

# 1 1D transportní rovnice s advekcí

Představme si látku pohybující se kanálem o průřezu  $A$  ve směru  $x$  rychlostí  $c \geq 0$ . Tato látka přenáší veličinu  $u$ , která je závislá na čase a pozici,  $u(x, t)$ . Pro lepší představu se může jednat například o koncentraci nějaké příměsi. Celkové množství veličiny mezi body  $x_1$  a  $x_2$  v nějakém čase  $t$  tak bude rovno

$$\int_{x_1}^{x_2} u(x, t) A dx \quad (1.1)$$

Zaměříme-li se pouze na průřez pozicí  $x$ , je množství látky, které jím proteče mezi časy  $t_1$  a  $t_2$  rovno

$$\int_{t_1}^{t_2} u(x, t) c A dt \quad (1.2)$$

Ze zákona zachování je zřejmé, že množství nacházející se v úseku  $(x_1, x_2)$  v čase  $t_2$  se musí rovnat množství, které v něm bylo v předchozím čase  $t_2$  zvětšeném o to, co přiteklo skrz  $x_1$ , a zmenšené o to, co oteklo přes  $x_2$ . Integrální balance je tak následující:

$$\int_{x_1}^{x_2} u(x, t_2) A dx - \int_{x_1}^{x_2} u(x, t_1) A dx = \int_{t_1}^{t_2} u(x_2, t) c A dt - \int_{t_1}^{t_2} u(x_1, t) c A dt \quad (1.3)$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) A dt dx = \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x} u(x, t) c A dx dt \quad (1.4)$$

Použitím základních pravidel integrálního počtu a eliminací  $A$  tak získáváme následující rovnici:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (1.5)$$

Tato balance se nazývá tzv. **transportní rovnici** a jedná o jednu ze základních parciálních diferenciálních rovnic.

Řešme ji nyní numericky. Diskretizujme čas dle  $t_n = n\Delta t$  a prostor dle  $x_i = i\Delta x$ . Nyní nahraďme  $u_t$  dopřednou diferencí a  $u_x$  zpětnou diferencí.

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} - c \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} = 0 \quad (1.6)$$

Vyjádřením  $u_i^{n+1}$  získáváme tzv. **Up-Wind schéma**:

$$u_i^{n+1} = u_i^n + c \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_i - u_{i-1}) \quad (1.7)$$

Lze ukázat, že toto schéma bude stabilní, pokud kroky  $\Delta x$  a  $\Delta t$  splňují následující podmínku:

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{c} \quad (1.8)$$

Uvažujme nyní řešení na oblasti o  $x \in [0, L]$  s periodickými okrajovými podmínkami. Zaveďme taktéž počáteční podmínku následovně:

$$u(x, 0) = \begin{cases} \sin(k \frac{\pi}{L} x) & x \in [0, \frac{L}{k}] \quad k < L \\ 0 & x \in (k, L] \end{cases} \quad (1.9)$$

Nyní můžeme přistoupit k numerickému řešení podle schématu (1.7). Řešení bude nyní napsáno v Pythonu, pozdější práce však bude rozdělena na výpočty v C++ a grafický výstup pomocí Pythonu.

