Дифференциальные уравнения.

Чепелин Вячеслав

Содержание

1 Лекция 1.

1.1 Основные определения.

def: Пусть $f : G \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, **нормальное уравнение** :

$$y' = f(x, y)$$

def: **Область определения** нормального уравнения — область определения его правой части. Обозначение $dom = G$.

Примеры уравнений и соответствующих областей определения:

1. $y' = x\sqrt{y}$, $G = \mathbb{R} \times [0, +\infty)$
2. $y' = y, G = \mathbb{R}^2$
3. $y' = -\frac{1}{x^2}, G = \{(x, y) \in \mathbb{R} | x \neq 0\}$

def: Функция $\varphi : E \to \mathbb{R}$ - **решение** уравнения, если $E = \langle a, b \rangle$:

$$\varphi'(x) \equiv f(x, \varphi(x))$$

Соглашение: На протяжении курса, будем считать, что $\forall$ предиката $P(x)$, который не определен при $x = x_0$, считаем, что $P(x_0) = 0$ - то есть ложно.

Замечание: Данное зам. помогает не требовать от φ дифференцируемости на всем E.

Следствие: Учитывая соглашение любое решение уравнение — дифференцируемая функция.

Следствие: Если f - непр. функция, то любое решение нормального уравнения непрерывно дифференцируемо.

Замечание: В нормальном уравнении символы x, y и y' - три различные независимые переменные. Пока не произведена подстановка функции, буква y никак не связана с x, а y' не олицетворяет производную.

def: **Интегральная кривая** уравнения — график его решения.

def: **Общее решение** уравнения — множество всех его решений.

def: **Общим интегралом** уравнения будем называть соотношение вида:

$$\varPhi(x, y, C) = 0$$

которое неявно задает некоторые уравнения при некоторых значениях вещественного параметра C.

Замечание: Общий интеграл не всегда описывает все решения уравнения.

1.2 Уравнение в дифференциалах.

def: Пусть $P, Q : G \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, **уравнение в дифференциалах**:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

Замечание: Переменные x, y входят равноправно, поэтому его решением называется не только функция $y = \varphi(x)$, но и $x = \psi(y)$

def: Точка $(x_0, y_0) \in G$ называется **особой точкой** уравнения, если $P(x_0, y_0) = Q(x_0, y_0) = 0$

def: Пусть $T = \langle a, b \rangle$, вектор-функции $(u, v) \in \mathbb{C}^1(T \to \mathbb{R}^2)$ — **параметрические** решение уравнения, если:

1. $(u'(t), v'(t)) \neq (0, 0)$ для всех $t \in T$
2. $P(u(t), v(t))u'(t) + Q(u(t), v(t))v'(t) \equiv 0$ на T

def: **Интегральной кривой** уравнения называют годограф (множество значений) ее параметрического уравнения.

Утверждение: (Связь между обычными и параметрическими решениями).

Пусть $P, Q \in C(G)$, множество G не содержит особых точек уравнения, тогда:

1. Если $y = \varphi(x)$ — решение уравнения на E, то $r(t) = (t, \varphi(t))$ - параметрическое решение уравнения на E.
2. Если $r = (u, v)$ — параметрическое решение уравнения на T, то для любого $t_0 \in T$, найдется окрестность $U(t_0)$, такая что функции $u(t)$ и $v(t)$ при $t \in U(t_0) \cap T$ параметрически задают решение уравнения.

def: Два дифференциальных уравнения **эквивалентны** (или **равносильны**) на множестве G, если они имеют одинаковое семейство интегральных кривых на множестве G.

Теорема. Пусть $f \in C(G \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R})$. Тогда уравнение:

$$y' = f(x, y)$$

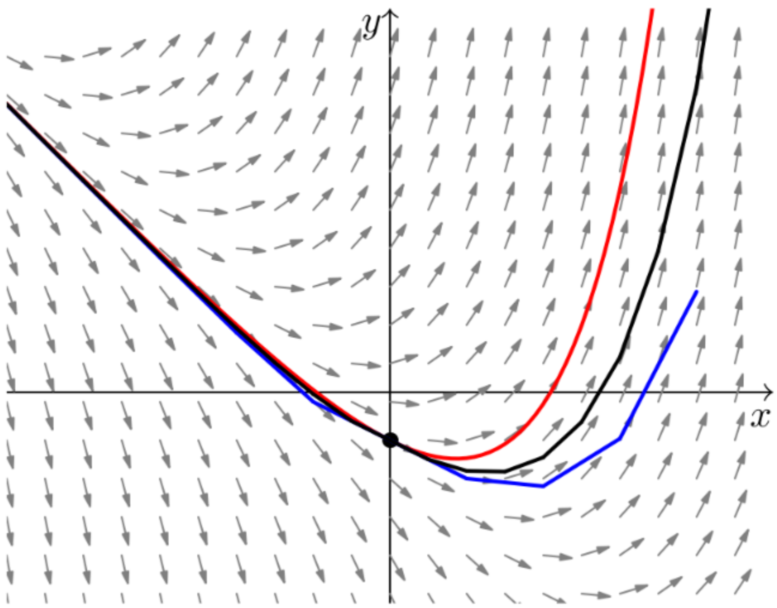
эквивалентно на множестве G уравнению:

$$dy = f(x, y)dx$$

2 Лекция 2.

2.1 Геом. смысл дифференциальных уравнений

def: Если каждой точке (x, y) области определения функции f сопоставить вектор, направленный под углом $\arctan f(x, y)$, то получится **поле направлений** $f(x, y)$.



Рассмотрим один способ построить приближение к интегральной кривой. Взяв некоторую точку (x_0, y_0) в качестве начальной, будем двигаться по направлению поля в точке (x_0, y_0) до точки с абсциссой $x_1 = x_0 + h$, ординату которой обозначим через y_1. Сделаем то же самое, что много много раз и получим **ломаную Эйлера**.

def: **Изоклиной** I_k уравнения называют множество уровня функции f:

$$I_k = \{(x, y) \in dom f | f(x, y) = k\}$$

TODO: метод изоклин

2.2 Уравнение в полных дифференциалах.

def: Уравнение

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

называют **уравнением в полных дифференциалах** в области G, если для него существует **потенциал**, то есть такая дифференцируемая функция u, что для всех $x, y \in G$:

$$du = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

Теорема (общее решение УПД)

Пусть $G \subset \mathbb{R}^2$ — область, функция $u : G \to \mathbb{R}$ дифференцируема, $u'_x = P, u'_y = Q$. Тогда функция $y = \varphi(x)$ - решение уравнения УПД на промежутке E, если и только если она дифференцируема на E и при некотором $C \in \mathbb{R}$ неявно задана уравнением:

$$u(x, y) = C$$

Доказательство:

Достаточность. Дифференцируя равенство $u(x, \varphi(x)) = C$ по переменной $x \in E$, находим:

$$u'_x(x, \varphi(x)) + u'_y(x, \varphi(x))\varphi'_x \equiv 0$$

Так как $u'_x = P, u'_y = Q$, то определению функция φ является решением

Необходимость. На промежутке E верно тождество

$$P(x, \varphi(x)) + Q(x, \varphi(x))\varphi'(x) \equiv 0$$

Левая часть этого равенства совпадает с производной функции u по переменной x.

Q.E.D.

def: Уравнение

$$P(x)dx + Q(y)dy = 0$$

называют **уравнение с разделенными переменными.**

Следствие (общее решение УРП):

Пусть $P \in C(a, b), Q \in C(c, d)$. Тогда функция $y = \varphi(x)$ — решение уравнения на промежутке E, если и только если она дифференцируема на E и при некотором $C \in \mathbb{R}$ и при некотором $C \in \mathbb{R}$ неявно задана уравнением:

$$\int P(x)dx + \int Q(y)dy = C$$

Доказательство: подставим и проверим.

Утверждение (необходимое условие УПД).

Пусть потенциал $u \in C^2(G)$. Тогда:

$$P'_y = Q'_x$$

Теорема (признак УПД)

Пусть $G \subset \mathbb{R}^2$ — односвязная область $P, Q \in C^1(G), P'_y = Q'_x, (x_0, y_0) \in G$. Тогда уравнение в полных дифференциалах в области в G с потенциалом:

$$u(\overline{x}, \overline{y}) = \int\limits_{\gamma(\overline{x}, \overline{y}))} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

3 Лекция 3.

