

Математический Анализ

Чепелин Вячеслав

Содержание

1	Интегралы.
1.1	Неопределенный интеграл.
1.2	Выпуклые функции.
1.3	Правило Лопиталя.
1.4	Определенный интеграл.
1.5	Приложение к определенным интегралам.
1.6	Верхний и нижний пределы последовательностей
1.7	Интегральные суммы.
1.8	Несобственные интегралы.
2	Ряды.
2.1	Определения.
3	онлайн.
3.1	Сходимость рядом с произвольными знаками слагаемых
3.2	Свойства сходящихся рядов.
4	Информация о курсе

1 Интегралы.

1.1 Неопределенный интеграл.

Дано: $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$. F называется первообразной функции f , если:

1. F дифференцируема на $\langle a, b \rangle$.
2. $\forall x \in \langle a, b \rangle : F'(x) = f(x)$.

Теорема 1

f - непрерывна на $\langle a, b \rangle$. Тогда f имеет первообразную на $\langle a, b \rangle$.

Доказательство:

<см теорема Барроу>

Q.E.D.

Теорема 2

F - первообразная f на $\langle a, b \rangle$. Тогда:

1. $\forall c \in \mathbb{R} : F + c$ тоже первообразная.
2. Если G - еще одна первообразная f , то $F - G = const$.

Доказательство:

1. Воспользуемся арифметическим свойством производной. Тривиально.
2. $(F - G)' = F' - G' = f - f = 0$. Пользуясь теоремами, так как производная везде ≥ 0 , то $F - G$ неубывающая. Аналогично так как производная на промежутке ≤ 0 , то $F - G$ невозврастающая. Откуда это константа.

Q.E.D.

Неопределенный интеграл f — это множество всех первообразных f .

Замечание от Славы. Кохась подразумевает, что неопределенный интеграл это множество всех первообразных на том же интервале $\langle a, b \rangle$.

Обозначается неопределенный интеграл так:

$$\int f \quad \text{или} \quad \int f(x)dx$$

Формально: $\int f(x)dx = F(x) + C$

Таблица неопределенных интегралов:

Она переписывается из таблицы производных, просто в обратную сторону. Но есть две загадочные формулы:

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln \left| x + \sqrt{1+x^2} \right| + C$$

Теорема (о св-вах неопределенного интервала)

Пусть f, g - имеют первообразные F, G на $\langle a, b \rangle$. Тогда:

1. $\int (f + g) = \int f + \int g$
2. $\forall a \in \mathbb{R} : \int (af) = a \int f$
3. $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \left(\int f(x)dx \right) \Big|_{x=\varphi(t)} = F(\varphi(t)) + C$
4. частный случай. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \int f(\alpha x + \beta) = \frac{1}{\alpha}F(\alpha x + \beta) + C$
5. f, g - дифф. на $\langle a, b \rangle$. Пусть $f'g$ и fg' имеют первообразную:

$$\text{Тогда: } \int fg' = fg - \int f'g$$

Теорема (о св-вах неопределенного интервала)

Пусть f, g - имеют первообразные F, G на $\langle a, b \rangle$. Тогда:

1. $\int (f + g) = \int f + \int g$
2. $\forall a \in \mathbb{R} : \int (af) = a \int f$
3. $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \left(\int f(x)dx \right) \Big|_{x=\varphi(t)} = F(\varphi(t)) + C$
4. частный случай. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \int f(\alpha x + \beta) = \frac{1}{\alpha}F(\alpha x + \beta) + C$
5. f, g - дифф. на $\langle a, b \rangle$. Пусть $f'g$ и fg' имеют первообразную:

$$\text{Тогда: } \int fg' = fg - \int f'g$$

Доказательство:

1. Очевидно из свойств производной и теоремы 2.
2. Очевидно из свойств производной и теоремы 2.
3. Очевидно из производной композиции.
4. Очевидно из свойств производной и теоремы 2.
5. Перенесите интеграл в правой части налево. Очевидно из произведения производных.

Q.E.D.

Замечание. Формула 3 часто будет использоваться для замены переменных в интегралах.

$$F(\varphi(t)) = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Давайте считать, что φ обратима. Тогда $t = \varphi^{-1}(x)$. Подставим:

$$F(x) = \left(\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \right) \Big|_{t=\varphi^{-1}(x)}$$

Для чего это? Благодаря этому, мы умеем вычислять первообразные немного по-другому. Мы можем подставлять вместо x что-либо, а потом возвращаться обратно к x .

1.2 Выпуклые функции.

Множество $A \subset R^m$ выпукло, если:

$$\forall x, y \in A, [x, y] \subset A : [x, y] = \{x + t(y - x), t \in [0, 1]\} = \{(1 - t)x + ty, t \in [0, 1]\}$$

$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ — выпукла на промежутке $\langle a, b \rangle$, если:

$$\forall x_1, x_2 \in \langle a, b \rangle : \forall \alpha \in [0, 1] : f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2)$$

Надграфик ($f, \langle c, d \rangle$) = $\{(x, y) : x \in \langle c, d \rangle, y \geq f(x)\}$

Замечание. f - выпукло на $\langle a, b \rangle \Leftrightarrow$ Надграфик ($f, \langle a, b \rangle$) - выпуклый в R^2 .

Лемма (о трех хордах)

f - выпукла на $\langle a, b \rangle \Leftrightarrow \forall x_1 < x_2 < x_3 \in \langle a, b \rangle$ выполнено:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$$

Доказательство:

Возьму первое неравенство. Домножу на знаменатели и оставлю плюсы:

$$(x_3 - x_1)(f(x_2) - f(x_1)) \leq (x_2 - x_1)(f(x_3) - f(x_1))$$

$$f(x_2) \leq \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}f(x_3) + \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}f(x_1)$$

Чего-то не хватает, вспомним, что $f(x_2) = f\left(\frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}x_3 + \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}x_1\right)$. Ой, это же условие выпуклости. Так как все переходы равносильны, то это неравенство выполнено, когда f выпукла. Второе неравенство решается аналогично (позже будет добавлено в конспект).

Q.E.D.

f - строго выпукла на $\langle a, b \rangle$:

$$\forall x_1, x_2 \in \langle a, b \rangle : \forall \alpha \in [0, 1] : f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) < \alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2)$$

Просто меняется знак на строгий.

Теорема (об одностор. дифф-ти вып. функции)

f - выпукла на $\langle a, b \rangle$. Тогда $\forall x \in (a, b) : \exists f'_+(x), f'_-(x)$ (конечные), а также $\forall x_1 < x_2 \in \langle a, b \rangle$ выполнено:

$$f'_-(x_1) \leq f'_+(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'_-(x_2)$$

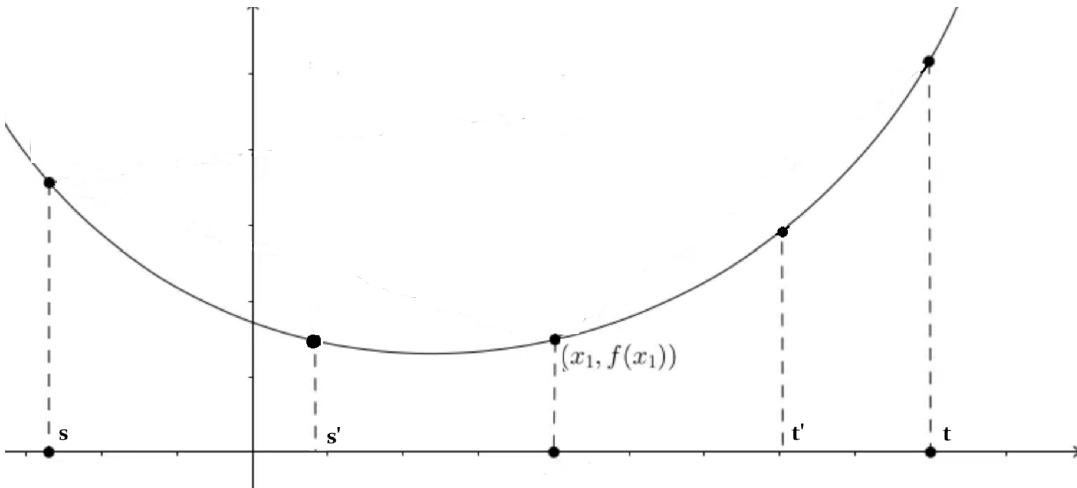
Доказательство:

Сначала докажу, что $f'_-(x_1) \leq f'_+(x_1)$. Замечу, что x_1 в таком случае не должно быть граничной (иначе предела существовать просто не будет). Значит есть какая-то s левее x_1 и какое-то t правее x_1 . Посмотрю на данные выражения: $\frac{f(t) - f(x_1)}{t - x_1}$ и $\frac{f(c) - f(x_1)}{c - x_1}$.

По теореме о трех хордах: $\frac{f(c) - f(x_1)}{c - x_1} \leq \frac{f(t) - f(x_1)}{t - x_1}$.

Замечу, что при устремлении s к x_1 , $\frac{f(c) - f(x_1)}{c - x_1}$ будет увеличиваться по теореме о трех хордах (см изобр, напишите т. о трех хордах для s, s', x_1).

Замечу, что при устремлении t к x_1 , $\frac{f(t) - f(x_1)}{t - x_1}$ будет уменьшаться по теореме о трех хордах (см изобр, напишите т. о трех хордах для x_1, t', t).



Заметим, что первая функция ограничена сверху второй, а вторая ограничена снизу первой. Откуда существуют $f'_-(x_1), f'_+(x_1)$. Теперь применим теорему о предельном переходе в неравенствах и получим, что $f'_-(x_1) \leq f'_+(x_1)$.

Теперь докажем вторую часть.

Возьму t на отрезке (x_1, x_2) . Посмотрю на $\frac{f(t) - f(x_1)}{t - x_1}$ и $\frac{f(t) - f(x_2)}{t - x_2}$

Заметим, что исходя из этого, тк монотонно возрастает и ограничена снизу и сверху (по тем же соображениям, что и до этого)

$$\exists \lim_{t \rightarrow x_1+0} \frac{f(t) - f(x_1)}{t - x_1} = f'_+(x_1)$$

и тк $\frac{f(t) - f(x_1)}{t - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ по лемме о трех хордах, то выполнено второе неравенство.

$$\exists \lim_{t \rightarrow x_2 - 0} \frac{f(t) - f(x_2)}{t - x_2} = f'_-(x_2)$$

и тк $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(t) - f(x_2)}{t - x_2}$ по лемме о трех хордах, то выполнено третье неравенство.

Q.E.D.

Следствие 1. f - выпукла на $\langle a, b \rangle \Rightarrow f$ непр на (a, b) .

Следствие 2. f - выпукла на $\langle a, b \rangle \Rightarrow f$ не дифф. на (a, b) в не более чем счетном множестве (множество точек разрыва НБЧС). Это верно, исходя из того, что значения правосторонних пределов и левосторонних растут (теорема об односторонней дифф-ти вып. функции). и берем рациональное число на таком интервале.

todo: добавить рисунок выпуклой вниз, выпуклой вверх

Теорема (выпуклость в терминах касательных)

f - дифф. на $\langle a, b \rangle$. Тогда

f - вып. вниз \Leftrightarrow График f лежит не ниже любой касательной:

$$\forall x_0, x \in \langle a, b \rangle : f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Доказательство:

Докажем в правую сторону. Возьму $x > x_0$, тогда по предыдущей теореме: $f'(x_0) \leq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Домножу и победил. Аналогично $x < x_0$.