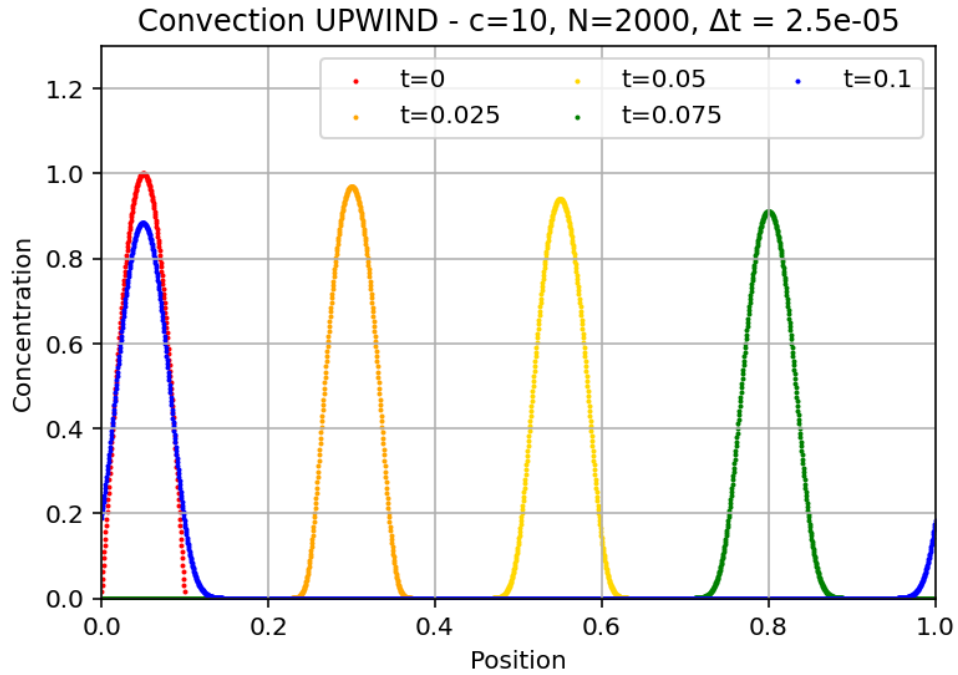


Figure 1: UPWIND schéma pro čistou konvekci

Řešená oblast byla rozdělena na  $N = 2000$  bodů a  $\Delta t$  bylo zvoleno dle  $\Delta t = 0.5 \frac{\Delta x}{c}$ . Počítáno pro rychlost  $c = 10$ .

Lze si všimnout, že periodická okrajová podmínka byla aplikovaná správně. Hlavním znakem námi použitého schématu je numerická difúze, ke které dochází. Projevuje se zmenšením amplitudy a rozšířením základny tvaru sledovaného množství. Tato vlastnost je u schématu UPWIND očekávaná. Anž bychom měnili schéma, ji lze potlačit pouze zjemněním sítě.

[VĚTŠÍ ROZBOR PŘÍČIN NUM. DIFÚZE]

## 2 1D transportní rovnice s advekcí a disipací

Rozšíříme nyní transportní rovnici (1.5) o disipativní člen. Nebudeme ji zde zatím odvozovat, jelikož se nejedná o cíl tohoto úkolu.

$$\frac{\partial u}{\partial t} - c \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2.1)$$

Je zřejmé, že UPWIND schéma bude mít obdobnou strukturu jako (1.7). Disipační člen však bude diskretizován pomocí centrální náhrady 2. derivace:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} \quad (2.2)$$

Schéma pro transportní rovnici s konvekcí i disipací tak je následující:

$$u_i^{n+1} = u_i^n + c \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_i - u_{i-1}) + \nu \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) \quad (2.3)$$

Lze ukázat, že toto schéma bude stabilní, splňují-li zvolené kroky  $\Delta x$  a  $\Delta t$  tuto podmínku:

$$1 \geq c \frac{\Delta t}{\Delta x} + 2\nu \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \geq \left( c \frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \quad (1)$$

Zavedeme na tuto úlohu stejné počáteční i okrajové podmínky jako v úloze předešlé a numericky ji spočítáme. Disipativní konstanta byla zvolena jako  $\nu = 0.02$