3.1 Интегрирующий множитель.

def: Функция $u : G \to \mathbb{R}$ называются **интегрирующим множителем** уравнения $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ в области G, если $\mu(x, y) \neq 0$ для любой точки $(x, y) \in G$ и уравнение

$$\mu(x, y)P(x, y)dx + \mu(x, y)Q(x, y)dy = 0$$

является уравнением в полных дифференциалах.

Замечание: мы хотим получить УПД и чтобы его получить, мы хотим, чтобы $P'_y = Q'_x$, для этого добавляем множитель μ.

def: Пусть $p_2(x) \neq 0$ при $x \in (a, b), q_1(y) \neq 0$ при $y \in (c, d)$. Тогда функция

$$\mu(x, y) = \frac{1}{p_2(x)q_1(y)}$$

является интегрирующем множителем для уравнения:

$$p_1(x)q_1(y)dx + p_2(x)q_2(y)dy = 0$$

Такое уравнение называются уравнением с **разделяющимися переменными**.

Условие для интегрирующего множества: Пусть $P, Q \in C^1(G)$. Определим условия для интегрирующего множителя из $\mathbb{C}^1(G)$. Необходимо:

$$\mu'_y P - \mu'_x Q = (Q'_x - P'_y)\mu$$

3.2 Линейное уравнение.

def: Дифференциальное уравнение:

$$y' = p(x)y + q(x)$$

называется **линейным уравнением** первого порядка.

def: Линейное уравнение называется **однородным**, если $q = 0$, иначе уравнение называется **неоднородным**.

Приведение линейного уравнения 1 порядка к УПД:

$$y' = p(x)y + q(x)$$

Заменим y' на $\dfrac{dy}{dx}$:

$$(py + q)dx - dy = 0$$

Условие $P'_y = Q'_x$ здесь не выполнено. Посмотрим на условие для интегрирующего множества. Оно принимает вид:

$$\mu'_y(pu + q) + \mu'_x = -p\mu$$

Попробуем найти интегрирующий множитель, зависящий только от переменной x. В этом случае получим:

$$\mu' = -p\mu$$

Одно из его решений:

$$\mu = e^{-\int p}$$

Откуда мы можем решать его, как уравнение в дифференциалах

3.3 Уравнение с разделяющимися переменными.

$$p_1(x)q_1(y)dx + p_2(x)q_2(y)dy = 0$$

Проблема в том, что умножая на интегрирующий множитель $\dfrac{1}{q_1(y)p_2(x)}$ возможно лишь в области, где знаменатель не обращается в ноль. Случай $q_1(y) = 0$ и $p_2(x) = 0$ требуют особого рассмотрения.

Разбив всю область поиска интегральных кривых на необходимое количество частей, нужно рассмотреть исходное уравнение на каждой части отдельно. На каждой такой подобласти его можно разделить на $q_1(y)p_2(x)$ не опасаясь.

Остается изучить поведение найденных интегральных кривых вблизи границы и мы победим.

3.4 Линейное уравнение первого порядка

Теорема (общее решение ЛУ 1-го порядка)

Пусть $E = \langle a, b\rangle, p, q \in C(E), \mu = e^{-\int p}$. Тогда общее решение имеет вид:

$$y = \frac{C + \int q\mu}{\mu}, C \in \mathbb{R}$$

Доказательство:

После приведения к УПД, получаем:

$$y'e^{-\int p} - pye^{-\int p} = qe^{-\int p}$$

Левая часть - производная y и $e^{-\int p}$. Получаем:

$$(ye^{-\int p})' = qe^{-\int p}$$

Следовательно:

$$ye^{-\int p} = C + \int qe^{-\int p}$$

Q.E.D.

Следствие (Общее решение ЛОУ первого порядка):

Пусть $E = \langle a, b\rangle$, $p \in C(E)$. Тогда уравнение

$$y' = p(x)y$$

имеет вид:

$$y = Ce^{\int p}, C \in \mathbb{R}, x \in E$$

Метод Лагранжа.

1. Решим вспомогательное уравнение $y' = p(x)y$
2. Заменим в решении C на $C(x)$
3. Подставим полученное φ в исходное уравнение и найдем $C(x)$
4. Победа!