Докажем в левую сторону. Возьмем 3 точки, $x_1 < x_0 < x_3$:

$$f(x_3) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x_3 - x_0), \quad f(x_1) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0)$$

$f'(x_0) \leq \frac{f(x_3) - f(x_0)}{x_3 - x_0}$ и $\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \leq f'(x_0)$, тогда по лемме о трех хордах f выпукло.

Q.E.D.

def: Дано множество A выпуклое в R^2 . Прямая L называется опорной к A в точке x_0 , если L проходит через x_0 и множество A лежит в одной полуплоскости (замкнутой).

Теорема (дифф. критерий выпуклости)

- 1) f - дифф на (a, b) , непр на $\langle a, b \rangle$. Тогда f - выпукло на $\langle a, b \rangle \Leftrightarrow f'$ возрастает на (a, b) .
- 2) f непр на $\langle a, b \rangle$, f - дважды дифф на (a, b) . Тогда f - вып. $\Leftrightarrow f'' \geq 0$ на (a, b) .

Доказательство:

1) \Rightarrow очевидно из теоремы об односторонней дифф-ти.

\Leftarrow Проверим утверждение леммы о трех хордах.

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c_1) \text{ по теореме Лагранжа. } \frac{f(x_2) - f(x_3)}{x_3 - x_2} = f'(c_2) \text{ по теореме Лагранжа.}$$

Так как $c_1 < c_2$, а f' возрастает, то нужное неравенство выполняется.

2) f - выпуклое $\Leftrightarrow f'$ возрастает $\Leftrightarrow (f')' \geq 0$

Q.E.D.

1.3 Правило Лопиталя.

Лемма (об ускоренной сходимости)

Пусть даны $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$, a - предельная точка D в $\overline{\mathbb{R}}$

Пусть $\exists U(a), f, g \neq 0$ в $U(a) \cap D$ - выколотой.

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$. Тогда:

$$\forall (x_n) : x_n \rightarrow a, x_n \in D, x_n \neq a, \exists (y_n) : y_n \rightarrow a, y_n \in D, y_n \neq a : \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f(y_k)}{g(x_k)} < \frac{1}{k} \text{ и } \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{g(y_k)}{g(x_k)} < \frac{1}{k}$$

Доказательство:

Давайте будем выбирать такие y_k , что:

$$\left| \frac{f(y_k)}{g(x_k)} \right| < \frac{1}{k} \text{ и } \left| \frac{g(y_k)}{g(x_k)} \right| < \frac{1}{k}$$

Очевидно, что мы сможем выбрать такие y_k . А из этого уже следует то, что нам надо.

Q.E.D.

Замечание: утверждение верно, если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$

Теорема(пр. Лопиталя)

$f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, дифф $g' \neq 0$ на (a, b)

$\frac{f'(x)}{g'(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a+0} A \in \overline{\mathbb{R}}$. Пусть $\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)}$ - неопределенность $\left(\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty} \right)$

Тогда: $\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Доказательство:

Замечание о корректности: тк $g' \neq 0$, то g - строго положительно или отрицательно в какой-то окрестности a .

По Гейне. Возьму $(x_n) : x_n \rightarrow a, x_n \neq a$. Берем y_n из Лопиталя.

Теорема Коши: $\frac{f(x_k) - f(y_k)}{g(x_k) - g(y_k)} = \frac{f'(\xi_k)}{g'(\xi_k)}$, где $\xi_k \in (x_k, y_k)$.

$$\frac{f(x_k)}{g(x_k)} = \frac{f(y_k)}{g(x_k)} + \frac{f'(\xi_k)}{g'(\xi_k)} \left(1 - \frac{g(y_k)}{g(x_k)} \right)$$

Посмотрим, куда это стремится. Справа это стремится к A . Значит и слева должна.

Q.E.D.

Пример неаналитической функции:

Неаналитическая - та, которую нельзя представить в виде разложение тейлора для бесконечности.

Пример:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

$\forall x : \exists f^{(k)}(0) = 0$. Если разложить ее в нуле, то она будет эквивалентна нулевой $a_{n+1} - a_n$ - аналог производной.

Теорема (Штольца)

x_n, y_n - вещ. последовательности, $x_n \rightarrow 0, y_n \rightarrow 0$. y_n монотонный, начиная с какого-то места

Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = a \in \bar{\mathbb{R}} \cup \{0\}^*$. Тогда: $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = a$.

Доказательство:

1) $a > 0, a \in \mathbb{R}$

$$\forall a > \varepsilon > 0 : \exists N_1 : \forall N > N_1 : a - \varepsilon < \frac{x_{N+1} - x_N}{y_{N+1} - y_N} < a + \varepsilon$$

Зафиксирую N . Возьму $n > N$ и напишу дроби $\frac{x_{N+1} - x_N}{y_{N+1} - y_N}, \frac{x_{N+2} - x_{N+1}}{y_{N+2} - y_{N+1}}, \dots, \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}$.

Заметим интересный факт, что (для положит. дробей) $\frac{p}{q} < \frac{r}{s} \Rightarrow \frac{p}{q} < \frac{p+r}{q+s} < \frac{r}{s}$. Поэтому, если мы сложим, все высказанные дроби так, как показано, то они будут между $a - \varepsilon$ и $a + \varepsilon$. А высказанные дроби положит, потому что у нас начиная с какого-то места монотонен y и $a > 0$. Поэтому:

$$a - \varepsilon < \frac{x_n - x_N}{y_n - y_N} < a + \varepsilon$$

Что я получил? Устремим $n \rightarrow \infty$ и получим по условию, что $a - \varepsilon \leq \frac{x_N}{y_N} \leq a + \varepsilon$

2) $a = +\infty$. Аналогично, только смотрим на предел с одной стороны

3) $a = [-\infty, 0)$, поменяем у $y_n := -y_n$, тогда все стало положительным = счастье.

4) $a = 0$. Считаем, что x_n, y_n монотонны (строго) с какого-то момента. Тогда дробь $\frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} \rightarrow 0$ с какого-то момента. Тогда $\frac{y_{n+1} - y_n}{x_{n+1} - x_n} \rightarrow +\infty$, вернемся к пункту 1 и выиграем.

Q.E.D.

Замечание. Для неопределенности вида $+\infty, +\infty$ теорема верно (обе посл. монотонны). (Загадка)

Теорема (Гаусса)

Хотим доказать сумму $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Доказательство:

1) $x_n = 1 + 2 + \dots + n$, Хочу найти y_n такую, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = 1$. О чём нам говорит теорема

Штольца? Что если y будет таким, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = 1$, то такой y_n нам подходит

$y_n = n^2$ не подходит, $y_n = \frac{n^2}{2}$ подходит и дает в пределе 1. Мы доказали, что $1 + 2 + 3 + \dots + n$ эквивалентно n^2 . Но это еще не то, что нам надо

2) $x_n = 1 + 2 + \dots + n - \frac{n^2}{2}$, хотим опять по теореме Штольца найти чему это эквивалентно.

$\lim \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \lim \frac{\frac{1}{2}}{y_n - y_{n-1}} = 1$. О, возьму $y_n = \frac{n}{2}$. И все хорошо.

$1 + 2 + \dots + n = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} + o(n)$. Пока это тупик.

Q.E.D.

Доказательство 2:

$$f(x) = x + x^2 + x^3 + \dots + x^n.$$

$$f'(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + x^n$$

$$xf'(x) = x + \dots + nx^n = \left(x \frac{d}{dx}\right) f(x)$$

$$\left(x \frac{d}{dx}\right)^N f(x) = 1^N x + 2^N x^2 + \dots + n^N x^n$$

Заметим, что $f(x) = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} - 1$. Хочу посчитать значение функции в единице:

$$\left(\left(x \frac{d}{dx}\right)^N f(x)\right)(1) = \left(\left(x \frac{d}{dx}\right)^N \left(\frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}\right)\right)(1)$$

Заметим, что после N раз дифференцирования знаменатель будет $(x - 1)^{N+1}$. Но я хочу посчитать значение функции в точке 1. Мы не можем так сделать, но заметим, что наша функция непрерывна, откуда мы знаем, что у неё есть предел в этой точке. Применим $n + 1$ раз правило Лопитала идеологически???????

Замечание от Славы. Да именно такое говорит Константин Петрович на лекции в связи с чем этот конспект хочется забросить и мне хочется выброситься в окно. Так что со всех респект и уважение, что я сижу и разбираю.

Так что же тут подразумевал Константин Петрович? У нас знаменатель будет $(x - 1)^{N+1}$. Но значение функции в точке 1 у нас есть.

Из непрерывности мы знаем, что $(1^N x + 2^N x^2 + \dots + n^N x^n)(1) = \lim_{x \rightarrow 1} (1^N x + 2^N x^2 + \dots + n^N x^n)$. И та наша формула, которую мы свернули с помощью геом. прогрессии ведет себя точно так же в окрестностях единицы. Также на самом деле числитель этой функции просто имеет множитель $(x - 1)^{N+1}$. Поэтому мы можем думать, что мы ищем $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)^{N+1} \cdot h(x)}{(x - 1)^{N+1}}$. Поэтому применим $N + 1$ раз правило Лопиталя и знаменатель пропадет. Что мы получили? Мы получим, что теперь мы ищем предел по какой-то другой (непрерывной (тк многочлен)) функции при $x \rightarrow 1$. Значит, что мы можем просто посчитать значение в точке 1. Это то, что Константи Петрович назвал идеологически применить правило Лопиталя. То есть надо умножить нашу дробь на знаменатель N раз ее продифференцировать и поделить на производную N -ой степени знаменателя:

$$= \frac{1}{(N+1)!} \left(\frac{d}{dx} \right)^N \left((x-1)^{N+1} \left(\left(x \frac{d}{dx} \right)^N \left(\frac{x^{N+1} - 1}{x-1} \right) \right) \right)$$

Дальше подставляете $N = 1$ и все, ищите значение этой фигни в точке 1 и ваша жизнь прекрасна.

Q.E.D.

1.4 Определенный интеграл.

def: Фигура - это ограниченное подмножество в R^2 . ε - множество всех возможных фигур.

$\sigma : \varepsilon \rightarrow [0, +\infty)$ — назовем площадью, если:

1. Аддитивно: $A_1, A_2 \in \varepsilon, A_1 \cap A_2 = \emptyset, \sigma(A_1 \cup A_2) = \sigma(A_1) + \sigma(A_2)$
2. Нормировка: $\sigma([a, b] \times [c, d]) = (b - a)(d - c)$.

Замечание. Площади существуют.

Замечание.

1. Она обладает монотонностью по включению: $A \subset B, \sigma(A) \leq \sigma(B)$, так как: $B = A + (B \setminus A) \Rightarrow \sigma(B) = \sigma(A) + \sigma(B \setminus A)$.
2. $\sigma(\text{вертик отрезок}) = 0$, так как его площадь всегда меньше окружающего его прямоугольника с шириной и высотой $\forall \varepsilon > 0$.

def: $\sigma : \varepsilon \rightarrow [0, +\infty)$ — ослабленная площадь, если выполнено:

1. монотонна.
2. нормирована.
3. ослабленная аддитивность: Есть $E \in \varepsilon : l$ - вертик. прямая L^- - левая полуплоскость, L^+ - правая полуплоскость (замкнутая полуплоскость), тогда $E_1 = E \cap L^-, E_2 = E \cap L^+ : \sigma(E) = \sigma(E_1) + \sigma(E_2)$

Пример осл. площади:

1. $\sigma(A) = \inf(\sum \sigma(P_k))$, где $A = \bigcup_{\text{конеч}} P^k$, где P_k - прямоугольник
2. $\sigma(A) = \inf(\sum \sigma(P_k))$, где $A = \bigcup P^k$, где P_k - прямоугольник

todo: написать отличие.

def: Срезка - $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$.

