

Конспект по Матлогу. Часть 1

Штукенберг Дмитрий

под редакцией Чепелина Вячеслава

Содержание

1	Лекция 5.	3
1.1	Введение в исчисление предикатов	3
1.2	Язык исчисления предикатов	4
1.2.1	Формальное определение	5
1.3	Теория моделей исчисления предикатов	5
1.3.1	Оценка исчисления предикатов	6
1.3.2	Общезначимость и свободные переменные	7
1.4	Теория доказательств исчисления предикатов	8
1.5	Теоремы о исчислении предикатов	8
1.5.1	Теорема о дедукции	8
1.5.2	Корректность подстановки	9
1.5.3	Корректность исчисления предикатов	9
2	Лекция 6.	10
2.1	Теорема о полноте	10
2.2	Модели для множеств формул	12
2.3	Конструкция модели	12
2.4	Теорема Гёделя о полноте	13
2.5	Полнота исчисления предикатов	16
2.6	Непротиворечивость исчисления предикатов	16
2.7	Теорема Гёделя о компактности	16
3	Лекция 7:	17
3.1	Машина Тьюринга	17
3.1.1	Неразрешимость задачи останова	17
3.2	Аксиоматика Пеано и формальная арифметика	19
3.3	Натуральные числа: аксиоматика Пеано	20
3.3.1	Обозначения и определения	20
3.4	Уточнение исчисления предикатов	20
3.5	Теория первого порядка	21
3.6	Порядок логики/теории	21
3.7	Формальная арифметика	21

4	Лекция 8.	23
4.1	Арифметизация в работах Лейбница	23
4.2	Соглашения о записи	23
4.3	Примитивно-рекурсивные функции: $x + y$	24
4.4	Общерекурсивные функции	24
4.5	Тезис Чёрча	25
4.6	Выразимость отношений в Ф.А.	26
4.7	Представимость функций в Ф.А.	26
4.8	Соответствие рекурсивных и представимых функций	26
4.9	Примитив S представим в Ф.А.	27
4.10	β -функция Гёделя	27
4.11	Примитив «примитивная рекурсия» представим в Ф.А.	28
4.12	Представимость рекурсивных функций в Ф.А.	28
4.13	Рекурсивность представимых в Ф.А. функций	28
4.14	Гёделева нумерация	28
5	Информация о курсе.	30

1 Лекция 5.

1.1 Введение в исчисление предикатов

def: Силлогизм — «подытоживание, подсчёт, умозаключение»

def: Категорический — потому, что речь идёт о категориях (в философском смысле).

Определяем некоторые стандартные мыслительные блоки, с которыми у образованной аудитории есть навык работы. Цель — сделать неформальный человеческий язык чуть более формальным. Где важно: научный трактат, диспут, для исключения ошибок в рассуждениях.

Язык рассуждений понимается единым, без разделения на язык исследователя и предметный.

Пример категорического силлогизма:

$$\frac{\text{Каждый человек смертен} \quad \text{Сократ есть человек}}{\text{Сократ смертен}}$$

Категорический силлогизм соединяет три термина:

предикат (большой термин, P)
субъект (меньший термин, S)
средний термин (M).

На основании соотношений P и M, а также M и S строим соотношение P и S.

Возможные соотношения:

A Affirmato (общеутвердительное)	Матан есть раздел математики (SaP)
I affIrmato (частноутвердительное)	Некоторые разделы математики сложны (SiP)
E nEgo (общеотрицательное)	Никакой человек не знает всю математику
O negO (частноотрицательное)	Некоторые разделы математики — не матан

def: Каждому силлогизму соответствует **фигура**

	Фигура 1	Фигура 2	Фигура 3	Фигура 4
Большая посылка:	M—P	P—M	M—P	P—M
Меньшая посылка:	S—M	S—M	M—S	M—S
Закключение:	S—P	S—P	S—P	S—P

Расстановка соотношений вместо «—» в фигуре — модус. Например, тут — фигура 1, ааа.

$$\frac{\text{Каждый человек смертен} \quad \text{Сократ есть человек}}{\text{Сократ смертен}}$$

Как этим пользоваться: по умозаключению (на русском языке) определяем, где в нём P, M, S и каковы между ними соотношения, находим соответствующую фигуру и модус, а дальше определяем силлогизм и его свойства в соответствии со следующими правилами.

Не все модусы осмысленны, большинство некорректно. Например фигура 1, аае:

$$\frac{\text{Каждый человек смертен} \quad \text{Сократ есть человек}}{\text{Сократ не есть смертен}}$$

Список всех правильных модусов (из них выделяют *слабые*, выводящие частное соотношение при возможности общего — указаны курсивом):

Фигура 1	Фигура 2	Фигура 3	Фигура 4
Barbara	Cesare	Darapti	Bramantip
Celarent	Camestres	Disamis	Camenes
Darii	Festino	Datisi	Dimaris
Ferio	Baroco	Felapton	Fesapo
<i>Barbari</i>	<i>Cesaro</i>	Bocardo	Fresison
<i>Celaront</i>	<i>Camestros</i>	Ferison	<i>Camenos</i>

Некоторые модусы требуют непустоты М: это все слабые модусы и четыре сильных (указаны серым), например Darapti:

$$\frac{\text{Все единороги имеют рог} \quad \text{Все единороги суть лошади}}{\text{Некоторые лошади имеют рог}}$$

Ограничения языка исчисления высказываний:

$$\frac{\text{Каждый человек смертен} \quad \text{Сократ есть человек}}{\text{Сократ смертен}}$$

Цель: увеличить формализованную часть метаязыка.

Мы неформально знакомы с **предикатами** ($P : D \rightarrow V$) и **кванторами** ($\forall x.H(x) \rightarrow S(x)$).

$$\frac{\forall x.H(x) \rightarrow S(x) \quad H(\text{Сократ})}{S(\text{Сократ})}$$

1.2 Язык исчисления предикатов

Пример:

$$\forall x.\sin x = 0 \vee (\sin x)^2 + 1 > 1$$

1. Предметные (здесь: числовые) выражения

(a) Предметные переменные (x).

(b) Одно- и двухместные функциональные символы «синус», «возведение в квадрат» и «сложение».

(c) Нульместные функциональные символы «ноль» (0) и «один» (1).

2. Логические выражения

(a) Предикатные символы «равно» и «больше»

1.2.1 Формальное определение

1. Два типа: предметные и логические выражения.
2. Предметные выражения: метAPEReменная θ .
 - Предметные переменные: a, b, c, \dots , метAPEReменные x, y .
 - Функциональные выражения: $f(\theta_1, \dots, \theta_n)$, метAPEReменные f, g, \dots
 - Примеры: $r, q(p(x, s), r)$.
3. Логические выражения: метAPEReменные $\alpha, \beta, \gamma, \dots$
 - Предикатные выражения: $P(\theta_1, \dots, \theta_n)$, метAPEReменная P . Имена: A, B, C, \dots
 - Связки: $(\varphi \vee \psi), (\varphi \& \psi), (\varphi \rightarrow \psi), (\neg \varphi)$.
 - Кванторы: $(\forall x. \varphi)$ и $(\exists x. \varphi)$.

Сокращение записи и метаязык:

1. МетAPEReменные:
 - ψ, ϕ, π, \dots — формулы
 - P, Q, \dots — предикатные символы
 - θ, \dots — термы
 - f, g, \dots — функциональные символы
 - x, y, \dots — предметные переменные
2. Скобки — как в И.В.; квантор — жадный:

$$\underbrace{(\forall a. A \vee B \vee C \rightarrow \exists b. \underbrace{D \& \neg E}_{\exists b. \dots}) \& F}_{\forall a. \dots}$$

3. Дополнительные обозначения при необходимости:

- $(\theta_1 = \theta_2)$ вместо $E(\theta_1, \theta_2)$
- $(\theta_1 + \theta_2)$ вместо $p(\theta_1, \theta_2)$
- 0 вместо z
- \dots

1.3 Теория моделей исчисления предикатов

Напомним формулу:

$$\forall x. \sin x = 0 \vee (\sin x)^2 + 1 > 1$$

Без синтаксического сахара:

$$\forall x. E(s(x), z) \vee G(p(q(s(x)), o), o)$$

$$\forall x. E(s(x), z) \vee G(p(q(s(x)), o), o)$$

$$\forall x. E(s(\textcolor{red}{x}), z) \vee G(p(q(s(\textcolor{red}{x})), o), o)$$

$$\forall x. E(\textcolor{red}{s}(\textcolor{red}{x}), \textcolor{red}{z}) \vee G(\textcolor{red}{p}(\textcolor{red}{q}(\textcolor{red}{s}(\textcolor{red}{x})), \textcolor{red}{o}), \textcolor{red}{o})$$

1. Истинностные (логические) значения:

- (а) предикаты (в том числе пропозициональные переменные = нульместные предикаты);
- (б) логические связки и кванторы.