4 Лекция 4.

4.1 Замена переменных дифференциальном уравнения.

$x = p(u, v), y = q(u, v)$

Цель такой замены — упростить и свести к известному виду.

Дифференциалы прежних переменных преобразуются по формулам:

$$dx = p'_u du + p'_v dv \quad dy = q'_u du + q'_v dv$$

Теорема (замена переменных в ДУ)

Пусть G - область в $\mathbb{R}^2_{x,y}$. $\Phi : G \subset \mathbb{R}^2_{x,y} \to \mathbb{R}^2_{u,v}$ — диффеоморфизм, $F : G \to \mathbb{R}^2$.

$$H = (F \circ \Phi^{-1})(\Phi^{-1})'$$

Тогда отображение Φ устанавливает взаимно-однозначное соответствие между интегральными кривыми уравнений:

$$F(r)dr = 0, r \in G$$

$$H(s)ds = 0, s \in \Phi(G)$$

Замечание: Это имеет такой смысл: у вас есть диффеоморфизм между двумя областями — ваша функция замены переменных из $\Phi : x, y \to u, v$ мы берем обратную и производную и выигрываем

4.2 Однородное уравнение

def: Функция $F(x.y)$ называется **однородной функцией** степени α, если при всех допустимых t, x, y верно равенство:

$$F(tx, ty) = t^\alpha F(x, y)$$

def: Пусть P, Q — однородные функции одинаковой степени. Тогда уравнение вида:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

называется **однородным уравнением**.

Давайте сведем однородно уравнение к уравнением с разделяющимися переменными.

1. Сделаем замену $x = u, y = uv$

   Замечание: поскольку переменные u и x совпадают, то переменную u обычно не вводят, а полагают:

   $$y = xv$$

   При этом $dy = vdx + xdv$

2. Подставим замену и получим:

$$P(x, xv)dx + Q(x, xv)(vdx + xdv) = 0$$

$$x^\alpha P(1, v)dx + x^\alpha Q(1, v)(vdx + xdv) = 0$$

$$(P(1, v) + Q(1, v)v)dx + Q(1, v)xdv = 0$$

Уравнения, сводящиеся к однородному

Уравнения в нормальной форме:

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

сводится к однородному при переходе к дифференциалам.

Более общее уравнение

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$$

сводится к однородному, если сдвинуть систему координат в точку пересечения прямых $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2 = 0$. То есть если сделать замену:

$$x = x_0 + u, \quad y = y_0 + v$$

Геом. свойство однородного уравнения — гомотетия относительно начала координат любую интегральную кривую однородного уравнения переводит в другую его интегральную кривую.

4.3 Уравнение Бернулли

<u>def:</u> Уравнением Бернулли называют уравнение вида:

$$y' = p(x)y = +q(x)y^\alpha$$

где $a \notin \{0, 1\}, a \in \mathbb{R}$

Давайте научимся его решать:

Возьмем $z = y^{1-\alpha}$

Тогда $z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$, откуда

$$y^{-\alpha}y' = \frac{z'}{1-\alpha}$$

Поделим левую часть исходного уравнения на y^α, подставляя $z = y^{1-\alpha}$, а также умножая обе части на $(1-\alpha)$ получим:

$$z' = (1-\alpha)p(x)z + (1-\alpha)q(x)$$

Таким образом замена $z = y^{1-\alpha}$ сводит уравнение Бернулли к линейному, а его мы уже умеем решать

Уравнение Риккати

<u>**def:**</u> **Уравнением Риккати** называют уравнение вида:

$$y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x)$$

Чтобы такое решить, надо решить правое уравнение относительное y и сделать подстановку $y = z + \varphi$. Так оно сведется к уравнению Бернулли и победится.

<u>Теорема (Луивилль)</u>

Уравнение

$$y' = y^2 + x^\alpha$$

интегрируется в квадратурах, если и только если $\alpha/(2\alpha + 4) \in \mathbb{Z}$ или $\alpha = -2$

5 Лекция 5.