1. положительная — $f^+ = \max(f, 0)$
2. отрицательная — $f^- = \max(-f, 0)$

todo: вставить рисунок

def: $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, f \geq 0$ ПГ ($f, [a, b]$) = $\{(x, y) : x \in [a, b], y \in [0, f(x)]\}$.

def: $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, f$ - непр., σ - осл. адд площадь, тогда определенным интегралом f по отрезку $[a, b]$ назовем:

$$\int_a^b f = \int_a^b f(x) dx = \sigma(\Pi\Gamma(f^+, [a, b])) - \sigma(\Pi\Gamma(f^-, [a, b]))$$

Простейшие свойства:

1. Если $f \geq 0$ на $[a, b]$, тогда $\int_a^b f \geq 0$

2. Если $f = c$ (константа), тогда $\int_a^b c = c \cdot (b - a)$

3. $\int_a^b (-f) = - \int_a^b f$

4. $\int_a^a f = 0$

Свойства интеграла:

1. Аддитивность по промежутку: $\forall c \in [a, b] : \int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$

2. Монотонность: $f \leq g$ - непр., то $\int_a^b f(x) \leq \int_a^b g(x)$.

Говорят: Проинтегрируем неравенство $f \leq g$, на отрезке $[a, b]$.

3. $(b - a) \min_{[a,b]} f \leq \int_a^b f \leq (b - a) \max_{[a,b]} f$

Делается с помощью монотонности и интегрирования $\min_{[a,b]} f \leq f \leq \max_{[a,b]} f$

4. $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$

Проинтегрируем $-|f| \leq f \leq |f|$ и получим то, что хотим.

5. Теорема о среднем

Функция $f \in C([a, b])$. Тогда $\exists c \in [a, b]$, что:

$$\int_a^b f = f(c)(b - a)$$

Доказательство:

$a = b$ - скучно. Если $a \neq b$, напишем неравенство п.3:

$$\min f \leq \frac{1}{b - a} \int_a^b f \leq \max f$$

А мы знаем, что функция непрерывна, тогда по теореме о промежуточном значении:

$$\exists c = \frac{1}{b-a} \int_a^b f$$

Q.E.D.

Интеграл с переменным верхним пределом - $\Phi : [a, b] \rightarrow R : \Phi(x) = \int_a^x f$

Интеграл с переменным нижним пределом - $\psi : [a, b] \rightarrow R : \psi(x) = \int_x^b f$

для $f \in C([a, b])$.

Теорема (Барроу)

В усл. определений. Доказать, что Φ дифф на $[a, b]$, $\Phi'(x) = f(x)$.

Доказательство:

$$y > x : \lim_{y \rightarrow x+0} \frac{\Phi(y) - \Phi(x)}{y - x} = \lim_{y \rightarrow x+0} \frac{\int_a^y f - \int_a^x f}{y - x} = \lim_{y \rightarrow x+0} \frac{1}{y - x} \int_x^y f = \lim_{y \rightarrow x+0} f(c),$$

где c лежит между x, y из теоремы о среднем.

Получим, что правосторонняя производная равна $f(x)$. Аналогично про левостороннюю. Откуда производная это $f(x)$.

Q.E.D.

Замечание Мы построили первообразную для функции f .

Теорема (формула Ньютона-Лейбница)

$f \in C([a, b])$, F - первообразная f на $[a, b]$. Тогда

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b$$

Доказательство:

$F = \Phi + c$, по теореме 2. Поэтому сделаем некоторые преобразования:

$$\int_a^b f(x) dx = \Phi(b) = \Phi(b) - \Phi(a) = (F(b) - c) - (F(a) - c) = F(b) - F(a)$$

Q.E.D.

Следствие: Этот определенный интеграл не зависит от выбора σ .

Замечание: Откажемся от соглашения $a \leq b$ и введем для $d < c$:

$$\int_c^d = - \int_d^c = F(d) - F(c)$$

Микротеорема (Линейность интеграла)

Для $f, g \in C([a, b])$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, выполнено:

$$\int_a^b \alpha f + \beta g = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$$

Доказательство:

$(\alpha F + \beta G)|_a^b = \alpha F|_a^b + \beta F|_a^b$ из линейности неопредел. интеграла.

Q.E.D.

Теорема (Интегрирование по частям)

$f, g \in C^1([a, b])$. Тогда $\int_a^b fg' = fg|_a^b - \int_a^b f'g$

Доказательство:

Из теоремы о свойствах неопределенного интеграла:

$$fg = \text{првобр}(fg' + f'g) \Rightarrow \int_a^b (fg' + f'g) = fg|_a^b$$

Q.E.D.

Теорема (о замене переменных)

$f \in C(\langle a, b \rangle)$, $\varphi \langle \alpha, \beta \rangle \rightarrow \langle a, b \rangle$, $\varphi \in C^1$, $[p, q] \subset \langle \alpha, \beta \rangle$. Тогда:

$$\int_p^q f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(p)}^{\varphi(q)} f(x)dx$$

Доказательство:

F - первообразная f , тогда $F(\varphi(t))$ - первообразная $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ и все получается.

Q.E.D.

1:09 мат анализ кохась лекция 2. Я ничего не понял про нижние два замечания

Замечание. Может показаться, что множество $\varphi([p, q])$ шире $[\varphi(p), \varphi(q)]$.

Замечание. Может быть, что $\varphi(p) > \varphi(q)$

I_f - среднее значение f на $[a, b]$ $\frac{1}{b-a} \int_a^b f$

Теорема (Неравенство Чебышёва)

$f, g \in C([a, b])$ обе возрастают. Тогда $I_f \cdot I_g \leq I_{fg}$, то есть

$$\int_a^b f \cdot \int_a^b g \leq (b-a) \int_a^b fg$$

Доказательство:

Тк функции возрастают, то $\forall x, y \in [a, b] : (f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) \geq 0$.

$$f(x)g(x) - f(y)g(x) - f(x)g(y) + f(y)g(y) \geq 0$$

Давайте зафиксируем y и проинтегрируем по x и поделю на $b-a$. Получу:

$$I_{fg} - f(y)I_g - I_{fg}(y) + f(y)g(y) \geq 0$$

Давайте зафиксируем x и проинтегрируем по y и поделю на $b-a$. Получу:

$$I_{fg} - I_f I_g - I_g I_f + I_{fg} \geq 0$$

Q.E.D.

Пример (Ш. Эрмит)

Пусть мы хотим посчитать $H_n = \frac{1}{n!} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2 \right)^n \cos t dt$

$\int_a^b fg' = fg \Big|_a^b - \int_a^b f'g$. Воспользуюсь этим в дальнейших рассуждениях

$$H_n = \begin{bmatrix} f = \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2 \right)^n \\ g = \cos t \end{bmatrix} = \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2 \right)^n \sin t \Big|_{\pi/2}^{\pi/2} + \frac{2}{(n-1)!} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} t \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2 \right)^{n-1} \sin t dt$$

я не хочу это писать 1:30 2 лекция

$$H_n = (4n-2)H_{n-1} - \pi^2 H_{n-2} = P(\pi^2) - \text{многочлен, от } \pi^2, \text{ где } \deg P \leq n.$$

Теорема (Пи иррационально)

π - иррационально. Проверим, что π^2 иррационально.

Доказательство:

Пусть $\pi^2 = \frac{p}{q}$. Тогда $q^n H_n = \frac{q^n}{n!} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2 \right)^n \cos t dt = q^n P(\pi^2)$ - целое число. А слева неотрицательная функция.

$0 < q^n H_n \leq \frac{q^n}{n!} 4^n \pi = \frac{(4q)^n}{n!} \pi \rightarrow 0$, но с другой стороны, оно должно быть целым. Противоречие.

Q.E.D.

def: $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ кусочно-непрерывной.

$\exists A = \{x_1, \dots, x_n\} \subset [a, b]$. Такая функция будет непрерывна на $[a, b]$, кроме этих точек, а в них происходят скачки.

def: $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ - почти первообразная функции f , если:

F - непр и $\exists A = \{x_1, \dots, x_n\} \subset [a, b]$. $\forall x \in [a, b] \setminus A : \exists F'(x) = f(x)$ и $\forall x \in A : \exists F'_+(x), F'_-(x)$

f - кусочно-непрерывно на $[a, b]$. $x_0 = a, x_n = b$. Положим $\int_a^b f = \sum_{i=1}^{n+1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f|_{[x_{i-1}, x_i]}$

Утверждение. Если f - кусочно - непрерывна тогда: $\int_a^b f = F(b) - F(a)$.

Утверждение очевидно по определению.

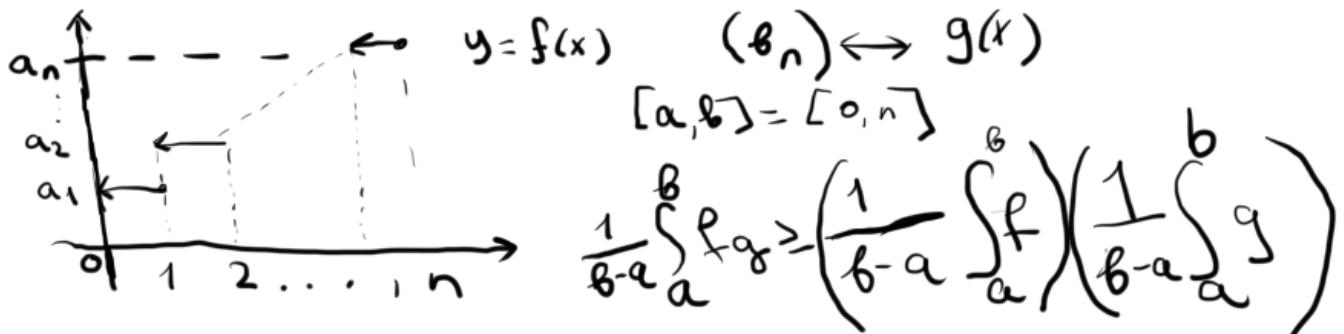
Следствие: Все теоремы, использующие в доказательство только формулу Ньютона-Лейбница у нас уже доказаны!

Пример (Неравенство Чебышева для сумм)

$a_1 \leq \dots \leq a_n, b_1 \leq \dots \leq b_n$.

Тогда $\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i b_i \right) \geq \left(\frac{1}{n} \sum a_i \right) \left(\frac{1}{n} \sum b_i \right)$

Доказательство:



Возьмем доску Константина Петровича для лучшего понимания. Давайте возьмем две функции $f(x), g(x)$, как показано на рисунке. Вспомним, что у нас есть неравенство Чебышева, которое записано на правой стороне доски. Тогда очевидно подстановкой в него наших $f(x), g(x)$ и $a = 0, b = n$, мы получим нужное неравенство.

Q.E.D.

1.5 Приложение к определенным интегралам.

Введем некоторые обозначения:

$\text{Segm}([a, b])$ - множество всевозможных отрезков, лежащих в $[a, b]$

$\Phi : \text{Segm}([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$ - функция для промежутка.