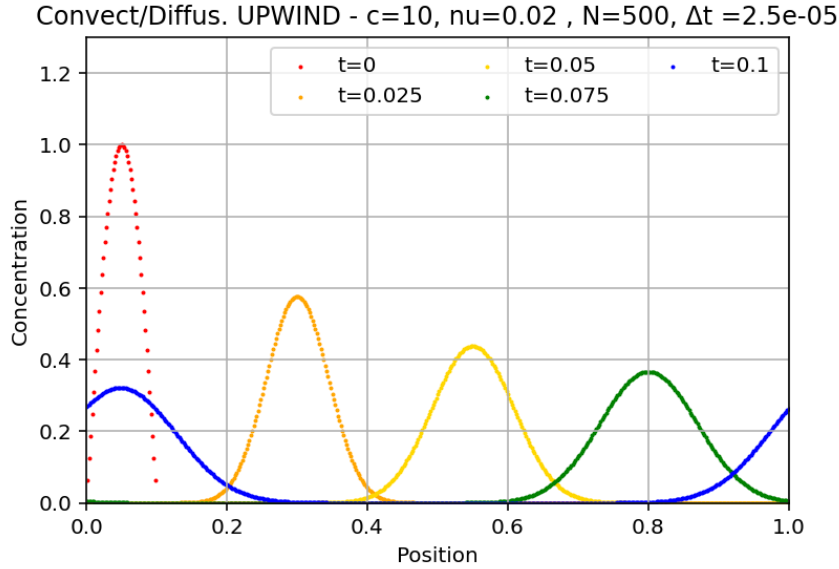


Figure 2: UPWIND schéma pro konvekci a disipaci

Opět lze vidět, že schéma je stabilní a periodické podmínky byly aplikovány správně. Znatelná je daleko větší difúze. Ta je nyní však primárně zapříčiněna disipativním členem a je tedy fyzikálně správná. S rostoucí velikostí  $\nu$  se rychlost difúze zvětšuje. Zde je vhodné podotknout, že působení druhé mocniny  $\Delta x^2$  je restriktivnější pro velikost časového kroku  $\Delta t$ , pokud chceme udržet stabilitu. Proto pro disipativní případ bylo při stejném časovém kroku  $\Delta t$  zvoleno méně prostorových bodů  $N$ .

### 3 Analytické řešení stacionárního proudění Newtonovské kapaliny mezi dvěma deskami

Odvoďme si nyní jako cvičení analytické řešení jednosměrného proudění mezi dvěma nekonečnými deskami (ve směru  $z$ ). Uvažujme, že je kapalina nestlačitelná, Newtonovská a proudění je plně rozvinuté a stacionární (v čase se nemění). Cílem tohoto cvičení je získat rychlostní profil mezi deskami.

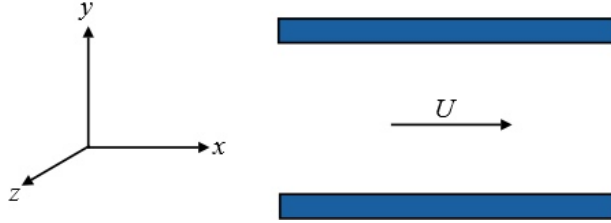


Figure 3: Diagram proudění

Vzhledem k definici problému tedy můžeme vypsát následující poznatky:

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \quad u \neq 0 \quad v = 0 \quad w = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{0}$$

Dále se k těmto poznatkům budeme odvolávat frází "zadání".

Základní rovnice pro tento případ tedy budou zákon zachování hmotnosti pro nestlačitelné tekutiny (3.1) a Navier-Stokesova rovnice (3.2). Zde  $\mathbf{u}$  představuje vektorovou rychlost tekutiny.

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \tag{3.1}$$

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{f} \tag{3.2}$$

Pravá strana (3.2) představuje působení tlakových, vazkových a vnějších sil (po řadě).

Aplikujme nyní zadání na (3.1), získáme tím vyjádření  $\frac{\partial u}{\partial x}$ :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \cancel{\frac{\partial v}{\partial y}} + \cancel{\frac{\partial w}{\partial z}} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{3.3}$$

Vidíme tedy, že rychlost se ve směru  $x$  nemění. Intuitivně to sedí s termínem "rozvinutého" proudění.

Zaměřme se nyní na matici  $\boldsymbol{\tau}$  popisující působení vazkových sil. Pro nestlačitelné Newtonovské kapaliny lze  $\boldsymbol{\tau}$  odvodit jako:

$$\boldsymbol{\tau} = 2\mu \boldsymbol{\Delta} \quad \text{kde} \quad \boldsymbol{\Delta} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T) \tag{3.4}$$

Vidíme tedy, že matice  $\nabla \mathbf{u}$  se nám bude ve výpočtu vyskytovat několikrát, proto si ji nyní rozepíšeme:

$$\nabla \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & v & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

Aplikací zadání a (3.3) se tato matice značně zjednodušuje:

$$\nabla \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

Dosazením do (3.4) tedy získáváme:

$$\boldsymbol{\tau} = \mu \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial u}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

Přenásobme nyní  $\boldsymbol{\tau}$  skalárně operátorem  $\nabla$ , abychom získali finální verzi vazkého členu vystupujícího v N.-S. rovnici (3.2):

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} = \mu \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial u}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aplikací (3.3) se toto však zjednodušuje na:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} = \mu \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

Rozepíšme si nyní obdobně člen  $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$ :

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \\ u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Aplikací zadání se nám tento výraz opět zjednodušuje na:

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

Rozepišme si nyní zbylé členy základní rovnice (3.2) do složek a aplikujme zadání:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{0} \quad \nabla p = \begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial p}{\partial z} \end{pmatrix} \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

Dosazením do (3.2) tedy získáváme následné složkové rovnice:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ -\frac{\partial p}{\partial y} - g \\ -\frac{\partial p}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

Je zřejmé, že pro získání rychlostního profilu musíme vyřešit první z těchto rovnic:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (3.12)$$

Proveďme nyní parciální derivaci obou stran (3.2) podle  $x$  a aplikujme  $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$  (3.3):

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \mu \frac{\partial^3 u}{\partial y^2 \partial x} \longrightarrow \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0 \longrightarrow \frac{\partial p}{\partial x} = \text{konst.} \quad (3.13)$$

Máme-li na vstupu a výstupu tlaky  $p_1$  a  $p_2$ , resp., a délku kanálu  $L$ , je zřejmé, že musí platit:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{p_2 - p_1}{L} = K$$

Nyní tedy můžeme přistoupit k řešení (3.12):

$$K = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \xrightarrow{\int \int} u(y) = \frac{1}{\mu} \left( \frac{1}{2} K y^2 + A y + B \right) \quad (3.14)$$

Vidíme, že rychlostní profil bude parabolického tvaru. Určíme konstanty  $A$  a  $B$ . Víme, že na obou stěnách kanálu musí být rychlost nulová:

$$u(y=0) = 0 \quad u(y=H) = 0$$

Pro konstanty  $A$  a  $B$  tak vychází:

$$A = -\frac{1}{2} K H \quad B = 0$$

Předpis rychlostního profilu pak tedy je:

$$u(y) = \frac{p_2 - p_1}{2\mu L} (y^2 - Hy) \quad (3.15)$$

## 4 2D proudění Newtonovské kapaliny v kanále pomocí MacCormackova schématu

Přepíšme nyní Navier-Stokesovy rovnice (3.2) o složkového zápisu pouze pro dvourozměrný případ  $x$  a  $y$ :

$$\begin{aligned} x : \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \rho f_x \\ y : \quad \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \rho f_y \end{aligned} \quad (4.1)$$

Tyto rovnice lze přepsat do konzervativního tvaru, který se poté bude hodit k numerickému řešení. Ignorujeme přitom působení vnějších sil.

$$\mathbf{D}W_t + F_x + G_y - R_x - S_y = 0, \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & W &= \begin{pmatrix} p \\ u \\ v \end{pmatrix} & F &= \begin{pmatrix} u \\ u^2 + \bar{p} \\ uv \end{pmatrix} \\ G &= \begin{pmatrix} v \\ uv \\ v^2 + \bar{p} \end{pmatrix} & R &= \frac{1}{\rho} \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} & S &= \frac{1}{\rho} \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yy} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.3)$$

První řádek této soustavy je přepis zákona zachování hmotnosti pro nestlačitelnou tekutinu (3.1). Pro snazší numerické řešení se do této rovnice však přidává tzv. umělá stlačitelnost, která do metody přináší časovou derivaci tlaku. Z  $\mathbf{D}$  se díky ní stává  $\mathbf{D}_\beta$  s následujícím předpisem:

$$\mathbf{D}_\beta = \begin{pmatrix} \frac{1}{\beta^2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

$\beta$  je vhodné volit jako  $\beta = u_{max} \sqrt{\rho}$ .

Předpokládáme-li laminární proudění  $\mu = \text{konst.}$  a Newtonskou látku  $\tau_{yx} = \nu \frac{\partial u}{\partial y}$  (apod.), můžeme rovnici dále zjednodušit. Zavádíme při tom kinematickou viskozitu jako  $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ .

$$\mathbf{D}_\beta W_t + F_x + G_y = \nu \mathbf{D} \nabla^2 W \quad (4.5)$$

Posledním krokem před přikročením k numerickému řešení je izolování časových derivací v této rovnici:

$$W_t = \mathbf{D}_\beta^{-1} \left[ - (F_x + G_y) + \nu \mathbf{D} \nabla^2 W \right] \quad (4.6)$$

K numerickému řešení použijeme MacCormackovo schéma skládající se ze dvou stupňů - prediktor a korektor. Kompletně vypsané schéma pro dvourozměrný problém je následující:

**Prediktor:**

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial W}{\partial t} \right)_{i,j}^n &= \mathbf{D}_\beta^{-1} \left[ -\frac{F_{i,j}^n - F_{i-1,j}^n}{\Delta x} - \frac{G_{i,j}^n - G_{i,j-1}^n}{\Delta y} \right. \\ &\quad \left. + \nu \mathbf{D} \left( \frac{W_{i+1,j}^n - 2W_{i,j}^n + W_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} + \frac{W_{i,j+1}^n - 2W_{i,j}^n + W_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\widetilde{W}_{i,j}^{n+1} = W_{i,j}^n + \Delta t \left( \frac{\partial W}{\partial t} \right)_{i,j}^n \quad (4.8)$$

**Korektor:**

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \widetilde{W}}{\partial t} \right)_{i,j}^{n+1} &= \mathbf{D}_\beta^{-1} \left[ -\frac{\widetilde{F}_{i+1,j}^{n+1} - \widetilde{F}_{i,j}^{n+1}}{\Delta x} - \frac{\widetilde{G}_{i,j+1}^{n+1} - \widetilde{G}_{i,j}^{n+1}}{\Delta y} \right. \\ &\quad \left. + \nu \mathbf{D} \left( \frac{\widetilde{W}_{i+1,j}^{n+1} - 2\widetilde{W}_{i,j}^{n+1} + \widetilde{W}_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta x^2} + \frac{\widetilde{W}_{i,j+1}^{n+1} - 2\widetilde{W}_{i,j}^{n+1} + \widetilde{W}_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta y^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.9)$$

**Nová časová vrstva:**

$$\left( \frac{\partial W}{\partial t} \right)_{i,j}^{n+1/2} = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial W}{\partial t} \right)_{i,j}^n + \left( \frac{\partial \widetilde{W}}{\partial t} \right)_{i,j}^{n+1} \right] \quad (4.10)$$

$$W_{i,j}^{n+1} = W_{i,j}^n + \Delta t \left( \frac{\partial W}{\partial t} \right)_{i,j}^{n+1/2} \quad (4.11)$$

Podmínka stability pro časový krok při MacCormackově schématu je následující:

$$\Delta t \leq \frac{1}{\frac{|u| + \sqrt{u^2 + \beta^2}}{\Delta x} + \frac{|v| + \sqrt{v^2 + \beta^2}}{\Delta y} + 2\nu \left( \frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right)} \quad (4.12)$$

Zaveďme ještě definici rezidua, kterou budeme kontrolovat, zda dosáhlo schéma řešení.  $n$  a  $m$  jsou počty buněk sítě ve směru  $x$  a  $y$ .

$$\|\text{Res}(W_{i,j})\| = \frac{1}{nm} \sqrt{\sum_{i,j} \frac{(W_{i,j}^{n+1} - W_{i,j}^n)^2}{\Delta t}} \quad (4.13)$$

Aby byla simulace prohlášena za ukončenou, musí reziduum splňovat tuto podmínku:

$$\frac{\|\text{Res}(W_{i,j})\|_n}{\|\text{Res}(W_{i,j})\|_5} \leq \varepsilon \quad (4.14)$$

$$\|\text{Res}(W_{i,j})\|_5 = \max_{1 \leq n \leq 5} \|\text{Res}(W_{i,j})\|_n$$

$\varepsilon$  je námi volený vektor konvergence.

Zvolme nyní libovolně parametry pro test vytvořeného schématu.

- $L = 2$
- $H = 1$
- $\Delta P = 1.6$
- $\mu = 0.63$
- $\text{Re} = 10$
- $N = 40$  uzlů ve směru  $x$
- $M = 20$  uzlů ve směru  $y$
- $\beta = 6$

ZDE POZDĚJI PŘIDAT ČÁST O DISKRETIZACI SÍTĚ.

Musíme nyní zavést podmínky pro uzly sítě, které nemají kompletní výpočetní buňku - tzv. okrajové podmínky. Jedná se o okraje naší obdélníkové sítě.



