面向接触仿真的分区 HRBF–PoU 隐式曲面重建
——基于拓扑邻接的局部 Soft-Min 尖锐特征平滑连接（初稿）

（作者信息待补充）

2026 年 1 月 22 日

摘要

本文提出一种面向接触仿真的全局隐式曲面构建方法：首先利用二面角阈值将三角网格切割为若干拓扑光滑区域（regions），在每个区域内部采用局部 Hermite RBF（HRBF）拟合并通过严格 C^2 的分割统一（Partition of Unity, PoU）权重进行高阶连续拼接，得到每个区域的隐式场 $F_i(x)$。针对尖锐边/角点等非光滑特征，本文不采用全局混合，而是提出"拓扑邻接驱动"的局部 Soft-Min（log-sum-exp）连接机制：仅当查询点靠近主区域的尖锐边界时，才将其拓扑相邻区域纳入候选集，并在一条可控宽度 h 的管状邻域内实现平滑过渡。该设计在齿轮齿间狭缝等复杂构型中有效避免"空间近但拓扑不相邻"导致的错误融合（虚假桥接），同时可高效提供接触所需的嵌入深度与法向量（由 ∇F 给出）。文中给出完整的数学定义、光滑性与局部性条件、变量软化尺度 $\varepsilon(x)$ 下的梯度闭式表达，以及数值稳定实现与加速策略。

1 引言

在刚体/柔体接触仿真中，隐式表示（implicit surface）因其可直接提供接触深度与法向信息而具有优势。理想情况下，我们希望获得接近有符号距离场（Signed Distance Field, SDF）的隐式函数 $F(x)$，使得：

- 接触深度可近似为 $d(x) \approx F(x)/\left\|\nabla F(x)\right\|$，或通过少量 Newton 迭代精化；
- 法向可由 $\boldsymbol{n}(x) = \nabla F(x)/\left\|\nabla F(x)\right\|$ 稳定得到；
- 在几何光滑区域内具有高阶连续性（至少 C^2），以减少接触力抖动；
- 能处理包含尖锐边、角点的复杂 CAD/三角网格几何。

然而，尖锐特征与复杂构型（例如齿轮齿间狭缝）会带来两类典型困难：**(i)** 几何在尖锐边处法向不连续，若强行全局高阶光滑拟合会产生过度圆角；**(ii)** 在空间上相互接近但拓扑上不相邻的曲面片（例如狭缝两侧）会导致"包围域/支撑域重叠"，若以空间重叠为融合依据将出现错误桥接，从而破坏接触检测。本文方法的核心思想是：*区域内高阶、区域间仅在拓扑允许的尖锐边界邻域内平滑连接*。这使得模型在大部分区域保持精确与稳定，在尖锐处引入可控的小尺度圆角，从而适用于高精度接触仿真。

2 问题设定与记号

给定定向三角网格 $\mathcal{M} = (V, \mathcal{T})$，其中 $V = \{v_m \in \mathbb{R}^3\}$，$\mathcal{T}$ 为三角面集合。设网格几何曲面为 $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$。

2.1 目标

构造全局隐式函数 $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$，其零水平集

$$\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid F(x) = 0\}$$

逼近 Σ。并支持接触查询：

$$\boldsymbol{n}(x) = \frac{\nabla F(x)}{\|\nabla F(x)\|}, \qquad d(x) \approx \frac{F(x)}{\|\nabla F(x)\|}.$$

2.2 几何查询与 SDF 约束（实现背景）

对于任意点 x，定义最近点映射

$$c(x) = \arg\min_{y \in \Sigma} \|x - y\|, \qquad d_0(x) = \|x - c(x)\|.$$

通过 AABB/BVH 可高效返回最近三角形 $t^*(x) \in \mathcal{T}$ 与最近点 $c(x)$。符号由伪法向（pseudo-normal）或绕数（winding number）给出 $s(x) \in \{-1, +1\}$，从而有符号距离（理想 SDF）

$$\phi(x) = s(x)\, d_0(x).$$

本文使用 $\phi(x)$ 作为拟合数据源（值约束）并可在曲面邻域用网格法向近似 $\nabla\phi$（导数约束）。

3 基于尖锐边的区域分解

3.1 尖锐边检测

对共享边 e 的相邻面 t_a, t_b，设其单位法向为 n_a, n_b，二面角

$$\theta(e) = \arccos(n_a^\top n_b).$$

给定阈值 θ_0，定义尖锐边集合

$$\Gamma = \{e \mid \theta(e) > \theta_0\}.$$

3.2 区域（regions）与尖锐边界

沿 Γ 切割网格，在“非尖锐边连通”意义下得到面连通分量

$$\mathcal{T} = \bigsqcup_{i=1}^{N} R_i,$$

其中 R_i 是第 i 个光滑区域。

定义 1 (区域尖锐边界与对侧映射). 对每个区域 R_i，定义其尖锐边界集合

$$\Gamma_i := \{e \in \Gamma \mid e \subset \partial R_i,\ \text{且跨过}e\ \text{进入另一}R_j\}.$$