2. Предметные значения:

- (а) предметные переменные;
- (б) функциональные символы (в том числе константы = нульместные функциональные символы)

1.3.1 Оценка исчисления предикатов

def: Оценка — упорядоченная четвёрка $\langle D, F, P, E \rangle$, где:

- 1. $D \neq \emptyset$ — предметное множество;
- 2. F — оценка для функциональных символов; пусть f_n — n -местный функциональный символ:

$$F_{f_n} : D^n \rightarrow D$$

- 3. P — оценка для предикатных символов; пусть T_n — n -местный предикатный символ:

$$P_{T_n} : D^n \rightarrow V \quad V = \{И, Л\}$$

- 4. E — оценка для предметных переменных.

$$E(x) \in D$$

Запись и сокращения записи подобны исчислению высказываний:

$$\llbracket \phi \rrbracket \in V, \quad \llbracket Q(x, f(x)) \vee R \rrbracket^{x:=1, f(t):=t^2, R:=И} = И$$

- 1. Правила для связок $\vee, \&, \neg, \rightarrow$ остаются прежние;

2.

$$\llbracket f_n(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) \rrbracket = F_{f_n}(\llbracket \theta_1 \rrbracket, \llbracket \theta_2 \rrbracket, \dots, \llbracket \theta_n \rrbracket)$$

3.

$$\llbracket P_n(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) \rrbracket = P_{T_n}(\llbracket \theta_1 \rrbracket, \llbracket \theta_2 \rrbracket, \dots, \llbracket \theta_n \rrbracket)$$

4.

$$\llbracket \forall x. \phi \rrbracket = \begin{cases} И, & \text{если } \llbracket \phi \rrbracket^{x:=t} = И \text{ при всех } t \in D \\ Л, & \text{если найдётся } t \in D, \text{ что } \llbracket \phi \rrbracket^{x:=t} = Л \end{cases}$$

5.

$$\llbracket \exists x. \phi \rrbracket = \begin{cases} И, & \text{если найдётся } t \in D, \text{ что } \llbracket \phi \rrbracket^{x:=t} = И \\ Л, & \text{если } \llbracket \phi \rrbracket^{x:=t} = Л \text{ при всех } t \in D \end{cases}$$

Пример: Оценим:

$$\llbracket \forall a. \exists b. \neg a + 1 = b \rrbracket$$

1.3.2 Общезначимость и свободные переменные

def: Формула исчисления предикатов **общезначима**, если истинна при любой оценке:

$$\models \phi$$

То есть истинна при любых D, F, P и E .

Пример:

$$\llbracket \forall x.Q(f(x)) \vee \neg Q(f(x)) \rrbracket = \text{И}$$

Доказательство:

Фиксируем D, F, P, E . Пусть $x \in D$. Обозначим $P_Q(F_f(E_x))$ за t . Ясно, что $t \in V$. Разберём случаи.

- Если $t = \text{И}$, то $\llbracket Q(f(x)) \rrbracket^{Q(f(x)):=t} = \text{И}$, потому $\llbracket Q(f(x)) \vee \neg Q(f(x)) \rrbracket^{Q(f(x)):=t} = \text{И}$
- Если $t = \text{Л}$, то $\llbracket \neg Q(f(x)) \rrbracket^{Q(f(x)):=t} = \text{И}$, потому всё равно $\llbracket Q(f(x)) \vee \neg Q(f(x)) \rrbracket^{Q(f(x)):=t} = \text{И}$

def: **Вхождение подформулы** в формулу — это позиция первого символа этой подформулы в формуле.

$$\text{Вхождения } x \text{ в формулу: } (\forall x.A(x) \vee \exists x.B(x)) \vee C(x)$$

def: Рассмотрим формулу $\forall x.\psi$ (или $\exists x.\psi$). Здесь переменная x **связана** в ψ . Все вхождения переменной x в ψ — связанные.

def: Вхождение x в ψ **свободное**, если не находится в области действия никакого квантора по x . Переменная входит свободно в ψ , если имеет хотя бы одно свободное вхождение. $FV(\psi), FV(\Gamma)$ — множества свободных переменных в ψ , в Γ

Пример:

$$\psi[x := \theta] := \begin{cases} \psi, & \psi \equiv y, y \neq x \\ \psi, & \psi \equiv \forall x.\pi \text{ или } \psi \equiv \exists x.\pi \\ \pi[x := \theta] \star \rho[x := \theta], & \psi \equiv \pi \star \rho \\ \theta, & \psi \equiv x \\ \forall y.\pi[x := \theta], & \psi \equiv \forall y.\pi \text{ и } y \neq x \\ \exists y.\pi[x := \theta], & \psi \equiv \exists y.\pi \text{ и } y \neq x \end{cases}$$

def: Терм θ **свободен для подстановки вместо x** в ψ ($\psi[x := \theta]$), если ни одно свободное вхождение переменных в θ не станет связанным после подстановки.

Свобода есть	Свободы нет
$(\forall x.P(y))[y := z]$	$(\forall x.P(y))[y := x]$
$(\forall y.\forall x.P(x))[x := y]$	$(\forall y.\forall x.P(t))[t := y]$

1.4 Теория доказательств исчисления предикатов

Рассмотрим язык исчисления предикатов. Возьмём все схемы аксиом классического исчисления высказываний и добавим ещё две схемы аксиом (здесь везде θ свободен для подстановки вместо x в φ):

11. $(\forall x.\varphi) \rightarrow \varphi[x := \theta]$
12. $\varphi[x := \theta] \rightarrow \exists x.\varphi$

Добавим ещё два правила вывода (здесь везде x не входит свободно в φ):

$$\frac{\varphi \rightarrow \psi}{\varphi \rightarrow \forall x.\psi} \text{ Правило для } \forall$$

$$\frac{\psi \rightarrow \varphi}{(\exists x.\psi) \rightarrow \varphi} \text{ Правило для } \exists$$

def: Доказуемость, выводимость, полнота, корректность — аналогично исчислению высказываний.

1.5 Теоремы о исчислении предикатов

1.5.1 Теорема о дедукции

Если $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$, то $\Gamma, \alpha \vdash \beta$. Если $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ и в доказательстве не применяются правила для кванторов по свободным переменным из α , то $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$.

Доказательство:

(\Rightarrow) — как в КИВ (\Leftarrow) — та же схема, два новых случая.

Перестроим: $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n \equiv \beta$ в $\alpha \rightarrow \delta_1, \alpha \rightarrow \delta_2, \dots, \alpha \rightarrow \delta_n$.

Дополним: обоснуем $\alpha \rightarrow \delta_n$, если предыдущие уже обоснованы.

Два новых похожих случая: правила для \forall и \exists . Рассмотрим \forall .

Доказываем $(n) \quad \alpha \rightarrow \psi \rightarrow \forall x.\varphi$ (правило для \forall), значит, доказано $(k) \quad \alpha \rightarrow \psi \rightarrow \varphi$.

$(n - 0.9)$	$(\alpha \rightarrow \psi \rightarrow \varphi) \rightarrow (\alpha \& \psi) \rightarrow \varphi$	Т. о полноте КИВ
$(n - 0.6)$	$(\alpha \& \psi) \rightarrow \varphi$	М.Р. $k, n - 0.8$
$(n - 0.4)$	$(\alpha \& \psi) \rightarrow \forall x.\varphi$	Правило для \forall , $n - 0.6$
$(n - 0.3)$	$((\alpha \& \psi) \rightarrow \forall x.\varphi) \rightarrow (\alpha \rightarrow \psi \rightarrow \forall x.\varphi)$	Т. о полноте КИВ
(n)	$\alpha \rightarrow \psi \rightarrow \forall x.\varphi$	М.Р. $n - 0.4, n - 0.2$

Q.E.D.

def: $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n \models \alpha$, если α выполнено всегда, когда выполнено $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$.

Теорема

Если $\Gamma \vdash \alpha$ и в доказательстве не используются кванторы по свободным переменным из Γ , то $\Gamma \models \alpha$

1.5.2 Корректность подстановки

Теорема.

Если θ свободен для подстановки вместо x в φ , то $\llbracket \varphi \rrbracket^{x:=\llbracket \theta \rrbracket} = \llbracket \varphi[x := \theta] \rrbracket$

Доказательство (индукция по структуре φ)

- База: φ не имеет кванторов. Очевидно.
- Переход: пусть справедливо для ψ . Покажем для $\varphi = \forall y.\psi$.
 - $x = y$ либо $x \notin FV(\psi)$. Тогда: $\llbracket \forall y.\psi \rrbracket^{x:=\llbracket \theta \rrbracket} = \llbracket \forall y.\psi \rrbracket = \llbracket (\forall y.\psi)[x := \theta] \rrbracket$
 - $x \neq y$. Тогда: $\llbracket \forall y.\psi \rrbracket^{x:=\llbracket \theta \rrbracket} = \llbracket \psi \rrbracket^{y \in D; x:=\llbracket \theta \rrbracket} = \dots$

Свобода для подстановки: $y \notin \theta$.

$$\dots = \llbracket \psi \rrbracket^{x:=\llbracket \theta \rrbracket; y \in D} = \dots$$

Индукционное предположение.

$$\dots = \llbracket \psi[x := \theta] \rrbracket^{y \in D} = \llbracket \forall y.(\psi[x := \theta]) \rrbracket = \dots$$

Но $\forall y.(\psi[x := \theta]) \equiv (\forall y.\psi)[x := \theta]$ (как текст). Отсюда:

$$\dots = \llbracket (\forall y.\psi)[x := \theta] \rrbracket$$

1.5.3 Корректность исчисления предикатов

Теорема. Если $\Gamma \vdash \alpha$ и в доказательстве не используются кванторы по свободным переменным из $FV(\Gamma)$, то $\Gamma \models \alpha$

Доказательство:

Фиксируем D, F, P . Индукция по длине доказательства α : при любом E выполнено $\Gamma \models \alpha$ при длине доказательства n , покажем для $n + 1$.