Введем аддитивные функции для промежутка:

$$\forall [p, q] \in \text{Segm}[a, b] : \forall c \in (p, q) : \Phi([p, c]) + \Phi(c, q) = \Phi([p, q])$$

def: $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, $\Phi : \text{Segm}(\langle a, b \rangle) \rightarrow \mathbb{R}$ - а.ф.п:

f - плотность Φ : $\forall \Delta \in \text{Segm}(\langle a, b \rangle) : \inf_{\Delta} f \cdot \text{len}(\Delta) \leq \Phi(\Delta) \leq \sup_{\Delta} f \cdot \text{len}(\Delta)$

Теорема(о вычисл. а.ф.п.по ее плотности)

Дана плотность $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, $\Phi : \text{Segm}(\langle a, b \rangle) \rightarrow \mathbb{R}$ - а.ф.п., f - непр.

Тогда $\forall \Delta \in \text{Segm}(\langle a, b \rangle)$, $\Phi(\Delta) = \int_{\Delta} f$

Доказательство:

Н.У.О. считаем, что $\Delta = [a, b]$. Тогда возьмем $F(x)$, такую что:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x = a \\ \Phi([a, x]), & x \in (a, b) \end{cases}$$

Проверим, что F - первообразная f :

$F'_+(x) = \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{\Phi([a, x+h]) - \Phi([a, x])}{h} = \frac{\Phi(x, x+h)}{h} \in [\min f, \max f]$ на промежутке $x + x_0$ из ее плотности

Получили, что правосторонняя производная f и левосторонняя производные существуют.

Q.E.D.

Пример: Площадь криволинейного сектора.

$[a, b] \subset [0, 2\pi)$

$\rho : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \rho > 0$

$\varphi \in [a, b] \rightarrow (\varphi, \rho(\varphi))$

Введем определение: Сектор $[\alpha, \beta] = \{(\varphi, r) \subset R^2 : \varphi \in [\alpha, \beta], 0 \leq r \leq p(\varphi)\}$

$\Phi : \Delta = \sigma(\text{Сектора}), \Delta \in \text{Segm}([a, b])$

Теорема (Площадь криволинейного сектора).

В указанных условия, а так же $\rho : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \rho > 0$ и непрерывна. $[\alpha, \beta] \in \text{Segm}([a, b])$. Тогда:

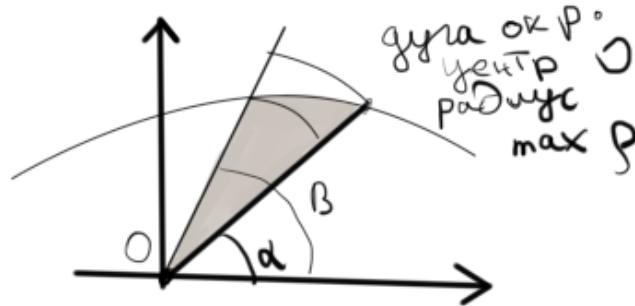
$$\Phi([\alpha, \beta]) = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi) d\varphi$$

Доказательство:

Если мы докажем, что $\frac{1}{2}\rho^2(\varphi)$ - плотность Φ , тогда по предыдущей теореме, мы получим, что данная формула будет верна. Будем определять определение плотности.

$\Delta = [\alpha, \beta]$, откуда Сектор $[\alpha, \beta] \subset$ Криволинейного вектора($O, \max \rho, [\alpha, \beta]$).

Криволинейный вектор в данном случае подразумевает сектор окружности, нарисованный на чертеже. Так же на нем вы видите серым - Сектор $[\alpha, \beta]$.



Как мы знаем из геометрии: площадь сектора окружности $= \frac{\alpha}{2}R^2$.

Откуда из монотонности площади:

$$\Phi([\alpha, \beta]) \leq \sigma(\text{Крив. вектор}) = \frac{1}{2}(\beta - \alpha)(\max_{[a,b]} \rho)^2$$

Аналогично можно оценить нижним сектором. То есть:

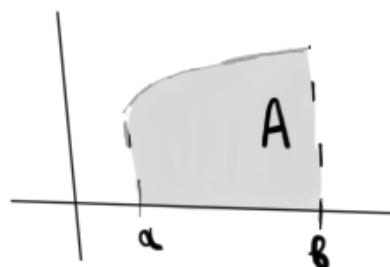
$$\frac{1}{2}(\beta - \alpha)(\min_{[a,b]} \rho)^2 \leq \Phi([\alpha, \beta]) \leq \frac{1}{2}(\beta - \alpha)(\max_{[a,b]} \rho)^2$$

Откуда это и правда плотность, поэтому верно.

Q.E.D.

Кохась: хочу эксперимент

$$\sigma(\Pi\Gamma(f, [a, b])) = \int_a^b f dx, \text{ где } f \geq 0, f \text{ - непрерывно. } \gamma(t) = \begin{pmatrix} x = x(t) \\ y(x) = y(t) \end{pmatrix}, \gamma : [p, q] \rightarrow R^2.$$



Замечание от Славы: вообще $x(t)$ должно монотонно возрастать, иначе странные загадки будут давать одну и ту же площадь, но КПК про это ничего не сказал.

Причем γ - гладкое изображение (дифференцируема столько раз сколько надо).

Получилась какая-то кривая (как на рисунке сверху), и я хочу смотреть подграфики такой кривой. Тогда:

$$\sigma A = \int_a^b y(x) dx = \begin{bmatrix} x = x(t) \\ y = y(t) \end{bmatrix} = \int_p^q y(t)x'(t) dt$$

Теперь мы умеем вычислять интегралы не только в декартовых координатах.

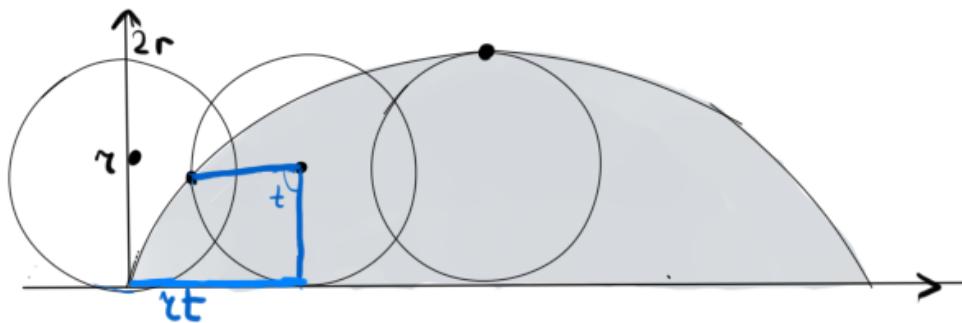
todo: вставить 2 формулы 1.50

Пример:

$$\begin{cases} x(t) = r(t - \sin(t)), r \in R \\ y(t) = r(1 - \cos(t)), t \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

- путь, который описывается данной формулой - циклоид.

Фиксируем точку в нуле и катим окружность по нашему полю. Мы знаем, что x монотонен



И теперь я хочу найти площадь серого подграфика:

$$S = \int_0^{2\pi r} y(x) dx = \begin{bmatrix} x(t) = r(t - \sin t) \\ y(t) = r(1 - \cos t) \end{bmatrix} = \int_0^{2\pi} r^2(1 - \cos t)^2 dt = r^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 dt = 3\pi r^2$$

Пример (Изопериметрическое неравенство.)

$G \subset \mathbb{R}^2$ - выпукло, замкнуто, ограничено.

Пусть $diam(G) = \sup_{a,b \in G} (\rho(a, b))$ - диаметр. $diam(G) = d$. Тогда: $\sigma(G) \leq \frac{\pi}{4}d^2$

todo: тут во-первых скажут рисунок, во-вторых я не осознал 2:20

$\rho(\varphi) = \max(r : (\varphi, r)_{max} \in G)$ - непрерывна.

Упражнение: доказать непрерывность (возможно спросят на экзамене)

$$\bar{\varphi} = \varphi + \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{aligned}\sigma(G) &= \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \rho^2(\varphi) d\varphi = \frac{1}{2} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \right) = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \rho^2(\varphi) d\varphi + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^2 \left(\bar{\varphi} - \frac{\pi}{2} \right) d\bar{\varphi} = \\ &= \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \rho^2(\varphi) + \rho^2(\varphi - \frac{\pi}{2}) d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} "AB^2" d\varphi \leq \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d^2 d\varphi = \frac{d^2 \pi}{4}\end{aligned}$$

Теорема (обобщ. теорема о плотности)

$\Phi : Segm(\langle a, b \rangle) \rightarrow \mathbb{R}$ - а.ф.п. $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ - непрерывно.

Пусть $\forall \Delta \in Segm(\langle a, b \rangle)$ заданы m_Δ, M_Δ - функции от сегмента:

1. $m_\Delta \cdot l(\Delta) \leq \Phi(\Delta) \leq M_\Delta \cdot l(\Delta)$
2. $\forall x \in \Delta : m_\Delta \leq f(x) \leq M_\Delta$
3. \forall фикс. $x \in \langle a, b \rangle, M_\Delta - m_\Delta \rightarrow 0$, при $l(\Delta) \rightarrow 0$ и $x \in \Delta$

Тогда f - плотность Φ .

Доказательство:

Н.у.о мы работаем на $[a, b]$. $F(x) = \begin{cases} \Phi([a, x]), & x > a \\ 0, & x = a \end{cases}$

Напишем то, что нам дает условие в конкретной точке x :

$$m_\Delta \leq \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \leq M_\Delta, \text{ где } \Delta = [x, x+h], h > 0$$

$$m_\Delta \leq f(x) \leq M_\Delta$$

Вычтем из одного другое:

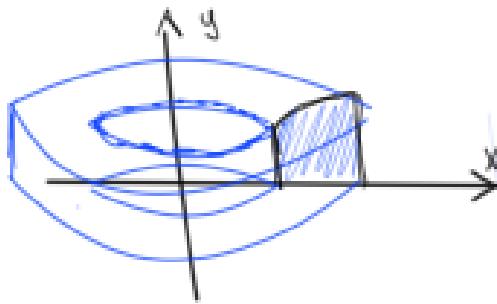
$$\left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) \right| \leq M_\Delta - m_\Delta$$

Устремим h к нулю и получим, что $M_\Delta - m_\Delta \rightarrow 0$. Откуда $\left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) \right| \rightarrow 0$, а это $f(x) = F'_+(x)$. Аналогично $f(x) = F'_-(x)$.

Q.E.D.

1.48 - 4 лекция - кохась рассказывает интересную историю про отрубленные пальцы

Пример (Объем вращения фигур)



$a > 0, b > 0, f > 0$. Вращаем ПГ($f[a, b]$) вокруг оси Oy . Получается вот что-то такое(см рисунок). Хочу найти объем этой фигуры

$\Phi([a, b]) = Vol(\{(x, y, z) : a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2, 0 \leq z \leq f(\sqrt{x^2 + y^2})\})$. Тогда выполнено:

$$\Phi([a, b]) = 2\pi \int_a^b xf(x)dx$$

Доказательство:

A_1 - прямоугольник, такой что его высота $= \min_{(a,b)} f$. $A_1 = [a, b] \times [0, \min f]$

$$Vol A_1 = \pi b^2 \min f - \pi a^2 \min f$$

A_2 - прямоугольник, такой что его высота $= \max_{(a,b)} f$. $A_2 = [a, b] \times [0, \max f]$

$$Vol A_2 = \pi b^2 \max f - \pi a^2 \max f.$$

$$\forall \Delta \text{ положим } m_\Delta = \pi \min_\Delta f \cdot \min(2x), M_\Delta = \pi \max_\Delta f \cdot \max 2x, x \in \Delta$$

Тогда: как мы только что доказали:

$$\Phi(\Delta) \leq Vol(A_2(\Delta)) = \pi \max f \cdot (\bar{b} + \bar{a})(\bar{b} - \bar{a}) \leq M_\Delta(\bar{b} - \bar{a}) \leq M_\Delta l(\Delta)$$

Выше в формуле подразумеваются текущие \bar{a}, \bar{b} для Δ . Аналогично для m_Δ .

