ALGÈBRE LINÉAIRE

(quatre semaines)

Table des matières

Motivation

Quand on stocke des données en mémoire dans un programme informatique, on utilise fréquemment une liste de nombres réels. Cette liste est en fait un vecteur de $\mathbb{R}^n$ où n est la longueur de la liste. De même, un signal peut être vue comme une fonction réelle dépendante du temps, qui est alors un vecteur de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Dans tous ces cas, il faut savoir raisonner avec les vecteurs proprement dits et ne pas se limiter aux valeurs de leurs composantes prises isolément. Or les vecteurs qu'on rencontre dans la vie ne se limitent pas à ceux de $\mathbb{R}^2$ ou de $\mathbb{R}^3$.

Citons quelques applications :

— En analyse de données, on dispose d'un grand nombre d'observation d'un vecteur aléatoire. On peut par exemple sonder des individus sur leurs revenus, leurs loyers, leurs dépenses alimentaires, leurs états de santé, etc. On obtient alors, pour chaque individu, un vecteur constitué de toutes les variables mesurées, donc un vecteur de $\mathbb{R}^n$ où la dimension n est bien souvent plus grande que 3. De même, l'ensemble de toutes ces données peut être représenté comme une matrice, chaque colonne correspondant à un individu sondé.

— En traitement du signal, un vecteur est une fonction réelle. S'il est échantillonné, on pourra se ramener à $\mathbb{R}^n$, mais alors on perd une partie de l'information qu'il contient. Il est parfois possible de projeter ce signal dans un sous-espace de dimension finie. Encore faut-il choisir ce sous-espace et comprendre quelle part de l'information est conservée, quelle part est perdue.

Dans tous ces cas, on est amenés à considérer des espaces de dimensions largement supérieures à 3.

Pourtant, une première compréhension de l'algèbre linéaire passe par des représentations géométriques dans l'espace physique, en dimension 2 ou 3. Ce mode de pensée est nécessaire, c'est par lui qu'on se fait des intuitions qui demeurent souvent valables en dimensions supérieures. Mais pour passer à des dimensions supérieures, il faut se construire des certitudes sur ce qu'on peut généraliser aux cas $n > 3$ et sur la bonne façon de le faire. Cela nécessite un certain formalisme.

Au cours du semestre précédent, nous avons commencé à utiliser ces deux approches de manière conjointe. Nous continuerons et approfondirons cette démarche ce semestre-ci : le but est d'associer des situations géométriques à des raisonnements formels pouvant s'étendre à de grandes dimensions.

Un accent particulier sera mis sur la notion de base d'un espace vectoriel. Une question apparemment inextricable peut devenir extrêmement simple si on représente les vecteurs dans une base adéquate. Nous en verrons plusieurs exemples.

Attendus

Les AAV et compétences détaillées que nous évaluerons sont :

Familles de vecteurs et bases

— Tester si une famille de vecteurs est une base ou non ;
— Transformer une familles de vecteurs pour obtenir une base ;
— Trouver les coordonnées d'un vecteur dans une base donnée, par exemple à l'aide de la matrice de passage ;
— Naviguer entre les représentations d'un vecteur dans différentes bases.

Applications linéaires

— Déterminer la matrice d'une application linéaire dans différentes bases ;
— Lire la matrice d'une application linéaire, y retrouver le noyau et l'image ;
— Calculer un déterminant.

Comprendre un endomorphisme

— Construire un projecteur ou une symétrie ;
— Reconnaître et analyser un projecteur ;
— Utiliser une base propre pour simplifier l'étude d'une suite vectorielle ou d'un système différentiel ;
— Représenter graphiquement l'action d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ à partir d'une base propre ;
— Tester l'existence d'une base propre, en exhiber une dans les cas positifs.

