (20)  $(F \rightarrow F \vee (C \rightarrow A)) \rightarrow \neg A \rightarrow (F \rightarrow F \vee (C \rightarrow A))$   
[Аксиома 1](#) [ $\alpha := (F \rightarrow F \vee (C \rightarrow A)), \beta := \neg A$ ]
- (21)  $\neg A \rightarrow F \rightarrow F \vee (C \rightarrow A)$   
[Moduse Ponuns 19, 20](#)
- (22)  $\neg A \rightarrow F \vee (C \rightarrow A)$   
[Moduse Ponuns 21, 18](#)
- (23)  $A \vee \neg A \rightarrow F \vee (C \rightarrow A)$   
[Moduse Ponuns 22, 9](#)
- (24)  $A \vee \neg A$   
[По пункту 3i](#)
- (25)  $F \vee (C \rightarrow A)$   
[Moduse Ponuns 24, 23](#)

Q.E.D.

## 1.4 Задача 4.

Будем пользоваться фактом из 3i:  $\vdash \alpha \vee \neg\alpha$

По теореме о дедукции  $\alpha \vdash \beta \Leftrightarrow \vdash \alpha \rightarrow \beta$ .

По теореме о дедукции  $\neg\alpha \vdash \beta \Leftrightarrow \vdash \neg\alpha \rightarrow \beta$

Докажем, что  $\vdash \beta$ :

### Доказательство

$\vdots$	
$(n)$	$\alpha \rightarrow \beta$ по вышесказанному
$\vdots$	
$(n + m)$	$\neg\alpha \rightarrow \beta$ по вышесказанному
$(n + m + 1)$	$(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \vee \neg\alpha \rightarrow \beta)$ Аксиома 8 [ $\alpha := \alpha, \beta := \neg\alpha, \gamma := \beta$ ]
$(n + m + 2)$	$(\neg\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \vee \neg\alpha \rightarrow \beta)$ Moduse Ponuns $n, (n + m + 1)$
$(n + m + 3)$	$(\alpha \vee \neg\alpha \rightarrow \beta)$ Moduse Ponuns $(n + m), (n + m + 2)$
$\vdots$	
$(n + m + k + 3)$	$\alpha \vee \neg\alpha$ По 3i
$(n + m + k + 4)$	$\beta$ Moduse Ponuns $(n + m + k + 3), (n + m + 3)$

## 2 Домашнее задание 2.

### 2.1 Задача 1.

Покажите, что в классическом исчислении высказываний  $\Gamma \models \alpha \Rightarrow \Gamma \vdash \alpha$ .

#### Решение:

Пусть  $X_1, \dots, X_n$  - пропозициональные переменные, которые участвуют в формуле  $\alpha$ , их конечное количество.

Посмотрю на таблицу истинности ( $2^n$  строк оценки), для  $\alpha$ .

Для каждой выполненной строчки выполнено:

$T_1 \wedge \dots \wedge T_n \models \alpha$ , где  $T_i = X_i$  или  $T_i = \neg X_i$ , в зависимости

Это эквивалентно тому, что формула верна  $\models (T_1 \wedge \dots \wedge T_n) \rightarrow \alpha$ . Откуда по теореме о полноте из лекции:

$$\vdash (T_1 \wedge T_2 \wedge \dots \wedge T_n) \rightarrow \alpha$$

Используем теорему о дедукции и получим:

$$(T_1 \wedge T_2 \wedge \dots \wedge T_n) \vdash \alpha$$

Заметим, что  $\Gamma \models (T_1 \wedge T_2 \wedge \dots \wedge T_n) \vee (Q_1 \dots) \vee \dots$  —выводит какое-то конечное количество множество строк нашей таблицы истинности

Осталось показать, что

$$\Gamma \vdash (T_1 \wedge T_2 \wedge \dots \wedge T_n) \vee (Q_1 \dots) \vee \dots$$

