МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
"Южно-Уральский государственный университет"
(национальный исследовательский университет)

Образовательная программа
"Суперкомпьютерное моделирование социальных и экономических процессов"
по направлению подготовки
«Суперкомпьютерное моделирование»
(степень "магистр")

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ
по дисциплине
"Теория игр и анализ рисковых ситуаций"

Разработчик:
д.ф.-м.н., профессор Панюков А. В.

Челябинск-2013

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Матричные игры ... 3
1.1. Определение антагонистической игры в нормальной форме. Максиминные и минимаксные стратегии. ... 3
1.2. Ситуации равновесия ... 8
1.3. Смешанное расширение игры ... 13
1.4. Свойства оптимальных стратегий и значения игры ... 17
1.5. Решение матричной игры в классе смешанных стратегий ... 20
2. Неантагонистические игры ... 25
2.1. Определение неантагонистической игры в нормальной форме. Биматричные игры 25
2.2. Принципы оптимальности в бескоалиционных играх ... 28
2.3. Смешанное расширение бескоалиционной игры ... 36
2.4. Равновесие в совместных смешанных стратегиях ... 43
2.5. Арбитражные схемы ... 46
2.6. Кооперативные игры ... 50
3. Позиционные игры ... 58
3.1. Структура позиционной игры ... 58
3.2. Нормализация позиционной игры ... 61
3.3. Позиционные игры с полной информацией ... 66
3.4. Совершенное равновесие в динамических играх ... 72
3.5. Равновесие по Нэшу в позиционных играх ... 74
3.6. Многошаговые игры. Принцип максимума ... 76
3.7. Модель управления портфелем ГКО ... 80

1. Матричные игры

1.1. Определение антагонистической игры в нормальной форме. Максиминные и минимаксные стратегии.

Определение *Кортеж $\Gamma=(X,Y,K)$, где X и Y − непустые множества, и K: $X\times Y\to R$ − функция, называется антагонистической игрой в нормальной форме. Элементы $x\in X$ и $y\in Y$ называются стратегиями игроков 1 и 2 соответственно в игре Г, элементы декартового произведения $X\times Y$ (т. е. пары стратегий (x, y), где $x\in X$ и $y\in Y$ — ситуациями, а функцияK− функцией выигрыша игрока 1. Выигрыш игрока 2 в ситуации (x,y) полагается равным [-К(x,y)], поэтому функцияКтакже называется функцией выигрыша самой игры Г, а игра Г — игрой с нулевой суммой.*

Таким образом, используя принятую терминологию, для задания игры *Г* необходимо определить множества стратегий X, Yигроков *1* и *2,* а также функцию выигрышаK, заданную на множестве всех ситуаций$X\times Y$.

Игра *Г* интерпретируется следующим образом. Игроки одновременно и независимо выбирают стратегии $x\in X$, $y\in Y$. После этого игрок *1* получает выигрыш, равный $K(x,y)$, а игрок *2* — выигрыш, равный [-$K(x,y)$].

Определение. *Игра $\Gamma'=(X',Y',K')$ называется подыгрой игры $\Gamma=(X,Y,K)$, если $X'\subseteq X$, $Y'\subseteq Y$, а функция K': $X'\times Y'\to R$ является сужением функции К на $X'\times Y'$.*

В нашем курсе будут рассматриваться главным образом антагонистические игры, в которых множества стратегий игроков конечны.

Определение.*Антагонистические игры, в которых оба игрока имеют конечные множества стратегий, называются матричными.*

Пусть игрок *1* в матричной игре***Г=(X,Y,K)*** имеет всего m стратегий. Упорядочим множество Xстратегий первого игрока, т. е. установим взаимно однозначное соответствие между множествами $M=\{1, 2, ..., m\}$и X. Аналогично, если игрок *2* имеет nстратегий, то можно установить взаимно однозначное соответствие между множествами $N=\{1, 2,..., n\}$ и *У*. Тогда игра *Г* полностью определяется заданием матрицы $A = \{a_{ij}\}$, где $a_{ij}=K(x_i,y_j)$, $(i,j)\in M\times N, (x_i,y_j)\in X\times Y$ (отсюда и название игры — матричная). При этом игра *Г* реализуется следующим образом. Игрок *1* выбирает строку $i\in M$, а игрок *2* (одновременно с ним) — столбец $j\in N$. После этого игрок *1* получает выигрыш a_{ij}, а второй — ($-a_{ij}$). Если выигрыш равен отрицательному числу, то речь идет о фактическом проигрыше игрока.

Игру *Г* с матрицей выигрышейAобозначим Γ_Aи назовем ($m\times n$)-игрой (по размерности матрицы *А).* Если из изложения понятно, об игре с какой матрицей идет речь, то индексAбудем опускать.

Нумерация стратегий в матричной игре может производиться различными способами, поэтому каждому отношению порядка, строго говоря, соответствует своя матрица. Таким образом, конечная антагонистическая игра может быть описана различными матрицами, отличающимися друг от друга лишь порядком строк и столбцов.

Пример. (Оборона города) Этот пример известен в литературе под названием «игра полковника Блотто» []. Полковник Блотто имеет m полков, а его противник — n полков. Противник защищает две позиции. Позиция будет занята полковником Блотто, если на ней наступающие полки окажутся в численном превосходстве. Противоборствующим сторонам требуется распределить полки между двумя позициями.

Определим выигрыш полковника Блотто (игрока *1*) на каждой позиции. Если у него на позиции полков больше, чем у противника (игрока *2*), то его выигрыш на этой позиции равен числу полков противника плюс один (занятие позиции равносильно захвату одного полка). Если у игрока *2* полков на позиции больше, чем у игрока 1, то игрок 1 теряет все свои полки на этой позиции и еще единицу (за потерю позиции). Если обе стороны имеют одинаковое число полков на позиции, то имеет место ничья и каждая из сторон ничего не получит. Общий выигрыш игрока *1* равен сумме выигрышей на обеих позициях.

Игра, очевидно, антагонистическая. Опишем стратегии игроков. Пусть, для определенности, $m>n$. Игрок *1* имеет следующие стратегии: $x_k=(m-k,k)$ — $(m-k)$ полков послать на первую позицию, а k полков — на вторую, $k=0,1,\ldots m$. Противник (игрок *2)* имеет такие стратегии: $y_l=(n-l,l), l=0,1,\ldots n$.

Пусть игрок *1* выбрал стратегию x_0, а игрок *2* — стратегию y_0. Вычислим выигрыш $K(x_0, y_0)=a_{00}$ игрока *1* в этой ситуации. Поскольку $m>n$, на первой позиции выигрывает игрок *1*. Его выигрыш равен $n+1$ (единица — за удержание позиции). На второй позиции — ничья. Поэтому $a_{00}=n+1$. Вычислим a_{01}. Так как $m>n-1$, то на первой позиции выигрыш игрока *1* равен $n-1+1= n$. На второй позиции выигрывает игрок *2*. Поэтому проигрыш игрока *1* на этой позиции равен единице. Таким образом, $a_{01}= n-1$. Рассуждая аналогично, получаем $a_{0j}=n-j+1-1= n-j$, $1\le j \le n$. Далее, если $m-1>n$, то

$$a_{10}=n+1+1=n+2, a_{11}=n-1+1=n, a_{1j}=n-j+1-1-1=n-j-1,\ 2\le j\le n.$$

В общем случае (для любых m и n)элементы матрицы выигрышей вычисляются следующим образом (докажите):

$$a_{ij} = K(x_i, y_j) = \begin{cases} n+2, & \text{если} \quad m\text{-}i > n-j, i > j, \\ n-j+1 & \text{если} \quad m\text{-}i > n-j, i = j, \\ n-j-i & \text{если} \quad m\text{-}i > n-j, i < j, \\ -m+i+j & \text{если} \quad m\text{-}i > n-j, i > j, \\ j+1 & \text{если} \quad m\text{-}i = n-j, i > j, \\ -m-2 & \text{если} \quad m\text{-}i < n-j, i < j, \\ \text{-}i\text{-}1 & \text{если} \quad m\text{-}i = n-j, i < j, \\ -m+i-1 & \text{если} \quad m\text{-}i < n-j, i = j, \\ 0 & \text{если} \quad m\text{-}i = n-j, i = j. \end{cases}$$

Так, при m=4, n=3, рассмотрев всевозможные ситуации, получим матрицу выигрышей A этой игры:

$$A = \left[\begin{array}{c|cccc} & y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \\ \hline x_0 & 4 & 2 & 1 & 0 \\ x_1 & 1 & 3 & 0 & -1 \\ x_2 & -2 & 2 & 2 & -2 \\ x_3 & -1 & 0 & 3 & 1 \\ x_4 & 0 & 1 & 2 & 4 \end{array} \right]$$

Рассмотрим антагонистическую игру Γ=(X,Y,K). Здесь каждый из игроков выбором стратегии стремится максимизировать свой выигрыш. Но для игрока *1* он определяется функцией $K(x,y)$, а для второго — [-$K(x,y)$], т. е. цели игроков прямо противоположны. При этом заметим, что выигрыш игрока *1*(*2*) определен на ситуациях $(x, y) \in X \times Y$, складывающихся в процессе игры. Но каждая ситуация, а следовательно, и выигрыш игрока зависят не только от его выбора, но и от того, какая стратегия будет выбрана противником. Поэтому, стремясь получить возможно больший выигрыш, каждый игрок должен учитывать поведение противника.

Поясним сказанное на примере игры «оборона города». Если игрок *1* хочет получить максимальный выигрыш, то он должен принять стратегию x_0(или x_4). В этом случае, если игрок *2* применит стратегию y_o(y_3), то первый получит выигрыш, равный 4 единицам. Но если игрок *2* применит стратегию y_3(соответственно y_0), то игрок *1* получит выигрыш, равный 0, т. е. потеряет 4 единицы. Аналогичные рассуждения можно провести и для игрока *2*.

В теории игр предполагается, что оба игрока действуют разумно, т. е. стремятся к получению максимального выигрыша, считая, что соперник действует наилучшим (для себя) образом. Что может себе гарантировать игрок *1*?Пусть игрок *1* выбрал стратегию x. Тогда в худшем случае он выиграет

$$\min_{y \in Y} K(x, y) .$$

Поэтому игрок *1* всегда может гарантировать себе выигрыш

$$\max_{x \in X} \min_{y \in Y} K(x, y) .$$

Если отказаться от предположения достижимости экстремума, то игрок *1* может всегда получить выигрыш, сколь угодно близкий к величине

$$\underline{v} = \sup_{x\in X} \inf_{y\in Y} K(x,y),$$ **Ошибка! Закладка не определена.**

которую будем называть *нижним значением игры.* Если же внешний экстремум в (0.0) достигается, то величина $\underline{v}$ называется также *максимином,* принцип построения стратегии *x*, основанный на максимизации минимального выигрыша, − *принципом максимина,* а стратегия выбираемая в соответствии с этим принципом − *максиминной стратегией* игрока *1*.

Для игрока *2* можно провести аналогичные рассуждения. Пусть он выбрал стратегию *y.* Тогда в худшем случае он проиграет

$$\max_{x\in X} K(x,y).$$

Поэтому второй игрок всегда может себе гарантировать проигрыш

$$\min_{y\in Y} \max_{x\in X} K(x,y)$$

Число

$$\overline{v} = \inf_{y\in Y} \sup_{x\in X} K(x,y) \tag{0.1}$$

называется *верхним значением игры Г*, а в случае достижения внешнего экстремума в(0.1) и *минимаксом.* При этом принцип построения стратегии *y,* основанный на минимизации максимальных потерь, называется *принципом минимакса,* а выбираемая в соответствии с этим принципом стратегия *y* −*минимаксной стратегией* игрока *2*.

Подчеркнем, что существование минимаксной (максиминной) стратегии определяется достижимостью *внешнего* экстремума в(0.0) и (0.1).

Пусть задана матричная $(m\times n)$-игра *Г*. Тогда экстремумы в (0.0) и (0.1) достигаются, а нижнее и верхнее значения игры соответственно равны

$$\underline{v} = \max_{i=1,2,\ldots,m} \min_{j=1,2,\ldots,n} a_{ij}, \tag{0.2}$$

$$\overline{v} = \min_{j=1,2,\ldots,n} \max_{i=1,2,\ldots,m} a_{ij} \tag{0.3}$$

Минимакс и максимин для игры Γ_A могут быть найдены по следующей схеме:

$$\left.\begin{array}{l}\underbrace{\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}\\ \max\limits_i a_{i1} \quad \max\limits_i a_{i2} \quad \cdots \quad \max\limits_i a_{in}}_{\overline{v}=\min\limits_i \max\limits_j a_{ij}}\end{array}\begin{array}{c}\min\limits_j a_{1j} \\ \min\limits_j a_{2j} \\ \vdots \\ \min\limits_j a_{mj}\end{array}\right\} \max_i \min_j a_{ij} = \underline{v}$$

Так, в игре *Г* с матрицей

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 5 & 3 & 8 \\ 6 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

нижнее значение (максимин) $\underline{v}$ и максиминная стратегия i_* первого игрока равны $\underline{v} = 3$, $i_* = 2$, а верхнее значение (минимакс) $\overline{v}$ и минимаксная стратегия j_* второго игрока − $\overline{v} = 3$, $j_* = 2$.

Лемма. *Для любой игры Г=(X, Y, K) имеет место неравенство*

$$\underline{v} \le \overline{v}\ .$$

Доказательство. Пусть $x \in X$ − произвольная стратегия игрока *1.* Тогда имеем

$$K(x, y) \le \sup_{x \in X} K(x, y)\,.$$

Отсюда получаем

$$\inf_{y \in Y} K(x, y) \le \inf_{y \in Y} \sup_{x \in X} K(x, y)\,.$$

Теперь заметим, что в правой части последнего неравенства стоит константа, а значение $x \in X$ выбиралось произвольно. Поэтому выполняется неравенство

$$\sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} K(x, y) \le \inf_{y \in Y} \sup_{x \in X} K(x, y) \qquad (0.4)$$

Справедливость леммы теперь следует из равенств (0.0) и (0.1).

1.2. Ситуации равновесия

Рассмотрим вопрос об оптимальном поведении игроков в антагонистической игре. Естественно считать оптимальной в игре *Г*= (*X, Y, К*) такую ситуацию $(x^*, y^*) \in X \times Y$, от которой ни одному из игроков невыгодно отклоняться. Такая ситуация (x^*, y^*) называется *равновесной*, а принцип оптимальности, основанный на построении равновесной ситуации, − *принципом равновесия*. Для антагонистических игр, как это будет показано ниже, принцип равновесия эквивалентен принципам минимакса и максимина. Конечно, для этого необходимо существование равновесия (т. е. чтобы принцип оптимальности был реализуем).

Определение. *В антагонистической игре Г=(X, Y, К) ситуация (х*. у*) называется ситуацией равновесия или седловой точкой, если*

$$\left(\forall (x,y) \in X \times Y\right)\left(K(x,y^*) \le K(x^*,y^*) \le K(x^*,y)\right).$$

Множество всех ситуаций равновесия в игре *Г* будем обозначать через $Z(\Gamma)$. Для матричной игры $Г_A$речь идет о *седловых точках матрицы* выигрышей*A*, т. е. таких точках (*i**, *j**), что для всех $1 \le i \le m$ и $1 \le j \le n$выполняются неравенства

$$a_{ij^*} \le a_{i^*j^*} \le a_{i^*j}.$$

В седловой точке элемент матрицы $a_{i^*j^*}$ является одновременно минимумом в своей строке и максимумом в своем столбце. Например, в игре с матрицей

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 5 & 3 & 8 \\ 6 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ситуация (2,2) является равновесной.

Множество ситуаций равновесия в антагонистической игре *Г* обладает свойствами, которые позволяют говорить об оптимальности ситуации равновесия и входящих в нее стратегий.

Теорема. *Пусть* $(x_1^*, y_1^*), (x_2^*, y_2^*)$ *— две произвольные ситуации равновесия в антагонистической игре Г. Тогда* $K(x_1^*, y_1^*) = K(x_2^*, y_2^*) = K(x_1^*, y_2^*) = K(x_2^*, y_1^*)$.

Доказательство. Из определения ситуации равновесия для всех JCе *X*и *у* е *Y*имеем

$$K(x, y_1^*) \le K(x_1^*, y_1^*) \le K(x_1^*, y) \qquad (0.5)$$

$$K(x, y_2^*) \le K(x_2^*, y_2^*) \le K(x_2^*, y) \qquad (0.6)$$

Подставим в левую часть неравенства (0.5) x_2^*, в правую − y_2^*, в левую часть неравенства (0.6) − x_1^*и в правую y_1^*. В результате получим цепь неравенств

$$K(x_2^*, y_1^*) \le K(x_1^*, y_1^*) \le K(x_1^*, y_2^*) \le K(x_2^*, y_2^*) \le K(x_2^*, y_1^*)$$

Откуда следует доказываемое равенство.

Следствие. *Пусть* $(x_1^*, y_1^*), (x_2^*, y_2^*)$ *— две произвольные ситуации равновесия в антагонистической игре Г. Тогда* $(x_1^*, y_2^*), (x_1^*, y_2^*) \in Z(\Gamma)$ *, т.е. также являются ситуациями равновесия. Более того* $Z(\Gamma) = X^* \times Y^*$*, где*

$$X^* = \left\{ x \in X : \left(\exists y \in Y \right)\left((x, y) \in Z(\Gamma) \right) \right\},$$

$$Y^* = \left\{ y \in Y : \left(\exists x \in X \right)\left((x, y) \in Z(\Gamma) \right) \right\}.$$

Доказательство. Рассмотрим ситуацию (x_2^*, y_1^*). Тогда из доказанной выше теоремы и неравенств (0.5) и (0.6) следует

$$K(x, y_1^*) \le K(x_1^*, y_1^*) = K(x_2^*, y_1^*) = K(x_2^*, y_2^*) \le K(x_2^*, y)$$

для всех $x \in X$, $y \in Y$. Таким образом, ситуация (x_2^*, y_1^*) является равновесной. Доказательство равновесности ситуации (x_1^*, y_2^*) проводится аналогично. Для доказательства второго предложения достаточно заметить противоречивость противоположного предположения. Следствие доказано.

Издоказанных теоремы и следствия следует, что функция выигрыша принимает одно и то же значение во всех ситуациях равновесия. Поэтому разумно ввести следующие определения.

Определение. *Пусть* (x^*, y^*) *— ситуация равновесия в игре Г. Тогда число* $v = K(x^*, y^*)$ *называется значением игры Г.*

Определение. *Множество X*(Y*) называется множеством оптимальных стратегий игрока 1(2) в игре* Г, *а его элементы — оптимальными стратегиями игрока 1 (2).*

Заметим, что нами фактически доказана взаимозаменяемость оптимальных стратегий, т. е. любая пара оптимальных стратегий образует ситуацию равновесия, а выигрыш в ней равен значению игры.

Оптимальность поведения игроков не изменится, если в игре множества стратегий остаются прежними, а функция выигрыша умножается на положительную константу (или к ней прибавляется постоянное число).

Лемма (о масштабе). *Пусть Г=(X, Y, K) иГ=(X, Y, K'') две антагонистические игры, причем*

$$\left(\forall (x, y) \in X \times Y \right)\left(\exists!\, \alpha \in \mathbf{R}, \beta \in \mathbf{R}^+ \right)\left(K'(x, y) = \beta \cdot K(x, y) + \alpha \right). \qquad (0.7)$$

Тогда

$$Z(\Gamma') = Z(\Gamma), \quad v_{\Gamma'} = \beta \cdot v_{\Gamma} + \alpha. \qquad (0.8)$$

Доказательство. Пусть *(x*. y*)* − ситуация равновесия в игре Г. Тогда имеем

$$\left(\forall y \in Y \right)\left(K'(x^*, y^*) = \beta \cdot K(x^*, y^*) + \alpha \le \beta \cdot K(x^*, y) + \alpha = K'(x^*, y) \right),$$

$$\left(\forall x \in X \right)\left(K'(x, y^*) = \beta \cdot K(x, y^*) + \alpha \le \beta \cdot K(x^*, y^*) + \alpha = K'(x^*, y^*) \right).$$

Поэтому $(x^*, y^*) \in Z(\Gamma')$. Таким образом доказано включение $Z(\Gamma) \subseteq Z(\Gamma')$.
Пусть теперь $(x, y) \in Z(\Gamma')$. Тогда

$$K(x, y) = \frac{1}{\beta} K'(x, y) - \frac{\alpha}{\beta}.$$

Рассуждая аналогично, получаем, что $(x, y) \in Z(\Gamma)$, т.е. $Z(\Gamma) \supseteq Z(\Gamma')$. Таким образом, имеет место равенство $Z(\Gamma) = Z(\Gamma')$. Кроме того, имеем

$$v_{\Gamma'} = K'(x^*, y^*) = \beta \cdot K(x^*, y^*) + \alpha = \beta \cdot v_{\Gamma} + \alpha.$$

Лемма доказана.

Содержательно данная лемма говорит о стратегической эквивалентности двух игр, отличающихся лишь началом отсчета выигрышей, а также масштабом их измерения.

Теперь установим связь между принципом равновесия и принципами минимакса и максимина в антагонистической игре.

Теорема. *Для того чтобы в игре Г={X, Y, K) существовала ситуация равновесия, необходимо и достаточно, чтобы существовали минимакс и максимин*

$$\min_{y \in Y} \sup_{x \in X} K(x, y), \quad \max_{x \in X} \inf_{y \in Y} K(x, y) \tag{0.9}$$

и выполнялось равенство

$$\underline{v} = \max_{x \in X} \inf_{y \in Y} K(x, y) = \min_{y \in Y} \sup_{x \in X} K(x, y) = \overline{v} \tag{0.10}$$

Доказательство. Необходимость. *Пусть* $(x^*, y^*) \in Z(\Gamma)$. Тогда для всех $x \in X$ и $y \in Y$ выполняются неравенства

$$K(x, y^*) \le K(x^*, y^*) \le K(x^*, y) \tag{0.11}$$

отсюда

$$\sup_{x \in X} K(x, y^*) \le K(x^*, y^*). \tag{0.12}$$

Вместе с тем имеем

$$\inf_{y \in Y} \sup_{x \in X} K(x, y) \le \sup_{x \in X} K(x, y^*) \tag{0.13}$$

Сравнивая (0.11) и (0.13), получаем

$$\inf_{y \in Y} \sup_{x \in X} K(x, y) \le \sup_{x \in X} K(x, y^*) \le K(x^*, y^*). \tag{0.14}$$

Рассуждая аналогично, приходим к неравенствам

$$K(x^*, y^*) \le \inf_{y \in Y} K(x^*, y) \le \sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} K(x, y). \tag{0.15}$$

Таким образом,

$$\inf_{y \in Y} \sup_{x \in X} K(x, y) \le \sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} K(x, y).$$

С другой стороны, всегда выполняется обратное неравенство (0.4). Итак, получаем

$$\inf_{y \in Y} \sup_{x \in X} K(x, y) = \sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} K(x, y),$$ **Ошибка! Закладка не определ**

при этом неравенства (0.14), (0.15) выполняются как равенства, поэтому

$$\inf_{y \in Y} \sup_{x \in X} K(x, y) = K(x^*, y^*), \quad \sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} K(x, y) = K(x^*, y^*).$$

Таким образом,. внешние экстремумы у минимакса и максимина достигаются в точках y^* и x^* соответственно. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть существуют минимакс и максимин

$$\min_{y\in Y}\sup_{x\in X} K(x,y)=\sup_{x\in X} K(x,y^*),\quad \max_{x\in X}\inf_{y\in Y} K(x,y)=\inf_{y\in Y} K(x^*,y), \tag{0.16}$$

и выполняется равенство (0.10). Покажем, что ситуация *(x^*, y^*)* является равновесной. Действительно,

$$K(x^*,y^*)\le \sup_{x\in X} K(x,y^*)=\min_{y\in Y}\sup_{x\in X} K(x,y), \tag{0.17}$$

$$K(x^*,y^*)\ge \inf_{y\in Y} K(x^*,y)=\max_{x\in X}\inf_{y\in Y} K(x,y). \tag{0.18}$$

Согласно равенству (0.10) минимакс равен максимину. Из (0.17), (0.18) следует, что он равен также и величине $K(x^*, y^*)$, т. е. неравенства в ((0.17), (0.18) выполняются как равенства. Теперь имеем

$$K(x^*,y^*)=\sup_{x\in X} K(x,y^*)\ge K(x,y^*)\left(x\in X\right),$$

$$K(x^*,y^*)=\inf_{y\in Y} K(x^*,y)\le K(x^*,y)\left(\forall y\in Y\right).$$

Достаточность доказана.

Заметим, что в ходе доказательства показано, что общее значение минимакса и максимина равно$K(x^*, y^*))=v$ − значению игры, при этом любая минимаксная (максиминная) стратегия *$y^*(x^*)$* в условиях теоремы является оптимальной, т. е. ситуация *(x^*. y^*)* является равновесной.

Из доказательства теоремы получаем следующее утверждение.

Следствие 1._Если_минимакс и максимин_ в (0.9)*существуют и достигаются на $\bar{x}$ и $\bar{y}$ соответственно, то*

$$\underline{v}=\max_{x\in X}\inf_{y\in Y} K(x,y)\le K(\bar{x},\bar{y})\le \min_{y\in Y}\sup_{x\in X} K(x,y)=\bar{v} \tag{0.19}$$

Игры, в которых существуют ситуации равновесия, называются *вполне определенными.* Поэтому данная теорема устанавливает критерий вполне определенной игры и может быть переформулирована следующим образом. Для того чтобы игра была вполне определена, необходимо и достаточно, чтобы существовали минимакс и максимин в (0.9) и выполнялось равенство (0.10).

Заметим, что в матричной игре Γ_A экстремумы в(0.9) всегда достигаются, поэтому теорема принимает следующий вид.

Следствие 2.*Для того чтобы матричная Γ_Aбыла вполне определена, необходимо и достаточно выполнение равенства*

$$\min_{j=1,2,\dots,n}\max_{i=1,2,\dots,m} a_{ij}=\max_{i=1,2,\dots,m}\min_{j=1,2,\dots,n} a_{ij}. \tag{0.20}$$

Например, в игре с матрицей

$$A=\begin{bmatrix}1 & 4 & 1\\ 2 & 3 & 4\\ 0 & -2 & 7\end{bmatrix}$$

ситуация (2,1) является равновесной. При этом

$$\min_{j=1,2,\dots,n}\max_{i=1,2,\dots,m} a_{ij}=\max_{i=1,2,\dots,m}\min_{j=1,2,\dots,n} a_{ij}=2.$$

С другой стороны, игра с матрицей

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

не имеет ситуации равновесия, поскольку

$$\min_{j=1,2,\ldots,n} \max_{i=1,2,\ldots,m} a_{ij} = 1 > \max_{i=1,2,\ldots,m} \min_{j=1,2,\ldots,n} a_{ij} = 0 .$$

1.3. Смешанное расширение игры

Рассмотрим матричную игру $Г_A$. Если в ней существует ситуация равновесия, то минимакс равен максимину, причем согласно определению ситуации равновесия каждый из игроков может сообщить свою оптимальную (максиминную) стратегию противнику и от этого ни один из игроков не может получить дополнительную выгоду. Теперь предположим, что в игре $Г_A$ не существует ситуации равновесия. Тогда согласно теореме п. 0 и лемме п. 0 имеем

$$\min_{j=1,2,\dots,n} \max_{i=1,2,\dots,m} a_{ij} - \max_{i=1,2,\dots,m} \min_{j=1,2,\dots,n} a_{ij} > 0 \qquad (0.21)$$

В этом случае максиминная и минимаксная стратегии не являются оптимальными. Более того, игрокам бывает невыгодно их придерживаться, так как они могут получить больший выигрыш. Однако сообщение о выборе стратегии противнику может привести к еще большим потерям, чем в случае максиминной или минимаксной стратегии. Действительно, пусть матрицаAимеет вид

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Для такой матрицы

$$\min_{j=1,2,\dots,n} \max_{i=1,2,\dots,m} a_{ij} = 5, \max_{i=1,2,\dots,m} \min_{j=1,2,\dots,n} a_{ij} = 3,$$

т. е. ситуации равновесия не существует. Обозначим через i^* максиминную стратегию игрока *1* ($i^* = 1$), а минимаксную стратегию игрока *2* через j• (j^*=2). Пусть игрок 2 придерживается стратегииj^*=2, а игрок *1* выберет стратегию $i=2$. Тогда последний получит выигрыш 5, т. е. на 2 единицы больше, чем максимин. Однако если игрок *2* догадается о выборе игрока *1,* то он изменит стратегию на j=1, и тогда первый получит выигрыш лишь 2 единицы, т. е. на единицу меньше, чем в случае максимина. Аналогичные рассуждения можно провести и для второго игрока. По существу вопрос стоит о том, как разделить между игроками выигрыш (0.21)?