5.1 Уравнение высшего порядка.

def: **Дифференциальным уравнением n-го порядка** называют уравнение вида

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

def: Функция $\varphi : E \to \mathbb{R}$ - **решение уравнения**, если $E = \langle a, b \rangle$ и

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)) \equiv 0 \text{ на } E.$$

def: **Каноничным уравнением** будем называть уравнение

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}),$$

разрешенное относительно старшей производной.

def: **Задачей Коши** для канонического уравнения называют задачу нахождения его решения, удовлетворяющего начальным условиям:

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

Замечание: в данном случае стоит воспринимать $y_0^{(i)}$ как значение, а не как производную от числа.

5.2 Методы понижения порядка

1. **Уравнения вида** $y^{(n)} = f(x)$

   Хм хм, что же делать? Возьмем n раз интеграл - победили.

2. **Уравнение без искомой функции:** Пусть у нас есть уравнение:

   $$F(x, y'^{(k)}, \dots y^{(n)}) = 0$$

   Тогда стоит сделать замену $z(x) = y^{(k)}$

3. **Уравнение без независимой переменной**

   Пусть у нас есть уравнение:
   $$F(y, y', y'', \dots y^{(n)}) = 0$$
   Сделаем подстановку:
   $$y'(x) = z(y(x))$$

4. **Уравнение, однородное относительно искомой функции и ее производных**

   Пусть при любом допустимом значении t:

   $$F(x, ty, ty', \dots, ty^{(n)}) = t^m F(x, y, y', \dots, y^{(n)})$$

   Тогда порядок уравнения понижается при помощи замену $z = \dfrac{y'}{y}$

5. **Уравнение в точных производных**

   Если наша функция это производная какой-то другой по переменной x, то есть:

   $$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = \frac{d}{dx}\Phi(x, y(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$$

   то мы можем понизить порядок на 1 вниз решая:

   $$\Phi(x, y(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) = C$$

5.3 Нормальная система

def: **Нормальной системой** дифференциальных уравнений порядка n называется система вида

$$\begin{cases} r_1' = f_1(t, r_1, \dots, r_n) \\ \dots \\ r_n' = f_n(t, r_1, \dots, r_n) \end{cases}$$

Если положить

$$r = \begin{pmatrix} r_1 \\ \dots \\ r_n \end{pmatrix}, f(t, r) = \begin{pmatrix} f_1(t, r) \\ \dots \\ f_n(t, r) \end{pmatrix},$$

то система компактно в виде одного n-мерного уравнения

$$r' = f(t, r).$$

def: Вектор-функция $\varphi : E \to \mathbb{R}^n$ - **решение системы**, если $E = \langle a, b \rangle$ и $\varphi'(t) \equiv f(t, \varphi(t))$ на E.

def: **Интегральной кривой** системы называют график, соответствующий ее решению (что не удивительно)

В отличие от одномерного случая, интегральная кривая - это график вектор-функции, расположенный в (n+1)-мерном пространстве.

def: **Задачей Коши** называется аналогичная уравнению высшему порядку конструкция

def: Зададим отображение Λ_n формулой:

$$\Lambda_n \varphi = (\varphi, \varphi', \dots, \varphi^{(n-1)})^T$$

Индекс n будет иногда опускаться.

Лемма. (о системе равносильной уравнению)

Отображение Λ_n - биекция между решениями уравнения

$$y^{(n)} = f(t, y, \dots, y^{(n-1)})$$

и решениями системы:

$$r' = \begin{vmatrix} r_2 \\ r_3 \\ \dots \\ r_n \\ f(t, r) \end{vmatrix}$$

Замечание: Это лемма очевидна из того, что мы просто сопоставляем каждой производной отдельную функцию и пишем уравнение для этой производной по типу $(y')' = y'' \Leftrightarrow r_1' = r_2$

def: Такую систему будем называть **системой равносильной уравнению**.

6 Лекция 6.

6.1 Вспомогательные (Помогите) следствия

Замечание: Через r_i обозначаем компоненты вектора $r \in \mathbb{R}^n$. Векторы из $\mathbb{R}^n$ нумеруются верхними индексами. Через A_i обозначаем строки, A^j - столбцы, A_i^j - компоненты матрицы A.

def: Пусть $r \in \mathbb{R}^n$. Тогда $|r| := \max\limits_{i \in [1:n]} |r_i|$.

def: Пусть $A \in \mathrm{Mat}_{n \times m}(\mathbb{R})$. Тогда $|A| := \max\limits_{i \in [1:n], j \in [1:m]} |A_i^j|$.