对每条 $e \in \Gamma_i$，定义对侧区域映射 $\mathrm{opp}(i, e) = j$。

注记 1. 后文用于尖锐处连接的候选集合必须由 Γ_i（而非空间包围域）触发。该设计是避免齿轮齿间狭缝等“空间近但拓扑不相邻”造成误融合的关键。

4 区域内 HRBF–PoU 隐式场构建

本节在每个区域内部构造一个高阶连续隐式场 $F_i(x)$。为了数学完备性与工程可控性，我们采用：（i）patch 覆盖 + 有限重叠；（ii）严格 C^2 紧支撑权重形成 PoU；（iii）局部 HRBF（值 + 法向方向导数约束）拟合；（iv）patch 常数移位对齐减少漂移。

4.1 patch 覆盖与有限重叠公理

对每个区域 i，选取其重建域 $\Omega_i \subset \mathbb{R}^3$（开集，通常为区域曲面附近的管状邻域）。假设存在 patch 开覆盖 $\{\Omega^{\mathrm{c}}_{im}\}_{m=1}^{M_i}$ 满足：

公理 A2（覆盖与有限重叠）

$$\Omega_i \subset \bigcup_{m=1}^{M_i} \Omega^{\mathrm{c}}_{im}, \qquad \#\{m : x \in \Omega^{\mathrm{c}}_{im}\} \le K,\ \forall x \in \Omega_i.$$

并采用*双半径*：权重半径 ρ^{w}_{im} 与覆盖半径 $\rho^{\mathrm{c}}_{im} > \rho^{\mathrm{w}}_{im}$。

4.2 椭球/OBB patch（推荐）

为抑制硬边两侧跨边混合，优先使用椭球 patch：

$$q_{im}(x) = (x - \xi_{im})^\top Q_{im}(x - \xi_{im}), \qquad Q_{im} \succ 0.$$

定义覆盖域与权重支撑域：

$$\Omega^{\mathrm{c}}_{im} = \{x : q_{im}(x) < (\rho^{\mathrm{c}}_{im})^2\}, \qquad \Omega^{\mathrm{w}}_{im} = \{x : q_{im}(x) \le (\rho^{\mathrm{w}}_{im})^2\} \subset \Omega^{\mathrm{c}}_{im}.$$

在薄壁/狭缝附近，可令 Q_{im} 在法向方向更“薄”，以减少跨缝覆盖（仅用于加速/稳健性；理论正确性由后文拓扑候选集保证）。

4.3 严格 C^2 紧支撑 bump 与 PoU 权重

定义 C^2 紧支撑 bump：

$$\rho(t) = \begin{cases} (1-t)^4(4t+1), & 0 \le t < 1, \\ 0, & t \ge 1. \end{cases}$$

满足 $\rho \in C^2([0,\infty))$ 且 $\rho(1)=\rho'(1)=\rho''(1)=0$。

定义未归一化权重：

$$\tilde{w}_{im}(x)=\rho\left(\frac{q_{im}(x)}{(\rho^{\mathrm{w}}_{im})^2}\right)\geq 0, \qquad S_i(x)=\sum_{k=1}^{M_i}\tilde{w}_{ik}(x),$$

并定义 PoU 权重：

$$w_{im}(x)=\frac{\tilde{w}_{im}(x)}{S_i(x)}.$$

公理 A3-A（分母正下界） 存在常数 $c_w>0$ 使得

$$S_i(x)\geq c_w, \qquad \forall x\in\Omega_i.$$

工程上可通过加密 patch 中心、增大覆盖半径 ρ^{c} 或修补覆盖空洞保证该条件成立。

引理 1 (PoU 权重的 C^2 性). *若 q_{im} 为多项式（或至少 C^2），$\rho \in C^2$ 且 (A3-A) 成立，则 $w_{im}\in C^2(\Omega_i)$ 且 $\sum_m w_{im}\equiv 1$。*

