

## 6 2D proudění Newtonovské tekutiny okolo válce pomocí Mac-Cormackova schématu

Použijme nyní předešlé schéma a upravme ho pro výpočet proudění okolo hladkého válce. Jedná se o klasický příklad, pro nějž existuje škála experimentálních dat, s kterými lze výsledky porovnat. Exaktní řešení je v současnosti dosažitelné jen pro ideální případ potenciálního proudění.

K zavedení válce do výpočetní sítě použijme tzv. **Immersed boundary** metodu. Ta umožňuje použít schéma z předešlého příkladu proudění mezi dvěma deskami jen s minimálními změnami. Její největší výhodou je implementace vybrané geometrie (v našem případě kruhu) za použití jednoduché obdélníkové výpočetní sítě.

Mějme kruh se středem  $[x_s, y_s]$  a o poloměru  $R$ . Libovolný uzel výpočetní sítě  $P_{i,k}$  se souřadnicemi  $[x_i, y_k]$  je součástí kruhu, splňuje-li podmínku:

$$\sqrt{(x_i - x_s)^2 + (y_k - y_s)^2} \leq R \quad (6.1)$$

Zavedme nyní pro každý bod proměnnou  $a_{i,k}$ , která bude nabývat 0 nebo 1 dle následující podmínky:

$$a_{i,k} = \begin{cases} 0 & P_{i,k} \text{ je v kruhu} \\ 1 & P_{i,k} \text{ je mimo kruh} \end{cases} \quad (6.2)$$

Přenasobením příslušných veličin touto proměnnou se do schématu zavádí vliv válce na proudění. Vzniká tím oblast přibližného tvaru kruhu (přesnost podobnosti závisí na hustotě sítě), ve které jsou obě složky rychlosti nulové - tak jako tomu je v realitě. K přenasobení dochází v prediktorové i korektorové sekci. Pozměněné schéma je pak následující - ke změně došlo v krocích (6.4) a (6.7):

**Prediktor:**

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial W}{\partial t} \right)_{i,j}^n &= \mathbf{D}_\beta^{-1} \left[ -\frac{F_{i,j}^n - F_{i-1,j}^n}{\Delta x} - \frac{G_{i,j}^n - G_{i,j-1}^n}{\Delta y} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\text{Re}} \mathbf{D} \left( \frac{W_{i+1,j}^n - 2W_{i,j}^n + W_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} + \frac{W_{i,j+1}^n - 2W_{i,j}^n + W_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (6.3)$$

$$\widetilde{W}_{i,j}^{n+1} = a_{i,j} \left[ W_{i,j}^n + \Delta t \left( \frac{\partial W}{\partial t} \right)_{i,j}^n \right] \quad (6.4)$$

**Korektor:**

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \widetilde{W}}{\partial t} \right)_{i,j}^{n+1} &= \mathbf{D}_\beta^{-1} \left[ -\frac{\widetilde{F}_{i+1,j}^{n+1} - \widetilde{F}_{i,j}^{n+1}}{\Delta x} - \frac{\widetilde{G}_{i,j+1}^{n+1} - \widetilde{G}_{i,j}^{n+1}}{\Delta y} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\text{Re}} \mathbf{D} \left( \frac{\widetilde{W}_{i+1,j}^{n+1} - 2\widetilde{W}_{i,j}^{n+1} + \widetilde{W}_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta x^2} + \frac{\widetilde{W}_{i,j+1}^{n+1} - 2\widetilde{W}_{i,j}^{n+1} + \widetilde{W}_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta y^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (6.5)$$

**Nová časová vrstva:**

$$\left( \frac{\partial W}{\partial t} \right)_{i,j}^{n+1/2} = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial W}{\partial t} \right)_{i,j}^n + \left( \frac{\partial \widetilde{W}}{\partial t} \right)_{i,j}^{n+1} \right] \quad (6.6)$$

$$W_{i,j}^{n+1} = a_{i,j} \left[ W_{i,j}^n + \Delta t \left( \frac{\partial W}{\partial t} \right)_{i,j}^{n+1/2} \right] \quad (6.7)$$

Uvažujme umístění válce do volného proudění tekutiny namísto kanálu. Neovlivněným volným prouděním se myslí takové, které má ve všech bodech stejný tlak a stejnou velikost a směr rychlosti.

