

## 4 Bezrozměrný tvar Navier-Stokesových rovnic

Přepíšme nyní nyní Navier-Stokesovy rovnice (3.2) do konzervativního tvaru (POZDĚJI NAPSAT I ODVOZENÍ) a vyjádřeme je ve složkovém zápisu pro 2D. Přitom uvažujme nestlačitelnou, Newtonovskou tekutinu, na kterou nepůsobí vnější síly:

$$\begin{aligned} x : \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ y : \quad \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (4.1)$$

Zaveďme nyní bezrozměrné definice veličin vystupujících v N.-S. rovnicích. Jedná se o poměr fyzikální veličiny v libovolném bodě toku vztažené k vybrané charakteristické veličině.

$$u^* = \frac{u}{U_\infty} \quad v^* = \frac{v}{U_\infty} \quad x^* = \frac{x}{L_{ch}} \quad y^* = \frac{y}{L_{ch}} \quad t^* = \frac{U_\infty}{L} t \quad p^* = \frac{p}{U_\infty^2} \quad (4.2)$$

Zde je  $U_\infty$  rychlost volného proudu a  $L_{ch}$  charakteristický rozměr toku. Tlak  $p^*$  se stane bezrozměrným až po vydělení hustotou  $\rho$ . Dosadíme nyní takto definované veličiny do rovnice 4.2 pro složku  $x$ :

$$\begin{aligned} \frac{U_\infty^2}{L_{ch}} \frac{\partial u^*}{\partial t^*} + \frac{U_\infty^2}{L_{ch}} \frac{\partial u^{*2}}{\partial x} + \frac{U_\infty^2}{L_{ch}} \frac{\partial(u^*v^*)}{\partial y^*} &= -\frac{1}{\rho} \frac{U_\infty^2}{L_{ch}} \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{\mu}{\rho} \frac{U_\infty}{L_{ch}^2} \left( \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \right) \\ \frac{\partial u^*}{\partial t^*} + \frac{\partial u^{*2}}{\partial x} + \frac{\partial(u^*v^*)}{\partial y^*} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{\mu}{\rho U_\infty L_{ch}} \left( \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \right) \end{aligned}$$

Bezrozměrný poměr  $Re = \frac{\rho U_\infty L_{ch}}{\mu}$  je tzv. Reynoldsovo číslo vyjadřující poměr mezi setrvačnými a vazkými silami v proudu tekutiny. Můžeme napsat finální tvar bezrozměrné varianty rovnic (4.1):

$$\begin{aligned} x : \quad \frac{\partial u^*}{\partial t^*} + \frac{\partial u^{*2}}{\partial x} + \frac{\partial(u^*v^*)}{\partial y^*} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \right) \\ y : \quad \frac{\partial v^*}{\partial t^*} + \frac{\partial(u^*v^*)}{\partial x^*} + \frac{\partial v^{*2}}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial y^*} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}} \right) \end{aligned} \quad (4.3)$$

Porovnáním (4.1) a (4.3) vidíme, že rovnice pro rozměrové a bezrozměrné proudění nestlačitelné Newtonovské tekutiny mají identický tvar a lze mezi nimi volně přecházet záměnou kinematické viskozity za převrácenou hodnotu Reynoldsova čísla:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \rightarrow \frac{1}{Re} \quad (4.4)$$

V pozdějších částech tohoto textu se bude pracovat s bezrozměrným schématem. Pro jednoduchost v nich bude opomenut symbol  $*$ .

Převedme ještě vzorec pro parabolický profil rychlosti mezi dvěma deskami (3.15) do bezrozměrného tvaru, přičemž za charakteristický rozměr  $L_{ch}$  je považována vzdálenost desek  $H$ :

$$u^*(y^*) = \frac{\Delta p^*}{2L} \frac{Re}{\rho} H \left( y^{*2} - y^* \right) \quad (4.5)$$

Víme, že maximální rychlosti se dosahuje uprostřed profilu, a tedy  $y^* = 0.5$ . Dosazením do (4.5) získáme vzorec pro maximální rychlost, který bude sloužit k rychlému posouzení numerického řešení.

$$u_{max}^* = -\frac{1}{8} \frac{\Delta p^*}{L \rho} Re H \quad (4.6)$$

## 5 2D proudění Newtonovské kapaliny v kanále pomocí MacCormackova schématu

Přepíšme nyní rovnice (4.3) a rovnici kontinuity (3.1) do maticového zápisu:

$$\mathbf{D}W_t + F_x + G_y = \frac{1}{\text{Re}}\mathbf{D}\nabla^2 W \quad (5.1)$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad W = \begin{pmatrix} p \\ u \\ v \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} u \\ u^2 + \frac{p}{\rho} \\ uv \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} v \\ uv \\ v^2 + \frac{p}{\rho} \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