Première partie
Révisions et approfondissement

1 Familles de vecteurs et bases

1.1 Résumé

La représentation la plus immédiate d'un vecteur, dans un espace de dimension finie n, est le n-uplet de ses composantes dans la base canonique. Cependant, ce n'est pas toujours la représentation la plus efficace, tant en terme de temps de calcul que de compréhension de l'information contenue par le vecteur.

Ainsi par exemple, pour analyser un signal échantillonné, on utilise parfois sa transformée de Fourier discrète. On peut alors «oublier» les n valeurs successives prises par le signal (ses coordonnées dans la base canonique) et les remplacer par les coefficients de Fourier. Ces derniers sont en fait les coordonnées du signal dans une autre base. Ils contiennent toute l'information portée par le signal, mais sous une autre forme, celle d'une représentation fréquentielle, qui permet une analyse particulière du signal. Il est ensuite toujours possible, si besoin est, de retrouver les coordonnées dans la base initiale (donc les valeurs successives du signal) à partir de celles dans la nouvelle base (donc à partir des coefficients de Fourier).

De façon générale, changer de système de coordonnées revient à choisir une nouvelle base et à travailler avec les coordonnées du vecteur dans cette nouvelle base. Il faut donc savoir passer d'un système de coordonnées à un autre.

1.2 Exercices

Exercice 1.1

Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et $A = \{e_1, \dots, e_n\} \subset E$. On définit $F = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i, (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \right\}$.

1. Montrer que F est un sev de E.
2. Soit G un sev tel que $A \subset G$. Montrer que $F \subset G$.

Remarque : on appelle Vect A ce sev F. C'est le plus petit sev de E contenant A.

Exercice 1.2

Soit dans $\mathbb{R}^3$ la famille $\mathcal{F} = \big((1, 1, 1), (1, -1, 1), (2, -2, 2)\big)$.

1. Expliquer pourquoi Vect $\mathcal{F} = \text{Vect}\,\big((1, 1, 1), (1, -1, 1)\big)$.
2. Que dire de Vect $\big((1, 1, 1), (2, -2, 2)\big)$ et de Vect $\big((1, -1, 1), (2, -2, 2)\big)$?
3. **(Travail personnel)** Reprendre les questions précédentes avec les familles

$$\mathcal{F}_2 = \big((1, 1, -2), (1, -1, 1), (2, 0, -1)\big) \quad \text{et} \quad \mathcal{F}_3 = \big((1, 2, 1), (1, -1, 1), (-1, 1, 1)\big)$$

Exercice 1.3

Soient E un $\mathbb{R}$-ev et $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une famille de E. Par définition, $\mathscr{B}$ est une base de E si :

1. cette famille engendre E ;
2. cette famille est libre.

Justifier la présence de chacune de ces conditions dans la définition d'une base.

Exercice 1.4

Les familles suivantes sont-elles des bases de $\mathbb{R}^3$? Dans la négative, transformez-les par suppressions et/ou ajouts de vecteurs pour obtenir une base de $\mathbb{R}^3$.

Déterminer ensuite les coordonnées du vecteur $u = (1, 2, 3)$ dans la base obtenue.

1. $\mathcal{F} = \big((1, -1, 2), (1, -1, 1), (-1, 1, 1), (2, 1, -1)\big)$
2. $\mathcal{F} = \big((1, 1, 0), (0, 1, 1)\big)$
3. $\mathcal{F} = \big((1, 1, 1), (2, 1, -1), (2, 1, -2)\big)$
4. **(Travail personnel)** Mêmes questions avec $\mathcal{F} = \big((-2, 1, 1), (1, -2, 1), (-1, -1, 2)\big)$

★ **Exercice 1.5**

Les familles suivantes sont-elles libres dans E ? Dans la négative, en extraire une sous-famille libre maximale.

