Диффуры. Практика.
Третий семестр

Автор: Вячеслав Чепелин

Содержание

1. Практика 1. Начала диффур

Определение. Уравнение в нормальной форме

$$y' = f(x, y)$$

Определение. Уравнение с разделенными переменными

$$P(x)dx + Q(y)dy = 0$$

Задача 1.4.

$$y' = \cos^2 x$$

Решение:

Как мы знаем $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$. Подставим и получим:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \cos^2 x$$

$$\mathrm{d}y = \cos^2 x \,\mathrm{d}x$$

Проинтегрируем обе части уравнений

$$y = \frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4} + C$$

Задача 1.5.

$$y' = 2 - y$$

Решение:

Аналогично прошлому получим

$$\frac{\mathrm{d}y}{2 - y} = \mathrm{d}x$$

Проинтегрируем обе части получим:

$$-\ln(|2 - y|) = x + C$$

По факту это и есть решение. Или можно докрутить и получить $y = 2 + Ce^{-x}$. В данном случае C не равны и в целом мы под C будем съедать все константы, которые у нас будут в решении.

Задача 1.6.

$$y' = y^2(y^2 + 1)$$

Решение:

Аналогично получим:

$$\frac{\mathrm{d}y}{y^2(y^2 + 1)} = \mathrm{d}x$$

Проинтегрируем обе части и получим:

$$\int\left(\frac{1}{y^2}-\frac{1}{y^2+1}\right)\mathrm{d}y = x + C$$

$$\frac{1}{y} + \arctan y = x + C$$

Также $y = 0$ будет решением

Задача 1.7.

$$\frac{x\,\mathrm{d}x}{\cos^2 x} + \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{9+y^2}} = 0$$

Решение:

Это уравнение с разделяющимися переменными. Давайте перенесем в правую часть и проинтегрируем:

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = -\int \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{9+y^2}} + C$$

$$x \operatorname{tg} x + \ln\cos x = C - \frac{1}{3}\arctan\frac{y}{3}$$

Отсюда уже понятно, как вывести y.

Задача 1.8.

$$\frac{\mathrm{d}x}{8+2x^2} + \frac{e^y\,\mathrm{d}y}{\sqrt{4-e^{2y}}} = 0$$

Решение:

Вся сложность задачи - взять интеграл, поэтому скип

Задача 1.9.
Решить задачу Коши $y\left(-\frac{1}{4}\right) = 4$

$$\frac{\mathrm{d}y}{y^2} = \mathrm{d}x$$

Решение:

Возьму интеграл, получу:

$$-\frac{1}{y} = x + C$$

$$-1 = (x + C)y$$

Решу задачу Коши. Для этого

$$-1 = \left(-\frac{1}{4} + C\right)4$$

Откуда C = 0 и мы решили задачу Коши

2. Практика 2.

2.1. Геометрический смысл уравнений

Задача 1.1.
Под каким углом интегральные кривые уравнения $y' = x^2 + y^2 + 1$ пересекают ось Ox в начале координат

Решение:

В начале координат надо подставить 0,0. Получим $y' = 1$ - тангенс угла наклона. Откуда 45 градусов

Задача 1.2.
Не решая уравнения $y' = x + 1$, найдите его точки экстремума.

Решение:

$$y' = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0$$

Откуда $x = -1$ его точка экстремума (тут надо было сказать еще про смену знака у производной, ну в данном случае это очевидно)

Определение. Изоклина
Изоклиной уравнения $y' = f(x, y)$ называют множество уровня функции f:

$$I_k = \{(x, y) \in dom f \mid f(x, y) = k\}$$

Задача 1.3.
Методом изоклин нарисовать приближенно интегральные кривые уравнений:
1. $y' = -2x$
2. $y(y' + x) = 1$
3. $y' = y - x^2$

Решение:

Так как мне много рисовать, а мне лень, напишу алгоритм, что надо

1. Нарисовать кривые $f(x, y) = k$ для каких-то понятных k.
2. Нарисовать интегральную кривую.

