Дискретная математика. Третий семестр

Автор: Вячеслав Чепелин

Содержание

1. Лекция 1

1.1. Основные определения для неориентированных графов

Определение. Неориентированный граф
Неориентированный граф— пара (V, E), где V — множество вершин, а $E \subset (V \times V/_{\sim}) \setminus \{(u, u)\}$ — множество рёбер, где отношение эквивалентности задаётся как $(u, v) \sim (v, u)$.

Определение. Путь
Путь — последовательность $P = u_0 e_1 u_1 e_2 ... e_k u_k$, где $e_i = u_{\{i-1\}} u_i$.

Число $k = len(P) = |P|$ называется **длиной пути**.

Простой путь — путь, посещающий каждую вершину не более одного раза.

Рёберно-простой путь — путь, посещающий каждое ребро не более одного раза.

Циклический путь — путь, у которого $u_0 = u_k$.

Рассмотрим замкнутый путь (циклический маршрут) в графе:

$$P = u_0 e_1 u_1 e_2 u_2 ... u_{\{k-1\}} e_k u_k,$$

где $u_k = u_0$ (путь начинается и заканчивается в одной вершине).

Циклический сдвиг пути: для любого $0 \leq i \leq k$ определим сдвинутый путь:

$$Q_i = u_i e_{\{i+1\}} u_{\{i+1\}} ... e_k u_k e_1 u_1 ... e_i u_i.$$

Отражение (обратный обход) пути P задаётся как:

$$P^{\{-1\}} = u_k e_k u_{\{k-1\}} ... e_1 u_0.$$

Два пути P и P' называются **эквивалентными** ($P \sim P'$), если:
- P' является циклическим сдвигом P, или
- P' является отражением P (с точностью до циклического сдвига).

Определение. Цикл
Циклом называется класс эквивалентности замкнутых путей относительно $\sim$, то есть:

$$\text{Цикл} = [P]_{\{\sim\}} = \{Q \mid Q \sim P\}.$$

Дополнительно требуется, чтобы в цикле не было повторного прохождения одного и того же ребра в противоположных направлениях.

Граф без циклов называется **ациклическим**.

Обозначение: $u \rightsquigarrow v$ означает, что вершины u и v соединены путём.

Теорема.
В неориентированном графе отношение «связаны путём» является отношением эквивалентности.

Классы эквивалентности этого отношения называются **компонентами связности**.

Вершины u и v называются **рёберно двусвязными**, если существуют два рёберно непересекающихся пути из u в v.

Теорема.
Отношение рёберной двусвязности является отношением эквивалентности.

Доказательство:
1. Рефлексивность: возьмём два одинаковых пути из вершины в себя. Они не пересекаются по рёбрам. (Довольно забавно об этом думать)
2. Симметричность: очевидно.
3. Транзитивность: пусть u двусвязана с v, а v — с w. Рассмотрим p_1 и p_2 — два пути из u в v. Возьмём w и будем из неё идти в сторону v по путям q_1 и q_2.
   1. Если дошли без пересечения с p_1 или p_2 — победа.
   2. Если по одному пути пересеклись с p_1, а по другому — с p_2 — победа.
   3. Если пришли на один и тот же путь, то от одного из q_1 и q_2 пойдём в сторону u, а от другого — в сторону v. Из второго пойдём из v в u по второму пути между ними. Победа.

   Советуем порисовать для понимания. Тут вполне тривиальное доказательство.

Q.E.D.

Два ребра ab и cd являются **вершинно-двусвязными**, если существует два вершинно-непересекающихся пути, соединяющих их концы.

Точкой сочленения называется вершина, принадлежащая сразу двум классам вершинной двусвязности.

Мост — ребро, концы которого не являются рёберно двусвязными.

Лемма о рукопажатиях.
Сумма степеней вершин равна удвоенному коичеству вершин

1.2. Основные определения для ориентированных графов

Ориентированный граф — пара (V, E), где V — множество вершин, $E \subset V \times V$ — множество дуг.

Определения пути, циклического пути ($u_0 = u_k$) и цикла (класс эквивалентности циклических путей относительно циклического сдвига) аналогичны неориентированному случаю.

1.3. Связность и пути.

Теорема о количество путей или о матрице смежности..
Возьмем матрицу смежности. Она обозначается A_G и на позиции $a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ есть ребро ij} \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}$

d_{ijk} - число путей из i в j, содержащее k ребер. Тогда:

$$d_{ijk} = (A_G)^K[i][j]$$

Доказательство:
Докажем по индукции:

1) База: $k = 0$ $A_G)^0 = I$ - работает.

$k = 1$ $A_G^1 = A_G$ - работает.

