

# 1 1D transportní rovnice s advekcí

Představme si látku pohybující se kanálem o průřezu  $A$  ve směru  $x$  rychlostí  $c \geq 0$ . Tato látka přenáší veličinu  $u$ , která je závislá na čase a pozici,  $u(x, t)$ . Pro lepší představu se může jednat například o koncentraci nějaké příměsi. Celkové množství veličiny mezi body  $x_1$  a  $x_2$  v nějakém čase  $t$  tak bude rovno

$$\int_{x_1}^{x_2} u(x, t) A dx \quad (1.1)$$

Zaměříme-li se pouze na průřez pozicí  $x$ , je množství látky, které jím proteče mezi časy  $t_1$  a  $t_2$  rovno

$$\int_{t_1}^{t_2} u(x, t) c A dt \quad (1.2)$$

Ze zákona zachování je zřejmé, že množství nacházející se v úseku  $(x_1, x_2)$  v čase  $t_2$  se musí rovnat množství, které v něm bylo v předchozím čase  $t_2$  zvětšeném o to, co přiteklo skrz  $x_1$ , a zmenšené o to, co oteklo přes  $x_2$ . Integrální balance je tak následující:

$$\int_{x_1}^{x_2} u(x, t_2) A dx - \int_{x_1}^{x_2} u(x, t_1) A dx = \int_{t_1}^{t_2} u(x_2, t) c A dt - \int_{t_1}^{t_2} u(x_1, t) c A dt \quad (1.3)$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) A dt dx = \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x} u(x, t) c A dx dt \quad (1.4)$$

Použitím základních pravidel integrálního počtu a eliminací  $A$  tak získáváme následující rovnici:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (1.5)$$

Tato balance se nazývá tzv. **transportní rovnici** a jedná o jednu ze základních parciálních diferenciálních rovnic.

Řešme ji nyní numericky. Diskretizujme čas dle  $t_n = n\Delta t$  a prostor dle  $x_i = i\Delta x$ . Nyní nahraďme  $u_t$  dopřednou diferencí a  $u_x$  zpětnou diferencí.

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} - c \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} = 0 \quad (1.6)$$

Vyjádřením  $u_i^{n+1}$  získáváme tzv. **Up-Wind schéma**:

$$u_i^{n+1} = u_i^n + c \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_i - u_{i-1}) \quad (1.7)$$

Lze ukázat, že toto schéma bude stabilní, pokud kroky  $\Delta x$  a  $\Delta t$  splňují následující podmínku:

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{c} \quad (1.8)$$

Uvažujme nyní řešení na oblasti o  $x \in [0, L]$  s periodickými okrajovými podmínkami. Zaveďme taktéž počáteční podmínku následovně:

$$u(x, 0) = \begin{cases} \sin(k \frac{\pi}{L} x) & x \in [0, \frac{L}{k}] \quad k < L \\ 0 & x \in (k, L] \end{cases} \quad (1.9)$$

Nyní můžeme přistoupit k numerickému řešení podle schématu (1.7). Řešení bude nyní napsáno v Pythonu, pozdější práce však bude rozdělena na výpočty v C++ a grafický výstup pomocí Pythonu.