Как по мне это очень скучно, с вашего позволения(то есть моего) я делать это не буду

2.2. Уравнения в полных дифференциалах

Задача 2.1.

$$(2 - 9xy^2)x\,\mathrm{d}x + (4y^2 - 6x^3)y\,\mathrm{d}y = 0$$

Решение:

В чем соль? Нам надо проверить, что это УПД, то есть ${P(x, y)_y}' = {Q(x, y)_x}'$

$$u'_x = P(x, y) \quad u'_y = Q(x, y)$$

Если мы найдем u, то решением УПД будет $u(x, y) = C$

Найдем u, взяв интеграл по x функции $P(x, y)$. Когда мы берем интеграл по переменной, мы забиваем на другую переменную.

$$u(x, y) = \int (2x - 9x^2y^2)\,\mathrm{d}x + C(y)$$

$$u = x^2 - 3x^3y^2 + C(y)$$

Возьмем производную по y.

$$u'_y = (-3x^3y^2 + C(y))\,\mathrm{d}y = -6x^3y + C(y)' = 4y^3 - 6x^3y = Q(x, y)$$

Откуда $u = x^2 + y^4 - 3x^3y^2$

Задача 2.2.

$$(x^3 + y)\,\mathrm{d}x + (x - y)\,\mathrm{d}y = 0$$

Решение:

Это УПД. Найдем u. Возьму интеграл по y у Q

$$u = \int (x - y)\,\mathrm{d}y + C(x) = xy - \frac{y^2}{2} + C(x)$$

Теперь найдем $C(x)$:

$$u'_x = y + C(x)' = x^3 + y = Q(x, y)$$

Откуда $u = \frac{x^4}{4} + xy - \frac{y^2}{2}$. Ну и решением будет $u = C$

Задача 2.3.

$$\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}} - 1\right)\mathrm{d}x - \frac{y\,\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2 - y^2}} = 0$$

Решение:

Это УВД (удивительно). Тут в принципе аналогичные действия, даже интеграл просто берется, получим ответ: $u = \sqrt{x^2 - y^2} - x^2$

3. Практика 3.

Определение. Метод интегрирующего множителя

Рассмотрим решение дифференциальных уравнений вида: $M(x, y)\,\mathrm{d}x + N(x, y)\,\mathrm{d}y = 0$

Алгоритм решения:

1. Проверить уравнение на точность:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

2. Найти интегрирующий множитель:
   - Если $\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}$ зависит только от x, то $\mu(x) = \exp\left(\int \left(\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}\right) \mathrm{d}x\right)$
   - Если $\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M}$ зависит только от y, то $\mu(y) = \exp\left(\int \left(\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M}\right) \mathrm{d}y\right)$
3. Умножить исходное уравнение на интегрирующий множитель
4. Решить полученное точное уравнение

3.1. Интегрирующий множитель

Задача 1.1.
Найти решение установив, что оно имеет интегрирующий множитель, зависящий только от одной переменной

1. $(1 - x^2 y)\,\mathrm{d}x + x^2(y - x)\,\mathrm{d}y = 0$
2. $(2xy^2 - 3y^3)\,\mathrm{d}x + (7 - 3xy^2)\,\mathrm{d}y = 0$

Решение:

Делаем все по гайду.

3.2. Уравнения с разделяющимися переменными

Задача 2.1.
Найти все решения

$$x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x = 0$$

Решение:

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$\ln x = \ln y + C$

$$Ce^{\ln x} = y$$

Откуда уже получаем решение

Задача 2.2.
Найти все решения

$$y' = \sqrt{1 - y^2}$$

Решение:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^2}} = \mathrm{d}x$$

Возьму интеграл по обоим частям и выиграю. Этим довольно скучно заниматься

Задача 2.3.
Найти все решения на множестве $[-1, 1], y > 0$

$$(x^2-1)y' + 2xy^2 = 0$$

Сравните с решениями

$$2xy^2\,\mathrm{d}x + (x^2-1)\,\mathrm{d}y = 0$$

Решение:

В первом случае мы не можем рассматривать решения, где $\mathrm{d}x = 0$, то есть x - константа

Найдем производную по y первого и производную по x второго:

$$N'_y = 4xy \quad M'_x = 2x$$

Откуда $u(y) = \exp\left(\int\left(\frac{1-2y}{y^2}\right)\right) = \frac{e^{-\frac{1}{y}}}{y^2}$

Умножим на интегрирующий множитель. Уравнение станет УВД. Мне лень его дорешивать

3.3. Линейное уравнение

Задача 3.1.
Решите уравнение

$$y' + \frac{x}{1+x^2}y = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

с помощью метода Лагранжа и интегрирующего множителя

Решение:

Метод интегрирующего множителя

Общее решение линейного уравнения по теории $\mu = e^{\int -p}$, $y = \frac{C+\int q\mu}{\mu}$