2) ИП:Хотим доказать, что:

$$D_n = A_j^n$$

Пусть выполнено для $n - 1$, докажем, что выполнено для n. Имею:

$$A_G^k = A_G^{k-1} A_G$$

Переобозначим $C = A_G^K, B = A_G^{k-1}, A = A_G$. Тогда:

$$c[i][j] = \sum_t b[i][t]a[t][j]$$

А теперь концептуально подумаем над этой формулой.

TODO

Q.E.D.

2. Лекция 2

2.1. Деревья

Определение. Дерево
Дерево — связный неориентированный граф без циклов

Лемма.
G — дерево, содержащее хотя бы 2 вершины. Тогда $\exists$ вершина степени 1.

Ее можно усилить до того, что существуют 2 таких вершины. Такие вершины называются **висячими** или **листами** .

Теорема.
G — граф, содержит n вершин.

1. $n - 1$ ребер
2. нет циклов
3. G — связный

Если выполнены любые 2 из данных 3, то выполнено и третье

Доказательство этой теоремы очень просто

Теорема.
G — дерево тогда и только тогда, когда $\forall u, v : \exists!$ простой путь $u \rightsquigarrow v$

Доказательство этой теоремы тоже очень просто: стоит лишь рассмотреть от противного.

Утверждение. G дерево $\Leftrightarrow$ G связен и любое ребро мост.

Определение. Подграф
G - граф. H получен удалением из G ребер или вершин. H называется подграфом G

Определение. Индуцированный Подграф
G - граф. H получен удалением из G вершин. H называется индуцированным подграфом G

Определение. Остовный Подграф
G - граф. H получен удалением из G ребер, причем H связно. H называется остовным подграфом G

Определение. Остовное дерево
Остовное дерево - остовный граф, который является деревом

Лемма.
Любой связный граф содержит остовное дерево

Определение. Матрица Кирхгофа
Матрица Кирхгофа называется матрица K_G,такая что

$$a_{ij} = \begin{cases} \deg i, i = j \\ -1, ij \in E \\ 0 \quad \text{иначе} \end{cases}$$

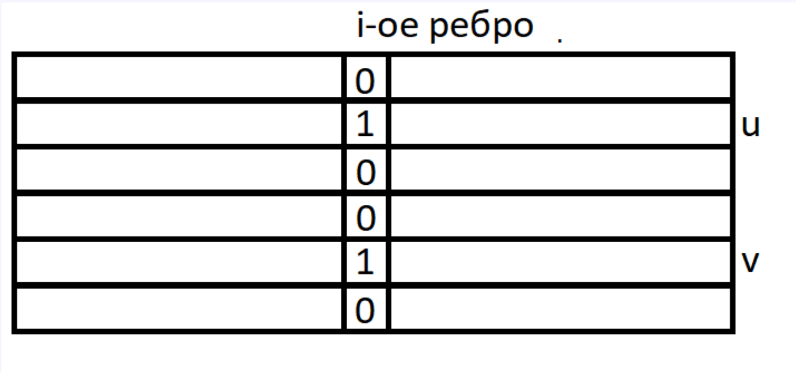
Теорема. Кирхгофа

G - связный граф. Кол-во остовных деревьев G равно $\overline{A_{ij}}, \forall i, j$

Доказательство:

Лемма 1.

Введем понятие для графа G **матрицы инцидентов**. Пусть у нас n вершин и m ребер. Возьмем матрицу из m столбцов и n строк и для каждого ребра в этой матрице инцидентов поставим 1 в соотв. строку если ребро соединяет эту вершину с другой и 0 иначе. Назовем ее I_g. Пример:



Возьмем I_g и I_g^T и перемножим. Заметим, что получится матрица Кирхгофа, но у нас не того знака единицы. Возьмем теперь ориентацию графа G (любую). Поставим −1 в начало ребра и +1 в конец. Теперь уже перемножая их получим нашу нужную нам матрицу Кирхгофа.

$$\vec{I}_n * \vec{I}_n^T = \text{Матрица Киргофа G}$$

Лемма 2.

Давайте выберем любое $n - 1$ ребро. Рассмотрим столбцы $\vec{I}_n$, связанные с этими ребрами. Удалим любую строчку. Останется матрица $n - 1$ на $n - 1$. Назовем ее B. Если выбранные ребра образуют остовное дерево, то $\det B = \pm 1$, иначе $\det B = 0$.

Доказательство:

Обозначим множество оставшихся рёбер за EQ, а вершину, которую мы вычеркнули, — за u.

