



Résolution de l'équation de Stokes avec FreeFem++

Analyse et stabilité des éléments finis

1^{er} février 2020

Auteur :

Damien SANS

Baptiste MISTRAL

Victor LEDERER

Département :

ENSEIRB-MATMECA (M3)

Rapport datant du :

1^{er} février 2020

Cours

ELÉMENTS FINIS AVANCÉS

Enseignante

Lisl Weynans

Résumé

Le présent rapport rend compte du projet FreeFem++ conduit par L. weynans dans le cadre de son cours simulation numérique par éléments finis avancés à l'Enseirb-Matmeca. Le travail porte premièrement sur l'étude de la formulation variationnelle mixte vitesse-pression de l'équation de Stokes. Puis une analyse de la condition inf-sup discrète est donnée en fonction des éléments finis classiques et bulles. Enfin la méthode de résolution numérique est discutée.

Table des matières

Introduction	1
1 Question 1	1
2 Question 2	2
2.1 Unisolvance	2
2.2 Conformité	3
2.3 Éléments de Lagrange P_0 , P_1 et P_2	3
3 Question 3	4
4 Question 4	6
5 Question 5	8
6 Question 6	10
7 Question 7	11
7.1 Estimations d'erreurs	11
7.2 Estimations d'erreurs pour les éléments \mathbb{P}_1 - <i>bulle</i> / \mathbb{P}_1 et $\mathbb{P}_2/\mathbb{P}_1$	12
8 Question 8	12
8.1 Cas test CT1 : Triangle 2D	12
8.1.1 Résultats numériques : Méthode de la pénalisation	13
8.1.2 Résultats numériques : Méthode d'Uzawa	15
8.2 Cas test CT2 : Cube unité	16
8.2.1 Résultats pour la méthode d'Uzawa	17
8.3 Résultats pour la méthode pénalisation	19
8.4 Cas test CT3 : Écoulement de poiseuille dans un cylindre	21
8.4.1 Résultats pour la méthode de la pénalisation	21
8.4.2 Résultats pour la méthode d'Uzawa	23
Conclusion	24
9 Annexes	27
A ANNEXE CT1	27
B ANNEXE CT3	27
C ANNEXE CT3	28
D ANNEXE LBB	29

Table des figures

1	CT1, P1bP1, GMres	13
2	CT1, P1bP1, UMFPACK	13
3	CT1, Oscillations de la MER, $\alpha = E - 7$	14
4	CT1, Evolution de ER en fonction de α	14
5	CT1,Pénalisation,UMFPACK temps CPU	14
6	CT1,Pénalisation,GMres temps CPU	14
7	CT1,Pénalisation, MER GMres P2P1	15
8	CT1,Pénalisation, ER U-P GMres	15
9	CT1,UZAWA, Evolution MER	16
10	CT1,UZAWA, EVOLUTION ER	16
11	Maillage du cas test CT2 avec N=10 points par arete.	17
12	Valeurs iso de pressions calculées avec P2-P1.	18
13	Coupe de la vitesse en y=1 calculée avec P2-P1, N=10.	19
14	Profil de vitesse u_z , avec $u_z(z = 0) = 0,5$	23
15	CT3 : Vitesse, condition débit (UZAWA)	24
16	CT3 : Pression, condition débit (Uzawa)	24
17	CT1, Min ndof	27
18	CT1, Max ndof	27
19	Profil de Poiseuille : vitesse, CT3	27
20	Profil de Poiseuille : Pression, CT3	27
21	Relaxation des CL : Vitesse, CT3	28
22	Relaxation des CL : Pression, CT3	28

Liste des tableaux

1	Equivalence labels-coefficients de pénalisation	12
2	Erreur relative Vitesse-Pression, CT1	15
3	Erreur relative Vitesse-Pression, CT1, Uzawa	15
4	Erreur relative Vitesse-Pression et temps CPU, CT2, Uzawa	17
5	Erreur relative Vitesse-Pression et temps CPU pour P2-P1, CT2, Uzawa	20
6	Erreur relative Vitesse-Pression et temps CPU pour P1b-P1, CT2, Uzawa	20
7	Convergence vers la solution exacte en fonction du type d'éléments (pénalisation)	22
8	Convergence vers la solution exacte sur τ_3	23
9	Convergence vers la solution exacte en fonction du type d'éléments (Uzawa)	23
10	Etude sur le débit (Uzawa)	24