Оказывается, что в этом случае игрокам разумно действовать случайно, что обеспечивает наибольшую скрытность выбора стратегии. Результат выбора не может стать известным противнику, поскольку до реализации случайного механизма не известен самому игроку.

Определение. *Случайное событие, всеми возможными реализациями которого являются стратегии игрока, называется смешанной стратегией данного игрока.*

Так, для матричной игры $Г_л$смешанной стратегией игрока *1* является случайная величина, значениями которой являются номера строк $i \in M$, $M = \{1, 2, \dots, m\}$ матрицы *A.* Аналогично определяется смешанная стратегия игрока *2*, значениями которой являются номера $j \in N$ столбцов матрицы *A.*

Учитывая только что введенное определение смешанных стратегий, прежние стратегии будем называть *«чистыми».* Так как случайная величина характеризуется своим распределением, то будем отождествлять в дальнейшем смешанную стратегию с вероятностным распределением на множестве чистых стратегий. Таким образом, смешанная стратегия *x* игрока *1* в игре есть *m*-мерный вектор

$$x=(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_m)^T\in\mathbf{R}^m:\sum_{i=1}^{m}\xi_i=1,\,\xi_i\ge 0,\,i=1,2,\ldots m\,. \qquad (0.22)$$

Аналогично, смешанная стратегия *y* игрока *2* есть *n*-мерный вектор

$$y=(\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_n)^T\in\mathbf{R}^n:\sum_{j=1}^{n}\eta_j=1,\,\eta_j\ge 0,\,i=1,2,\ldots n\,. \qquad (0.23)$$

При этом $\xi_i\ge 0$ и $\xi_j\ge 0$ − вероятности выбора чистых стратегий $i\in M$ и $j\in N$ при использовании игроками смешанных стратегий *x* и *y*.

Обозначим через *X*и *Y*соответственно *множества смешанных стратегий первого и второго игроков.* Нетрудно заметить, что множество смешанных стратегий каждого игрока − замкнутое, ограниченное множество в соответствующем конечномерном евклидовом пространстве (т.е. компакт).

Определение. *Пусть* $x=(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_m)^T\in X$ *− смешанная стратегия игрока 1. Тогда множество индексов*

$$M_x=\left\{i\in M:\xi_i>0\right\}, \qquad (0.24)$$

где $M=\{1,2,\ldots,m\}$*, назовем спектром стратегии x.*

Аналогично для смешанной стратегии $y=(\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_n)^T\in Y$ игрока *2* спектр N_yопределяется следующим образом:

$$N_y=\left\{j\in N:\eta_j>0\right\} \qquad (0.25)$$

где $N=\{1,2,\ldots,n\}$ Спектр смешанной стратегии состоит из таких чистых стратегий, которые выбираются с положительными вероятностями.

Для любой смешанной стратегии *x* спектр $M_x\ne\varnothing$,поскольку вектор *x* имеет неотрицательные компоненты, сумма которых равна 1 [см.(0.22)].

Определение.*Пара (x, y) смешанных стратегий игроков в матричной игре* Γ_A *называется ситуацией в смешанных стратегиях.*

Определим выигрыш игрока *1* в ситуации *(x, y)* в смешанных стратегиях для матричной ($m\times n$)-игры Γ_Aкак математическое ожидание его выигрыша при условии, что игроки используют смешанные стратегии соответственно *x* и *y*. Выбор стратегий игроками осуществляется независимо друг от друга, поэтому математическое ожидание выигрыша *К(x, y)* в ситуации *(x, y)* в смешанных стратегиях $x=(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_m)^T\in X$ и $y=(\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_n)^T\in Y$ равно

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\xi_i\eta_j=x^TAy=y^TA^Tx\,. \qquad (0.26)$$

При этом функция *К*(*x, y*)является непрерывной по *x* и *y*. Заметим, что выигрыши *К(i, y), К(x, j)* при применении одним из игроков чистой стратегии (*i* или *j*), а другим — смешанной стратегии *(y* или *x)* имеют вид

$$K(i,y)=K(u_i,y)=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\eta_j=A_i y,\ i=1,2,\dots,m \qquad (0.27)$$

$$K(x,j)=K(x,w_j)=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\xi_i=x^T A^j,\ j=1,2,\dots,n \qquad (0.28)$$

где A_i, A^j $-i$-я строка и j-й столбец соответственно матрицы A.Таким образом, от матричной игры $\Gamma_A = \{M, N, A\}$ мы пришли к новой игре $\overline{\Gamma}_A=(X,Y,K)$, где Xи Y— множества смешанных стратегий в игре$\overline{\Gamma}_A$, а K — функция выигрыша в смешанных стратегиях. Игру $\overline{\Gamma}_A$будем называть *смешанным расширением игры* Γ_A.

Игра Γ_A является подыгрой для$\overline{\Gamma}_A$. Действительно, рассмотрим смешанную стратегию $u_i=(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_m)^T\in X$, где $\xi_i=1$, $\xi_k=0$, $\forall k\neq i$. Такая стратегия предписывает выбор i-й строки матрицыAс вероятностью 1. Естественно отождествлять смешанную стратегию $u_i\in X$ с выбором i-й строки, т. е. с чистой стратегией $i\in M$ игрока *1*. Аналогично отождествим смешанную стратегию$w_j=(\eta_1,\eta_2,\dots,\eta_n)^T\in Y$, где $\eta_j=1$, $\eta_k=0$, $\forall k\neq j$, с чистой стратегией $j\in N$ игрока *2*. Мы получили, что множество смешанных стратегий игрока есть расширение его пространства чистых стратегий.

Определение. *Ситуация (x^*, y^*) в игре $\overline{\Gamma}_A$образует ситуацию равновесия, а число $v=K(x^*, y^*)$ является значением игры $\overline{\Gamma}_A$, если для всех $x\in X$ и $y\in Y$*

$$K(x,y^*)\le K(x^*,y^*)\le K(x^*,y). \qquad (0.29)$$

Из п. 0 следует, что стратегии (x^*, y^*),входящие в ситуацию равновесия, являются также оптимальными. Функция $K(x, y)$ непрерывна и определена на компактном множестве $X\times Y$, поэтому супремумы и инфимумы в (0.0) и (0.1) достигаются и, согласно теореме п. 0, стратегии x^* и y^* являются соответственно максиминной и минимаксной.

В п. 0 была показана стратегическая эквивалентность двух игр в чистых стратегиях, отличающихся лишь началом отсчета выигрышей, а также масштабом их измерения (лемма о масштабе).

Оказывается, что если две матричные игры Γ_A и $\Gamma_{A'}$ находятся в условиях этой леммы, то их смешанные расширения стратегически эквивалентны. Формально этот факт устанавливается следующим утверждением.

Лемма. *Пусть* Γ_A*и* $\Gamma_{A'}$*— две матричные* $(m\times n)$*-игры, причем*

$$A'=\alpha A+B,\ \alpha>0,$$

а B — матрица, все элементы которой равны β. Тогда $Z(\overline{\Gamma}_A)=Z(\overline{\Gamma}_{A'})$, $\overline{v}_{A'}=\alpha\overline{v}_A+\beta$, *где* $\overline{\Gamma}_A$ *и* $\overline{\Gamma}_{A'}$*—смешанные расширения игр* Γ_A*и* $\Gamma_{A'}$*соответственно, а* $\overline{v}_A,\overline{v}_{A'}$*— значения игр.*

Доказательство. Обе матрицы A и A' имеют одинаковые размерности $m\times n$, поэтому множества смешанных стратегий в играх Γ_Aи $\Gamma_{A'}$ совпадают. Покажем, что для любой смешанной ситуации (x, y)выполняется равенство

$$K'(x,y) = \alpha \cdot K(x,y) + \beta \qquad (0.30)$$

где*K′ и К* — выигрыши игрока *1* в играх Γ_Aи $\Gamma_{A'}$ соответственно.

Действительно, для $\forall x \in X,\ y \in Y$ имеем

$$K'(x,y) = y^T A'^T x = \alpha \cdot (y^T A^T x) + y^T B^T x = \alpha \cdot K(x,y) + \beta\,.$$

Тогда из леммы о масштабе следует, что $Z(\overline{\Gamma}_{A'}) = Z(\overline{\Gamma}_A), \bar{v}_{A'} = \alpha \cdot \bar{v}_A + \beta$.

В дальнейшем, говоря о матричной игре Γ_A будем предполагать, что речь идет о ее смешанном расширении $\overline{\Gamma}_{A'}$.

1.4. *Свойства оптимальных стратегий и значения игры*

Рассмотрим свойства оптимальных стратегий, которые в ряде случаев помогают находить значение игры и ситуацию равновесия.

Пусть *(x*, y*)* − ситуация в смешанных стратегиях в игре $\overline{\Gamma}_{A'}$. Оказывается, что для проверки ситуации *(x*, y*)* на равновесность достаточно проверять неравенства (0.29) не для всех $x \in X$ *и* $y \in Y$, а лишь для $i \in M,\ j \in N$, поскольку справедливо следующее утверждение.

Теорема. *Для того чтобы ситуация (x*. y*) была равновесной в игре* $\overline{\Gamma}_{A'}$, *а число v=K(x*, y*) − значением игры* $\overline{\Gamma}_{A'}$ *необходимо и достаточно выполнение следующих неравенств для всех* $i \in M,\ j \in N$

$$K(i, y^*) \le K(x^*, y^*) \le K(x^*, j). \tag{0.31}$$

Доказательство.Необходимость.Пусть (x*, y*)− ситуация равновесия в игре $\overline{\Gamma}_{A'}$. Тогда $K(x, y^*) \le K(x^*, y^*) \le K(x^*, y)$ для всех $x \in X,\ y \in Y$. Поэтому, в частности, для $u_i \in X,\ w_j \in Y$ имеем

$$K(i, y^*) = K(u_i, y^*) \le K(x^*, y^*) \le K(x^*, w_j) = K(x^*, j)$$

для всех $i \in M,\ j \in N$.

Достаточность. Пусть (x*, y*) − пара смешанных стратегий, для которой выполняются неравенства (0.31). Пусть также $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)^T \in X$ и $y = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)^T \in Y$ − произвольные смешанные стратегии игроков *1* и *2* соответственно. Умножая первое и второе неравенства (0.31)на ξ_i и η_j соответственно и суммируя, получаем

$$\sum_{i=1}^{m} \xi_i K(i, y^*) \le \sum_{i=1}^{m} \xi_i K(x^*, y^*) = K(x^*, y^*) \sum_{i=1}^{m} \xi_i = K(x^*, y^*), \tag{0.32}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \eta_j K(x^*, j) \ge \sum_{j=1}^{n} \eta_j K(x^*, y^*) = K(x^*, y^*) \sum_{j=1}^{n} \eta_j = K(x^*, y^*). \tag{0.33}$$

При этом имеем

$$\sum_{i=1}^{m} \xi_i K(i, y^*) = K(x, y^*), \tag{0.34}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \eta_j K(x^*, j) = K(x^*, y). \tag{0.35}$$

Подставляя (0.34), (0.35) в неравенства (0.32) и (0.33) соответственно и учитывая произвольность стратегий $x \in X,\ y \in Y$, получаем

$$\big(\forall (x, y) \in X \times Y\big) K(x, y^*) \le K(x^*, y^*) \le K(x^*, y),$$

т.е. равновесность ситуации (x*, y*).

Теорема доказана.

Следствие.*Пусть* (i*,j*) — *ситуация равновесия в игре* Γ_A. *Тогда* (u_{i^*}, w_{j^*}) − *ситуация равновесна и в игре* $\overline{\Gamma}_{A'}$.

Пример. *(Решение игры на уклонение.)* Предполагается, что игроки выбирают целые числа *i*и *j*между 1 и *n*, а игрок *1* выигрывает величину $K(i,j)=|i—j|$, т. е. расстояние между числами *i*и *j*.

Пусть первый игрок придерживается стратегии $x^*=(^1/_2, 0, \ldots \ldots 0, ^1/_2)$. Тогда

$$(\forall j=1,2,\ldots,n)K(x^*,j)=\frac{1}{2}\cdot|1-j|+\frac{1}{2}\cdot|n-j|=\frac{(n-1)}{2}.$$

а) Пусть $n=2k+1$ — нечетно. Тогда игрок *2* имеет чистую стратегию $j^*=(n+1)/2=k+1$такую, что

$$(\forall i=1,2,\ldots,m)\, a_{ij^*}=\left|i-\frac{n+1}{2}\right|=|i-k-1|\le k=\frac{n-1}{2}.$$

б) Предположим, что $n=2к$ − четно. Тогда игрок *2* имеет такую стратегию $y^*=(0,\ldots,0, ^1/_2 , ^1/_2.,0,\ldots,0)$, $\eta_k=\eta_{k+1}=1/2, \eta_j=0,\ j\ne k,\ j\ne k+1$, что

$$(\forall i=1,2,\ldots,m)\, K(i,y^*)=\frac{1}{2}|i-k|+\frac{1}{2}|i-k-1|\le\frac{k}{2}+\frac{k-1}{2}=\frac{n-1}{2}.$$

Теперь, используя теорему, нетрудно убедиться, что значение игры $v=(n-1)/2$, игрок *1* имеет оптимальную стратегию x^*, а оптимальная стратегия игрока *2* равна j^*, если $n=2k+1$и y^*, если $n=2k$.

Приведем результаты, являющиеся непосредственным следствием теоремы п. 0.

Теорема. *Пусть* $Г_A$ — $(m\times n)$*-игра. Для того чтобы ситуация в смешанных стратегиях* (x^*, y^*) *была равновесной в игре* $\overline{\Gamma}_{A'}$, *необходимо и достаточно выполнение равенства*

$$\max_{1\le i\le m} K(i,y^*)=\min_{1\le j\le n} K(x^*,j). \tag{0.36}$$

Доказательство.

Необходимость. Если (x^*, y^*)− ситуация равновесия, то согласно теореме п. 0

$$(\forall i\in M,\ j\in N)K(i,y^*)\le K(x^*,y^*)\le K(x^*,j)$$

Поэтому

$$\max_{1\le i\le m} K(i,y^*)\le\min_{1\le j\le n} K(x^*,j).$$

Предположим противное, т. е. (0.36) не выполнено, тогда

$$\max_{1\le i\le m} K(i,y^*)<\min_{1\le j\le n} K(x^*,j).$$

Следовательно, имеют место неравенства

$$K(x^*,y^*)=\sum_{i=1}^{m}\xi_i^*K(i,y^*)\le\max_{1\le i\le m} K(i,y^*)<\min_{1\le j\le n} K(x^*,j)\le\sum_{j=1}^{n}\eta_j^*K(x^*,j)=K(x^*,y^*).$$

Полученное противоречие и доказывает необходимость утверждения теоремы.

Достаточность. Пусть пара смешанных стратегий (x^*, y^*)удовлетворяет (0.36). Тогда из очевидных соотношений

$$\max_{i\in M} K(i,y^*)\ge\sum_{i=1}^{m}\xi_i^*K(i,y^*)=K(x^*,y^*)=\sum_{j=1}^{N}\eta_j^*K(x^*,j)\ge\min_{j\in N} K(x^*,j)$$

следует

$$\max_{i\in M} K(i, y^*) = K(x^*, y^*) = \min_{j\in N} K(x^*, j).$$

Поэтому имеем

$$(\forall i\in M,\ j\in N) K(i, y^*) \le K(x^*, y^*) \le K(x^*, j),.$$

т.е. в соответствии с теоремой п. 0 ситуация (x^*, y^*) является ситуацией равновесия в игре $\bar{\Gamma}_{A'}$. Теорема доказана.

Из доказательства следует, что любое из чисел в равенстве (0.36) равно значению игры.

1.5. *Решение матричной игры в классе смешанных стратегий*

Докажем, что произвольная матричная игра вполне определена в классе смешанных стратегий.

Теорема. *Всякая матричная игра имеет ситуацию равновесия в смешанных стратегиях.*

Доказательство. Пусть Γ_A — произвольная $(m \times n)$ игра. В соответствии с теоремой п. 0 и равенствами (0.27) и (0.28) достаточно показать, что следующие задачи

$$\min_{1 \le j \le n} \left\{ K(x, j) = x^T A^j,\ j = 1, 2, \dots, n \right\} \to \max_{x \in X},$$

$$\max_{1 \le i \le m} \left\{ K(i, y^*) = A_i y, \quad i = 1, 2, \dots, m \right\} \to \min_{y \in Y},$$

имеют оптимальные решения и равные оптимальные значения.

Данные задачи эквивалентны соответственно следующим задачам линейного программирования

$$u \to \max_{(u,x)}, \tag{0.37}$$

$$x^T A^j \le u, \quad j = 1, 2, \dots, n, \tag{0.38}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1, \tag{0.39}$$

$$x_i \ge 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \tag{0.40}$$

и

$$v \to \min_{(v,y)}, \tag{0.41}$$

$$A_i y \le v, \quad i = 1, 2, \dots, m, \tag{0.42}$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_j = 1, \tag{0.43}$$

$$y_j \ge 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \tag{0.44}$$

Легко заметить, что задачи (0.37)-(0.40) и (0.41)-(0.44) образуют двойственную пару и обе имеют допустимые решения. В частности, допустимым решением задачи (0.37)-(0.40) является решение

$$x_i = \frac{1}{m}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad u = \frac{1}{m} \cdot \max_{j=1,2,\dots,n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij},$$

а допустимым решением задачи (0.41)-(0.44) является решение

$$y_j = \frac{1}{n}, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad v = \frac{1}{n} \cdot \min_{i=1,2,\dots,m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}.$$

В соответствии с теоремой двойственности в линейном программировании задачи (0.37)-(0.40) и (0.41)-(0.44) имеют оптимальные решения и равные оптимальные значения. Теорема доказана.

Следствие.*Для матричной игры* $\overline{\Gamma}_{A'}$ *справедливы следующие соотношения:*

$$v_A = \min_{y\in Y}\max_{i\in M} K(i,y) = \max_{x\in X}\min_{j\in N} K(x,j) = \\ = \min_{y\in Y}\max_{x\in X} K(x,y) = \max_{x\in X}\min_{y\in Y} K(x,y), \tag{0.45}$$

причем экстремумы по смешанным стратегиям x и y в (0.45)) *достигаются на оптимальных стратегиях игроков.*

Графическое решение (2×*n*)- и (*m*×2)-игр.

В качестве примера использования следствия п. 0 приведем геометрическое решение игр с двумя стратегиями у одного из игроков ((2×*n*)- и (*m*×2)-игры). Такой подход в литературе также называется графоаналитическим методом решения игр.

В основе графоаналитических методов лежит свойство оптимальных стратегий x^* и y^* доставлять внешние экстремумы в равенстве (0.45).

((2×*n*)- игра). Рассмотрим игру, в которой игрок *1* имеет две стратегии, а игрок *2* — *n* стратегий. Матрица игры имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \end{bmatrix}$$

Пусть игрок *1* выбрал смешанную стратегию $x = (\xi, 1-\xi)$, а игрок *2* чистую стратегию $j \in N$. Тогда выигрыш игрока *1* в ситуации (*x,j*) равен

$$K(x,j) = \xi a_{1j} + (1-\xi)a_{2j}. \tag{0.46}$$

Геометрически его можно представить как прямую в координатах (ξ, *K*). Таким образом, каждой чистой стратегии *j* соответствует своя прямая. Поэтому, графиком функции

$$H(\xi) = \min_{j\in N} K(x,j)$$

является нижняя огибающая семейства прямых (0.46). Эта функция вогнута как нижняя огибающая семейства вогнутых (в данном случае линейных) функций. Точка ξ *, в которой достигается максимум функции $H(\xi\ )$ по $\xi \in [0,1]$, и дает требуемое оптимальное решение и значение игры $v_A = H(\xi^*)$.

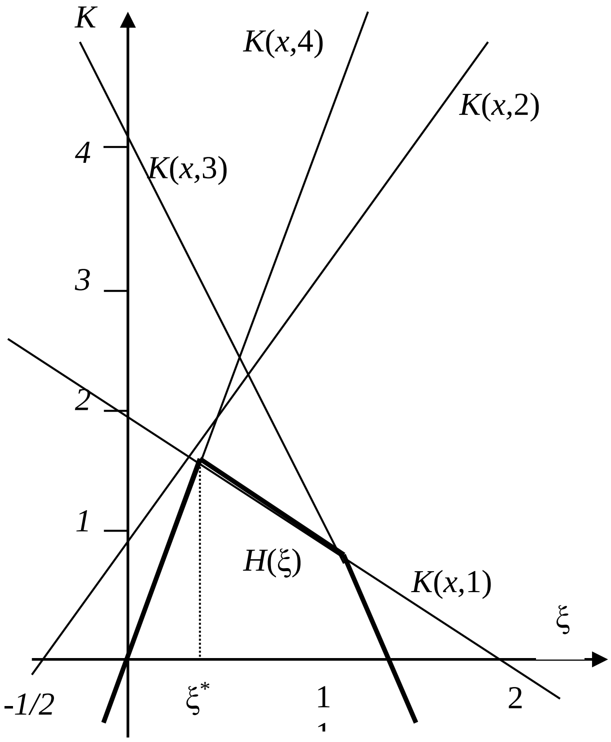

Рис. 1

В качестве примера рассмотрим игру с матрицей

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 1 & 4\\ 2 & 1 & 4 & 0\end{bmatrix}.$$

Для каждого j = 1, 2, 3, 4 имеем:

$K(x, 1)$=-ξ + 2, $K(x, 2)$=2ξ +1,

$K(x, 3)$ = -3ξ +4, $K(x, 4)$ =4ξ.

Нижняя огибающая H(ξ) семейства прямых {$K(x, j)$: j = 1, 2, 3, 4 } и сами прямые изображены на рис. 1. Максимум $H(\xi^*)$ функции H(ξ) находится на пересечении первой и четвертой прямых. Таким образом, ξ^* — решение уравнения -ξ + 2 = 4ξ = v_A.

Отсюда получаем оптимальную стратегию x^* = (2/5, 3/5) игрока *1* и значение игры v_A.= 8/5.

Для оптимальной стратегии $y^*=\left(\eta_1^*,\eta_2^*,\eta_3^*,\eta_4^*\right)^T$ должно выполняться равенство

$$v_A=K(x^*,y^*)=\eta_1^*K(x^*,1)+\eta_2^*K(x^*,2)+\eta_3^*K(x^*,3)+\eta_4^*K(x^*,4).$$

При этом $K(x^*,2)>8/5$, $K(x^*,3)>8/5$, следовательно, $\eta_2^*=\eta_3^*=0$, а η_1^*,η_4^* можно найти из условия (0.35) $\eta_1^*+4\eta_4^*=8/5$, $2\eta_1^*=8/5$. Таким образом, $\eta_1^*=4/5$ и $\eta_4^*=1/5$, а оптимальная стратегия игрока *2* равна y^*=(4/5, 0, 0, 1/5).

((*m*×*2*)- игра). Рассмотрим игры, когда две стратегии имеет игрок *2,* а игрок *1* — *m* стратегий. В этом случае матрицаAимеет вид

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\\ \vdots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2}\end{bmatrix}$$

Анализ этой игры проводится аналогично анализу (2×n)- игры. Действительно, пусть игрок *2* выбрал смешанную стратегию $y=(\eta,1-\eta)$, а игрок *1* чистую стратегию $i\in M$. Тогда выигрыш игрока *2* в ситуации (i,y) равен

$$K(i,y)=\eta a_{i1}+(1-\eta)a_{i2}. \qquad (0.47)$$

Геометрически его можно представить как прямую в координатах (η, K). Таким образом, каждой чистой стратегии i соответствует своя прямая. Поэтому, графиком функции

$$H(\eta)=\max_{i\in M}K(i,\eta)=\max_{i\in M}\left(\eta a_{i1}+(1-\eta)a_{i2}\right)$$

является верхняя огибающая семейства прямых (0.46). Эта функция выпукла как верхняя огибающая семейства выпуклых (в данном случае линейных) функций. Точка

$$\eta^* = \arg\min_{\eta\in[0,1]}\max_{i\in M}\left(\eta a_{i1} + (1-\eta)a_{i2}\right),$$

в которой достигается минимум функции $H(\eta)$, является оптимальной смешанной стратегией первого игрока и дает требуемое оптимальное значение игры $v_A = H(\eta^*)$.

1.1.1 Теорема. *Пусть* $x^* = \left(\xi_1^*, \xi_2^*, \ldots, \xi_m^*\right)^T$ ***и*** $y^* = \left(\eta_1^*, \eta_2^*, \ldots, \eta_n^*\right)^T$ — *оптимальные стратегии в игре* Γ_A *и* v_A — *значение игры. Тогда*

$$(\forall i\in M)\Big(\big(K(i,y^*) < v_A\big) \Rightarrow \big(\xi_i^* = 0\big)\Big),\quad (\forall i\in M)\Big(\big(\xi_i^* > 0\big) \Rightarrow \big(K(i,y^*) = v_A\big)\Big),$$

$$(\forall j\in N)\Big(\big(K(x^*,j) > v_A\big) \Rightarrow \big(\eta_j^* = 0\big)\Big),\quad (\forall j\in N)\Big(\big(\eta_j^* > 0\big) \Rightarrow \big(K(x^*,j) = v_A\big)\Big).$$

Доказательство. Допустим, что для некоторого $l\in M$ выполнено $K(l,y^*) < v_A$ и при этом $\xi_l^* > 0$. Тогда $\xi_l^* K(l,y^*) < \xi_l^* v_A$. Учитывая, что $(\forall i\in M)\left(\xi_i^* K(i,y^*) \le \xi_i^* v_A\right)$ мы приходим к противоречию

$$v_A = \sum_{i=1}^{m}\xi_i^* K(i,y^*) < \sum_{i=1}^{m}\xi_i^* v_A = v_A,$$

которое доказывает истинность импликации $\left(K(l,y^*) < v_A\right) \Rightarrow \left(\xi_l^* = 0\right)$. Обратно, если $\xi_l^* > 0$, то предположение $K(l,y^*) < v_A$ в соответствии с доказанным выше повлечет $\xi_l^* = 0$. Полученное противоречие доказывает истинность импликации $\left(\xi_l^* > 0\right) \Rightarrow \left(K(l,y^*) = v_A\right)$. Истинность второй пары импликаций доказывается аналогично.

Теорема доказана.

Изложенный результат является аналогом теоремы одополняющей нежесткости или, как его еще называют, канонической теоремой равновесия для задачи линейного программирования.

Определение. *Чистая стратегия* $i\in M$ *(* $j\in N$ *) игрока 1 (2) называется существенной или активной стратегией, если существует оптимальная смешанная стратегия* x^* *(*y^**) этого игрока, в которой* $x_i^* > 0$ ($y_j^* > 0$).