И тогда будет выполнено  $\Gamma \vdash \alpha$

Обозначу  $(T_1 \wedge T_2 \wedge \dots \wedge T_n) \vee (Q_1 \dots) \vee \dots = D$

Формула  $D$  построена так, что она "перечисляет" все возможные строки  $\Gamma$ . В классической логике это эквивалентно тому, что  $\Gamma$  эквивалентно  $D$  (в плане таблицы истинности)

## 2.2 Задача 2.

а) Возьмем открытое множество из  $R$ , по определению вокруг каждой точки открытого множества есть шар, возьмем объединение и победим (будем рассматривать только  $\mathbb{Q}$ , а так как  $Q$  плотно в  $\mathbb{R}$  и так как  $\mathbb{Q}$  - счетно, то покрытие будет счетно и по определению мы сможем взять объединение) TODO: расписать

б) нет

в) нет



### 3 Домашнее задание 3.

3f

```
// (A -> B) -> (not B -> not A)

template<typename A, typename B, typename C>
//f_a_to_b = A -> B
auto proof_f(std::function<B(A)> f_a_to_b) {
    // not B = B -> false
    return [f](std::function<C(B)> not_b) {
        return [f_a_to_b, not_b](A a){
            b = f_a_to_b(a)
            return not_b(b) // C
        }
        // -> мы вернули функцию, которая по A возвращает false
    };
}
```

## 4 Домашнее задание 4.

### 4.1 Задача № 1

Докажем

1.  $1 \Rightarrow 2$ . Выполнена формула  $A \& \neg A$ .
2.  $2 \Rightarrow 3$ . Используем аксиому 4, 5, чтобы получить  $\alpha$  и  $\neg \alpha$  и используем принцип Взрыва, чтобы доказать  $A \& \neg A$ . Воз
3.  $3 \Rightarrow 4$ . Используем аксиому 4, 5, получим, что для  $\alpha = A$  выполнено
4.  $4 \Rightarrow 1$ . Используем принцип Взрыва и получим то, что надо

### 4.2 Задача № 2

- a. 2 мира  $w_0, w_1$ . Связаны  $w_0 \leq w_1$

Для первого мира:

$$\not\models A, \not\models B$$

Для второго мира:

$$\models A, \not\models B$$

Покажем, что  $((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$  не выполнено в данной модели Крипке:

В  $w_0$  не выполнено:

$$A \rightarrow B$$

При этом тогда  $\models (A \rightarrow B) \rightarrow A$  выполнено и в  $w_0$  и  $w_1$ . Заметим, что тогда не может быть выполнено:

$$((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$$

Потому что тогда  $w_0 \models A$ , что не так

- b. 2 мира  $w_0, w_1$ . Связаны  $w_0 \leq w_1$

Для первого мира:

$$\not\models A, \not\models B$$

Для второго мира:

$$\models A, \models B$$

Покажем, что  $(A \rightarrow B) \rightarrow \neg A \vee B$  не выполнено в данной модели Крипке:

В  $w_0$  и  $w_1$  выполнено:

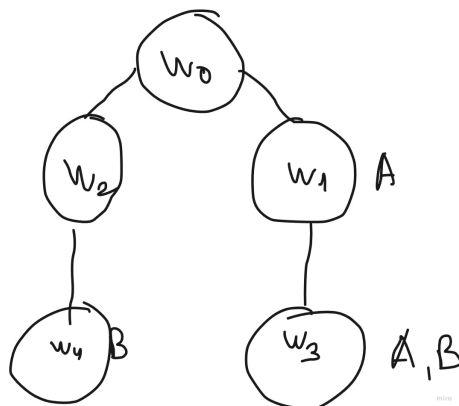
$$A \rightarrow B$$

Поймем выполнено ли  $\neg A \vee B$  в  $w_0$ :

$$w_0 \not\models B, w_0 \not\models \neg A \Rightarrow w_0 \not\models \neg A \vee B$$