Лемма.

Пусть $f \in C([a,b] \to \mathbb{R}^n)$. Тогда

$$\left| \int_a^b f(\tau) d\tau \right| \le \int_a^b |f(\tau)| d\tau.$$

Доказательство.

Принимая во внимание определение нормы, имеем:

$$\left| \int_a^b f(\tau) d\tau \right| = \max_i \left| \int_a^b f_i(\tau) d\tau \right| \le \max_i \int_a^b |f_i(\tau)| d\tau \le \max_i \int_a^b \max_j |f_j(\tau)| d\tau = \max_i \int_a^b |f(\tau)| d\tau =$$

$$= \int_a^b |f(\tau)| d\tau.$$

Q.E.D.

Лемма.

Пусть $A \in \mathrm{Mat}_{m \times n}(\mathbb{R})$, $B \in \mathrm{Mat}_{n \times l}(\mathbb{R})$. Тогда

$$|AB| \le n|A||B|.$$

Доказательство.

Пусть $AB = C$. Тогда

$$|C_i^j| = \left| \sum_{k=1}^n A_i^k B_k^j \right| \le \sum_{k=1}^n \left| A_i^k B_k^j \right| \le \sum_{k=1}^n |A||B| = n|A||B|.$$

Q.E.D.

def: Функция $f : G \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ удовлетворяет **условию Липшица** на множестве G, если найдется $L \in \mathbb{R}$ (**константа Липшица**), такое что для любых точек $x^1, x^2 \in G$ выполнено

$$|f(x^2) - f(x^1)| \le L|x^2 - x^1|.$$

Обозначение: $f \in \mathrm{Lip}\ G$.

def: Функция $f : G \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ удовлетворяет **условию Липшица локально** на множестве G, если для любой точки $x \in G$ можно указать её окрестность $U(x)$, такую что $f \in \mathrm{Lip}(U(x) \cap G)$. Обозначение: $f \in \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}} G$.

Пример. Если $f \in C^1[a, b]$, то $f \in \mathrm{Lip}[a, b]$. Обратное неверно.

def: Функция $f : G \subset \mathbb{R}^{n+1}_{t,r} \to \mathbb{R}^n$ удовлетворяет **условию Липшица по** r (равномерно по t) на множестве G, если найдётся $L \in \mathbb{R}$, такое что для любых точек (t, r^1), $(t, r^2) \in G$ справедливо неравенство

$$|f(t, r^2) - f(t, r^1)| \le L|r^2 - r^1|.$$

Обозначение: $f \in \mathrm{Lip}_r G$.

def: Функция $f : G \subset \mathbb{R}^{n+1}_t \to \mathbb{R}^n$ удовлетворяет **условию Липшица по r локально** на множестве G, если для любой точки $x \in G$ можно указать её окрестность $U(x)$, такую что $f \in \mathrm{Lip}_r(U(x) \cap G)$. Обозначение: $f \in \mathrm{Lip}_{r,\mathrm{loc}} G$.

Лемма (достаточное условие локальной липшицевости).

Пусть $G \subset \mathbb{R}^{n+1}_{t,r}$ - область, $f \in C(G \to \mathbb{R}^n)$, $f'_r \in \mathrm{Mat}_n(C(G))$. Тогда $f \in \mathrm{Lip}_{r,\mathrm{loc}} G$.

Доказательство.

Возьмём произвольную точку из области G и построим открытый шар $B \subset G$ с центром в этой точке. Пусть (t, r^1), $(t, r^2) \in B$. В силу выпуклости шара B будет $(t, r^1 + s(r^2 - r^1)) \in B$ при $s \in [0, 1]$. Положим

$$g(s) = f(t, r^1 + s(r^2 - r^1)).$$

Тогда

$$f(t, r^2) - f(t, r^1) = g(1) - g(0) = \int_0^1 g'(s) ds = \int_0^1 f'_r \cdot r'_s ds = \int_0^1 f'_r(t, r^1 + s(r^2 - r^1)) \cdot (r^2 - r^1) ds.$$

Принимая во внимание леммы, получаем

$$|f(t, r^2) - f(t, r^1)| \le \int_0^1 n|f'_r(t, r^1 + s(r^2 - r^1))|\, |r^2 - r^1| ds \le n \sup_{x \in \bar{B}} |f'_r(x)| \cdot |r^2 - r^1|.$$

Следовательно, $f \in \mathrm{Lip}_r B$. По определению будет $f \in \mathrm{Lip}_{r,\mathrm{loc}} G$.