Из определения и последней теоремы следует, что для каждой существенной стратегии $i\in M$ игрока *1* и любой оптимальной стратегии $y^*\in Y$ игрока *2* в игре Γ_A выполняется равенство

$$K(i,y^*) = A_i y^* = v_A.$$

Аналогичное равенство имеет место для любой существенной стратегии $j\in N$ игрока *2* и оптимальной стратегии $x^*\in X$ игрока *1*

$$K(x^*,j) = \left(A^j\right)^T x^* = v_A.$$

Если для чистой стратегии $i \in M$ и смешанной стратегии $y \in Y$ выполняется равенство $A_i y = v_A$, то говорят, что стратегия i уравновешивает смешанную стратегию y в игре Γ_A. Таким образом, в данной терминологии теорему можно переформулировать следующим образом.

Если чистая стратегия игрока существенна, то она уравновешивает любую оптимальную стратегию противника.

2. Неантагонистические игры

2.1. *Определение неантагонистической игры в нормальной форме. Биматричные игры*

Ранее были рассмотрены антагонистические игры двух лиц, т. е. игры, в которых интересы сторон прямо противоположны. Однако реальные задачи принятия решения в условиях конфликта характеризуются большим числом участников и, как следствие этого, неантагонистичностью конфликтной ситуации. Если говорить о конфликте двух лиц и его моделях, то можно заметить, что он также не исчерпывается только антагонистическим случаем. Дело в том, что интересы игроков могут пересекаться, но не быть обязательно противоположными. Это, в частности, может приводить к ситуациям, взаимовыгодным обоим игрокам (в антагонистическом конфликте это невозможно), что делает осмысленным кооперирование (выбор согласованного решения), приводящее к увеличению выигрыша обоих игроков. Однако возможны такие конфликты, когда кооперация или соглашение невозможны по правилам игры. Поэтому в неантагонистических играх различают бескоалиционное поведение, когда соглашения между игроками запрещены правилами, и кооперативное поведение игроков, когда разрешается кооперация типа выбора совместных стратегий и совершения побочных платежей. Рассмотрим первый случай.

Определение. *Кортеж*

$$\Gamma = \left\{ N, \left\{ X_i : i \in N \right\}, \left\{ H_i : i \in N \right\} \right\}$$

в котором N – множество игроков, X_i, — множество стратегий игрока i*,*

$$H_i : \prod_{i \in N} X_i \to \mathbf{R}$$

– функция выигрыша игрока i*, определенная на декартовом произведении множеств стратегий игроков (на множестве ситуаций игры), называется бескоалиционной игрой.*

Бескоалиционная игра nлиц происходит следующим образом. Игроки одновременно и независимо друг от друга выбирают свои стратегии x_iиз множеств стратегий X_i, в результате чего формируется ситуация

$$x = \left\{ x_i \in X_i : \ i \in N \right\}.$$

После этого каждый игрок i получает выигрыш $H_i(x)$. На этом игра заканчивается.

Если множества чистых стратегий игроков X_i, конечны, то игра Γ называется *конечной бескоалиционной игрой* $n=|N|$ лиц.

Бескоалиционная игра Γ, в которой принимают участие два игрока, является игрой двух лиц. Таким образом, бескоалиционная игра двух лиц Γ в нормальной форме определяется кортежем вида $\Gamma=\{X_1, X_2, H_1, H_2\}$, где X_1 – множество стратегий первого игрока, X_2 – множество стратегий второго игрока, $X_1 \times X_2$ — множество ситуаций игры, а H_1: $X_1 \times X_2 \to \mathbf{R}$, H_2: $X_1 \times X_2 \to \mathbf{R}$ —

функции выигрыша соответственно *1* и *2* игроков. Конечная бескоалиционная игра двух лиц называется биматричной. Это объясняется тем, что перенумеровав множества чистых стратегий игроков числами 1, 2, ..., m и 1, 2, ..., n соответственно, функции выигрыша можно записать в виде двух матриц

$$H_1 = A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad H_2 = B = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}.$$

При этом элементы a_{ij}и b_{ij} матрицA, B являются соответственно выигрышами игроков *1* и *2* в ситуации (i,j), $i \in \{1,2,\ldots,m\}$, $j \in \{1,2,\ldots,n\}$. В соответствии с изложенным выше биматричная игра происходит следующим образом. Первый игрок выбирает номер i строки, а второй (одновременно и независимо) номер jстолбца матрицы. Тогда игрок *1* получает выигрыш a_{ij}, а игрок *2* — выигрыш b_{ij}.

Заметим, что биматричную игру с матрицамиAи B можно также задать $(m\times n)$ матрицей (A, B), каждый элемент которой есть пара (a_{ij}, b_{ij}), i=1, 2, ..., m; j=1, 2, ..., n. Игру, определяемую матрицами A и B, будем обозначать Г (A, B).

Если бескоалиционная игра Г двух лиц такова, что $H_1(x, y)= -H_2(x, y)$для всех x,y, то Г оказывается антагонистической игрой, рассмотренной ранее. В частном случае, когда в биматричной игре $a_{ij}=-b_{ij}$мы получаем матричную игру.

Игра «Семейный спор»

Рассматривается биматричная игра с матрицей

$$(A,B) = \left(\begin{array}{c|cc} & \beta_1 & \beta_2 \\ \hline \alpha_1 & (4,1) & (0,0) \\ \alpha_2 & (0,0) & (1,4) \end{array} \right)$$

Интерпретации этой игры следующая. Муж (игрок *1)* и жена (игрок 2) могут выбрать одно из двух вечерних развлечений: футбольный матч (α_1, β_1)или театр (α_2, β_2). Если они имеют разные желания (α_1, β_2)или (α_2, β_1)то остаются дома. Муж предпочитает футбольный матч, а жена — театр. Однако обоим гораздо важнее провести вечер вместе, чем участвовать в развлечении (хотя и предпочтительном) одному.

Игра «Перекресток»

Два автомобилиста двигаются по двум взаимно перпендикулярным дорогам и одновременно встречаются на перекрестке. Каждый из них может остановиться (1-я стратегия (α_1, β_1)) и ехать (2-я стратегия (α_2, β_2)). Предполагается, что каждый из игроков предпочитает остановиться, а не пострадать в аварии и проехать, если другой сделал остановку. Этот конфликт может быть формализован биматричной игрой с матрицей

$$
(A,B)=\begin{array}{c|cc} & \beta_1 & \beta_2 \\ \hline \alpha_1 & (1,1) & (1-\varepsilon,2) \\ \alpha_2 & (2,1-\varepsilon) & (0,0) \end{array}
$$

(неотрицательное число ε соответствует неудовольствию от того, что игрок остановился и пропустил партнера).

Выбор способа передвижения по городу

Пусть число игроков nвелико и каждое из множеств X_iсостоит из двух элементов: $X_i=\{0, 1\}$ (для определенности: 0 — воспользоваться автомобилем, 1 — использовать общественный транспорт). Функция выигрыша определяется следующим образом:

$$
H_i(x_1,\ldots,x_n)=\begin{cases} a(t), & \text{при} \quad x_i=1, \\ b(t), & \text{при} \quad x_i=0, \end{cases} \qquad \text{где } t=\frac{1}{n}\cdot\sum_{j=1}^{n} x_j .
$$

Пусть a и bимеют вид, изображенный на рис. 2.1. Из вида функций $a(t)$и $b(t)$следует, что если доля игроков, выбирающих 1, больше t_1то уличное движение настолько свободно, что водитель чувствует себя лучше, чем пассажир в общественном транспорте. Если же доля автомобилистов больше $(1-t_0)$, то движение настолько интенсивное (при естественном приоритете общественного транспорта), что сравнение теперь в пользу пассажиров общественного транспорта.

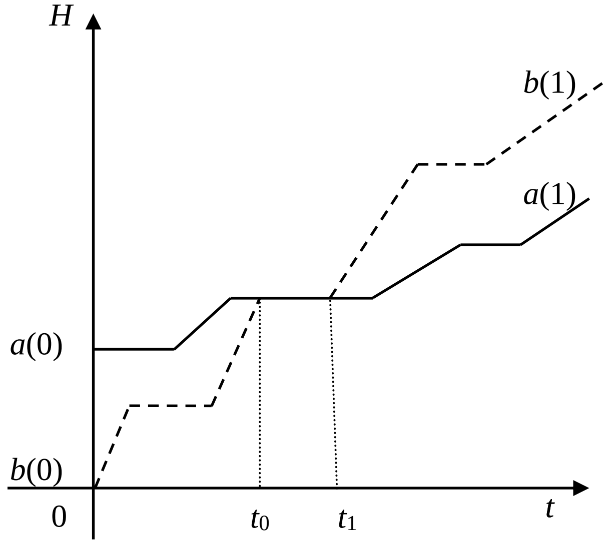

Рис.2.1

Распределение ограниченного ресурса с учетом интересов потребителей

Предположим, что n потребителей имеют возможность расходовать (накапливать) некоторый ресурс, объем которого ограничен величиной$A>0$. Обозначим объем ресурса, который расходует (накапливает) i-й потребитель, через x_i. В зависимости от значений вектора $x=(x_1\ x_2, \ldots, x_n)$потребители получают выигрыш, который оценивается для i-го потребителя функцией $h_i(x_1\ x_2, \ldots, x_n)$ *если* общий объем израсходованного (накопленного) ресурса не превосходит заданной положительной величины$\theta<A$, т. е.

$$
\sum_{i=1}^{n} x_i \le \theta, \quad x_i \ge 0.
$$

Если выполняется противоположное неравенство, то выигрыш i-го потребителя вычисляется с помощью функции $g_i(x_1\ x_2, \ldots, x_n)$. При этом предполагается, что полезность ресурса резко снижается, если

$$\sum_{i=1}^{n} x_i > \theta,$$

т.е. в этом случае $g_i(x_1\ x_2, \ldots, x_n) < h_i(x_1\ x_2, \ldots, x_n)$.

Рассмотрим неантагонистическую игру в нормальной форме

$$\Gamma = \left\{ N, \left\{ X_i \right\}_{i \in N}, \left\{ H_i \right\}_{i \in N} \right\},$$

в которой функции выигрыша игроков имеют вид

$$H_i(x_1, x_2, \ldots x_n) = \begin{cases} h_i(x_1, x_2, \ldots x_n), & \text{при} \quad \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \le \theta, \\ g_i(x_1, x_2, \ldots x_n), & \text{при} \quad \sum\limits_{i=1}^{n} x_i > \theta, \end{cases}$$

$$X_i = [0, a_i], \quad 0 \le a_i \le A, \quad \sum_{i=1}^{n} a_i = A, \quad N = \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Игроками в этой игре являются потребители ресурса.

Теоретико-игровая модель охраны воздушного бассейна от загрязнений

В промышленном районе расположено n предприятий, каждое из которых имеет один источник, выбрасывающий в атмосферу вредную примесь. В районе имеется экологически значимая зона Q, уровень загрязнения в которой не должен превышать предельно допустимого значения. Усредненное по времени и области значение концентрации вредной примеси в атмосфере при наличии n источников можно приближенно рассчитать по формуле

$$q = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad 0 \le x_i \le a_i.$$

Пусть θ – значение предельно допустимой концентрации (ПДК) вредной примеси. Считая предприятия игроками, построим игру, моделирующую конфликтную ситуацию загрязнения атмосферы.

Предположим, что каждое предприятие i может снижать свои эксплуатационные расходы, увеличивая выброс x_i, однако если в зоне Q уровень загрязнения превышает ПДК, на предприятие накладывается штраф $s_i>0$.
Пусть игрок i (предприятие) имеет возможность выбирать значения x_i, из множества $X_i=[0, a_i]$. Функции выигрыша игроковимеют вид

$$H_i(x_1, x_2, \ldots x_n) = \begin{cases} h_i(x_1, x_2, \ldots x_n), & \text{при} \quad q \le \theta, \\ h_i(x_1, x_2, \ldots x_n) - s_i, & \text{при} \quad q > \theta, \end{cases}$$

где $h_i(x_1\ x_2, \ldots, x_n)$ — непрерывные и возрастающие по аргументу x_i функции.

2.2. *Принципы оптимальности в бескоалиционныхиграх*

Известно, что для антагонистических игр принципы минимакса, максимина и равновесия совпадают (если они реализуемы, т. е. существует равновесие, а максимин и минимакс достигаются). В таком случае они определяют единое понятие оптимальности и решения игры. В теории неантагонистических игр нет единого подхода к выработке принципов оптимальности. По существу имеется целое множество таких принципов, каждый из которых основывается на некоторых дополнительных предположениях о поведении игроков и структуре игры.

Естественно предположить, что в игре Г каждый из игроков i стремится к достижению ситуации x, в которой значение его функции выигрыша было бы наибольшим. Однако функция выигрыша H_iзависит не только от стратегии i-го игрока, но и от стратегий, выбираемых другими игроками, поэтому ситуации $\{x_i\}$, дающие большее значение выигрыша для i-го игрока, могут не быть таковыми для других игроков. Таким образом, так же как и в случае антагонистической игры, стремление игроков получить наибольший выигрыш носит конфликтный характер и сама формулировка того, какое поведение является «хорошим» или оптимальным в игре, является проблематичной.

Здесь имеется несколько подходов. Одним из них является равновесие по Нэшу и его различные обобщения. В случае, когда игра Г является антагонистической, равновесие по Нэшу совпадает с понятием равновесия, которое представляет собой основной принцип оптимальности в антагонистической игре. Пусть $x=(x_1,..., x_{i-1}, x_i, x_{i+1},..., x_n)$ — произвольная ситуация в игре Г, а x_i – некоторая стратегия игрока i. Построим ситуацию, которая отлична от x только тем, что стратегия x_i, игрока i заменена на стратегию x_i□□. В результате мы получаем ситуацию ($x_1,..., x_{i-1}$, x_i□□, $x_{i+1},..., x_n$), которую будем обозначать через ($x\|$ x_i□□). Очевидно, что если x_iи x_i□□ совпадают, то ($x\|$ x_i□□)=x.

Определение. *Ситуация* $x^*=(x_1^*,x_2^*,\ldots,x_i^*,\ldots,x_n^*)$ *называется ситуацией равновесия по Нэшу, если для всех* $x_i\in X_i$ *и* i=1,.... *n имеет место неравенство*

$$H_i(x^*)\ge H_i(x^*\|x_i). \tag{2.1}$$

Рассмотрим игру 0 «Передвижение по городу». Равновесными по Нэшу здесь являются ситуации, для которых выполняется условие

$$t_0\le t^*-\frac{1}{n},\quad t^*+\frac{1}{n}\le t_1,\quad t^*=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}x_j^*. \tag{2.2}$$

Из условия (2.2) следует, что переключение каждого отдельного игрока с одной чистой стратегии на другую при условии, что другие игроки своих стратегий не изменяют, не влияет на его выигрыш.

Пусть в игре реализовалась ситуация x, которой соответствует

$$t=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}x_j,\quad t\in[t_0,t_1],$$

и пусть величина δ— доля игроков, решивших переключиться со стратегии 0 на стратегию 1. Заметим, чтоесли δтаково, что $b(t)=a(t)<a(t+\delta)$, то выигрыши этих игроков увеличиваются при таком переключении, если стратегии остальных игроков останутся прежними. Однако если это переключение действительно произойдет, то у тех же игроков возникает желание пере-

ключиться со стратегии 1 на стратегию 0, поскольку выполнено условие $a(t+\delta)<b(t+\delta)$. Если же это желание осуществится, то доля t игроков уменьшится и вновь попадет на отрезок $[t_0,t_1]$.

Аналогично, пусть δ — доля игроков, переключившихся по каким-либо причинам (например, из-за случайных ошибок) со стратегии 1 на стратегию 0, причем $t—\delta<t_0$. Тогда в силу условия $b(t—\delta)<a(t—\delta)$уигроков появится желание переключиться обратно на стратегию 1. При осуществлении этого желания доля доляt игроков увеличится и вновь попадет на отрезок $[t_0,t_1]$.

Из определения ситуации равновесия по Нэшу следует, что ни один из игроков i не заинтересован в отклонении от стратегии x^*, входящей в эту ситуацию (согласно (2.1) его выигрыш при использовании стратегии x_iвместо x_i^* разве лишь уменьшится при условии, что остальные игроки придерживаются стратегий, образующих ситуацию равновесия x^*). Таким образом, если игроки договорились предварительно об использовании стратегий, входящих в ситуацию равновесия x^*, то индивидуальное отклонение от договора невыгодно отклонившемуся игроку.

Определение.*Стратегия* $x_i^* \in X_i$ *называется равновесной, если она входит хотя бы в одну ситуацию равновесия по Нэшу.*

Для бескоалиционной игры двух лиц $\Gamma=(X_1, X_2, H_1, H_2)$ ситуация (x^*, y^*)является ситуацией равновесия, если неравенства

$$H_1(x, y^*) \le H_1(x^*, y^*), \quad H_2(x^*, y) \le H_1(x^*, y^*) \tag{2.3}$$

выполняются для всех $x \in X_1,\ y \in X_2$.

В частности, для биматричной $(m\times n)$-игры $\Gamma(A, B)$пара (i^*, j^*) будет ситуацией равновесия по Нэшу, если неравенства $a_{ij^*}\le a_{i^*j^*}$, $b_{i^*j}\le b_{i^*j^*}$, выполняются для всех номеров строк iи столбцов j.

Так, в примере 0 «Семейный спор» равновесными являются ситуации $(\alpha_1; \beta_1)$и $(\alpha_2; \beta_2)$, в примере 0 «Перекресток» — $(\alpha_1; \beta_2)$ и$(\alpha_2; \beta_1)$.

Напомним, что для антагонистической игры $\Gamma=(X_1, X_2, H)$ пара (x^*, y^*) из множества ситуаций $X_1\times X_2$является ситуацией равновесия, если

$$H(x, y^*) \le H(x^*, y^*) \le H(x, y^*), \quad x \in X_1,\ y \in X_2.$$

При этом имеют место следующие основные свойства антагонистических игр:

1. Игроку невыгодно информировать своего противника о стратегии (чистой или смешанной), которую он собирается применить. (Конечно, если игрок собирается использовать оптимальную стратегию, то его выигрыш не уменьшится от того, что он объявит об этом, но он ничего и не выигрывает.)
2. Если $(x, y), (x', y') \in Z(\Gamma)$ — ситуации равновесия в игре Γ, аv— значение игры, то
$$(x', y), (x, y') \in Z(\Gamma), \quad v = H(x, y) = H(x', y') = H(x', y) = H(x, y'). \tag{2.4}$$

3. Игроки не заинтересованы в общении перед началом игры для выработки совместных действий.
4. Если в игре Γ существует ситуация равновесия, и x — максиминная а y — минимаксная стратегии соответственно *1*-гои *2*-гоигроков, то $(x, y) \in Z(\Gamma)$ — ситуация равновесия, и наоборот.

Выясним, выполняются ли эти свойства для биматричных игр.

Рассмотрим игру 0 «семейный спор». Как уже отмечалось, в ней есть две равновесные ситуации (α_1; β_1)и (α_2; β_2). Однако 1-я ситуация выгодна игроку *1,* а 2-я — игроку *2.* Это противоречит (2.4), поскольку выигрыши игроков в этих ситуациях различны. Далее заметим, что, несмотря на равновесность ситуаций (α_1; β_1)и (α_2; β_2), пары (α_1; β_2)и (α_2; β_1).не являются ситуациями равновесия по Нэшу, т. е. не выполнено свойство 2.

Если игрок *1* информирует партнера о намерении выбрать стратегию α_1и если игрок*2* убежден, что тот будет упорствовать, то ему ничего не остается, как объявить первую стратегию β_1.Аналогичные рассуждения можно провести и за игрока *2.* Таким образом, каждому из игроков выгодно первому объявить свою стратегию, что противоречит свойству 1° для антагонистических игр.

Предположим, что игроки не общаются до начала игры, а делают выбор одновременно и независимо друг от друга (как и предусмотрено правилами бескоалиционной игры). Проведем рассуждения за игрока *1.* Ему выгодно, чтобы реализовалась ситуация (α_1; β_1).Но игроку *2* выгодна ситуация (α_2; β_2). Поэтому, если игрок *1* выберет стратегию α_1 то игрок *2* может выбрать стратегию β_2, и они оба проиграют (вектор выигрышей (0, 0)). Тогда игроку *1* имеет смысл выбрать стратегию α_2, поскольку в ситуации (α_2; β_2) он получает выигрыш 1. Но игрок *2* может рассуждать аналогично и выбрать β_1, тогда в ситуации (α_2; β_1)они оба опять проиграют.

Таким образом, имеет место случай, когда ситуация выгодна (и поэтому неустойчива) для игрока *1.* Аналогично (с точки зрения игрока *2)* можно исследовать ситуацию (α_2; β_2). Поэтому игрокам выгодно общаться перед началом игры и договариваться о совместном плане действий, что противоречит свойству 3°. Затруднения возникают также из-за того, что пара максиминных стратегий не является равновесной.

Таким образом, мы имеем пример игры, когда не выполнено ни одно из свойств 1° — 4° антагонистической игры.

Итак, в различных ситуациях равновесия по Нэшу векторы выигрышей игроков могут быть различны. Кроме того, множество ситуаций равновесия по Нэшу в отличие от множества ситуаций равновесия в антагонистической игре не является прямоугольным.

Если $x=(x_1, ..., x_i, ..., x_n)$и $x'=(x'_1, ..., x'_i, ..., x'_n)$— две различные ситуации равновесия, то ситуация x'', состоящая из стратегий, которые образуют ситуации x и x', и не совпадающая ни с одной из этих ситуаций, равновесной может не являться. Ситуация равновесия по Нэшу является множественным принципом оптимальности в том смысле, что различные ситуации равновесия могут быть в разной степени предпочтительными для различных игроков. Таким образом, остается не решенным вопрос: какую из ситуаций равновесия можно принять как устраивающий всех игроков принцип оптимальности? В дальнейшем будет показано, что множественность принципа оптимальности является существенной характерной чертой оптимального поведения в конфликтных управляемых процессах со многими участниками.

Заметим также, что в отличие от антагонистического случая равновесная стратегия i-го игрока x^* далеко не всегда обеспечивает получение, по крайней мере, выигрыша $H_i(x^*)$ в ситуации равновесия по Нэшу, поскольку это существенно зависит от того, выберут ли остальные игроки стратегии, входящие в данную ситуацию равновесия по Нэшу. Поэтому равновесную стратегию не следует трактовать как оптимальную стратегию i-го игрока. Такая трактовка осмыслена только для набора стратегий игроков, т. е. для ситуаций.

Важная особенность ситуации равновесия по Нэшу заключается в том, что отклонение от нее двух игроков и более может привести к увеличению выигрыша одного из отклонившихся игроков.

Пусть $S\subset N$ — некоторое подмножество множества игроков (коалиция) и пусть $x=(x_1,....., x_n)$— ситуация в игре Г. Обозначим через $(x\|x'_S)$ — ситуацию, которая получается из ситуации x при замене в ней стратегий x_i, $i\in S$ на стратегии $x'_i\in X_i$, $i\in S$. Иными словами, в ситуации $(x\|x'_S)$ игроки, входящие в коалицию S, заменяют свои стратегии x_i, на стратегии x'_i. Если x^* — ситуация равновесия по Нэшу, то из (2.1) вовсе не следует, что

$$H_i(x^*)\geq H_i(x^*\|x_S) \text{ для всех } i\in S. \qquad (2.5)$$

Это будет показано далее на простейших примерах.

Можно усилить понятие равновесия по Нэшу, потребовав выполнения условия (2.5) или ослабленного условия (2.5) хотя бы для одного из игроков $i\in S$. Тогда мы приходим к следующему определению.

Определение. *Ситуация x^* называется сильно равновесной, если для любых коалиций $S\subset N$ и $x_S\in\prod_{i\in S}X_i$ выполняется неравенство*

$$\sum_{i\in S}H_i(x^*)\geq\sum_{i\in S}H_i(x^*\|x_S). \qquad (2.6)$$

Условие (2.6) гарантирует нецелесообразность соглашения между игроками с целью вступления в некоторую коалицию S, так как в любой коалиции находится игрок, которого это соглашение не устраивает. Любая сильно равновесная ситуация является равновесной.

Если бы сильное равновесие существовало в достаточно широком классе игр, то оно могло бы явиться приемлемым принципом оптимальности в бескоалиционной игре. Однако оно существует крайне редко.

Пример. Рассмотрим биматричную игру с матрицей

$$(A,B)=\left(\begin{array}{c|cc} & \beta_1 & \beta_2 \\ \hline \alpha_1 & (5,5) & (0,10) \\ \alpha_2 & (10,0) & (1,1) \end{array}\right).$$

Здесь одна ситуация равновесия (α_2; β_2) (не сильно равновесная), которая дает игрокам вектор выигрышей (1, 1). Однако если оба игрока сыграют (α_1; β_1), то они получат вектор выигрышей (5, 5), что выгодно обоим. Эта ситуация не является равновесной, но она лучшая для обоих игроков. Таких парадоксов в антагонистических играх не бывает. Если говорить об этом конкретном случае, то данный результат является следствием того, что при одновременном отклонении от равновесной стратегии каждый из игроков может выиграть еще больше.

Рассмотренный выше пример приводит к мысли о возможности других принципов оптимальности в бескоалиционной игре, приводящих к ситуациям, более выгодным обоим участникам, чем в случае равновесных ситуаций.

Таким принципом оптимальности является *оптимальность по Парето.* Рассмотрим множество значений вектор-выигрышей игроков во всех возможных ситуациях $x \in X$

$$\{H(x)\}=\left\{\left(H_1(x),H_2(x),\ldots,H_n(x)\right): x\in X=\prod_{i=1}^{n} X_i\right\}.$$

Определение.*Ситуация* $\bar{x}$ *в бескоалиционной игре* Γ *называется оптимальной по Парето, если не существует ситуации* $x \in X$ *, для которой имеют место неравенства*

$$(\forall i \in N)\left(H_i(x) \ge H_i(\bar{x})\right), \quad (\exists i_0 \in N)\left(H_{i_0}(x) > H_{i_0}(\bar{x})\right).$$

Множество всех ситуаций, оптимальных по Парето, будем обозначать через X^P.

Содержательно принадлежность ситуации x множеству X^Pозначает, что не существует другой ситуации x, которая была бы предпочтительнее ситуации x для всех игроков.

Отметим содержательное различие понятий ситуации равновесия и ситуации, оптимальной по Парето. В первой ситуации ни один игрок, действуя в одиночку, не может увеличить своего выигрыша, во второй — все игроки, действуя совместно, не могут (даже не строго) увеличить выигрыш каждого.

Заметим также, что соглашение о выборе фиксированной ситуации равновесия удерживает каждого индивидуального игрока от отклонения от нее. В оптимальной по Парето ситуации отклонившийся игрок может в некоторых случаях получить существенно больший выигрыш. В то же время сильно равновесная ситуация безусловно является и оптимальной по Парето. Так, в примере 0 ситуация (α_2; β_2) равновесна, но не оптимальна по Парето. Вместе с тем ситуация (α_1; β_1) наоборот, оптимальна по Парето, но не является равновесной. В игре 0 «Семейный спор» обе равновесные ситуации (α_1; β_1) и (α_2; β_2) сильно равновесны и оптимальны по Парето, но, как уже отмечено ранее, не являются взаимозаменяемыми.

Такая же картина имеет место и в игре 0 «Перекресток». Ситуации (α_2; β_1) и (α_1; β_2) равновесны и оптимальны по Парето (ситуация (α_1; β_1) оптимальна по Парето, но не равновесна). Для каждого игрока равновесной является стратегия α_1; β_1 «остановиться», если другой игрок решил проехать перекресток, и, наоборот, выгодно выбрать стратегию α_2; β_2 «ехать», если другой игрок остановился. Однако выигрыш в две единицы каждый из игроков получает только при выборе стратегии α_2; β_2 — «ехать», поэтому здесь неизбежна борьба за лидерство, т. е. каждый из игроков заинтересован первым заявить, что он выбрал стратегию «ехать».

