Probabilités Informations sur le projet

23 mai 2018

Arrivées 1

Recommandations 1.1

- Travailler en temps continu
- Développer avec des lois exponentielles

On suppose que les arrivées se font à des instants aléatoires $T_1, T_2, ..., T_n$.

On pose $T_0 = 0$ et $X_k = T_k - T_{k-1}$

On peut prendre $X_k \sim Exp(\lambda)$ et les X_k indépendants entre eux.

$$T_k = \sum_{i=1}^k X_i \sim \Gamma(k, \lambda)$$

Soit N_t le nombre de requêtes reçues entre [0,t].

$$\mathbb{P}(N_t = k) = \mathbb{P}(T_k \le t < T_{k+1})$$

$$= \mathbb{P}\left(\frac{1}{t}T_k \le 1 < \frac{1}{t}T_{k+1}\right)$$

$$\frac{1}{t}T_k \sim \Gamma(k, \lambda t)$$

$$\frac{1}{t}T_{k+1} \sim \Gamma(k+1, \lambda t)$$

$$= \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

Cf feuille pour le graphique

$$\mathbb{P}(\underbrace{N_7 - N_5}_{\sim P(2\lambda)} = 3) = \frac{(2\lambda)^3}{3!}e^{-2\lambda}$$

2 Service

Enoncé : le temps de service d'une requête est en moyenne de $\frac{1}{\mu}$

On suppose les temps de service indépendants entre eux et on les suppose de loi $Exp(\mu)$.

- $$\begin{split} & S_0 = 0, \ S_1 {\sim} \operatorname{Exp}(\mu) \\ & S_{i+1} = S_i + Y_i \ \text{où} \ Y_i {\sim} \operatorname{Exp}(\mu), \ \text{indépendant des autres} \ Y_j. \end{split}$$

 X_t le nombre de requêtes encore dans le système (en service + file d'attente) à l'instant t

2.1 Un seul serveur

Cf. feuille

— 1 serveur

— Arrivées : $Exp(\lambda)$

— Temps de service : $Exp(\mu)$

Si on pose $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$, en temps long :

$$\mathbb{P}(X_t = k) = \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{N+1}} \rho^k$$

avec $0 \le k \le N$.

Cette formule permet de vérifier les simulations.

Le nombre moyen de requêtes dans le système (en service + dans la file) est en temps long :

$$\mathbb{E}(X_t) = \frac{\rho}{1 - \rho^{N+q_1}} \left(\frac{1 - \rho^{N-1}}{1 - \rho} - N \rho^N \right)$$

Probabilité de perte

$$\mathbb{P}(X_t = N) = \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{N+1}} \rho^N$$

Question Si on sait qu'il y a eu n arrivées de requêtes dans l'intervalle [0,t], comment se distribuent $T_1, T_2, ..., T_n$ sur cet invervalle?

Supposons $N_t = 1, s < t$

$$\begin{split} \mathbb{P}(T_1 \leq s | N_t = 1) &= \frac{\mathbb{P}(T_1 \leq s, N_t = 1)}{\mathbb{P}(N_t = 1)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(T_1 \leq s, T_2 > t)}{\mathbb{P}(N_t = 1)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(T_1 \leq s, T_1 + X_2 > t)}{\mathbb{P}(N_t = 1)} \\ &= \frac{\lambda s e^{-\lambda t}}{\lambda t e^{-\lambda t}} \\ &= \frac{s}{t} \end{split}$$

Donc $(T_1|N_t=1) \sim Unif(0,t)$