Pro snazší numerické řešení se do této rovnice však přidává tzv. umělá stlačitelnost, která do metody přináší časovou derivaci tlaku. Z  $\mathbf{D}$  se díky ní stává  $\mathbf{D}_\beta$  s následujícím předpisem:

$$\mathbf{D}_\beta = \begin{pmatrix} \frac{1}{\beta^2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

Posledním krokem před přikročením k numerickému řešení je izolování časových derivací v této rovnici:

$$W_t = \mathbf{D}_\beta^{-1} \left[ -(F_x + G_y) + \frac{1}{\text{Re}}\mathbf{D}\nabla^2 W \right] \quad (5.4)$$

K numerickému řešení použijeme MacCormackovo schéma skládající se ze dvou stupňů - prediktor a korektor. Kompletně vypsané schéma pro dvourozměrný problém je následující:

**Prediktor:**

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial W}{\partial t} \right)_{i,j}^n &= \mathbf{D}_\beta^{-1} \left[ -\frac{F_{i,j}^n - F_{i-1,j}^n}{\Delta x} - \frac{G_{i,j}^n - G_{i,j-1}^n}{\Delta y} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\text{Re}}\mathbf{D} \left( \frac{W_{i+1,j}^n - 2W_{i,j}^n + W_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} + \frac{W_{i,j+1}^n - 2W_{i,j}^n + W_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (5.5)$$

$$\widetilde{W}_{i,j}^{n+1} = W_{i,j}^n + \Delta t \left( \frac{\partial W}{\partial t} \right)_{i,j}^n \quad (5.6)$$

**Korektor:**

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \widetilde{W}}{\partial t} \right)_{i,j}^{n+1} &= \mathbf{D}_\beta^{-1} \left[ -\frac{\widetilde{F}_{i+1,j}^{n+1} - \widetilde{F}_{i,j}^{n+1}}{\Delta x} - \frac{\widetilde{G}_{i,j+1}^{n+1} - \widetilde{G}_{i,j}^{n+1}}{\Delta y} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\text{Re}}\mathbf{D} \left( \frac{\widetilde{W}_{i+1,j}^{n+1} - 2\widetilde{W}_{i,j}^{n+1} + \widetilde{W}_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta x^2} + \frac{\widetilde{W}_{i,j+1}^{n+1} - 2\widetilde{W}_{i,j}^{n+1} + \widetilde{W}_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta y^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (5.7)$$

**Nová časová vrstva:**

$$\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)_{i,j}^{n+1/2} = \frac{1}{2} \left[ \left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)_{i,j}^n + \left(\frac{\partial \widetilde{W}}{\partial t}\right)_{i,j}^{n+1} \right] \quad (5.8)$$

$$W_{i,j}^{n+1} = W_{i,j}^n + \Delta t \left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)_{i,j}^{n+1/2} \quad (5.9)$$

Podmínka stability pro časový krok při MacCormackově schématu je následující:

$$\Delta t \leq \frac{1}{\frac{|u| + \sqrt{u^2 + \beta^2}}{\Delta x} + \frac{|v| + \sqrt{v^2 + \beta^2}}{\Delta y} + \frac{2}{\text{Re}} \left( \frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right)} \quad (5.10)$$

Zaveďme ještě definici rezidua, kterou budeme kontrolovat, zda dosáhlo schéma řešení.  $n$  a  $m$  jsou počty buněk sítě ve směru  $x$  a  $y$ .

$$\|\text{Res}(W_{i,j})\| = \frac{1}{nm} \sqrt{\sum_{i,j} \frac{(W_{i,j}^{n+1} - W_{i,j}^n)^2}{\Delta t}} \quad (5.11)$$

Aby byla simulace prohlášena za ukončenou, musí reziduum splňovat tuto podmínku:

$$\frac{\|\text{Res}(W_{i,j})\|_n}{\|\text{Res}(W_{i,j})\|_5} \leq \varepsilon \quad (5.12)$$

$$\|\text{Res}(W_{i,j})\|_5 = \max_{1 \leq n \leq 5} \|\text{Res}(W_{i,j})\|_n$$

$\varepsilon$  je námi volený vektor konvergence.

Zvolme nyní libovolně parametry pro test vytvořeného schématu.