**Počáteční podmínky** bezrozměrného výpočtu tedy nastavme následovně:

$$p_{i,k}^0 = 0 \quad \forall i, \forall k$$

$$u_{i,k}^0 = 1 \quad \forall i, \forall k$$

$$v_{i,k}^0 = 0 \quad \forall i, \forall k$$

Nad nastavením **okrajových podmínek** a velikostí sítě je nyní nutné vést diskuzi. V dokonalém případě by měla výpočetní síť být tak velká v porovnání s válcem, aby se na všech jejích okrajích proudění opět vrátilo do neovlivněného tvaru. Pro prvotní testování schématu je tato možnost časově příliš náročná, snažme se proto tento nedostatek pro začátek kompenzovat vhodným nastavením okrajových podmínek.

Posuzovány budou následující kombinace okrajových podmínek pro rychlosti:

- **DDD**: Dirichletova podmínka na vstupním, horním i dolním a výstupním okraji oblasti
- **DDN**: Dirichletova podmínka vstupním, horním i dolním okraji, na výstupu podmínka Neumannova.
- **DNN**: Dirichletova podmínka jen na vstupním okraji, na zbytku podmínka Neumannova.
- **NNN**: Neumannova podmínka na všech okrajích oblasti.

**Pro tlak je vždy nastavena Neumannova podmínka.** Intuitivně tím vycházíme ze skutečnosti, že volné proudění je pro tento případ poháněné vstupní rychlostí a ne tlakovým spádem.

Nyní však vyvstává otázka zda koeficientem  $a_{i,k}$  přenásobovat jen rychlosti, anebo i tlak. Otestovány budou oba přístupy na DNN nastavení sítě a následně porovnány s experimentálními daty. Přístup blíže odpovídající realitě bude použit k testování zbylých nastavení okrajových podmínek. Intuitivně lze opět předpokládat, že k realističtějšímu odhadu dojde, bude-li schéma ve válci nulovat pouze rychlosti, jelikož tlak může válcem prostupovat.

Navrháme pro začátek obdélníkovou síť a proudění s následujícími parametry. Okrajové podmínky nechť jsou typu DNN.

- |             |                      |
|-------------|----------------------|
| • $L = 2$   | • $R = \frac{L}{20}$ |
| • $H = 1$   | • $Re = 0.01$        |
| • $N = 160$ | • $\rho = 1$         |
| • $M = 120$ | • $U_\infty = 1$     |

Vzhledem k nízkému Reynoldsovu číslu převažují vazké síly nad silami setrvačnosti a jedná se o tzv. **Stokesovo proudění**. Výsledky pro oba případy jsou zobrazeny na dalších dvou stránkách. Ihned je zřejmé, že v obou případech se nachází chyba - všechny zřejmé chyby budou záhy diskutovány. Nyní je však nutné vybrat si, zda budeme či nebudeme nulovat tlak uvnitř válce. Rozložení vertikální rychlosti a tlaku okolo válce je blíže skutečnosti pro první případ, při kterém nedochází k vynulování tlaku. Zaměříme-li se na vertikální rychlost, jsou zde viditelné dvě kladné a dvě záporné oblasti odpovídající správnému směru obtékání - u případu přenulování jsou tyto oblasti pouze dvě a vzhledem k jejich umístění by v nich nemohlo docházet k obtékání válce. Při přenulování tlaku zároveň vidíme, že dochází k přesunu oblasti nízkého tlaku zpoza válce i před něj - to neodpovídá skutečnosti Stokesova proudění. Pracujme proto nadále jen s případem nenulování tlaku uvnitř válce a snažme se diagnostikovat všechny jeho chyby.

