

Предел, непрерывность, ряды

```
import math
from sympy import Symbol, limit, oo, sin, sqrt, solve, factorial,
symbols, cos, exp, asin, atan, diff, solve, pi
import numpy as np
```

Пример 1

```
x = Symbol("x")
print(limit((6*x**2+3*x)/(3*x**2),x,oo))
```

2

Пример 2

```
print(limit(sin(x)/x,x,0))
```

1

```
print(limit((1+x)**(1/x),x,0))
```

E

```
print(limit((1+1/x)**x,x,oo))
```

E

Односторонние пределы

```
print(limit(1/x,x,0,'-'))
```

-oo

Пример 3

```
print(limit((2**x-1)/(x**2-3*x),x,3,'+'))
```

oo

```
print(limit((2**x-1)/(x**2-3*x),x,3,'-'))
```

-oo

Пример 4

```
print(limit((5**x-5*7**x)/(4*5**x-3*7**x),x,oo))
```

5/3

```
print(limit((7*8**x+2*9**x)/(6*8**x-6*9**x),x,-oo))
```

7/6

```
print(limit (sqrt(x*(x+3))-sqrt( x**2+9), x,-oo))
```

-3/2

Пример 5

```
print(solve(x**3-9*x**2+14*x))
```

[0, 2, 7]

```
print(limit(abs((x-2)*(x-7)/(x**3-9*x**2+14*x)),x,0,'-'))
print(limit(abs((x-2)*(x-7)/(x**3-9*x**2+14*x)),x,0,'+' ))
```

00

00

```
print(limit(abs((x-2)*(x-7)/(x**3-9*x**2+14*x)),x,2,'-'))
print(limit(abs((x-2)*(x-7)/(x**3-9*x**2+14*x)),x,2,'+' ))
```

1/2

1/2

```
print(limit(abs((x-2)*(x-7)/(x**3-9*x**2+14*x)),x,7,'-'))
print(limit(abs((x-2)*(x-7)/(x**3-9*x**2+14*x)),x,7,'+' ))
```

1/7

1/7

Пример 6

```
k = limit((1+5*x)/(3+x)/x,x,oo)
```

```
print(k)
```

0

```
b = limit((1+5*x)/(3+x)-k*x,x,oo)
```

```
print(b)
```

5

```
print(solve(3+x))
```

[-3]

```
print(limit((1+5*x)/(3+x),x,-3,'-'))
```

00

```
print(limit((1+5*x)/(3+x),x,-3,'+' ))
```

-00

Ряды. Пример 7

```
x=symbols('x')
```

```
limit(1/factorial(x)/(1/factorial(x+1)),x,oo)
```

00

Пример 8

```
x=Symbol('x')
print(limit(x**x/factorial(x)/((x+1)**(x+1)/factorial(x+1)),x,oo))
exp(-1)
```

Пример 9

```
x = symbols('x')
func = sin(x)
x0 = 0
print((func).series(x, x0, 10))

x - x**3/6 + x**5/120 - x**7/5040 + x**9/362880 + 0(x**10)

func = cos(x)
x0 = 0
print((func).series(x, x0, 10))

1 - x**2/2 + x**4/24 - x**6/720 + x**8/40320 + 0(x**10)

func = exp(x)
x0 = 0
print((func).series(x, x0, 10))

1 + x + x**2/2 + x**3/6 + x**4/24 + x**5/120 + x**6/720 + x**7/5040 +
x**8/40320 + x**9/362880 + 0(x**10)

func = asin(x)
x0 = 0
print((func).series(x, x0, 10))

x + x**3/6 + 3*x**5/40 + 5*x**7/112 + 35*x**9/1152 + 0(x**10)
```

Примеры решения задач

Вычислить предел последовательности $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 3n}{-5n^3 + 4n^2 + 9}$

```
n = symbols('n')
print(limit((n**2-3*n)/(-5*n**3+4*n**2+9),n,oo))
0
```