- $L = 2$
- $H = 1$
- $\Delta P = 1.6$
- $\rho = 10$
- $\text{Re} = 10$
- $N = 50$  uzlů ve směru  $x$
- $M = 25$  uzlů ve směru  $y$
- $\beta = 1$

**ZDE POZDĚJI PŘIDAT ČÁST O DISKRETIZACI SÍTĚ.**

Musíme nyní zavést podmínky pro uzly sítě, které nemají kompletní výpočetní buňku - tzv. okrajové podmínky. Jedná se o okraje naší obdélníkové sítě.

Ze zadání máme předepsaný tlak na vstupu  $p_{in} = 1.6$  a na výstupu  $p_{out} = 0$  pro každý čas  $t = t_0 + \tau k$ , a tedy:

$$p_{0,m}^k = 1.6 \quad p_{N,m}^k = 0, \quad m \in \{0, 1, 2, \dots, M\} \quad \forall k \quad (5.13)$$

Z podmínky přilnavosti na stěnách víme, že zde musí být rychlost nulová:

$$u_{n,0}^k = v_{n,0}^k = 0 \quad u_{n,M}^k = v_{n,M}^k = 0 \quad n \in \{0, 1, 2, \dots, N\} \quad \forall k \quad (5.14)$$

Zaveďme ještě počáteční podmínky, ze kterých bude řešič vycházet - hodnoty s indexem  $k = 0$ . Předepíšeme nulový tlak všude až na vstupovou vrstvu, kde platí okrajová podmínka 5.13. Počáteční

horizontální rychlost uvedeme rovnou  $u = 1$  všude až na stěny, kde platí okrajová podmínka. Počáteční vertikální rychlost nechť je všude nulová.

Prvotní nastavení kanálu tedy neodpovídá fyzikálnímu modelu toku, pokud je však náš řešič napsán správně, měl by po čase konvergovat k realistickému odhadu.

Dosažením zvolených parametrů do (4.6) získáváme přesný analytický předpoklad maximální rychlosti:

$$u_{max} = -\frac{1}{8} \cdot \frac{-1.6 \cdot 10 \cdot 1}{2 \cdot 10} = 0.1$$

Po 400000 iteracích numerického řešiče se maximální horizontální rychlost  $u_{max}$  ustálila okolo hodnoty  $u_{max} = 0.096$ . Jedná se o 4% rozdíl, který by šlo jednoduše zmenšit zjemněním sítě. (POZDĚJI MŮŽU POROVNAT PRO RŮZNÉ JEMNOSTI)

Porovnání rychlostního profilu získaného numerickým řešením s teoretickým (4.6) lze vidět na následujícím obrázku (4):

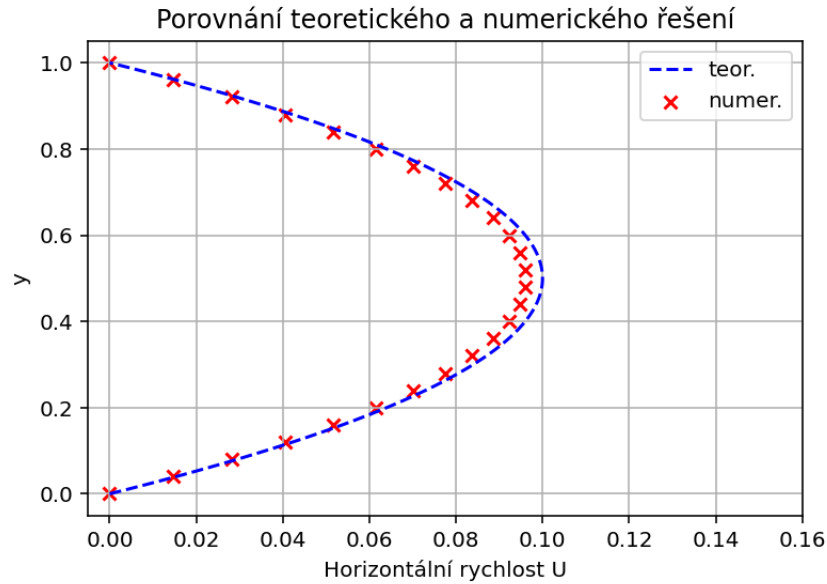


Figure 4: Porovnání přesného řešení s numerickým

Schéma se tedy skutečně z nerealistických počátečních podmínek ustálilo na numerickém řešení, které přibližně odpovídá teoretickému parabolickému profilu.

Schématické znázornění rozložení rychlostí v kanálu je na následujících obrázcích. Lze vidět, že horizontální proudění se ustálilo v celé délce kanálu a že vertikální složky rychlosti se dle očekávání blíží výpočetní nule.