Проанализируем поведение типа лидер — ведомый в игре двух лиц $\Gamma=(X_1, X_2, H_1, H_2)$.Пусть Z^1, Z^2 множества наилучших ответов игроков *1* и *2* соответственно, т.е.

$$\mathbf{Z}^1 = \left\{ \left(x_1(x_2), x_2 \right) : H_1(x_1, x_2) = \sup_{y_1 \in X_1} H_1(y_1, x_2) \right\}, \tag{2.7}$$

$$\mathbf{Z}^2 = \left\{ (x_1, x_2(x_1)) : H_2(x_1, x_2) = \sup_{y_2 \in X_2} H_2(x_1, y_2) \right\}. \tag{2.8}$$

(предполагается, что супремумы в (2.7) и (2.8) достигаются).

Определение.*Назовем ситуацию*

$$(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$$

i-равновесием по Штакельбергу *в игре двух лиц* Γ, *а* $\bar{H}_i$ *— i-выигрышем, если и выполняется равенство*

$$\bar{H}_i = H_i(x_1, x_2) = \sup_{(x_1, x_2) \in \mathbf{Z}^j} H_i(y_1, y_2), \quad i, j \in \{1, 2\}, \quad i \neq j. \tag{2.10}$$

Понятие *1*-равновесия можно интерпретировать следующим образом. Игрок *1* (лидер) знает функции выигрыша обоих игроков H_1 и H_2, а тем самым и множество наилучших ответов $\mathbf{Z}^2$ игрока *2* (ведомого) на любую стратегию x_1игрока *1*. Тогда он, обладая этой информацией, максимизирует свой выигрыш, выбирая стратегию x_1из условия (2.10). Таким образом, H_i— это выигрыш *i*-го игрока, действующего оптимально в качестве «лидера» в игре Γ.

Лемма. *Пусть* $\mathbf{Z}(\Gamma)$*— множество ситуаций равновесия по Нэшу в игре двух лиц* Γ. *Тогда*

$$\mathbf{Z}(\Gamma) = \mathbf{Z}^1 \cap \mathbf{Z}^2, \tag{2.11}$$

где $\mathbf{Z}^1$, $\mathbf{Z}^2$ *— множества наилучших ответов* (2.10) *игроков 1, 2 в игре* Γ.

Доказательство. Ситуация (x_1,x_2) является ситуацией равновесия по Нэшу в том и только том случае, когда неравенства

$$H_1(x_1', x_2) \le H_1(x_1, x_2), \quad H_2(x_1, x_2') \le H_1(x_1, x_2)$$

выполняются для всех $x_1' \in X_1, x_2' \in X_2$, что эквивалентно равенствам

$$H_1(x_1, x_2) = \sup_{x_1' \in X_1} H_1(x_1', x_2), \tag{2.12}$$

$$H_2(x_1,x_2)=\sup_{x_2'\in X_2} H_2(x_1,x_2'). \qquad (2.13)$$

Таким образом, $(x_1,x_2)\in \mathbf{Z}^1, (x_1,x_2)\in \mathbf{Z}^2 \Leftrightarrow (x_1,x_2)\in \mathbf{Z}^1\cap \mathbf{Z}^2.$ Лемма доказана.

Определение. *Будем говорить, что в игре двух лиц* $\Gamma=(X_1, X_2, H_1, H_2)$ *имеет место борьба за лидерство, если для любой ситуации* $(x_1,x_2)\in X_1\times X_2$ *имеет место неравенство*

$$\bar{H}_i \ge H_i(x_1,x_2) \quad i=1,2. \qquad (2.14)$$

Теорема. *Если игра двух лиц* $\Gamma=(X_1, X_2, H_1, H_2)$ *имеет по крайней мере две оптимальных по Парето и равновесных по Нэшу ситуации* (x_1, x_2), (y_1, y_2) *с различными векторами выигрышей*

$$\left(H_1(x_1,x_2),H_2(x_1,x_2)\right)\neq\left(H_1(y_1,y_2),H_2(y_1,y_2)\right)$$

то в игре Γ *имеет место борьба за лидерство.*

Доказательство. В силу (2.11) для ситуаций равновесия по Нэшу (x_1, x_2) и (y_1, y_2) справедливы неравенства $H_i(x_1,x_2)\le \bar{H}_i, \quad H_i(y_1,y_2)\le \bar{H}_i, \quad i=1,2.$

Предположим противное, т. е. что в игре Γ нет борьбы за лидерство. Тогда существует ситуация $(z_1,z_2)\in X_1\times X_2$, для которой

$$H_i(x_1,x_2)\le \bar{H}_i < H_i(z_1,z_2), \quad i=1,2,$$

$$H_i(y_1,y_2)\le \bar{H}_i < H_i(z_1,z_2), \quad i=1,2,$$

Но (x_1, x_2), (y_1, y_2) — ситуации, оптимальные по Парето. Поэтому данные неравенства не могут быть выполнены одновременно. Теорема доказана.

В заключение заметим, что игры «семейный спор» и «перекресток» удовлетворяют условиям теоремы, поэтому в них имеет место борьба за лидерство.

2.3. *Смешанное расширение бескоалиционной игры*

Рассмотренный выше пример приводит к мысли о возможности других принципов оптимальности в бескоалиционной игре, приводящих к ситуациям, более выгодным обоим участникам, чем в случае равновесных ситуаций.

Рассмотрим бескоалиционную игру двух лиц $\Gamma=(X_1, X_2, H_1, H_2)$. В антагонистическом случае мы уже убедились, что ситуация равновесия в обычных чистых стратегиях, вообще говоря, не существует. Даже матричные игры в общем случае имеют ситуацию равновесия лишь в смешанных стратегиях. Поэтому естественно искать равновесие по Нэшу в бескоалиционной игре в классе смешанных стратегий.

Как и в случае антагонистических игр, смешанную стратегию игрока мы отождествляем с вероятностным распределением на множестве чистых стратегий. Предположим для простоты, что множества стратегий X_iконечны, и введем понятие смешанного расширения игры. Пусть

$$\Gamma=\left\{N,\left\{X_i : i\in N\right\},\left\{H_i : i\in N\right\}\right\}$$

— произвольная конечная бескоалиционная игра. Для определенности предположим, что игрок $i\in N$ в игре Г имеет m_i стратегий.

Обозначим через μ_iпроизвольную смешанную стратегию игрока $i\in N$, т.е. некоторое вероятностное распределение на множестве стратегий X_i, которые назовем чистыми стратегиями. Через $\mu_i(x_i)$будем обозначать вероятность, которую стратегия μ_iприписывает конкретной чистой стратегии x_i. Множество всех смешанных стратегий игрока $i\in N$ будем обозначать через $\overline{X}_i$.

Пусть каждый из игроков $i\in N$ применяет свою смешанную стратегию μ_i, т. е. выбирает чистые стратегии x_i с вероятностями $\mu_i(x_i)$. Будем предполагать, что вероятность появления ситуации $x=(x_1,..., x_n,)$равна произведению вероятностей выборов составляющих ее стратегий

$$\mu(x)=\prod_{i=1}^{n}\mu_i(x),$$

что соответствует независимому выбору игроками своих стратегий. Данная формула определяет вероятностное распределение на множестве всех ситуаций, определяемое смешанными стратегиями $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n$. Набор $\mu=(\mu_1, \mu_2,..., \mu_n)$ называется ситуацией в смешанных стратегиях. Множество всех ситуаций в смешанных стратегиях будем обозначать через $\overline{X}$. Ситуация в смешанных стратегиях μреализует различные ситуации в чистых стратегиях с некоторыми вероятностями, поэтому значение функции выигрыша каждого из игроков оказывается случайной величиной. В качестве значения функции выигрыша i-го игрока в ситуации μпринимается математическое ожидание этой случайной величины:

$$K_i(\mu)=\sum_{x\in X}H_i(x)\mu(x)=\sum_{x_1\in X_1}\cdots\sum_{x_n\in X_n}\left(H_i(x_1,\ldots,x_n)\prod_{i\in N}\mu_i(x_i)\right).$$

Введем обозначения

$$\left(\forall x_j' \in X_j\right)\left(K_i(\mu \| x_j') = \sum_{x_1 \in X_1} \cdots \sum_{x_{j-1} \in X_{j-1}} \sum_{x_{j+1} \in X_{j+1}} \cdots \sum_{x_n \in X_n} \left(H_i(x \| x_j') \prod_{i \in N, i \neq j} \mu_i(x_i) \right)\right),$$

$$\left(\forall \mu_j' \in \bar{X}_j\right)\left(K_i(\mu \| \mu_j') = \sum_{x_j' \in X_j} K_i(\mu \| x_j') \mu_j'(x_j')\right).$$

Определение. *Смешанным расширением игры Г называется игра*

$$\bar{\Gamma} = \left\{N, \left\{\bar{X}_i : i \in N\right\}, \left\{K_i : i \in N\right\}\right\}.$$

Для биматричной (m×n)-игры Г(*A,B*) можно определить множества смешанных стратегий X_1, X_2 соответственно 1-го и 2-го игроков в виде

$$X_1 = \left\{x : x \in \mathrm{R}^m,\ x \geq 0,\ \sum_{i=1}^{m} x_i = 1\right\},$$

$$X_2 = \left\{x : x \in \mathrm{R}^n,\ x \geq 0,\ \sum_{j=1}^{n} x_j = 1\right\},$$

а также выигрыши игроков K_1и K_2 в ситуации (x, y)в смешанных стратегиях как математическое ожидание выигрыша

$$K_1(x,y) = x^T A y,\ K_2(x,y) = x^T B y,\ (x,y) \in X_1 \times X_2.$$

Следовательно, формально построено смешанное расширение $\bar{\Gamma}(A,B)$игры Г(*A, B*),т. е. бескоалиционная игра двух лиц $\bar{\Gamma}(A,B) = \left\{X_1, X_2, K_1, K_2\right\}$.

Покажем на примере игры «семейный спор», что введение смешанных стратегий по существу не снимает те трудности, которые возникают при анализе бескоалиционной игры.Пусть в игре «семейный спор» игрок *1* хочет максимально увеличить свой гарантированный выигрыш. Это означает, что он намерен выбрать смешанную стратегию $x^\circ = (\xi^\circ,\ 1 - \xi^\circ)$; $0 \leq \xi^\circ \leq 1$ так, чтобы максимально увеличить наименьшую из двух величин $K_1(x, \beta_1)$и $K_1(x, \beta_2)$,т.е.

$$\max_{x \in X_1} \min\left\{K_1(x,\beta_1), K_1(x,\beta_2)\right\} = \min\left\{K_1(x^\circ,\beta_1), K_1(x^\circ,\beta_2)\right\}.$$

Максиминная стратегия x° игрока *1* имеет вид x°=(1/5, 4/5) и дает ему средний гарантированный выигрыш 4/5. Если игрок *2* выберет стратегию β_1 , то выигрыши игроков будут равны (4/5, 1/5), если же он воспользуется стратегией β_2, то − (4/5, 16/5).

Итак, если игрок *2* догадается, что его партнер придерживается стратегии x°, то он выберет β_2, и получит выигрыш 16/5. (Если игрок *1* может обосновать выбор β_2за игрока 2, то он может улучшить и свой выбор.)

Аналогично, пусть игрок *2* придерживается максиминной стратегии, она имеет вид y^0=(4/5,1/5), и если игрок *1* выбирает стратегию α_1то выигрыши игроков равны (16/5, 4/5), а если α_2, то (1/5, 4/5), поэтому ему выгодно против максиминной стратегии y^0применять свою стратегию α_1.

Если оба игрока будут рассуждать подобным образом, то они приходят к ситуации (α_1, β_2), в которой вектор выигрышей (0, 0).

Таким образом, можно утверждать, что в игре «Семейный спор» ситуация ($x°,y°$)в максиминных смешанных стратегиях не является равновесной ситуацией.

Равновесие по Нэшу в смешанных стратегиях

Определение. *Ситуация μ^* называется ситуацией равновесия по Нэшу в смешанных стратегиях в игре* Γ, *если для любого игрока i и для любой его смешанной стратегии μ_i имеет место неравенство*

$$K_i(\mu^* \| \mu_i) \le K_i(\mu^*), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Как показывает рассмотренный в 0 пример, ситуация в максиминных смешанных стратегиях не обязательно является ситуацией равновесия по Нэшу в смешанных стратегиях.

Существование ситуации равновесия по Нэшу

В теории антагонистических игр для существования ситуации равновесия в смешанных стратегиях было достаточно непрерывности функции выигрыша и компактности множеств стратегий. Оказывается, что этих условий достаточно и для существования ситуации равновесия по Нэшу в смешанных стратегиях для бескоалиционной игры двух лиц.

Теорема. *Пусть* $\Gamma=(X_1, X_2, H_1, H_2)$ — *бескоалиционная игра двух лиц, где H_1 и H_2— непрерывные функции на $X_1 \times X_2$; X_1, X_2— компактные подмножества конечномерных евклидовых пространств. Тогда игра* Γ *имеет ситуацию равновесия*(μ, ν) *в смешанных стратегиях.*

Доказательство теоремы выходит за рамки курса. Мы не будем также подробно останавливаться на построении смешанных стратегий в бескоалиционных играх *n*лиц с бесконечным числом стратегий и доказательстве существования ситуации равновесия по Нэшу. Отметим только, что если функции выигрыша игроков $H_i(x)$ непрерывны на декартовом произведении $X = \prod_{i=1}^{n} X_i$ компактных множеств чистых стратегий, то в такой бескоалиционной игре всегда существует ситуация равновесия по Нэшу в смешанных стратегиях.

Свойства ситуации равновесия, помогающие находить решение бескоалиционной игры двух лиц.

Теорема.Для того чтобы ситуация (μ^*,ν^*) в смешанных стратегиях в игре $\Gamma=(X_1, X_2, H_1, H_2)$ была ситуацией равновесия, необходимо и достаточно, чтобы для всех чистых стратегий $x \in X_1$ и $y \in X_2$ игроков выполнялись следующие неравенства:

$$K_1(x,\nu^*) \le K_1(\mu^*,\nu^*);$$
$$K_2(\mu^*,y) \le K_2(\mu^*,\nu^*).$$

Доказательство. Необходимость очевидна, поскольку каждая чистая стратегия является частным случаем смешанной и, следовательно, доказываемые неравенства должны быть выполнены. Для доказательства достаточности необходимо перейти в неравенствах к смешанным стратегиям игроков *1* и *2* соответственно:

$$\left(K_1(x,\nu^*) \le K_1(\mu^*,\nu^*)\right) \Rightarrow \left(\forall \mu \in \bar{X}_1\right)\left(\sum_{x\in X_1}\mu(x)K_1(x,\nu^*) \le \sum_{x\in X_1}\mu(x)K_1(\mu^*,\nu^*)\right)$$

$$\Rightarrow \left(\forall \mu \in \bar{X}_1\right)\left(K_1(\mu,\nu^*) \le K_1(\mu^*,\nu^*)\right);$$

$$\left(K_2(\mu^*,y) \le K_2(\mu^*,\nu^*)\right) \Rightarrow \left(\forall \nu \in \bar{X}_2\right)\left(\sum_{y\in X_2}\nu(y)K_2(\mu^*,y) \le \sum_{y\in X_2}\nu(y)K_2(\mu^*,\nu^*)\right)$$

$$\Rightarrow \left(\forall \nu \in \bar{X}_2\right)\left(K_2(\mu^*,\nu) \le K_2(\mu^*,\nu^*)\right).$$

Теорема доказана.

Доказанная теорема (как и в случае антагонистических игр) показывает, что для доказательства равновесности ситуации в смешанных стратегиях достаточно проверить неравенства только для чистых стратегий партнера. Для биматричной ($m\times n$)-игры Γ(*A, B*) эти неравенства принимают соответственно вид

$$K_1(i,y^*) = A_i y^* \le x^{*T} A y^* = K_1(x^*,y^*);$$

$$K_2(x^*,j) = x^{*T} B^j \le x^{*T} B y^* = K_2(x^*,y^*),$$

где A_i (B^j)— строки (столбцы) матрицы*A (B),* $i= 1, ..., m$; $j= 1, ..., n$.

Как известно, для матричных игр каждая существенная чистая стратегия уравновешивает любую оптимальную стратегию противника. Аналогичный результат справедлив и для биматричных игр.

Теорема.Пусть *Г(*A, B*)*— биматричная *(*m×n*)*-игра, и пусть *(*x,y*)*∈*Z(Г)* − ситуация равновесия по Нэшу в смешанных стратегиях. Тогда выполняются равенства

$$\left(\forall i \in M_x\right)\left(K_1(i,y) = K_1(x,y)\right);$$

$$\left(\forall j \in N_y\right)\left(K_2(x,j) = K_2(x,y)\right),$$

гдеM_x(N_y) *— спектр смешанной стратегии x(y).*

Доказательство. По первой теореме п. 0 имеем

$$\left(\forall i \in M_x\right)\left(K_1(i,y) \le K_1(x,y)\right).$$

Предположим, что среди данных неравенств имеется хотя бы одно строгое неравенство, т.е.

$$\left(\exists i^\circ \in M_x\right)\left(K_1(i^\circ,y) < K_1(x,y)\right).$$

Обозначим ξ_i компоненты вектора $x=(\xi_1, ..., \xi_m)$. Тогда

$$K_1(x,y) = \sum_{i\in M_x}\xi_i K_1(i,y) < \sum_{i\in M_x}\xi_i K_1(x,y) = K_1(x,y)\sum_{i\in M_x}\xi_i = K_1(x,y).$$

Полученное противоречие доказывает справедливость первого равенства. Справедливость второго равенства доказывается аналогично.

Теорема доказана.

Данная теорема дает способ нахождения оптимальных смешанных стратегий игроков в биматричной игре $\Gamma(A, B)$. Действительно, предположим, что мы ищем ситуацию равновесия (x, y),считая спектры стратегий M_x иN_yзаданными. Тогда оптимальные стратегии должны удовлетворять системе линейных уравнений

$$\left(\forall i \in M_x\right)\left(A_i y = v_1\right),$$
$$\left(\forall j \in N_y\right)\left(x^T B^j = v_2\right),$$

где A_i (B^j)— строки (столбцы) матрицы A (B), i= 1, ..., m; j= 1, ..., n, иv_Y,v_2— некоторые числа. Если же ситуация равновесия (x, y) вполне смешанная, то данная система уравнений принимает вид

$$Ay = v_1 \mathbf{e}^m, \quad x^T B = v_2 \mathbf{e}^n,$$

где $v_1 = xAy$, $v_2 = xBy$ — выигрыши игроков в ситуации равновесия (x, y).

Если $m=n$, а матрицыA и B имеют обратные, то легко показать, что

$$v_1 = \frac{1}{\left(\mathbf{e}^m\right)^T A^{-1} \mathbf{e}^m}, \quad v_2 = \frac{1}{\left(\mathbf{e}^m\right)^T B^{-1} \mathbf{e}^m},$$

$$x = v_2 B^{-1} \mathbf{e}^m, \quad y = v_1 A^{-1} \mathbf{e}^m.$$

Проиллюстрируем применение указанных результатов на примере смешанного расширения игры «семейный спор». В соответствии с 0 имеем

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}, \quad v_1 = v_2 = 4/5,$$

$$x = \left(4/5, 1/5\right), \quad y = \left(1/5, 4/5\right).$$

Множество всех точек, соответствующих векторам выигрышей в смешанных стратегиях, можно изобразить графически в пространстве выигрышей.

На рис. 2.2 изображены две ситуации равновесия по Нэшу с векторами выигрышей (1,4), (4,1) в чистых стратегиях и одна вполне смешанная равновесная ситуация с вектором выигрышей (4/5,4/5) (с использованием полученных формул), которая менее предпочтительна для игроков, чем каждая из ситуаций равновесия в чистых стратегиях.

Из рисунка видно, что дополнительная ситуация равновесия, возникающая в смешанном расширении игры, не является оптимальной по Парето. Оптимальной по Парето в классе смешанных стратегий является точка (5/4,5/4), но она не равновесна по Нэшу.

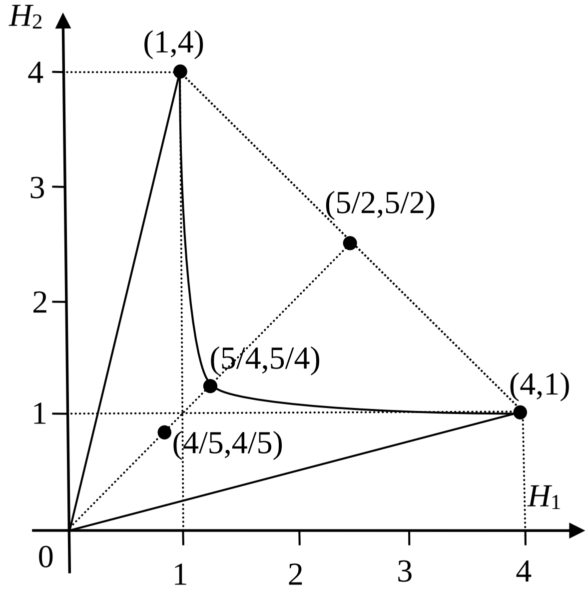

Рис. 2.2

Обобщения

Заметим, что приведенные ранее определения оптимальности ситуации по Парето и по Нэшу, касаются произвольной бескоалиционной игры (в частности, двух лиц), поэтому они справедливы и для смешанного расширения $\overline{\Gamma}$. Следовательно, для игры двух лиц

$$Z(\overline{\Gamma}) = Z^1(\overline{\Gamma}) \bigcap Z^2(\overline{\Gamma})$$

где $Z(\overline{\Gamma})$ — множество ситуаций равновесия по Нэшу, $Z^1(\overline{\Gamma})$ и $Z^2(\overline{\Gamma})$ — множества наилучших ответов игроков *1* и *2* соответственно в игре Г. Также справедлива теорема о борьбе за лидерство (см. п. 0).

В более сложном отношении находятся ситуации, равновесные по Нэшу и оптимальные по Парето. Из рассмотренных примеров следует, что возможны случаи, когда ситуация равновесна по Нэшу, но не оптимальна по Парето, и наоборот. Вместе с тем возможно, что одна и та же ситуация оптимальна и в том и в другом смысле.

Рассмотренный в предыдущем разделе пример показывает, что дополнительная ситуация равновесия, возникающая в смешанном расширении игры Г, не является оптимальной по Парето. Оказывается, что это довольно распространенное свойство биматричных игр.

Теорема. *Почти для всех биматричных игр (за исключением не более чем счетного множества игр) ситуации равновесия по Нэшу в смешанных стратегиях, которые не являются равновесными в исходной игре, не являются оптимальными по Парето в смешанном расширении.*

Вопрос о существовании равновесия по Нэшу обсуждался выше. Для существования ситуаций, оптимальных по Парето, достаточно компактности множества $\{H(x) : x \in X\}$, что, в свою очередь, может быть обеспечено компактностью множества всех ситуаций X инепрерывностью всех функций выигрыша. Очевидно, что для конечных бескоалиционных игр это всегда имеет место.

2.4. *Равновесие в совместных смешанных стратегиях*

Продолжим рассмотрение игр двух лиц. Как уже отмечалось, даже если ситуация равновесия является недоминируемой (оптимальной по Парето), возможны случаи, когда одна ситуация равновесия выгодна игроку *1,* а другая — игроку *2.* Это затрудняет нахождение взаимоприемлемого решения, возникающего неантагонистического конфликта на уровне формализации бескоалиционной игры. Поэтому исследуем неантагонистический конфликт в формализации, разрешающей игрокам принимать совместные решения.

Проиллюстрируем этот подход на примере игры «семейный спор». Рассмотрим смешанное расширение игры «семейный спор». Множество точек, соответствующих векторам выигрышей в смешанных стратегиях в игре, графически изображено на рис. 2.2. На рисунке изображены две ситуации равновесия по Нэшу с векторами выигрышей (1, 4), (4, 1) в чистых стратегиях и одна вполне смешанная равновесная ситуация с вектором выигрышей (4/5,4/5), которая менее предпочтительна для игроков, чем каждая из ситуаций равновесия в чистых стратегиях.

Если игра повторяется многократно, то игрокам имеет смысл сделать совместный выбор: с вероятностью 1/2 выбирать ситуацию (α_1,β_1) и (α_2,β_2). Тогда средний ожидаемый выигрыш игроков будет (5/2, 5/2). Однако эта точка не лежит в множестве точек, соответствующих возможным ситуациям бескоалиционной игры, т. е. не может быть реализована, если игроки выбирают смешанные стратегии независимо.

Под *совместной смешанной стратегией* игроков будем понимать вероятностное распределение на множестве всевозможных пар (i, j)(ситуаций в чистых стратегиях), не обязательно порожденное независимыми случайными выборами чистых стратегий игроками *1* и *2.* Такие стратегии могут быть реализованы посредником до начала игры.

Обозначим через

$$M = \left\{ m_{ij} : \left(\forall (i,j) \in X_1 \times X_2\right)\left(m_{ij} \geq 0\right), \sum_{(i,j)\in X_1\times X_2} m_{ij} = 1 \right\}$$

совместную смешанную стратегию в игре $\Gamma(A,B)$. Тогда ожидаемые выигрыши $K_1(M)$, $K_2(M)$игроков *1* и *2* при использовании совместной смешанной стратегии соответственно равны

$$K_1(M) = \sum_{(i,j)\in X_1\times X_2} a_{ij} m_{ij}, \quad K_2(M) = \sum_{(i,j)\in X_1\times X_2} b_{ij} m_{ij},$$

где $A = \{a_{ij}\}$, $B = \{b_{ij}\}$ — матрицы выигрышей игроков. Геометрически множество точек, соответствующее множеству векторов выигрышей в совместных смешанных стратегиях, — это выпуклая оболочка множества точек возможных выигрышей в чистых стратегиях.

Для игры «семейный спор» совместная смешанная стратегия

$$M^* = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

является оптимальной по Парето и ей соответствует вектор выигрышей (5/2,5/2). Интуиция подсказывает, что M^* следует рекомендовать в качестве решения игры «семейный спор».

Определение. *Для биматричной* $(m\times n)$*-игры* $\Gamma(A, B)$ *обозначим через* M *совместное вероятностное распределение на парах* (i, j), $i=1.....m$; $j=1,.....,n$. *Через* $m_i(j)$ *обозначим условную вероятность реализации стратегии* j *при условии, что реализована стратегия* i. *Аналогично, через* $n_j(i)$ *обозначим условную вероятность реализации стратегии* i *при условии, что реализована стратегия* j. *Ситуацию* M *называют ситуацией равновесия в совместных смешанных стратегиях в игре* $\Gamma(A, B)$, *если выполнены следующие неравенства:*

$$\left(\forall i,i'\in\{1,2,\ldots,m\}\right)\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\cdot m_i(j)\geq\sum_{j=1}^{n}a_{i'j}\cdot m_i(j)\right),$$

$$\left(\forall j,j'\in\{1,2,\ldots,n\}\right)\left(\sum_{i=1}^{m}b_{ij}\cdot n_j(i)\geq\sum_{i=1}^{m}b_{ij'}\cdot n_j(i)\right).$$

Игру $\Gamma(A, B)$ в совместных смешанных стратегиях можно интерпретировать следующим образом. Пусть игроки договорились об использовании стратегии M и пусть также в результате реализации случайного механизма выпала пара (i, j), т. е. первый (второй) игрок получил номер $i(j)$ стратегии. Заметим, что каждый из игроков знает только свою реализацию. Этот игрок, вообще говоря, может не согласиться с реализацией i (соответственно j) совместной стратегии и выбрать стратегию $i(j)$. Тогда, если M — равновесная ситуация, то каждому из игроков невыгодно отклоняться от предложенной реализации i (соответственно j).