4.4 局部 HRBF：值 + 法向方向导数约束（标量形式）

硬边处法向不连续。因此每个 patch 仅从单一光滑区域 R_i 内采样与拟合，避免跨硬边的矛盾导数约束。

对 patch 内 N 个约束点 (x_j,n_j)，令 $r_j(x)=\|x-x_j\|$，选定标量径向核 $\phi(r)$，并引入一次多项式基

$$p(x)=[1,x,y,z]^\top.$$

采用“源点法向方向导数基”的 HRBF 表示：

$$\boxed{s_{im}(x)=\sum_{j=1}^{N}\alpha_j\,\phi(r_j(x))-\sum_{j=1}^{N}\eta_j\big(n_j\cdot\nabla\phi(r_j(x))\big)+c^\top p(x).}$$

未知量为 $\alpha\in\mathbb{R}^N$、$\eta\in\mathbb{R}^N$、$c\in\mathbb{R}^4$。该形式等价于经典 HRBF 中将向量系数限制为 $\beta_j=\eta_j n_j$，从 $3N$ 降维到 N，更鲁棒且更易稳定。

核导数闭式（$r>0$） 令 $u=(x-y)/r$，则

$$\nabla_x\phi(r)=\phi'(r)\,u, \qquad H_x\phi(r)=\phi''(r)uu^\top+\frac{\phi'(r)}{r}(I-uu^\top).$$

约束条件 给定值目标 f_i（通常靠近曲面取 0，或取采样 SDF 值），法向方向导数目标 g_i（可取 patch 尺度常数或来自 SDF 梯度），施加：

$$s_{im}(x_i)=f_i, \qquad n_i\cdot\nabla s_{im}(x_i)=g_i.$$

线性系统（对称块结构） 定义矩阵块（i 为约束行，j 为中心列）：

$$\Phi_{ij} = \phi(\|x_i - x_j\|), \quad G_{ij} = n_j \cdot \nabla\phi(\|x_i - x_j\|), \quad D_{ij} = n_i \cdot \nabla\phi(\|x_i - x_j\|),$$

$$H_{ij} = n_i^\top H_x \phi(\|x_i - x_j\|) n_j.$$

多项式块：

$$P_{i,:} = p(x_i)^\top = [1, x_i, y_i, z_i], \qquad R_{i,:} = (n_i \cdot \nabla p(x_i))^\top = [0, n_{i,x}, n_{i,y}, n_{i,z}].$$

则未知量 $y = [\alpha; \eta; c]$ 满足

$$\boxed{\begin{bmatrix} \Phi & -G & P \\ D & -H & R \\ P^\top & R^\top & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \eta \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ g \\ 0 \end{bmatrix}.}$$

可在主块加 ridge 正则以抑制噪声与病态：

$$\Phi \leftarrow \Phi + \lambda_\alpha I, \qquad H \leftarrow H + \lambda_\eta I.$$

4.5 patch 常数移位对齐

局部场在导数约束占主导时可能产生 patch 间常数漂移。采用常数移位：

$$\mu_{im} = \frac{1}{n_{im}} \sum_{j=1}^{n_{im}} s_{im}(x_j^{(m)}), \qquad \tilde{s}_{im}(x) = s_{im}(x) - \mu_{im},$$

以改善 overlap 区一致性。常数平移不改变光滑阶数。

4.6 区域隐式场 F_i 的 PoU 拼接

定义

$$\boxed{F_i(x) = \sum_{m=1}^{M_i} w_{im}(x)\, \tilde{s}_{im}(x), \qquad x \in \Omega_i.}$$

由 $w_{im}, \tilde{s}_{im} \in C^2$ 可得 $F_i \in C^2(\Omega_i)$。

5 区域有效域门控与惩罚延拓

为避免某区域在其可信域外参与竞争，构造 C^2 门控 $\chi_i(x) \in [0, 1]$，使得

$$\chi_i(x) = 1 \text{ 于可信核心域 } \Omega_i^{\text{core}}, \qquad \chi_i(x) = 0 \text{ 于 } \mathbb{R}^3 \setminus \Omega_i.$$

定义惩罚延拓：

$$\boxed{\tilde{F}_i(x) = F_i(x) + \lambda(1 - \chi_i(x)),}$$

其中 $\lambda \gg 0$。其作用是：即便域外被纳入候选集，指数权重也会被强烈压制，从而不会产生“融合过深”。

6 全局隐式场：拓扑邻接驱动的局部 Soft-Min

本节给出全局隐式 $F(x)$ 的数学定义，并证明其可避免齿轮狭缝等复杂构型下的误融合。

6.1 主区域选择：由最近三角形确定

通过 BVH 得到最近三角形

$$t^*(x) = \arg\min_{t\in\mathcal{T}} \operatorname{dist}(x,t), \qquad i_0(x) = \operatorname{region}(t^*(x)).$$