- Если EQ содержит цикл, то граф, тривиально, не связен. Рассмотрим компоненту связности, не содержащую u. В ней сумма столбцов равна нулю, и хорошо. Ну, как хорошо. Вообще EQ может не содержать ориентированного цикла, но содержать цикл G. Так вот, в таком случае нам придётся взять не сумму соответствующих столбцов, а алгебраическую сумму, где неправильно направленные рёбра идут с коэффициентом -1. Тогда мы получим-таки наш ноль, то есть линейная комбинация столбцов будет равна нулю, следовательно определитель нулевой.
- Теперь пусть циклов там нет. Тогда там дерево (нет циклов и $n - 1$ ребро). Оно содержит 2 листа. Один из них — не u. Обзовём его v_1. Поскольку мы считаем определок, нам разрешают переставлять строки и столбцы матрицы: давайте возьмём строку v_1, в ней где-то ровно одна ± 1. Переместим строку на первое место, а ± 1 — в первый столбец, после чего забудем о v_1. Оставшаяся часть —

дерево, в нём есть два листа, один — не u, возьмём его как v_2. Так сделаем до посинения, получим нижне-треугольную матрицу с ± 1 на диагонали.

Лемма 3. Формула Коши-Бине

Пусть A — матрица $r \times s$, B — матрица $s \times r$, $s \geq r$. Тогда

$$\det(AB) = \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \ldots \leq i_r \leq s} \det A^{i_1;\ldots;i_r} \det B_{i_1;\ldots;i_r}$$

Напомню, что $A^{i_1;\ldots;i_r}$ — минор матрицы A, где выбраны столбцы $i_1; \ldots; i_r$, а $B_{i_1;\ldots;i_r}$ — минор B, где выбраны строки $i_1; \ldots; i_r$.

Доказывать формулу мы не будем. Кучерук нам вроде даже ее давала

Наконец доказательство самой теоремы

Вычеркнем строчку с номером u. Что изменится в матрице Кирхгофа? Удалится строчка и столбец с u.

А теперь, используя формулу Коши-Бине для подсчета данного минора. Ой смотрим смотрим и получаем, что количество остовных деревьев в точности равно нашему минору.

Q.E.D.

2.2. Коды Прюфера (для неориентированных деревьев)

Коды Прюфера — это способ установить **биекцию** между помеченными деревьями и числовыми последовательностями.

Исходные данные: Рассматриваем деревья на `n` вершинах**, помеченных числами от 1 до `n`.** Дерево — это связный граф без циклов.

Алгоритм кодирования (преобразование дерева в код Прюфера)

Цель: получить последовательность (код) длиной `n-2`.

1. Пусть `T` — наше дерево с множеством вершин `{1, 2, ..., n}`.
2. Пока в дереве больше двух вершин, повторяем следующие шаги: a. Найдите **лист** с **наименьшим номером**. b. Запишите в код Прюфера номер **единственной вершины, смежной** с этим листом (его «соседа»). c. **Удалите этот лист** и инцидентное ему ребро из дерева `T`.
3. Когда останется всего 2 вершины, процесс останавливается. Полученная запись — это **код Прюфера** для дерева `T`.

Алгоритм декодирования (преобразование кода Прюфера в дерево)

Цель: по последовательности длиной `n-2` восстановить дерево на `n` вершинах.

1. Пусть дан код Прюфера `P` длиной `n-2`. Постройте список вершин `L = {1, 2, ..., n}`.
2. Пока код `P` не пуст, повторяйте:
   1. Найдите **наименьший номер** из списка `L`, который **не встречается** в коде `P`. Этот номер будет листом.
   2. **Проведите ребро** из этого листа в вершину, которая является **первым элементом** кода `P`.
   3. Удалите найденный лист из списка `L` и первый элемент из кода `P`.
3. Когда код `P` станет пуст, в списке `L` останется ровно две вершины. **Проведите ребро** между этими двумя вершинами.

Важность и следствия: Поскольку алгоритмы кодирования и декодирования взаимно обратны, между множеством всех помеченных деревьев на `n` вершинах и множеством всех последовательностей длиной `n-2` (где каждый элемент — число от 1 до `n`) существует **биекция**. Количество таких последовательностей равно `n^(n-2)`. Таким образом, мы получаем знаменитую **формулу Кэли**:

Более подробно про коды Прюфера можно прочитать тут

2.3. Количество остовных деревьев в ориентированном графе

Это обобщение матричной теоремы о деревьях (теоремы Кирхгофа) на случай ориентированных графов.

Определения (уточнённые):

1. **Ориентированное дерево (дерево с корнем, или ветвление):** Это ориентированный граф, у которого:
   - Есть ровно одна вершина (корень), в которую не входит ни одно ребро (полустепень захода = 0).
   - В каждую другую вершину входит ровно одно ребро (полустепень захода = 1).
   - В графе нет ориентированных циклов.
2. **Ориентированное остовное дерево с корнем в `r`:** Это подграф ориентированного графа `G`, который включает все его вершины, является ориентированным деревом и имеет корень `r`.

