4. Odwzorowania liniowe i ich związek z macierzami

Odwzorowanie liniowe

Niech V, W będą przestrzeniami wektorowymi nad tym samym ciałem F. Odwzorowanie $L : V \to W$ nazywamy odwzorowaniem liniowym, jeśli zachodzą warunki:

(L1) (addytywność)

$$L(v_1 + v_2) = L(v_1) + L(v_2), \quad v_1, v_2 \in V,$$

(L2) (jednorodność)

$$L(t \cdot v) = t \cdot L(v), \quad t \in F, \quad v \in V.$$

Związek z macierzami

Odwzorowanie liniowe i macierze są ściśle ze sobą powiązane, zwłaszcza w kontekście skończonych przestrzeni wektorowych.

Wyjaśnienie związku:

1. **Definicja odwzorowania liniowego**: Mówimy, że odwzorowanie $L : V \to W$ między dwoma przestrzeniami wektorowymi V i W nad tym samym ciałem F jest liniowe, jeśli spełnia dwa warunki:
   - $L(v_1 + v_2) = L(v_1) + L(v_2)$ dla każdego $v_1, v_2 \in V$ (addytywność)
   - $L(t \cdot v) = t \cdot L(v)$ dla każdego $t \in F$ i $v \in V$ (jednorodność).
2. **Macierze a odwzorowania liniowe**: Każde odwzorowanie liniowe $L : V \to W$, gdzie V i W są skończonymi przestrzeniami wektorowymi, może być reprezentowane przez macierz. W szczególności, jeśli wybierzemy bazy B_V dla V i B_W dla W, odwzorowanie liniowe L można opisać za pomocą macierzy A w następujący sposób: jeśli $[v]_{B_V}$ jest wektorem kolumnowym koordynatów v względem bazy B_V, wtedy:

   $$[L(v)]_{B_W} = A[v]_{B_V}$$

   Macierz A jest nazywana macierzą odwzorowania liniowego L w odniesieniu do baz B_V i B_W.
3. **Właściwości macierzy odwzorowania**: Wielkość macierzy odwzorowania liniowego zależy od wymiarów przestrzeni wektorowych V i W. Jeśli V ma wymiar n i W ma wymiar m, wtedy macierz A będzie miała rozmiar $m \times n$.
4. **Działania na macierzach a działania na odwzorowaniach**: Mnożenie macierzy odpowiada składaniu odwzorowań liniowych. W szczególności, jeśli mamy dwa odwzorowania liniowe $L_1 : U \to V$ i $L_2 : V \to W$ opisane przez macierze A_1 i A_2 odpowiednio, wtedy składanie tych odwzorowań $L_2 \circ L_1 : U \to W$ odpowiada mnożeniu tych macierzy.

Podsumowując, macierze dostarczają wygodne narzędzie do reprezentowania i analizowania odwzorowań liniowych w skończonych przestrzeniach wektorowych. Gdy mamy do czynienia z określonymi bazami, każde odwzorowanie liniowe jest jednoznacznie określone przez odpowiednią macierz, a operacje na odwzorowaniach liniowych odpowiadają operacjom na macierzach.

Przykład:

Niech $V = \mathbb{R}^2$ oraz $W = \mathbb{R}^2$ będą przestrzeniami wektorowymi nad ciałem liczb rzeczywistych. Rozważmy odwzorowanie liniowe $L : V \to W$ zdefiniowane przez:

$$L \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y \\ x + 3y \end{pmatrix}$$

Chcemy znaleźć macierz tego odwzorowania liniowego względem standardowych baz obu przestrzeni, czyli bazy $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ i $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ dla V oraz W.

1. Aby to zrobić, zastosujemy L do wektorów bazy przestrzeni V:

$$L(e_1) = L\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$

$$L(e_2) = L\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$$

2. Wynikowe wektory umieszczamy jako kolumny macierzy:

$$A = \begin{pmatrix}2 & -1\\1 & 3\end{pmatrix}$$

Macierz A to macierz odwzorowania liniowego L względem standardowych baz przestrzeni V i W. Teraz, mając dowolny wektor $v = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in V$, możemy obliczyć $L(v)$ jako Av.