

Дифференциальные уравнения.

Чепелин Вячеслав

Содержание

1	Лекция 1.	2
1.1	Основные определения.2
1.2	Уравнение в дифференциалах.2
2	Лекция 2.	4
2.1	Геом. смысл дифференциальных уравнений4
2.2	Уравнение в полных дифференциалах.4
3	Лекция 3.	6
3.1	Интегрирующий множитель.6
3.2	Линейное уравнение.6
3.3	Уравнение с разделяющимися переменными.7
3.4	Линейное уравнение первого порядка7
4	Информация о курсе.	8

1 Лекция 1.

1.1 Основные определения.

def: Пусть $f : G \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, нормальное уравнение :

$$y' = f(x, y)$$

def: Область определения нормального уравнения — область определения его правой части. Обозначение $dom = G$.

Примеры уравнений и соответствующих областей определения:

1. $y' = x\sqrt{y}$, $G = \mathbb{R} \times [0, +\infty)$

2. $y' = y$, $G = \mathbb{R}^2$

3. $y' = -\frac{1}{x^2}$, $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \neq 0\}$

def: Функция $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$ - решение уравнения, если $E = \langle a, b \rangle$:

$$\varphi'(x) \equiv f(x, \varphi(x))$$

Соглашение: На протяжении курса, будем считать, что \forall предиката $P(x)$, который не определен при $x = x_0$, считаем, что $P(x_0) = 0$ - то есть ложно.

Замечание: Данное зам. помогает не требовать от φ дифференцируемости на всем E .

Следствие: Учитывая соглашение любое решение уравнения — дифференцируемая функция.

Следствие: Если f - непр. функция, то любое решение нормального уравнения непрерывно дифференцируемо.

Замечание: В нормальном уравнении символы x , y и y' - три различные независимые переменные. Пока не произведена подстановка функции, буква y никак не связана с x , а y' не олицетворяет производную.

def: Интегральная кривая уравнения — график его решения.

def: Общее решение уравнения — множество всех его решений.

def: Общим интегралом уравнения будем называть соотношение вида:

$$\Phi(x, y, C) = 0$$

которое неявно задает некоторые уравнения при некоторых значениях вещественного параметра C .

Замечание: Общий интеграл не всегда описывает все решения уравнения.

1.2 Уравнение в дифференциалах.

def: Пусть $P, Q : G \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, уравнение в дифференциалах:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

Замечание: Переменные x, y входят равноправно, поэтому его решением называется не только функция $y = \varphi(x)$, но и $x = \psi(y)$

def: Точка $(x_0, y_0) \in G$ называется **особой точкой** уравнения, если $P(x_0, y_0) = Q(x_0, y_0) = 0$

def: Пусть $T = \langle a, b \rangle$, вектор-функции $(u, v) \in C^1(T \rightarrow \mathbb{R}^2)$ — **параметрические** решение уравнения, если:

1. $(u'(t), v'(t)) \neq (0, 0)$ для всех $t \in T$
2. $P(u(t), v(t))u'(t) + Q(u(t), v(t))v'(t) \equiv 0$ на T

def: Интегральной кривой уравнения называют годограф (множество значений) ее параметрического уравнения.

Утверждение: (Связь между обычными и параметрическими решениями).

Пусть $P, Q \in C(G)$, множество G не содержит особых точек уравнения, тогда:

1. Если $y = \varphi(x)$ — решение уравнения на E , то $r(t) = (t, \varphi(t))$ - параметрическое решение уравнения на E .
2. Если $r = (u, v)$ — параметрическое решение уравнения на T , то для любого $t_0 \in T$, найдется окрестность $U(t_0)$, такая что функции $u(t)$ и $v(t)$ при $t \in U(t_0) \cap T$ параметрически задают решение уравнения.

def: Два дифференциальных уравнения **эквивалентны** (или **равносильны**) на множестве G , если они имеют одинаковое семейство интегральных кривых на множестве G .