Liste des symboles

Convention d'écriture

a Scalaire

\mathbf{a} Vecteur

$\nabla \bullet \mathbf{a}$ Divergence de \mathbf{a}

$\nabla \mathbf{a}$ Gradient de \mathbf{a}

$\nabla \times \mathbf{a}$ Rotationnel de \mathbf{a}

δ_{ij} Symbole de Kronecker

$\partial_X f$ Notation simplifiée de la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial X}$

Quantités physiques

ρ Masse volumique kg/m^3

μ Viscosité dynamique $kg/m/s^3$ (Pa.s)

ν Viscosité cinématique m^2/s

\vec{g} Accélération de la pesanteur $\|\vec{g}\| = 9,81 m.s^{-2}$

Algèbre tensoriel

\mathbf{A}^T Transposé du tenseur \mathbf{A}

$Tr(\mathbf{A})$ Trace de \mathbf{A}

Variables du problème

\mathbf{X} Position d'une particule fluide matériel $m, \mathbf{X} \in \mathbb{R}^d$

$P(\mathbf{X})$ Pression au point \mathbf{X} $kg/m/s^2$

\mathbf{u} Champ de vitesse du fluide $m/s, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^d$

\mathbf{f}_v Force volumique $kg/m^2/s^2, \mathbf{f}_v \in \mathbb{R}^d$

L Dimension caractéristique de l'écoulement m

U_o Vitesse caractéristique de l'écoulement m/s

Re Nombre de Reynolds

d Dimension du problème

INTRODUCTION

Cette partie donne la forme forte du problème de Stokes à partir de l'équation de Navier-Stokes. Nous poserons aussi les hypothèses nécessaires à sa définition.

Forme forte et hypothèses

Posons l'équation (1) de continuité :

$$\partial_t \rho + \nabla \bullet (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (1)$$

qui se réécrit sous la forme suivante :

$$\partial_t \rho + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \bullet \mathbf{u} = 0 \quad (2)$$

On suppose l'écoulement incompressible, ce qui implique que la dérivée particulaire $\frac{D\rho}{Dt}$ est nulle. Ainsi l'équation de continuité se simplifie sous la forme (3) suivante :

$$\nabla \bullet \mathbf{u} = 0 \quad (3)$$

On peut ainsi considérer l'équation (4) de Navier-Stokes sous la forme suivante :

$$\rho[\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}] = -\nabla P + \mathbf{f}_v + \mu \Delta \mathbf{u} \quad (4)$$

En notant L et U_o respectivement la longueur et la vitesse caractéristique de l'écoulement, il vient (a) : $\rho[\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}] \sim \rho \frac{U_o^2}{L}$ et (b) : $\mu \Delta \mathbf{u} \sim \mu \frac{U_o}{L^2}$. D'où (a) \ll (b) si et seulement si $\frac{\rho L U_o}{\mu} = Re \ll 1$. Autrement dit, les effets inertiels sont négligeables devant les effets visqueux et en faisant l'hypothèse de stationarité, l'équation (5) caractérise le problème de Stokes associé à la condition (6) d'incompressibilité :

$$\nabla P - \mu \Delta \mathbf{u} = \mathbf{f}_v \text{ sur } \Omega \quad (5)$$

$$\nabla \bullet \mathbf{u} = 0 \quad (6)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{g} \text{ sur } \partial\Omega \quad (7)$$

1 Question 1

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^d . On note \mathbf{v} et q les fonctions tests respectivement des espaces fonctionnels V^d et Q . En projetant les équations (5) et (6) sur ces espaces et en intégrant sur le domaine, on a :

$$\int_{\Omega} \nabla(P) \cdot \mathbf{v} \, d\Omega - \int_{\Omega} \mu \Delta(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} \, d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{f}_v \cdot \mathbf{v} \, d\Omega \quad (8)$$

$$\int_{\Omega} \nabla \bullet (\mathbf{u}) \cdot q \, d\Omega = 0 \quad (9)$$

La formule de Green permet d'écrire l'égalité suivante $-\int_{\Omega} \mu \Delta(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} \, d\Omega = \int_{\Omega} \mu \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} \, d\Omega - \int_{\partial\Omega} \mu \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega$. Compte tenu de $Re \ll 1$, les effets visqueux proche paroi nous amène à considérer des conditions de Dirichlet homogènes sur la frontière. Autrement dit on prend $V = H_o^1(\Omega)$ et le terme $\int_{\partial\Omega} \mu \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega$ est congrue à zéro. Pour définir l'espace Q on cherche un champ scalaire de pression à moyenne nulle, ainsi, $Q = \{q \in L^2(\Omega) \mid \int_{\Omega} q \, d\Omega = 0\}$. On définit ainsi la formulation faible par la recherche de $(\mathbf{u}, P) \in V^d \times Q$ tel que $\forall (\mathbf{v}, q) \in V^d \times Q$, on ait la formulation variationnelle faible suivante :