Ze zadání máme předepsaný tlak na vstupu  $p_{in} = 1.6$  a na výstupu  $p_{out} = 0$  pro každý čas  $t = t_0 + \tau k$ , a tedy:

$$p_{0,m}^k = 1.6 \quad p_{N,m}^k = 0, \quad m \in \{0, 1, 2, \dots, M\} \quad \forall k \quad (4.15)$$

Z podmínky přilnavosti na stěnách víme, že zde musí být rychlost nulová:

$$u_{n,0}^k = v_{n,0}^k = 0 \quad u_{n,M}^k = v_{n,M}^k = 0 \quad n \in \{0, 1, 2, \dots, N\} \quad \forall k \quad (4.16)$$

Zaveďme ještě počáteční podmínky, ze kterých bude řešič vycházet - hodnoty s indexem  $k = 0$ . Předepíšeme nulový tlak všude až na vstupovou vrstvu, kde platí okrajová podmínka 4.15. Počáteční horizontální rychlost uvedeme rovnou  $u = 1$  všude až na stěny, kde platí okrajová podmínka. Počáteční vertikální rychlost nechť je všude nulová.

Prvotní nastavení kanálu tedy neodpovídá fyzikálnímu modelu toku, pokud je však náš řešič napsán správně, měl by po čase konvergovat k realistickému odhadu.

Dosažením do (3.15) za  $y = \frac{H}{2}$  získáváme přesný analytický předpoklad maximální rychlosti:

$$u(y = 0.5) = \frac{-1.6}{2 \cdot 0.63 \cdot 2} \cdot (0.5^2 - 1 \cdot 0.5) = 0.1587$$

Po 600000 iteracích numerického řešiče se maximální horizontální rychlost  $u_{max}$  ustálila okolo hodnoty  $u_{max} = 0.1512$ . Jedná se tedy přibližně o 5% rozdíl. (TO JE CELKEM DOST, PROČ??? JAK ZLEPŠIT???)

Porovnání rychlostního profilu získaného numerickým řešením s teoretickým (3.15) lze vidět na následujícím obrázku (4):

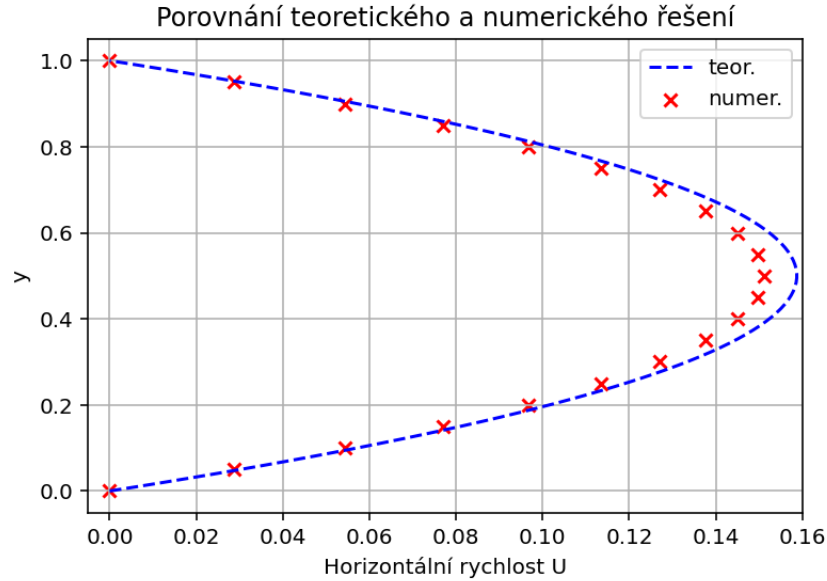


Figure 4: Caption

Schéma se tedy skutečně z nerealistických počátečních podmínek ustálilo na numerickém řešení, které přibližně odpovídá teoretickému parabolickému profilu. (PROČ JE TAM ALE STÁLE ZNATELNÝ ROZDÍL???)

Schématické znázornění rozložení rychlostí v kanálu je na následujících obrázcích. Lze vidět, že horizontální proudění se ustálilo v celé délce kanálu a že vertikální složky rychlosti se dle očekávání blíží výpočetní nule.