注记 2. 当 x 位于中轴（medial axis）上时最近三角形可能不唯一，该集合在 $\mathbb{R}^3$ 中为零测度。真实 SDF 在中轴处本就不可微，本文主要关注曲面邻域与接触查询区域，通常可忽略该集合，或采用固定 tie-break 规则定义 $i_0(x)$。

6.2 只允许“主区域尖锐边界”触发跨区连接

对主区域 i_0，考虑其尖锐边界集合 Γ_{i_0}。进一步将其按对侧区域分组：

$$\Gamma_{i_0\to j} = \{e \in \Gamma_{i_0} \mid \operatorname{opp}(i_0, e) = j\}.$$

定义到该边界组的距离

$$\delta_{i_0\to j}(x) = \operatorname{dist}(x, \Gamma_{i_0\to j}) = \min_{e\in\Gamma_{i_0\to j}} \operatorname{dist}(x, e).$$

给定圆角带宽 $h > 0$，定义边界门控

$$\beta_{i_0\to j}(x) = \rho\left(\frac{\delta_{i_0\to j}(x)}{h}\right) \in [0, 1].$$

注意：当 $\delta \geq h$ 时 $\beta = 0$ 且在 $\delta = h$ 处满足二阶导为 0 的平坦边界性质。

6.3 候选集合与“指数惩罚门控”

令主区域的拓扑相邻集合为

$$\operatorname{Adj}(i_0) = \{j \mid \Gamma_{i_0\to j} \neq \emptyset\}.$$

本文将候选集合固定为

$$C(x) = \{i_0(x)\} \cup \operatorname{Adj}(i_0(x)),$$

并通过能量惩罚确保仅在尖锐边邻域相邻区域才起作用。

定义候选能量：

$$E_{i_0}(x) = \tilde{F}_{i_0}(x),$$

$$E_j(x) = \tilde{F}_j(x) + \Lambda\big(1 - \beta_{i_0\to j}(x)\big), \qquad j \in \operatorname{Adj}(i_0),$$

其中 $\Lambda \gg 0$。当 x 远离 i_0 的边界组 $\Gamma_{i_0\to j}$ 时，$\beta = 0$，于是 $E_j = \tilde{F}_j + \Lambda$，其在 soft-min 中的影响被指数级压制。

6.4 变量软化尺度 $\varepsilon(x)$

定义

$$\beta_{\max}(x) = \max_{j\in \mathrm{Adj}(i_0(x))} \beta_{i_0(x)\to j}(x),$$

$$\boxed{\varepsilon(x) = \varepsilon_{\text{far}} + (\varepsilon_{\text{edge}} - \varepsilon_{\text{far}})\,\beta_{\max}(x), \qquad 0 < \varepsilon_{\text{far}} \ll \varepsilon_{\text{edge}} \sim O(h).}$$

6.5 全局隐式函数定义（Soft-Min / log-sum-exp）

$$\boxed{F(x) = -\varepsilon(x)\,\log \sum_{k\in C(x)} \exp\left(-\frac{E_k(x)}{\varepsilon(x)}\right).}$$

命题 1 (区域内主控与指数抑制). 若对所有 $j \in \mathrm{Adj}(i_0(x))$ 有 $\delta_{i_0\to j}(x) \geq h$，则 $\beta_{i_0\to j}(x) = 0$，从而

$$F(x) = \tilde{F}_{i_0}(x) - \varepsilon(x)\log\left(1 + \sum_{j\in \mathrm{Adj}(i_0)} \exp\left(-\frac{\tilde{F}_j(x) + \Lambda - \tilde{F}_{i_0}(x)}{\varepsilon(x)}\right)\right).$$

特别地，当 $\Lambda/\varepsilon(x) \to \infty$ 时（或在工程上取足够大），有

$$F(x) = \tilde{F}_{i_0}(x) + O\left(e^{-\Lambda/\varepsilon(x)}\right),$$

即主区域在边界邻域外严格主导，且相邻区域影响以指数速度消失。

命题 2 (避免复杂构型误融合：以齿轮齿间狭缝为例). 设 x 位于齿间狭缝，使得 x 同时落入多个区域的空间包围域/*patch* 支撑域内，但狭缝两侧曲面拓扑不相邻（不共享尖锐边界）。则本文定义的候选集合 $C(x)$ 不会包含狭缝对侧的非邻接区域，因而不会产生“跨缝圆角桥接”。当 x 在狭缝中轴附近发生最近三角形切换时，$i_0(x)$ 会切换，这对应真实距离场的最近面切换（几何事实），而不是错误融合。