При $x \in \Delta : m_\Delta \leq \pi f(x)2x \leq M_\Delta$ - очевидно.

Фиксируем $x : M_\Delta - m_\Delta \rightarrow 0$ при $\Delta \rightarrow 0$ - очевидно. Откуда выполнено условие теоремы о плотности а это то, что нам и требовалось.

Q.E.D.

Пути:

$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$. То есть $t \rightarrow (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \dots, \gamma_m(t)) = \gamma(t)$. Мы обычно думаем, что они непрерывны

$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\gamma(t + \tau) - \gamma(t)}{\tau}$ - интересно как меняется.

$\gamma'(t) = (\gamma'_1(t), \gamma'_2(t), \dots, \gamma'_m(t))$ - вектор скорости.

Носитель пути - траектория пути.

def: Функция l , заданная на множестве гладких путей (непрерывны, дифференцируемы) называется длиной пути, если выполняются следующие условия:

1. $l \geq 0$
2. аддитивна: $\forall [a, b], \forall \gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ для любого $c \in [a, b] : l(\gamma) = l(\gamma|_{[a,c]}) + l(\gamma|_{[c,b]})$
3. $\gamma, \bar{\gamma}$ — два пути. $C_\gamma, C_{\bar{\gamma}}$ — носители пути.

Если $\exists T : C_\gamma \rightarrow C_{\bar{\gamma}}$ — сжатие ($\forall M, N : \rho(T(M), T(N)) \leq \rho(M, N)$), то $l(\bar{\gamma}) \leq l(\gamma)$

4. γ — линейный путь, то $l(\gamma) = \rho(A, B)$, где A — начало, B — конец.

А такая штука вообще существует?

Замечание: Из свойства 3 следует, что длина хорды меньше длины дуги.

Замечание: При растяжении длина пути растет.

Замечание: Длина пути не меняется при движениях пространства R^m (очевидно из свойства 3).

Теорема:

$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ — C^1 — непрерывно дифференцируемо. Тогда $l(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$.

Доказательство:

Считаем γ — инъективный.

$[p, q] \in Segm[a, b] : \Phi([p, q]) = l(\gamma|_{[p,q]})$. Проверим $\|\gamma'(t)\|$ — плотность Φ .

$\Delta : \forall i = 1, \dots, m : m_i(\Delta) = \min_{\delta} |\gamma'_i(t)|, M_i(\Delta) = \max |\gamma'_i(t)|$.

Возьму $m_\Delta = \sqrt{\sum_{i=1}^m m_i^2(\Delta)}$, $M_\Delta = \sqrt{\sum_{i=1}^m M_i^2(\Delta)}$. Проверяем 1, 2, 3 из обобщенной теоремы о плотности. 2 и 3 очевидно выполнены.

Проверим 1: $m_\Delta l(\Delta) \leq \Phi(\Delta) \leq M_\Delta l(\Delta)$. Завожу $\bar{\gamma} : \Delta \rightarrow R^m$ — линейный путь: $\gamma(t) = (M_1(\Delta)t, M_2(\Delta)t, \dots, M_m(\Delta)t)$. Строю $T : C_\gamma \rightarrow C_{\bar{\gamma}}$, такое, что $\gamma(t) \rightarrow \bar{\gamma}(t)$. Проверим, что это растяжение. Давайте считать расстояние. $\rho(\gamma(t_0), \gamma(t_1)) = \sqrt{\sum_{i=1}^m (\gamma_i(t_0) - \gamma_i(t_1))^2}$. По теореме Лагранжа:

$$\begin{aligned} \sqrt{\sum_{i=1}^m (\gamma_i(t_0) - \gamma_i(t_1))^2} &= \sqrt{\sum \gamma'_i(\tau_i)(t_0 - t_1)^2} = \sqrt{\sum \gamma'_i(\tau_i)} |t_0 - t_1| \leq M_{[t_0, t_1]} |t_0 - t_1| \\ &\leq M_\Delta |t_0 - t_1| = \rho(T(\gamma(t_0)), T(\gamma(t_1))) = \rho(\bar{\gamma}(t_0), \bar{\gamma}(t_1)) \end{aligned}$$

Откуда выполнен пункт один и выполнена обобщенная теорема о плотности.

Q.E.D.

Примеры:

1. В $\mathbb{R}^2 : \gamma(t) = (x(t), y(t))$ - обычные декартовы.

$$l = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$$

2. \mathbb{R}^2 , полярные координаты $r(t), \varphi(t)$

$$l = \int_a^b \sqrt{((r(t) \cos \varphi(t))')^2 + ((r(t) \sin \varphi(t))')^2} dt = \int_a^b \sqrt{r(t)^2 + r'(t)^2} dt$$

3. Длина графика $x(t) = t, y(t) = f(t)$.

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + y'(x)^2} dx$$

Вернемся к вопросу существованию такой штуки.

Существование длины пути - Супремум длин вписанных ломаных. Разбиваю отрезок на n кусочков и считаю сумму длины ломанных: $a = x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$

Теперь будем рассматривать пути в \mathbb{R}^1 .

$$l(\gamma) = \sup(\sum \gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1}) | a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b).$$

Замечание: $\gamma \in C^1 : l(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt.$

Замечание: Пусть f - любая из $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Тогда вариация функции на $[a, b]$:

$$\text{Var}_a^b f = \sup\left(\sum_{k=1}^n |f(t_k) - f(t_{k-1})|\right)$$

Пример: $f(x) = \begin{cases} 1, x \in \mathbb{Q} \\ 0, x \in \mathbb{R}, x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$, $\text{Var}_a^b f = +\infty$

Если для f выполнено: $\text{Var}_a^b f < +\infty$, то она называется ограниченной вариации.

Экскурсия в зоопарк.

Кривая Пеано - это путь в \mathbb{R}^2 , такой, что я сначала разбиваю отрезок $[0, 1]$ на 4 равных части так, что отображение первой части отрезка находится в части 1(см рисунок), второй части отрезка в части 2 и так далее. Потом повторяю то же самое в каждом квадратике. Потом повторяю то же самое в каждом квадратике квадратика и так далее. Изображение внизу описывает это построение поэтапно.

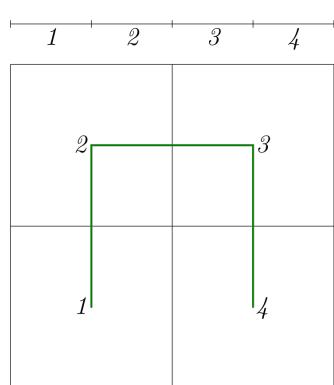


Fig. 1.

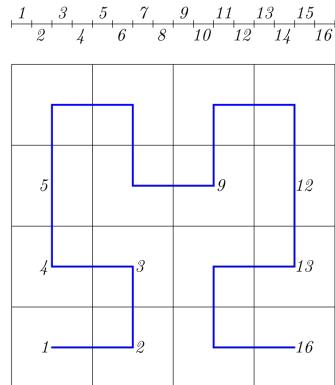


Fig. 2.

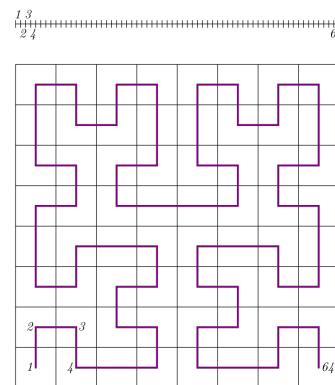
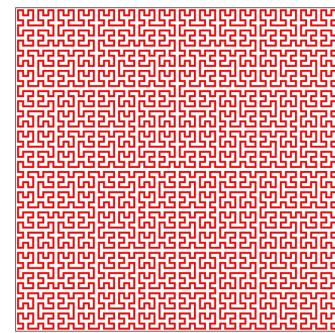
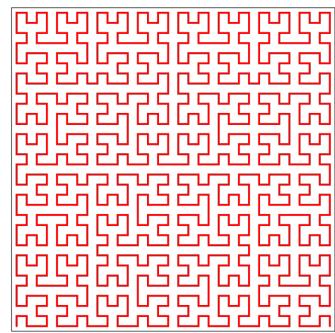
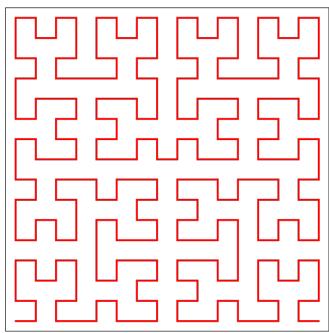


Fig. 3.



Заметим, что у нас биекция между \mathbb{R} и в \mathbb{R}^2 .

1.6 Верхний и нижний пределы последовательностей

def: (x_n) - вещ. последовательность $L \in \mathbb{R}$ - частичный предел $x_n : \exists(n_k) : n_1 < n_2 < \dots : \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n_k} = L$.

def: x_n - вещ. последовательность. Рассмотрим $y_n = \sup(x_n, x_{n+1}, \dots)$, $z_n = \inf(x_n, x_{n+1}, \dots)$. y_n - верхне огибающая, z_n - нижне огибающая.

y_n - не возрастает, z_n - не убывает. $\forall n : z_n \leq x_n \leq y_n$

Если изменить конечное число членов последовательности, то y_n, z_n изменятся конечное число раз.

Верхний предел последовательности — $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim y_n \in \bar{R}$

Нижний предел последовательности — $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim z_n \in \bar{R}$

Теорема (о свойствах верхнего и нижнего предела)

$(x_n), (\bar{x}_n)$ — произвольные вещ. последовательности

1. $\underline{\lim} x_n \leq \overline{\lim} x_n$
2. Если $\forall n : x_n \leq \bar{x}_n$, то $\overline{\lim} x_n \leq \overline{\lim} \bar{x}_n$ и $\underline{\lim} x_n \leq \underline{\lim} \bar{x}_n$

Замечание от Славы: На самом деле здесь можно сказать, что $\exists N$ начиная с которого выполнено $x_n \leq \bar{x}_n$, но КПК почему-то решил так ввести это свойство.

3. $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \geq 0$. Тогда $\overline{\lim} \lambda x_n = \lambda \overline{\lim} x_n$ и $\underline{\lim} \lambda x_n = \lambda \underline{\lim} x_n$. (Считаем $0 \cdot \infty = 0$)
4. $\overline{\lim}(-x_n) = -\underline{\lim} x_n$
5. $\overline{\lim}(x_n + \bar{x}_n) \leq \overline{\lim} x_n + \overline{\lim} \bar{x}_n$
6. Пусть $t_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$. Тогда $\overline{\lim}(x_n + t_n) = \overline{\lim}(x_n) + l$ и $\underline{\lim}(x_n + t_n) = \underline{\lim}(x_n) + l$
7. $t_m \rightarrow l > 0 (l \in \mathbb{R})$. Тогда $\overline{\lim}(t_n x_n) = l \overline{\lim}(x_n)$ и $\underline{\lim}(t_n x_n) = l \underline{\lim}(x_n)$

Доказательство:

1. т.к. $\forall n : z_n \leq x_n \leq y_n$, то используем теорему о предельном переходе и получим то, что нам надо.
2. Используем теорему о предельном переходе и получим то, что нам надо.
3. Очевидно из свойств предела.
4. Очевидно из свойств супремума.
5. $\sup(x_n + \bar{x}_n, \dots) \leq \sup(x_n, \dots) + \sup(\bar{x}_n)$ - первое значение в паре не больше $\sup(x_n, \dots)$, второе не больше $\sup(\bar{x}_n)$.
6. $\forall \varepsilon > 0 : \exists N_0 : \forall n > N_0 : x_k + l - \varepsilon < x_k + t_k < x_k + l + \varepsilon$ - верно из условия.