$$\int_{\Omega} P \cdot \nabla \bullet \mathbf{v} \, d\Omega + \int_{\Omega} \mu \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} \, d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{f}_v \cdot \mathbf{v} \, d\Omega \quad (10)$$

$$\int_{\Omega} \nabla \bullet \mathbf{u} \cdot q \, d\Omega = 0 \quad (11)$$

On note l'application $a(\bullet, \bullet)$ de $(H_o^1)^d \times (H_o^1)^d$ dans \mathbb{R} qui à (\mathbf{u}, \mathbf{v}) associe $\int_{\Omega} \mu \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} d\Omega$ qui est bilinéaire continue et coercive. Et l'application $b(\bullet, \bullet)$ de $(H_o^1)^d \times L^2$ dans \mathbb{R} qui à (\mathbf{u}, q) associe $\int_{\Omega} q \cdot \nabla \bullet \mathbf{u} d\Omega$ vérifie la condition LBB. On appelle condition *Inf-Sup* sur $b(\bullet, \bullet)$ ou LBB la condition dite de *Ladyzhenskaya–Babuska–Brezzi* (cf Annexe D) Avec l'application continue linéaire $L(\bullet)$ de $(H_o^1)^d$ dans \mathbb{R} qui à \mathbf{v} associe $\int_{\Omega} \mathbf{f}_v \cdot \mathbf{v} d\Omega$, on peut réécrire la formulation variationnelle mixte : Trouver $(\mathbf{u}, p) \in V^d \times Q$, tel que $\forall (\mathbf{v}, q) \in V^d \times Q$,

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) = L(\mathbf{v}) \quad (12)$$

$$b(\mathbf{u}, q) = 0 \quad (13)$$

2 Question 2

Nous utiliserons les éléments finis de Lagrange tant pour les démonstrations que pour la partie numérique.

2.1 Unisolvance

En méthode des éléments finis, on dit qu'un type d'éléments finis, choisi pour résoudre un problème, est unisolvant lorsqu'il ne permet de construire qu'une seule et unique solution approchée de ce problème.

Un élément fini est défini par un triplet $(K, \mathbb{P}_K, \Sigma_K)$ tel que :

- K est un domaine géométrique. Par exemple, un segment en 1D, un triangle en 2D, un tétraèdre en 3D...
- \mathbb{P}_K est un espace de fonctions sur K , qu'on appelle espace des fonctions de base. C'est lui qui permet de construire une base de l'espace d'approximation V_h de la solution du problème et donc de construire une solution approchée de celui-ci.
- Σ_K est un ensemble de formes linéaires sur \mathbb{P}_K , qu'on appelle degrés de liberté. En d'autres termes, Σ_K définit un ensemble de noeuds (points) de K sur lesquels on calcule la solution approchée.

La solution approchée du problème est définie comme :

$$u^h(x) = \sum_{i=1}^N u_i^h \varphi_i(x)$$

avec N le nombre de noeuds total mis en place dans la résolution du problème, u_i^h la solution approchée au noeud numéro i , et φ_i la fonction de base qui lui est associée. Elle est telle que :

$$\varphi_i(x_j) = \delta_{ij}$$

.

Pour que cette solution soit unique, il ne doit y avoir qu'une seule et unique fonction de base φ , en provenance de \mathbb{P}_K , associée à chaque noeud de la discrétisation du problème. Concrètement, cela signifie que, sur chaque élément du domaine Ω du problème, la fonction de base associée à un de ses noeuds ne doit pouvoir être définie que par une seule et unique fonction en provenance de \mathbb{P}_K , à partir de la donnée de l'ensemble des noeuds de l'élément.

2.2 Conformité

De plus, pour respecter la formulation variationnelle du problème étudié et donc pouvoir approcher correctement la solution exacte de celui-ci, il faut que l'espace fonctionnel d'appartenance de la solution approchée V_h soit conforme à celui de la solution exacte V . Cela signifie que le premier doit être inclus dans le second : $V_h \subset V$. Concrètement, il faut que tout élément de V_h , et donc la solution approchée elle-même, respecte les propriétés auxquelles est soumis tout élément de V .