1. $E = \mathbb{R}[X]$ et $\mathcal{F} = \Big((X-1)^2, (X+1)^2, X^2\Big)$
2. $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ et $\mathcal{F} = \Big(x \mapsto e^{2x}, x \mapsto x^2, x \mapsto x\Big)$
3. $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ et $\mathcal{F} = \Big(x \mapsto e^{x}, x \mapsto e^{x+1}, x \mapsto e^{x+2}\Big)$
4. $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ et $\mathcal{F} = \Big(x \mapsto \cos(2x), x \mapsto \cos^2(x), x \mapsto 1\Big)$

Exercice 1.6 *Matrices de passage*

1. Soient $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $\mathscr{B}' = \big((1, 1), (-1, 2)\big)$ une seconde base.

   Pour tout vecteur $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, on définit X et X' les colonnes formées des coordonnées de u dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$.

   a. Représenter graphiquement les vecteurs de $\mathscr{B}$ et de $\mathscr{B}'$, ainsi qu'un vecteur u arbitraire. Comment voit-on graphiquement les coordonnées de u dans les deux bases ?
   b. En écrivant u comme une combinaison linéaire des vecteurs de $\mathscr{B}'$, déterminer la relation matricielle exprimant X en fonction de X'.
   Quelle est la matrice de passage P de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$?
   c. Vérifier que P est inversible puis déterminer la relation matricielle exprimant X' en fonction de X.
   d. Soit la droite d'équation $x + 2y = 0$. Donner l'équation de cette droite dans la base $\mathscr{B}'$.
2. Soient $E = \mathbb{R}_2[X]$ et les bases $\mathscr{B} = \big(1, X, X^2\big)$ et $\mathscr{B}' = \big(1, (X+1), (X+1)^2\big)$.

   a. Déterminer la matrice de passage P de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ et son inverse P^{-1}.
   b. Pour tout $Q \in E$, expliciter la relation entre les coordonnées de Q dans $\mathscr{B}$ et dans $\mathscr{B}'$.

2 Applications linéaires

2.1 Résumé

Une application linéaire respecte les relations de linéarité, quand il y en a, entre ses vecteurs d'entrée. Quand l'espace de départ est de dimension finie, une application linéaire est entièrement définie par les images des vecteurs d'une base de l'espace de départ. Si de plus l'espace d'arrivée est aussi de dimension finie, l'application peut être définie par une matrice.

Une matrice peut aussi représenter une famille de vecteurs. Elle contient alors les vecteurs successifs de la famille, colonne après colonne. En statistiques, on utilise souvent des matrices de cette façon : on étudie un vecteur aléatoire et chaque colonne correspond à une observation. L'analyse statistique consistera par exemple à mettre en évidence des relations de dépendance entre les différentes composantes du vecteur, donc entre les lignes de la matrice des observations.

Dans tous les cas, il est important de savoir regarder une matrice. Déterminer son rang, son image et son noyau, permet d'étudier aussi bien une application linéaire qu'un jeu de données statistiques.

2.2 Exercices

Exercice 2.7

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $(x_0, x_1, \dots x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Explicitez les matrices des applications linéaires suivantes, dans les bases canoniques des espaces de départ et d'arrivée.

1. $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \longmapsto & (a+d)X^2 + (b+c)X + (d-c) \end{array} \right.$

2. $g : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 P(x)\,\mathrm{d}x \end{array} \right.$

3. $V : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n+1} \\ P & \longmapsto & \big(P(x_0), \quad \cdots, \quad P(x_n)\big) \end{array} \right.$

Exercice 2.8

Soient $E = \mathbb{R}_2[X]$ muni de sa base canonique $\mathscr{B}_1$, $F = \mathbb{R}_3[X]$ muni de sa base canonique $\mathscr{B}_2$ et

$$f : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ P & \longmapsto & P' + XP \end{array} \right.$$

1. Déterminer la matrice A de f dans les bases $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$.
   On note C_1, C_2 et C_3 les colonnes de cette matrice.
2. Soit $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 \in E$. Écrire les coordonnées dans $\mathscr{B}_2$ de $f(P)$ en fonction de a_0, a_1, a_2, C_1, C_2 et C_3.
3. L'application f est-elle injective ? La famille (C_1, C_2, C_3) est-elle libre ?
4. L'application f est-elle surjective ? La famille (C_1, C_2, C_3) engendre-t-elle $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$?
5. L'application f est-elle bijective ? La famille (C_1, C_2, C_3) est-elle une base de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$?