Замечание: Действительно, для одного графа может существовать несколько остовных деревьев с разными корнями. Количество таких деревьев зависит от выбранной корневой вершины `r`.

Теорема (Матричная теорема о деревьях для ориентированных графов, вариант Тута/Ботт-Мэйберла).

Количество остовных деревьев с корнем в заданной вершине `r` можно вычислить с помощью модифицированной матрицы Кирхгофа.

Алгоритм:

1. Постройте **матрицу Кирхгофа** `L` размера `n x n` (где `n` — число вершин в графе) следующим образом:
   - Для каждой вершины `i` вычислите ее **полустепень захода** `deg⁻(i)` (количество рёбер, входящих в `i`).
   - На диагонали `L[i][i]` поставьте `deg⁻(i)`.
   - Для недиагональных элементов `L[i][j]` (где `i != j`) поставьте **минус** количество рёбер, идущих **из `j` в `i`**. Обратите внимание на порядок индексов!
2. Чтобы найти количество остовных деревьев с корнем в вершине `r`, нужно:
   1. **Удалить строку и столбец**, соответствующие корню `r`, из матрицы `L`. Получится матрица `L_r` размера `(n-1) x (n-1)`.
   2. Вычислить **определитель** матрицы `L_r`.

> Количество остовных деревьев с корнем в `r` = `det(L_r)`

3. Лекция 3

3.1. Эйлеровы пути и циклы

Определение. Эйлеров путь(цикл)
Эйлеров путь(цикл) — соответственно путь или цикл, который проходи по каждому ребру 1 раз.

Теорема.

G - связный граф. Тогда существует эйлеров цикл $\Leftrightarrow$ соблюдено усл. таблицы:

	Цикл	**Путь**
граф	все степени вершин четны	не больше 2 вершин имеют неч. степень
ор. граф	количество исходящих и выходящих ребер одинаково	левое, кроме 2 вершин у которых количество входящих и выходящих по модулю отличается на один

Доказательство:
Идея в правую сторону: вычеркиваем циклы, вычеркиваем, пока мы не распадемся на несколько компонент, используем индукцию и аккуратно ходим. Случай с путем сводим к поиску цикла.

Идея: в левую сторону: Смотрим на степени и все.

Q.E.D.

Теорема.
G - связный неориентированный граф, $2k$ вершин неч. степени и $k \geq 1$.

Тогда ребра графа представляют собой обход графа по k непересекающимся по ребрам путям.

Доказательство аналогично доказательству прошлой теоремы

Теорема. de Bruijn, von Aardene-Ehrenfist, Smith, Tutte
или по-другому BEST-theorem

Количество эйлеровых циклов графа G равно:

$$In_{r(G)} \cdot \prod_{v} (\deg v - 1)!$$

Доказательство:
Рассмотрим наш граф. Для каждой вершины выпишем перестановку ребер в этой вершине (исходящих).

Будем называть набор корректным, если последние ребра образовывают остовное дерево в вершину R.

Существует биекция между набором корректных перстановок и этих вершин

Q.E.D.

4. Лекция 4

4.1. Гамильтоновы пути и циклы

Определение. Гамильтонов путь
Гамильтонов цикл(путь) — цикл(путь), который проходит по каждой вершине 1 раз.

Теорема Дирака.
$\forall u : \deg u \geq \frac{n}{2} \Rightarrow G$ - гамильтонов.

Теорема Оре.
$\forall u, v : uv \notin E : \deg u + \deg v \geq n \Rightarrow$ - гамильтонов.

Теорема Хватала.
Пусть G — связный граф с хотя бы 3 вершинами. Пусть его степени вершин — $d_1 \leq d_2 \leq \ldots \leq d_n$. Если выполнено условие

$$\forall k < \frac{n}{2} : (d_k \leq k \Rightarrow d_{n-k} \geq n - k)$$

то G — гамильтонов.

Доказательство:

Для начала условие

$$d_k \leq k < \frac{n}{2} \Rightarrow d_{n-k} \geq n - k$$

назовём $(*)$.

Лемма.
Пусть G выполнено $(*)$, $uv \notin E$. Тогда $G \cup uv$ также $(*)$.

Доказательство:

Пусть мы имели $d_1 \leq d_2 \leq \ldots \leq d_n$ При добавлении ребра uv степени вершин u и v увеличиваются на 1. После пересортировки последовательности степеней выполняется $d_{i(G)} \leq d_{i(G \cup uv)}$ для всех i. Поскольку условие $(*)$ монотонно относительно возрастания степеней, оно сохраняется.