Q.E.D.

Лемма (достаточное условие глобальной липшицевости).

Пусть область $G \subset \mathbb{R}^{n+1}_{t,r}$, $f \in C(G \to \mathbb{R}^n) \bigcap \mathrm{Lip}_{r,\mathrm{loc}}$, компакт $K \subset G$. Тогда $f \in \mathrm{Lip}_r K$.

Доказательство.

Докажем методом от противного. Пусть $f \notin \mathrm{Lip}_r K$. Тогда для любого $N \in \mathbb{N}$ найдётся пара точек (t_N, r^N), $(t_N, \tilde{r}^N) \in K$, для которых верно неравенство

$$|f(t_N, r^N) - f(t_N, \tilde{r}^N)| > N|r^N - \tilde{r}^N|.$$

Поскольку K - компакт, то из последовательности $\{(t_N, r^N)\}$ можно выбрать подпоследовательность с номерами $\{N_k\}$, сходящуюся к некоторой точке $(t, r) \in K$. Затем из последовательности $\{(t_{N_k}, \tilde{r}_{N_k})\}$ выберем подпоследовательность с номерами $\{N_{k_l}\}$, сходящуюся к $(t, \tilde{r})$. Пусть $\nu = \{N_{k_l} | l \in \mathbb{N}\}$.

Возможны два случая: $r = \tilde{r}$ и $r \neq \tilde{r}$. Рассмотрим сначала первый.

По условию $f \in \mathrm{Lip}_{r,\mathrm{loc}} G$, значит, найдётся окрестность U точки (t, r), в которой $f \in \mathrm{Lip}_r U$, то есть существует постоянная L, для которой

$$|f(\tau, \rho) - f(\tau, \tilde{\rho})| \leq L|\rho - \tilde{\rho}|$$

при любых (τ, ρ), $(\tau, \tilde{\rho}) \in U$. Выберем номер $N \in \nu$ так, чтобы $N > L$ и (t_N, r^N), $(t_N, \tilde{r}^N) \in U$, и положим $\tau = t_N$, $\rho = r^N$, $\tilde{\rho} = \tilde{r}^N$. Тогда из неравенства следует

$$|f(\tau, \rho) - f(\tau, \tilde{\rho})| > N|\rho - \tilde{\rho}| \geq L|\rho - \tilde{\rho}|,$$

что противоречит предыдущему неравенству.

Пусть теперь $r \neq \tilde{r}$. В неравенстве перейдём к пределу при $\nu \ni N \to \infty$. В силу непрерывности функции f получаем

$$|f(t, r) - f(t, \tilde{r})| \geq \infty,$$

что неверно.

Q.E.D.

<u>**def:**</u> Пусть $f : G \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$. Функция $\varphi : E \to \mathbb{R}^n$ - <u>**решение на E интегрального уравнения**</u>

$$r(t) = r^0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, r(\tau)) d\tau,$$

если $E = \langle a, b \rangle$ и $\varphi(t) \equiv r^0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \varphi(\tau)) d\tau$ на E, где интеграл понимается в смысле Римана.

<u>**Лемма (о равносильном интегральном уравнении).**</u>

Пусть $E = \langle a, b \rangle$, $t_0 \in E$, G - область в $\mathbb{R}^{n+1}$, $(t_0, r^0) \in G$, $f \in C(G \to \mathbb{R}^n)$. Тогда φ - решение на E задачи Коши

$$r' = f(t, r), \quad r(t_0) = r^0$$

если и только если φ - решение на E уравнения

$$r(t) = r^0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, r(\tau)) d\tau$$

Доказательство:

Пусть φ - решение на E. Интегрируя равенство $\varphi'(\tau) = f(\tau, \varphi(\tau))$ от t_0 до $t \in E$, обе части которого - непрерывные функции, имеем

$$\varphi(t) - \varphi(t_0) = \int_{t_0}^{t} f(\tau, \varphi(\tau)) d\tau.$$

Поскольку $\varphi(t_0) = r^0$, то функция φ - решение уравнения по определению.