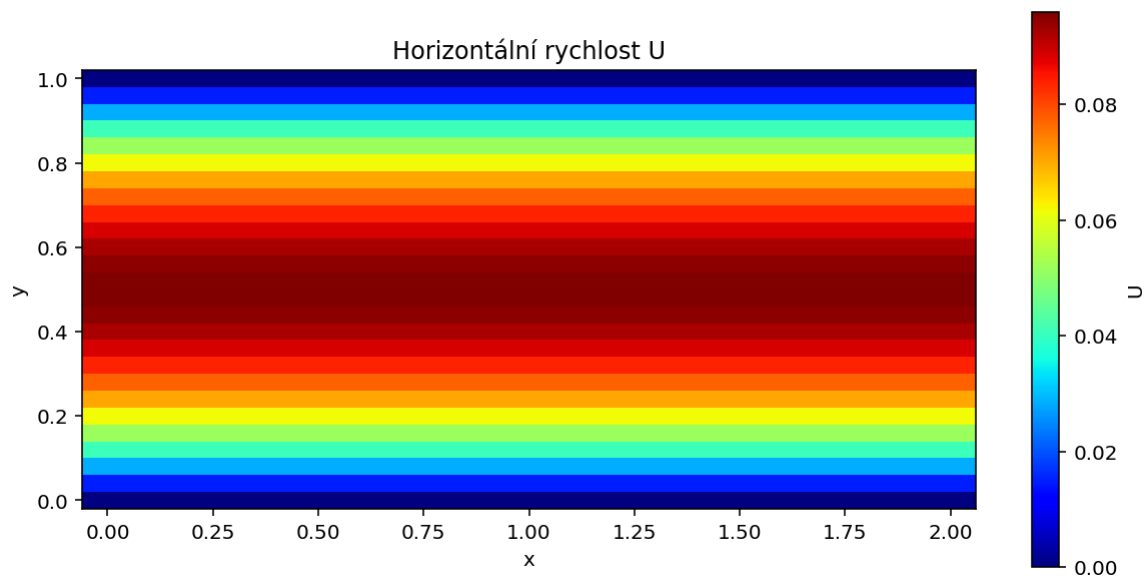


Figure 5: Rozložení horizontální rychlosti

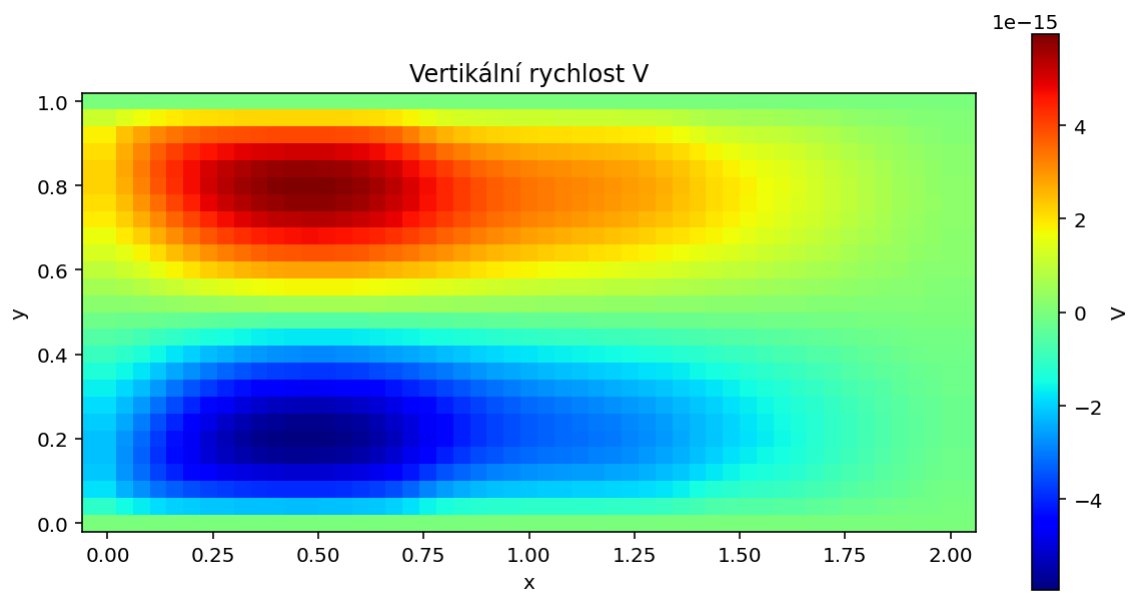


Figure 6: Rozložení vertikální rychlosti

Výsledné rozložení tlaku v kanálu je následující (7). Z původního nerealistického nastavení (nenulová hodnota pouze na vstupu) tedy došlo k vytvoření lineárního poklesu mezi vstupem a výstupem odpovídajícímu teoretickému odvození (3.13).