- Схемы аксиом (1)..(10), правило М.Р.: аналогично И.В.
- Схемы (11) и (12), например, схема $(\forall x.\varphi) \rightarrow \varphi[x := \theta]$:

$$\llbracket (\forall x.\varphi) \rightarrow \varphi[x := \theta] \rrbracket = \llbracket ((\forall x.\varphi) \rightarrow \varphi)[x := \theta] \rrbracket = \llbracket (\forall x.\varphi) \rightarrow \varphi \rrbracket^{x:=\llbracket \theta \rrbracket} = \text{И}$$

- Правила для кванторов: например, введение \forall :

Пусть $\llbracket \psi \rightarrow \varphi \rrbracket = \text{И}$. Причём $x \notin FV(\Gamma)$ и $x \notin FV(\psi)$. То есть, при любом \S выполнено $\llbracket \psi \rightarrow \varphi \rrbracket^{x:=\S} = \text{И}$. Тогда $\llbracket \psi \rightarrow (\forall x.\varphi) \rrbracket = \text{И}$.

2 Лекция 6.

2.1 Теорема о полноте

Общая идея доказательства:

1. Надо справиться со слишком большим количеством вариантов. Модель задаётся как $\langle D, F, P, E \rangle$.
2. Для оценки в модели важно только какие формулы истинны. Поэтому факторизуем модели по истинности формул: модели \mathcal{M}_1 и \mathcal{M}_2 «похожи», если $\llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{M}_1} = \llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{M}_2}$ при всех φ .
3. Поступим так:
 - (а) построим эталонное множество моделей \mathfrak{M} , каждая модель из него соответствует какому-то своему классу эквивалентности моделей;
 - (б) докажем полноту \mathfrak{M} : если каждая $\mathcal{M} \in \mathfrak{M}$ предполагает $\mathcal{M} \models \varphi$, то $\vdash \varphi$;
 - (с) заметим, что если $\models \varphi$, то каждая $\mathcal{M} \in \mathfrak{M}$ предполагает $\mathcal{M} \models \varphi$.
4. В ходе доказательства нас ждёт множество технических препятствий.

def: Γ — **непротиворечивое множество формул**, если $\Gamma \not\vdash \alpha \ \& \ \neg\alpha$ для любого α

Примеры:

- непротиворечиво:
 - $\Gamma = \{A \rightarrow B \rightarrow A\}$
 - $\Gamma = \{P(x, y) \rightarrow \neg P(x, y), \forall x. \forall y. \neg P(x, y)\};$
- противоречиво:
 - $\Gamma = \{P \rightarrow \neg P, \neg P \rightarrow P\}$
 - так как $P \rightarrow \neg P, \neg P \rightarrow P \vdash \neg P \ \& \ \neg\neg P$
- и ещё непротиворечиво: $\Gamma = \{P(1), P(2), P(3), \dots\}$

def: Γ — **полное непротиворечивое множество замкнутых бескванторных формул**, если:

1. Γ содержит только замкнутые бескванторные формулы;
2. если α — некоторая замкнутая бескванторная формула, то либо $\alpha \in \Gamma$, либо $\neg\alpha \in \Gamma$.

def: Γ — **полное непротиворечивое множество замкнутых формул**, если:

1. Γ содержит только замкнутые формулы;
2. если α — некоторая замкнутая формула, то либо $\alpha \in \Gamma$, либо $\neg\alpha \in \Gamma$.

Теорема:

Пусть Γ — непротиворечивое множество замкнутых (бескванторных) формул. Тогда, какова бы ни была замкнутая (бескванторная) формула φ , хотя бы $\Gamma \cup \{\varphi\}$ или $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ — непротиворечиво

Доказательство:

Пусть это не так и найдутся такие Γ , φ и α , что

$$\begin{aligned}\Gamma, \varphi &\vdash \alpha \ \& \ \neg\alpha \\ \Gamma, \neg\varphi &\vdash \alpha \ \& \ \neg\alpha\end{aligned}$$

Тогда по лемме об исключении гипотезы

$$\Gamma \vdash \alpha \ \& \ \neg\alpha$$

То есть Γ не является непротиворечивым. Противоречие.

Q.E.D.

Теорема.

Пусть Γ — непротиворечивое множество замкнутых (бескванторных) формул. Тогда найдётся полное непротиворечивое множество замкнутых (бескванторных) формул Δ , что $\Gamma \subseteq \Delta$

Доказательство:

1. Занумеруем все формулы (их счётное количество): $\varphi_1, \varphi_2, \dots$
2. Построим семейство множеств $\{\Gamma_i\}$:

$$\Gamma_0 = \Gamma \quad \Gamma_{i+1} = \begin{cases} \Gamma_i \cup \{\varphi_i\}, & \text{если } \Gamma_i \cup \{\varphi_i\} \text{ непротиворечиво} \\ \Gamma_i \cup \{\neg\varphi_i\}, & \text{иначе} \end{cases}$$

3. Итоговое множество

$$\Delta = \bigcup_i \Gamma_i$$

4. Непротиворечивость Δ не следует из индукции — индукция гарантирует непротиворечивость только Γ_i при натуральном (т.е. *конечном*) i , потому...

Q.E.D.

Завершение доказательства теоремы о полноте

Δ непротиворечиво:

1. Пусть Δ противоречиво, то есть

$$\Delta \vdash \alpha \ \& \ \neg\alpha$$

2. Доказательство конечной длины и использует конечное количество гипотез $\{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n\} \subset \Delta$, то есть

$$\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n \vdash \alpha \ \& \ \neg\alpha$$

3. Пусть $\delta_i \in \Gamma_{d_i}$, тогда

$$\Gamma_{d_1} \cup \Gamma_{d_2} \cup \dots \cup \Gamma_{d_n} \vdash \alpha \ \& \ \neg\alpha$$

4. Но $\Gamma_{d_1} \cup \Gamma_{d_2} \cup \dots \cup \Gamma_{d_n} = \Gamma_{\max(d_1, d_2, \dots, d_n)}$, которое непротиворечиво, и потому

$$\Gamma_{d_1} \cup \Gamma_{d_2} \cup \dots \cup \Gamma_{d_n} \not\vdash \alpha \ \& \ \neg\alpha$$

Q.E.D

2.2 Модели для множеств формул

def: Моделью для множества формул F назовём такую модель \mathcal{M} , что при всяком $\varphi \in F$ выполнено $\llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{M}} = \text{И}$.

Альтернативное обозначение: $\mathcal{M} \models \varphi$.

Теорема.

Любое непротиворечивое множество замкнутых бескванторных формул имеет модель.

2.3 Конструкция модели

def: Пусть M — полное непротиворечивое множество замкнутых бескванторных формул. Тогда модель \mathcal{M} задаётся так:

1. D — множество всевозможных предметных выражений без предметных переменных. Оно непусто (язык обычно содержит много нуль-местных функций), но если пусто — добавим туда какое-нибудь одно значение, пусть “ z ”.
2. $\llbracket f(\theta_1, \dots, \theta_n) \rrbracket = \text{“}f\text{”} + \llbracket \theta_1 \rrbracket + \text{“},\text{”} + \dots + \text{“},\text{”} + \llbracket \theta_n \rrbracket + \text{“}”$
3. $\llbracket P(\theta_1, \dots, \theta_n) \rrbracket = \begin{cases} \text{И}, & \text{если } P(\theta_1, \dots, \theta_n) \in M \\ \text{Л}, & \text{иначе} \end{cases}$
4. Так как $D \neq \emptyset$, то найдётся $z \in D$. Тогда $\llbracket x \rrbracket = z$. Это ничему не мешает, так как формулы замкнуты.

Лемма.

Пусть φ — бескванторная формула, тогда $\mathcal{M} \models \varphi$ тогда и только тогда, когда $\varphi \in M$.

Доказательство (индукция по длине формулы φ)

1. База. φ — предикат. Требуемое очевидно по определению \mathcal{M} .
2. Переход. Пусть $\varphi = \alpha \star \beta$ (или $\varphi = \neg \alpha$), причём $\mathcal{M} \models \alpha$ ($\mathcal{M} \models \beta$) тогда и только тогда, когда $\alpha \in M$ ($\beta \in M$).

Тогда покажем требуемое для каждой связки в отдельности. А именно, для каждой связки покажем два утверждения:

- (a) если $\mathcal{M} \models \alpha \star \beta$, то $\alpha \star \beta \in M$.
- (b) если $\mathcal{M} \not\models \alpha \star \beta$, то $\alpha \star \beta \notin M$.

Q.E.D.

Если $\varphi = \alpha \rightarrow \beta$ и для любой формулы ζ , более короткой, чем φ , выполнено $\mathcal{M} \models \zeta$ тогда и только тогда, когда $\zeta \in M$, тогда:

1. если $\mathcal{M} \models \alpha \rightarrow \beta$, то $\alpha \rightarrow \beta \in M$;
2. если $\mathcal{M} \not\models \alpha \rightarrow \beta$, то $\alpha \rightarrow \beta \notin M$.

Доказательство (разбором случаев)

1. $\mathcal{M} \models \alpha \rightarrow \beta$: $\llbracket \alpha \rrbracket = \text{Л}$. Тогда по предположению $\alpha \notin M$, потому по полноте $\neg \alpha \in M$. И, поскольку в ИВ $\neg \alpha \vdash \alpha \rightarrow \beta$, то $M \vdash \alpha \rightarrow \beta$. Значит, $\alpha \rightarrow \beta \in M$, иначе по полноте $\neg(\alpha \rightarrow \beta) \in M$, что делает M противоречивым.