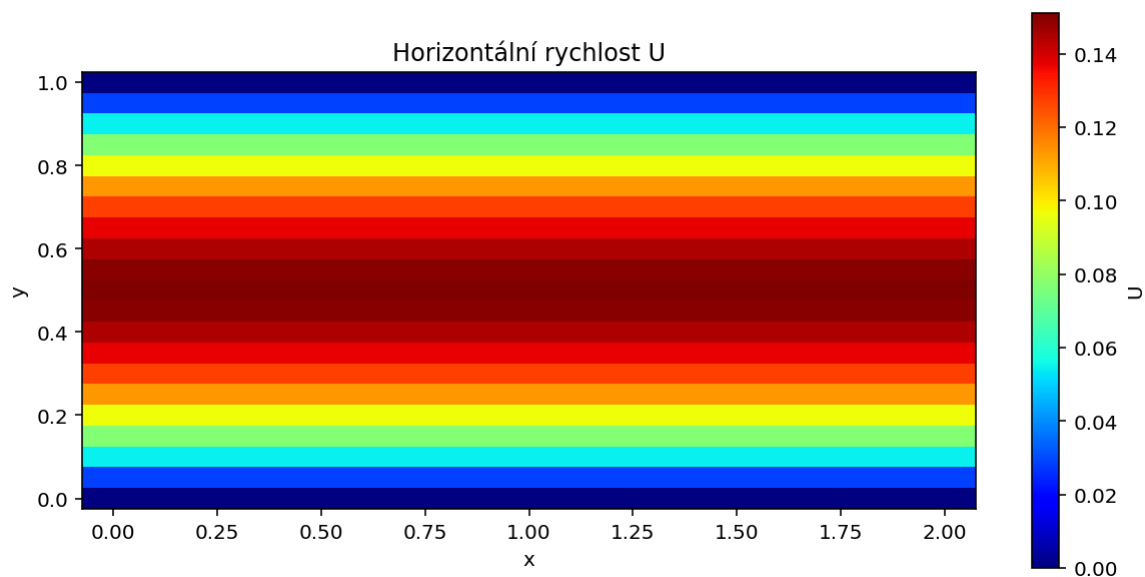


Figure 5: Rozložení horizontální rychlosti

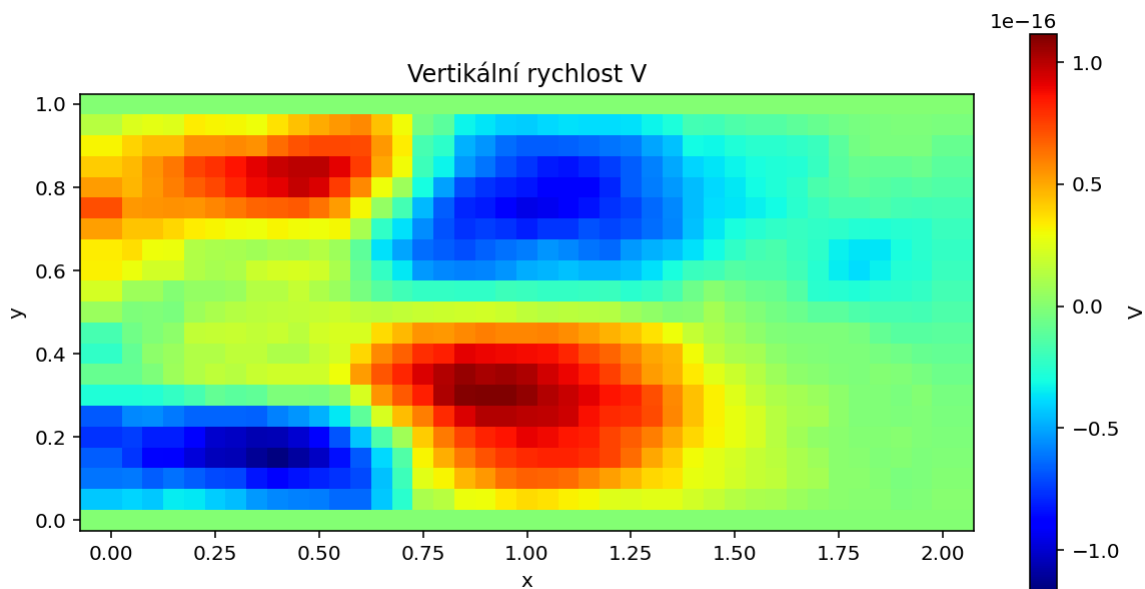


Figure 6: Rozložení vertikální rychlosti

Výsledné rozložení tlaku v kanálu je následující (7). Z původního nerealistického nastavení (nenulová hodnota pouze na vstupu) tedy došlo k vytvoření lineárního poklesu mezi vstupem a výstupem odpovídajícímu teoretickému odvození (3.13).