2.3 Éléments de Lagrange P_0 , P_1 et P_2

Les types d'éléments finis de Lagrange P_0 , P_1 et P_2 consistent à définir la fonction de base de chaque noeud d'un élément à partir d'un polynôme de degré, respectivement, 0, 1, et 2 et de la donnée de l'ensemble des noeuds de l'élément. Puisque que les polynômes de degré 0, 1, et 2 sont, respectivement, de la forme $p_0 = a$, $p_1 = ax + b$ et $p_2 = ax^2 + bx + c$ avec a , b et c des constantes réelles, il faut qu'ils soient soumis à, respectivement, 1, 2, et 3 conditions pour être définis de manière unique. Par conséquent, les types d'éléments finis de Lagrange P_0 , P_1 et P_2 nécessitent la donnée de, respectivement, 1, 2, et 3 noeuds par élément pour être unisolvants.

Dans le cas de l'utilisation d'éléments finis de type Lagrange P_0 , P_1 ou bien P_2 pour la résolution du problème de Stokes, toute fonction de V_h ou bien de Q_h est polynomiale par morceaux par combinaison de fonctions polynomiales par morceaux. Dans le cas d'éléments P_1 ou P_2 , les polynômes qui définissent chacune d'entre elles sont raccordés aux interfaces des éléments. Par conséquent et seulement dans ce cas précis, toute fonction de V_h ou bien de Q_h est continue, bornée, donc de carré intégrable et ses dérivées sont continues par morceaux, bornées et donc de carré intégrales. Pour le cas d'éléments P_0 , ces fonctions polynomiales sont seulement continues par morceaux, bornées et donc seulement de carré intégrables. On peut donc utiliser les types d'éléments finis de Lagrange P_0 , P_1 et P_2 pour construire Q_h tel qu'il soit conforme à Q et seulement les types d'éléments finis de Lagrange P_1 et P_2 pour construire V_h tel qu'il soit conforme à V . Enfin, toute fonction v_h de V_h est définie telle que $v_h|_{\partial\Omega} = 0$ et tout élément q_h de Q_h est définie telle que $\int_{\Omega} q_h d\Omega = 0$. On a donc bien $V_h \subset V$ et $Q_h \subset Q$.

Les types d'éléments finis de Lagrange P_0 , P_1 et P_2 sont donc unisolvants s'ils sont bien construits et permettent de construire des approximations conformes des espaces de fonctions du problème de Stokes si le choix d'un d'eux pour chaque espace de fonctions est fait judicieusement en connaissance de cause.

Montrons le de façon analytique pour les éléments de Lagrange P_0 , P_1 et P_2 en 2D :

Elément P_0 , Unisolvance : on définit l'élément de référence :

- Le triangle K de sommets $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$.
- $\Sigma = a_1 = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$
- $P = P_0 = \{p : K \rightarrow \mathbb{R}, (x_1, x_2) \mapsto a, a \in \mathbb{R}\}$

Soit $p \in P_0$ et a_1 tel que $p(a_1) = \alpha_1$. On a alors $\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, p(x_1, x_2) = \alpha_1$.

Les fonctions de bases locales sur K s'expriment $\tilde{p}_i \in P_0, \tilde{p}_i(a_j) = \delta_{ij}$.

De plus, on a $\text{card}(\Sigma) = \dim(P) = 1$, et Σ est P -unisolvant. Dans ce cas, la fonction de forme locale est :

$$\boxed{\tilde{p}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = 1}.$$

Elément P1, Unisolvance :

- $\Sigma = \{a_1, a_2, a_3\} = \{(0, 0), (1, 0), (0, 1)\}$ les sommets de K
- $P = P_1 = \{p : K \rightarrow \mathbb{R}, (x_1, x_2) \mapsto a + bx_1 + cx_2, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$

Supposons que $p(a_i) = \alpha_i$, $i=1,2,3$ et $p \in P_1$. On a le système :

$$\begin{cases} a = \alpha_1 \\ a + b = \alpha_2 \\ a + c = \alpha_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \alpha_1 \\ b = \alpha_2 - \alpha_1 \\ c = \alpha_3 - \alpha_1 \end{cases}$$

On obtient les fonctions de bases locales sur K telles que $\tilde{p}_i(a_j) = \delta_{ij}$:

$$\begin{cases} \tilde{p}_1(x_1, x_2) = 1 - x_1 - x_2 \\ \tilde{p}_2(x_1, x_2) = x_1 \\ \tilde{p}_3(x_1, x_2) = x_2 \end{cases}$$