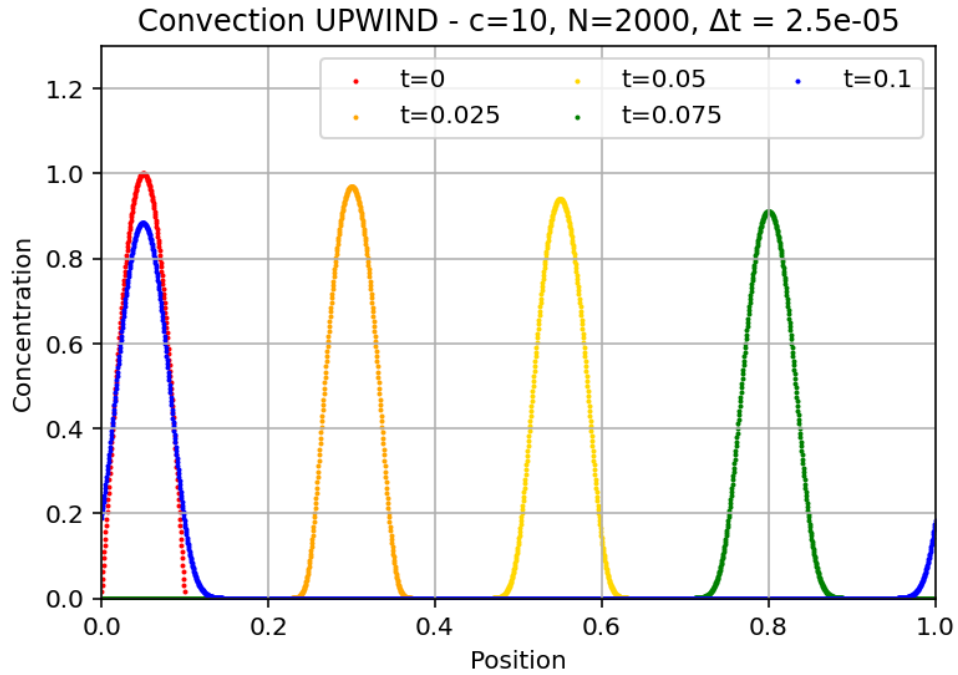


Figure 1: UPWIND schéma pro čistou konvekci

Řešená oblast byla rozdělena na  $N = 2000$  bodů a  $\Delta t$  bylo zvoleno dle  $\Delta t = 0.5 \frac{\Delta x}{c}$ . Počítáno pro rychlost  $c = 10$ .

Lze si všimnout, že periodická okrajová podmínka byla aplikovaná správně. Hlavním znakem námi použitého schématu je numerická difúze, ke které dochází. Projevuje se zmenšením amplitudy a rozšířením základny tvaru sledovaného množství. Tato vlastnost je u schématu UPWIND očekávaná. Aníž bychom měnili schéma, ji lze potlačit pouze zjemněním sítě.

[VĚTŠÍ ROZBOR PŘÍČIN NUM. DIFÚZE]

## 2 1D transportní rovnice s advekcí a disipací

Rozšíříme nyní transportní rovnici (1.5) o disipativní člen. Nebudeme ji zde zatím odvozovat, jelikož se nejedná o cíl tohoto úkolu.

$$\frac{\partial u}{\partial t} - c \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2.1)$$

Je zřejmé, že UPWIND schéma bude mít obdobnou strukturu jako (1.7). Disipační člen však bude diskretizován pomocí centrální náhrady 2. derivace:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} \quad (2.2)$$

Schéma pro transportní rovnici s konvekcí i disipací tak je následující:

$$u_i^{n+1} = u_i^n + c \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_i - u_{i-1}) + \nu \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) \quad (2.3)$$

Lze ukázat, že toto schéma bude stabilní, splňují-li zvolené kroky  $\Delta x$  a  $\Delta t$  tuto podmínku:

$$1 \geq c \frac{\Delta t}{\Delta x} + 2\nu \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \geq \left( c \frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \quad (1)$$

Zavedeme na tuto úlohu stejné počáteční i okrajové podmínky jako v úloze předešlé a numericky ji spočítáme. Disipativní konstanta byla zvolena jako  $\nu = 0.02$