注记 3. 上述命题表明：包围域重叠只用于加速，不作为融合依据。真正决定融合的仅是“主区域尖锐边界邻域”（通过 Γ_{i_0} 与 $\beta_{i_0\to j}$）。

7 梯度、法向与接触深度：完整闭式表达

7.1 数值稳定的 log-sum-exp

当 h 与 ε 极小（如 10^{-7}～10^{-5}）时，直接计算 $\exp(-E/\varepsilon)$ 易下溢。设

$$a_k(x) = -\frac{E_k(x)}{\varepsilon(x)}, \qquad a_{\max}(x) = \max_{k\in C(x)} a_k(x),$$

则

$$\log\sum_{k\in C}\exp(a_k) = a_{\max} + \log\sum_{k\in C}\exp(a_k - a_{\max}),$$

可稳定计算 $F(x)$ 与 soft 权重。

7.2 soft 权重

定义

$$\pi_k(x) = \frac{\exp(-E_k(x)/\varepsilon(x))}{\sum_{\ell\in C(x)} \exp(-E_\ell(x)/\varepsilon(x))}, \qquad \sum_{k\in C} \pi_k = 1.$$

7.3 变量 $\varepsilon(x)$ 下的完整梯度

记

$$Z(x) = \sum_{k\in C(x)} \exp\left(-\frac{E_k(x)}{\varepsilon(x)}\right), \qquad F(x) = -\varepsilon(x)\log Z(x).$$

在 $i_0(x)$ 固定（远离中轴）且 $C(x)$ 固定的区域内，可得：

定理 1 (完整梯度公式（含 $\nabla\varepsilon$ 项）). 设所有 E_k, ε 在某开集内为 C^1 且 $\varepsilon > 0$，则

$$\boxed{\nabla F(x) = \sum_{k\in C(x)} \pi_k(x)\,\nabla E_k(x) + \frac{\nabla\varepsilon(x)}{\varepsilon(x)}\left(\sum_{k\in C(x)} \pi_k(x) E_k(x) + F(x)\right).}$$

∇E_k 的组成 主区域 $k = i_0$：

$$\nabla E_{i_0} = \nabla \tilde{F}_{i_0} = \nabla F_{i_0} - \lambda \nabla \chi_{i_0}.$$

相邻区域 $k = j$：

$$\nabla E_j = \nabla \tilde{F}_j - \Lambda \nabla \beta_{i_0\to j}.$$

其中

$$\nabla F_i(x) = \sum_m \Big((\nabla w_{im})\, \tilde{s}_{im} + w_{im}\, \nabla \tilde{s}_{im} \Big),$$

且

$$\nabla w_{im} = \frac{\nabla \tilde{w}_{im}}{S_i} - \frac{\tilde{w}_{im}}{S_i^2} \nabla S_i, \qquad \nabla S_i = \sum_k \nabla \tilde{w}_{ik}.$$

7.4 法向与深度

法向：

$$\boldsymbol{n}(x) = \frac{\nabla F(x)}{\|\nabla F(x)\|}.$$

一阶深度近似：

$$d(x) \approx \frac{F(x)}{\|\nabla F(x)\|}.$$

为获得更高精度，可做 1–2 次 Newton 投影到零水平集：

$$x_{t+1} = x_t - \frac{F(x_t)}{\|\nabla F(x_t)\|^2} \nabla F(x_t).$$

Algorithm 1 预处理：分区 HRBF–PoU 与拓扑邻接结构

输入网格 $\mathcal{M}=(V,\mathcal{T})$，阈值 θ_0，参数 $h,\varepsilon_{\mathrm{far}},\varepsilon_{\mathrm{edge}},\lambda,\Lambda$
计算二面角，得尖锐边 Γ
沿 Γ 切割面集，得 regions $\{R_i\}$
构造每个 region 的尖锐边界集合 Γ_i 与对侧映射 $\mathrm{opp}(i,e)$
构造 mesh BVH（最近三角形/最近点），以及每个 Γ_i 的边界距离查询结构（edge BVH）
for 每个 region i **do**
    设计重建域 Ω_i 与 patch 覆盖 $\{\Omega^{c}_{im}\}$（满足 A2）
    在每个 patch 内采样约束点与法向（不跨硬边）
    解局部 HRBF 得 s_{im}，做常数移位得 $\tilde{s}_{im}$
    构造 C^2 权重 w_{im}（满足 A3-A），得 $F_i=\sum_m w_{im}\tilde{s}_{im}$
    构造门控 χ_i 并实现惩罚延拓 $\tilde{F}_i$
end for
输出：$\{F_i,\tilde{F}_i\}$、BVH、$\{\Gamma_i,\mathrm{opp}\}$

