

# Интегралы

```
In [1]: from sympy import *  
from scipy.integrate import quad
```

## Пример 1

```
In [2]: x = Symbol('x')  
dx = Symbol('dx')  
a = diff( atan(1/x), x)  
print( dx*a )
```

$-dx/(x^2(1 + x^{(-2)}))$

```
In [3]: x = Symbol('x')  
dx = Symbol('dx')  
y = Symbol('y')  
xx = diff(sqrt(1+(sin(x))**2), x)  
y = print( xx*dx )
```

$dx \cdot \sin(x) \cdot \cos(x) / \sqrt{\sin(x)^2 + 1}$

## Пример 2

```
In [4]: x = symbols('x')  
y = integrate(6*x**5, x)  
print(y)
```

$x^6$

## Пример 3

```
In [5]: x = symbols('x')  
y = integrate(x/(x+2), x)  
print(y)
```

$x - 2 \cdot \log(x + 2)$

## Пример 4

```
In [6]: integrate(1/(x**2+1)**2)
```

Out[6]:  $\frac{x}{2x^2 + 2} + \frac{\operatorname{atan}(x)}{2}$

## Пример 5

```
In [7]: integrate(x*exp(2*x), x)
```

Out[7]:  $\frac{(2x - 1)e^{2x}}{4}$

## Пример 6

In [8]: `integrate(sqrt(x+4)/x)`

Out[8]: 
$$\begin{cases} 2\sqrt{x+4} - 4 \operatorname{acoth}\left(\frac{\sqrt{x+4}}{2}\right) & \text{for } \frac{|x+4|}{4} > 1 \\ 2\sqrt{x+4} - 4 \operatorname{atanh}\left(\frac{\sqrt{x+4}}{2}\right) & \text{otherwise} \end{cases}$$

## Пример 7

In [9]: `integrate(6*x**5, (x,0,4))`

Out[9]: 4096

## Пример 8

In [10]: `integrate(x/(x+2), (x,1,3))`

Out[10]:  $-2 \log(5) + 2 + 2 \log(3)$

## Пример 9

In [11]: `integrate(1/(x**2 + 1)**2, (x, -1, 1) )`

Out[11]:  $\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}$

## Пример 10

In [12]: `integrate(x*exp(2*x), (x,0,100))`

Out[12]:  $\frac{1}{4} + \frac{199e^{200}}{4}$

## Пример 11

In [13]: `integrate(sqrt(x+4), (x, -1, 0))`

Out[13]:  $\frac{16}{3} - 2\sqrt{3}$

## Пример 12

In [14]: `integrate(x**(-4), (x, 1, oo))`

Out[14]:  $\frac{1}{3}$

## Пример 13

```
In [15]: integrate(exp(-2*x), (x, -1, oo))
```

Out[15]:  $\frac{e^2}{2}$

## Пример 14

```
In [16]: integrate(log(x), (x, 0, 1))
```

Out[16]:  $-1$

## Пример 15

```
In [17]: integrate(1/x**(6/7), (x, 0, 7))
```

Out[17]: 9.24328473429286

## Пример 16

```
In [18]: y = symbols('y')
integrate(y**2*x-2*x*y, (y, x, 2))
```

Out[18]:  $-\frac{x^4}{3} + x^3 - \frac{4x}{3}$

```
In [19]: integrate(-x**4/3 + x**3 - 4*x/3, (x, -1, 2))
```

Out[19]:  $-\frac{9}{20}$

## Пример 17

```
In [20]: integrate(-x**2+7*x-6-2*x, (x, 2, 3))
```

Out[20]:  $\frac{1}{6}$

## Пример 18

```
In [21]: integrate(-x**2+5*x-10+2*x, (x, 2, 5))
```

Out[21]:  $\frac{9}{2}$

## Пример 19

In [22]: `integrate(-x**2+3*x-6+2*x,(x,2,3))`

Out[22]:  $\frac{1}{6}$

## Пример 20

In [23]: `pi*integrate((x**2-x)**2,(x,2,4))`

Out[23]:  $\frac{1456\pi}{15}$

## Пример 21

In [24]: `pi*integrate(((sqrt(3-x)) **2-(-x-53)**2),(x,-61,-53))`

Out[24]:  $\frac{928\pi}{3}$

## Пример 22

In [25]: `integrate(sqrt(1+diff(x**2)**2),(x,1,2))`

Out[25]:  $-\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{\operatorname{asinh}(2)}{4} + \frac{\operatorname{asinh}(4)}{4} + \sqrt{17}$