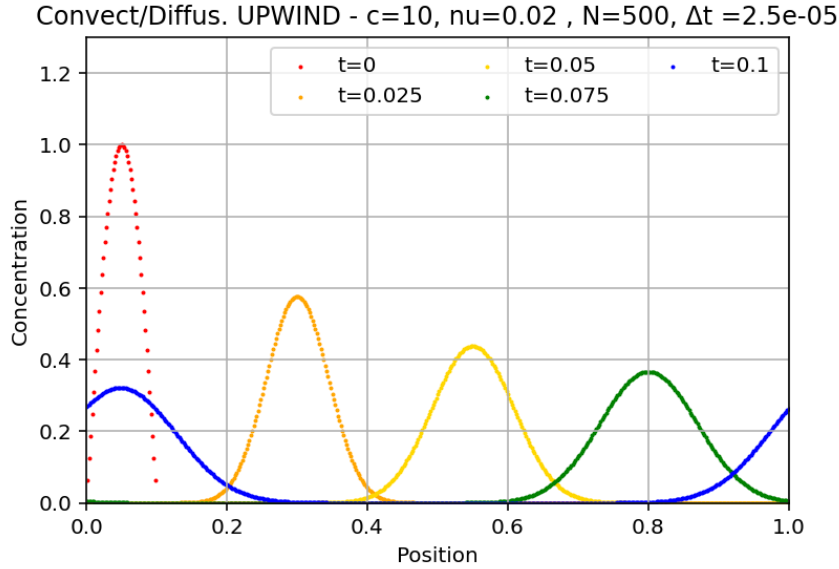


Figure 2: UPWIND schéma pro konvekci a disipaci

Opět lze vidět, že schéma je stabilní a periodické podmínky byly aplikovány správně. Znatelná je daleko větší difúze. Ta je nyní však primárně zapříčiněna disipativním členem a je tedy fyzikálně správná. S rostoucí velikostí  $\nu$  se rychlost difúze zvětšuje. Zde je vhodné podotknout, že působení druhé mocniny  $\Delta x^2$  je restriktivnější pro velikost časového kroku  $\Delta t$ , pokud chceme udržet stabilitu. Proto pro disipativní případ bylo při stejném časovém kroku  $\Delta t$  zvoleno méně prostorových bodů  $N$ .

### 3 Analytické řešení stacionárního proudění Newtonovské kapaliny mezi dvěma deskami

Odvoďme si nyní jako cvičení analytické řešení jednosměrného proudění mezi dvěma nekonečnými deskami (ve směru  $z$ ). Uvažujme, že je kapalina nestlačitelná, Newtonovská a proudění je plně rozvinuté a stacionární (v čase se nemění). Cílem tohoto cvičení je získat rychlostní profil mezi deskami.

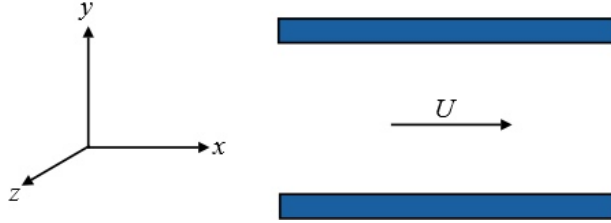


Figure 3: Diagram proudění

Vzhledem k definici problému tedy můžeme vypsát následující poznatky:

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \quad u \neq 0 \quad v = 0 \quad w = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{0}$$

Dále se k těmto poznatkům budeme odvolávat frází "zadání".

Základní rovnice pro tento případ tedy budou zákon zachování hmotnosti pro nestlačitelné tekutiny (3.1) a Navier-Stokesova rovnice (3.2). Zde  $\mathbf{u}$  představuje vektorovou rychlost tekutiny.

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \tag{3.1}$$

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{f} \tag{3.2}$$

Pravá strana (3.2) představuje působení tlakových, vazkových a vnějších sil (po řadě).

Aplikujme nyní zadání na (3.1), získáme tím vyjádření  $\frac{\partial u}{\partial x}$ :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \cancel{\frac{\partial v}{\partial y}} + \cancel{\frac{\partial w}{\partial z}} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{3.3}$$

Vidíme tedy, že rychlost se ve směru  $x$  nemění. Intuitivně to sedí s termínem "rozvinutého" proudění.

Zaměřme se nyní na matici  $\boldsymbol{\tau}$  popisující působení vazkových sil. Pro nestlačitelné Newtonovské kapaliny lze  $\boldsymbol{\tau}$  odvodit jako:

$$\boldsymbol{\tau} = 2\mu \boldsymbol{\Delta} \quad \text{kde} \quad \boldsymbol{\Delta} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T) \tag{3.4}$$

Vidíme tedy, že matice  $\nabla \mathbf{u}$  se nám bude ve výpočtu vyskytovat několikrát, proto si ji nyní rozepíšeme:

$$\nabla \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & v & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

Aplikací zadání a (3.3) se tato matice značně zjednodušuje:

$$\nabla \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

Dosazením do (3.4) tedy získáváme:

$$\boldsymbol{\tau} = \mu \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial u}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

Přenásobme nyní  $\boldsymbol{\tau}$  skalárně operátorem  $\nabla$ , abychom získali finální verzi vazkého členu vystupujícího v N.-S. rovnici (3.2):

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} = \mu \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial u}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aplikací (3.3) se toto však zjednodušuje na:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} = \mu \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

Rozepíšme si nyní obdobně člen  $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$ :

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \\ u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Aplikací zadání se nám tento výraz opět zjednodušuje na:

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

Rozepíšme si nyní zbylé členy základní rovnice (3.2) do složek a aplikujme zadání:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{0} \quad \nabla p = \begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial p}{\partial z} \end{pmatrix} \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

Dosazením do (3.2) tedy získáváme následné složkové rovnice:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ -\frac{\partial p}{\partial y} - g \\ -\frac{\partial p}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