Q.E.D.

Будем доказывать от противного.

Предположим, существует негамильтонов граф, удовлетворяющий $(*)$.

Выберем такой граф G с:
- Наименьшим числом вершин
- Наибольшим числом рёбер среди таких графов

Тогда:

1. G не является полным графом (иначе он гамильтонов)
2. Для любого отсутствующего ребра uv граф $G \cup uv$ гамильтонов
3. Выберем отсутствующее ребро uv с максимальной суммой $\deg(u) + \deg(v)$

Поскольку $G \cup uv$ гамильтонов, в G существует гамильтонов путь :

$$u = u_1 \to u_2 \to \dots \to u_{n-1} \to u_n = v$$

Введём множества:

$$S = (i \in [2; n-1] \mid uu_i \in E(G))$$

$$T = (i \in [2; n] \mid u_{i-1}v \in E(G))$$

То есть идейно S - все вершины, выходящие из u, T - все вершины, входящие в v.

Имеем:
- $|S| = \deg(u)$
- $|T| = \deg(v)$
- $S \cap T = \emptyset$ (иначе существовал бы гамильтонов цикл в G:)

$$u \to u_2 \to u_3 \to \dots \to u_{i-1} \to v \to u_{n-1} \to u_{n-2} \to \dots u_i \to u$$

Следовательно:

$$\deg(u) + \deg(v) = |S| + |T| \leq n - 1$$

Отсюда $\deg u + \deg v <= n - 1$.

Без ограничения общности пусть $\deg(u) \leq \deg(v)$. Тогда:

$$\deg(u) \leq \frac{n-1}{2} < \frac{n}{2}$$

Положим $k = \deg(u)$. Тогда:
1. $d_k \leq k$ (существует k вершин со степенью $\leq k$)
2. По условию $(*)$: $d_{n-k} \geq n - k$

Тогда, как выше и сказал, существует вершина $w \notin N(u)$ со степенью $\deg(w) \geq n - k$. Но тогда для ребра uw получаем:

$$\deg(u) + \deg(w) \geq k + (n - k) = n$$

что противоречит максимальности выбора ребра uv. Противоречие

Q.E.D.

4.2. Турниры

Турниры — всегда есть направленное ребро между u, v

Теорема. Реден, Камеон
Сильно-связный турнир — гамильтонов

Доказательство:
Очевидное доказательство по индукции

Q.E.D.

5. Лекция 5.

5.1. Планарные графы

Определение. Укладка графа
Укладкой графа G на поверхность называется отображение вершин графа (инъекция) и отображение ребер в множество непрерывных кривых, где каждое ребро начинается и заканчивается в соотв вершине, а также не пересекаются

Теорема.
Любой граф можно вложить в $\mathbb{R}^3$

Доказательство:
Построим как-то, а потом будем двигать ребра в окрестности пересечения ребер.

Альтернатива: Давайте случайно поставим вершины графа в $\mathbb{R}^3$ (например возьмем какой-то компакт по типу сферы или параллелепипеда). Проведем все ребра, вероятность что они пересекутся ноль, откуда можно вложить.

Q.E.D.

Определение. Гомиоморфные графы
Графы G_1, G_2 называются **гомоморфными**, если они гомиоморфны как топологические пространства $\Leftrightarrow$ можно непрерывными преобразованиями один в другой:
- можно добавить вершину a, между u, v и наоборот

Лемма.
Граф можно уложить на сфере $\Leftrightarrow$ граф можно уложить в $\mathbb{R}^2$

Доказательство:
Случайно построим почти биекцию между сферой(почти) и плоскостью примерно так:
- Положим плоскость
- Поставим сферу на плоскость и обозначим у нее северный полюс
- Возьмем любую точку на плоскости и проведем прямую через северный полюс. Она пересечет в каком-то месте шар.
- Давайте возьмем такое отображение, оно будет почти биективным (у северного полюса не будет образа)

А если подумать, то теперь мы просто будем строить биекцию(почти) и все - победа. Главное, чтобы северным полюсом была вершина, через которую не проходит ни одно ребро и ни одна вершина, чего можно добиться.

Q.E.D.

Мы хотим этого, потому что сфера это компакт.

Определение. Планарный граф
Планарный граф — граф, вложимый в $\mathbb{R}^2$

Теорема Эйлера (или Формула Эйлера).
Пусть в связном планарном графе V вершин и E рёбер, а при его укладке на плоскости получилось F граней. Тогда $V + F - E = 2$

Доказательство:
Докажем индукцией по количеству вершин и рёбер. Если у нас 1 вершина и 0 рёбер, то грань там одна.