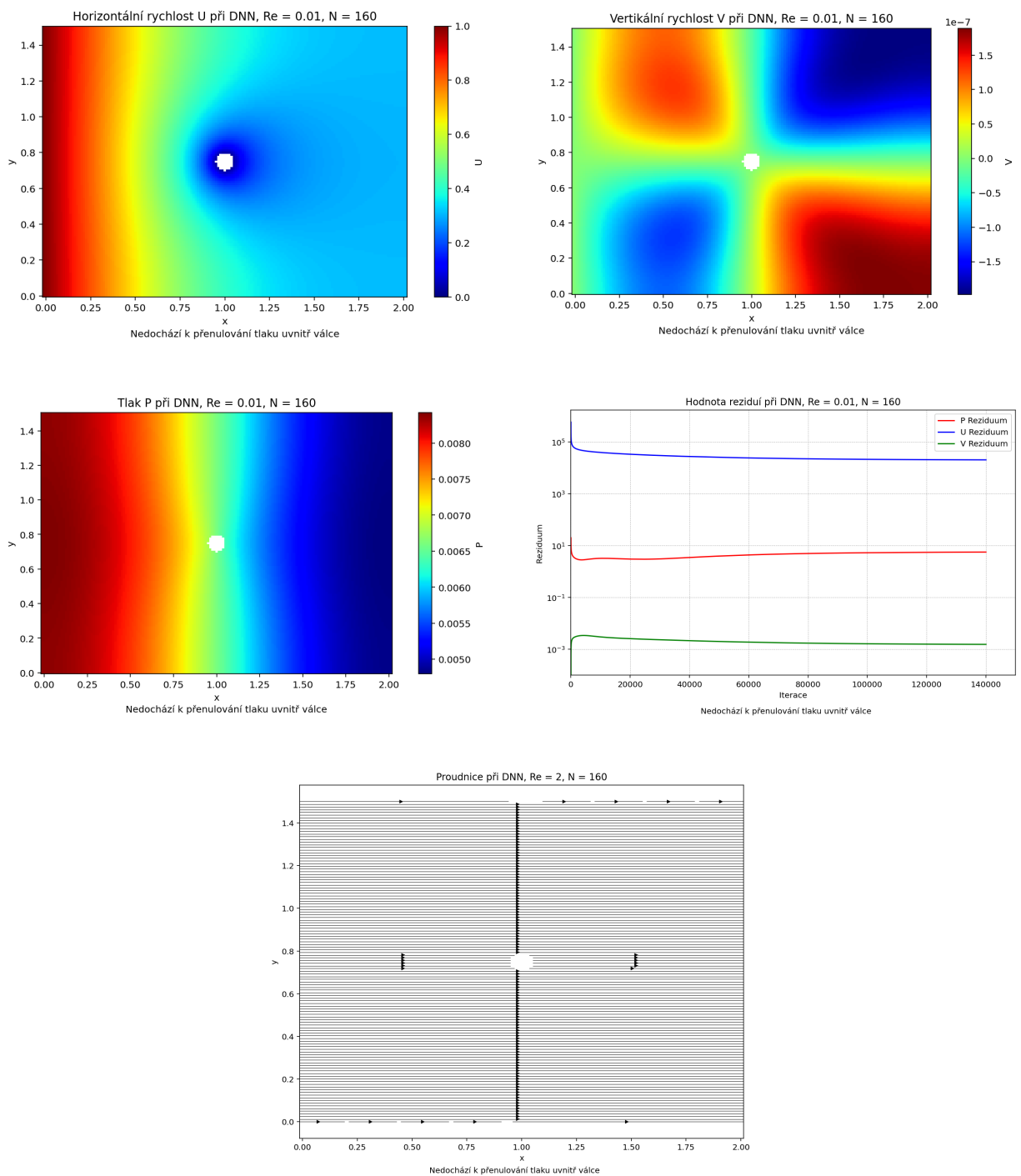


Figure 9: Výsledky sítě  $160 \times 120$  při nenulování tlaku uvnitř válce a okrajové podmínce DNN