2. $\mathcal{M} \models \alpha \rightarrow \beta$: $\llbracket \alpha \rrbracket = \text{И}$ и $\llbracket \beta \rrbracket = \text{И}$. Рассуждая аналогично, используя $\alpha, \beta \vdash \alpha \rightarrow \beta$, приходим к $\alpha \rightarrow \beta \in M$.
3. $\mathcal{M} \not\models \alpha \rightarrow \beta$. Тогда $\llbracket \alpha \rrbracket = \text{И}$, $\llbracket \beta \rrbracket = \text{Л}$, то есть $\alpha \in M$ и $\neg\beta \in M$. Также, $\alpha, \neg\beta \vdash \neg(\alpha \rightarrow \beta)$, отсюда $M \vdash \neg(\alpha \rightarrow \beta)$. Предположим, что $\alpha \rightarrow \beta \in M$, то $M \vdash \alpha \rightarrow \beta$ — отсюда $\alpha \rightarrow \beta \notin M$.

Завершение доказательства теоремы о существовании модели

Доказательство:

Пусть M — непротиворечивое множество замкнутых бескванторных формул.

По теореме о пополнении существует M' — полное непротиворечивое множество замкнутых бескванторных формул, что $M \subseteq M'$.

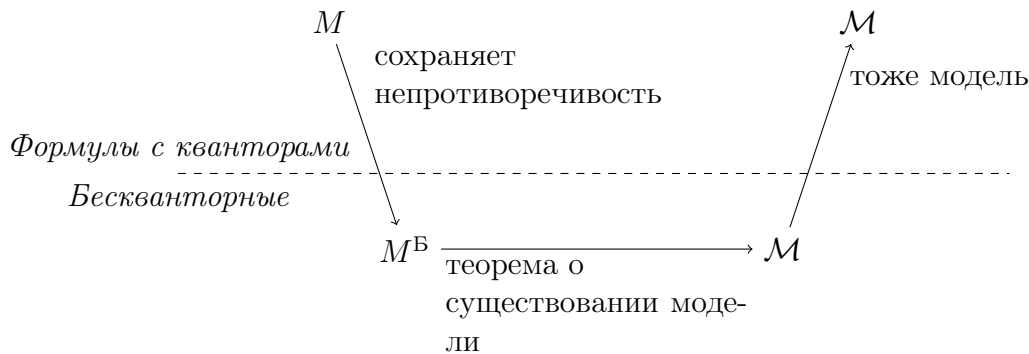
По лемме M' имеет модель, эта модель подойдёт для M .

2.4 Теорема Гёделя о полноте

Теорема Гёделя о полноте исчисления предикатов

Если M — непротиворечивое множество замкнутых формул, то оно имеет модель.

Схема доказательства



def: Формула φ имеет **поверхностные кванторы** (находится в **предварённой форме**), если соответствует грамматике

$$\varphi ::= \forall x.\varphi \mid \exists x.\varphi \mid \tau$$

где τ — формула без кванторов

Теорема.

Для любой замкнутой формулы ψ найдётся такая формула φ с поверхностными кванторами, что $\vdash \psi \rightarrow \varphi$ и $\vdash \varphi \rightarrow \psi$

Индукция по структуре, применение теорем о перемещении кванторов.

Построение M^*

- Пусть M — полное непротиворечивое множество замкнутых формул с поверхностными кванторами (очевидно, счётное). Построим семейство непротиворечивых множеств замкнутых формул M_k .
- Пусть d_i^k — семейство *свежих* констант, в M не встречающихся.

- Индуктивно построим M_k :
 - База: $M_0 = M$
 - Переход: положим $M_{k+1} = M_k \cup S$, где множество S получается перебором всех формул $\varphi_i \in M_k$.
 1. φ_i — формула без кванторов, пропустим;
 2. $\varphi_i = \forall x.\psi$ — добавим к S все формулы вида $\psi[x := \theta]$, где θ — всевозможные замкнутые термы, использующие символы из M_k ;
 3. $\varphi_i = \exists x.\psi$ — добавим к S формулу $\psi[x := d_i^{k+1}]$, где d_i^{k+1} — некоторая свежая, ранее не использовавшаяся в M_k , константа.

Лемма. Если M непротиворечиво, то каждое множество из M_k — непротиворечиво

Доказательство по индукции, база очевидна ($M_0 = M$). Переход:

- пусть M_k непротиворечиво, но M_{k+1} — противоречиво: $M_k, M_{k+1} \setminus M_k \vdash A \& \neg A$.
- Тогда (т.к. доказательство finite длины): $M_k, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n \vdash A \& \neg A$, где $\gamma_i \in M_{k+1} \setminus M_k$.
- По теореме о дедукции: $M_k \vdash \gamma_1 \rightarrow \gamma_2 \rightarrow \dots \rightarrow \gamma_n \rightarrow A \& \neg A$.
- Научимся выкидывать первую посылку: $M_k \vdash \gamma_2 \rightarrow \dots \rightarrow \gamma_n \rightarrow A \& \neg A$.
- И по индукции придём к противоречию: $M_k \vdash A \& \neg A$.

Q.E.D.

Лемма. Если $M_k \vdash \gamma \rightarrow W$ и $\gamma \in M_{k+1} \setminus M_k$, то $M_k \vdash W$.

Доказательство:

Покажем, как дополнить доказательство до $M_k \vdash W$, в зависимости от происхождения γ :

- Случай $\forall x.\varphi$: $\gamma = \varphi[x := \theta]$.

Допишем в конец доказательства:

$\forall x.\varphi$	(гипотеза)
$(\forall x.\varphi) \rightarrow (\varphi[x := \theta])$	(сх. акс. 11)
γ	(М.Р.)
W	(М.Р.)

- Случай $\exists x.\varphi$: $\gamma = \varphi[x := d_i^{k+1}]$

Перестроим доказательство $M_k \vdash \gamma \rightarrow W$: заменим во всём доказательстве d_i^{k+1} на y . Коллизий нет: под квантором d_i^{k+1} не стоит, переменной не является. Получим доказательство $M_k \vdash \gamma[d_i^{k+1} := y] \rightarrow W$ и дополним его:

$\varphi[x := y] \rightarrow W$	$\varphi[x := d_i^{k+1}][d_i^{k+1} := y]$
$(\exists y.\varphi[x := y]) \rightarrow W$	y не входит в W
$(\exists x.\varphi) \rightarrow (\exists y.\varphi[x := y])$	доказуемо (упражнение)
...	
$(\exists x.\varphi) \rightarrow W$	доказуемо как $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma) \vdash \alpha \rightarrow \gamma$
$\exists x.\varphi$	гипотеза
W	

Q.E.D.

def: $M^* = \bigcup_k M_k$ **Теорема** M^* непротиворечиво.**Доказательство:**

От противного: доказательство противоречия конечной длины, гипотезы лежат в максимальном M_k , тогда M_k противоречив.

def: M^B — множество всех бескванторных формул из M^* .

По непротиворечивому множеству M можем построить M^B и для него построить модель \mathcal{M} . Покажем, что эта модель годится для M^* (и для M , так как $M \subset M^*$).

Лемма. \mathcal{M} есть модель для M^* .

Доказательство Покажем, что при $\varphi \in M^*$ выполнено $\mathcal{M} \models \varphi$. Докажем индукцией по количеству кванторов в φ .

- База: φ без кванторов. Тогда $\varphi \in M^B$, отсюда $\mathcal{M} \models \varphi$ по построению \mathcal{M} .
- Переход: пусть утверждение выполнено для всех формул с n кванторами. Покажем, что это выполнено и для $n + 1$ кванторов.
 - Рассмотрим $\varphi = \exists x.\psi$, случай квантор всеобщности — аналогично.
 - Раз $\exists x.\psi \in M^*$, то существует k , что $\exists x.\psi \in M_k$.
 - Значит, $\psi[x := d_i^{k+1}] \in M_{k+1}$.
 - По индукционному предположению, $\mathcal{M} \models \psi[x := d_i^{k+1}]$ — в формуле n кванторов.
 - Но тогда $\llbracket \psi \rrbracket^{x:=d_i^{k+1}} = \text{И}$.
 - Отсюда $\mathcal{M} \models \exists x.\psi$.

Q.E.D.

Формулировка и доказательство теоремы Гёделя

Теорема Гёделя о полноте исчисления предикатов

Если M — замкнутое непротиворечивое множество формул, то оно имеет модель.

Доказательство:

- Построим по M множество формул с поверхностными кванторами M' .
- По M' построим непротиворечивое множество замкнутых бескванторных формул M^B ($M^B \subseteq M^*$, теорема о непротиворечивости M^*).
- Дополним его до полного, построим для него модель \mathcal{M} (теорема о существовании модели).
- \mathcal{M} будет моделью и для M' ($M' \subseteq M^*$, лемма о модели для M^*), и, очевидно, для M .

2.5 Полнота исчисления предикатов

Следствие из теоремы Гёделя о полноте Исчисление предикатов полно.

Доказательство:

- Пусть это не так, и существует формула φ , что $\models \varphi$, но $\not\vdash \varphi$.
- Тогда рассмотрим $M = \{\neg\varphi\}$.
- M непротиворечиво: если $\neg\varphi \vdash A \ \& \ \neg A$, то $\vdash \varphi$ (упражнение).
- Значит, у M есть модель \mathcal{M} , и $\mathcal{M} \models \neg\varphi$.
- Значит, $\llbracket \neg\varphi \rrbracket = \text{И}$, поэтому $\llbracket \varphi \rrbracket = \text{Л}$, поэтому $\not\models \varphi$. Противоречие.