Поскольку

$$m_i(j)=\begin{cases}\dfrac{m_{ij}}{\sum\limits_{k=1}^{n}m_{ik}}, & \text{если} \quad \sum\limits_{k=1}^{n}m_{ik}\neq 0,\\ 0, & \text{если} \quad m_{ik}=0,\ k=1,2,\ldots,n;\end{cases}$$

$$n_j(i)=\begin{cases}\dfrac{m_{ij}}{\sum\limits_{k=1}^{m}m_{kj}}, & \text{если} \quad \sum\limits_{k=1}^{m}m_{kj}\neq 0,\\ 0, & \text{если} \quad m_{kj}=0,\ k=1,2,\ldots,m,\end{cases}$$

то получаем, что необходимым и достаточным условием равновесности ситуации M является выполнение неравенств

$$\left(\forall i,i'\in\{1,2,\ldots,m\}\right)\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\cdot m_{ij}\geq\sum_{j=1}^{n}a_{i'j}\cdot m_{ij}\right),$$

$$\left(\forall j,j'\in\{1,2,\ldots,n\}\right)\left(\sum_{i=1}^{m}b_{ij}\cdot m_{ij}\geq\sum_{i=1}^{m}b_{ij'}\cdot m_{ij}\right).$$

Обозначим через $Z_C(\Gamma)$ множество равновесных ситуаций в совместных смешанных стратегиях.

Теорема. *Справедливы следующие утверждения.*

1) *Множество* $Z_C(\Gamma)$ *равновесных ситуаций в совместных смешанных стратегиях в биматричной* $(m\times n)$*-игре* $\Gamma(A,B)$ *является непустым выпуклым компактом пространства* $\mathbb{R}^{m\times n}$.

2) *Если* (x, y)*— ситуация в смешанных стратегиях игры* $\Gamma(A, B)$*, то определяемая по ней ситуация M в совместных смешанных стратегиях будет равновесной тогда и только тогда, когда* (x, y)*— ситуация равновесия по Нэшу в смешанных стратегиях в игре* $\Gamma(A, B)$.

Доказательство. Пусть (x, y), $x=(\xi_1, \xi_2,\ldots, \xi_m)$, $y=(\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_n)$ — ситуация в смешанных стратегиях игры $\Gamma(A, B)$, и $M=\{\mu_{ij}\}$ — соответствующая ситуация в совместных стратегиях, т.е. $\mu_{ij}=\xi_i\eta_j$, $i=1,2,\ldots,m$; $j=1,2,\ldots,n$. Необходимым и достаточным условием равновесности M является система неравенств

$$\left(\forall i,i'\in\{1,2,\ldots,m\}\right)\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\cdot\mu_{ij}\ge\sum_{j=1}^{n}a_{i'j}\cdot\mu_{ij}\right),$$
$$\left(\forall j,j'\in\{1,2,\ldots,n\}\right)\left(\sum_{i=1}^{m}b_{ij}\cdot\mu_{ij}\ge\sum_{i=1}^{m}b_{ij'}\cdot\mu_{ij}\right).$$

Данная система неравенств, в соответствии с определением $M=\{\mu_{ij}\}$, эквивалентна системе неравенств

$$\begin{aligned}&\left(\forall i,i'\in\{1,2,\ldots,m\}\right)\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\cdot\eta_j\ge\sum_{j=1}^{n}a_{i'j}\cdot\eta_j\right),\\&\left(\forall j,j'\in\{1,2,\ldots,n\}\right)\left(\sum_{i=1}^{m}b_{ij}\cdot\xi_i\ge\sum_{i=1}^{m}b_{ij'}\cdot\xi_i\right).\end{aligned}\qquad(2)$$

Согласно теореме 0 неравенства (2) являются необходимым и достаточным условием равновесия по Нэшу ситуации (x, y), где $x=(\xi_1, \xi_2,\ldots, \xi_m)$, $y=(\eta_1, \eta_2,\ldots,\eta_n)$.

Выпуклость и компактность множества $Z_C(\Gamma)$ следует из того, что оно представляет множество решений системы линейных неравенств (2), которое ограничено, а его непустота — из существования ситуации равновесия по Нэшу в смешанных стратегиях. Теорема доказана.

2.5. *Арбитражные схемы*

Природа и структура арбитражных схем.

Большинство неантагонистических конфликтов в экономике и смежных с ней областях характеризуются тем, что их участники могут путем кооперирования объединять свои усилия. Сотрудничество между игроками приводит к качественно новому конфликту по сравнению с бескоалиционным случаем.

Как мы видели, в бескоалиционных играх отклонение одного из участников от ситуации равновесия не дает ему никакого преимущества. Однако при отклонении нескольких игроков эти игроки могут получить больший выигрыш, нежели в ситуации равновесия. Поэтому в условиях, в которых возможна кооперация между игроками, принцип равновесия не оправдывает себя.

При возможности кооперирования возникает противоречие между устойчивостью ситуации, выражаемой в виде равновесности, и ее целесообразностью — стремлением игроков к большим выигрышам. Это противоречие может разрешаться путем расширения множеств уже имеющихся стратегий на основе тех или иных соглашений между игроками. В частности, игроки могут выбирать свои стратегии совместно, договариваясь между собой. В результате множество ситуаций в смешанных стратегиях будет множеством всех вероятностных мер на множестве всех ситуаций в чистых стратегиях. Напомним, что при отсутствии соглашений между игроками множество ситуаций в смешанных стратегиях являлось произведением вероятностных мер, заданных на чистых стратегиях каждого из игроков.

Обозначим через U множество всевозможных векторов выигрышей игроков в игре nлиц при применении ими всех смешанных стратегий, заданных на множестве всех ситуаций в чистых стратегиях. Множество U содержится в евклидовом пространстве R^n и является выпуклым, так как в рассматриваемом случае функция выигрыша каждого из игроков является линейной функцией относительно совместной стратегии игроков, а множество их стратегий является выпуклым. Если предположить непрерывность функции выигрыша на множестве всех ситуаций в чистых стратегиях и компактность этого множества, то множество всех выигрышей будет также замкнуто и ограничено, а поэтому компактно. Таким образом, при возможности кооперирования и некоторых предположениях о первоначальной бескоалиционной игре, игроки имеют перед собой некоторое замкнутое ограниченное и выпуклое подмножество $U \subseteq R^n$. Это множество называется *допустимым множеством.* Действуя совместно, игроки могут получить в качестве вектора выигрышей любой вектор $u \in U$.

Пусть u_j^* — значение антагонистической игры, в которой все игроки играют против игрока j,т. е. стараются минимизировать его выигрыш, не обращая внимание на свои интересы (максиминный выигрыш игрока j). Обозначим через $u^* = (u_1^*, u_2^*, \ldots, u_n^*) \in \mathbb{R}^n$ вектор, компоненты которого u_j^* можно интерпретировать как выигрыши игроков в том случае, когда они не придут к соглашению. Вектор u^* называют *точкой status quo.* Тройку

$$\left\langle \{1,2,\dots,n\}, U, u^* \right\rangle$$

будем называть *арбитражной схемой.*
Очевидно, игроки (или арбитр) должны руководствоваться некоторыми объективными представлениями о «справедливости» (принципом оптимальности).

Принцип оптимальности Нэша для общих арбитражных схем.

Сформулируем для арбитражных схем аксиомы, которым должно удовлетворять правило φ, сопоставляющее каждому выпуклому замкнутому подмножеству U и точке u^* точку $\bar{u} \in U$.

1. *Реализуемость:* $\bar{u} \in U$
2. *Индивидуальная рациональность:* $\bar{u} \geq u^*$
3. *Оптимальность по Парето: если* $u \in U$ *и* $u \geq \bar{u}$, *то* $u = \bar{u}$.
4. *Независимость от посторонних альтернатив: если* $\bar{u} \in V \subset U$ *и* $\bar{u} = \varphi(U, u^*)$, *то* $\bar{u} = \varphi(V, u^*)$.
5. *Линейность: если множество*

$$U' = \left\{ \{ u_i' = \alpha_i u_i + \beta_i : i = 1, 2, \dots n \} : u \in U \right\}, \text{ и } \bar{u} = \varphi(U, u^*)$$

то

$$\varphi\left(U', \left\{ u_i'^* = \alpha_i u_i^* + \beta_i : i = 1, 2, \dots n \right\} \right) = \bar{u}' = \left\{ \bar{u}_i' = \alpha_i \bar{u}_i + \beta_i : i = 1, 2, \dots n \right\}.$$

6. *Симметрия: пусть* π — *произвольна перестановка игроков, для которой из* $u \in U$ *следует* $\pi u \in U$. *Пусть также* $\pi u^* = u^*$, $\bar{u} = \varphi(U, u^*)$. *Тогда* $\pi \bar{u} = \bar{u}$.

Первые три аксиомы несомненно разумны, и комментарии излишни. Аксиома 4 означает, что, имея большие возможности для выбора *u,* игроки согласятся на этот же вектор выигрышей при меньших возможностях, если этот вектор допустим. Аксиома линейности утверждает, что в разных шкалах измерения полезностей игроки руководствуются одинаковым принципом оптимальности при выборе *u.* Шестая аксиома (иногда называемая аксиомой анонимности) постулирует равноправие игроков.

Далее для простоты будем считать, что в множестве U существует вектор $u > u^*$. Противный случай тривиален. Оказывается, имеет место следующая замечательная теорема.

Теорема. *Существует единственная функция* $\varphi(U, u^*) = \bar{u}$, *определенная для всех арбитражных схем* $\left\langle \{1,2,\dots,n\}, U, u^* \right\rangle$ *и удовлетворяющая аксиомам* 1—6.

Эта функция определяется следующим образом:

$$\varphi(U, u^*) = \arg \max_{u \in U : u \geq u^*} \prod_{i=1}^{n} \left(u_i - u_i^* \right).$$

Доказательство. Докажем существование функции $\varphi(U,u^*)$. Покажем, что определение корректно. Действительно, максимум функции

$$g\left(u,u^*\right)=\prod_{i=1}^{n}\left(u_i-u_i^*\right)$$

на множестве U достигается в тех и только в тех точках, в которых достигается максимум функции $\ln g\left(u,u^*\right)$, так как функция ln; монотонно возрастает (при наших предположениях максимум положителен, и максимизировать $\ln g\left(u,u^*\right)$ можно лишь по тем точкам, где она определена). Кроме того, функция $\ln g\left(u,u^*\right)$строго вогнута в силу строгой вогнутости функции $\ln(u_i-u_i^*)$. Но, как известно, максимум строго вогнутой функции на выпуклом множестве достигается не более чем в одной точке. С другой стороны, он достигается, так как функция $g(u, U, u^*)$ непрерывна и определена на ограниченном замкнутом подмножестве R^n.

Очевидно, что функция $\varphi(U,u^*)$ удовлетворяет аксиомам 1 и 2 по построению. Справедливость аксиомы 3 следует из того, что функция $g(u, u^*)$возрастает при возрастании каждого из сомножителей.
Аксиома 4 следует из того очевидного факта, что максимум функции по объемлющему множеству не превосходит ее максимума по объемлемому.
Далее, если $U'=\left\{u_i'=\alpha_i u_i+\beta_i : i=1,2,\dots n\right\}$ то

$$g\left(u',u'^*\right)=\prod_{i=1}^{n}\left(u_i'-u_i'^*\right)=\prod_{i=1}^{n}\left(\alpha_i u_i+\beta_i-\alpha_i u_i^*-\beta_i\right)=g\left(u,u^*\right)\prod_{i=1}^{n}\alpha_i$$

В силу последних равенств справедлива аксиома 5.

Наконец, аксиома 6 следует из инвариантности функции $g(u, u^*)$ относительно перестановки сомножителей. Таким образом, существование функции $\varphi(U,u^*)=\bar{u}$ доказано.

Докажем единственность. Положим

$$h(u)=\sum_{i=1}^{n}\frac{u_i}{\bar{u}_i-u_i^*},\quad \bar{u}=\varphi(U,u^*),\quad L=\left\{u:h(u)\le h(\bar{u})\right\}.$$

Покажем, что имеет место включение $U \sqsubseteq L$. Действительно, если предположить противное, т.е., что $\exists u\in U: h(u)>h(\bar{u})$. Пусть $0<\varepsilon<1$. Тогда, в силу выпуклости U

$$u'=\varepsilon u+(1-\varepsilon)\bar{u}=\bar{u}+\varepsilon(u-\bar{u})\in U.$$

Так как $h(u)>h(\bar{u})$, то

$$h(u)-h(\bar{u})=\sum_{i=1}^{n}\frac{u_i-\bar{u}_i}{\bar{u}_i-u_i^*}=h(u-\bar{u})>0.$$

С другой стороны,

$$g(u',u^*)=\prod_{i=1}^{n}\left(u_i'-u_i^*\right)=\prod_{i=1}^{n}\left(\bar{u}_i+\varepsilon(u_i-\bar{u}_i)-u_i^*\right)=$$

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\bar{u}_i-u_i^*\right)\left(1+\varepsilon\frac{u_i-\bar{u}_i}{\bar{u}_i-u_i^*}\right)=g(\bar{u},u^*)\left(1+\varepsilon h(u_i-\bar{u}_i)\right)+o(\varepsilon).$$

Из полученного равенства и неравенства $h(u-\bar{u})>0$ следует, что при достаточно малом неотрицательном ε имеет место неравенство $g(u',u^*)>g(\bar{u},u^*)$, что противоречит определению точки $\bar{u}=\varphi(U,u^*)$

Итак $U\sqsubseteq L$. Рассмотрим множество

$$T=\left\{\left\{u_i'=\frac{u_i-u_i^*}{\bar{u}_i-u_i^*}:i=1,2,\ldots,n\right\}:u\in U\right\}.$$

Очевидно, что

$$T=\left\{u':\sum_{i=1}^{n}u_i'\le n,\, u'\ge 0\right\},$$

и, кроме того, точка u^* при преобразовании переходит в 0. Из симметрии множества Т и аксиомы 6 следует $\varphi(T,0)=\{1,1,\ldots,1\}$. Учитывая способ построения множества Т и аксиому 5, имеем $\varphi(L,u^*)=\bar{u}$. Наконец, так как $\bar{u}\in U$ и $U\sqsubseteq L$, то в соответствии с аксиомой 4 $\varphi(U,u^*)=\bar{u}$. Теорема доказана.

Распределение выигрышей согласно функции $\varphi(U,u^*)$ имеет ряд существенных недостатков. Основной из них состоит в следующем.

Пусть имеется некоторое конечное множество игроков I = (1, 2, ..., *n).* Любое его подмножество $S\sqsubseteq I$, включая само множество I и одноэлементные подмножества, а также пустое множество называется *коалицией.* Может сложиться такое положение дел, когда некоторая коалиция $S\sqsubseteq I$ обеспечивает для всех игроков выигрыши строго большие, чем $\varphi(U,u^*)$. В этом случае игроки кооперативной игры, вступая в соглашения друг с другом, не будут согласны с распределением выигрышей $\varphi(U,u^*)$. Поэтому решение о распределении согласно вектору $\varphi(U,u^*)$ может быть лишь принято некоторым третьим лицом — арбитром. Это решение оптимально в смысле аксиом 1—6 и носит обязательный характер. Отсюда берут свое название «арбитражные схемы».

2.6. *Кооперативные игры*

Выше на примере игр двух лиц было показано, как, используя возможность согласованного выбора стратегий, игроки могут прийти к взаимоприемлемому решению возникающего неантагонистического конфликта (стратегический подход). Теперь будем считать, что условия игры допускают совместные действия игроков и перераспределение выигрыша. Это предполагает, что полезности различных игроков могут быть оценены единой шкалой (трансферабельные выигрыши), и поэтому взаимное перераспределение выигрышей не искажает содержательной постановки первоначальной задачи. Представляется естественным, что объединение игроков в максимальную коалицию (в коалицию, состоящую из всех игроков) с целью получения максимального суммарного выигрыша приведет к наилучшим результатам также и с точки зрения каждого игрока. При этом нас будет интересовать, не столько как коалиция игроков добивается своего суммарного выигрыша, сколько как он будет распределен между членами коалиции (кооперативный подход).
В данном разделе рассмотрена кооперативная теория игр *n*лиц. В ней исследуются условия, при которых объединение игроков в максимальную коалицию является целесообразным, а отдельные игроки не будут иметь желания создавать меньшие группировки или действовать индивидуально.

Характеристическая функция игры

Пусть $N=\{1,..., n\}$ — множество всех игроков. Любое непустое подмножество $S\in N$называется *коалицией.*

Определение.*Характеристической функцией игры n лиц будем называть вещественную функцию v, определенную на коалициях $S\subseteq N$, при этом для любых непересекающихся коалиций $T,S\subseteq N$, выполняется неравенство*

$$v(T)+v(S)\le v(T\bigcup S),\ v(\varnothing)=0. \tag{1}$$

Свойство (1) называется *свойством супераддитивности.* Оно необходимо для содержательной интерпретации числа $v(T)$ как гарантированного выигрыша коалицииTв случае, когда она действует независимо от остальных игроков. При такой интерпретации неравенство (1) означает, что коалиция $S\backslash T$имеет не меньше возможностей, чем две непересекающиеся коалиции SиT, действующие независимо.

Из супераддитивности vполучаем, что для любых непересекающихся коалиций $S_1,..., S_k$

$$\sum_{i=1}^{k} v(S_k)\le v(N).$$

Отсюда, в частности, следует, что не существует такого разбиения множества N на коалиции, чтобы суммарный гарантированный выигрыш этих коалиций превышал максимальный выигрыш всех игроков $v(N)$.

Рассмотрим бескоалиционную игру $\Gamma=\{N, \{X_i: i\in N\}, \{H_i: i\in N\}\}$.Пусть игроки, составляющие некоторую коалицию $S\subseteq N$, объединяют свои усилия с целью увеличения своего суммарного выигрыша. Установим, какой наибольший выигрыш они могут себе гарантировать. Совместные действия игроков из коалиции Sозначают, что коалиция S, действуя от имени своих членов как один игрок (обозначим его *1)*, имеет в качестве множества чистых стратегий всевозможные комбинации стратегий, составляющих ее игроков из S, т. е. элементы декартового произведения $X_S = \prod_{i \in S} X_i$.

Общность интересов игроков из Sозначает, что выигрыш коалиции S(игрока *1*) есть сумма выигрышей игроков из S, т. е. $H_S(x) = \sum_{i \in S} H_i(x)$, где $x \in X_N$ – ситуация в чистых стратегиях. Нас интересует наибольший гарантированный выигрыш игроков из S. В худшем для игрока *1* случае оставшиеся игроки из $N \backslash S$могут также объединиться в коллективного игрока *2* с множеством стратегий $X_{N \backslash S} = \prod_{i \in N \backslash S} X_i$ иинтересом, диаметрально противоположным игроку *1* (т. е. выигрыш игрока *2* в ситуации x равен $-H_s(x)$). В результате таких рассуждений вопрос о наибольшем гарантированном выигрыше коалиции Sпревратился в вопрос о наибольшем гарантированном выигрыше игрока *1* в антагонистической игре $\Gamma_S=(X_S, X_{N \backslash S}, H_S)$. В смешанном расширении игры Γ_S гарантированный выигрыш $v(S)$ игрока *1* может разве лишь увеличиться, поэтому в дальнейшем будем рассматривать смешанное расширение игры Γ_S. Заметим, в частности, что при такой интерпретации $v(S)$совпадает со значением игры Γ_S (если оно существует), а$v(N)$— максимальный суммарный выигрыш игроков. Очевидно, что $v(S)$зависит в результате только от коалиции S(и еще от самой исходной бескоалиционной игры, которая в наших рассуждениях остается одной и той же), являясь ее функцией. Оказывается, что построенная таким образом функция $v(S)$является характеристической функцией бескоалиционной игры.

Лемма (о супераддитивности). *Для бескоалиционной игры*

$$\Gamma=\{N, \{X_i: i \in N\}, \{H_i: i \in N\}\}$$

построим функцию

$$v : 2^N \to \mathbb{R} : v(S) = \sup_{\mu_S \in \bar{X}_S} \inf_{\nu_{N \backslash S} \in \bar{X}_{N \backslash S}} K_S(\mu_S, \nu_{N \backslash S}), \tag{2}$$

где $\left\{ \bar{X}_S, \bar{X}_{N \backslash S}, K_S(x) \right\}$ *— смешанное расширение антагонистической игры* $\Gamma_S=(X_S, X_{N \backslash S}, H_S)$. *Тогда для всех $S,T \subseteq N$, таких что $S \cap T=\emptyset$, имеет место неравенство $v(S \cup T) \geq v(S)+v(T)$.*

Доказательство. Заметим, что

$$v(S \cup T) = \sup_{\mu_{S \cup T} \in \bar{X}_{S \cup T}} \inf_{\nu_{N \backslash (S \cup T)} \in \bar{X}_{N \backslash (S \cup T)}} \sum_{i \in S \cup T} K_i(\mu_{S \cup T}, \nu_{N \backslash S \cup T}),$$

где $\mu_{S \cup T}$— смешанные стратегии коалиции $S \cup T$, т. е. произвольные вероятностные меры на$X_{S \cup T}$,$\nu_{N \backslash (S \cup T)}$— вероятностные меры на $X_{N \backslash (S \cup T)}$, K_i— выигрыш игрока iв смешанных стратегиях. Еслиограничиться только такими вероятностными мерами на $X_{S \cup T}$, которые являются произведениями независимых распределений μ_Sи ν_Tна декартовом произведении $X_S \times X_T$, то область изменения переменной, по которой производится максимизация, сузится и супремум разве лишь уменьшится. Таким образом, имеем

$$v(S\bigcup T)=\sup_{\mu_S\in\bar X_S}\sup_{\mu_T\in\bar X_T}\inf_{\nu_{N\backslash(S\bigcup T)}\in\bar X_{N\backslash(S\bigcup T)}}\sum_{i\in S\bigcup T}K_i(\mu_S\times\mu_T,\nu_{N\backslash S\bigcup T}).$$

Отсюда следует

$$v(S\bigcup T)\geq\inf_{\nu_{N\backslash(S\bigcup T)}\in\bar X_{N\backslash(S\bigcup T)}}\sum_{i\in S\bigcup T}K_i(\mu_S\times\mu_T,\nu_{N\backslash S\bigcup T})=$$

$$=\inf_{\nu_{N\backslash(S\bigcup T)}\in\bar X_{N\backslash(S\bigcup T)}}\left(\sum_{i\in S}K_i(\mu_S\times\mu_T,\nu_{N\backslash S\bigcup T})+\sum_{i\in T}K_i(\mu_S\times\mu_T,\nu_{N\backslash S\bigcup T})\right)\geq$$

$$\geq\inf_{\nu_{N\backslash(S\bigcup T)}\in\bar X_{N\backslash(S\bigcup T)}}\sum_{i\in S}K_i(\mu_S\times\mu_T,\nu_{N\backslash S\bigcup T})+\inf_{\nu_{N\backslash(S\bigcup T)}\in\bar X_{N\backslash(S\bigcup T)}}\sum_{i\in T}K_i(\mu_S\times\mu_T,\nu_{N\backslash S\bigcup T})\geq$$

$$\geq\inf_{\mu_T\in\bar X_T}\inf_{\nu_{N\backslash(S\bigcup T)}\in\bar X_{N\backslash(S\bigcup T)}}\sum_{i\in S}K_i(\mu_S\times\mu_T,\nu_{N\backslash S\bigcup T})+\inf_{\mu_S\in\bar X_S}\inf_{\nu_{N\backslash(S\bigcup T)}\in\bar X_{N\backslash(S\bigcup T)}}\sum_{i\in T}K_i(\mu_S\times\mu_T,\nu_{N\backslash S\bigcup T})=$$

$$=\inf_{\nu_{N\backslash T}\in\bar X_{N\backslash T}}\sum_{i\in S}K_i(\mu_S,\nu_{N\backslash T})+\inf_{\nu_{N\backslash S}\in\bar X_{N\backslash S}}\sum_{i\in T}K_i(\mu_T,\nu_{N\backslash S}).$$

Первое равенство в данной цепи – следствие аддитивности суммирования, следующее неравенство – следствие того, что инфимум суммы не меньше суммы инфимумов. Второе неравенство очевидно. Наконец, последнее равенство является следствием переобозначения переменных: в первом слагаемом μ_T обозначено как ν_T, а во втором слагаемом μ_S обозначено как ν_S.

Итак,

$$v(S\bigcup T)\geq\inf_{\nu_{N\backslash S}\in\bar X_{N\backslash S}}\sum_{i\in S}K_i(\mu_S,\nu_{N\backslash S})+\inf_{\nu_{N\backslash T}\in\bar X_{N\backslash T}}\sum_{i\in T}K_i(\mu_T,\nu_{N\backslash T}).$$

Последнее неравенство справедливо при любых значениях мер μ_Sв первом слагаемом и μ_T— во втором. Следовательно, по этим мерам можно перейти к супремумам

$$v(S\bigcup T)\geq\sup_{\mu_S\in\bar X_S}\inf_{\nu_{N\backslash S}\in\bar X_{N\backslash S}}\sum_{i\in S}K_i(\mu_S,\nu_{N\backslash S})+\sup_{\mu_T\in\bar X_T}\inf_{\nu_{N\backslash S}\in\bar X_{N\backslash S}}\sum_{i\in T}K_i(\mu_T,\nu_{N\backslash T})=$$

$$=v(S)+v(T).$$

Лемма доказана.

В дальнейшем под кооперативной игрой будем понимать просто пару $(N,\ v)$, где v— характеристическая функция, удовлетворяющая неравенству (1), поскольку содержательная интерпретация характеристической функции, обосновывающая свойство (1), не имеет принципиального значения.

Дележи

Основная задача кооперативной теории игр n лиц заключается в построении реализуемых принципов оптимального распределения максимального суммарного выигрыша $v(N)$между игроками.

Пусть α_i— сумма, которую получает игрок i при распределении максимального суммарного выигрыша $v(N)$,$N=\{1, 2,..., n\}$.

Определение. *Вектор* α=(α₁,α₂, ..., αₙ), *удовлетворяющий условиям*

$$\forall i\in N\quad \alpha_i\geq v\ \{i\}\ ; \tag{3}$$

$$\sum_{i\in N}\alpha_i=v(N), \tag{4}$$

где $v(\{i\})$ — значение характеристической функции для одноэлементной коалиции $S = \{i\}$, называется дележом.

Условие (3) называется условием индивидуальной рациональности и означает, что, участвуя в коалиции, каждый игрок получает по меньшей мере столько, сколько он мог бы получить, действуя самостоятельно и не заботясь о поддержке каких-либо других игроков. Должно также выполняться условие (4), так как в случае

$$\sum_{i \in N} \alpha_i < v(N)$$

существует распределение α', при котором каждый игрок $i \in N$ получит больше, чем его доля α_i. Если же

$$\sum_{i \in N} \alpha_i > v(N),$$

то игроки из N делят между собой нереализуемый выигрыш, и поэтому вектор α неосуществим. Следовательно, вектор α может считаться допустимым только при выполнении условия (4), которое называется условием коллективной (или групповой) рациональности.

На основании условий (3), (4) для того, чтобы вектор $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ был дележом в кооперативной игре *(N, v)*, необходимо и достаточно выполнение равенства

$$\forall i \in N \quad \alpha_i = v(\{i\}) + \gamma_i ,$$

причем

$$\forall i \in N \quad \gamma_i \geq 0 , \quad \sum_{i \in N} \gamma_i = v(N) - \sum_{i \in N} v(\{i\}) .$$

Определение. *Игра (N, v) называется существенной, если*

$$v(N) > \sum_{i \in N} v(\{i\}) .$$

В противном случае игра (N, v) называется несущественной.