Elément P2, Unisolvance :

- $\Sigma = (a_i)_{1 \leq i \leq 6}$ les sommets de K et les centres des arêtes.
- $P = P_2 = \{p : K \rightarrow \mathbb{R}, (x_1, x_2) \mapsto a + bx_1 + cx_2 + cx_1x_2 + ex_1^2 + fx_2^2, (a, b, c, d, e, f) \in \mathbb{R}^6\}$

On définit les coordonnées barycentriques $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq 3}$ dans le triangle K :

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1 - x_1 - x_2 \\ \lambda_2 = x_1 \\ \lambda_3 = x_2 \end{cases}$$

On a bien $\sum_i \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0$. On cherche les fonctions de base $\tilde{p}_i \in P_2$ telles que $\forall i = 1, \dots, 6$ $\tilde{p}_i(a_j) = \delta_{ij}$. On prend $\tilde{p}_1(a_1) = 1$ et $\tilde{p}_i(a_j) = 0$, $\forall i = 2, \dots, 6$ pour commencer. On effectue la recherche de cette manière et ceux pour tous les éléments $(\tilde{p}_i)_{1 \leq i \leq 6}$, on trouve dans la base des coordonnées barycentriques :

$$\begin{cases} \tilde{p}_1(x_1, x_2) = 2\lambda_1(x_1, x_2)(\lambda_1(x_1, x_2) - \frac{1}{2}) \\ \tilde{p}_2(x_1, x_2) = 2\lambda_2(x_1, x_2)(\lambda_2(x_1, x_2) - \frac{1}{2}) \\ \tilde{p}_3(x_1, x_2) = 2\lambda_3(x_1, x_2)(\lambda_3(x_1, x_2) - \frac{1}{2}) \\ \tilde{p}_4(x_1, x_2) = 4\lambda_2(x_1, x_2)\lambda_3(x_1, x_2) \\ \tilde{p}_5(x_1, x_2) = 4\lambda_1(x_1, x_2)\lambda_3(x_1, x_2) \\ \tilde{p}_6(x_1, x_2) = 4\lambda_1(x_1, x_2)\lambda_2(x_1, x_2) \end{cases}$$

On montre facilement que ces fonctions forment une famille libre de P2. De plus, $\text{card}(\Sigma) = \dim(P2) = 6$. Donc Σ est bien P-unisolvant.

3 Question 3

La formulation variationnelle mixte est donc la suivante :

Trouver $(\mathbf{u}, p) \in V^d \times Q$ tq :

$$\begin{aligned} (\forall \mathbf{v} \in V^d) \quad a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) &= L(\mathbf{v}) \\ (\forall q \in Q) \quad b(\mathbf{u}, q) &= 0. \end{aligned} \tag{14}$$

Le problème (14) est bien posé si a est continue coercive et si b vérifie une condition "inf-sup".

Montrons que a est continue coercive : Premièrement, a est trivialement bilinéaire. De plus, on sait que :

$$\forall (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in (V^d)^2, \quad a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \nu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} dx = \nu \sum_{i=1}^d \int_{\Omega} \nabla u_i \cdot \nabla v_i dx. \quad (15)$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \forall (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in (V^d)^2, \quad a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &\leq \nu \sum_{i=1}^d \|\nabla u_i\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|\nabla v_i\|_{L^2(\Omega)} \quad (\text{Hölder}) \\ &\leq \nu \|\nabla \mathbf{u}\|_{(L^2(\Omega))^d} \|\nabla \mathbf{v}\|_{(L^2(\Omega))^d} \\ &\leq \nu \|\mathbf{u}\|_{(H^1(\Omega))^d} \|\mathbf{v}\|_{(H^1(\Omega))^d}, \end{aligned} \quad (16)$$

on montre donc que a est continue.

De plus, d'après le théorème de Poincaré : $\exists C > 0$ t.q. $\|\mathbf{u}\|_{(L^2(\Omega))^d} \leq C \|\nabla \mathbf{u}\|_{(L^2(\Omega))^d}$. Ce qui mène directement à :

$$\boxed{a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \nu \|\nabla \mathbf{u}\|_{(L^2(\Omega))^d}^2 \geq \|\mathbf{u}\|_{(H^1(\Omega))^d}^2.} \quad (17)$$

Donc a est bien une forme bilinéaire continue coercive.