Je zřejmé, že pro získání rychlostního profilu musíme vyřešit první z těchto rovnic:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (3.12)$$

Proveďme nyní parciální derivaci obou stran (3.2) podle  $x$  a aplikujme  $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$  (3.3):

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \mu \frac{\partial^3 u}{\partial y^2 \partial x} \longrightarrow \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0 \longrightarrow \frac{\partial p}{\partial x} = \text{konst.} \quad (3.13)$$

Máme-li na vstupu a výstupu tlaky  $p_1$  a  $p_2$ , resp., a délku kanálu  $L$ , je zřejmé, že musí platit:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{p_2 - p_1}{L} = K$$

Nyní tedy můžeme přistoupit k řešení (3.12):

$$K = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \xrightarrow{\int \int} u(y) = \frac{1}{\mu} \left( \frac{1}{2} K y^2 + A y + B \right) \quad (3.14)$$

Vidíme, že rychlostní profil bude parabolického tvaru. Určeme konstanty  $A$  a  $B$ . Víme, že na obou stěnách kanálu musí být rychlost nulová:

$$u(y=0) = 0 \quad u(y=H) = 0$$

Pro konstanty  $A$  a  $B$  tak vychází:

$$A = -\frac{1}{2} K H \quad B = 0$$

Předpis rychlostního profilu pak tedy je:

$$u(y) = \frac{p_2 - p_1}{2\mu L} (y^2 - H y) \quad (3.15)$$

## 4 Bezrozměrný tvar Navier-Stokesových rovnic

Přepíšme nyní nyní Navier-Stokesovy rovnice (3.2) do konzervativního tvaru (POZDĚJI NAPSAT I ODVOZENÍ) a vyjádřeme je ve složkovém zápisu pro 2D. Přitom uvažujme nestlačitelnou, Newtonovskou tekutinu, na kterou nepůsobí vnější síly:

$$\begin{aligned} x : \quad & \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ y : \quad & \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (4.1)$$

Zaveďme nyní bezrozměrné definice veličin vystupujících v N.-S. rovnicích. Jedná se o poměr fyzikální veličiny v libovolném bodě toku vztažené k vybrané charakteristické veličině.

$$u^* = \frac{u}{U_\infty} \quad v^* = \frac{v}{U_\infty} \quad x^* = \frac{x}{L_{ch}} \quad y^* = \frac{y}{L_{ch}} \quad t^* = \frac{U_\infty}{L} t \quad p^* = \frac{p}{U_\infty^2} \quad (4.2)$$

Zde je  $U_\infty$  rychlost volného proudu a  $L_{ch}$  charakteristický rozměr toku. Tlak  $p^*$  se stane bezrozměrným až po vydělení hustotou  $\rho$ . Dosadíme nyní takto definované veličiny do rovnice 4.2 pro složku  $x$ :

$$\begin{aligned} \frac{U_\infty^2}{L_{ch}} \frac{\partial u^*}{\partial t^*} + \frac{U_\infty^2}{L_{ch}} \frac{\partial u^{*2}}{\partial x^*} + \frac{U_\infty^2}{L_{ch}} \frac{\partial(u^*v^*)}{\partial y^*} &= -\frac{1}{\rho} \frac{U_\infty^2}{L_{ch}} \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{\mu}{\rho} \frac{U_\infty}{L_{ch}^2} \left( \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \right) \\ \frac{\partial u^*}{\partial t^*} + \frac{\partial u^{*2}}{\partial x^*} + \frac{\partial(u^*v^*)}{\partial y^*} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{\mu}{\rho U_\infty L_{ch}} \left( \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \right) \end{aligned}$$

Bezrozměrný poměr  $Re = \frac{\rho U_\infty L_{ch}}{\mu}$  je tzv. Reynoldsovo číslo vyjadřující poměr mezi setrvačnými a vazkými silami v proudu tekutiny. Můžeme napsat finální tvar bezrozměrné varianty rovnic (4.1):

$$\begin{aligned} x : \quad & \frac{\partial u^*}{\partial t^*} + \frac{\partial u^{*2}}{\partial x^*} + \frac{\partial(u^*v^*)}{\partial y^*} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \right) \\ y : \quad & \frac{\partial v^*}{\partial t^*} + \frac{\partial(u^*v^*)}{\partial x^*} + \frac{\partial v^{*2}}{\partial y^*} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial y^*} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}} \right) \end{aligned} \quad (4.3)$$

Porovnáním (4.1) a (4.3) vidíme, že rovnice pro rozměrové a bezrozměrné proudění nestlačitelné Newtonovské tekutiny mají identický tvar a lze mezi nimi volně přecházet záměnou kinematické viskozity za převrácenou hodnotu Reynoldsova čísla:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \rightarrow \frac{1}{Re} \quad (4.4)$$

V pozdějších částech tohoto textu se bude pracovat s bezrozměrným schématem. Pro jednoduchost v nich bude opomenut symbol  $*$ .