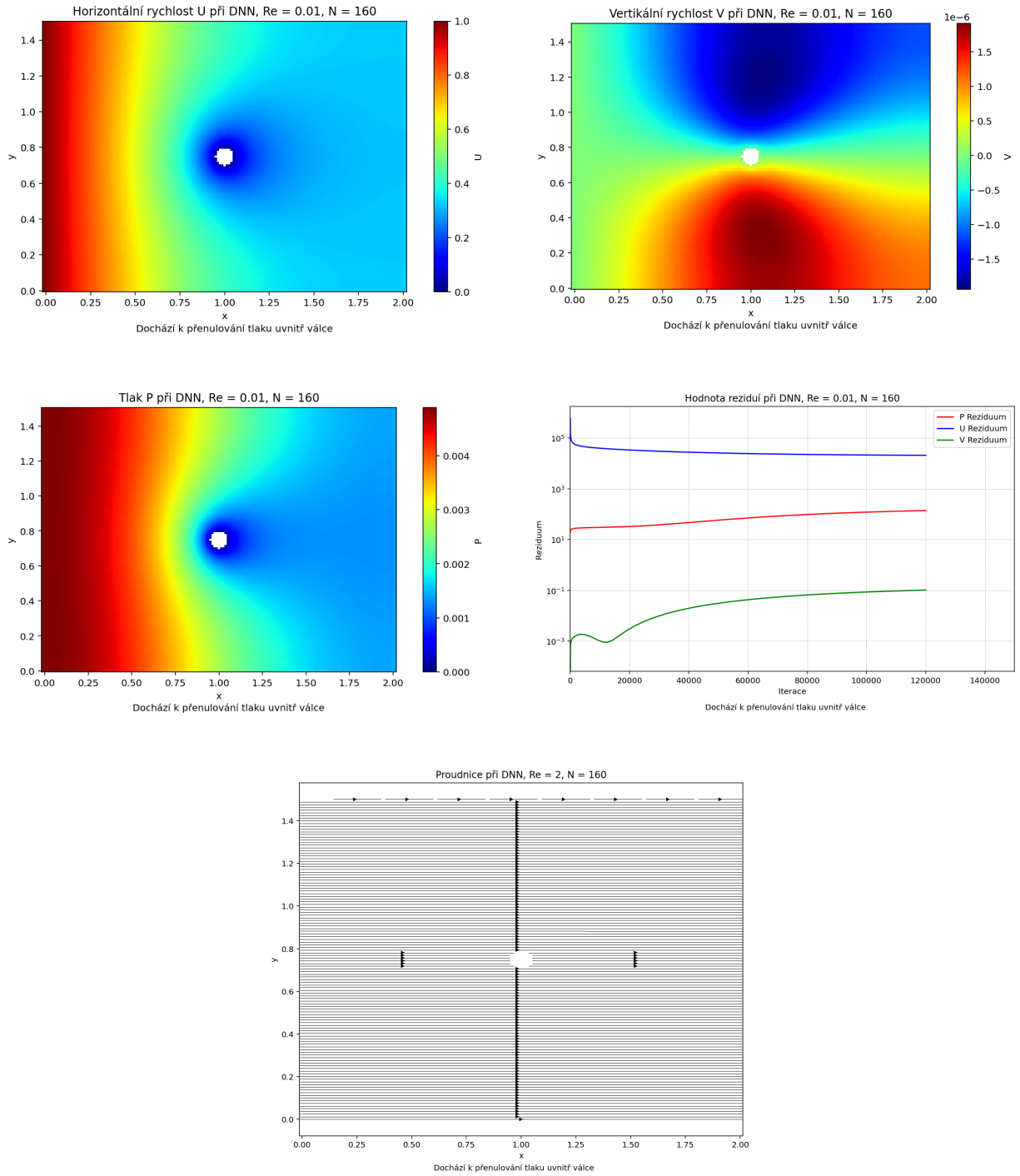


Figure 10: Výsledky sítě  $160 \times 120$  při přenulování tlaku uvnitř válce a okrajové podmínce DNN

Nejzřejmější chybou ve výsledcích je, že ve skutečnosti nedochází k obtékání válce. Lze to vidět na zobrazení proudnic (NAUČIT SE V PYTHONU DĚLAT PĚKNĚJŠÍ PROUDNICOVÉ GRAFY). I přesto, že chování vertikální složky rychlosti by pro začátek přibližně odpovídalo obtékání válce, její velikost je všude řádově několikrát menší než horizontální složka. Takový výsledek je nefyzikální a je třeba zjistit, kde je chyba, která jej způsobuje. Velikost konečných reziduí zároveň jasně ukazuje, že nedochází k ustálení proudu. Stokesovo proudění není turbulentní a fyzikálně tak musí dojít do stacionárního stavu.

Zkusme nyní, ještě před hledáním chyby v programu/metodě, otestovat jiné nastavení proudění a sítě. Pro rychlejší výpočet použijme řidší síť o hustotě  $100 \times 75$ . Porovnejme různá Reynoldsova čísla:  $Re = \{0.01, 1, 2, 20, 40\}$ . Okrajové podmínky zůstanou typu DNN. Zároveň došlo ke zvětšení válce.

Grafické výstupy jsou zobrazeny na následujících stránkách. Je zřejmé, že pro vyšší Reynoldsova čísla se chování schématu slabě lepší. Narůstá velikost vertikální složky rychlosti, je viditelné zakřivení proudnic okolo válce. Nicméně pro takto vysoká Reynoldsova čísla by se za válcem měly již tvořit minimálně oblasti uzavřeného proudění. Zároveň je z grafu proudnic jasné, že proudění stále válec řádně neobtéká. Rezidua pro větší  $Re$  sice konvergují k menším hodnotám, stále jsou ale řádově mnohonásobě vyšší než by měly být pro ustálené proudění.

