Математический анализ. Практика.
Третий семестр

Автор: Вячеслав Чепелин

Содержание

1. Практика 1. Функции нескольких переменных.

$f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Как считать область определения f? - удобно рисовать картинки

Задача 1.
Найти области определения:

$$f = \sqrt{x+y} - \sqrt{x-y}$$

Решение:

Тут рисуется очевидно просто смотря на картинку.

Задача 2.
Найти области определения:

$$f = \ln(x^2 + y^2 - 1) \quad \text{и} \quad f = \ln(1 - x^2 - y^2)$$

Решение:

Тут тоже все понятно

Задача 3.
Найти области определения:

$$f = \ln(3x + y - 3) + \frac{\ln(3 - x)}{\sqrt{3x - 2y + 6}}$$

Решение:

И тут тоже!

Определение. **Предел функции от нескольких переменных**
$f : U \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{U}$: $\lim\limits_{x \to a} f$ - стандартно.

Еще можно определять по Гейне: $\forall x_n \in U \underset{x_n \neq a}{\to} a$: $\lim\limits_{n \to a} f(x_n) = A$

Не путать определения двойных пределов и повторных пределов

Ищется он очень легко(буквально обычный предел)

2. Практика 2. Производные и дифференцируемость

Задача 1.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(x^2+y^2\right)^{x^2y^2}$$

Решение:

Сведем все к экспоненте:

$$\lim e^{x^2y^2\ln(x^2+y^2)}$$

Поэтому теперь все, что нам надо - найти предел того, что в экспоненте.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2y^2\ln(x^2+y^2)$$

$$|x^2y^2\ln(x^2+y^2)| \le \left(x^2+y^2\right)^2 \ |\ln(x^2+y^2)| = t^2 \ |\ln t| \to 0$$

Откуда и получается, что нам надо.

Задача 2.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(1+xy^2\right)^{\frac{1}{x^2+y^2}}$$

Решение:

Та же самая история, будем смотреть на:

$$\left|\frac{1}{x^2+y^2}\ln(1+xy^2)\right| \le 2\frac{|x|y^2}{x^2+y^2} \le |y|\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}$$

Причем первое неравенство выполнено в НО нуля.

Задача 3.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (1+xy)^{\frac{1}{x^2+y^2}}$$

Решение:

Тут предела нет, нужно с двух сторон подойти к

$$\frac{1}{x^2+y^2}\ln(1+xy)$$

Определение. Производная по направлению
$f: a\in U\subset\mathbb{R}^n \to R$. Возьмем $h\in\mathbb{R}^n, |h|=1$

$$\frac{\partial f}{\partial h}(a) := \lim_{t\to 0} f(a+th) - \frac{f(a)}{t}$$

Можно рассматривать частные производные, записывать их в вектор, получать градиент. Было на лекции.

Производную по направлению можно считать по-другому:

$$\frac{\partial f}{\partial h} = \nabla f(a)h$$

$$f(x+\Delta x) = f(x) + A\Delta x + o(|\Delta x|)$$

Задача 4.
Найти дифференциал:

$$f = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

в точке (0,1)

Решение:

Найдем частную производную по x:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x(x^2+y^2) - (x^2-y^2)2x}{x^2+y^2} \,|_{(0,1)} = 0$$

Найдем частную производную по y:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-2y(x^2+y^2) - (x^2-y^2)2y}{x^2+y^2}|_{(0,1)} = 0$$

Задача 5.
Найти дифференциал:

$$f = \sqrt{xy + \frac{x}{y}}$$

в точке (2,1)

Решение:

Аналогично

Задача 6.
Найти дифференциал:

$$f = \arctan\left(\frac{y}{1+x^2}\right)$$

в точке (1,-1)

Решение:

Найдем частную производную по x:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{1}{1+\left(\frac{y}{1+x^2}\right)^2} \cdot \frac{y}{(1+x^2)^2} \cdot 2x \,|_{(1,-1)} = \frac{2}{5}$$

Найдем частную производную по y:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{1}{1+\left(\frac{y}{1+x^2}\right)^2} \cdot \frac{1}{1+x^2} \,|_{(1,-1)} = \frac{2}{5}$$

Задача 7.
Доказать, что функция недифф. в $(0,0)$

$$f = \sqrt{|xy|}$$

Решение:

Попробуем найти частную производную по x:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{\Delta x}}{\Delta x} = 0$$

Аналогично, обе ноль.

$$f(\Delta x, \Delta y) = f(0,0) + o\left(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}\right)$$

Тогда должно быть $\sqrt{|\Delta x \Delta y|} = o\left(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}\right)$. Но это не так, так как предела нет

Задача 8.
Доказать, что функция недифф. в $(0,0)$

$$f = \ln\left(3 + \sqrt[3]{x^2 y}\right)$$

Решение:

Тут частные производные 0 (Считайте их пределами).

ДЗ: Кудрявцев параграф 3: 21, 22, 25, 28, 30

3. Практика 4.

$\frac{df}{dv} = \nabla f \cdot v = 0 : \forall v \Rightarrow \nabla f = 0$ – Необходимое условие

Достаточное условие:

- Матрица $d^2 f > 0$, то минимум
- Матрица $d^2 f < 0$, то максимум
- Матрица $d^2 f$ не определена, то минимум

Задача 1.

Исследовать на экстремумы $u = x^2 + xy + y^2 - 12x - 3y$

Решение:

Найдем производную по x и по y:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + y - 12$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2y + x - 3$$

Найдем, когда градиент равен нулю:

$$\begin{cases} 2x + y - 12 = 0 \\ 2y + x - 3 = 0 \end{cases}$$

Получим $(x, y) = (7, -2)$

Найдем вторую производную: $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Минимум

Задача 2.

Исследовать на экстремумы $u = 3(x^2 + y^2) - x^3 + 4y$

Решение:

Найдем производные по x, y:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 6x - 3x^2$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 6y + 4$$

Получим $x = 2$ или $x = 0$, y = -2/3

Найдем Матрицу Гессе

$$\begin{pmatrix} 6 - 6x & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Задача 3.

$$u = 2 \ln x + 3 \ln y + 5 \ln z + \ln(22 - x - y - z)$$

Решение

Найдем производные по всем 3 переменным

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2}{x} - \frac{1}{22 - x - y - z}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{3}{y} - \frac{1}{22 - x - y - z}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{5}{z} - \frac{1}{22 - x - y - z}$$

Найдем точки нули

$$\begin{cases} \frac{2}{x} - \frac{1}{22-x-y-z} = 0 \\ \frac{3}{y} - \frac{1}{22-x-y-z} = 0 \\ \frac{5}{z} - \frac{1}{22-x-y-z} = 0 \end{cases}$$

Решением будет $(4, 6, 10)$

Матрица Гессе $\begin{pmatrix} -\frac{3}{8} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{10} \end{pmatrix}$

Критерий Сильвестра

Задача 4.

$$u = x_1 \cdot x_2^2 \cdot \ldots x_n^n \left(1 - \sum_{k=1}^{n} k x_k\right)$$

Найдем

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = i \frac{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n^n}{x_i} \left(1 - \sum_{k=1}^{n} k x_k\right) - x_1 \cdot \ldots \cdot x_n^n \cdot i$$

4. Информация о курсе

Поток — y2024.

Группы M3238-M3239.

Преподаватель — Басков Игорь Сергеевич

БОЛЬ СТРАДАНИЯ БОЛЬ СТРАДАНИЯ