Exercice 2.9 *Rang d'une application linéaire*

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ l'application linéaire définie par sa matrice dans les bases canoniques

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Le rang de A est définie par $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(f) = \dim\big(\mathrm{Im}(f)\big)$.

1. Sans s'intéresser aux valeurs des coefficients de A, montrer que $\mathrm{rg}(A) \leqslant 2$. Puis montrer que, de façon générale, pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}_*^2$,
$$\forall A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R}),\ \mathrm{rg}(A) \leqslant \min(n,p)$$
2. Donner une base de $\mathrm{Ker}(f)$.
3. Donner une base de $\mathrm{Im}(f)$.
4. Rappeler le théorème du rang et vérifier la compatibilité de vos résultats avec ce théorème.
5. Déterminer le rang des matrices suivantes :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & -4 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 2.10 *Déterminant d'une matrice carrée*

Calculer les déterminants des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & -2 \\ -1 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 2.11 *Changement de bases*

1. Soit $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ P & \longmapsto & (P(2), P'(2)) \end{array} \right.$
   a. Déterminer la matrice de f dans les bases canoniques au départ et à l'arrivée.
   b. Déterminer la matrice de f dans les bases $\left(1, (1+X), (1+X)^2\right)$ au départ et $((1,0),(0,1))$ à l'arrivée.
   c. Déterminer la matrice de f dans les bases $\left(1, X, X^2\right)$ au départ et $((1,2),(2,3))$ à l'arrivée.
   d. Déterminer la matrice de f dans les bases $\left(1, (1+X), (1+X)^2\right)$ au départ et $((1,2),(2,3))$ à l'arrivée.
2. **(Travail personnel)** Soit $g : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (2x+y-z,\ x-y+3z) \end{array} \right.$
   a. Déterminer la matrice de g dans les bases canoniques au départ et à l'arrivée.
   b. Déterminer la matrice de g dans les bases $((1,1,1),(3,2,1),(1,2,4))$ au départ et canonique à l'arrivée.
   c. Déterminer la matrice de g dans les bases canonique au départ et $((1,-1),(-1,2))$ à l'arrivée.
   d. Déterminer la matrice de g dans les bases $((1,1,1),(3,2,1),(1,2,4))$ au départ et $((1,-1),(-1,2))$ à l'arrivée.

Exercice 2.12 *Formule générale de changement de bases*

1. Soient E et F deux espaces de dimensions finies, $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}'_1$ deux bases de E, $\mathscr{B}_2$ et $\mathscr{B}'_2$ deux bases de F. On note P la matrice de passage de $\mathscr{B}_1$ à $\mathscr{B}'_1$ et Q la matrice de passage de $\mathscr{B}_2$ à $\mathscr{B}'_2$. Enfin, on considère $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et on définit
   $$A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2}(f) \qquad \text{et} \qquad A' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'_1, \mathscr{B}'_2}(f)$$
   Pour tout $u \in E$, on note X et X' les matrices colonnes formées des coordonnées du u dans $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}'_1$, Y et Y' les matrices colonnes formées des coordonnées de $f(u)$ dans $\mathscr{B}_2$ et $\mathscr{B}'_2$
   a. Rappeler la relation matricielle entre X et X', puis la relation entre Y et Y'.
   b. De même, exprimer Y en fonction de X puis Y' en fonction de X'.
   c. En déduire la relation matricielle donnant A' en fonction de A.
   d. Écrire cette relation dans le cas particulier où
   $$E = F, \qquad \mathscr{B}_1 = \mathscr{B}_2 \qquad \text{et} \qquad \mathscr{B}'_1 = \mathscr{B}'_2$$
2. En utilisant la formule démontrée en question 1.c., retrouvez les résultats de l'exercice 2-11.