Для любого дележа α через $\alpha(S)$ будем обозначать величину

$$\sum_{i \in S} \alpha_i = \alpha(S),$$

а множество всех дележей — через D. Несущественная игра имеет единственный дележ $\alpha = (v(\{1\}), v(\{2\}), ..., v(\{n\}))$. Во всякой существенной игре с более чем одним игроком множество дележей бесконечно. Поэтому будем анализировать такие игры с помощью отношения доминирования.

Определение. *Дележ α доминирует дележ β по коалиции S: $1 < |S| < N$ (обозначение $\succ_S$), если*

$$\forall i \in S \quad \alpha_i > \beta_i , \quad \alpha(S) \leq v(S). \tag{5}$$

Первое из условий в определении (5) означает, что дележ α лучше дележа β для всех членов коалиции S, а второе отражает реализуемость дележа α коалицией S (т. е. коалиция S на самом деле может предложить каждому из игроков $i \in S$ величину α_i).

Доминирование невозможно по одноэлементной коалиции и множеству всех игроков N. Действительно, в соответствии с (5), из $\alpha \succ_{\{i\}} \beta$ следовало бы

$\beta_i < \alpha_i \leq v(\{i\})$, что противоречит условию (3). Из условия $\alpha \succ_N \beta$ следовало бы, что $\beta_i < \alpha_i$ для всех $i \in N$, поэтому $\sum_{i\in N} \beta_i < \sum_{i\in N} \alpha_i = v(N)$, что противоречит условию (4).

Определение. *Говорят, что дележ* α *доминирует дележ β, если существует коалиция S, для которой* $\alpha \succ_S \beta$ *. Доминирование дележ* α *дележом β обозначается как* $\alpha \succ \beta$ *.*

Эквивалентность кооперативных игр

Объединение кооперативных игр в те или иные классы существенно упрощает их последующее рассмотрение. В качестве таких классов можно рассмотреть классы эквивалентных игр.

Определение. *Кооперативная игра (N, v) называется эквивалентной игре (N, v′), если существуют положительное число k и n таких произвольных вещественных чисел* c_i*,* $i \in N$*, что для любой коалиции* $S \subseteq N$ *выполняется равенство*

$$v'(S) = kv(S) + \sum_{i\in S} c_i \, . \qquad (6)$$

Эквивалентность игры (N, v) и (N,v') будем обозначать как $(N, v) \sim (N,v')$ или $v \sim v'$.

Очевидно, что $v \sim v$. Чтобы убедиться в этом, достаточно положить в формуле (6) $c_i = 0$, $k=1$, $v'=v$. Такое свойство называется рефлексивностью.

Докажем симметричность отношения ~, т. е. что из условия $v \sim v'$ следует $v' \sim v$. Действительно, полагая $k' = 1/k$, $c_i' = -c_i / k$, получим

$$v(S) = k'v'(S) + \sum_{i\in S} c_i',$$

т. е. $v' \sim v$.

Наконец, если $v \sim v'$ и $v' \sim v''$, то $v \sim v''$. Это свойство называется транзитивностью. Оно проверяется последовательным применением формулы (6).

Так как отношение эквивалентности рефлексивно, симметрично и транзитивно, оно разбивает множество всех игр и лиц на взаимонепересекающиеся классы эквивалентных игр.

Теорема. *Если две игры v и v′ эквивалентны, то отображение* $\alpha' \to \alpha$*, где*

$$\alpha_i' = k\alpha_i + c_i, \quad i \in N,$$

устанавливает также взаимно однозначное отображение множества всех дележей игры v на множество дележей игры v′, так что из $\alpha \succ_S \beta$ *следует* $\alpha' \succ_S \beta'$.

Доказательство. Проверим, что α' является дележом в игре (N,v'). Действительно,

$$\alpha_i' = k\alpha_i + c_i \geq kv\ \{i\}\ + c_i = v'\ \{i\}\ ,$$

$$\sum_{i\in N} \alpha_i' = \sum_{i\in N}\ k\alpha_i + c_i\ = kv(N) + \sum_{i\in N} c_i = v'(N).$$

Следовательно, для α' условия (3), (4) выполнены. Далее если, $\alpha \succ_S \beta$, то

$$\forall i \in S \quad \alpha_i > \beta_i\ , \quad \sum_{i\in S} \alpha_i \leq v(S),$$

поэтому

$$\alpha_i' = k\alpha_i + c_i > k\beta_i + c_i = \beta_i' \;\; k > 0 \;,$$

$$\sum_{i\in N}\alpha_i' = k\sum_{i\in N}\alpha_i + \sum_{i\in N}c_i \le kv(S) + \sum_{i\in N}c_i = v'(S),$$

т. е. $\alpha' \succ_S \beta'$. Взаимная однозначность соответствия следует из существования обратного отображения (оно было использовано при доказательстве симметрии отношения эквивалентности). Теорема доказана.

При разбиении множества кооперативных игр на попарно непересекающиеся классы эквивалентности возникает задача выбора наиболее простых представителей из каждого класса.

Определение. Игра *(N, v)* называется игрой в (0–1)-редуцированной форме, если $v\{N\}=1$, а для всех $i\in N$ *имеет место равенство* $v(\{i\})=0$.

Теорема. *Каждая существенная кооперативная игра эквивалентна некоторой игре в* (0–1)*-редуцированной форме.*

Доказательство. Так как игра существенная, то определены величины

$$\forall i \in N \;\; \left(c_i = \frac{v\ \{i\}}{v(N) - \sum\limits_{j\in N} v\ \{j\}} \right), \quad k = \frac{1}{v(N) - \sum\limits_{i\in N} v\ \{i\}},$$

$$\forall S \subseteq N \;\; \left(v'(S) = kv(S) + \sum_{i\in S} c_i \right).$$

Тогда $v'(\{i\})=0$, $v'(N)=1$. Теорема доказана.

Из теоремы следует, что свойства игр, включающие понятие доминирования, можно изучить на играх в (0–1)-редуцированной форме. Если v — характеристическая функция произвольной существенной игры *(N, v),* то

$$v' : 2^N \to \; 0;1 \; : v'(S) = \frac{v(S) - \sum\limits_{i\in S} v\ \{i\}}{v(N) - \sum\limits_{i\in N} v\ \{i\}}$$

есть (0–1)- нормализация, соответствующая функции v. При этом дележом оказывается любой вектор $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2, ..., \alpha_n)$, компоненты которого удовлетворяют условиям

$$\sum_{i\in N}\alpha_i = 1, \quad \forall i \in N \;\; \alpha_i \ge 0 \;, \tag{7}$$

т. е. дележи можно рассматривать как точки (n–1)-мерного симплекса, порожденного ортами $w_j=(0,..., 0,1, 0,..., 0)$, $j=1,2,\dots, n$пространства $\mathbb{R}.^n$

С-ядро и Н-М решение

Перейдем к рассмотрению принципов оптимального поведения в кооперативных играх. Как уже отмечалось выше, речь будет идти о принципах оптимального распределения максимального суммарного выигрыша между игроками.

Возможен следующий подход. Пусть игроки в кооперативной игре (N, v)пришли к такому соглашению о распределении выигрыша всей коалиции N (дележу α*), при котором ни один из дележей не доминирует α*. Тогда такое распределение устойчиво в том смысле, что ни одной из коалиций Sневыгодно отделиться от других игроков и распределить между членами коалиции выигрыш $v(S)$.Это рассуждение наводит на мысль о целесообразности рассмотрения множества недоминируемых дележей.

Определение. *Множество недоминируемых дележей кооперативной игры* (N, v) *называется ее С-ядром.*
Имеет место следующая теорема, которая характеризует С-ядро.

Теорема. *Для того чтобы дележ и принадлежал С-ядру, необходимо и достаточно выполнение для всех S⊆N неравенств* $v(S) \le \alpha(S) = \sum_{i \in S} \alpha_i$.

Доказательство. Для несущественных игр теорема очевидна. В силу теоремы п. 0 достаточно провести ее доказательство для игр в (0-1)-редуцированной форме.

Докажем достаточность утверждения теоремы. Пусть для дележа α выполнено условие теоремы. Если предположить, что этот дележ не принадлежит С-ядру, то найдется такой дележ β и коалиция S, что $\beta \succ_S \alpha$, т. е. $v(S) \geq \beta(S) > \alpha(S)$, что противоречит условию теоремы.

Покажем необходимость условия теоремы. Для любого дележа α, не удовлетворяющего этому условию, существует коалиция S, для которой $\alpha(S) < v(S)$. Положим

$$\forall i \in S \left(\beta_i = \alpha_i + \frac{v(S) - \alpha(S)}{|S|} \right), \quad \forall i \notin S \left(\beta_i = \alpha_i + \frac{1 - v(S)}{|N| - |S|} \right),$$

Легко заметить, $\beta(N) = 1, \quad \forall i \in N \quad \beta_i \geq 0$, $\beta \succ_S \alpha$. Отсюда следует, что дележа α не принадлежит С-ядру. Теорема доказана.

Из доказанной теоремы следует, что С-ядро является замкнутым, выпуклым подмножеством множества всех дележей (С-ядро может быть пустым множеством).

Пусть игроки договариваются о выборе кооперативного соглашения. Из супераддитивности vследует, что такое соглашение приводит к образованию коалиции N всех игроков. Решается вопрос о способе дележа суммарного дохода $v(N)$.

Минимальным требованием для получения согласия игроков выбрать вектор α является индивидуальная рациональность этого вектора, т. е. условие $\alpha_i \geq v(\{i\})$, $i \in N$. Пусть игроки договариваются о выборе конкретного дележа α. Против выбора дележа может возражать некоторая коалиция S, требующая для себя более выгодного распределения. Коалиция Sвыдвигает это требование, угрожая в противном случае нарушить общую кооперацию (это вполне реальная угроза, так как для достижения дохода $v(N)$требуется единодушное согласие всех игроков). Предположим, что остальные игроки

$N \backslash S$реагируют на эту угрозу объединенными действиями против коалиции S. Тогда максимальный гарантированный доход коалиции Sоценивается числом $v(S)$. Условие $v(S) \leq \alpha(S)$ означает существование стабилизирующей угрозы коалиции Sсо стороны коалиции $N \backslash S$. Таким образом, С-ядром игры (N, v) является множество устойчивых в смысле коалиционных угроз распределений максимального суммарного дохода $v(N)$.
Из условия $v(S) \leq \alpha(S)$ видно, что если дележ а принадлежит С-ядру, то ни одна коалиция Sне может гарантировать себе выигрыш, превосходящий $\alpha(S)$, т.е. суммарный выигрыш, который обеспечивается членам коалиции дележом α. Это делает нецелесообразным существование коалиций S, отличных от максимальной коалиции N.

Теорема п. 0 дает достаточные основания для использования С-ядра как важного принципа оптимальности в кооперативной теории. Однако во многих случаях С-ядро может оказаться пустым, а в других случаях оно представляет собой множественный принцип оптимальности и остается всегда открытым вопрос, какой все-таки дележ из С-ядра необходимо выбрать в конкретном случае.

Пример 16. Рассмотрим игру «джаз-оркестр» (см. пример 15 п. 8.4). Суммарный доход трех музыкантов максимален (и равен 100 руб.) в случае их совместного выступления. Если певец выступает отдельно от пианиста с ударником, то все втроем они получают 65 + 20 руб., если пианист выступает один, то 30 + 50 руб. Наконец, суммарный доход равен 80 руб., если пианист и певец отказываются от участия ударника. Какое распределение максимального общего дохода следует признать разумным, учитывая описанные возможности игроков в смысле частичной кооперации и индивидуального поведения?
Вектор а = ($a_{l5}a_2$, a_3) в игре «джаз-оркестр» принадлежит С-ядру тогда и только тогда, когда

Это множество является выпуклой оболочкой следующих трех дележей: (35, 45, 20), (35, 50, 15), (30, 50, 20). Таким образом, выигрыши всех игроков определяются с точностью до 5 руб. Типичным представителем ядра является центр (среднеарифметическое крайних точек) С-ядра, а именно: а*=(33,3; 48,3; 18,3). Для дележа а* характерно, что все двуэлементные коалиции имеют одинаковый дополнительный доход: *ац+aj—v({i,* у}) = 1,6. Дележ а* является
справедливым компромиссом внутри С-ядра.
93. Из того, что С-ядро пусто, не следует невозможность кооперации всех игроков N. Это просто означает, что никакой дележ не может быть стабилизирован с помощью простых угроз, описанных выше. Пустота ядра имеет место тогда, когда промежуточные коалиции слишком сильны. Это утверждение поясняется следующим образом.

3. Позиционные игры

Во многих практически важных конфликтных ситуациях стороны-участницы, располагая той или иной информацией о прошлом развитии конфликта, совершают свой выбор не раз и навсегда, а последовательно во времени, шаг за шагом. Тем самым, они используют стратегии, отражающие как динамику конфликта, так и степень собственной информированности о фактически складывающейся обстановке в развитии этого конфликта.

3.1. *Структура позиционной игры*

Одним из классов игр, описывающих конфликты, динамика которых оказывает влияние на поведение участников, являются так называемые позиционные игры.

Позиционная игра — это бескоалиционная игра, моделирующая процессы последовательного принятия решений игроками в условиях меняющейся во времени и, вообще говоря, неполной информации.

Процесс самой игры состоит в последовательном переходе от одного состояния игры к другому состоянию, который осуществляется либо путем выбора игроками одного из возможных действий в соответствии с правилами игры, либо случайным образом *(случайный ход).*

В качестве примеров позиционных игр можно привести крестики-нолики, шашки, шахматы, карточные игры, домино и др. Интересно, что право выбора первого хода в этих играх часто определяется случайным образом.

Состояния игры принято называть *позициями* (отсюда и название — позиционные игры), а возможные выборы в каждой позиции — *альтернативами.* Характерной особенностью позиционной игры является возможность представления множества позиций в виде древовидного упорядоченного множества, которое называется *деревом игры* (рис. 1)[1]. Для определенности мы будем рассматривать позиционные игры, в каждой позиции которых, кроме окончательных, ровно две альтернативы — первая и вторая.

Пользуясь графическим описанием игры в виде дерева, можно заметить, что процесс игры состоит в переходе от начальной позиции к окончательной через непосредственно следующие одна за другой промежуточные позиции. Каждая окончательная вершина определяет единственную цепь (последовательность идущих друг за другом звеньев), связывающую начальную вершину с данной. Такая цепь называется *партией.*

На рис. 1 одна из партий выделена жирными линиями. Число различных партий равно числу окончательных вершин (позиций).

[1]Замечание. Символ*O, A* или *B* в кружке указывает, кто из игроков (О, *A* или *B)* делает очередной ход в данной позиции. При этом символом*O*обычно обозначается ход в игре, осуществляемый не игроком, а каким-нибудь случайным механизмом (иногда его называют *природой).* Например, в позиционной игре, представленной на рисунке 14 своим деревом, первый ход производится случайно.

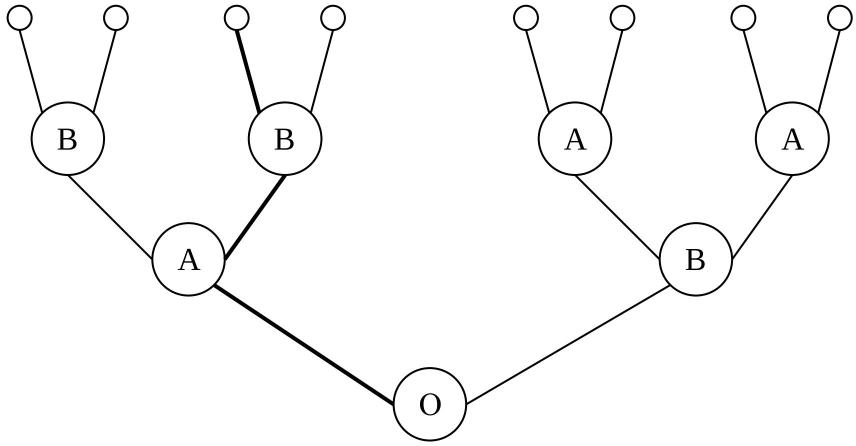

Рис. 1. Дерево игры

В каждой окончательной позиции задан числовой выигрыш игрока A[2]. В шахматах функция выигрышей игрока A (белых) определяется так:

- +1 на выигрываемых партиях,
- 0 на ничейных партиях,
- -1 на проигрываемых партиях.

Функция выигрышей игрока B(черных) отличается от функции выигрышей белых только знаком.

Различают позиционные игры *с полной информацией* и позиционные игры *с неполной информацией.*

В позиционных играх с полной информацией (пример — шашки, шахматы) каждый игрок при своем ходе знает ту позицию дерева игры, в которой он находится.

В позиционных играх с неполной информацией (пример — домино) игрок, делающий ход, не знает точно, в какой именно позиции дерева игры он фактически находится. Этому игроку известно лишь некоторое множество позиций, включающее в себя его фактическую позицию. Такое множество позиций называется *информационным множеством.*

Позиции, принадлежащие одному и тому же информационному множеству, объединяются пунктирными линиями.

Рассмотрим примеры двух игр, состоящих из двух ходов, которые последовательно делают участвующие в ней игроки A и B.

Начинает игрок A: он выбирает одну из двух возможных альтернатив — число x, равное либо 1 (первая альтернатива), либо 2 (вторая альтернатива). На ход игрока A игрок B отвечает своим ходом, выбирая одну из двух возможных альтернатив — число y, равное либо 1 (первая альтернатива), либо 2 (вторая альтернатива). В результате игрок A получает вознаграждение или вынужден платить штраф.

[2]Мы будем рассматривать здесь только антагонистические позиционные игры.

Пример 1.

1-*й ход.* Игрок *A* выбирает число *x* из множества двух чисел $\{1,2\}$.

2-й ход. Игрок *B* выбирает число *y* из множества двух чисел $\{1,2\}$, зная выбор числа *x* игроком *A*.

Функция *W(x, y)* выплат игроку *A* за счет игрока *B* задается так

$$W(1,1) = 1, \quad W(1,2) = -1,$$

$$W(2,1) = -2, \quad W(2,2) = 2.$$

На рис. 2 показаны дерево игры и информационные множества.

Пример 2. Выполнены все условия предыдущего примера, кроме одного — игрок *B* на 2-м ходе выбирает число *y* из множества двух чисел $\{1,2\}$, не зная выбора числа *x* игроком *A,* — информационные множества выглядят так, как показано на рис. 3.

3.2. *Нормализация позиционной игры*

Заранее определенную последовательность ходов игрока, выбранную им в зависимости от информации о ходах другого игрока и ходах игрокаO(природы), будем называть *чистой стратегией* этого игрока.

В том случае, если в игре нет случайных ходов (игрокOв игре не участвует), выбор игроком A и игроком B чистых стратегий однозначно определяет исход игры — приводит к окончательной позиции, где игрок A и получает свой выигрыш. Это обстоятельство позволяет сводить позиционную игру к матричной игре.

Процесс сведения позиционной игры к матричной называется *нормализацией позиционной игры.* Покажем на нескольких примерах, как это делается.

Пример 1 (продолжение). Опишем стратегии игроков.

Стратегию игрокаAможно задать одним числом x, показывающим, какую альтернативу, первую или вторую, выбрал игрок A. Тем самым, у игрока A две чистых стратегии:

- A_1 — «выбрать $x = 1$»,
- A_2— «выбрать $x = 2$».

Стратегию игрокаB(принимая во внимание, что выбор игрока A на первом ходе ему известен) удобно описывать упорядоченной парой [y_1,y_2], Здесь $y_1 \in \{1,2\}$ — альтернатива, выбираемая игроком B при условии, что игрок A выбрал первую альтернативу, x=1, а $y_2 \in \{1,2\}$— альтернатива, выбираемая игроком B при условии, что игрок A выбрал вторую альтернативу, $x = 2$. Например, выбор игрокомBстратегии [2,1] означает, что если на первом ходе игрок A выбрал $x = 1$, то игрок B на своем ходе должен выбрать $y = 2$. Если же на 1-м ходе игрокAвыбрал $x = 2$, то согласно этой стратегии игрок B на своем ходе должен выбрать $y = 1$.

Таким образом, у игрокаBчетыре чистых стратегии:

- B_1= [1,1] ($y = 1$ при любом выборе x);
- B_2= [1,2] ($y = x$ при любом выборе x);
- B_3= [2,1] ($y \neq x$ при любом выборе x);
- B_4= [2,2] ($y = 2$ при любом выборе x).;

Покажем теперь, как рассчитываются выигрыши игрокаAв зависимости от примененных стратегий.

Пусть, например, игрокAвыбрал стратегию A_1, а игрок B — стратегию B_2. Тогда $x = 1$, а из стратегии [1,2] вытекает, что $y = 1$. Отсюда выигрыш первого игрока будет равен $W(1,1)=-1$. Остальные выигрыши рассчитываются совершенно аналогично.

Результаты расчетов записываются обычно или в виде таблицы выигрышей игрокаA

		B_1	B_2	B_3	B_4
		[1,1]	[1,2]	[2,1]	[2,2]
A_1	$x = 1$	$W(1, 1)$	$W(1, 1)$	$W(1, 2)$	$W(1, 2)$
A_1	$x = 2$	$W(2,1)$	$W(2,2)$	$W(2,1)$	$W(2,2)$

или в виде матрицы игры

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix},$$

где, как обычно, строки соответствуют стратегиям игрока A, а столбцы — стратегиям игрока B.

Полученная матрица имеет седловую точку. Оптимальные стратегии игроков: A_1и B_3. Тем самым, игрок Aна первом ходе выбирает $x = 1$, а игрок B на втором ходе выбирает $y = 2$. Цена игры $u = –1$.

Пример 2 (продолжение). Опишем стратегии игроков.

У игрока Aони те же, что и в предыдущем примере:

- A_1 — «выбрать $x = 1$»,
- A_2— «выбрать $x = 2$».

Так как игроку Bвыбор игрока A неизвестен, то есть игрок B не знает, в какой именно из двух позиций он находится (см. рис. 3), то у него подобные две стратегии:

- B_1 — «выбрать $y = 1$»,
- D_2— «выбрать $y = 2$».

Соответствующие таблица выигрышей игрока Aи матрица игры имеют следующий вид

		B_1	B_2
		$y = 1$	$y = 2$
A_1	$x = 1$	$W(1, 1)$	$W(1, 1)$
A_1	$x = 2$	$W(2,1)$	$W(2,2)$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Полученная матрица седловой точки не имеет. Оптимальные смешанные стратегии игроков: P= {2/3, 1/3}и Q = {1/2, 1/2}. Цена игры $v = 0$.

<u>*Замечание 1.*</u> На этих двух примерах хорошо видно, что результат сведения позиционной игры к матричной напрямую зависит от степени информированности игроков. В частности, отсутствие у игрока Bсведений о выборе, сделанном игроком A, приводит к уменьшению количества его возможных стратегий. Сравнивая ответы, полученные в примерах 13 и 14, замечаем, что снижение уровня информированности игрока (в данном случае — игрока B) делает для него исход игры менее благоприятным. Заметим, что это легко следует и из общих соображений.

<u>*Замечание 2.*</u> Приведенные выше примеры не исчерпывают всех возможных вариантов даже в этом, самом простом, случае двухходовых позиционных игр.

Рассмотрим еще один пример позиционной игры со случайным разыгрыванием права первого хода.

Пример 3.

Первый *ход* делает игрок**О**, выбирая число x, равным 1 с вероятностью 2/3и равным 2 с вероятностью 1/3.

Если x=1, то на **втором *ходе***игрокAвыбирает число y из множества двух чисел {1,2}, зная результат случайного выбора на первом ходе, а на **третьем *ходе***игрок B выбирает число z из множества двух чисел {1,2}, зная x, но не зная y.

Если x = 2, то на **втором *ходе*** игрокBвыбирает число y из множества двух чисел {1, 2}, зная результат случайного выбора на первом ходе, а на **третьем *ходе*** игрок A выбирает число z из множества двух чисел {1,2}, зная x, но не зная y.

$$W(1,1,1) = -2, \quad W(1,2,1) = 1, \quad W(2,1,1) = 3, \quad W(2,2,1) = -3,$$
$$W(1,1,2) = 4, \quad W(1,2,2) = -4, \quad W(2,1,2) = 0, \quad W(2,2,2) = 5.$$

Графическое представление этой игры показано на рис 4.

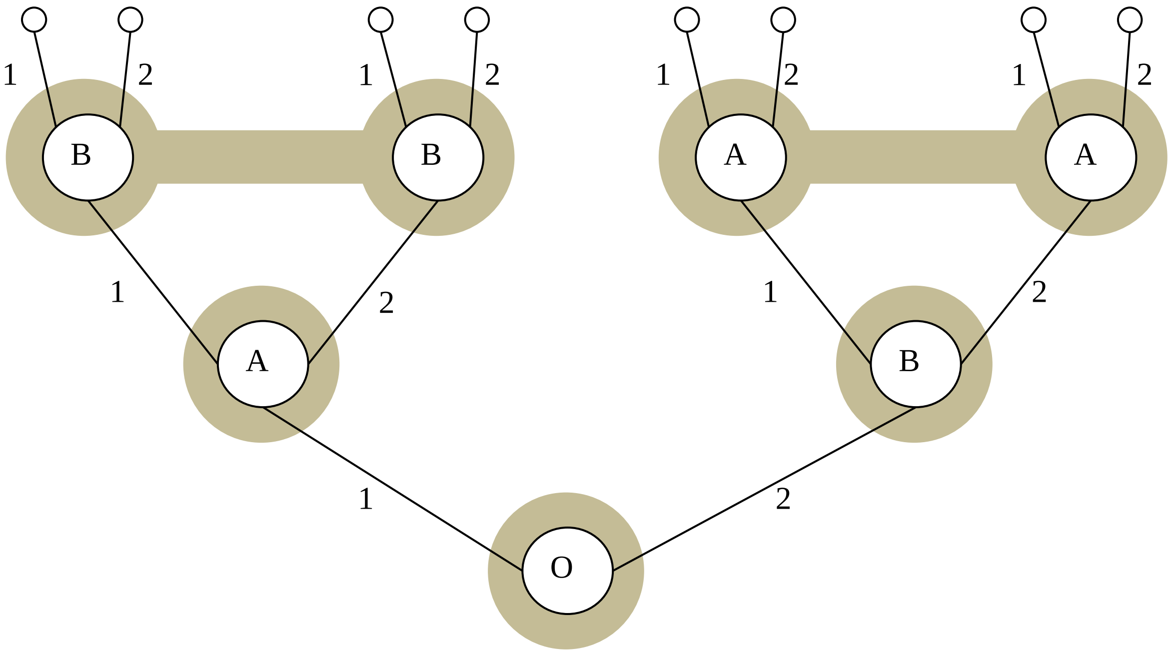

Рис. 2. Дерево и информационное множество игры в примере 3

Чистую стратегию игрокаAв данной игре можно описать упорядоченной парой (y,z), где y∈{1,2} — выбор игрока A на **втором** ходе, если на **первом** ходе выбрано x = 1, а z∈{1,2} — выбор игрока A на **третьем** ходе, если на **первом** ходе выбрано x = 2. Например, стратегия (1,2) игрокаAозначает, что на втором ходе игрок A выбирает y = 1, а на третьем ходе выбирает $z = 2$.

Тем самым, у игрокаAчетыре стратегии: A_1=(1,1), A_2=(1,2), A_3=(2,1), A_4=(2,2). У игрокаBчетыре подобные стратегии: B_1=(1,1), B_2=(1,2), B_3=(2,1), B_4=(2,2).