Заметим, что тогда в  $w_0$  не выполняется наше условие

с. 5 миров:  $w_1, \dots, w_5$ . Отношение порядка задается таким графом:



$$w_1 \models A, w_4 \models B, w_3 \models A, w_3 \models B$$

Проверим  $B \vee \neg B$  для каждого мира:

$$w_0 \not\models \neg B, w_0 \not\models B \Rightarrow w_0 \not\models B \vee \neg B$$

$$w_1 \not\models \neg B, w_1 \models B \Rightarrow w_1 \models B \vee \neg B$$

$$w_2 \not\models \neg B, w_2 \not\models B \Rightarrow w_2 \not\models B \vee \neg B$$

$$w_3 \models B \Rightarrow w_3 \models B \vee \neg B$$

$$w_4 \models B \Rightarrow w_4 \models B \vee \neg B$$

Проверим  $A \rightarrow (B \vee \neg B)$  в  $w_0$ . Если  $\models A \rightarrow (B \vee \neg B)$ , то в  $w_0 \models B \vee \neg B$ , что не так.

Откуда в  $w_0 \not\models A \rightarrow (B \vee \neg B)$ .

Проверим  $\neg A \rightarrow (B \vee \neg B)$  в  $w_0$ . Если  $\models \neg A \rightarrow (B \vee \neg B)$ , то в  $w_2 \models B \vee \neg B$ , что не так.

Откуда в  $w_0 \not\models \neg A \rightarrow (B \vee \neg B)$ .

Отсюда очевидно, что в  $w_0$  не выполнено искомое утверждение, что и надо доказать.

## 5 Домашнее задание 5.

## 5.1 Задание № 3.

Утверждение:

Все Саши любят матлог    Все Саши - люди (человеки)

Существует человек, который любит матлог

Все единороги имеют рога    Все единороги млекопитающие

Существует млекопитающее с рогом

В предикатах:

$$\exists x : M(x), \forall x : M(x) \rightarrow P(x), \forall x : M(x) \rightarrow S(x) \vdash \exists x : S(x) \& P(x)$$

Доказательство:

(1)	$\forall x.M(x) \rightarrow P(x)$	Гипотеза
(2)	$\forall x.M(x) \rightarrow S(x)$	Гипотеза
(3)	$\exists x.M(x)$	Гипотеза (условие существования)
(3.5)	$\exists x.M(x) \rightarrow M(a)$	Аксиома 12
(4)	$M(a)$	Modus Ponens из 3 и (3.5)
(5)	$M(a) \rightarrow P(a)$	см замечание
(6)	$M(a) \rightarrow S(a)$	см замечание
(7)	$P(a)$	Modus ponens из (4) и (5)
(8)	$S(a)$	Modus ponens из (4) и (6)
(9)	$S(a) \& P(a)$	Введение конъюнкции из (7) и (8)
(10)	$S(a) \& P(a) \rightarrow \exists x.S(x) \& P(x)$	(12) аксиома
(11)	$\exists x.S(x) \& P(x)$	Modus ponens из (9) и (10)

**Замечание:** 5,6 пункт следуют из 11 аксиомы при подстановке  $a$  вместо  $x$  и modus ponens.

**Контрпример с существованием:**

$$D = \{0, 1\}$$

$$M(x) = (x == 0) \& (x == 1), S(x) = (x == 0), P(x) = (x == 1)$$

## 5.2 Задание № 5.

Докажите или опровергните следующие формулы:

1.  $(\forall x.\phi) \rightarrow (\forall y.\phi[x := y])$ , если есть свобода для подстановки  $y$  вместо  $x$  в  $\phi$  и  $y$  не входит свободно в  $\phi$ .

