Probabilités

Lois des grands nombres et TCL

29 mai 2018

1 Loi des grands nombres

1.1 Énoncé

Soient $X_1, X_2, ...$ une suite de variables aléatoires indépendamment et identiquement distribuées (*iid*), telles que $\mu = \mathbb{E}(X_i)$.

Alors, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i = \mu$$

avec probabilité 1.

1.2 Application

Supposons $B_1, B_2, ...$ des variables aléatoires de loi de Bernoulli $b(p)$ indépendantes, alors :

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} B_i \xrightarrow[n \to +\infty]{} p$$

1.3 Exemple

On répète indépendamment et dans les mêmes conditions une expérience.

On note A_i : l'évènement A s'est produit lors de l'expérience i. Alors on a :

$$\mathbb{P}(A) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{A_i}$$

2 Théorême central limite

2.1 Énoncé

Soient $X_1, X_2, ...$ une suite de variables aléatoires *iid*, telles que : $\mu = \mathbb{E}(X_i)$ et $\sigma^2 = Var(X_i) > 0$

On pose :

— $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$

—
$$\overline{X_n} = \frac{1}{n} S_n$$

—
$$Z_n = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{\overline{X_n} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

Alors :

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(Z_n \leq x) = \Phi(x)$$

Où :

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \, dt$$

On note le résultat

$$Z_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

2.2 Remarque

La vitesse de convergence de $\overline{X_n}$ vers μ est de l'ordre de $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$