Покажем теперь, как находятся элементы матрицы выигрышей игрока A. Пусть, например, игрок A применяет стратегию A_2=(1,2), а игрок B — стратегию B_3=(2,1). Различаются два случая:

(1) x = 1,

(2) $x = 2$.

По условию при $x = 1$ игрок A имеет возможность сделать только 2-й ход (выбрать y), а игрок B — только 3-й (выбрать z). При $x = 2$ их возможности меняются местами: игроку B предоставлено право 2-го хода (выбрать y), а игроку A — 3-го (выбрать г).

Если $x = 1$, то стратегия A_2 указывает игроку A при втором ходе взять $y=1$, а стратегия B_3 указывает игроку B при третьем ходе взять $z = 1$. В результате

$$W(x,y,z) = W(1,1,1) = -2.$$

Если же $x = 2$, то стратегия B_3 указывает игроку B при втором ходе взять $y=2$, а стратегия A_2 указывает игроку A при третьем ходе взять $z = 2$. В результате

$$W(x,y,z) = W(2,2,2) = 5.$$

Поскольку первая и вторая альтернативы на первом ходе выбираются соответственно с вероятностями 2/3 и 1/3, то и найденные выигрыши появляются с теми же вероятностями. Следовательно, математическое ожидание выигрыша игрока A при таких стратегиях рассчитывается так

$$-2\cdot\frac{2}{3}+5\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}.$$

Итак, при $x = 1$ имеем

		B_1	B_2	B_3	B_4
		(1,1)	(1,2)	(2,1)	(2,2)
A_1	(1,1)	W(1,1,1)	W(1,1,2)	W(1,1,1)	W(1,1,2)
A_2	(1,2)	W(1,1,1)	W(1,1,2)	W(1,1,1)	W(1,1,2)
A_3	(2,1)	W(1,2,1)	W(1,2,2)	W(1,2,1)	W(1,2,2)
A_4	(2,2)	W(1,2,1)	W(1,2,2)	W(1,2,1)	W(1,2,2)

или

$$\begin{pmatrix} -2 & 4 & -2 & 4 \\ -2 & 4 & -2 & 4 \\ 1 & -4 & 1 & -4 \\ 1 & -4 & 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

При $x = 1$ имеем

		B_1	B_2	B_3	B_4
		(1,1)	(1,2)	(2,1)	(2,2)
A_1	(1,1)	W(2,1,1)	W(2,1,1)	W(2,2,1)	W(2,2,1)
A_2	(1,2)	W(2,1,2)	W(2,1,2)	W(2,2,2)	W(2,2,2)
A_3	(2,1)	W(2,1,1)	W(2,1,1)	W(2,2,1)	W(2,2,1)
A_4	(2,2)	W(2,1,2)	W(2,1,2)	W(2,2,2)	W(2,2,2)

или

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \\ 3 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем искомую матрицу игры

$$\frac{2}{3}\cdot\begin{pmatrix} -2 & 4 & -2 & 4 \\ -2 & 4 & -2 & 4 \\ 1 & -4 & 1 & -4 \\ 1 & -4 & 1 & -4 \end{pmatrix}+\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \\ 3 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \end{pmatrix}=\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 11 & -7 & 5 \\ -4 & 8 & 1 & 11 \\ 5 & -5 & -1 & -11 \\ 2 & -8 & 7 & -5 \end{pmatrix}.$$

Замечание 3. Графическое представление и функция выигрышей полностью определяют позиционную игру. При построении дерева и информационного множества игры необходимо соблюдать два правила:

1) в одно информационное множество могут входить позиции только одного игрока,
2) 2) цепь, определяющая партию игры, может иметь с информационным множеством не более одной общей позиции (то есть при разыгрывании партии игрок не может дважды попасть в одно и то же информационное множество).

Как показывает рис. 5, и при таких ограничениях информационные множества могут выглядеть довольно причудливо.

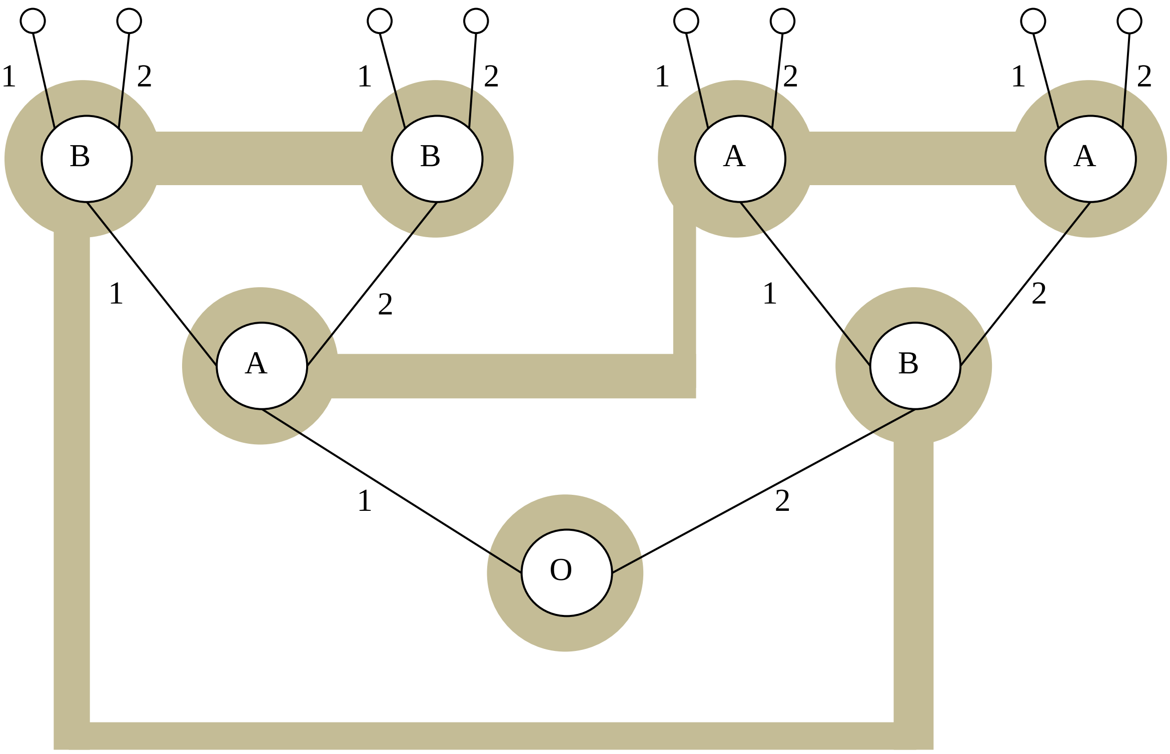

Рис. 3. Дерево и информационное множество игры

3.3. *Позиционные игры с полной информацией*

Позиционная игра называется *игрой с полной информацией,* если в каждой позиции любой ее партии игрок, делающий ход, знает, какие альтернативы были выбраны на предыдущих ходах. В графическом описании каждая вершина дерева такой игры представляет собой отдельное информационное множество. Примерами позиционных игр с полной информацией могут служить крестики-нолики, шашки и шахматы.

Основная особенность позиционной игры с полной информацией состоит в том, что соответствующая ей матрица выигрышей всегда имеет седловую точку, то есть в игре с полной информацией существуют оптимальные чистые стратегии и, значит, равновесная ситуация. Сказанное означает, что в шахматах (крестиках-ноликах, шашках) уже в начальной позиции либо имеется способ выигрыша забелых, либо способ выигрыша за черных, либо как та, так и другая сторона способна форсировать ничью. Однако известное доказательство существования равновесной ситуации неконструктивно и не дает эффективных приемов фактического нахождения решения игры. И такие способы (стратегии) в шахматах не найдены до сих пор; неизвестно даже, какая из перечисленных возможностей имеет место на самом деле. Иное дело с игрой крестики-нолики: стратегий в ней немного и она разобрана до самого конца — существуют оптимальные чистые стратегии, ведущие игроков к ничьей.

Рассмотрим несколько примеров.

1. Как нетрудно заметить, двухходовая игра из примера 11 является игрой с полной информацией. Ее нормализация приводит к матрице с седловой точкой (см. пример 1).
2. **«Выкладывание монет на стол».** Два игрока поочередно кладут монеты одинаковых размеров на обыкновенный стол, всякий раз выбирая произвольное доступное **место** для монеты (взаимное накрывание монет не допускается). Тот из игроков, кто положит монету, не оставляющую места для новых монет, выигрывает. Это игра с полной информацией. Существует вполне определенная стратегия, обеспечивающая выигрыш тому из игроков, кто начинает игру: начинающий игру должен положить первую монету точно в центр стола и на каждый ход противника отвечать симметричным ходом. Исход игры от стратегии второго игрока не зависит.
3. **«Переговоры»**. В переговорах участвуют две стороны*A*и *B.* В слегка идеализированном варианте это может выглядеть, например, так. Сначала сторона*A*высказывает одно из нескольких предложений, способных заинтересовать сторону *B.* Затем сторона *B,* ознакомившись с предложением стороны *A,* высказывает одно из нескольких встречных предложений, способных, по ее мнению, заинтересовать сторону *A.* В свою очередь, сторона *A,* ознакомившись с реакцией стороны *B* на сделанные предложения, высказывает ей новое предложение, внеся одну из нескольких возможных корректировок в свое первоначальное предложение с учетом мнения стороны*B*и т.д.

Если предмет переговоров сложен, то подобный обмен ходов может затянуться. Однако любые переговоры непременно заканчиваются. И там, на финише, ждет функция выигрышей.

Попробуем смоделировать короткий переговорный процесс при помощи трехходовой позиционной игры. Предположим, что переговоры заканчиваются через три хода, на каждом из которых соответствующая сторона имеет возможность выбора из двух альтернатив, и опишем соответствующую позиционную игру.

1-й *ход* делает сторона*A:* она выбирает одно из двух возможных предложений — число x из множества двух чисел $\{1,2\}$.

2-й ход делает сторона*B:* она выбирает число y из множества двух чисел $\{1,2\}$, зная число x, предложенное стороной A.

3-й *ход* делает сторона*A:* она выбирает число z из множества двух чисел $\{1,2\}$, зная о предложении стороны B на 2-м ходе и помня собственное предложение на 1-м ходе.

После этого сторона*A*либо получает вознаграждение (например, в виде кредита от стороны *B),* либо выплачивает стороне B штраф.

Все эти возможности описываются функцией выигрышей $W(x,y,z)$,заданной следующим образом

$$W(1,1,1)=a,\quad W(1,1,2)=b,\quad W(1,2,1)=c,\quad W(1,2,2)=d,$$

$$W(2,1,1)=e,\quad W(2,1,2)=f,\quad W(2,2,1)=g,\quad W(2,2,2)=h.$$

Графическое представление этой игры показано на рис. 6.

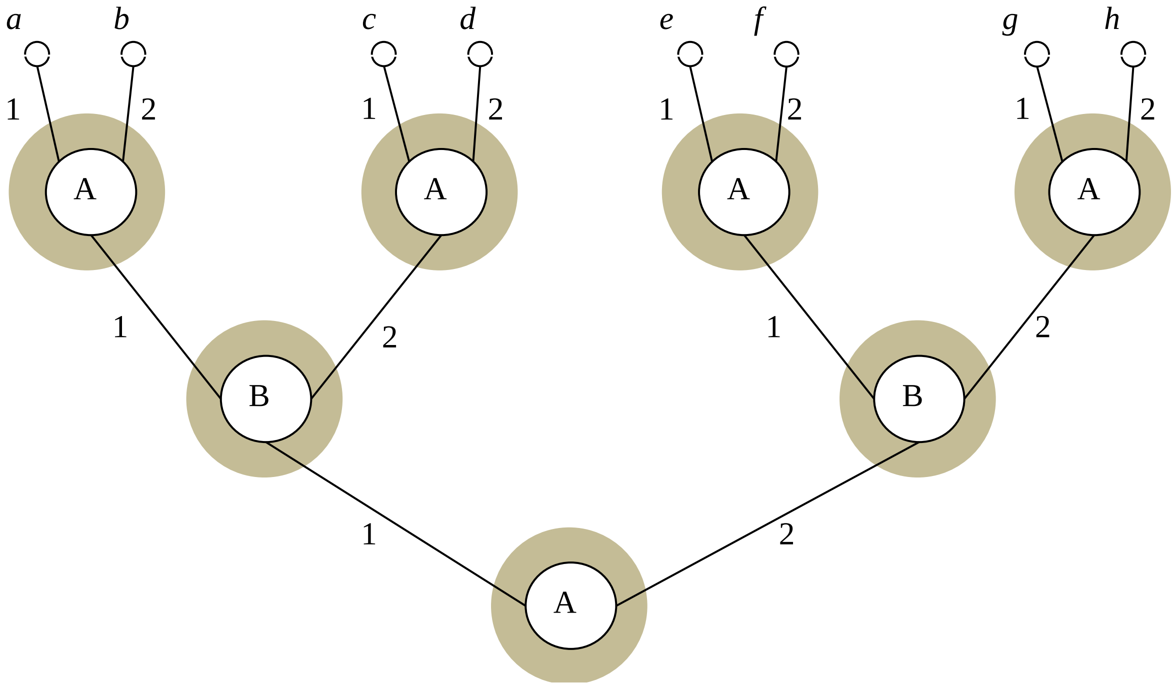

Рис. 4. Дерево и информационное множество игры«Переговоры»

Ясна, что описанная позиционная игра является игрой с полной информацией. Сначала опишем возможные стратегии игрока *B.*Поскольку игроку B выбор игрока A на 1-м ходе известен, то у игрока B те же четыре стратегии, что и в примере 1

- B_1= [1,1] (y = 1 при любом выборе x);
- B_2= [1,2] (y = x при любом выборе x);
- B_3= [2,1] ($y \neq x$ при любом выборе x);
- B_4= [2,2] (y = *2* при любом выборе x).;

С описания возможных стратегий игрока*А*дело обстоит немного посложнее — их восемь. Чистая стратегия игрока*А*в данной игре описывается упорядоченной тройкой (x,[z_1,z_2]). Здесь $x \in \{1,2\}$ — альтернатива, которую игрок*А*выбирает на 1-м ходе, $z_1 \in \{1,2\}$ — альтернатива, которую игрок *А* выбирает на 3-м ходе, если на 2-м ходе игрок *В* выбрал первую альтернативу y = 1, и $z_2 \in \{1,2\}$ — альтернатива, которую игрок *А* выбирает на 3-м ходе, если на 2-м ходе игрок *В* выбрал вторую альтернативу $y = 2$. Например, выбор игроком*А*стратегии (1,[2,1]) означает, что на первом ходе игрок *А* выбирает x = 1, а на третьем z = 2, если игрок *В* выбрал y = 1, и z = 1, если игрок *В* выбрал y = 2. Тем самым, у игрока*А*восемь чистых стратегий:

$$A_1 = 1, 1,1 \;,\quad A_2 = 1, 1,2 \;,\quad A_3 = 1, 2,1 \;,\quad A_4 = 1, 2,2 \;,$$

$$A_5 = 2, 1,1 \;,\quad A_6 = 2, 1,2 \;,\quad A_7 = 2, 2,1 \;,\quad A_8 = 2, 2,2 \;.$$

Покажем теперь, как в зависимости от применяемых стратегий определяются элементы таблицы выигрышей игрока *А*. Пусть, например, игрок *А* выбрал стратегию A_6= (2, [1, 2]), а игрок *В* — стратегию B_3= [2, 1]. Тогда $x = 2$. Из [2, 1] вытекает, что y = 1, а из (2, [1, 2]), что z = 1. Отсюда $W(x,y,z)=W(2,1,1)=e$.

Рассчитывая по этой же схеме все остальные элементы таблицы выигрышей, получим

		B_1	B_2	B_3	B_4
		[1,1]	[1,2]	[2,1]	[2,2]
A_1	1, 1,1	W(1,1,1)	W(1,1,1)	W(1,2,1)	W(1,2,1)
A_2	1, 1,2	W(1,1,1)	W(1,1,1)	W(1,2,2)	W(1,2,2)
A_3	1, 2,1	W(1,1,2)	W(1,1,1)	W(1,2,1)	W(1,2,1)
A_4	1, 2,2	W(1,1,2)	W(1,1,2)	W(1,2,2)	W(1,2,2)
A_5	2, 1,1	W(2,1,1)	W(2,2,1)	W(2,1,1)	W(2,2,1)
A_6	2, 1,2	W(2,1,1)	W(2,2,2)	W(2,1,1)	W(2,2,2)
A_7	2, 2,1	W(2,1,2)	W(2,2,1)	W(2,1,2)	W(2,2,1)
A_8	2, 2,2	W(2,1,2)	W(2,2,2)	W(2,1,2)	W(2,2,2)

$$\begin{pmatrix} a & a & c & c \\ a & a & d & d \\ b & b & c & c \\ b & b & d & d \\ e & g & e & g \\ e & h & e & h \\ f & g & f & g \\ f & h & f & h \end{pmatrix}.$$

Вследствие того, что рассматриваемая позиционная игра является игрой с полной информацией, полученная матрица имеет седловую точку при любой функции выигрышей. В рассматриваемом случае это легко доказать (докажите!).

В рассмотренных примерах основное внимание было уделено описанию процесса нормализации позиционной игры — построению дерева игры и информационных множеств, выработке стратегий игроков и вычислению элементов платежной матрицы. Следующий естественный шаг — отыскание цены игры и оптимальных стратегий игроков — проводится методами, о которых рассказывалось в разделе, посвященном матричным играм.

Мы достаточно подробно остановились на позиционных играх двух лиц, где были явно выражены интересы одного из игроков (игрока *А)*. Следует, однако, иметь в виду, что в одних случаях интересы игрока*В*могут быть полностью противоположными интересам игрока Л, в то время как в других вполне может оказаться, что то, что хорошо для одного игрока, не обязательно плохо для другого. Приведем два простых примера.

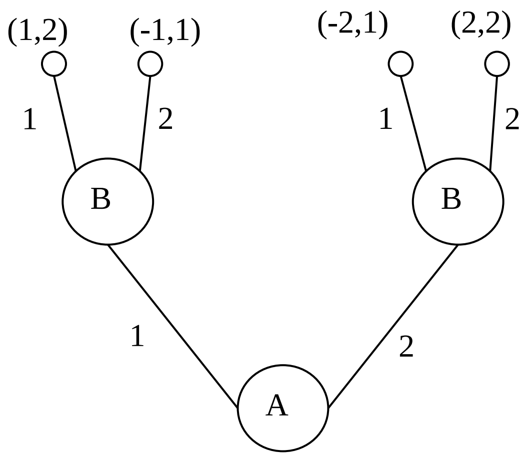

Рис. 5. Деревоигры в примереА

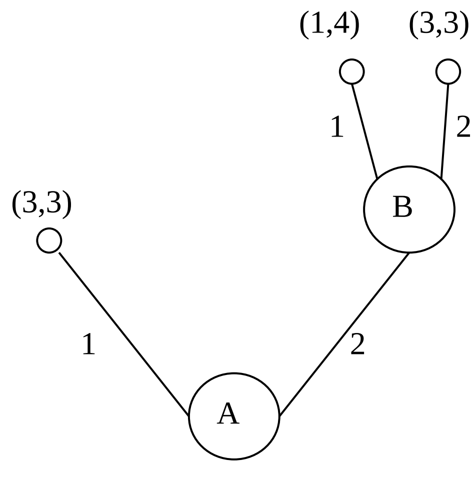

Рис. 6. Дерево игры в примере В

Пример А.

1-й ход. Игрок*А*выбирает число а; из множества двух чисел $\{1,2\}$.

2-й ход. Игрок*В*выбирает число *у* из множества двух чисел $\{1,2\}$, зная выбор числа *х* игроком *А*.

Функции выплат игрокам*А*и *В* — $W_A(x, y)$и $W_B(x, y)$соответственно задаются так:

ИЪ<1,1) = 1, И^(1,2) = -1, $W_A(2,1)$ =-2, $W_A(2,2) = 2$, $W_B(1,\backslash) = 2$, $W_B(1,2)$=1,$W_B(2,1)$ = 1,W,<2,2) = 2,

Дерево игры показано на рис. 7. Исход игры зависит от того, каковы намерения игрока*В*— *максимизировать свой выигрыш* $W_B(x, y)$ -»max, или *максимизировать свой относительный выигрыш:*

$$W_B(x,y)\text{-}W_A(x,y)/\text{^}mzx.$$

В первом случае это достигается так:

прих=1 у = 1 и И^(1,1) = 2 ($W_A(1,1)$ = 1);

при x = 2 y = 2 и $W_B(2, 2)$ = 2 ($W_A(2, 2)$ = 2).

Во втором случае:

при x = 1 y = 2 и $W_B(\backslash, 2)$ - $W_A(\backslash, 2)$ = 1 - (-1) = 2);

при x = 2 y = 1 и $W_B(2,1)$ - $W_A(2,1)$ = 1 - (-2) = 3).

Пример Б. Игра задается деревом (см. рис. 26).

1 -*й ход.* Игрок*А*выбирает число x из множества двух чисел {1,2}. Если x = 1, то каждый из игроков получает свой выигрыш, равный 2. Если x = 2, то право 2-го хода получает игрок*В,* где он и выбирает? выбирает число y из множества двух чисел {1,2}.

При у = 1 выигрыш игрока*А*равен 1, а игрока *В* — 4. Приy = 2 оба игрока получают поровну — по 3.

В случае, когда каждый из игроков стремится к получению максимального выигрыша и любые виды кооперации запрещены, исход игры ясен — игрок*А*выбирает x = 1, и игра заканчивается. Но при x = 2 и y = 2 каждый из игроков получает по 3 (такой исход предпочтительнее простейшего (1,1)), и, если допустить соглашение между игроками, это обстоятельство вполне может изменить исход игры.

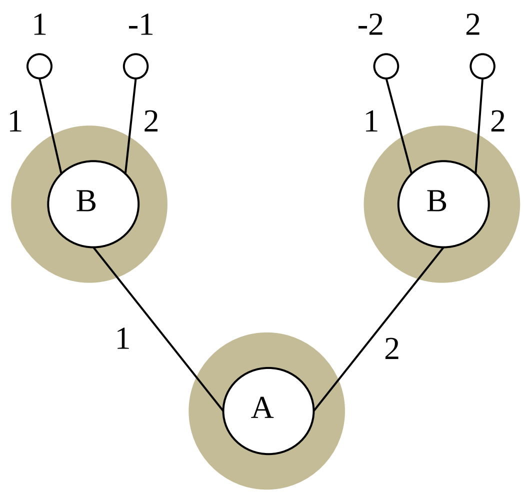

Рис. 7. Дерево
и информационные множества
игры в примере 1

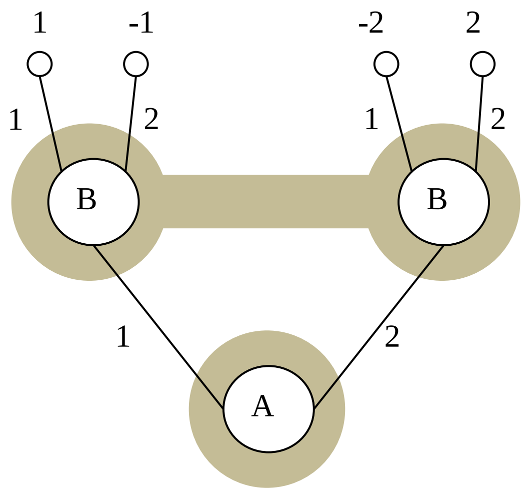

Рис. 8. Дерево
и информационное множество
игры в примере 2

В примере 2 имеем игру с неполной информацией: игрок *B* при своем ходе знает, в каком информационном множестве он находится, но ему неизвестно, в какой именно позиции этого множества — левой или правой.

3.4. Совершенное равновесие в динамических играх

Теорема. Во всякой игре с полной информацией существует ситуация равновесия по Нэшу.

Доказательство. Для каждой вершины v дерева игры определим набор чисел $(h^1(v),h^2(v),\ldots,h^n(v))$ и для каждой нефинальной личной позиции v i-го игрока определим натуральное число $u^i(v)$ следующим образом.

Для всех финальных вершин дерева числа $(h^1(v),h^2(v),\ldots,h^n(v))$ уже определены. Далее действуем индуктивно.

Из множества вершин, в которых эти числа еще не определены, выбираем любую вершину v, расстояние от которой до начальной вершины максимально. Тогда для всех альтернатив $\{v,w_1\},\{v,w_2\},\ldots,\{v,w_m\}$ числа $(h^1(w_j),h^2(w_j),\ldots,h^n(w_j))$ уже определены. Если v – это позиция случая, в которой заданы вероятности $(p_1(v),p_2(v),\ldots,p_m(v))$ выбора альтернатив $\{v,w_1\},\{v,w_2\},\ldots,\{v,w_m\}$, то положим $h^i(v)=\sum_{j=1}^{m} p_j h^i(w_j)$. Если же v – личная позиция i-го игрока, то найдем j, для которого $h^i(w_j)=\max_{1\le l\le m} h^i(w_l)$, положим $u^i(v)=j$ и $h^k(v)=h^k(w_j)$ для всех $k=1,\ldots,n$.

За конечное число таких шагов числа $(h^1(v),h^2(v),\ldots,h^n(v))$ будут определены для всех вершин графа игры, а функция u^i будет определена для всех личных позиций i-го игрока.

Индукцией «с конца» доказывается, что $g^i(u)=g^i(u^1,\ldots,u^n)=h^i(v_0)$. Пусть теперь u_*^i – произвольная стратегия i-го игрока и $(v_0,v_1,\ldots,v_k)$ – порождаемая ситуацией $\left(u\|u_*^i\right)$ партия игры. Вновь индукцией «с конца» доказывается, что $h^i(v_k)\le h^i(v_l)$. Из неравенств $h^i(v_k)\le h^i(v_0)$ следует, что построенная ситуация u – ситуация равновесия. Теорема доказана.

Для всякой позиционной игры и любой вершины v ее дерева игры можно определить понятие подыгры с начальной вершиной v следующим образом.

Пусть v – произвольная вершина дерева игры и $V(v)$ – это множество всех вершин w, для которых существует такой набор $(v=v_1,v_2,\ldots,v_k=w)$, что для всех $j=1,\ldots,k–1$ $\{v_k,v_{k+1}\}$ есть альтернатива в вершине v_k. Очевидно, $V(v_0)=V$.

Дерево подыгры с вершиной v имеет множество вершин $V(v)$. Его ребрами являются все ребра исходной игры, обе вершины которой принадлежат $V(v)$. Разбиение по игрокам в подыгре есть $V^0\cap V(v),V^1\cap V(v),\ldots,V^n\cap V(v)$, а всякое информационное множество в подыгре имеет вид $V(v)\cap I$, где I – некоторое информационное множество в исходной игре. Выигрыши игроков $(h^1(w),h^2(w),\ldots,h^n(w))$ в любой финальной вершине w подыгры и вероятности $(p_1(w),\ldots,p_m(w))$ в любой позиции w случая в подыгре те же, что в исходной игре. Начальной позицией подыгры является вершина v, а отмеченным ребром – первая альтернатива в этой вершине, считая против часовой стрелки от ребра, не являющегося альтернативой.

Непосредственно проверяется, что так определенная подыгра сама является позиционной игрой n лиц.

Понятие подыгры особенно естественно для игр с полной информацией.

Если u^i – любая стратегия в исходной игре, то ограничение функции u^i на множество $V^i \cap V(v)$ будет стратегией того же игрока в подыгре.

Определение. Ситуация u в позиционной игре называется ситуацией совершенного равновесия, если для любой вершины v дерева игры ограничения стратегий u^i образуют ситуацию равновесия по Нэшу в подыгре с начальной вершиной v.

Из доказательства предыдущей теоремы легко усмотреть, что построенная там ситуация равновесия по Нэшу является ситуацией совершенного равновесия.