**Решение:**

- (1)  $(\forall x.\phi) \rightarrow \phi[x := y]$  (A11)
- (2)  $(\forall x.\phi) \rightarrow \forall y.\phi[x := y]$  Правило вывода  $\forall$

2.  $(\forall x.\phi) \rightarrow (\exists x.\phi)$  и  $(\forall x.\forall x.\phi) \rightarrow (\forall x.\phi)$

**Решение:**

$x$  свободно для подстановки в  $\phi$  вместо  $x$ ,

- (1)  $(\forall x.\phi) \rightarrow \phi[x := x]$  (A11)
- (2)  $\phi \rightarrow (\exists x.\phi[x := x])$  (A12)
- (3)  $((\forall x.\phi) \rightarrow \phi) \rightarrow ((\forall x.\phi) \rightarrow \phi \rightarrow (\exists x.\phi)) \rightarrow ((\forall x.\phi) \rightarrow (\exists x.\phi))$  (A2)
- (4)  $((\forall x.\phi) \rightarrow \phi \rightarrow (\exists x.\phi)) \rightarrow ((\forall x.\phi) \rightarrow (\exists x.\phi))$  [Moduse Ponuns 1, 3](#)
- (5)  $(\phi \rightarrow (\exists x.\phi)) \rightarrow (\forall x.\phi) \rightarrow (\phi \rightarrow (\exists x.\phi))$  (A1)
- (6)  $(\forall x.\phi) \rightarrow \phi \rightarrow (\exists x.\phi)$  [Moduse Ponuns 1, 5](#)
- (7)  $(\forall x.\phi) \rightarrow (\exists x.\phi)$  [Moduse Ponuns 6, 4](#)

Второе:

- (1)  $(\forall x.\phi) \rightarrow (\forall x.\phi)$   $\alpha \rightarrow \alpha$
- (2)  $(\forall x.(\forall x.\phi)) \rightarrow (\forall x.\phi)$  (A11)
3.  $(\forall x.\phi) \rightarrow (\neg \exists x.\neg \phi)$  и  $(\exists x.\neg \phi) \rightarrow (\neg \forall x.\phi)$
4.  $(\forall x.\alpha \vee \beta) \rightarrow (\neg \exists x.\neg \alpha) \& (\neg \exists x.\neg \beta)$
5.  $((\forall x.\alpha) \vee (\forall y.\beta)) \rightarrow \forall x.\forall y.\alpha \vee \beta$ . Какие условия надо наложить на переменные и формулы? Приведите контрпримеры, поясняющие необходимость условий.
6.  $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \forall x.(\alpha \rightarrow \beta)$ . Возможно, нужно наложить какие-то условия на переменные и формулы? Приведите контрпримеры, поясняющие необходимость условий (если условия требуются).
7.  $(\alpha \rightarrow \forall x.\beta) \rightarrow (\forall x.\alpha \rightarrow \beta)$  при условии, что  $x$  не входит свободно в  $\alpha$ .

## 6 Домашнее задание 7.

### 6.1 № 5

Рассмотрим аксиоматику Пеано. Пусть

$$a^b = \begin{cases} 1, & b = 0 \\ a^c \cdot a, & b = c' \end{cases}$$

**Сложение:**

$$\begin{cases} a + 0 = a \\ a + b' = (a + b)' \end{cases}$$

**Умножение:**

$$\begin{cases} a \cdot 0 = 0 \\ a \cdot b' = a \cdot b + a \end{cases}$$

Докажите, что:

1.  $a \cdot b = b \cdot a$
2.  $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$
3.  $a^{b+c} = a^b \cdot a^c$
4.  $(a^b)^c = a^{b \cdot c}$
5.  $(a + b) + c = a + (b + c)$