2.6 Непротиворечивость исчисления предикатов

Теорема. Если у множества формул M есть модель \mathcal{M} , оно непротиворечиво.

Доказательство:

Пусть противоречиво: $M \vdash A \ \& \ \neg A$, в доказательстве использованы гипотезы $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$. Тогда $\vdash \delta_1 \rightarrow \delta_2 \rightarrow \dots \rightarrow \delta_n \rightarrow A \ \& \ \neg A$, то есть $\llbracket \delta_1 \rightarrow \delta_2 \rightarrow \dots \rightarrow \delta_n \rightarrow A \ \& \ \neg A \rrbracket = \text{И}$ (корректность). Поскольку все $\llbracket \delta_i \rrbracket_{\mathcal{M}} = \text{И}$, то и $\llbracket A \ \& \ \neg A \rrbracket_{\mathcal{M}} = \text{И}$ (анализ таблицы истинности импликации). Однако $\llbracket A \ \& \ \neg A \rrbracket = \text{Л}$. Противоречие.

Следствие: Исчисление предикатов непротиворечиво

Доказательство:

Рассмотрим $M = \emptyset$ и любую классическую модель.

Доказательства опираются на непротиворечивость метатеории.

Q.E.D.

2.7 Теорема Гёделя о компактности

Если Γ — некоторое семейство бескванторных формул, то Γ имеет модель тогда и только тогда, когда любое его конечное подмножество имеет модель.

Доказательство:

(\Rightarrow) : очевидно

(\Leftarrow) : пусть каждое конечное подмножество имеет модель. Тогда Γ непротиворечиво:

Иначе для любой σ выполнено $\Gamma \vdash \sigma$. В частности, для $\gamma \in \Gamma$ выполнено $\Gamma \vdash \neg\gamma$. Доказательство имеет конечную длину и использует конечное количество формул $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in \Gamma$. Тогда рассмотрим $\Sigma = \{\gamma, \gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ и модель S для неё. Тогда:

1. $\models_S \gamma$ (определение модели)
2. $\models_S \neg\gamma$ (теорема о корректности: $\Sigma \vdash \neg\gamma$, значит $\Sigma \models \neg\gamma$ в любой модели)

Значит, Γ имеет модель (вспомогательная теорема к теореме Гёделя о полноте).

Q.E.D.

3 Лекция 7:

3.1 Машина Тьюринга

def: Машина Тьюринга:

1. Внешний алфавит q_1, \dots, q_n , выделенный символ-заполнитель q_ϵ
2. Внутренний алфавит (состояний) s_1, \dots, s_k ; s_s — начальное, s_f — допускающее, s_r — отвергающее.
3. Таблица переходов $\langle k, s \rangle \Rightarrow \langle k', s', \leftrightarrow \rangle$

def: Состояние машины Тьюринга:

1. Бесконечная лента с символом-заполнителем q_ϵ , текст конечной длины.
2. Головка над определённым символом.
3. Символ состояния (состояние в узком смысле) — символ внутреннего алфавита.

Машина, меняющая все 0 на 1, а все 1 — на 0.

1. Внешний алфавит $\epsilon, 0, 1$.
2. Внутренний алфавит s_s, s_f (начальное и допускающее состояния соответственно).
3. Переходы:

	ϵ	0	1
s_s	$\langle s_f, \epsilon, \cdot \rangle$	$\langle s_s, 1, \rightarrow \rangle$	$\langle s_s, 0, \rightarrow \rangle$
s_f	$\langle s_f, \epsilon, \cdot \rangle$	$\langle s_f, 0, \cdot \rangle$	$\langle s_f, 1, \cdot \rangle$

def: Язык — множество строк

def: Язык L разрешим, если существует машина Тьюринга, которая для любого слова w переходит в допускающее состояние, если $w \in L$, и в отвергающее, если $w \notin L$.

3.1.1 Неразрешимость задачи останова

def: Рассмотрим все возможные описания машин Тьюринга. Составим упорядоченные пары: описание машины Тьюринга и входная строка. Из них выделим язык останавливающихся на данном входе машин Тьюринга.

Теорема

Язык всех останавливающихся машин Тьюринга неразрешим

Доказательство:

От противного. Пусть $S(x, y)$ — машина Тьюринга, определяющая, остановится ли машина x , примененная к строке y .

$$W(x) = \text{if } (S(x, x)) \{ \text{while } (\text{true}); \text{return } 0; \} \text{ else } \{ \text{return } 1; \}$$

Что вернёт $S(\text{code}(W), \text{code}(W))$?

Q.E.D.

Кодируем состояния:

1. внешний алфавит: n 0-местных функциональных символов q_1, \dots, q_n ; q_ϵ — символ-заполнитель.

2. список: ε и $c(l, s)$; «abc» представим как $c(q_a, c(q_b, c(q_c, \varepsilon)))$.
3. положение головки: « $\underline{a}bpc$ » как $(c(q_b, c(q_a, \varepsilon)), c(q_p, c(q_c, \varepsilon)))$.
4. внутренний алфавит: k 0-местных функциональных символов s_1, \dots, s_k . Из них выделенные s_s — начальное и s_f — допускающее состояние.

Достижимые состояния:

Предикатный символ $F_{x,y}(w_l, w_r, s)$: если у машины x с начальной строкой y состояние s достижимо на строке $rev(w_l)@w_r$.

Будем накладывать условия: семейство формул C_m .

Очевидно, начальное состояние достижимо:

$$C_0 := F_{x,y}(\varepsilon, y, s_s)$$

Кодируем переходы:

1. Занумеруем переходы.
2. Закодируем переход m :

$$\langle k, s \rangle \Rightarrow \langle k', s', \rightarrow \rangle, \text{ в случае } q_k \neq q_\varepsilon$$

$$C_m = \forall w_l. \forall w_r. F_{x,y}(w_l, c(q_k, w_r), s_s) \rightarrow F_{x,y}(c(q_{k'}, w_l), w_r, s_{s'})$$

(здесь требуется, чтобы под головкой находился непустой символ q_k , потому мы обязательно требуем, чтобы лента была непуста)

3. Переход посложнее:

$$\langle k, s \rangle \Rightarrow \langle k', s', \leftarrow \rangle, \text{ в случае } q_k \neq q_\varepsilon$$

$$C_m = \forall w_l. \forall w_r. \forall t. F_{x,y}(c(t, w_l), c(q_k, w_r), s_s) \rightarrow F_{x,y}(w_l, c(t, c(q_{k'}, w_r)), s_{s'}) \& \forall w_l. \forall w_r. F_{x,y}(\varepsilon, c(q_k, w_r), s_s) \rightarrow F_{x,y}(\varepsilon, c(q_\varepsilon, c(q_{k'}, w_r)), s_{s'})$$

4. и т.п.

Итоговая формула:

$$C = C_0 \& C_1 \& \dots \& C_n$$

«правильное начальное состояние и правильные переходы между состояниями»

Теорема:

Состояние s со строкой $rev(w_l)@w_r$ достижимо тогда и только тогда, когда $C \vdash F_{x,y}(w_l, w_r, s)$

Доказательство:

(\Leftarrow) Рассмотрим модель: предикат $F_{x,y}(w_l, w_r, s)$ положим истинным, если состояние достижимо. Это — модель для C (по построению C_m). Значит, доказуемость влечёт истинность (по корректности).

(\Rightarrow) Индукция по длине лога исполнения.

Неразрешимость исчисления предикатов: доказательство

Теорема. Язык всех доказуемых формул исчисления предикатов неразрешим

Т.е. нет машины Тьюринга, которая бы по любой формуле α определяла, доказуема ли она.

Доказательство:

Пусть существует машина Тьюринга, разрешающая любую формулу. На её основе тогда несложно построить некоторую машину Тьюринга, перестраивающую любую машину S (с допускающим состоянием s_f и входом y) в её ограничения C и разрешающую формулу ИП $C \rightarrow \exists w_l. \exists w_r. F_{S,y}(w_l, w_r, s_f)$. Эта машина разрешит задачу останова.

Q.E.D.

3.2 Аксиоматика Пеано и формальная арифметика

*«Бог создал целые числа, всё остальное — дело рук человека.»
Леопольд Кронекер, 1886 г.*

1. Рациональные (\mathbb{Q}).

$Q = \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ — множество всех простых дробей.

$\langle p, q \rangle$ — то же, что $\frac{p}{q}$

$\langle p_1, q_1 \rangle \equiv \langle p_2, q_2 \rangle$, если $p_1 q_2 = p_2 q_1$

$\mathbb{Q} = Q / \equiv$

2. Вещественные (\mathbb{R}). $X = \{A, B\}$, где $A, B \subseteq \mathbb{Q}$ — дедекиндово сечение, если:

(a) $A \cup B = \mathbb{Q}$

(b) Если $a \in A$, $x \in \mathbb{Q}$ и $x \leq a$, то $x \in A$

(c) Если $b \in B$, $x \in \mathbb{Q}$ и $b \leq x$, то $x \in B$

(d) A не содержит наибольшего.

\mathbb{R} — множество всех возможных дедекиндовых сечений.