- Пусть у нас не 1 вершина. Если наш граф дерево, у него n вершин, $n - 1$ ребро и 1 грань. Все работает.
- Если наш граф не дерево, у нас есть хоть один не-мост. Тогда он лежит в цикле, а значит при удалении этого ребра у нас уменьшится количество граней на 1. При этом граф останется связным.

Из индукционного предположения: $V + (F - 1) - (E - 1) = 2$.

Q.E.D.

Теорема.
K_5 нельзя уложить на плоскость

Доказательство:
Предположим противное. Пускай граф K_5 можно уложить на плоскости. Тогда по теореме Эйлера должно быть выполнено: $V + F - E = 2$. У K_5 вершин 5, ребер 10. Должно быть 7 граней.

Давайте считать количество раз сколько ребра входит в грани с двух сторон. С одной стороны это $\leq 2 \cdot E = 20$, потому что каждое ребро лежит максимум в 2 гранях. С другой стороны каждая грань ограничивает вокруг себя цикл длины хотя бы 3, то есть ≥ 21. Противоречие.

Q.E.D.

Теорема.
$K_{3,3}$ нельзя уложить на плоскость

Доказательство:
Предположим противное. Тогда $V = 6, E = 9, F = 5$. Противоречие строится на счете ребер со стороны граней. Каждую грань ограничивает 4 ребра (мин. цикл длины 4).

Q.E.D.

На этой идее можно строить много разных оценок

Лемма.
Все компоненты вершинной двусвязности G планарны $\Rightarrow$ G планарны

Теорема Понтрягина-Куратовского.
Граф можно уложить в $\mathbb{R}^2$ $\Leftrightarrow$ G не содержит подграфа, гомиоморфному K_5 или $K_{3,3}$

Доказательство:
В правую сторону очевидно из вышесказанных теорем.

Докажем в левую сторону.

Это мягко говоря не очевидно

Мы будем доказывать и некоторые технические детали будем опускать и глубоко не спускаться в них. Совсем простого способа доказательства нет. Надо будет рассмотреть всего 12 случаев (халява).

Лемма.

$\forall$ пл. графа G, $\forall$ вершины u, существует такая укладка, что вершина u будет ограничивать внешнюю грань

$\forall$ пл. графа G, $\forall$ ребра u, v, существует такая укладка, что ребро u, v будет ограничивать внешнюю грань

Доказательство:

Уложим на сферу, покрутим сферу, победили

Q.E.D.

Лемма.

G планарен $\Leftrightarrow$ все блоки G планарны.

Доказательство:

В правую сторону очевидно: постираем ребра и вершины и победии.

В левую сторону - разобьем на компоненты вершинной двусвязности.

todo: рисунок

Q.E.D.

Пусть G нельзя уложить. Возьмем минимальный контрпример . Тогда

- G - двусвязен из Леммы.
- Для любых u, v в $G \setminus (u, v)$ лежат на цикле. Назовем этот цикл C.

  (Это следует из того, что удалив ребро граф уже можно уложить на плоскость, поделив граф на 2 части и придя к противоречию, как в верхней лемме, получим нужное нам утверждение)
- выберем ребро uv, цикл C и укладку $G \setminus (u, v)$, чтобы внутри C было максимальное число граней

Ключевая мысль: существует такая внешняя грань out и такая внутренняя грань in, что она разделяет внутреннюю и внешнюю грани

Расписывать ключевую мысль мне лень, так что TODO

Дальше там идет перебор 12 случаев, которые сводятся к наличию K_5 или $K_{3,3}$

Q.E.D.

6. Лекция 6.

6.1. Раскраски

Определение. Корректная раскраска графа
Пусть G - неориентированный граф и отображение $c : V \to [1, k]$. При этом выполнено, что $\forall$ ребра $uv : c(u) \neq c(v)$. В таком случае c называют **корректной или правильной раскраской**

Определение. k-colorable или k-раскрашиваемый.
Пусть G - неориентированный граф и у него есть корректная раскраска в k цветов.

Определение. Хроматическое число графа
Минимальное число цветов, в которые можно покрасить граф $\chi(G)$

Теорема.
Граф двудольный тогда и только тогда, когда $\forall$ цикл четен.

Доказательство:
В правую сторону очевидно.

В левую сторону жадно красим с помощью dfs.

Q.E.D.

При этом при $k \geq 3 : \chi(G) \leq k$ - НП полная задача. То есть алгоритмически бесполезно проверять.

Определение. Хроматический многочлен
Хроматический многочлен $p_G(t)$ - функция, которая говорит количеству способов раскрасить граф в t цветов.