**Доказательство**

$$5. (a + b) + c = a + (b + c)$$

**Доказательство индукцией по  $c$ :**

**База:**  $c = 0$

$$(a + b) + 0 = a + b = a + (b + 0)$$

**Предположение индукции:**

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

**Шаг индукции:**  $c \rightarrow c'$

$$\begin{aligned} (a + b) + c' &= ((a + b) + c)' = (a + (b + c))' \\ a + (b + c') &= a + (b + c)' = (a + (b + c))' \end{aligned}$$

$$1. a \cdot b = b \cdot a$$

**Докажем вспомогательное утверждение**

$$b' \cdot a = b \cdot a + a$$



**База:**  $a = 0$

$$b' \cdot 0 = 0$$

очевидно

**Предположение:**  $b' \cdot a = b \cdot a + a$

**Шаг:**  $a \rightarrow a'$

$$\begin{aligned} b' \cdot a' &= b' \cdot a + b' = b \cdot a + a + b' = \\ &= b \cdot a + (a + b)' = b \cdot a + (b + a)' = b \cdot a + b + a' = b \cdot a' + a' \end{aligned}$$

Доказано вернемся к искомой задаче

**База:**  $b = 0$

$$a \cdot 0 = 0 = 0 \cdot a$$

очевидно

**Предположение:**  $a \cdot b = b \cdot a$

**Шаг:**  $b \rightarrow b'$

$$a \cdot b' = a \cdot b + a = b \cdot a + a = b' \cdot a$$

$$2. (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

**База:**  $c = 0$

$$(a + b) \cdot 0 = 0 = 0 + 0 = a \cdot 0 + b \cdot 0$$

**Предположение:**

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

**Шаг:**  $c \rightarrow c'$

$$\begin{aligned} (a + b) \cdot c' &= (a + b) \cdot c + (a + b) = (a \cdot c + b \cdot c) + (a + b) \\ a \cdot c' + b \cdot c' &= (a \cdot c + a) + (b \cdot c + b) = a \cdot c + b \cdot c + a + b \end{aligned}$$

$$3. a^{b+c} = a^b \cdot a^c$$

**База:**  $c = 0$

$$a^{b+0} = a^b = a^b \cdot 1 = a^b \cdot a^0$$

**Предположение:**

$$a^{b+c} = a^b \cdot a^c$$

**Шаг:**  $c \rightarrow c'$

$$\begin{aligned} a^{b+c'} &= a^{(b+c)'} = a^{b+c} \cdot a = (a^b \cdot a^c) \cdot a \\ a^b \cdot a^{c'} &= a^b \cdot (a^c \cdot a) = (a^b \cdot a^c) \cdot a \end{aligned}$$

$$4. (a^b)^c = a^{b \cdot c}$$

**База:**  $c = 0$

$$(a^b)^0 = 1 = a^0 = a^{b \cdot 0}$$

**Предположение:**

$$(a^b)^c = a^{b \cdot c}$$

**Шаг:**  $c \rightarrow c'$

$$(a^b)^{c'} = (a^b)^c \cdot a^b = a^{b \cdot c} \cdot a^b$$

$$a^{b \cdot c'} = a^{b \cdot c + b} = a^{b \cdot c} \cdot a^b$$

## 6.2 № 6

Определим отношение «меньше или равно» так:  $0 \leq a$  и  $a' \leq b'$ , если  $a \leq b$ . Докажите, что:

1.  $x \leq x + y$ ;
2.  $x \leq x \cdot y$  (укажите, когда это так — в остальных случаях приведите контрпримеры);
3. Если  $a \leq b$  и  $m \leq n$ , то  $a \cdot m \leq b \cdot n$ ;
4.  $x \leq y$  тогда и только тогда, когда существует  $n$ , что  $x + n = y$ ;
5. Будем говорить, что  $a$  делится на  $b$  с остатком, если существуют такие  $p$  и  $q$ , что  $a = b \cdot p + q$  и  $0 \leq q < b$ . Покажите, что  $p$  и  $q$  всегда существуют и единственны, если  $b > 0$ .