Вычислить предел последовательности $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{25n^2 + 3n - 2} - \sqrt{16n^2 + n + 4}}{3n + 2}$

```
print(limit((sqrt(25*n**2+3*n-2)-sqrt(16*n**2+n+4))/(3*n+2),n,oo))
1/3
```

Вычислить предел последовательности $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{n}\right)^{-8n}$

```
print(limit((1-3/n)**(-8*n),n,oo))
```

exp(24)

Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-5x^2 - 8x - 4}{2x^2 - x - 2}$

```
x = symbols('x')
print(limit((-5*x**2-8*x-4)/(2*x**2-x-2),x,oo))
```

-5/2

Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2+5}) \arctan(3x^4-1)$

```
print(limit((sqrt(x**2+1)-sqrt(x**2+5))*atan(3*x**4-1),x,oo))
```

0

Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6\sin^2 9x}{\cos 4x - 1}$

```
print(limit(6*sin(9*x)**2/(cos(4*x)-1),x,0))
```

-243/4

Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{9\left(1 - x^{\frac{1}{7}}\right)}{x^{\frac{1}{8}} - 1}$

```
print(limit(9*(1-x**(1/7))/(x**(1/8)-1), x,1))
```

-10.2857142857143

Решение собственной задачи с использованием пределов

Допустим, мы хотим определить непрерывность следующей функции при $x = \frac{\pi}{2}$:

$$f(x) = \frac{(x \sin(3x))}{(2-x)}.$$

Чтобы определить непрерывность этой функции при $x = \frac{\pi}{2}$, нам нужно выполнить три условия:

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ должна быть определена (т.е. знаменатель не может быть равен 0).

Левосторонний предел $f(x)$ при приближении x к $\frac{\pi}{2}$ должен существовать

и быть конечным. Правый предел $f(x)$ при приближении x к $\frac{\pi}{2}$ должен существовать и быть конечным. Если все три условия выполнены, то функция непрерывна при $x = \frac{\pi}{2}$.

```
import sympy as sp
import math
import matplotlib.pyplot as plt
import warnings
warnings.filterwarnings('ignore')
%matplotlib inline
```

Описание функции

```
x = sp.symbols('x')
f = (x*sp.sin(3*x))/(2-x)
f
```

```
x*sin(3*x)/(2 - x)
```

Далее мы можем оценить каждое из трех условий с помощью функции `sp.limit()`:

```
f_pi_2 = f.subs(x, sp.pi/2)
if math.isfinite(f_pi_2):
    print("Условие 1: функция f(pi/2) определена.")
```

Условие 1: функция $f(\pi/2)$ определена.

```
f_left = sp.limit(f, x, sp.pi/2, dir='-')
if math.isfinite(f_left):
    print("Условие 2: левосторонний предел функции f(x) при
приближении x к pi/2 существует и конечен.")
    x_vals = np.linspace(1, 2, 100)
    y_vals = [(x**3 - x)/(x - 1) for x in x_vals]
    plt.plot(x_vals, y_vals, label='f(x)')
    plt.axvline(x=2, linestyle='--', color='gray')
    plt.axhline(y=f_left, linestyle='--', color='red',
label='Левосторонний предел')
    plt.legend()
    plt.show()
```

Условие 2: левосторонний предел функции $f(x)$ при приближении x к $\pi/2$ существует и конечен.



```
f_right = sp.limit(f, x, sp.pi/2, dir='+')
if math.isfinite(f_right):
    print("Условие 3: Правосторонний предел функции f(x) при
приближении x к pi/2 существует и конечен.")
    x_vals = np.linspace(2, 3, 100)
    y_vals = [(x**3 - x)/(x - 1) for x in x_vals]
    plt.plot(x_vals, y_vals, label='f(x)')
    plt.axvline(x=2, linestyle='--', color='gray')
    plt.axhline(y=f_right, linestyle='--', color='blue',
label='Правосторонний предел')
    plt.legend()
    plt.show()
```

Условие 3: Правосторонний предел функции $f(x)$ при приближении x к $\pi/2$ существует и конечен.