Докажем обратное. Пусть φ - решение (3) на E. Тогда из равенства

$$\varphi(t) = r^0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \varphi(\tau))d\tau(4)$$

следует, что $\varphi \in C(E)$. Отсюда и из (4) вытекает дифференцируемость φ. Дифференцируя (4) по t, получаем: $\varphi'(t) \equiv f(t, \varphi(t))$. Кроме того, имеем $\varphi(t_0) = r^0$. Таким образом, φ - решение задачи по определению.

Q.E.D.

Лемма (о гладкой стыковке решений).

Пусть область $G \subset \mathbb{R}^{n+1}_{t,r}$, $f \in C(G \to \mathbb{R}^n)$, $(t_0, r^0) \in G$, уравнение $r' = f(t, r)$ имеет решения: φ_- на (a, t_0), φ_+ на (t_0, b). Кроме того, $\varphi_-(t_0-) = \varphi_+(t_0+) = r^0$. Тогда функция

$$\varphi(t) = \begin{cases} \varphi_-(t), & \text{если } t \in (a, t_0), \\ r^0, & \text{если } t = t_0, \\ \varphi_+(t), & \text{если } t \in (t_0, b) \end{cases}$$

является решением того же уравнения на (a, b).

Доказательство.

Пусть $t, t_- \in (a, t_0)$. По прошлой лемме

$$\varphi_-(t) = \varphi_-(t_-) + \int_{t_-}^{t} f(\tau, \varphi_-(\tau))d\tau.$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $t_- \to t_0$ и замечая, что $\varphi_- = \varphi$ для точек из отрезка $\overline{t, t_-}$, получаем

$$\varphi(t) = r^0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \varphi(\tau))d\tau.(5)$$

Поступая аналогично для точек $t, t_+ \in (t_0, b)$, при $t_+ \to t_0$ приходим к равенству (5).

Таким образом, равенство (5) выполнено для всех $t \in (a, b)$. Остаётся применить прошлую лемму.

Q.E.D.

Лемма (Гронуолл).

Пусть $D = \langle a, b \rangle$, $\varphi \in C(D)$, $t_0 \in D$, $\lambda, \mu \geq 0$, при любом $t \in D$ верно двойное неравенство

$$0 \leq \varphi(t) \leq \lambda + \left| \mu \int_{t_0}^{t} \varphi(\tau)d\tau \right|.$$

Тогда для любого $t \in D$

$$\varphi(t) \leq \lambda e^{\mu|t-t_0|}.$$

Доказательство:

Рассмотрим случай $t \geq t_0$ (при $t < t_0$ доказательство аналогично). Предположим, что $\lambda > 0$, и определим функцию

$$v(t) = \lambda + \mu \int_{t_0}^{t} \varphi(\tau) d\tau.$$

Имеем $v(t) > 0$, $v'(t) = \mu\varphi(t) \leq \mu v(t)$. Отсюда

$$\frac{v'(t)}{v(t)} \leq \mu.$$

Интегрируя это неравенство по отрезку $[t_0, t]$, получаем

$$v(t) \leq v(t_0) e^{\mu(t-t_0)}.$$

Следовательно,

$$\varphi(t) \leq v(t) \leq v(t_0) e^{\mu(t-t_0)} = \lambda e^{\mu(t-t_0)}.$$

Если же $\lambda = 0$, то при любом $\varepsilon > 0$ верно

$$\varphi(t) \leq \mu \int_{t_0}^{t} \varphi(\tau) d\tau \leq \varepsilon + \mu \int_{t_0}^{t} \varphi(\tau) d\tau.$$

По уже доказанному имеем

$$\varphi(t) \leq \varepsilon e^{\mu(t-t_0)}.$$

Переходя здесь к пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем $\varphi(t) \leq 0$. Значит, лемма верна и при $\lambda = 0$.

Q.E.D.

7 Информация о курсе.

Поток — y2024.
Группы M3138-M3139.
Преподаватель — Бабушкин Максим Владимирович.