$a \leq a'$  - очевидно

$$1. x \leq x + y$$

**База:**  $y = 0$   $x + 0 = x$ , очевидно  $x \leq x$ .

**Предположение индукции:**  $x \leq x + y$

**Шаг индукции:**  $y \rightarrow y'$

$$x + y' = (x + y)'$$

Из предположения  $x \leq x + y$  и  $a \leq a'$ :

$$x + y \leq (x + y)' = x + y'$$

$$2. x \leq x \cdot y$$

$x \leq x \cdot y$  выполняется тогда и только тогда, когда  $x = 0$  или  $y \geq 1$ .

**Доказательство:**

Если  $x = 0$ :  $0 \cdot y = 0$ , и  $0 \leq 0$ .

Если  $y = 1$ :  $x \cdot 1 = x$ , и  $x \leq x$ .

Если  $y \geq 1$ :

**База:**  $y = 1$  — уже проверено.

**Предположение:**  $x \leq x \cdot y$

**Шаг:**  $y \rightarrow y'$

$$x \cdot y' = x \cdot y + x$$

$$x \leq x \cdot y$$

По пункту 1.

$$x \leq x \cdot y + x = x \cdot y'$$

**Контрпример:**

При  $x = a$ ,  $y = 0$ :  $a \cdot 0 = 0$ , но  $a \not\leq 0$ .

3. Если  $a \leq b$  и  $m \leq n$ , то  $a \cdot m \leq b \cdot n$

**Доказательство:**

Из пункта 4:

$$a \leq b \Leftrightarrow \exists k : b = a + k$$

$$m \leq n \Leftrightarrow \exists l : n = m + l$$

Тогда:

$$b \cdot n = (a + k)(m + l)$$

$$a \cdot m + a \cdot l + k \cdot m + k \cdot l$$

Следовательно,

$$b \cdot n = a \cdot m + (a \cdot l + k \cdot m + k \cdot l)$$

По пункту 4:  $a \cdot m \leq b \cdot n$ .

$$4. x \leq y \iff \exists n : x + n = y$$

**Доказательство:**

$\Rightarrow$ :

1. База: Если  $x = 0$ , то  $n = y$ .

2. Если  $x = a'$ ,  $y = b'$  и  $a \leq b$ , то по предположению  $\exists n : a + n = b$ .

Тогда:

$$b' = (a + n)' = a' + n \Rightarrow x + n = y$$

$\Leftarrow$

1. База:

$$n = 0 : x + 0 = x \Rightarrow x \leq x$$

2. По предположению:  $x \leq x + n$ . Так как  $x \leq x + n, x \leq x + n' = y$  по пункту 1

### 6.3 № 7

Обозначим за  $\bar{n}$  представление числа  $n$  в формальной арифметике:

$$\bar{n} = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ (\bar{k})', & n = k + 1 \end{cases}$$

Например,  $\bar{5} = 0''''$ . Докажите в формальной арифметике (доказательства могут использовать метаязык, но при этом из текста должно быть понятно, как выстроить полное доказательство):

1.  $\vdash \bar{2} \cdot \bar{2} = \bar{4}$ ;
  2.  $\vdash \forall a. a \cdot 0 = 0 \cdot a$ ;
  3.  $\vdash \forall a. a \cdot \bar{2} = a + a$ ;
  4.  $\vdash \forall p. (\exists q. q' = p) \vee p = 0$  (единственность нуля);
1.  $\vdash \bar{2} \cdot \bar{2} = \bar{4}$

Используем аксиомы умножения и сложения:

1.  $\bar{2} = 0'', \bar{1} = 0', \bar{0} = 0$ .
2. По аксиоме умножения:  $a \cdot b' = a \cdot b + a$ .
3. По аксиоме сложения:  $a + b' = (a + b)'$ .