Отождествление вершин

$p_G(t) = p_G(t)|_{c(u)=c(v)} + p_G(t)\ |_{c(u)\neq c(v)} = p_{G/uw}(t) + p_{G\cup uv}(t)$

Очень хорошая формулка

Теорема. О хроматическом многочлене
G - неориентированный граф $p_g(t), n$ вершин, m ребер, k компонент связности. Тогда:

$$t^n - mt^{n+1} + p_{n-2}t^{n-2} - p_{n-3}t^{n-3} + \ldots \pm p_k t^k$$

Доказательство:
Доказываем по индукции по числу вершин и по числу ребер.

База: $n, m = 0 : p_{G(t)} = t^n$

Q.E.D.

Теорема.
Граф дерево тогда и только тогда, когда его хроматический многочлен равен $t(t-1)^{n-1}$.

Доказательство:
В правую сторону очевидно.

В левую сторону $n - 1$ ребро, связный граф, пользуемся этим соображением и индукцией

Q.E.D.

$w(G)$ - кликовое число графа. Или по-дргуому максимальный размер подграфа клики.

Очевидно, что $w(G) \leq \chi(G)$.

$\Delta(G)$ - макс степень в G

Лемма.
$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$

Это что-то из разряда, давайте красить как хотим.

Лемма.
Считаем G связным. Если $\delta(G) \neq \Delta(G)$, то $\chi(G) \leq \Delta(G)$

Доказательство:
Возьмем остов, подвесим, будем красить снизу вверх

Q.E.D.

Теорема Брукса.
Если G - связный, $G \neq K_n$ и $G \neq C_{2n+1}$, то $\chi(G) < \Delta(G)$

Доказательство:
Мы почти победили эту теорему. Нам осталось только рассмотреть случай $\delta(G)$

Возьмем такие вершины u, v, что у них есть общий сосед.

Q.E.D.

7. Лекция 7.

7.1. Паросочетание

Мы будем думать о любом паросочетании в графе. G - неор. граф. Есть ребра и вершины. Ребро соединяют 2 вершины, ребра соединяются вершиной.

Найти множество объектов

Определение. Независимое множество
Независимым множеством вершин графа $G = (V, E)$ называется такое подмножество S множества вершин графа V, что $\forall u, v \in S : uv \notin E$

Максимальное независимое множество в графе обозначается за $\alpha(G)$

Определение. Паросочетание
Паросочетание M – произвольное множество рёбер двудольного графа такое, что никакие два ребра не имеют общей вершины.

Максимальный размер паросочетания обозначается $\alpha'(G)$

Определение. Контролирующее множество или вершинное покрытие, или реберное покрытие
Вершинное - множество вершин, что для любого ребра, хотя бы 1 ребро

реберное, для каждой вершины хотя бы 1 ребро находится в этом множестве.

$\beta(G)$ - размер минимального вершинного покрытия

$\beta'(G)$ - размер минимального реберного покрытия

Утверждение.
$\alpha(G) + \beta(G) = n$

Доказательство:
Пусть A - независимое множество вершин, возьмем $B = V \setminus A$

Покажем, что тогда B - вершинное покрытие (На самом деле там равносильность)

Из доказанного нами утверждение очевидно следует искомое ведь $|A + A^c| = n$

Q.E.D.

Теорема. Галлаи - 59
$\alpha'(G) + \beta'(G) = n, \delta(G) > 0$

Доказательство:
Берем множество непокрытых вершин. Их $n - 2\alpha'(G)$

$\beta'(G) \leq \alpha'(G) + n - 2\alpha'(G) = n - \alpha'(G)$

Откуда $\alpha'(G) + b'(G) \leq n$

$\alpha'(G) \geq n - \beta'(G)$, откуда $\alpha'(G) + \beta'(G) \geq n$

->DO: расписать

Q.E.D.

Теорема.
G - двудольный, то $\alpha'(G) = \beta(G)$

Произвольные графы: $\beta(G) \geq a'(G)$

Определение. Совершенное паросочетание
Граф имееет **совершенное паросочетание**, если $2|M| = |V|$, $2\alpha'(G) = n$

Теорема Татта.
G содержит совершенное паросочетание $\Leftrightarrow \forall S \subset V : |S| \geq odd(G \setminus S)$

где odd $(G \setminus S)$— число нечётных по числу вершин компонент связности в графе $G \setminus S$.

Доказательство:

В правую сторону:

Предположим, что в графе G существует совершенное паросочетание M. Рассмотрим произвольное множество $U \subset V(G)$.