Převedme ještě vzorec pro parabolický profil rychlosti mezi dvěma deskami (3.15) do bezrozměrného tvaru, přičemž za charakteristický rozměr  $L_{ch}$  je považována vzdálenost desek  $H$ :

$$u^*(y^*) = \frac{\Delta p^*}{2L} \frac{Re}{\rho} H \left( y^{*2} - y^* \right) \quad (4.5)$$

Víme, že maximální rychlosti se dosahuje uprostřed profilu, a tedy  $y^* = 0.5$ . Dosazením do (4.5) získáme vzorec pro maximální rychlost, který bude sloužit k rychlému posouzení numerického řešení.

$$u_{max}^* = -\frac{1}{8} \frac{\Delta p^*}{L \rho} Re H \quad (4.6)$$

## 5 2D proudění Newtonovské kapaliny v kanále pomocí MacCormackova schématu

Přepíšme nyní rovnice (4.3) a rovnici kontinuity (3.1) do maticového zápisu:

$$\mathbf{D}W_t + F_x + G_y = \frac{1}{\text{Re}}\mathbf{D}\nabla^2 W \quad (5.1)$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad W = \begin{pmatrix} p \\ u \\ v \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} u \\ u^2 + \frac{p}{\rho} \\ uv \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} v \\ uv \\ v^2 + \frac{p}{\rho} \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

Pro snazší numerické řešení se do této rovnice však přidává tzv. umělá stlačitelnost, která do metody přináší časovou derivaci tlaku. Z  $\mathbf{D}$  se díky ní stává  $\mathbf{D}_\beta$  s následujícím předpisem:

$$\mathbf{D}_\beta = \begin{pmatrix} \frac{1}{\beta^2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

Posledním krokem před přikročením k numerickému řešení je izolování časových derivací v této rovnici:

$$W_t = \mathbf{D}_\beta^{-1} \left[ -(F_x + G_y) + \frac{1}{\text{Re}}\mathbf{D}\nabla^2 W \right] \quad (5.4)$$

K numerickému řešení použijeme MacCormackovo schéma skládající se ze dvou stupňů - prediktor a korektor. Kompletně vypsání schéma pro dvourozměrný problém je následující:

**Prediktor:**

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial W}{\partial t} \right)_{i,j}^n &= \mathbf{D}_\beta^{-1} \left[ -\frac{F_{i,j}^n - F_{i-1,j}^n}{\Delta x} - \frac{G_{i,j}^n - G_{i,j-1}^n}{\Delta y} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\text{Re}}\mathbf{D} \left( \frac{W_{i+1,j}^n - 2W_{i,j}^n + W_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} + \frac{W_{i,j+1}^n - 2W_{i,j}^n + W_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (5.5)$$

$$\widetilde{W}_{i,j}^{n+1} = W_{i,j}^n + \Delta t \left( \frac{\partial W}{\partial t} \right)_{i,j}^n \quad (5.6)$$

**Korektor:**

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \widetilde{W}}{\partial t} \right)_{i,j}^{n+1} &= \mathbf{D}_\beta^{-1} \left[ -\frac{\widetilde{F}_{i+1,j}^{n+1} - \widetilde{F}_{i,j}^{n+1}}{\Delta x} - \frac{\widetilde{G}_{i,j+1}^{n+1} - \widetilde{G}_{i,j}^{n+1}}{\Delta y} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\text{Re}}\mathbf{D} \left( \frac{\widetilde{W}_{i+1,j}^{n+1} - 2\widetilde{W}_{i,j}^{n+1} + \widetilde{W}_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta x^2} + \frac{\widetilde{W}_{i,j+1}^{n+1} - 2\widetilde{W}_{i,j}^{n+1} + \widetilde{W}_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta y^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (5.7)$$



**Nová časová vrstva:**

$$\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)_{i,j}^{n+1/2} = \frac{1}{2} \left[ \left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)_{i,j}^n + \left(\frac{\partial \widetilde{W}}{\partial t}\right)_{i,j}^{n+1} \right] \quad (5.8)$$

$$W_{i,j}^{n+1} = W_{i,j}^n + \Delta t \left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)_{i,j}^{n+1/2} \quad (5.9)$$