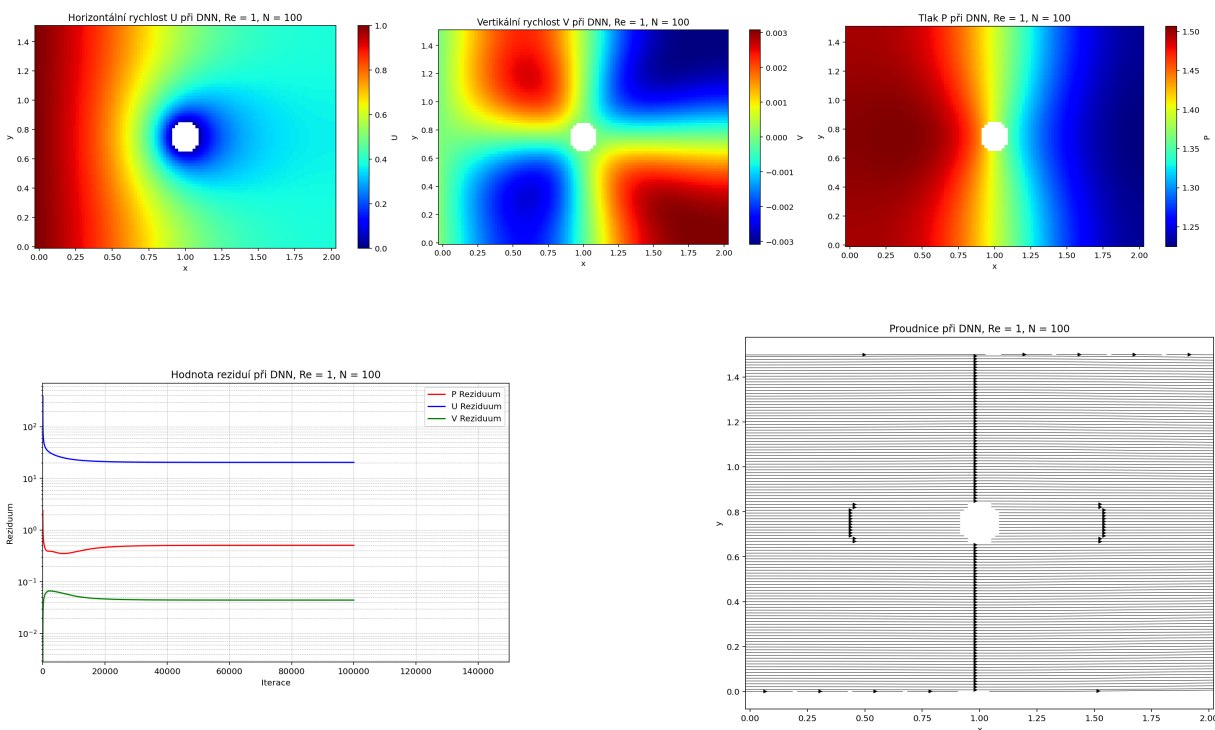


Figure 11: Výsledky při DNN,  $Re = 1$ ,  $N = 100$

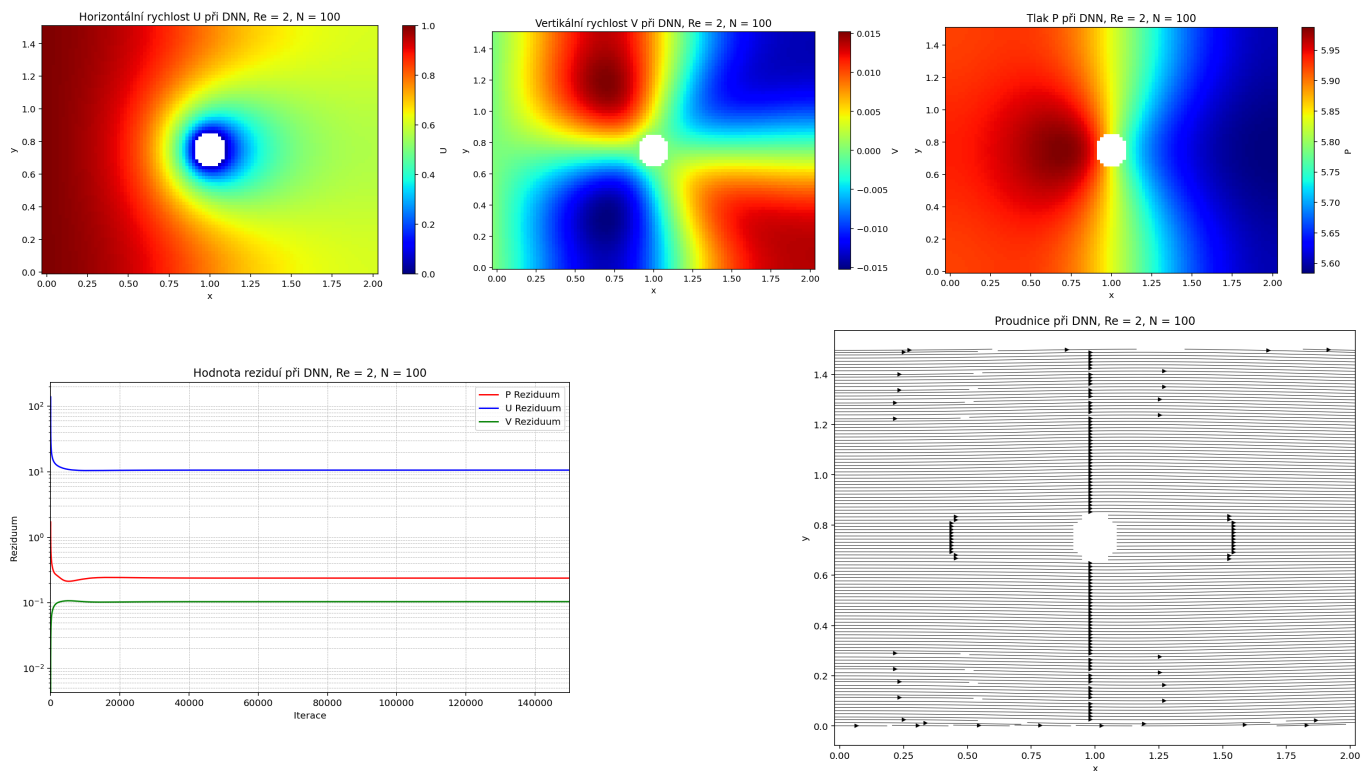


Figure 12: Výsledky při DNN,  $Re = 2$ ,  $N = 100$

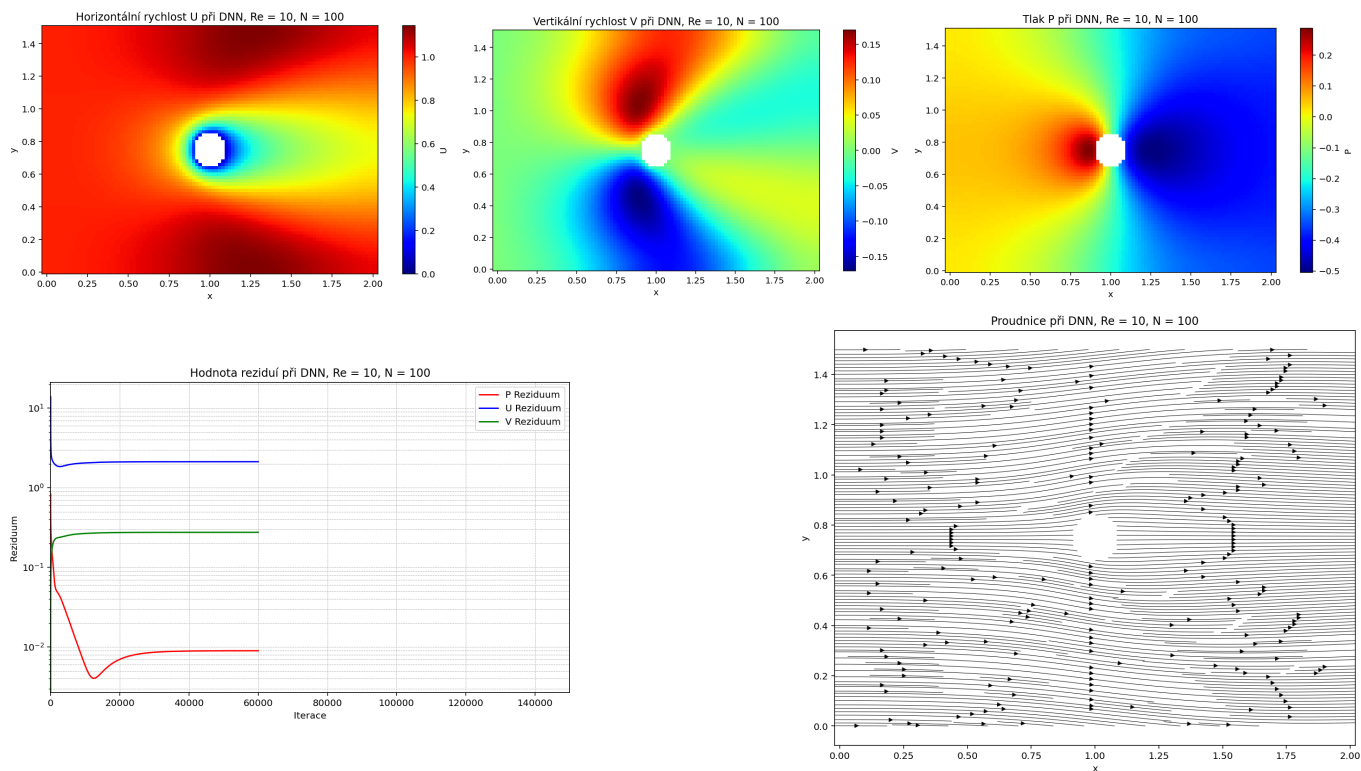


Figure 13: Výsledky při DNN,  $Re = 10$ ,  $N = 100$

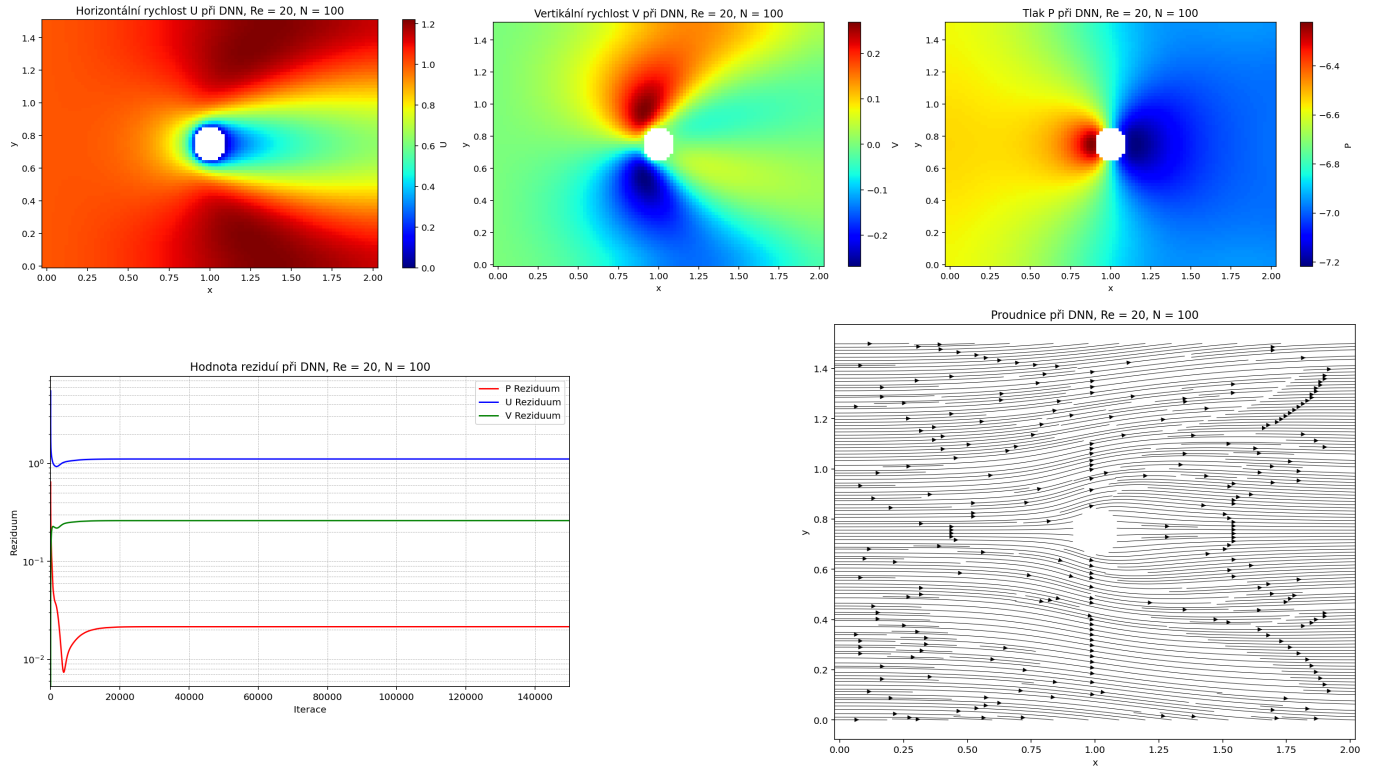


Figure 14: Výsledky při DNN,  $Re = 20$ ,  $N = 100$