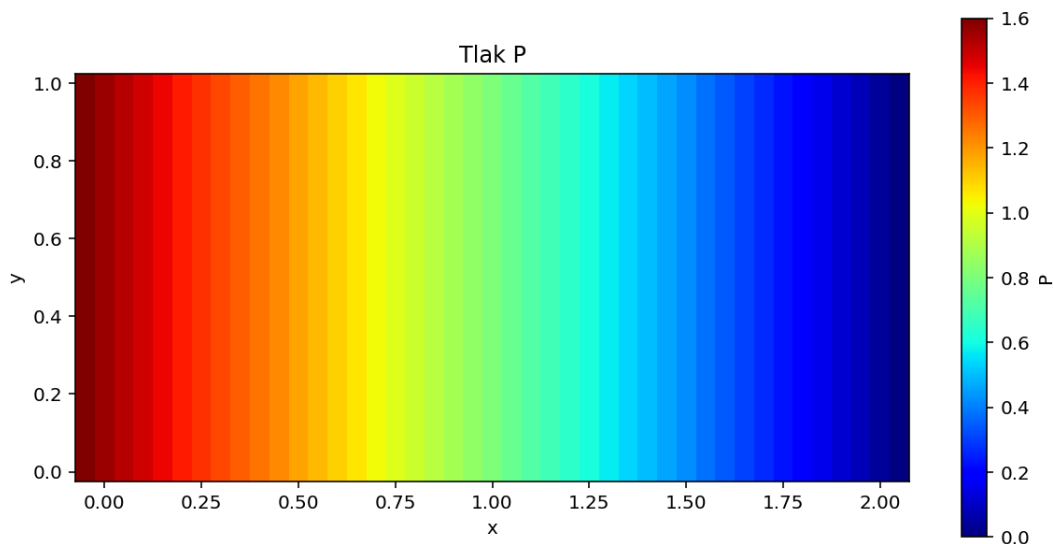


Figure 7: Rozložení tlaku

Průběh reziduí řešiče je znázorněn v následujícím grafu (8). Je tedy zřejmé, že všechny tři výpočetní proměnné po daném počtu iterací došly k ustáleným hodnotám.

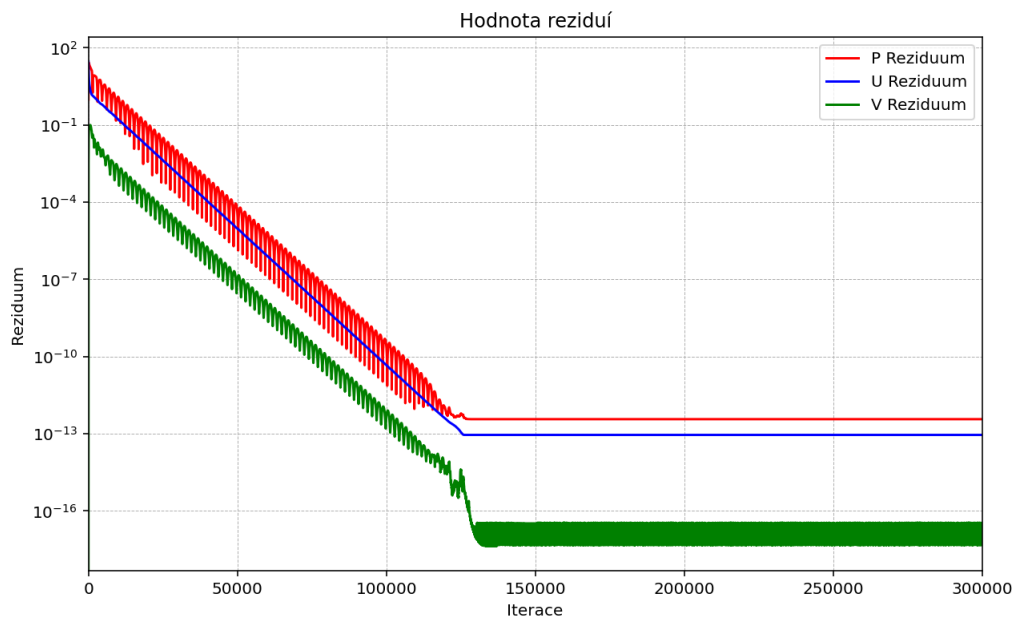


Figure 8: Průběh reziduí