Podmínka stability pro časový krok při MacCormackově schématu je následující:

$$\Delta t \leq \frac{1}{\frac{|u| + \sqrt{u^2 + \beta^2}}{\Delta x} + \frac{|v| + \sqrt{v^2 + \beta^2}}{\Delta y} + \frac{2}{\text{Re}} \left( \frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right)} \quad (5.10)$$

Zaveďme ještě definici rezidua, kterou budeme kontrolovat, zda dosáhlo schéma řešení.  $n$  a  $m$  jsou počty buněk sítě ve směru  $x$  a  $y$ .

$$\|\text{Res}(W_{i,j})\| = \frac{1}{nm} \sqrt{\sum_{i,j} \frac{(W_{i,j}^{n+1} - W_{i,j}^n)^2}{\Delta t}} \quad (5.11)$$

Aby byla simulace prohlášena za ukončenou, musí reziduum splňovat tuto podmínku:

$$\frac{\|\text{Res}(W_{i,j})\|_n}{\|\text{Res}(W_{i,j})\|_5} \leq \varepsilon \quad (5.12)$$

$$\|\text{Res}(W_{i,j})\|_5 = \max_{1 \leq n \leq 5} \|\text{Res}(W_{i,j})\|_n$$

$\varepsilon$  je námi volený vektor konvergence.

Zvolme nyní libovolně parametry pro test vytvořeného schématu.

- $L = 2$
- $H = 1$
- $\Delta P = 1.6$
- $\rho = 10$
- $\text{Re} = 10$
- $N = 50$  uzlů ve směru  $x$
- $M = 25$  uzlů ve směru  $y$
- $\beta = 1$

**ZDE POZDĚJI PŘIDAT ČÁST O DISKRETIZACI SÍTĚ.**

Musíme nyní zavést podmínky pro uzly sítě, které nemají kompletní výpočetní buňku - tzv. okrajové podmínky. Jedná se o okraje naší obdélníkové sítě.

Ze zadání máme předepsaný tlak na vstupu  $p_{in} = 1.6$  a na výstupu  $p_{out} = 0$  pro každý čas  $t = t_0 + \tau k$ , a tedy:

$$p_{0,m}^k = 1.6 \quad p_{N,m}^k = 0, \quad m \in \{0, 1, 2, \dots, M\} \quad \forall k \quad (5.13)$$

Z podmínky přilnavosti na stěnách víme, že zde musí být rychlost nulová:

$$u_{n,0}^k = v_{n,0}^k = 0 \quad u_{n,M}^k = v_{n,M}^k = 0 \quad n \in \{0, 1, 2, \dots, N\} \quad \forall k \quad (5.14)$$

Zaveďme ještě počáteční podmínky, ze kterých bude řešič vycházet - hodnoty s indexem  $k = 0$ . Předepíšeme nulový tlak všude až na vstupovou vrstvu, kde platí okrajová podmínka 5.13. Počáteční

horizontální rychlost uvedeme rovnou  $u = 1$  všude až na stěny, kde platí okrajová podmínka. Počáteční vertikální rychlost nechť je všude nulová.

Prvotní nastavení kanálu tedy neodpovídá fyzikálnímu modelu toku, pokud je však náš řešič napsán správně, měl by po čase konvergovat k realistickému odhadu.

Dosažením zvolených parametrů do (4.6) získáváme přesný analytický předpoklad maximální rychlosti:

$$u_{max} = -\frac{1}{8} \cdot \frac{-1.6 \cdot 10 \cdot 1}{2 \cdot 10} = 0.1$$

Po 400000 iteracích numerického řešiče se maximální horizontální rychlost  $u_{max}$  ustálila okolo hodnoty  $u_{max} = 0.096$ . Jedná se o 4% rozdíl, který by šlo jednoduše zmenšit zjemněním sítě. (POZDĚJI MŮŽU POROVNAT PRO RŮZNÉ JEMNOSTI)

Porovnání rychlostního profilu získaného numerickým řešením s teoretickým (4.6) lze vidět na následujícím obrázku (4):