Возьмем $N > N_0$ при $n \geq N$ выполнено, откуда перейдем к супремумам множеств:

$$y_N + l - \varepsilon \leq \sup(x_N + t_N, x_{N+1} + t_{N+1}, \dots) \leq y_N + l + \varepsilon$$

Устремлю N к бесконечности:

$$\overline{\lim} y_n + l - \varepsilon \leq \limsup(\dots) \leq \overline{\lim} y_n + l + \varepsilon$$

7. Аналогично прошлому пункту.

Q.E.D.

Теорема (техническое определение верхнего предела).

(x_n) - произвольная вещ. последовательность.

1. $\overline{\lim} x_n = +\infty \Leftrightarrow x_n$ - не ограничено сверху
2. $\overline{\lim} x_n = -\infty \Leftrightarrow x_n \rightarrow -\infty$.
3. $\overline{\lim} x_n = l \Leftrightarrow$
 - (a) $\forall \varepsilon > 0 : \exists : \forall n > N : x_n < l + \varepsilon$
 - (b) $\forall \varepsilon > 0$ неравенство $l - \varepsilon \leq x_n$ выполнено для бесконечного множества x -ов

Доказательство:

1. Очевидно.
2. $x_n \leq y_n$ Тогда по теореме о предельном переходе(или двух городовых) $x_n \rightarrow -\infty$. А в обратную сторону очевидно из определения предела.
3. $\Rightarrow \forall \varepsilon : \exists N : \forall n > N : x_n \leq y_n < \varepsilon + l$ - пункт а доказан просто определением предела y_n .

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n > N : l - \varepsilon < y_n.$$

Тогда по техническому описанию супремума $\exists k \geq n : l - \varepsilon < x_k \leq y_n$. Потом возьмите $n > k$ и так далее. Мы научились делать бесконечное кол-во таких k -шек, откуда пункт б доказан.

$\Leftarrow y_n$ - убывающая. Если мы имеем а, то $\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n > N : x_n < l + \varepsilon$. Из этого следует $y_n \leq l + \varepsilon$. И благодаря пункту б у нас выполнено техническое описание супремума то есть $y_n \rightarrow l$

Q.E.D.

Теорема

$$\exists \underline{\lim}(x_n) = L \in \overline{\mathbb{R}} \Leftrightarrow \underline{\lim} x_n = \overline{\lim} x_n = L.$$

Доказательство:

$L = +\infty$ - см прошлую теорему. Аналогично с $-\infty$.

$L \in \mathbb{R}$. В правую сторону очевидно из технического описания. В левую сторону: $z_n \leq x_n \leq y_n$ по теореме о двух городовых верно.

Q.E.D.

Теорема о характеристизации верхнего предела как частичного

(x_n) - вещ. последовательность. Тогда:

1. Если $l \in \overline{\mathbb{R}}$ – частичный предел x_m , то $\underline{\lim} x_n \leq l \leq \overline{\lim} x_n$
2. $\exists n_k, m_k : x_{n_k} \rightarrow \overline{\lim} x_n, x_{m_k} \rightarrow \underline{\lim} x_n$

Доказательство:

1. $x_{n_k} \rightarrow l : z_{n_k} \leq x_{n_k} \leq y_{n_k}$. Устремим к $+\infty$ и получим то, что надо.

2. Очевидно из технического описания супремума и техн. описания верхнего предела (будем выбирать все более и более близкие к l).

Q.E.D.

1.7 Интегральные суммы.

def: $[a, b]$ дробление отрезка $[a, b]$ (на n частей):

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b.$$

Ранг дробления (мелкость) - $\max |x_k - x_{k-1}|$

Оснащение дробления - $\{\xi_1, \dots, \xi_n\} : \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$

Пусть задана $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Тогда Риманова сумма: $\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$.

Теорема(об интеграле, как о пределе частичных сумм)

$f \in C([a, b])$. Тогда $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall$ дробления (x_0, \dots, x_m) ранга $< \delta$. Тогда \forall оснащ.:

$$\left| \int_a^b f(x)dx - \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \right| < \varepsilon$$

Доказательство:

Используем теорему Кантора о равномерной непрерывности:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x, \bar{x} \in [a, b] : |x - \bar{x}| < \delta : |f(x) - f(\bar{x})| < \varepsilon$$

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx - \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) &= \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx - f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx - \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(\xi_i)dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} (f(x) - f(\xi_i))dx \end{aligned}$$

Теперь возьму δ и ϵ из теоремы Кантора, возьму любое дробление ранга меньше δ , получу, что $|x_i - \xi_i| < \delta$ и $|\xi_i - x_{i-1}| < \delta$. Откуда выполнено теорема Кантора и разность $|f(x) - f(\xi_i)| < \varepsilon$. Откуда:

$$\left| \int_a^b f(x)dx - \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \right| \leq \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} |(f(x) - f(\xi_i))|dx \leq \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varepsilon dx = \varepsilon(b - a)$$

Откуда по теореме о бюрократном учете получим искомое.

Q.E.D.

$$w(\delta) = \sup_{t, x \in [a, b], |x-t| < \delta} |f(t) - f(x)| - \underline{\text{модуль непрерывности.}}$$

Теорема (об интегральной сумме центральных прямоугольников)

$$f \in C^2([a, b]), a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b, \delta = \max(x_i - x_{i-1}), \xi_i = \frac{(x_{i-1} + x_i)}{2}.$$

Тогда:

$$\left| \sum_{i=1}^m f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - \int_a^b f(x)dx \right| \leq \frac{\delta^2}{8} \int_a^b |f''(x)|dx$$

Теорема (формула трапеций)

в тех же условиях:

$$\left| \sum_{i=1}^n \left(\frac{f(x_i) + f(x_{i-1})}{2} (x_i - x_{i-1}) \right) - \int_a^b f(x)dx \right| \leq \frac{\delta^2}{8} \int_a^b |f''(x)|dx$$

Доказательство:

$$\begin{aligned} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)(x - \xi_i)'dx = f(x)(x - \xi_i) \Big|_{x_{i-1}}^{x_i} - \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)(x - \xi_i)dx = \\ &= (f(x_i) + f(x_{i-1})) \cdot \frac{x_i - x_{i-1}}{2} + \frac{1}{2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f'(x)((x - x_{i-1})(x_i - x))'dx = \\ &= [\psi_i(x) = (x - x_{i-1})(x_i - x)] = \dots + \frac{1}{2} f'(x) \psi_i(x) \Big|_{x_{i-1}}^{x_i} - \frac{1}{2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f''(x) \psi_i(x)dx \end{aligned}$$

Тогда:

$$\left| \sum \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{2} (x_i - x_{i-1}) - \int_a^b f(x)dx \right| = \left| \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f''(x) \psi_i(x)dx \right|$$

Заметим, что $\psi(x)$, которая является функцией из частей $\psi_i(x)$ будет непрерывной, откуда я могу ее интегрировать и сделать замену на нее:

$$\left| \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f''(x) \psi(x)dx \right| = \left| \frac{1}{2} \int_a^b f''(x) \psi(x)dx \right| \leq \frac{1}{2} \int_a^b |f''(x) \psi(x)| dx \leq \frac{\delta^2}{8} \int_a^b |f''(x)|dx$$

Q.E.D.

Формула Эйлера - Маклорена (простейшая)

$f \in C^2([m, n])$, $m, n \in \mathbb{R}$. Тогда:

$$\sum_{i=m}^n f(i) - \frac{1}{2}f(m) - \frac{1}{2}f(n) = \int_m^n f(x)dx + \frac{1}{2} \int_m^n f''(x)\{x\}(1 - \{x\})dx$$

Доказательство:

Очевидно :)

Это буквально прошлая теорема, просто надо очень долго пылится в формулу. $\psi(x) = (1 - \{x\})\{x\}$. Попытайтесь в формулу и тоже поймете.

Q.E.D.

Примеры:

$$f(x) = x^p \ (p > -1)$$

$$\begin{aligned} 1^p + 2^p + \dots + n^p &= \int_1^n x^p dx + \frac{1}{2}(n^p + 1) + \frac{1}{2} \int_1^n p(p-1)x^{p-2}\{x\}(1-\{x\}) = \\ &= \frac{n^{p+1}}{p+1} - \frac{1}{p+1} + \frac{n^p}{2} + \frac{1}{2} + O(\max(1, n^{p-1})) = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{n^p}{2} + O(\max(1, n^{p-1})) \end{aligned}$$

Торжественный момент, применим формулу для $p = 1$:

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} + 0 - \text{Мы доказали теорему Гаусса.}$$

Применим формулу для $p = -1$:

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} &= \ln n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} + \int_1^n \frac{1}{x^3}\{x\}(1-\{x\})dx \\ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} &= \ln n + \gamma + o(1). \text{ Причем } \gamma \in [\frac{1}{2}, \frac{5}{8}] - \underline{\text{Постоянная Эйлера}} \end{aligned}$$

Формула Валлиса

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \begin{cases} \frac{(n-1)!! \pi}{n!! 2}, & n - \text{четная} \\ \frac{(n-1)!!}{n!!}, & n - \text{неч} \end{cases}$$

КПК: Используйте формулу интегрирования по частям. Двойной факториал - одной четности

$$x \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

$\sin^{2k+1} x \leq \sin^{2k} x \leq \sin^{2k-1} x$ - очевидное неравенство. Проинтегрируем по $0, \frac{\pi}{2}$, получим:

$$\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!} \leq \frac{(2k-1)!!}{2k!!} \cdot \frac{\pi}{2} \leq \frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!}$$

$$\left(\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!} \right)^2 \frac{1}{2k+1} \leq \frac{\pi}{2} \leq \left(\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!} \right)^2 \frac{1}{2k}$$

$$\text{Правая часть} - \text{левая часть} \left(\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!} \right)^2 \left(\frac{1}{2k} \cdot \frac{1}{2k+1} \right) \leq \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2k} \rightarrow 0$$

Получили, что левая и правые величины стремятся к $\frac{\pi}{2}$.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!} \right)^2 \frac{1}{k} = \pi - \underline{\text{Формула Валлиса}}$$

Формула Стирлинга

Воспользуемся формулой Эйлера - Маклорена для $f(x) = \ln x$:

$$\begin{aligned} \ln 1 + \ln 2 + \dots + \ln n &= \int_1^n \ln x dx + \frac{\ln n}{2} - \frac{1}{2} \int_1^n \frac{1}{x^2} \{x\}(1 - \{x\}) dx = \\ n \ln n - n + 1 + \frac{\ln n}{2} - \frac{1}{2} \int_1^n \frac{1}{x^2} \{x\}(1 - \{x\}) dx &= n \ln n - n + \frac{\ln 2}{2} + C_1 + o(1) \end{aligned}$$

А давайте теперь возведем экспоненту от правой и левой части:

$$n! = e^{n \ln n} e^{-n} e^{\frac{\ln n}{2}} e^{C_1 + o(1)}$$

Получили, что $n! \sim \frac{n^n}{e^n} \sqrt{n} \cdot c$, где $c = e^{C_1}$.