## Пример 23

In [26]: `integrate(sqrt(1+diff(pow(x,3/2))**2),(x,0,1))`

Out[26]: 1.43970987337155

## Пример 24

In [27]: `integrate(6*x**6-230,x)`

Out[27]:  $\frac{6x^7}{7} - 230x$

## Пример 25

In [28]: `integrate(18*x**5+20*x**4+17*x**3,x)`

Out[28]:  $3x^6 + 4x^5 + \frac{17x^4}{4}$

## Пример 26

In [29]: `integrate(exp(7.8*x),x)`

Out[29]:  $0.128205128205128e^{7.8x}$

## Пример 27

In [30]: `integrate(8+4*sin(pi/4*(x+7)),(x,0,24))`

Out[30]: 192

## Пример 28

In [31]: `integrate((1+x)*exp(2*x),(x,0,6))`

Out[31]:  $-\frac{1}{4} + \frac{13e^{12}}{4}$

## Примеры решения задач

Найдите неопределённый интеграл  $\int 6\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) dx$

In [32]: `integrate(6*sin(x/2)**2,x)`

Out[32]:  $3x - 6\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)$

Вычислите интеграл  $\int (4x + 3)^2 dx$

In [33]: `integrate((4*x+3)**2,x)`

Out[33]:  $\frac{16x^3}{3} + 12x^2 + 9x$

Найдите неопределённый интеграл  $\int \frac{dx}{-x^2-8x-12}$

In [34]: `integrate(1/((-x**2-8*x-12)),x)`

Out[34]:  $-\frac{\log(x+2)}{4} + \frac{\log(x+6)}{4}$

Найдите неопределённый интеграл  $\int tg2x dx$

In [35]: `integrate(tan(2*x),x)`

Out[35]:  $-\frac{\log(\cos(2x))}{2}$

Найдите определённый интеграл  $\int_2^3 x(28 - 3x^2)^{\frac{1}{5}} dx$

In [36]: `integrate(x*(28-3*x**2)**(1/5),(x,2,3))`

Out[36]: 
$$\int_2^3 \begin{cases} -0.9999999999999999x(3x^2 - 28)^{0.2} e^{1.2i\pi} & \text{for } \frac{3x^2}{28} > 1 \\ 0.9999999999999999x(28 - 3x^2)^{0.2} & \text{otherwise} \end{cases} dx$$

Найдите определённый интеграл  $\int_{10^{-7}}^1 \frac{\lg x}{x} dx$

In [37]: `integrate(log(x,10)/x,(x,10**(-7),1))`

Out[37]: 
$$-\frac{129.896503706721}{\log(10)}$$

Найдите несобственный интеграл или установите его расходимость  $\int_{-30}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+10x+50}$

In [38]: `integrate(1/(x**2+10*x+50),(x,-30,oo))`

Out[38]: 
$$\frac{\operatorname{atan}(5)}{5} + \frac{\pi}{10}$$

Найти площадь фигуры, ограниченной линиями  $y = 5x$ ,  $y = 3x^2 - 9x + 15$ .

In [39]: `solve(5*x-(3*x**2-9*x+15),x)`

Out[39]: `[5/3, 3]`

In [40]: `abs(integrate(5*x-(3*x**2-9*x+15),(x,5/3,3)))`

Out[40]: `1.18518518518518`

Вычислить кратный интеграл  $\iint (3y^2x + 7xy) dx dy$  по области  $D = (x, y) \in R - 3 \leq x \leq -2, -x \leq y \leq 2$ .

In [41]: `x, y = symbols("x y")  
f = (3*y**2*x+7*x*y)  
integrate(f, (y, -x, 2), (x, -3, -2))`

Out[41]: 
$$\frac{1763}{40}$$

## Решение собственной задачи с использованием интегралов

Предположим, мы хотим вычислить среднюю температуру в комнате за определенный период времени, учитывая температуру в каждый момент времени. Мы можем приблизительно определить это значение, вычислив определенный интеграл функции температуры за этот период времени и разделив его на длину временного интервала.

Мы можем определить функцию  $temperature(t)$ , которая возвращает температуру в момент времени  $t$ , используя линейную интерполяцию между значениями в списке *temps*:

In [42]: `def temperature(t):  
 if t <= a:`

```

    return temps[0]
elif t >= b:
    return temps[-1]
else:
    i = int((t-a)/(b-a)*(len(temps)-1))
    t1 = a + i*(b-a)/(len(temps)-1)
    t2 = a + (i+1)*(b-a)/(len(temps)-1)
    temp1 = temps[i]
    temp2 = temps[i+1]
    return temp1 + (temp2 - temp1)/(t2 - t1)*(t - t1)

```

Предположим, что у нас есть список температур в каждый момент времени  $t$  на интервале  $[a, b]$ :

```

In [43]: temps = [20, 21, 22, 23, 22, 21, 20, 19, 18, 17, 16, 15, 14, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31]
a = 0
b = 31

```

Теперь мы можем использовать функцию *quad* из модуля *scipy.integrate* для вычисления определенного интеграла функции температуры по интервалу  $[a, b]$ :

```

In [44]: avg_temp, _ = quad(temperature, a, b)
avg_temp /= (b - a)
print(f"Средняя температура за интервал времени [{a}, {b}]: {avg_temp:.2f} градусов Цельсия."

```

Средняя температура за интервал времени  $[0, 31]$ : 17.48 градусов Цельсия.