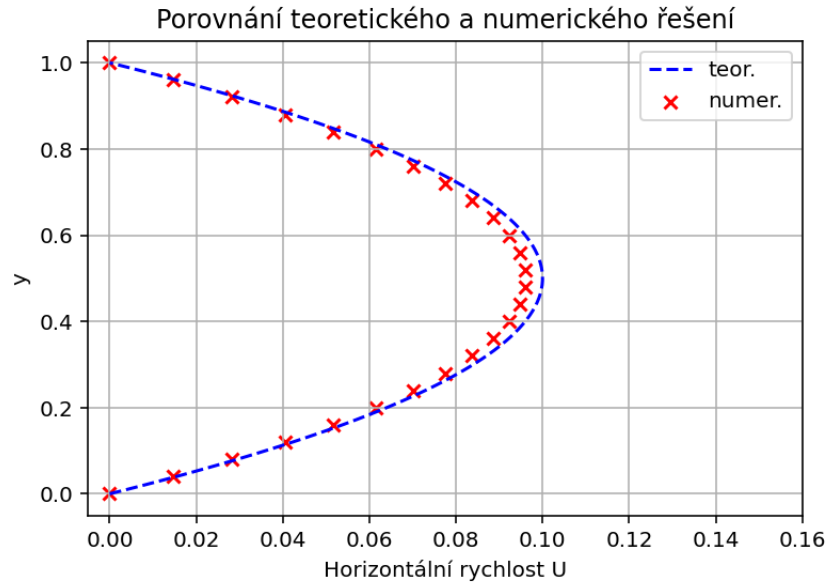


Figure 4: Porovnání přesného řešení s numerickým

Schéma se tedy skutečně z nerealistických počátečních podmínek ustálilo na numerickém řešení, které přibližně odpovídá teoretickému parabolickému profilu.

Schématické znázornění rozložení rychlostí v kanálu je na následujících obrázcích. Lze vidět, že horizontální proudění se ustálilo v celé délce kanálu a že vertikální složky rychlosti se dle očekávání blíží výpočetní nule.