Теорема. Пусть $f \in C(G \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R})$. Тогда уравнение:

$$y' = f(x, y)$$

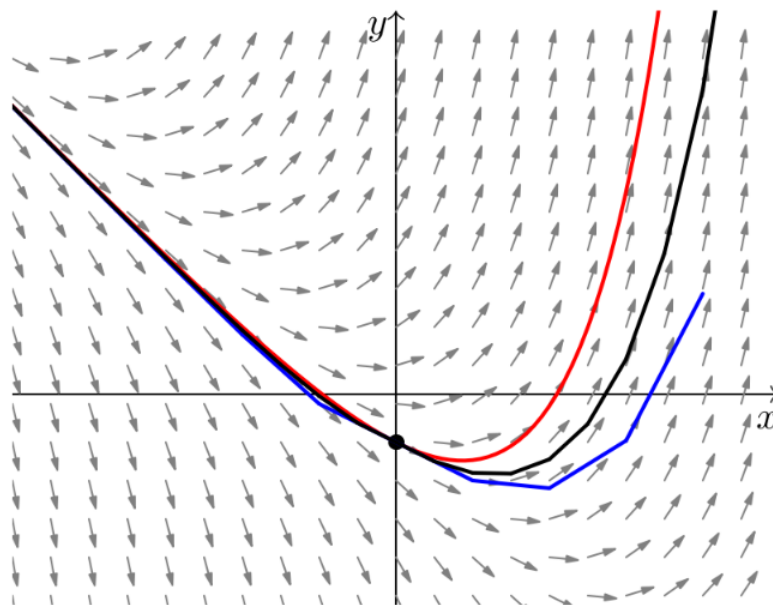
эквивалентно на множестве G уравнению:

$$dy = f(x, y)dx$$

2 Лекция 2.

2.1 Геом. смысл дифференциальных уравнений

def: Если каждой точке (x, y) области определения функции f сопоставить вектор, направленный под углом $\arctan f(x, y)$, то получится поле направлений $f(x, y)$.



Рассмотрим один способ построить приближение к интегральной кривой. Взяв некоторую точку (x_0, y_0) в качестве начальной, будем двигаться по направлению поля в точке (x_0, y_0) до точки с абсциссой $x_1 = x_0 + h$, ординату которой обозначим через y_1 . Сделаем то же самое, что много раз и получим ломаную Эйлера.

def: Изоклиной I_k уравнения называют множество уровня функции f :

$$I_k = \{(x, y) \in \text{dom } f \mid f(x, y) = k\}$$

TODO: метод изоклин

2.2 Уравнение в полных дифференциалах.

def: Уравнение

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

называют **уравнением в полных дифференциалах** в области G , если для него существует **потенциал**, то есть такая дифференцируемая функция u , что для всех $x, y \in G$:

$$du = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

Теорема (общее решение УПД)

Пусть $G \subset \mathbb{R}^2$ — область, функция $u : G \rightarrow \mathbb{R}$ дифференцируема, $u'_x = P$, $u'_y = Q$. Тогда функция $y = \varphi(x)$ — решение уравнения УПД на промежутке E , если и только если она дифференцируема на E и при некотором $C \in \mathbb{R}$ неявно задана уравнением:

$$u(x, y) = C$$

Доказательство:

Достаточность. Дифференцируя равенство $u(x, \varphi(x)) = C$ по переменной $x \in E$, находим:

$$u'_x(x, \varphi(x)) + u'_y(x, \varphi(x))\varphi'_x \equiv 0$$

Так как $u'_x = P$, $u'_y = Q$, то определению функция φ является решением

Необходимость. На промежутке E верно тождество

$$P(x, \varphi(x)) + Q(x, \varphi(x))\varphi'(x) \equiv 0$$

Левая часть этого равенства совпадает с производной функции u по переменной x .

Q.E.D.

def: Уравнение

$$P(x)dx + Q(y)dy = 0$$

называют уравнение с разделенными переменными.

Следствие (общее решение УРП):

Пусть $P \in C(a, b)$, $Q \in C(c, d)$. Тогда функция $y = \varphi(x)$ — решение уравнения на промежутке E , если и только если она дифференцируема на E и при некотором $C \in \mathbb{R}$ и при некотором $C \in \mathbb{R}$ неявно задана уравнением:

$$\int P(x)dx + \int Q(y)dy = C$$

Доказательство: подставим и проверим.

Утверждение (необходимое условие УПД).

Пусть потенциал $u \in C^2(G)$. Тогда:

$$P'_y = Q'_x$$

Теорема (признак УПД)

Пусть $G \subset \mathbb{R}^2$ — односвязная область $P, Q \in C^1(G)$, $P'_y = Q'_x$, $(x_0, y_0) \in G$. Тогда уравнение в полных дифференциалах в области G с потенциалом:

$$u(\bar{x}, \bar{y}) = \int_{\gamma(\bar{x}, \bar{y})} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

3 Лекция 3.