$\sqrt{2} = \{\{x \in \mathbb{Q} \mid x < 0 \vee x^2 < 2\}, \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0 \ \& \ x^2 > 2\}\}$

Целые числа тоже попробуем определить

$\mathbb{Z} : \dots - 3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$

- $Z = \{\langle x, y \rangle \mid x, y \in \mathbb{N}_0\}$

- Интуиция: $\langle x, y \rangle = x - y$

-

$$\langle a, b \rangle + \langle c, d \rangle = \langle a + c, b + d \rangle$$

$$\langle a, b \rangle - \langle c, d \rangle = \langle a + d, b + c \rangle$$

- Пусть $\langle a, b \rangle \equiv \langle c, d \rangle$, если $a + d = b + c$. Тогда $\mathbb{Z} = Z / \equiv$

- $0 = [\langle 0, 0 \rangle]$, $1 = [\langle 1, 0 \rangle]$, $-7 = [\langle 0, 7 \rangle]$

3.3 Натуральные числа: аксиоматика Пеано

$$\mathbb{N} : 1, 2, \dots \text{ или } \mathbb{N}_0 : 0, 1, 2, \dots$$

def: N (или, более точно, $\langle N, 0, (') \rangle$) *соответствует аксиоматике Пеано*, если следующее определено/выполнено:

1. Операция «штрих» $(') : N \rightarrow N$, причём нет $a, b \in N$, что $a \neq b$, но $a' = b'$.

Если $x = y'$, то x назовём следующим за y , а y — предшествующим x .

2. Константа $0 \in N$: нет $x \in N$, что $x' = 0$.
3. Индукция. Каково бы ни было свойство («предикат») $P : N \rightarrow V$, если:

(a) $P(0)$

(b) При любом $x \in N$ из $P(x)$ следует $P(x')$

то при любом $x \in N$ выполнено $P(x)$.

Как построить? Например, в стиле алгебры Линденбаума:

1. N — язык, порождённый грамматикой $\nu ::= 0 \mid \nu \langle ' \rangle$
2. 0 — это «0», x' — это $x + \langle ' \rangle$

3.3.1 Обозначения и определения

def: $1 = 0'$, $2 = 0''$, $3 = 0'''$, $4 = 0''''$, $5 = 0'''''$, $6 = 0''''''$, $7 = 0'''''''$, $8 = 0''''''''$, $9 = 0'''''''''$

def:

$$a + b = \begin{cases} a, & \text{если } b = 0 \\ (a + c)', & \text{если } b = c' \end{cases}$$

Например,

$$2 + 2 = 0'' + 0'' = (0'' + 0')' = ((0'' + 0)')' = ((0'')')' = 0'''' = 4$$

def:

$$a \cdot b = \begin{cases} 0, & \text{если } b = 0 \\ a \cdot c + a, & \text{если } b = c' \end{cases}$$

3.4 Уточнение исчисления предикатов

- Пусть требуется доказывать утверждения про равенство. Введём $E(p, q)$ — предикат «равенство».
- Однако $\not\models E(p, q) \rightarrow E(q, p)$: если $D = \{0, 1\}$ и $E(p, q) ::= (p > q)$, то $\not\models E(p, q) \rightarrow E(q, p)$.
- Конечно, можем указывать $\forall p. \forall q. E(p, q) \rightarrow E(q, p) \vdash \varphi$.
- Но лучше добавим аксиому $\forall p. \forall q. E(p, q) \rightarrow E(q, p)$.
- Добавив необходимые аксиомы, получим *теорию первого порядка*.

3.5 Теория первого порядка

def: Теорией первого порядка назовём исчисление предикатов с дополнительными («нелогическими» или «математическими»):

- предикатными и функциональными символами;
- аксиомами.

Сущности, взятые из исходного исчисления предикатов, назовём *логическими*

3.6 Порядок логики/теории

Порядок	Кванторы	Формализует суждения. . .	Пример
нулевой	запрещены	об отдельных значениях	И.В.
первый	по предметным переменным $\{2, 3, 5, 7, \dots\} = \{t \mid \forall p. \forall q. (p \neq 1 \ \& \ q \neq 1) \rightarrow (t \neq p \cdot q)\}$	о множествах	И.П.
второй	по предикатным переменным $S = \{\{t \mid P(t)\} \mid \varphi[p := P]\}$	о множествах множеств	Типы
...

Пример логики 2 порядка

$\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha$ (сх. акс. 1) $\forall a. \forall b. a \rightarrow b \rightarrow a$
`let rec map f l = match l with` `map : $\forall a. \forall b. (a \rightarrow b) \rightarrow a \text{ list} \rightarrow b \text{ list}$`
`| [] -> []`
`| l1::ls -> f l1 :: map f ls`
`map ((+) 1) [1;2;3] = [2;3;4]`

3.7 Формальная арифметика

def: Формальная арифметика — теория первого порядка, со следующими добавленными нелогическими . . .

- двухместными функциональными символами $(+)$, (\cdot) ; одноместным функциональным символом $(')$, нульместным функциональным символом 0 ;
- двухместным предикатным символом $(=)$;
- восемью нелогическими *аксиомами*:

$$\begin{array}{ll}
 (A1) \ a = b \rightarrow a = c \rightarrow b = c & (A5) \ a + 0 = a \\
 (A2) \ a = b \rightarrow a' = b' & (A6) \ a + b' = (a + b)' \\
 (A3) \ a' = b' \rightarrow a = b & (A7) \ a \cdot 0 = 0 \\
 (A4) \ \neg a' = 0 & (A8) \ a \cdot b' = a \cdot b + a
 \end{array}$$

- нелогической схемой аксиом индукции $\psi[x := 0] \ \& \ (\forall x. \psi \rightarrow \psi[x := x']) \rightarrow \psi$ с метапеременными x и ψ .

Пример: Докажем, что $a = a$:

Пусть $\top ::= 0 = 0 \rightarrow 0 = 0 \rightarrow 0 = 0$, тогда:

- | | | |
|------|---|--------------------|
| (1) | $a = b \rightarrow a = c \rightarrow b = c$ | (Акс. A1) |
| (2) | $(a = b \rightarrow a = c \rightarrow b = c) \rightarrow \top \rightarrow (a = b \rightarrow a = c \rightarrow b = c)$ | (Сх. акс. 1) |
| (3) | $\top \rightarrow (a = b \rightarrow a = c \rightarrow b = c)$ | (М.Р. 1, 2) |
| (4) | $\top \rightarrow (\forall c. a = b \rightarrow a = c \rightarrow b = c)$ | (Введ. \forall) |
| (5) | $\top \rightarrow (\forall b. \forall c. a = b \rightarrow a = c \rightarrow b = c)$ | (Введ. \forall) |
| (6) | $\top \rightarrow (\forall a. \forall b. \forall c. a = b \rightarrow a = c \rightarrow b = c)$ | (Введ. \forall) |
| (7) | \top | (Сх. акс 1) |
| (8) | $(\forall a. \forall b. \forall c. a = b \rightarrow a = c \rightarrow b = c)$ | (М.Р. 7, 6) |
| (9) | $(\forall a. \forall b. \forall c. a = b \rightarrow a = c \rightarrow b = c) \rightarrow$
$\rightarrow (\forall b. \forall c. a + 0 = b \rightarrow a + 0 = c \rightarrow b = c)$ | (Сх. акс. 11) |
| (10) | $\forall b. \forall c. a + 0 = b \rightarrow a + 0 = c \rightarrow b = c$ | (М.Р. 8, 9) |
| (12) | $\forall c. a + 0 = a \rightarrow a + 0 = c \rightarrow a = c$ | (М.Р. 10, 11) |
| (14) | $a + 0 = a \rightarrow a + 0 = a \rightarrow a = a$ | (М.Р. 12, 13) |
| (15) | $a + 0 = a$ | (Акс. A5) |
| (16) | $a + 0 = a \rightarrow a = a$ | (М.Р. 15, 14) |
| (17) | $a = a$ | (М.Р. 15, 16) |

4 Лекция 8.

4.1 Арифметизация в работах Лейбница

- Любой термин — пара взаимно простых чисел $+a - b$. Например, мудрый — $+70 - 33$, благочестивый — $+10 - 3$.
- Общеутвердительное предложение (каждый $+a - b$ есть $+c - d$): $a : c$ и $b : d$.
Всякий мудрый есть благочестивый ($70 = 10 \cdot 7$, $33 = 3 \cdot 11$).
- Частноотрицательное предложение — не верно общеутвердительное.
- Общеотрицательное предложение — когда a, d или b, c имеют общий делитель, отличный от 1:
Ни один благочестивый ($+10 - 3$) не есть несчастный ($+5 - 14$), так как $10 = 2 \cdot 5$ и $14 = 2 \cdot 7$.

4.2 Соглашения о записи

- Рассматриваем функции $\mathbb{N}_0^n \rightarrow \mathbb{N}_0$.
- Обозначим вектор $\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$ как \vec{x} .