3.5. Равновесие по Нэшу в позиционных играх

Пример: существуют несовершенные равновесия по Нэшу. $1 \to \begin{cases} 2 \to \begin{cases} (1,2) \\ (0,0 \end{cases} \\ 2 \to \begin{cases} (2,1) \\ (0,0) \end{cases} \end{cases}$

Полное множество ситуаций равновесия по Нэшу в позиционной игре с полной информацией описывается конструкциями, приведенными ниже. Для простоты рассмотрим игры без случайных ходов (то есть игры, в которых $V^0=\varnothing$). В этом случае удобна следующая терминология.

Определение.Будем говорить, что в ситуации $(u^1,u^2,\ldots,u^n)$ реализуется партия $(v_0,v_1,\ldots,v_k)$, если для любого $l=1,\ldots,k-1$ пара $\{v_l,v_{l+1}\}$ есть $u^i(v_l)$-я альтернатива в позиции v_l, считая против часовой стрелки от ребра, инцидентного вершине v_l и не являющегося альтернативой в этой вершине[3] (здесь i – игрок, личной позицией которого является вершина v_j).

Рекуррентным образом определим максимальный гарантированный результат i–го игрока $L^i(v)$ в вершине v, его осторожную стратегию u_i^i и стратегии наказания i-го игрока u_i^j (для $j\neq i$). Если v – финальная вершина, положим $L^i(v)=h^i(v)$. Если v – личная позиция i-го игрока, и для всех альтернатив $\{v,w_1\},\{v,w_2\},\ldots,\{v,w_m\}$ в вершине v значения $L^i(w_l)$ уже определены, то найдем индекс l, для которого значение $L^i(w_l)$ максимально и положим $L^i(v)=L^i(w_l)$ и $u_i^i=l$. Если же v – личная позиция j-го ($j\neq i$) игрока, и для всех альтернатив $\{v,w_1\},\{v,w_2\},\ldots,\{v,w_m\}$ в вершине v значения $L^i(w_l)$ уже определены, то найдем индекс l, для которого значение $L^i(w_l)$ минимально и положим $L^i(v)=L^i(w_l)$ и $u_i^j=l$.

Теорема. Партия $(v_0,v_1,\ldots,v_k)$ реализуется в некоторой ситуации равновесия по Нэшу в позиционной игре с полной информацией тогда и только тогда, когда для всех $l=1,\ldots,k-1$ выполняются неравенства $h^i(v_k)\geq L^i(v_l)$, где i – это тот игрок, личной позицией которого является вершина v_l.

Доказательство. Докажем сначала необходимость. Допустим противное. Пусть $u=(u^1,u^2,\ldots,u^n)$ – ситуация равновесия, в которой реализуется партия $(v_0,v_1,\ldots,v_k)$, и найдется личная позиция iго игрока v_l, в которой выполняется неравенство $h^i(v_k)<L^i(v_l)$. Рассмотрим стратегию i-го игрока, определенную равенством $u_-^i(v)=\begin{cases} u^i(v), \text{ если } v\notin V(v_l), \\ u_i^i(v), \text{ если } v\notin V(v_l), \end{cases}$ для всех его личных позиций v. В ситуации $(u\|u_-^i)$ реализуется партия $(v_0,v_1,\ldots,v_l,w_{l+1},\ldots,w_m)$. В силу определения стратегии u_i^i i-ый игрок получит в ней выигрыш $h^i(w_m)\geq L^i(v_l)$, что больше, чем выигрыш $h^i(v_k)$ в ситуации u. Получено противоречие с тем, что u – ситуация равновесия, и тем самым необходимость доказана.

---

[3] или начиная с отмеченного ребра, если вершина v_l – начальная.

Докажем достаточность. Обозначим $\omega(v_l)$ – номер альтернативы $\{v_l,v_{l+1}\}$ в вершине v_l. Для любой вершины v дерева игры определен единственный путь $(w_0=v_0,w_1,\ldots,w_m=v)$, соединяющий ее с начальной вершиной. Пусть l – наибольший номер, при котором $v_l\in\{w_0,\ldots,w_m\}$ и j – тот игрок, для которого вершина v_l является личной позицией. Положим $q(v)=j$ (величины $q(v)$ определены для всех позиций игры, не принадлежащих партии $(v_0,v_1,\ldots,v_k)$). Рассмотрим стратегию u^i, определенную равенствами $u^i(v)=\begin{cases}\omega(v_l), \text{ если } v=v_l,\\ u^i_j(v), \text{ если } q(v)=j\end{cases}$ для всех личных позиций vi-го игрока. Так определенная ситуация $u=(u^1,u^2,\ldots,u^n)$ будет ситуацией равновесия, в которой реализуется партия $(v_0,v_1,\ldots,v_k)$.

То, что партия $(v_0,v_1,\ldots,v_k)$ действительно реализуется в построенной ситуации, устанавливается по индукции, исходя из определения стратегий $u^1,u^2,\ldots,u^n$.

Покажем, что ситуация u является ситуацией равновесия. Пусть u^i_- – произвольная стратегия i-го игрока и в ситуации $(u\|u^i_-)$ реализуется партия $(v_0,v_1,\ldots,v_l,w_{l+1},\ldots,w_m)$, в которой $w_{l+1}\neq v_{l+1}$. Тогда для всех $v\in V(v_{l+1})\cap V^j$ выполняются равенства $u^j(v)=u^i_j(v)$ и в силу определения стратегий u^j_i выигрыш $h^i(w_m)$ i-го игрока в ситуации $(u\|u^i_-)$ не может превышать величины $L^i(v_l)$, которая по условию не превосходит выигрыша $h^i(v_k)$ того же игрока в ситуации u. Теорема доказана.

3.6. *Многошаговые игры. Принцип максимума*

Лемма. Пусть $U_1,\dots,U_T,V_1,\dots,V_T$ – компактные множества, а $g:\prod_{t=1}^{T}U_t\times\prod_{t=1}^{T}V_t\to\mathbb{R}$ – непрерывная функция. Обозначим $\mathcal{U}_t$ множество всех функций $u_t:\prod_{\tau=1}^{t-1}V_\tau\to U_t$. Тогда

$$\max_{(u_1,u_2,\dots,u_T)\in\mathcal{U}_1\times\mathcal{U}_2\times\dots\times\mathcal{U}_T}\ \min_{(v_1,v_2,\dots,v_T)} g(u_1,u_2(v_1),\dots,u_t(v_1,\dots,v_{t-1}),\dots,u_T(v_1,\dots,v_{T-1}),v_1,\dots,v_T)=$$

$$=\max_{u_1}\min_{v_1}\max_{u_2}\dots\max_{u_T}\min_{v_T} g(u_1,\dots,u_T,v_1,\dots,v_T).$$

Доказательство. Очевидно

$$\max_{(u_1,u_2,\dots,u_T)\in\mathcal{U}_1\times\mathcal{U}_2\times\dots\times\mathcal{U}_T}\ \min_{(v_1,v_2,\dots,v_T)\in V_1\times V_2\times\dots\times V_T} g(u_1,u_2(v_1),\dots,u_t(v_1,\dots,v_{t-1}),\dots,u_T(v_1,\dots,v_{T-1}),v_1,\dots,v_T)=$$

$$=\max_{(u_1,u_2,\dots,u_{T-1})\in\mathcal{U}_1\times\mathcal{U}_2\times\dots\times\mathcal{U}_{T-1}}\ \max_{u_T\in\mathcal{U}_T}\ \min_{(v_1,v_2,\dots,v_{T-1})}\ \min_{v_T\in V_T} g(u_1,u_2(v_1),\dots,\widetilde{u_t(v_1},\dots,v_{t-1}),\dots,\widetilde{u_T(v_1},\dots,v_{T-1}),v_1,\dots,v_T).$$

В силу результатов предыдущей лекции

$$\max_{(u_1,u_2,\dots,u_{T-1})\in\mathcal{U}_1\times\mathcal{U}_2\times\dots\times\mathcal{U}_{T-1}}\ \max_{u_T\in\mathcal{U}_T}\ \min_{(v_1,v_2,\dots,v_{T-1})\in V_1\times V_2\times\dots\times V_{T-1}}\ \min_{v_T\in V_T} g(u_1,u_2(v_1),\dots,u_t(v_1,\dots,v_{t-1}),\dots,u_T(v_1,\dots,v_{T-1}),v_1,\dots,v_T)=$$

$$=\max_{(u_1,u_2,\dots,u_{T-1})\in\mathcal{U}_1\times\mathcal{U}_2\times\dots\times\mathcal{U}_{T-1}}\ \min_{(v_1,v_2,\dots,v_{T-1})}\ \max_{u_T\in U_T}\min_{v_T\in V_T} g(\widetilde{u_1,u_2(v_1}),\dots,\widetilde{u_t(v_1},\dots,v_{t-1}),\dots,\widetilde{u_T(v_1},\dots,v_{T-1}),v_1,\dots,v_T).$$

Повторяя те же рассуждения, получим нужный результат.

Лемма. Пусть $U_1,\dots,U_T,V_1,\dots,V_T$ – компактные множества, а $g:\prod_{t=1}^{T}U_t\times\prod_{t=1}^{T}V_t\to\mathbb{R}$ – непрерывная функция. Обозначим $\mathcal{U}_t$ множество всех функций $u_t:\prod_{\tau=1}^{t-1}V_\tau\to U_t$, $\mathcal{V}_t$ – множество всех функций $\tilde{v}_t:\prod_{\tau=1}^{t}U_\tau\to V_t$. Тогда

$$\max_{(u_1,u_2,\dots,u_T)\in\mathcal{U}_1\times\mathcal{U}_2\times\dots\times\mathcal{U}_T}\ \min_{(\tilde{v}_1,\tilde{v}_2,\dots,\tilde{v}_T)\in\mathcal{V}_1\times\mathcal{V}_2\times\dots\times\mathcal{V}_T} g(u_1,u_2(v_1),\dots,u_t(v_1,\dots,v_{t-1}),\dots,u_T(v_1,\dots,v_{T-1}),v_1,\dots,v_T)=$$

$$=\max_{u_1}\min_{v_1}\max_{u_2}\dots\max_{u_T}\min_{v_T} g(u_1,\dots,u_T,v_1,\dots,v_T).$$

Доказательство аналогично предыдущему

Лемма. Пусть $U_1,\dots,U_T,V_1,\dots,V_T$ – компактные множества, а $g:\prod_{t=1}^{T}U_t\times\prod_{t=1}^{T}V_t\to\mathbb{R}$ – непрерывная функция. Обозначим $\mathcal{U}_t$ множество всех функций $u_t:\prod_{\tau=1}^{t-1}V_\tau\to U_t$, и пусть $\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_T$ – вероятностные меры на $V_1,V_2,\dots,V_T$ соответственно. Тогда

$$\max_{(u_1,u_2,\dots,u_T)\in\mathcal{U}_1\times\mathcal{U}_2\times\dots\times\mathcal{U}_T}\ \int\limits_{V_1\times V_2\times\dots\times V_T} g(u_1,u_2(v_1),\dots,u_t(v_1,\dots,v_{t-1}),\dots$$

$$\dots,u_T(v_1,\dots,v_{T-1}),v_1,\dots,v_T)\,d\mu_1(v_1)\,d\mu_2(v_2)\dots d\mu_T(v_T)=$$

$$=\max_{u_1}\int\limits_{V_1}d\mu_1(v_1)\max_{u_2}\int\limits_{V_2}d\mu_2(v_2)\dots\max_{u_T}\int\limits_{V_T}d\mu_T(v_T)\,g(u_1,\dots,u_T,v_1,\dots,v_T).$$

Доказательство аналогично предыдущему.

Определение. Управляемой динамической системой называется набор $\left\langle x, X_0, X_1,..., X_{T+1}, U_0^1,...,U_0^n,...,U_T^1,...,U_T^n, f_0,..., f_T, h^1,...,h^n \right\rangle$, где X_t – множества, называемые фазовыми пространствами, $x \in X_0$ – начальная фазовая точка, U_t^i – множества управлений, $f_t : X_t \times \prod_{i=1}^{n} U_t^i$ – функции перехода, $h^i : X_{T+1} \to \mathbb{R}$ – терминальные критерии.

С каждой управляемой динамической системой можно связать несколько игр.

Определение. Игрой на классе программных стратегий, соответствующей управляемой динамической системе $\left\langle x, X_0, X_1,..., X_{T+1}, U_0^1,...,U_0^n,...,U_T^1,...,U_T^n, f_0,..., f_T, h^1,...,h^n \right\rangle$ называется набор $\Gamma = \langle N, U^1,\dots,U^n, g^1,\dots,g^n \rangle$, в котором $N=\{1,\dots,n\}$, $U^i = \prod_{t=0}^{T} U_t^i$, а значения функций $g^i : \prod_{i=1}^{n} U^i \to \mathbb{R}$ вычисляются с помощью рекуррентных соотношений

$$x_0 = x,$$
$$x_{t+1} = f_t(x_t, u_t^1,...,u_t^n),\ t=0,\dots,T,$$
$$g^i(u^1,\dots,u^n) = h^i(x_{T+1}),\ i=1,\dots,n$$

(здесь $u^i = (u_0^i,...,u_T^i)$).

Определение. Игрой на классе позиционных стратегий, соответствующей управляемой динамической системе $\left\langle x, X_0, X_1,..., X_{T+1}, U_0^1,...,U_0^n,...,U_T^1,...,U_T^n, f_0,..., f_T, h^1,...,h^n \right\rangle$ называется набор ${}_*\Gamma = \langle N, {}_*U^1,\dots,{}_*U^n, {}_*g^1,\dots,{}_*g^n \rangle$, в котором $N=\{1,\dots,n\}$, ${}_*U^i = \prod_{t=0}^{T} \Phi(X_t, U_t^i)$, а значения функций ${}_*g^i : \prod_{i=1}^{n} {}_*U^i \to \mathbb{R}$ вычисляются с помощью рекуррентных соотношений

$$x_0 = x,$$
$$u_t^i = {}_*u_t^i(x_t),\ t=0,\dots,T,$$
$$x_{t+1} = f_t(x_t, u_t^1,...,u_t^n),\ t=0,\dots,T,$$
$$g^i(u^1,\dots,u^n) = h^i(x_{T+1}),\ i=1,\dots,n$$

(здесь ${}_*u^i = ({}_*u_0^i,..., {}_*u_T^i)$).

Справедлива

Лемма. Игра на классе позиционных стратегий является квазиинформационным расширением игры на классе программных стратегий, соответствующей той же управляемой динамической системе.

Доказательство. Значения проекции $\pi({}_*u^1,..., {}_*u^n) = (u^1,...,u^n)$ определяются рекуррентными соотношениями

$$x_0 = x,$$

$$u_t^i = {}_*u_t^i(x_t),\ t=0,\dots,T,$$
$$x_{t+1} = f_t(x_t, u_t^1, ..., u_t^n),\ t=0,\dots,T.$$
Вложения c^i определяются стандартным образом, после чего аксиомы квазиинформационного расширения проверяются по индукции.

Использовать специфику игр на классе программных стратегий в общем случае не удается. Для игр на классе позиционных стратегий решение многих задач упрощается. Например, рассмотрим антагонистическую игру ${}_*\Gamma=\{1,2\},{}_*U^1,{}_*U^2,{}_*g^1,g^2=-{}_*g^1>$ на классе позиционных стратегий, соответствующую динамической управляемой системе $\left\langle x, X_0, X_1, ..., X_{T+1}, U_0^1, U_0^2, ..., U_T^1, U_T^2, f_0, ..., f_T, h^1, h^2 = -h^1 \right\rangle$. Справедлива

Теорема. Пусть множества X_t и U_t^i компактны, а функции f_t и g^i непрерывны. Тогда максимальный гарантированный результат первого игрока $L = \max\limits_{{}_*u^1 \in {}_*U^1} \min\limits_{{}_*u^2 \in {}_*U^2} g^1({}_*u^1, {}_*u^2)$ может быть вычислен с помощью рекуррентных формул
$$L_{T+1}(x_{T+1}) = g^1(x_{T+1}),$$
$$L_t(x_t) = \max_{u_t^1 \in U_t^1} \min_{u_t^2 \in U_t^2} L_{t+1}(f_t(x_t, u_t^1, u_t^2)),\ t=T,T-1,\dots,0,$$
$$L=L_0(x).$$
Доказательство проводится индукцией «с конца».

Если множества U_t^i конечны, то соответствующие игры на классах программных и позиционных стратегий легко могут быть представлены как позиционные игры. Наличие этой связи позволяет, например, легко перенести на случай игр двух лиц на классе позиционных стратегий последнюю теорему из предыдущего раздела.

- Проклятие размерности

Принцип максимума

Пусть в динамической системе
$$\left\langle x, X_0, X_1, ..., X_{T+1}, U_0^1, U_0^2, ..., U_T^1, U_T^2, f_0, ..., f_T, h^1, h^2 = -h^1 \right\rangle$$
множества $X_0, X_1, ..., X_{T+1}, U_0^1, U_0^2, ..., U_T^1, U_T^2$ есть подмножества каких-то линейных пространств, а функции $f_0, ..., f_T, h^1$ линейны, то есть $f_t(x_t, u_t^1, ..., u_t^n) = A_t x_t + B_t u_t^1 + C_t u_t^2$, $h^1(x_{T+1})=ex_{T+1}$, где A_t,B_t,C_t – некоторые матрицы, а e – вектор подходящей размерности.

Определим векторы
$$p_{T+1}=e,$$
$$p_t=p_{t+1}A_t,\ t=T,T-1,\dots,0.$$
Теорема. В игре на классе программных стратегий, соответствующей линейной динамической управляемой системе, существует седловая точка, которая определяется условиями $u_t^1 = \arg\max\limits_{w_t^1 \in U_t^1} p_{t+1} B_t w_t^1$, $u_t^2 = \arg\min\limits_{w_t^2 \in U_t^2} p_{t+1} C_t w_t^2$ для всех $t=0,\dots,T$.

Доказательство. Непосредственные вычисления показывают, что

$$g^1(u^1,u^2) = p_0 x + \sum_{t=0}^{T} p_{t+1} B_t u_t^1 + \sum_{t=0}^{T} p_{t+1} C_t u_t^2 \ ,$$

откуда немедленно следует нужный результат.

3.7. Модель управления портфелем ГКО

В качестве примера использования идей динамического программирования рассмотрим модель управления портфелем государственных краткосрочных облигаций (ГКО). Эта модель строилась в 1993 г. В интересах коммерческого банка, выступающего рынке государственных облигаций в роли инвестора.

ГКО являются дисконтными облигациями. Это означает, что эмитент, выпуская их в обращение, обязуется в определенный день выкупить их у владельца по заранее оговоренной цене (номиналу). Прибыль инвестора получается за счет разницы цены покупки или продажи. Каждый инвестор может в любой рабочий день между днем первичного размещения облигаций и днем погашения купить или продать облигации по сложившейся на рынке цене. При этом ему придется заплатить комиссионные в размере kx, где k – ставка комиссионных, а x – сумма сделки.

Одновременно на рынке обращаются облигации разных выпусков, отличающиеся сроками погашения. Соответственно встает задача о распределении инвестируемых средств между этими выпусками с тем, чтобы максимизировать прибыль.

Введем обозначения. Пусть инвестируется сумма денег на фиксированный срок от t=0 до $t=T$. Выпуски ГКО обозначим числами i, изменяющимися от 1 до n. Для упрощения формул как один извы пусков ГКО будем рассматривать деньги, присвоив им номер 0. Количество облигаций i-го выпуска, находящихся в портфеле инвестора в в конце торговой сессии в день t обозначим x_t^i.

Сделаем следующие предположения.

Гипотеза 1. За рассматриваемый период список облигаций, находящихся в обращении не изменяется.

Гипотеза 2. На весь период инвестирования задан прогноз изменения цен, так что цена облигаций i-го выпуска в день t считается равной p_t^i (разумеется, цена денег в любой момент равна 1).

Гипотеза 3. Действия рассматриваемого инвестора не влияют на динамику цен.

Гипотеза 4. Все сделки в данный день производятся по одной и той же цене.

Гипотеза 5. Портфель инвестора достаточно велик, поэтому можно пренебречь эффектами, связанными с целочисленностью количеств облигаций.

Гипотеза 6. Целью управления портфелем является максимизация стоимости портфеля в конечный момент времени $\sum_{i=0}^{n} p_T^i x_T^i$.

Гипотеза 7. Единственным ограничением при переформировании портфеля во время торговой сессии является баланс находящихся в распоряжении инвестора средств: $\sum_{i=0}^{n} p_t^i x_{t-1}^i = \sum_{i=0}^{n} p_t^i x_t^i + \sum_{i=1}^{n} k p_t^i \left| x_t^i - x_{t-1}^i \right|$.

Правомерность использования этих гипотез удобно будет обсудить несколько позже. А пока приступим к поиску оптимальной стратегии оперирующей стороны.

Начнем с рассмотрения случая, когда величиной комиссионных можно пренебречь (то есть положить k=0). Тогда стандартной индукцией с конца легко устанавливается, что в день t все имеющиеся в распоряжении средства инвестор должен вкладывать в бумаги i-го выпуска, где число i определяется условием $\frac{p_{t+1}^i}{p_t^i} = \max_{1 \le j \le n} \frac{p_{t+1}^j}{p_t^j}$ (если таких выпусков несколько, то оптимальным является любое распределение средств между этими выпусками).

Отсюда получаются следующие качественные выводы.

1. Если прогноз фиксирован, то оптимальная стратегия не зависит от предыстории. (Разумеется, динамика цен в прошлом может использоваться при построении прогноза, но в силу гипотезы 3 на него не влияют действия рассматриваемого инвестора).
2. Оптимальная стратегия не зависит от срока инвестирования средств.
3. Для принятия решения в момент времени t нужен прогноз только на следующий день (и не нужен прогноз на более длительный срок).
4. Для принятия решений можно пользоваться реальными ценами сегодняшней сессии, и использовать прогноз только на завтра.
5. Все средства можно вкладывать в облигации только одного выпуска, цена которого растет наиболее динамично.

Вернемся к рассмотрению общего случая.

Рекуррентным образом определим величины q_t^j, t=0,1,…,T, j=0,1,…,n. Положим $q_T^j = p_T^j$, $q_t^j = \max\left\{\max_{0 \le l \le n} \frac{1-k}{1+k} \cdot \frac{q_{t+1}^l}{p_t^l}, \frac{q_{t+1}^j}{p_t^j}\right\}$ для j>0 и $q_t^0 = \max\left\{\max_{0 \le l \le n} \frac{1}{1+k} \cdot \frac{q_{t+1}^l}{p_t^l}, \frac{q_{t+1}^0}{p_t^0}\right\}$.

Стандартной индукцией «с конца» проверяется, что оптимальные действия в момент времени t состоят в следующем. Если $\max_{0 \le l \le n} \frac{1-k}{1+k} \cdot \frac{q_{t+1}^l}{p_t^l} \le \frac{q_{t+1}^j}{p_t^j}$, то с облигациями j-го выпуска никаких операций производить не следует. В противном случае все их нужно продать, а вырученные средства вложить в тот выпуск i, для которого $\frac{1-k}{1+k} \cdot \frac{q_{t+1}^i}{p_t^i} = \max_{0 \le l \le n} \frac{1-k}{1+k} \cdot \frac{q_{t+1}^l}{p_t^l}$.

Несложный анализ найденного решения показывает, что выводы 1 и 4 остаются неизменными.

Вывод 5 несколько изменяется. Если в начальный момент времени портфель был диверсифицирован, то при не очень разбалансированном рынке диверсификация оптимального портфеля будет сохраняться, но все-таки будет тенденция к тому, что все средства, в конце концов, сосредоточатся в облигациях одного выпуска.

Выводы 2 и 3 изменятся следующим образом. Пусть номер i удовлетворяет условию $\frac{1-k}{1+k}\cdot\frac{q_{t+1}^i}{p_t^i}=\max\limits_{0\le l\le n}\frac{1-k}{1+k}\cdot\frac{q_{t+1}^l}{p_t^l}$ и пусть найдется такой момент времени $\tau(t<\tau<T)$, что $\frac{q_{\tau+1}^i}{p_\tau^i}\le\max\limits_{0\le l\le n}\frac{1-k}{1+k}\cdot\frac{q_{\tau+1}^l}{p_\tau^l}$. Тогда действия в момент времени t зависят только от прогноза до момента времени τ и не зависят от срока инвестирования T, если только $T>\tau$.

Эти выводы особенно важны, поскольку, с одной стороны, наличие очень «длинного» прогноза является слишком сильным предположением. А с другой стороны, во многих интересных случаях срок инвестиций заранее не известен, хотя и не очень короток. По реальным наблюдениям срок $\tau-t$ обычно составлял порядка двух недель. Это почти полностью оправдывает принятие гипотезы 6, и позволяет значительно ослабить гипотезу 2.

Обсудим остальные предположения.

От гипотезы 1 можно избавиться чисто формальным трюком. Будем считать, что все облигации, которые находились в обращении в течение рассматриваемого периода, находились в обращении на протяжении всего этого периода. Но цена облигаций после погашения не меняется и равна цене в день погашения. А цена облигаций до момента их фактического выпуска в обращения постоянна и равна цене в день их выпуска. Тогда вложения в такие «фиктивные» бумаги столь же хороши, как вложения в «наличные», что позволяет в случае нужды скорректировать найденное оптимальное решение, не ухудшив его.

Рассматриваемый инвестор контролировал менее одного процента объема рынка, поэтому гипотеза 3 весьма правдоподобна. Тем более, что вывод 4 позволяет рассматривать только влияние сегодняшних действий инвестора на цены завтра и в последующие дни. Заметить такое влияние в реальности ни разу не удалось.

К гипотезе 4 можно сформулировать два возражения. Во-первых, цена покупки может отличаться от цены продажи. На практике в момент написания модели характерные спрэды были невелики. Кроме того, имея прогноз величины спрэда[4] его можно учесть, не меняя структуры модели, а просто увеличив на соответствующую величину размер комиссионных k. Во-вторых, цены могут меняться в течение торговой сессии. Это возражение отчасти снимается выводом 4, а отчасти тем, что в нормальной ситуации колебания цен в течение одного дня бывали невелики по сравнению с доступной точностью построения прогноза.

Количество облигаций в портфеле рассматриваемого инвестора измерялось тысячами (подчас многими), поэтому гипотеза 5 вполне приемлема.

Гипотеза 7 оправдывается существующими правилами обращения облигаций.

---

[4] О построении такого прогноза говорилось в одной из предыдущих лекций.

Таким образом, наиболее существенным является ослабленный вариант гипотезы 2. Это предположение действительно важно. В частности, от него зависит важный вывод 5.

Построенная модель, с одной стороны, показывает целесообразность декомпозиции задачи управления портфелем на две части: задачу построения прогноза и задачу принятия оперативных решений. А с другой стороны демонстрирует тот факт, что эти задачи не являются независимыми, и требования к построенному прогнозу определяются процедурой принятия решений.

Чтобы понять это, рассмотрим модельный пример. Пусть имеются облигации всего двух выпусков, текущие цены которых равны 70 и 80. Срок инвестирования составляет один день, и имеется два прогноза цен на завтра. Согласно первому цены будут раны 80 и 90 соответственно, а согласно второму – 50 и 70. Пусть фактические завтрашние цены оказались равны 77 и 90. Какой из прогнозов лучше? Как ни странно, второй. Согласно ему средства следует инвестировать в облигации второго выпуска, что обеспечивает доходность 13,7%. А если пользоваться первым прогнозом, то следует инвестировать средства в облигации первого выпуска, что в реальности принесет всего 10% прибыли.

В выяснении подобных качественных особенностей рассматриваемой проблемы и заключалась основная цель построения данной, сугубо предварительной модели.