Для каждой нечётной компоненты связности C графа $G \setminus U$ хотя бы одна вершина из C должна быть соединена ребром из M с некоторой вершиной из U, так как иначе в C останется непарная вершина. Поскольку паросочетание M совершенное, различные нечётные компоненты должны соединяться с различными вершинами из U. Следовательно, число нечётных компонент не превосходит $|U|$.

В левую сторону:

Предположим, что условие теоремы выполняется, но совершенного паросочетания в G нет.

Рассмотрим граф G^*, полученный из G добавлением рёбер так, чтобы он оставаться графом без совершенного паросочетания, но был бы максимальным в этом смысле (т.е. добавление любого нового ребра приводит к появлению совершенного паросочетания) (или как говорит АС - максимальный контрпимер)

Пусть U — множество вершин $u \in V(G^*)$ таких, что все остальные вершины смежны с u.

Утверждение: Граф $G^* - U$ является объединением несвязных клик (полных графов).

Доказательство утверждения:

Предположим, что это не так. Тогда найдутся вершины $x, y, z \notin U$ такие, что $xy, yz \in E(G^*)$, но $xz \neg \in E(G^*)$. Так как $y \neg \in U$, существует вершина $w \neg \in U$ такая, что $yw \neg \in E(G^*)$.

Из максимальности G^* следует:
- В $G^* + xz$ есть совершенное паросочетание M_1, причём $xz \in M_1$.
- В $G^* + yw$ есть совершенное паросочетание M_2, причём $yw \in M_2$.

Рассмотрим граф $H = (V(G), M_1 \oplus M_2)$.

Граф H представляет собой объединение чётных циклов, в которых рёбра чередуются из M_1 и M_2.

Случай 1: Рёбра xz и yw лежат в разных компонентах связности H.

В компоненте с xz выберем рёбра из M_2, в компоненте с yw — из M_1, в остальных — любые. Получим совершенное паросочетание в G^*, что противоречит построению.

Случай 2: Рёбра xz и yw лежат в одной компоненте связности H (чётном цикле C).

Без ограничения общности, расположим вершины в цикле C в порядке $y \to w \to \ldots \to z \to x \to \ldots \to y$. Рассмотрим путь

$$P = x \overset{C}{\to} z \to y \overset{C}{\to} w$$

, который проходит через все вершины цикла C, используя ребро $yz \in E(G^*)$ и дуги цикла. На этом пути можно выбрать совершенное паросочетание M_W, состоящее только из рёбер G^*. Комбинируя M_W с паросочетаниями в других компонентах H, снова получим совершенное паросочетание в G^* — противоречие.

Таким образом, предположение неверно, и $G^* - U$ является объединением клик.

Вернемся к доказательству теоремы

Рассмотрим граф $G^* - U$. Он состоит из нескольких компонент связности, каждая из которых — клика. В нечётной клике (компоненте с нечётным числом вершин) все рёбра присутствуют, но при удалении U она становится нечётной компонентой связности.

По условию для графа G (а значит, и для G^*, так как добавление рёбер не нарушает условие), выполняется: $\mathrm{odd}(G^* - U)l = |U|$

В графе $G^* - U$ нечётные клики можно полностью паросочетать внутри себя, кроме одной вершины, которая должна быть соединена с вершиной из U. Поскольку в G^* все вершины из U соединены со всеми остальными, мы можем построить совершенное паросочетание:
- В каждой нечётной компоненте $G^* - U$ паросочетаем все вершины, кроме одной, которую соединяем с некоторой вершиной из U.
- В чётных компонентах паросочетаем все вершины внутри компоненты.
- Условие $\mathrm{odd}(G^* - U) \leq |U|$ гарантирует, что на все нечётные компоненты хватит вершин в U.

Таким образом, в G^* существует совершенное паросочетание, что противоречит его построению. Следовательно, исходное предположение неверно, и в графе G должно существовать совершенное паросочетание. ПОБЕДА

Q.E.D.

Определение. Дефицит графа
`def` $G = n - 2\alpha'(G)$

Теорема. Формула Бержа
`def` $G = \max\limits_{S \subset V}(odd(G \setminus S) - |S|)$

Доказательство:
Оценка снизу на `def` G очевидна.

Идея второй части: Добавим множество вершин $U, |U| = \max\limits_{S \subset V}(odd(G \setminus S) - |S|)$, из которого будут вести ребра в каждую вершину нашего графа. Покажем, что наш граф тогда по Теорема Татта имеет совершенное паросочетание. Заметим, что тогда удалив из него подграф U, мы получим в оставшемся графе как раз не макс. пар соч и `def` будет равен как раз тому что надо

Q.E.D.

8. Информация о курсе

Поток — y2024.

Группы M3238-M3239.

Преподаватель — Станкевич Андрей Сергеевич.

Это третий семестр курса по дискретной математике, всем успехов!