Примитивы Z, N, U, S

1. Примитив «Ноль» (Z)

$$Z : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0, \quad Z(x_1) = 0$$

2. Примитив «Инкремент» (N)

$$N : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0, \quad N(x_1) = x_1 + 1$$

3. Примитив «Проекция» (U) — семейство функций; пусть $k, n \in \mathbb{N}_0, k \leq n$

$$U_n^k : \mathbb{N}_0^n \rightarrow \mathbb{N}_0, \quad U_n^k(\vec{x}) = x_k$$

4. Примитив «Подстановка» (S) — семейство функций; пусть $g : \mathbb{N}_0^k \rightarrow \mathbb{N}_0, f_1, \dots, f_k : \mathbb{N}_0^n \rightarrow \mathbb{N}_0$

$$S\langle g, f_1, f_2, \dots, f_k \rangle(\vec{x}) = g(f_1(\vec{x}), \dots, f_k(\vec{x}))$$

Примитив «примитивная рекурсия», R

Пусть $f : \mathbb{N}_0^n \rightarrow \mathbb{N}_0$ и $g : \mathbb{N}_0^{n+2} \rightarrow \mathbb{N}_0$. Тогда $R\langle f, g \rangle : \mathbb{N}_0^{n+1} \rightarrow \mathbb{N}_0$, причём

$$R\langle f, g \rangle(\vec{x}, y) = \begin{cases} f(\vec{x}), & y = 0 \\ g(\vec{x}, y - 1, R\langle f, g \rangle(\vec{x}, y - 1)), & y > 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} R\langle f, g \rangle(\vec{x}, 3) &= g(\vec{x}, 2, R\langle f, g \rangle(\vec{x}, 2)) \\ &= g(\vec{x}, 2, g(\vec{x}, 1, R\langle f, g \rangle(\vec{x}, 1))) \\ &= g(\vec{x}, 2, g(\vec{x}, 1, g(\vec{x}, 0, R\langle f, g \rangle(\vec{x}, 0)))) \\ &= g(\vec{x}, 2, g(\vec{x}, 1, g(\vec{x}, 0, f(\vec{x})))) \end{aligned}$$

def: Функция f — примитивно-рекурсивна, если может быть выражена как композиция примитивов Z, N, U, S и R .

4.3 Примитивно-рекурсивные функции: $x + y$

Лемма: $f(a, b) = a + b$ примитивно-рекурсивна

Доказательство:

$$f = R\langle U_1^1, S\langle N, U_3^3 \rangle \rangle:$$

$$R\langle f, g \rangle(x, y) = \begin{cases} f(x), & y = 0 \\ g(x, y - 1, R\langle f, g \rangle(x, y - 1)), & y > 0 \end{cases}$$

- База. $R\langle U_1^1, S\langle N, U_3^3 \rangle \rangle(x, 0) = U_1^1(x) = x$
- Переход. $R\langle U_1^1, S\langle N, U_3^3 \rangle \rangle(x, y + 1) =$
 $\dots = S\langle N, U_3^3 \rangle(x, y, R\langle U_1^1, S\langle N, U_3^3 \rangle \rangle(x, y)) =$
 $\dots = S\langle N, U_3^3 \rangle(x, y, x + y) =$
 $\dots = N(x + y) = x + y + 1$

Q.E.D.

Какие функции примитивно-рекурсивные?

1. Сложение, вычитание
2. Умножение, деление
3. Вычисление простых чисел
4. Неформально: все функции, вычисляемые конечным числом вложенных циклов `for`:

```
for (int i1 = 0; i1 < g1(x1...xn); i1++) {
    for (int i2 = 0; i2 < g2(x1...xn, i1); i2++) {
        ...
        for (int ik = 0; ik < gk(x1...xn, i1, i2...); ik++) {
            // выражение без циклов
        }
        ...
    }
}
```

4.4 Общерекурсивные функции

def: Функция — **общерекурсивная**, если может быть построена при помощи примитивов Z , N , U , S , R и примитива минимизации:

$$M\langle f \rangle(x_1, x_2, \dots, x_n) = \min\{y : f(x_1, x_2, \dots, x_n, y) = 0\}$$

Если $f(x_1, x_2, \dots, x_n, y) > 0$ при любом y , результат не определён.

Пример: Пусть $f(x, y) = x - y^2$, тогда $\lceil \sqrt{x} \rceil = M\langle f \rangle(x)$

```
int sqrt(int x) {
    int y = 0;
    while (x - y*y > 0) y++;
    return y;
}
```


def: Функция Аккермана:

$$A(m, n) = \begin{cases} n + 1, & m = 0 \\ A(m - 1, 1), & m > 0, n = 0 \\ A(m - 1, A(m, n - 1)), & m > 0, n > 0 \end{cases}$$

Теорема.

Пусть $f(\vec{x})$ — примитивно-рекурсивная. Тогда найдётся k , что $f(\vec{x}) < A(k, \max(\vec{x}))$

Доказательство:

Индукция по структуре f .

1. $f = Z$, тогда $k = 0$, т.к. $A(0, x) = x + 1 > Z(x) = 0$;
2. $f = N$, тогда $k = 1$, т.к. $A(1, x) = x + 2 > N(x) = x + 1$;
3. $f = U_s^n$, тогда $k = 0$, т.к. $f(\vec{x}) \leq \max(\vec{x}) < A(0, \max(\vec{x}))$;
4. $f = S\langle g, h_1, \dots, h_n \rangle$, тогда $k = k_g + \max(k_{h_1}, \dots, k_{h_n}) + 2$;
5. $f = R\langle g, h \rangle$, тогда $k = \max(k_g, k_h) + 2$.

Q.E.D.

Лемма: Пусть $f = R\langle g, h \rangle$. Тогда при $k = \max(k_g, k_h) + 2$ выполнено $f(\vec{x}, y) \leq A^{(y+1)}(k - 2, \max(\vec{x}, y))$.

Доказательство:

Индукция по y .

- База: $y = 0$. Тогда: $f(\vec{x}, 0) = g(\vec{x}) \leq A(k_g, \max(\vec{x})) \leq A^{(1)}(k - 2, \max(\vec{x}, 0))$.
- Переход: пусть $f(\vec{x}, y) \leq A^{(y+1)}(k - 2, \max(\vec{x}, y))$. Тогда $f(\vec{x}, y + 1) = h(\vec{x}, y, f(\vec{x}, y)) \leq A(k_h, \max(\vec{x}, y, f(\vec{x}, y))) \leq A(k_h, \max(\vec{x}, y, A^{(y+1)}(k - 2, \max(\vec{x}, y)))) = A(k_h, A^{(y+1)}(k - 2, \max(\vec{x}, y))) \leq A^{(y+2)}(k - 2, \max(\vec{x}, y + 1))$

Q.E.D.

Заметим, что $A^{(y+1)}(k - 2, \max(\vec{x}, y)) \leq A^{(\max(\vec{x}, y)+1)}(k - 2, \max(\vec{x}, y)) \leq A^{(\max(\vec{x}, y)+2)}(k - 2, \max(\vec{x}, y)) < A(k, \max(\vec{x}, y))$

4.5 Тезис Чёрча

Тезис Чёрча для общерекурсивных функций: любая эффективно-вычислимая функция $\mathbb{N}_0^k \rightarrow \mathbb{N}_0$ является общерекурсивной.

def: Запись вида $\psi(\theta_1, \dots, \theta_n)$ означает $\psi[x_1 := \theta_1, \dots, x_n := \theta_n]$

def: Литерал числа

$$\bar{a} = \begin{cases} 0, & \text{если } a = 0 \\ (\bar{b})', & \text{если } a = b + 1 \end{cases}$$

Пример: пусть $\psi := x_1 = 0$. Тогда $\psi(\bar{3})$ соответствует формуле $0''' = 0$

4.6 Выразимость отношений в Ф.А.

def: Будем говорить, что отношение $R \subseteq \mathbb{N}_0^n$ **выразимо в Ф.А.**, если существует формула ρ , что:

1. если $\langle a_1, \dots, a_n \rangle \in R$, то $\vdash \rho(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n})$
2. если $\langle a_1, \dots, a_n \rangle \notin R$, то $\vdash \neg \rho(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n})$

Теорема

Отношение «равно» выразимо в Ф.А.: $R = \{\langle x, x \rangle \mid x \in \mathbb{N}_0\}$

Доказательство:

Пусть $\rho := x_1 = x_2$. Тогда:

- $\vdash p = p$ при $p := \bar{k}$ при всех $k \in \mathbb{N}_0$: $\vdash 0 = 0$, $\vdash 0' = 0'$, $\vdash 0'' = 0''$, ...
- $\vdash \neg p = q$ при $p := \bar{k}$, $q := \bar{s}$ при всех $k, s \in \mathbb{N}_0$ и $k \neq s$.
 $\vdash \neg 0 = 0'$, $\vdash \neg 0 = 0''$, $\vdash \neg 0''' = 0'$, ...

Q.E.D.

4.7 Представимость функций в Ф.А.

def: Будем говорить, что функция $f : \mathbb{N}_0^n \rightarrow \mathbb{N}_0$ **представима в Ф.А.**, если существует формула φ , что:

1. если $f(a_1, \dots, a_n) = u$, то $\vdash \varphi(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n}, \overline{u})$
2. если $f(a_1, \dots, a_n) \neq u$, то $\vdash \neg \varphi(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n}, \overline{u})$
3. для всех $a_i \in \mathbb{N}_0$ выполнено $\vdash (\exists x. \varphi(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n}, x)) \& (\forall p. \forall q. \varphi(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n}, p) \& \varphi(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n}, q) \rightarrow p = q)$

4.8 Соответствие рекурсивных и представимых функций

Теорема. Любая рекурсивная функция представима в Ф.А.

Теорема. Любая представимая в Ф.А. функция рекурсивна.

Теорема. Примитивы Z , N и U_n^k представимы в Ф.А.

Доказательство:

- $\zeta(x_1, x_2) := x_2 = 0$, формальнее: $\zeta(x_1, x_2) := x_1 = x_1 \& x_2 = 0$
- $\nu(x_1, x_2) := x_2 = x'_1$
- $v(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) := x_k = x_{n+1}$
 формальнее: $v(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) := (\bigwedge_{i \neq k, n+1} x_i = x_i) \& x_k = x_{n+1}$

4.9 Примитив S представим в Ф.А.

$$S\langle f, g_1, \dots, g_k \rangle(x_1, \dots, x_n) = f(g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_k(x_1, \dots, x_n))$$

Теорема.