Algorithm 2 查询：全局隐式 $F(x)$ 与法向/深度

输入点 x
通过 mesh BVH 得最近三角形 $t^*(x)$ 与主区域 i_0
对 $j\in\mathrm{Adj}(i_0)$ 计算 $\delta_{i_0\to j}(x)$，并得 $\beta_{i_0\to j}(x)$
计算 $\varepsilon(x)=\varepsilon_{\mathrm{far}}+(\varepsilon_{\mathrm{edge}}-\varepsilon_{\mathrm{far}})\max_j\beta_{i_0\to j}(x)$
计算候选能量 E_{i_0} 与 $E_j=\tilde{F}_j+\Lambda(1-\beta_{i_0\to j})$
用稳定 log-sum-exp 计算 $F(x)$ 与 $\pi_k(x)$
由完整梯度公式计算 $\nabla F(x)$，输出 $\boldsymbol{n}=\nabla F/\|\nabla F\|$，深度 $d\approx F/\|\nabla F\|$

8 算法流程与复杂度

8.1 预处理与查询伪代码

8.2 复杂度讨论

- mesh BVH 最近三角形查询：$O(\log|\mathcal{T}|)$；
- 边界距离查询：对固定主区域 i_0，只需查询 Γ_{i_0}（或其分组 BVH），复杂度 $O(\log|\Gamma_{i_0}|)$；
- region 内 F_i 评估：通过 patch 索引取 Top-K patch，仅需 $O(K)$ 次 HRBF/权重评估；
- soft-min 仅在主区域邻接集合上进行，通常候选数很小（CAD 模型常为 2，角点为 3–6）。

9 讨论与局限

- **中轴处不可微性**：最近三角形切换对应真实距离场的不可微集合（中轴），这并非算法缺陷。接触仿真通常在曲面附近工作且可 warm-start，影响可控。
- **参数选择**：h 决定圆角带宽（你可设 $10^{-7} \sim 10^{-5}$），$\varepsilon_{\mathrm{edge}} \sim O(h)$，$\varepsilon_{\mathrm{far}} \ll \varepsilon_{\mathrm{edge}}$；$\Lambda$ 需满足 $\Lambda/\varepsilon_{\mathrm{far}} \gg 1$ 以保证指数抑制；λ 由域外可信度决定。
- **采样策略**：靠近硬边处可降低导数约束强度或仅施加值约束，以避免硬边附近的法向估计噪声对拟合造成放大。

10 结论与后续工作

本文给出一种面向接触仿真的分区隐式曲面重建框架：区域内 HRBF–PoU 提供高阶连续与高精度拟合；区域间采用拓扑邻接驱动的局部 soft-min，仅在尖锐边界邻域进行平滑连接，并通过指数惩罚门控保证在复杂构型（如齿轮狭缝）中不发生错误融合。后续工作包括：更系统的参数自适应（按局部曲率与接触尺度设置 h, ε）、在动态仿真中的 warm-start/缓存策略，以及在非闭合网格与多材料接触下的拓展。

A 附录：完整梯度推导（简要）

令 $F = -\varepsilon \log Z$，$Z = \sum_k \exp(-E_k/\varepsilon)$。则

$$\nabla F = -(\nabla\varepsilon)\log Z - \varepsilon\nabla(\log Z), \qquad \nabla(\log Z) = \sum_k \pi_k \nabla\left(-\frac{E_k}{\varepsilon}\right).$$

且

$$\nabla\left(-\frac{E_k}{\varepsilon}\right) = -\frac{\nabla E_k}{\varepsilon} + \frac{E_k}{\varepsilon^2}\nabla\varepsilon.$$

代入并整理即得正文定理中的闭式表达：

$$\nabla F = \sum_k \pi_k \nabla E_k + \frac{\nabla\varepsilon}{\varepsilon}\left(\sum_k \pi_k E_k + F\right).$$