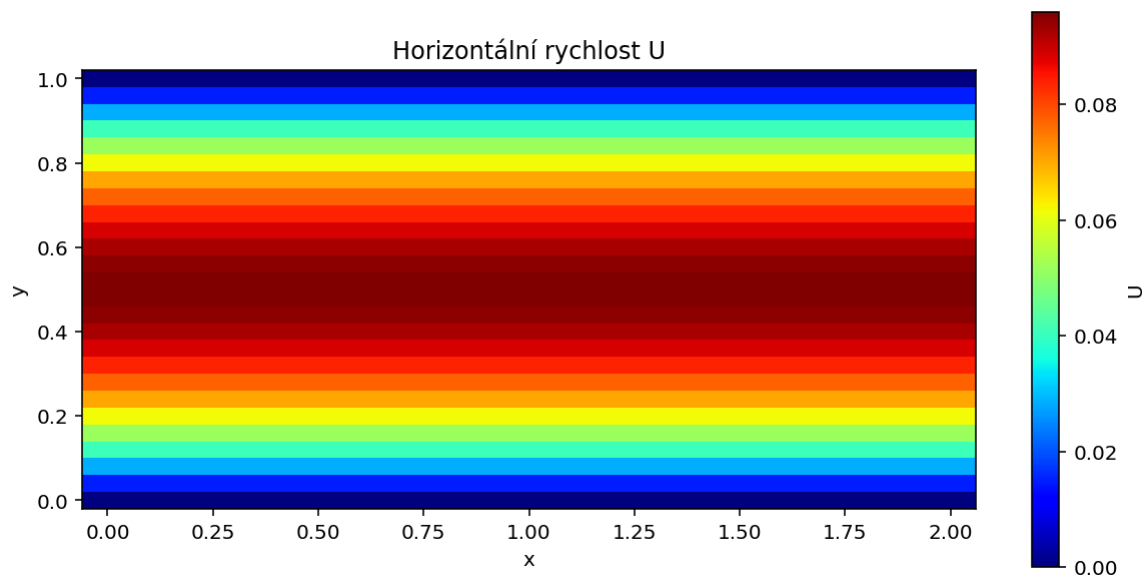


Figure 5: Rozložení horizontální rychlosti

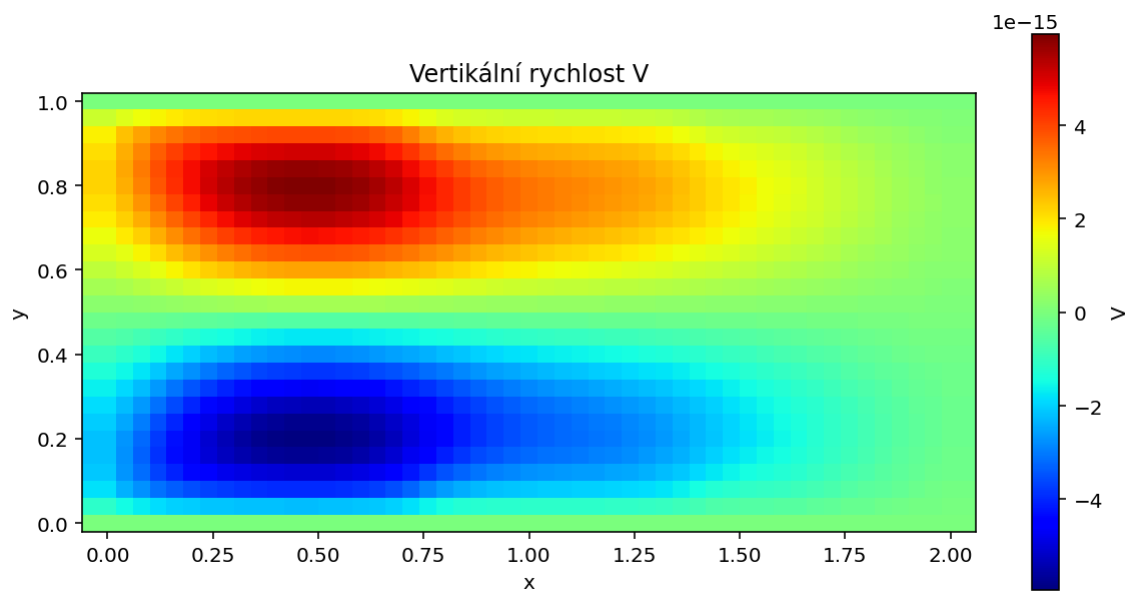


Figure 6: Rozložení vertikální rychlosti

Výsledné rozložení tlaku v kanálu je následující (7). Z původního nerealistického nastavení (nenulová hodnota pouze na vstupu) tedy došlo k vytvoření lineárního poklesu mezi vstupem a výstupem odpovídajícímu teoretickému odvození (3.13).

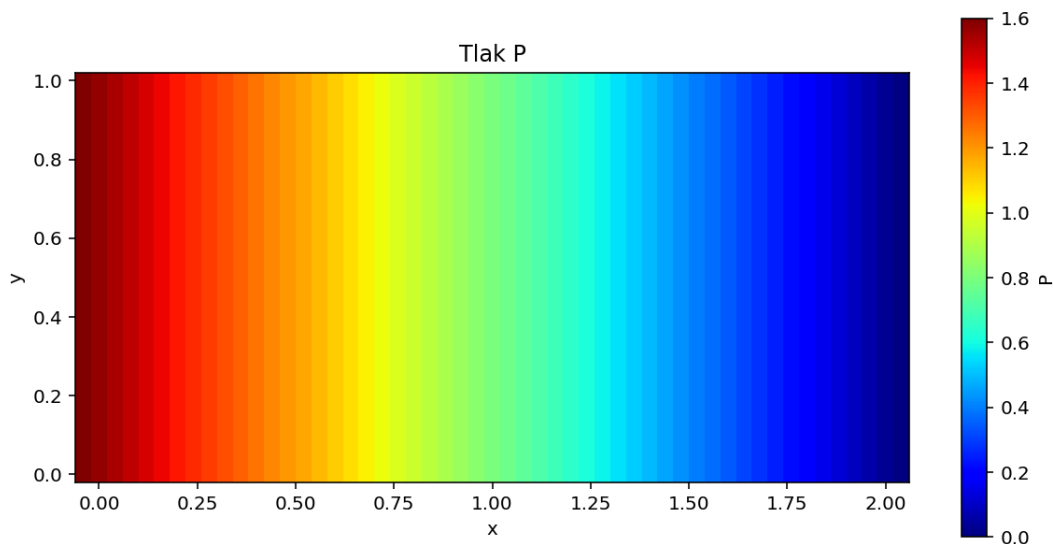


Figure 7: Rozložení tlaku

Průběh reziduí řešiče je znázorněn v následujícím grafu (8). Je tedy zřejmé, že všechny tři výpočetní proměnné po daném počtu iterací došly k ustáleným hodnotám.



Figure 8: Průběh reziduí