Пусть функции f, g_1, \dots, g_k представимы в Ф.А. Тогда $S\langle f, g_1, \dots, g_k \rangle$ представима в Ф.А.

Доказательство:

Пусть f, g_1, \dots, g_k представляются формулами $\varphi, \gamma_1, \dots, \gamma_k$.

Тогда $S\langle f, g_1, \dots, g_k \rangle$ будет представлена формулой

$$\exists g_1 \dots \exists g_k. \varphi(g_1, \dots, g_k, x_{n+1}) \& \gamma_1(x_1, \dots, x_n, g_1) \& \dots \& \gamma_k(x_1, \dots, x_n, g_k)$$

4.10 β -функция Гёделя

Задача: закодировать последовательность натуральных чисел произвольной длины.

def: β -функция Гёделя: $\beta(b, c, i) := b \% (1 + (i + 1) \cdot c)$

Здесь $(\%)$ — остаток от деления.

Теорема β -функция Гёделя представима в Ф.А. формулой

$$\hat{\beta}(b, c, i, d) := \exists q. (b = q \cdot (1 + c \cdot (i + 1)) + d) \& (d < 1 + c \cdot (i + 1))$$

Деление b на x с остатком: найдутся частное (q) и остаток (d) , что $b = q \cdot x + d$ и $0 \leq d < x$.

Теорема Если $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{N}_0$, то найдутся такие $b, c \in \mathbb{N}_0$, что $a_i = \beta(b, c, i)$

Теорема: Китайская теорема об остатках (вариант формулировки): если u_0, \dots, u_n — попарно взаимно просты, и $0 \leq a_i < u_i$, то существует такой b , что $a_i = b \% u_i$.

Доказательство:

Положим $c = \max(a_0, \dots, a_n, n)!$ и $u_i = 1 + c \cdot (i + 1)$.

- $\text{НОД}(u_i, u_j) = 1$, если $i \neq j$.

Пусть p — простое, $u_i : p$ и $u_j : p$ ($i < j$). Заметим, что $u_j - u_i = c \cdot (j - i)$. Значит, $c : p$ или $(j - i) : p$. Так как $j - i \leq n$, то $c : (j - i)$, потому если и $(j - i) : p$, всё равно $c : p$. Но и $(1 + c \cdot (i + 1)) : p$, отсюда $1 : p$ — что невозможно.

- $0 \leq a_i < u_i$.

Условия китайской теоремы об остатках выполнены и найдётся b , что

$$a_i = b \% (1 + c \cdot (i + 1)) = \beta(b, c, i)$$

Q.E.D.

4.11 Примитив «примитивная рекурсия» представим в Ф.А.

Пусть $f : \mathbb{N}_0^n \rightarrow \mathbb{N}_0$ и $g : \mathbb{N}_0^{n+2} \rightarrow \mathbb{N}_0$ представлены формулами φ и γ .

Зафиксируем $x_1, \dots, x_n, y \in \mathbb{N}_0$.

Шаг вычисления

$$R\langle f, g \rangle(x_1, \dots, x_n, 0) = f(x_1, \dots, x_n)$$

$$R\langle f, g \rangle(x_1, \dots, x_n, 1) = g(x_1, \dots, x_n, 0, a_0)$$

...

$$R\langle f, g \rangle(x_1, \dots, x_n, y) = g(x_1, \dots, x_n, y-1, a_{y-1})$$

Об. Утверждение в Ф.А.

$$a_0 \vdash \varphi(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}, \overline{a_0})$$

$$a_1 \vdash \gamma(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}, 0, \overline{a_0}, \overline{a_1})$$

$$a_y \vdash \gamma(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}, \overline{y-1}, \overline{a_{y-1}}, \overline{a_y})$$

По свойству β -функции, найдутся b и c , что $\beta(b, c, i) = a_i$ для $0 \leq i \leq y$.

Теорема.

Примитив $R\langle f, g \rangle$ представим в Ф.А. формулой $\rho(x_1, \dots, x_n, y, a)$:

$$\begin{aligned} & \exists b. \exists c. (\exists a_0. \hat{\beta}(b, c, 0, a_0) \& \varphi(x_1, \dots, x_n, a_0)) \\ & \& \forall k. k < y \rightarrow \exists d. \exists e. \hat{\beta}(b, c, k, d) \& \hat{\beta}(b, c, k', e) \& \gamma(x_1, \dots, x_n, k, d, e) \\ & \& \hat{\beta}(b, c, y, a) \end{aligned}$$

4.12 Представимость рекурсивных функций в Ф.А.

Теорема.

Пусть функция $f : \mathbb{N}_0^{n+1} \rightarrow \mathbb{N}_0$ представима в Ф.А. формулой $\varphi(x_1, \dots, x_n, y, r)$. Тогда примитив $M\langle f \rangle$ представим в Ф.А. формулой

$$\mu(x_1, \dots, x_n, y) := \varphi(x_1, \dots, x_n, y, 0) \& \forall u. u < y \rightarrow \neg \varphi(x_1, \dots, x_n, u, 0)$$

Теорема.

Если f — рекурсивная функция, то она представима в Ф.А.

Индукция по структуре f .

4.13 Рекурсивность представимых в Ф.А. функций

Фиксируем f и x_1, x_2, \dots, x_n . Обозначим $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. По представимости нам известна φ , что $\vdash \varphi(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n}, \overline{y})$. Давайте просто переберём все результаты и доказательства!

1. Закодируем доказательства натуральными числами.
2. Напишем рекурсивную функцию, проверяющую доказательства на корректность.
3. Параллельный перебор значений и доказательств: $s = 2^y \cdot 3^p$. Переберём все s , по s получим y и p . Проверим, что p — код доказательства $\vdash \varphi(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n}, \overline{y})$.

4.14 Гёделева нумерация

1. Отдельный символ.

Номер	Символ	Номер	Символ	Имя	k, n	Гёделев номер
3	(17	&	0	0, 0	$27 + 6$
5)	19	\forall	(')	0, 1	$27 + 6 \cdot 3$
7	,	21	\exists	(+)	0, 2	$27 + 6 \cdot 9$
9	.	23	\vdash	(.)	1, 2	$27 + 6 \cdot 2 \cdot 9$
11	\neg	$25 + 6 \cdot k$	x_k	(=)	0, 2	$29 + 6 \cdot 9$
13	\rightarrow	$27 + 6 \cdot 2^k \cdot 3^n$	f_k^n			
15	\vee	$29 + 6 \cdot 2^k \cdot 3^n$	P_k^n			

2. Формула. $\phi \equiv s_0 s_1 \dots s_{n-1}$. Гёделев номер: $\ulcorner \phi \urcorner = 2^{\ulcorner s_0 \urcorner} \cdot 3^{\ulcorner s_1 \urcorner} \cdot \dots \cdot p_{n-1}^{\ulcorner s_{n-1} \urcorner}$.

3. Доказательство. $\Pi = \delta_0 \delta_1 \dots \delta_{k-1}$, его гёделев номер: $\ulcorner \Pi \urcorner = 2^{\ulcorner \delta_0 \urcorner} \cdot 3^{\ulcorner \delta_1 \urcorner} \cdot \dots \cdot p_{k-1}^{\ulcorner \delta_{k-1} \urcorner}$

Теорема.

Следующая функция рекурсивна:

$$\text{proof}(f, x_1, x_2, \dots, x_n, y, p) = \begin{cases} 1, & \text{если } \vdash \phi(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n}, \overline{y}), \\ p - \text{гёделев номер вывода, } f = \ulcorner \phi \urcorner \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Идея доказательства

1. Проверка доказательства вычислима.
2. Согласно тезису Чёрча, любая вычислимая функция вычислима с помощью рекурсивных функций.

Перебор доказательств

Лемма.

Следующие функции рекурсивны:

1. Функции $\text{plog}_k(n) = \max\{p : n : k^p\}$, $\text{fst}(x) = \text{plog}_2(x)$ и $\text{snd}(x) = \text{plog}_3(x)$.
2. Числовые литералы: $\overline{k} : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$, $\overline{k}(x) = k$.

Теорема.

Если $f : \mathbb{N}_0^n \rightarrow \mathbb{N}_0$, и f представима в Ф.А. формулой φ , то f — рекурсивна.

Доказательство:

Пусть заданы x_1, x_2, \dots, x_n . Ищем $\langle y, p \rangle$, что $\text{proof}(\ulcorner \varphi \urcorner, x_1, x_2, \dots, x_n, y, p) = 1$, напомним: $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $p = \ulcorner \Pi \urcorner$, Π — доказательство $\varphi(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n}, \overline{y})$.

$$f = S\langle \text{fst}, M\langle S\langle \text{proof}, \overline{\ulcorner \varphi \urcorner}, U_{n+1}^1, U_{n+1}^2, \dots, U_{n+1}^n, S\langle \text{fst}, U_{n+1}^{n+1} \rangle, S\langle \text{snd}, U_{n+1}^{n+1} \rangle \rangle \rangle \rangle$$

5 Информация о курсе.

Поток — у2024.

Группы М3132-М3139.

Преподаватель — Штукенберг Дмитрий Григорьевич.

Нам пизда, ребятаки.