Deuxième partie

Comprendre un endomorphisme

3 Projecteurs

3.1 Résumé

Un projecteur est un endomorphisme particulier : il consiste à décomposer un vecteur en une somme de deux vecteurs, à annuler le premier et garder inchangé le second. Autrement dit, son action sur un vecteur est de n'en renvoyer que la partie qui est « sous le feu du projecteur » et d'en effacer le reste.

Les projecteurs sont notamment utilisés en traitement du signal où ils sont à la base des méthodes de filtrage : quand un signal contient une multitude d'informations dont une partie seulement nous intéresse, il permet d'isoler cette dernière.

Encore faut-il savoir décrire ce qu'on garde du vecteur initial et ce qu'on efface.

3.2 Exercices

Exercice 3.13

Dans $E = \mathbb{R}^2$, on considère les sev $F = \{(x, y) \in E, x - 2y = 0\}$ et $G = \{(x, y) \in E, x - y = 0\}$.

1. Déterminer une base $\mathscr{B}_1$ de F et une base $\mathscr{B}_2$ de G.
2. Montrer que $E = F \oplus G$.
3. On sait donc que pour tout $w \in E$, il existe un unique $(u, v) \in F \times G$ tel que $w = u + v$.
   On définit l'application $p : w \longmapsto v$. Démontrer que $p \in \mathscr{L}(E)$ puis que $p \circ p = p$.
4. Que vaut $p(w)$ si $w \in F$? Et si $w \in G$? Déterminer $\text{Ker}(p)$ et $\text{Im}(p)$.
5. Soit $\mathscr{B}'$ la base de E obtenue en concaténant les bases $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ de la question 1. Quelle est la matrice de p dans cette base.
6. En déduire la matrice de p dans la base canonique $\mathscr{B}$.
7. **(Travail personnel)** Reprendre les questions précédentes dans le cas où :

$$E = \mathbb{R}^3, \qquad F = \{(x, y, z) \in E, x - 2y + z = 0\} \qquad \text{et} \qquad G = \text{Vect}\left((1, 2, 2)\right)$$

Exercice 3.14

Soient E un $\mathbb{R}$-ev et p un projecteur, c'est-à-dire que $p \in \mathscr{L}(E)$ et que $p \circ p = p$.

1. Soit $w \in E$. Montrer que $w - p(w) \in \text{Ker}(p)$.
2. Montrer que $E = \text{Ker}(p) \oplus \text{Im}(p)$.
3. Que vaut $p(w)$ si $w \in \text{Ker}(p)$? Et si $w \in \text{Im}(p)$?
4. On sait que, pour tout $w \in E$, il existe un unique $(u, v) \in \text{Ker}(p) \times \text{Im}(p)$ tel que $w = u + v$. Que vaut $p(w)$?
   Décrire en une phrase ce que fait l'endomorphisme p.
5. Soit $q = id - p$. Montrer que q est aussi un projecteur puis déterminer $\text{Ker}(q)$ et $\text{Im}(q)$.
6. Supposons dans cette question que E est de dimension finie. On construit une base de E par concaténation d'une base de $\text{Ker}(p)$ et d'une base de $\text{Im}(p)$. Quelles sont les matrices de p et de q dans cette base ?

Exercice 3.15

Considérons les endomorphismes p_1, p_2 et p_3 définis par leurs matrices A_1, A_2 et A_3 dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour chacun de ces endomorphismes :

1. Vérifier que p est un projecteur.
2. Déterminer une base de $\text{Ker}(p)$ et une base de $\text{Im}(p)$.
3. Soit $\mathscr{B}$ la base de E obtenue en concaténant ces deux bases. Déterminer les matrices dans $\mathscr{B}$ de p et de $q = id - p$.