3.1 Интегрирующий множитель.

def: Функция $u : G \rightarrow \mathbb{R}$ называется интегрирующим множителем уравнения $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ в области G , если $\mu(x, y) \neq 0$ для любой точки $(x, y) \in G$ и уравнение

$$\mu(x, y)P(x, y)dx + \mu(x, y)Q(x, y)dy = 0$$

является уравнением в полных дифференциалах.

Замечание: мы хотим получить УПД и чтобы его получить, мы хотим, чтобы $P'_y = Q'_x$, для этого добавляем множитель μ .

def: Пусть $p_2(x) \neq 0$ при $x \in (a, b)$, $q_1(y) \neq 0$ при $y \in (c, d)$. Тогда функция

$$\mu(x, y) = \frac{1}{p_2(x)q_1(y)}$$

является интегрирующим множителем для уравнения:

$$p_1(x)q_1(y)dx + p_2(x)q_2(y)dy = 0$$

Такое уравнение называется уравнением с разделяющимися переменными.

Условие для интегрирующего множества: Пусть $P, Q \in C^1(G)$. Определим условия для интегрирующего множителя из $\mathbb{C}^1(G)$. Необходимо:

$$\mu'_y P - \mu'_x Q = (Q'_x - P'_y)\mu$$

3.2 Линейное уравнение.

def: Дифференциальное уравнение:

$$y' = p(x)y + q(x)$$

называется линейным уравнением первого порядка.

def: Линейное уравнение называется однородным, если $q = 0$, иначе уравнение называется неоднородным.

Приведение линейного уравнения 1 порядка к УПД:

$$y' = p(x)y + q(x)$$

Заменим y' на $\frac{dy}{dx}$:

$$(py + q)dx - dy = 0$$

Условие $P'_y = Q'_x$ здесь не выполнено. Посмотрим на условие для интегрирующего множества. Оно принимает вид:

$$\mu'_y (py + q) + \mu'_x = -p\mu$$

Попробуем найти интегрирующий множитель, зависящий только от переменной x . В этом случае получим:

$$\mu' = -p\mu$$

Одно из его решений:

$$\mu = e^{-\int p}$$

Откуда мы можем решать его, как уравнение в дифференциалах

3.3 Уравнение с разделяющимися переменными.

$$p_1(x)q_1(y)dx + p_2(x)q_2(y)dy = 0$$

Проблема в том, что умножая на интегрирующий множитель $\frac{1}{q_1(y)p_2(x)}$ возможно лишь в области, где знаменатель не обращается в ноль. Случай $q_1(y) = 0$ и $p_2(x) = 0$ требуют особого рассмотрения.

Разбив всю область поиска интегральных кривых на необходимое количество частей, нужно рассмотреть исходное уравнение на каждой части отдельно. На каждой такой подобласти его можно разделить на $q_1(y)p_2(x)$ не опасаясь.

Остается изучить поведение найденных интегральных кривых вблизи границы и мы победим.

3.4 Линейное уравнение первого порядка

Теорема (общее решение ЛУ 1-го порядка)

Пусть $E = \langle a, b \rangle$, $p, q \in C(E)$, $\mu = e^{-\int p}$. Тогда общее решение имеет вид:

$$y = \frac{C + \int q\mu}{\mu}, C \in \mathbb{R}$$

Доказательство:

После приведения к УПД, получаем:

$$y'e^{-\int p} - pye^{-\int p} = qe^{-\int p}$$

Левая часть - производная y и $e^{-\int p}$. Получаем:

$$(ye^{-\int p})' = qe^{-\int p}$$

Следовательно:

$$ye^{-\int p} = C + \int qe^{-\int p}$$

Q.E.D.

Следствие (Общее решение ЛОУ первого порядка):

Пусть $E = \langle a, b \rangle$, $p \in C(E)$. Тогда уравнение

$$y' = p(x)y$$

имеет вид:

$$y = Ce^{\int p}, C \in \mathbb{R}, x \in E$$

Метод Лагранжа.

1. Решим вспомогательное уравнение $y' = p(x)y$
2. Заменим в решении C на $C(x)$
3. Подставим полученное φ в исходное уравнение и найдем $C(x)$
4. Победа!

4 Информация о курсе.

Поток — у2024.

Группы М3138-М3139.

Преподаватель — Бабушкин Максим Владимирович.