А теперь давайте сочетать и найдем эту c .

$(2k)!! = k! \cdot 2^k$, $(2k-1)!! = \frac{(2k)!}{k! \cdot 2^k}$. С учетом этого воспользуемся формулой Валлиса:

$$\sqrt{\pi} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!} \right) \frac{1}{\sqrt{k}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2^{2k} (k!)^2}{(2k)!} \frac{1}{\sqrt{k}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2^{2k} k^{2k} e^{-2k} k \cdot c^2}{(2k)^{2k} e^{-2k} \sqrt{2k} \cdot c \sqrt{k}} = \frac{c}{\sqrt{2}}$$

Откуда $c = \sqrt{2\pi}$

$$n! \sim \frac{n^n}{e^n} \sqrt{n} \cdot \sqrt{2\pi} - \underline{\text{Формула Стирлинга}}$$

1.8 Несобственные интегралы.

def: Допустимая функция на $[a, b) : (-\infty < a < b \leq +\infty)$

$\forall A \in (a, b) : f$ - кусочно непрерывная на $[a, A]$

$$\text{def: } \Phi(A) := \int_a^A f(x) dx$$

Если $\exists \lim_{A \rightarrow b^-} \Phi(A) \in \bar{\mathbb{R}}$ - этот предел называется несобственным интегралом

Если этот предел конечен, то говорят, что несобственный интеграл сходится, иначе - расходится.

Свойства:

1. Критерий Больцана-Коши (сходимости несобственного интеграла):

$$\int_a^b f(x) dx \text{ - сходящаяся} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists \Delta \in (a, b) : \forall A, B \in (a, b), \left| \int_A^B f \right| < \varepsilon$$

Оно тривиально (так сказал КПК).

Следствие: Если $\exists A_n, B_n \rightarrow b - 0 : \int_{A_n}^{B_n} f \not\rightarrow 0$, то $\int_a^b f$ - расходится.

2. Аддитивность на промежутке:

f - допустима на $[a, b)$, $c \in (a, b)$. Тогда \int_a^c, \int_c^b сходятся или расходятся одновременно и в случаях сходимости $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$

Доказательство:

$\int_a^A f$, где $c < A < b : \int_a^A f = \int_a^c f + \int_c^A f$, если в одной части предел сработает, то в другой.

Q.E.D.

Если $\int_a^b f$ сходится, то $\int_c^b f \rightarrow 0$, при $c \rightarrow b - 0$.

3. f, g - доп на $[a, b)$, $\int_a^b f, \int_a^b g$ - сходятся, $\lambda \in \mathbb{R}$:

Тогда $\int_a^b f + g = \int_a^b f + \int_a^b g, \int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f$

4. f, g допустимы на $[a, b]$: $\int_a^b g, \int_a^b f$ - существует в \mathbb{R} , $f \leq g$. Тогда $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

5. f, g - дифф. на $[a, b]$, f', g' - допустимы, тогда:

$$\int_a^b fg' = fg \Big|_a^b - \int_a^b f'g$$

(если существуют два предела из трех)

6. $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow \langle A, B \rangle, \varphi \in C$. Пусть $\exists \varphi(\beta - 0) \in \overline{\mathbb{R}}, f \in C(\langle A, B \rangle)$. Тогда:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi) \varphi' dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x) dx$$

В целом собственные интегралы очень похожи на обычные.

Признаки сравнения сходимости несобственного интеграла.

Лемма:

Пусть f допустима на $[a, b], f \geq 0, \Phi(A) = \int_a^A f$. Тогда $\int_a^b f$ - сходящаяся, то Φ ограниченная.

Доказательство:

Φ монотонно возрастает. Раз $\int_a^b f$ сходится, то Φ ограничено.

Q.E.D.

Признак сравнения.

$g \geq 0, f \geq 0$ допустимы на $[a, b]$

1. $f \leq g$, если g сходится, то f очевидно сходится и если f расходится, то g тоже расходится.

2. $\lim_{x \rightarrow b-0} \frac{f(x)}{g(x)} = e \in (0, +\infty)$, то $\int_a^b f, \int_a^b g$ сходятся и расходятся одновременно.

3. $\lim_{x \rightarrow b-0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, то выполнен пункт 1, если предел бесконечность, то поменяйте f, g местами.

Доказательство:

Пусть $\Phi(A) = \int_a^A f, \Psi(A) = \int_a^A g$. Все 3 пункта тривиально доказываются через предельные переходы и сходимость.

Q.E.D.

Соглашение. $\int_0^{+\infty} f(x)dx$, $\exists \lim_{x \rightarrow +0} f(x)$ и f непрерывно на $(0, +\infty)$ и например в $x_0 = 10$ непрерывность ломается.

В таком случае $\int_0^{+\infty} = \int_0^5 + \int_5^{10} + \int_{10}^{15} + \int_{15}^{+\infty}$

Пример:

$\int_{10}^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta}$. Мы хотим понять при каких α и β сходится.

1. $\alpha > 1$. Удавим логарифм!?!?!! (гениальные формулировки КПК). $\alpha = 1 + 2a, a > 0$. $\frac{1}{x^{1+2a} (\ln x)^\beta} = \frac{1}{x^{1+a}} \cdot \frac{1}{x^a (\ln x)^\beta}$. Это значит, что существует $x_0 > 10 : \forall x > x_0 : \frac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta} < 1$. И поэтому сходится

Замечание. Я вообще не понял этот прикол

2. $\alpha < 1$. Тогда $\alpha = 1 - 2a, a > 0$. $\frac{1}{x^{1-a}} \cdot \frac{1}{x^{-a} (\ln x)^\beta}$. Правая дробь расходится, а потом она будет еще сильнее расходится

Замечание: Я опять не понял, просто процитировал.

3. $\alpha = 1$. Откуда мы можем просто поменять переменные $\int_{10}^{+\infty} \frac{dx}{x (\ln x)^\beta} = \int_{\ln 10}^{+\infty} \frac{d(\ln x)}{(\ln x)^\beta}$. А это уже тривиально.

КПК: Устроим экскурсию в конц камеру

Пример:

Гамма функция Эйлера — $\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} x^{t-1} e^{-x} dx, t \in (0, +\infty)$

1) При $t > 0$ интеграл сходится.

Доказательство:

$\int_0^{+\infty} = \int_0^1 + \int_1^{+\infty}$

Посмотрим на первый интеграл.

1. Если $t \geq 1$, то интеграл собственный и все ок
2. Если $0 < t < 1$. $x^{t-1}e^{-x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} x^{t-1} \cdot 1$ и сходится к нулю и все оки супер чики пухи.

Посмотрим на второй интеграл. С ним тоже все ок.

Q.E.D.

2) $\Gamma(t)$ непрерывна, потому что $\Gamma(t)$ - выпуклая функция. А почему она выпуклая? Посмотрим на функцию $t \rightarrow x^{t-1}e^{-x}$. Вторая производная (по t) больше нуля, откуда она выпуклая. Тогда и $\Gamma(t)$ выпуклая, а отсюда непрерывная. Мы просто пишем неравенство выпуклой функции и интегрируем его.

3) $\forall t > 0 : \Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$, в частности $\Gamma(n+1) = n(n-1)\dots 1 = n!$

$$\Gamma(t+1) = \int_0^{+\infty} x^t e^{-x} dx = x^t (-e^{-x}) \Big|_0^{+\infty} + t \int_0^{+\infty} x^{t-1} e^{-x} dx = t\Gamma(T)$$

4) $t\Gamma(t) \sim 1$, $\Gamma(t) \sim \frac{1}{t}$ при $t \rightarrow 0$

5) $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ - Интеграл Эйлера - Пуассона. $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ — точнее вот он.

Доказательство:

$$1 - x^2 \leq e^{-x^2} \leq \frac{1}{1+x^2}$$

Это неравенство эквивалентно $e^t \geq (1+t)$, а эта на самом деле очевидно из выпуклости экспоненты.

Возведем в степень n :

$$(1 - x^2)^n \leq e^{-nx^2} \Leftrightarrow \int_0^1 (1 - x^2)^n dx \leq \int_0^1 e^{-nx^2} dx$$

А также:

$$e^{-nx^2} \leq \frac{1}{(1+x^2)^n} \Leftrightarrow \int_0^{+\infty} e^{-nx} dx \leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n} dx$$

Давайте заметим, что делая замену левого на $\cos t$, а справа на $\operatorname{tg} t$ и мы получим формулу Валлиса. То есть получается:

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \leq \int_0^{+\infty} e^{-nx^2} dx \leq \frac{(2n-3)!! \pi}{(2n-2)!! 2}$$

Умножу все на корень из n . В интеграле сделаю замену и выскочит наш интеграл Эйлера Пуассона. В середине выражение перестанет зависеть от n .

По краям же мы можем посчитать по пределу из формулы Валлеса.

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} \leq \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \leq \frac{\pi}{2}$$

А это именно то, что от нас требуется.

Q.E.D.

def: f допустима на $[a, b)$ $\int_a^b f$ - **абсолютно сходится**, если:

1. $\int_a^b f$ сходится.

2. $\int_a^b |f|$ сходится.

Замечание от Славы. От слова abs - по модулю.

Напомним пару функций: $f^+ = \max(f, 0)$, $f^- = \max(-f, 0)$

Теорема.

f - допустима на $[a, b)$. Тогда эквивалентно:

1. $\int_a^b f$ - абсолютно сходится.

2. $\int_a^b |f|$ - сходится

3. $\int_a^b f^+$, $\int_a^b f^-$ - оба сходятся.

Доказательство:

Из первого второе тривиально. Из второго третье очевидно по сравнению: $0 \leq f^+ \leq |f|$ и $0 \leq f^- \leq |f|$. Из третьего первое очевидно из $f = f^+ - f^-$, $|f| = f^+ + f^-$

Q.E.D.

Пример:

$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx$. Хотим понять, когда сходится, а когда абсолютно сходится.

1) $p > 1$ интеграл очевидно сходится.

2) $p \leq 0$ интеграл расходится и абсолютно тоже расходится.

3) $1 \geq p > 0$ интеграл абсолютно расходится, но сходится.

Тут все тривиально. Не знаю что тут Кохась полчаса объяснял. Если что 7-ая лекция 1.50 +- до 2.15

Замечание. \int_a^b - несобств. Если он сходится, то отсюда вообще никак не следует, что $f(x) \rightarrow 0$.

Замечание. $\int_a^b f$ - абсолютно сходится, не следует что $f(x) \rightarrow 0$.

Пример:

$$\int_1^{+\infty} x(\sin(x^3))dx = \frac{1}{3} \int_1^{+\infty} \frac{\sin y}{\sqrt[3]{y}} - \text{сходится.}$$

Теорема (Признак Абеля-Дирихле)

1. f - допустима на $[a, b]$. $F(A) = \int_a^A f(x)dx$ - ограничена на $[a, b]$. $\exists K : \forall A \in [a, b] : |\int_a^A f(x)| \leq K$

Пусть есть $g \in C^1([a, b])$, g - монотонна и $g(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow b$. Тогда $\int_a^b f(x)g(x)dx$ - сходится.

2. f - допустима на $[a, b]$, $\int_a^b f(x)dx$ - сходится. $g \in C^1([a, b])$, g - монотонна и ограничена на $[a, b]$. Тогда $\int_a^b f(x)g(x)dx$ - сходится.