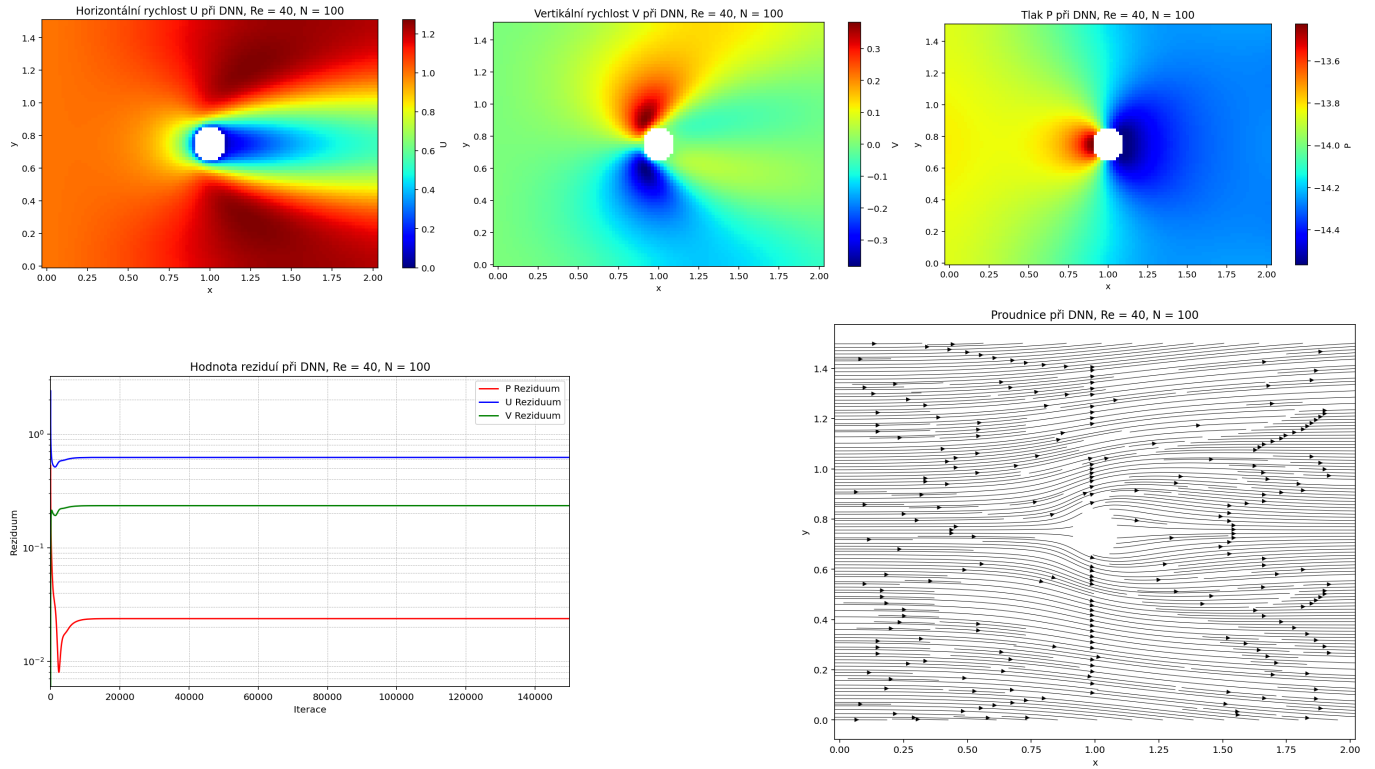


Figure 15: Výsledky při DNN,  $Re = 40$ ,  $N = 100$

Z chybných výsledků tedy vyvstává zásadní otázka: **proč jsou vertikální složky rychlostí diametrálně menší, než by měly být?** Je nutné zjistit, zda se jedná o chybu schématu, chybu programu, malou hustotu sítě (rozlišení kruhu), nedostatečnou velikost výpočtové oblasti, či chybu v okrajových podmínkách. Je mi jasné, že použít případ DNN na okrajové podmínky není ideální, nicméně identické problémy (nerealisticky malá vertikální složka rychlosti, neobtékání válce) se objevují i při jiných nastaveních sítě. **Tuto chybu je nutné co nejdříve najít a vyřešit, aby se mohlo pokračovat v náročnějších simulacích.**

Dobrou zprávou je, že přepsáním samotného řešiče z Pythonu do C++ došlo k mnohonásobnému zrychlení výpočtu. Na běžném laptopu nyní pro síť  $100 \times 75$  dosahuje rychlosti  $22000 \frac{\text{iter}}{\text{h}}$  a pro síť  $160120$  rychlosti  $12000 \frac{\text{iter}}{\text{h}}$ . Všechny budoucí navržené změny tedy půjde téměř okamžitě testovat. Program by šlo ještě mírně zrychlit, nepočítal-li by se časový krok dle  $CFL$  podmínky pro každou iteraci.