Вычисляем:

1.  $\bar{2} \cdot \bar{1} = \bar{2} \cdot \bar{0}' = \bar{2} \cdot \bar{0} + \bar{2} = 0 + \bar{2} = \bar{2}$  (так как  $0 + a = a$  — ранее доказанное свойство).
2.  $\bar{2} \cdot \bar{2} = \bar{2} \cdot \bar{1}' = \bar{2} \cdot \bar{1} + \bar{2} = \bar{2} + \bar{2}$ .
3.  $\bar{2} + \bar{2} = \bar{2} + \bar{1}' = (\bar{2} + \bar{1})' = \bar{3}' = \bar{4}$ .

Таким образом,  $\bar{2} \cdot \bar{2} = \bar{4}$ .

2.  $\vdash \forall a. a \cdot 0 = 0 \cdot a$ ;

**Лемма 2:**  $a = b \vdash b = a$

- |   |            |
|---|------------|
| (1) $a = b$                                     | Гипотеза   |
| (2) $a = a$                                     | из лекции  |
| (3) $a = b \rightarrow a = a \rightarrow b = a$ | A1         |
| (4) $b = a$                                     | MP (1,2),3 |

**Лемма 2:**  $0 \cdot a = 0$ 

- |       |  |  |
|-------|--|--|
| (1)   | $0 \cdot 0 = 0$  | A7   |
| (2)   | $0 \cdot a' = 0 \cdot a + 0$   | A8   |
| (3)   | $0 \cdot a + 0 = 0 \cdot a$  | A7   |
| (4)   | $0 \cdot a' = 0 \cdot a$   | Из аксиомы 1, см доказательство(транзитивность =)    |
| (5)   | $0 \cdot a = 0 \cdot a'$   | по Лемме 1   |
| (6)   | $0 \cdot a = 0 \cdot a' \rightarrow 0 \cdot a = 0 \rightarrow 0 = 0 \cdot a'$              | A1   |
| (7)   | $0 \cdot a = 0 \rightarrow 0 = 0 \cdot a'$   | MP 5,6   |
| (7.5) | $\forall a. 0 \cdot a = 0 \rightarrow 0 = 0 \cdot a'$                                      | MP 5,6, обозначим это за T                           |
| (8)   | $\varphi[a := 0] \& (\forall a. \varphi \rightarrow \varphi[a := a']) \rightarrow \varphi$ | по схеме индукции, где $\varphi(a) := 0 \cdot a = 0$ |
| (9)   | $0 \cdot 0 = 0 \rightarrow T \rightarrow 0 \& T$   | A4 из исчисления предикатов                          |
| (10)  | $T \rightarrow 0 \& T$   | MP 9,1   |
| (11)  | $0 \& T$   | MP 7,5,10  |
| (12)  | $\varphi$  | MP 11,8  |

**Доказательство**

- |      |   |            |
|------|---|------------|
| (1)  | $0 = a \cdot 0 \rightarrow 0 = 0 \cdot a \rightarrow a \cdot 0 = 0 \cdot a$ | A1         |
| (2)  | $a \cdot 0 = 0 \rightarrow a \cdot 0 = a \cdot 0 \rightarrow 0 = a \cdot 0$ | A1         |
| (3)  | $a \cdot 0 = 0$   | A7         |
| (4)  | $a \cdot 0 = a \cdot 0$   | из лекции  |
| (5)  | $a \cdot a \cdot 0 \rightarrow 0 = a \cdot 0$                               | MP 3,2     |
| (6)  | $0 = a \cdot 0$   | MP 4,5     |
| (7)  | $0 \cdot a = 0$   | по Лемме 2 |
| (8)  | $0 = 0 \cdot a$   | из Лемме 1 |
| (9)  | $0 = 0 \cdot a \rightarrow a \cdot 0 = 0 \cdot a$                           | MP 7,1     |
| (10) | $a \cdot 0 = 0 \cdot a$   | MP 8,9     |

## 6.4 № 2

## 7 Информация о курсе

Поток — у2024.

Группы М3132-М3139.

Преподаватель — Штукенберг Дмитрий Григорьевич.