Где $p(x) = -\frac{x}{1+x^2}, q(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. Найдем μ

$$\mu = \exp\left(\int \frac{x}{1+x^2}\right) = \exp\left(\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right) = \sqrt{1+x^2}$$

$$y = \frac{C + \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{\frac{x^2}{2}+C}{\sqrt{1+x^2}}$$

Метод Лагранжа

Решим уравнение $y' = p(x)y$. Это будет простое уравнение с разделяющимися переменными

$$y' = -\frac{x}{1+x^2}y$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{x}{1+x^2}y$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = -\frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^2}$$

$$\ln y = \ln\left(\sqrt{1+x^2}^{-1}\right) + C$$

$$y = \frac{C}{\sqrt{1+x^2}}$$

Отлично. Заменим C на $C(x)$ в решении и попробуем его подогнать, чтобы все сошлось.

$y' = \frac{C(x)'}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{C(x)x}{\sqrt{1+x^2}(1+x^2)} = -\frac{x}{1+x^2} \cdot \frac{C}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{x}{1+x^2}$

Ну откуда уже видно $C(x) = \frac{x^2}{2} + C$

Замечание Хз чем хорош метод Лагранжа, как будто только больнее

Задача 3.2.

Найдите решение уравнения:

$$y' = \left(2x + \frac{1}{x}\right)y + x$$

Решение:

Общее решение линейного уравнения по теории $\mu = e^{\int -p}$, $y = \frac{C + \int q\mu}{\mu}$

Где $p(x) = \left(2x + \frac{1}{x}\right)$, $q(x) = x$. Найдем μ:

$$\mu = \exp\left(\int \left(2x + \frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x\right) = \exp(x^2 + \ln x) = xe^{x^2}$$

Найдем решение уравнения:

$$y = \frac{C + \int \left(x^2 e^{x^2}\right) \mathrm{d}x}{xe^{x^2}}$$

Это вроде не дорешивается

4. Практика 4.

4.1. Однородное уравнение

Задача 1.0.

$$y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$$

Решение:

Приведем к общему виду

$$-\left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y}\right) \mathrm{d}x + \mathrm{d}y = 0$$

Заметим, что уравнение однородное. Сделаем замену $\frac{y}{x} = v$. Тогда $\mathrm{d}y = v\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}v$. Получим:

$$\left(-v - \frac{1}{v}\right) \mathrm{d}x + v\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}v = 0$$

$$-\frac{1}{v}\,\mathrm{d}x = -x\,\mathrm{d}v$$

А это уже обычное уравнение с разделяющимися, дорешивается очевидно.

Задача 1.1.

$$xy' = y - xe^{\frac{y}{x}}, y(1) = 1$$

Решение:

$$\mathrm{d}y = \left(\frac{y}{x} - e^{\frac{y}{x}}\right) \mathrm{d}x$$

Получили однородное. Сделаем замену

$$v\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}v = (v - e^v)\,\mathrm{d}x$$

$$x\,\mathrm{d}v = (v - e^v - v)\,\mathrm{d}x$$

$$\frac{1}{v - e^v - v}\,\mathrm{d}v = \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$\frac{1}{e^v}\,\mathrm{d}v = \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

Дорешивается

Задача 1.2.

$$(x + y)\,\mathrm{d}x + (x - y - 2)\,\mathrm{d}y = 0$$

Решение:

Надо сдвинуть начало координат в точку пересечения данных прямых, то есть $y = -x$ и $y = x - 2$. Это происходит в точке $x = 1, y = -1$.Сдвину и получу

$$(x + y)\,\mathrm{d}x + (x - y)\,\mathrm{d}y = 0$$

А это в свою очередь тривиальное однородное.

4.2. Уравнение Бернулли

Задача 2.1.

$$y' + 2y = y^2 e^x$$

Решение:

$z = y^{1-\alpha}$ - Бернулли сводится к линейному. В данном случае $\alpha = 2$. Поэтому $z = y^{-1}$

$$\left(\frac{1}{z}\right)' + \frac{2}{z} = \frac{1}{z^2}e^x$$

$$-\frac{z'}{z^2} + \frac{2}{z} = \frac{1}{z^2}e^x$$

$$-z' + 2z = e^x$$

$$z' = 2z - e^x$$

Свели к простенькому линейному, оставим читателю порешать)

Задача 2.2.

$$y' - 9x^2 y = (x^5 + x^2)y^{\frac{2}{3}}$$

Решение:

Это уравнение Бернулли. Сделаем замену $z = y^{1-\alpha}$. В данном случае $z = y^{1-\frac{2}{e}}$ или $z^{\frac{1}{1-\frac{2}{3}}} = y$, $z^3 = y$

Обозначу ущербную константу в степени за c

$$(z^3)' - 9x^2 z^3 = (x^5 + x^2)z^2$$

$$z' 3z^2 - 9x^2 z^3 = (x^5 + x^2)z^2$$

$$z' = 9x^2 z + (x^5 + x^2)$$

Получили линейное, а что делать с ним уже понятно

4.3. Уравнение Риккати

Задача 3.1.

$$y' + 2e^x y - y^2 = e^{2x} + e^x$$

Решение:

$y = e^x$ - решение

$y = z + \varphi$, где φ частное решение, в данном случае e^x.

$$z' + e^x + 2e^{2x} + 2e^x z - (z + e^x)^2 = e^{2x} + e^x$$

$$z' + 2e^x z - z^2 - 2ze^x = 0$$

$$z' = z^2$$

Дорешивается

Задача 3.1.

Пусть y - решение уравнения

$$x^2y' = x^2y^2 + 3xy + 3$$

Решение:

Похоже решение должно иметь вид $y = \frac{a}{x}$. Попробуем его найти

$$x^2\frac{-a}{x^2} = a^2 + 3a + 3$$

$$a^2 + 4a + 3 = 0$$

Откуда находим a и соответственно находим решение. Дальше мне честно лень делать

5. Практика 5.

5.1. Методы понижения порядка

Задача 1.1. Уравнения вида $y^{(n)} = f(x)$.

1. $y'' = x + \cos x$
2. $y'' = e^x + \frac{3}{4}x^{-\frac{5}{2}}$

Решение:

Тут надо в обоих случать 2 раза взять интеграл, не знаю, что здесь еще делать

Задача 1.2. Уравнения без искомой функции.

1. $y'' + \frac{1}{x}y' = 0, x > 9$
2. $xy^{(3)} + y'' = 1 + x, y(1) = 1, y'(1) = \frac{5}{4}, y''(1) = \frac{3}{2}$
3. $xy'' - y' = e^x x^2, y(1) = 1, y'(1) = 1 + e$

Решение:

1. Сделаем замену $z = y'$. Получу:

$$z' + \frac{z}{x} = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = -\frac{z}{x}$$

$$\frac{\mathrm{d}z}{z} = -\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

Дорешивается

2. Сделаем замену $z = y''$

$$xz' + z = 1 + x$$

$$z' = -\frac{z}{x} + \frac{1}{x} + 1$$

Это линейное уравнение. Найдя его решение, подставим его вместо x и получим ответ. Тадам

3. $xz' - z = e^x x^2$

Очевидно дорешивается, так как линейное

Задача 1.3. Уравнения без независимой переменной.

1. $y'' + yy' = 0, y(0) = 2, y'(0) = -2$
2. $y''y^3 + 1 = 0, y(1) = -1, y'(1) = -1$
3. $y'' + (2 + 4y^2)y'^3 - 2yy'^2 = 0, y(0) = 1, y'(0) = \frac{1}{2}$

Решение:

1. Надо сделать подстановку $z(y) = y', y = t$

$$(z(y))' + tz = 0$$

$$z'z + tz = 0$$

$$z' + t = 0 \text{ или } z = 0$$

$$\mathrm{d}z = -t\,\mathrm{d}t$$

$$z = -\frac{t^2}{2} + C$$

$$y' = -\frac{y^2}{2} + C$$

что является уже уравнением с разделяющимися переменными
2. $z(y) = y'$

$$z'zt^3 + 1 = 0$$

$$z\,\mathrm{d}z = -\frac{1}{t^3}\,\mathrm{d}t$$

Я верю, что вы умеете дорешивать разделяющиеся 2 раза.
3. Аналогично

Задача 1.4. Уравнение, однородное относительно искомой функции и её производных.
1. $xyy'' - xy'^2 - yy' = 0, y(0) = 1, y(2) = e^{16}$
2. $x^2yy'' = (y - xy')^2, y(1) = e^3, y(3) = 3e$
3. $yy'' + yy' \operatorname{tg} x = (1 - \sin x)(y')^2, y(0) = 1, y'(0) = -2$

Решение:
1. $z = \frac{y'}{y}, y' = yz, y'' = z'y + z^2y$

$$xy(z'y + z^2y) - x(yz)^2 - yyz = 0$$

$$xz'y^2 + xz^2y^2 - xz^2y^2 - y^2z = 0$$

$$xz' - z = 0$$

А это уже уравнение с разделяющимися переменными, а такое мы решать умеем.