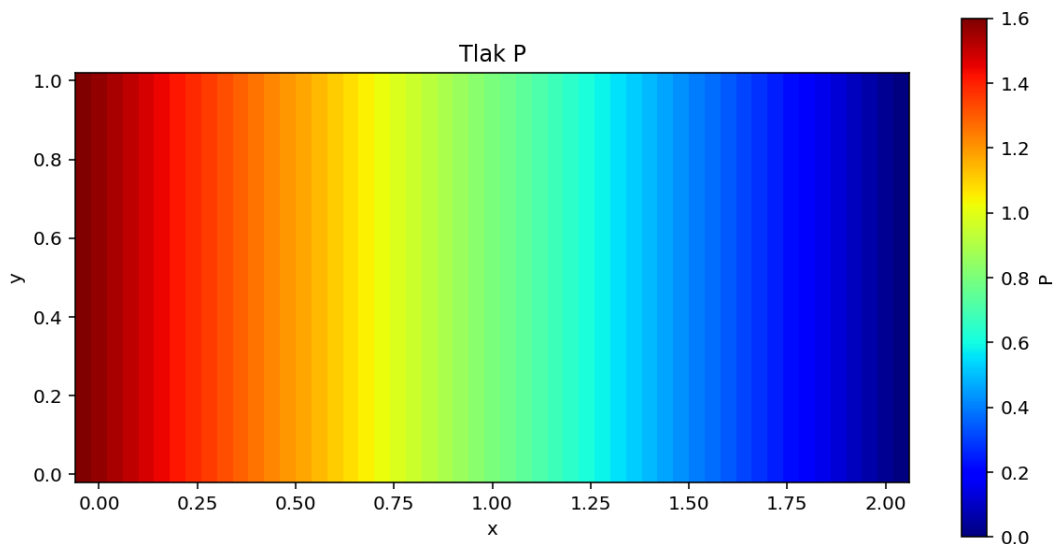


Figure 7: Rozložení tlaku

Průběh reziduí řešiče je znázorněn v následujícím grafu (8). Je tedy zřejmé, že všechny tři výpočetní proměnné po daném počtu iterací došly k ustáleným hodnotám.

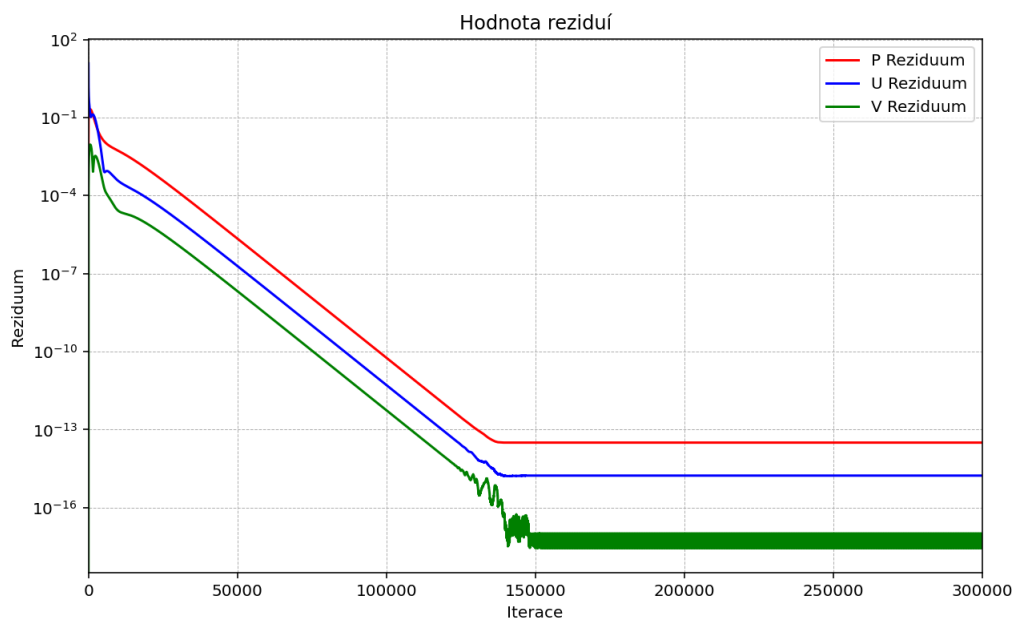


Figure 8: Průběh reziduí