Доказательство:

В первом случае интегрируем по частям. $\int_a^b f(x)g(x)dx = F(x)g(x) \Big|_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)dx$. Заметим, что в правой части и то, и то конечно. (правый интеграл абсолютно сходится).

$$\int_a^b F(x)g'(x)dx \leq K \int_a^b |g'(x)|dx = sign g \cdot K \cdot g \Big|_a^b$$

Во втором случае тоже.

Пример (Интеграл Дирихле)

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

Доказательство:

$$\cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx = \frac{\sin((n + \frac{1}{2})x)}{2 \sin \frac{x}{2}} - \frac{1}{2}.$$

Проинтегрируем 0 до π . Все косинусы дают нулевой интеграл

$$0 = \int_0^\pi \frac{\sin(n + \frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{x}{2}} dx - \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^\pi \frac{\sin(n + \frac{1}{2})x}{x} dx = \int_0^{\pi(n + \frac{1}{2})} \frac{\sin y}{y} dy \rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

По признаку Дирихле. То есть устремляя искомое, я получу, что к бесконечности. Теперь осталось показать, что $\int_0^\pi \frac{\sin(n + \frac{1}{2})x}{x} dx - \int_0^\pi \frac{\sin(n + \frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{x}{2}} dx$ стремится к нулю.

$$= \int_0^\pi \sin(n + \frac{1}{2})x \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}} \right)$$

Пусть то, что в больших скобках это $h(x)$.

1. Очевидно, что $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 0$.
2. Доопределим $h(x) = 0$. Тогда h - дифф. в точке ноль.

Тогда мы можем сделать интегрирование по частям.

$$= \frac{1}{n + \frac{1}{2}} \cos(n + \frac{1}{2})x h(x) \Big|_0^\pi + \frac{1}{n + \frac{1}{2}} \int_0^\pi \cos(n + \frac{1}{2})x h'(x) dx$$

Откуда, заметим, что каждое из выражений стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$, откуда победили

2 Ряды.

2.1 Определения.

def: Пусть дана вещ. последовательность (a_n) .

Выражение вида $S_N = \sum_{n=1}^N a_n$ — **частичная сумма ряда**.

Если $\exists \lim_{N \rightarrow +\infty} S_n = L \in \bar{\mathbb{R}}$, то говорят, что L — **сумма ряда** $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

В случае L конечного будем называть ряд **сходящимся**. В случае $L = \infty$ или не существования предела реда, будем называть ряд **расходящимся**.

Замечание. $a_n = S_n - S_{n-1}$.

Примеры:

1. $(a_n) : a_n \equiv 0$, то сумма 0 — сходится
2. $(a_n) : a_n \equiv 1$, то сумма $+\infty$ — расходится
3. $(a_n) : a_n = (-1)^n$, то предела нет и расходится.

$$4. a_n = q^n. S_N = 1 + \dots + q^N = \frac{q^{N+1} - 1}{q - 1}.$$

Заметим, что это будет сходиться при $q < 1$ и $\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-q}$.

$\sum_{n=k}^{+\infty} a_n$ — k -ый остаток ряда.

Свойства рядов:

1. $\sum a_n, \sum b_n$ — сх. $c_n = a_n + b_n$.
Тогда $\sum c_n$ — сходится и $\sum c_n = \sum a_n + \sum b_n$
2. $\sum a_n$ — сходится $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \sum \lambda a_n$ — сходится и $\sum \lambda a_n = \lambda \sum a_n$.
3. $\sum a_n$ — сходится, то любой остаток ряда сходится
4. Если какой-нибудь остаток ряда сходится, то ряд сходится
5. Ряд сходится $\Leftrightarrow r_n \rightarrow 0$.

Теорема (грабли) (необходимое условие сходимости)

$\sum a_n$ — сходится. Тогда $a_n \rightarrow 0$

Доказательство:

Да если бы камень умел думать, да если бы он не думал, он бы сходу сделал доказательство.

Q.E.D.

Замечание. В ОБРАТНУЮ СТОРОНУ НЕ РАБОТАЕТ!!!

Теорема (критерий Больцано-Коши)

3 онлайн.

Прошлая лекция:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = S$$

$$S = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\sum_{n=1}^N a_n \right)$$

Теорема (Интегральный признак Коши)

Пусть у вас есть функция f - непрерывная на $[1, +\infty)$, монотонна, $f \geq 0$. Тогда $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$ и $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ сходятся и расходятся одновременно.

Доказательство:

Замечание от Славы. Как будто очень похоже на то, что слева написана сумма Римана.

Существует $\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A \geq 0$.

Если $A > 0$, то очевидно расходится. Если $A = 0$, тогда из прошлых лемм у нас есть, частичные суммы, а интеграл замкнут между такими суммами:

$$\sum_{n=2}^N f(n) \leq \int_1^N f(x)dx \leq \sum_{n=1}^N f(n)$$

Q.E.D.

Пример:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^p (\ln n)^q}$$

Как мы показывали ранее мы знаем, когда соотв. интеграл сходится и расходится.

НО НЕЛЬЗЯ ЗАБЫВАТЬ О ТОМ, ЧТО ФУНКЦИЯ ДОЛЖНА БЫТЬ МОНОТОННА

Абсолютная сходимость.

a_n - любого знака. $\sum_{n=1}^{+\infty}$ — абсолютная сходимость если:

1. $\sum a_n$ - сходится
2. $\sum |a_n|$ - сходится

Пример:

$$\frac{1}{1+x^2} \leq 1 - x^2 + x^4 - \dots (-1)^N x^{2N} + \frac{(-1)^{N+1} x^{2N+2}}{1+x^2}$$

Проинтегрируем по $[0, 1]$, получим:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{(-1)^N}{2N+1} + \int_0^1 \frac{(-1)^{N+1}x^{2N+2}}{1+x^2} dx$$

Интеграл справа по модулю \leq

Ряд $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ - не сходим абсолютно

Такая формула называется суммой Грегори-Лейбница.

Теорема.

a_n — любого знака. Тогда эквивалентно:

1. $\sum a_n$ - абсолютная сходимость.
2. $\sum |a_n|$ - сходится.
3. $\sum a_n^+$, $\sum a_n^-$ - оба сходятся. Где $a_n^+ = \max(a_n, 0)$, $a_n^- = \max(-a_n, 0)$

Доказательство: смотри теорему в интегралах

3.1 Сходимость рядом с произвольными знаками слагаемых

Теорема (Признак Лейбница)

$c_1 \geq c_2 \geq \dots \geq 0$ (т.е монотонность). Пусть $c_n \rightarrow 0$. Тогда $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} c_n$ - сходится.

Доказательство:

И давайте все синие квадратики подвинем налево. Тогда мы получим, что такая сумма будет ограничена. Но мы доказали, что $(c_1 - c_2) + (c_3 - c_4) + \dots$ сходится. Осталось проверить нечетные частичные суммы. $S_{2n+1} = S_{2n} + c_{2n+1}$ и именно если $c \rightarrow 0$, то S_{2n+1} стремится к тому же и мы победили.

Более формальное доказательство:

Пусть $S_{2k} = c_1 - c_2 + \dots + c_{2k-1} - c_{2k}$. Тогда посмотрим на четные суммы:

1. $S_{2k} \leq S_{2k+2}$, тк добавили что-то неотрицательное.
2. $S_{2k} \leq c_1 : S_{2k} = c_1 - (c_2 - c_3) - (c_4 - c_5) - (c_{2k-2} - c_{2k-1}) - c_{2k} \leq c_1$

Значит существует предел S_{2k} . И используйте концовку прошлой.

Q.E.D.

Секретное приложение к признаку Лейбница

$c_1 \geq c_2 \geq \dots \geq 0, c_n \rightarrow 0$

$$\left| \sum_{n=N}^{+\infty} (-1)^{n+1} c_n \right| \leq c_N$$

Доказательство: см. теорему выше.

Пример:

1. $\sum \frac{(-1)^n}{n + \sin n}$ сходится по признаку Лейбница
2. $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n}$ этот ряд не удовл. признаку Лейбница, тк не монотонна

Очень грустная картинка.

Преобразование Абеля (суммирование по частям).

$$\sum_{n=1}^N a_n b_n = A_N b_N + \sum_{n=1}^{N-1} A_n (b_n - b_{n+1}), \text{ где } A_n = a_1 + \dots + a_n$$

Доказательство: Раскройте сумму и получите magic. (не забудьте проверить края)

Теорема (признак Абеля и Дирихле)

1. (a) Пусть частичные суммы последовательности a_n - ограниченны: $\exists C_A : \forall n : a_1 + \dots + a_n \leq C_A$.
- (b) Пусть b_n - монотонна, $b_n \rightarrow 0$

Тогда $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ - сходится

2. (a) Ряд $\sum a_n$ - сходится.

(b) b_n - монотонна и ограничена. $\exists C_B : \forall$

Тогда $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ - сходится.

Доказательство:

$$1. \sum_{n=1}^N a_n b_n = A_n b_n + \sum_{n=1}^{N-1} A(b_n - b_{n+1})$$

A_N - ограниченная и b_N - бесконечно малая.

Ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} A_n(b_n - b_{n+1})$ - сходится, потому что он сходится абсолютно. А абсолютно он сходится, потому что:

$$\sum_{n=1}^N |A_n| |b_n - b_{n+1}| \leq C_A \sum_{n=1}^N |b_n - b_{n+1}|$$

- разности под модулем одного и того же знака, поэтому

$$= C_A |b_1 - b_{N+1}| \leq C_A \cdot 2C_B$$

2. \exists кон. $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \beta$. Разложу ряд и получу:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \beta + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n (b_n - \beta)$$

Правильна ли формула? Не всегда, только если пределы есть.

Заметим, что $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \beta$ сходится по усл. 1. А вторая сумма сходится по признаку Дирихле (первому пункту нашей теоремы). Откуда имметт предел и мы победили.

Q.E.D.

Пример:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n^\alpha}, \alpha > 0$$

$$|\sin 1 + \sin 2 + \dots + \sin n| = |\operatorname{Im}(e^i + e^{2i} + \dots + e^{ni})| \leq \operatorname{Im} |e^i \frac{e^{ni} - 1}{e^i - 1}| \leq \frac{2}{e^i - 1} = C_A$$

Откуда ограничены частичные суммы и $b_n = \frac{1}{n^\alpha}$ монотонна и $b_n \rightarrow 0$, то выполнен признак Дирихле, откуда победили.

Пример: смерть монстра

3.2 Свойства сходящихся рядов.

Сюжет I — группировка слагаемых.

3 прикола:

$$1 - 1 + 1 - \dots \rightarrow ???$$

$$(1 - 1) + (1 - 1) + \dots \rightarrow 0$$

$$1 + (-1 + 1) + \dots \rightarrow 1$$

Так что группировка если работает, то работает очень хитро.

$\sum a_k = (a_1 + \dots + a_{n_1}) + (a_{n_1+1} + \dots + a_{n_2}) + \dots$. И теперь я каждую скобку заменю на b_i .

Теорема

Используя обозначения выше:

1. $\sum a_k$ - сходится. Тогда $\sum b_k$ - сходится и имеет ту же сумму.
2. $\forall k : a_k \geq 0$, то $\sum a_k, \sum b_k$ имеют одинаковые суммы (или одновременно расходятся)

Доказательство:

$$S_k^{(b)} = S_{n_k}^{(a)}$$

Q.E.D.

4 Информация о курсе

Поток — у2024.

Группы М3138-М3139.

Преподаватель — Кохась Константин Петрович.

Сенко учит мат. анализ и ты учи!