4 Endomorphismes diagonalisables

4.1 Résumé

Un endomorphisme se différencie des autres applications linéaires par le fait que ses espaces de départ et d'arrivée sont identiques. Quand cet espace est de grande dimension, on comprend mieux l'endomorphisme si on peut mettre en évidence des sous-espaces stables, de plus petites dimensions. La ***réduction*** d'un endomorphisme consiste à trouver de tels ***sous-espaces stables supplémentaires***. Si on choisit pour base de E la concaténation de bases de ces sous-espaces stables, la matrice de l'endomorphisme se compose alors de blocs diagonaux, les coefficients hors de ces blocs étant tous nuls. Cette matrice est dite «diagonale par blocs».

Le cas idéal est celui où on parvient à une base dans laquelle la matrice est tout simplement diagonale. Une telle représentation, quand elle existe, s'obtient dans une base de vecteurs propres : ce sont des vecteurs qui sont colinéaires à leur image par l'endomorphisme. Diagonaliser une matrice, c'est mettre en évidence une base de vecteurs propres.

Ce cas idéal a, de plus, le bon goût d'être le plus fréquent. Une grande majorité des matrices sont diagonalisables, dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$. Cette propriété justifie de traiter à part le cas des matrices diagonalisables.

4.2 Exercices

Exercice 4.16 *Enjeux de la diagonalisation*

On se place dans l'espace $\mathbb{R}^2$, muni de sa base canonique $\mathscr{B} = ((1,0)\,,\,(0,1))$ et d'une seconde base $\mathscr{B}' = ((2,1)\,,\,(1,2))$.

Pour tout $u = (x,y) \in \mathbb{R}^2$, on note $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ les matrices colonnes constituées de ses coordonnées dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$.

Enfin, on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ défini par sa matrice dans la base canonique

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

1. Matrice de f dans la base $\mathscr{B}'$.
   a. Représenter graphiquement $\mathscr{B}'$ et $f(\mathscr{B}')$ dans le plan. En déduire la matrice D de f dans $\mathscr{B}'$.
   b. En utilisant la matrice de passage P de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$, rappeler la relation matricielle liant M à D.
   c. Soit $u = (3,3)$. Exprimer u dans la base $\mathscr{B}'$. En déduire $f(u)$, $f \circ f(u)$ et $f \circ f \circ f(u)$.
2. Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. On considère les deux suites réelles (x_n) et (y_n) définies par leurs valeurs initiales x_0 et y_0 et :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left| \begin{array}{lcl} x_{n+1} & = & 3x_n - 2y_n \\ y_{n+1} & = & 2x_n - 2y_n \end{array} \right.$$
   De plus, on définit le vecteur $u_n = (x_n\,,y_n)$, puis X_n et X'_n les coordonnées de u_n dans $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$.
   a. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Représenter graphiquement les trois premiers termes de la suite (u_n) pour $u_0 = (2,1)$, $(1,2)$ puis $(3,3)$.
   b. Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer X'_{n+1} en fonction de X'_n.
   c. En déduire X'_n en fonction de n, puis u_n en fonction de n.
   d. Vérifier que $u_0 = (0,0)$ est un point d'équilibre. Est-ce un équilibre stable ?

Exercice 4.17

1. Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Rappeler quelles sont les fonctions dérivables $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ telles que $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\left|\begin{array}{lcl} x'(t) & = & -x(t) \\ y'(t) & = & -4y(t) \end{array}\right.$$

Indication : S2, chapitre « Équations différentielles ».