2 и 3 аналогично.

Задача 1.5. Уравнение в точных производных.
1. $y'' \sin y + y'^2 \cos y = 1, y(1) = \frac{\pi}{6}, y'(1) = 2$
2. $y'' \operatorname{tg} y + \frac{y'^2}{\cos^2 y} = 0, y(0) = \frac{\pi}{4}, y'(0) = 1$
3. $yy'' = y'^2$

Решение:
1. Заметим, что слева у нас производная:

$$(y' + \sin y)' = 1$$

$$y' + \sin y = x$$

А такое мы решать умеем.
2. Заметим, что слева у нас производная

$$(y' \operatorname{tg} y)' = 0$$

$$y' \operatorname{tg} y = 1$$

А такое мы решать умеем.

3. Заметим, что это почти $\left(\frac{y'}{y}\right)'$. Тадам

6. Лекция 6

6.1. Методы понижения порядка

Задача 1.1.

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = x + y \end{cases}$$

Решение

$$x'(t) = x(t) \Leftrightarrow x = Ce^t$$

Подставим во второе и решим линейное уравнение:

$$y'(t) = Ce^t + y(t)$$

$$y(t) = (Ct + C_1)e^t$$

Задача 1.2.

$$\begin{cases} x' = \frac{2t}{1+t^2}x \\ y' = -\frac{1}{t}y + x + t \end{cases}$$

Решение

Первое уравнение это уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$x = Ce^{\int p} = C(1+t^2)$$

Подставим во второе и получим что=то понятное

6.2. Метод исключения

Определение. Метод исключения

Метод исключения состоит в сведении системы к одному или нескольким уравнениям высших порядков, содержащих только одну неизвестную функцию. Это достигается путём последовательно дифференцирования одного или нескольких уравнений системы, а затем исключения всех неизвестных функций, кроме одной.

Рассмотрим схему метода на примеры системы второго порядка.

$$\begin{cases} x' = f(t, x, y) \\ y' = g(t, x, y) \end{cases}$$

Дифференцируя первое уравнение по переменной t, имеем

$$x'' = f'_t + f'_x x' + f'_{y'} y'$$

Используя уравнения системы, заменим производные x', y':

$$x'' = f'(t) + f'_x f + f'_y g = \alpha(t, x, y)$$

Выразим y из первого уравнения и получим:

$$y = \beta(t, x, x')$$

Подставим и тем самым исключим y из уравнения

Задача 2.1.

$$\begin{cases} x' = 2y - 2x \\ y' = 3y - 3x \end{cases}$$

$x(0) = 0, y(0) = 1$

Решение

Действуем по алгоритму. Возьмем производную по x

$$x'' = 2y' - 2x'$$

Заменим:

$$x'' = 2(3y - 3x) - 2(2y - 2x) = 2y - 2x$$

Возьмем выразим y в первом уравнении:

$$y = \frac{x' + 2x}{2}$$

Подставим:

$$x'' = x' + 2x - 2x$$

$$x'' = x'$$

Возьму интеграл:

$$x' = x + C$$

Сделаем замену $z = x + C$ и решим уравнение:

$$x + C_1 = Ce^t$$

Подставим $x = 0$ получим $C = -C_1$. Дальше уже подстановкой найдем y. (в угоду моего времени это писаться не будет)

Задача 2.1.

$$\begin{cases} x' = 1 - \frac{1}{y} \\ y' = \frac{1}{x-t} \end{cases}$$

$x(0) = -1, y(0) = 1$

Решение

Действуем по алгоритму. Возьмем производную по x:

$$x'' = \frac{y'}{y^2}$$

$$x'' = \frac{1}{x - t} \cdot \frac{1}{y^2}$$

Выразим y:

$$y = \frac{1}{x' - 1}$$

Подставим

$$x'' = \frac{1}{x - 1} \cdot (x' - 1)^2$$

$$x''(x - 1) = (x' - 1)^2$$

$$\left(\frac{x' - 1}{x - 1}\right)' = 0$$

$$x' - 1 = C(x - 1)$$

Я верю, что это дорешивается

7. Информация о курсе

Поток — y2024.

Группы M3238-M3239.

Преподаватель — Бабушкин Максим Владимирович