2. On cherche maintenant les fonctions dérivables $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ telles que $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\left|\begin{array}{lcl} x'(t) & = & -2x(t) - 2y(t) \\ y'(t) & = & -x(t) - 3y(t) \end{array}\right.$$

Pour cela, on se place dans l'espace $\mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique $\mathscr{B}_1$ et d'une seconde base $\mathscr{B}_2 = \big((2,-1),(1,1)\big)$. Dans cet espace, on définit $u(t) = \big(x(t)\,,y(t)\big)$, puis $X_1(t)$ et $X_2(t)$ les matrices colonnes formées des coordonnées de $u(t)$ dans les bases $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$.

a. Soit l'endomorphisme défini pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = (-2x - 2y,\, -x - 3y)$. Représenter graphiquement $\mathscr{B}_2$ et $f(\mathscr{B}_2)$. En déduire la matrice de f dans la base $\mathscr{B}_2$.

b. Vérifier que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $u'(t) = f\big(u(t)\big)$. Représenter graphiquement les trajectoires du vecteur $u(t)$ sur un petit intervalle $[0, \delta t]$ dans les cas où $u(0) = (2,-1)$, $(1, 1)$ puis $(3, 0)$.

c. Exprimer $X_2'(t)$ en fonction de $X_2(t)$.

d. En déduire $X_2(t)$ en fonction de t, puis $u(t)$ en fonction de t.

e. Vérifier que $u(0) = (0, 0)$ est un point d'équilibre. Est-ce un équilibre stable ?

Exercice 4.18

Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$? Dans les cas favorables, donner les matrices P et D.

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -3 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

(Travail personnel) Même question avec les matrices

$$B_1 = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B_4 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 7 & -5 & 1 \\ 6 & -6 & 2 \end{pmatrix}.$$

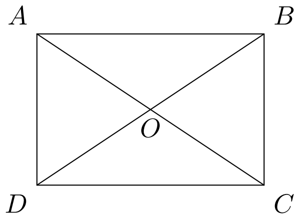
★ **Exercice 4.19**

Soit $a \in \mathbb{R}$. Discuter en fonction de a la diagonalisabilité des matrices suivantes. Dans les cas favorables, ***la diagonalisation n'est pas demandée***.

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & a+1 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 3 & -a-1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

★ **Exercice 4.20** *Matrice de probabilités*

Un jeton se déplace aléatoirement sur les cinq points A, B, C, D et O :



À l'itération $n = 0$, le jeton est en A. Puis à chaque itération n, il se déplace aléatoirement vers un nœud adjacent :

— s'il est en A, B, C ou D, il se déplace vers l'un des trois nœuds adjacents avec la probabilité $\frac{1}{3}$;
— s'il est en O, il se déplace vers l'un des quatre nœuds adjacents avec la probabilité $\frac{1}{4}$.

On définit l'évènement $A_n =$«le jeton est en A à l'itération n» et, de la même façon, les évènements B_n, C_n, D_n et O_n. Enfin, on note

$$u_n = \Big(P(A_n)\,, P(B_n)\,, P(C_n)\,, P(D_n)\,, P(O_n)\Big)$$

et X_n la matrice colonne constituée des coordonnées de u_n dans la base canonique de $\mathbb{R}^5$.

1. Déterminer $A \in \mathscr{M}_5(\mathbb{R})$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.
2. On admet qu'une diagonalisation de A est donnée par

$$P = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & -4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & -4 & 4 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 8 & 0 & -8 & 0 \\ 8 & 0 & -8 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et on note $X'_n = \begin{pmatrix} x'_n \\ y'_n \\ z'_n \\ t'_n \\ s'_n \end{pmatrix}$ la matrice colonne des coordonnées de u_n dans la base propre.

a. Écrire la première coordonnée x'_n en fonction de X_n. Quelle relation y a-t-il entre x'_{n+1} et x'_n ? En déduire x'_n en fonction de n.

b. Même question avec les deux dernières coordonnées t'_n et s'_n. En déduire une relation entre $P(B_n)$ et $P(D_n)$, puis une relation entre $P(A_n)$ et $P(C_n)$, qui sont satisfaites dès que $n \geqslant 1$.

c. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} X'_n$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.