Montrons que b vérifie une condition "inf-sup" : On rappelle premièrement que b est une application de $V^d \times Q$ dans \mathbb{R} telle que :

$$(\forall \mathbf{v} \in V^d, \forall q \in Q), \quad b(\mathbf{v}, q) = - \int_{\Omega} \nabla \bullet \mathbf{v} q dx. \quad (18)$$

Pour pouvoir montrer que b vérifie une condition "inf-sup", on doit d'abord démontrer le lemme suivant :

Lemme : $\exists C > 0 / \forall p \in L^2(\Omega), \exists \mathbf{v} \in (H^1(\Omega))^d$ tel que $\nabla \bullet \mathbf{v} = p$ et $\|\mathbf{v}\|_{(H^1(\Omega))^d} \leq C \|p\|_{L^2(\Omega)}$. De plus si p est à moyenne nulle, alors on peut prendre $\mathbf{v} \in (H_0^1(\Omega))^d$.

Démonstration du Lemme en dimension 2 : Le domaine Ω étant supposé régulier, il existe une unique fonction $w \in H^2(\Omega)$ telle que

$$\begin{aligned} -\Delta w &= p \text{ dans } \Omega \\ w &= 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{aligned}$$

De plus, il existe une constance $C > 0$ indépendante de p telle que

$$\|w\|_{H^2(\Omega)} \leq C \|p\|_{L^2(\Omega)}$$

On choisit alors $\mathbf{v} = -\nabla w$ et la première partie du Lemme est établie.

On suppose maintenant que p est à moyenne nulle. Il existe alors $w \in H^2(\Omega)$ tel que

$$\begin{aligned} -\Delta w &= p \text{ dans } \Omega \\ \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} &= 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{aligned}$$

et de plus on a

$$\|w\|_{H^2(\Omega)} \leq C \|p\|_{L^2(\Omega)}.$$

On pose $\mathbf{v}_1 = -\nabla w$ de sorte que

$$\nabla \bullet \mathbf{v}_1 = p \text{ et } \|\mathbf{v}_1\|_{(H^1(\Omega))^2} \leq C \|p\|_{L^2(\Omega)}.$$

De plus, on a

$$\mathbf{v}_1|_{\partial\Omega} \bullet \mathbf{n} = -(\nabla w)|_{\partial\Omega} \bullet \mathbf{n} = -\frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} = 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

On rappelle le résultat de trace suivant : L'opérateur $\gamma : \mathbf{u} \mapsto (\mathbf{u}|_{\partial\Omega}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}})$ est linéaire, continue et surjectif de $H^2(\Omega)^d$ sur $[H^{3/2}(\partial\Omega)] \times [H^{1/2}(\partial\Omega)]$. Par conséquent, il existe $\mathbf{u} \in H^2(\Omega)^2$ tel que

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= 0 \text{ sur } \partial\Omega \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} &= \mathbf{v}_1 \bullet \mathbf{t} \text{ sur } \partial\Omega \end{aligned}$$

où \mathbf{t} est le vecteur unitaire tangent à $\partial\Omega$. De plus, on a :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}\|_{[H^2(\Omega)]^2} &\leq C \left(\left\| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} \right\|_{[H^{1/2}(\partial\Omega)]^2} + \|\mathbf{u}\|_{[H^{3/2}(\partial\Omega)]^2} \right) \\ &\leq C_{\mathbf{t}} \|\mathbf{v}_1\|_{[H^1(\Omega)]^2}. \end{aligned}$$

La première inégalité vient du fait que l'application trace γ est ouverte. On pose alors

$$\mathbf{v}_2 = \nabla \times \mathbf{u} = \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_2}, -\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} \right).$$

On obtient dans Ω : $\nabla \bullet \mathbf{v}_2 = \nabla \bullet (\nabla \times \mathbf{u}) = 0$. Et sur $\partial\Omega$, en remarquant que $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ sur $\partial\Omega$, il vient $\mathbf{v}_2|_{\partial\Omega} \bullet \mathbf{n} = (\nabla \times \mathbf{u}) \bullet \mathbf{n} = \nabla \mathbf{u} \bullet \mathbf{n} = 0$. De plus, $\mathbf{v}_2|_{\partial\Omega} \bullet \mathbf{n} = \nabla \times \mathbf{u} \bullet \mathbf{n} = -\nabla \mathbf{u} \bullet \mathbf{n} = -\mathbf{v}_1|_{\partial\Omega} \bullet \mathbf{n}$. Ainsi, sur $\partial\Omega$ on obtient :

$$\mathbf{v}_2 = -\mathbf{v}_1$$

On a alors le champ $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ vérifiant :

$$\begin{aligned} \nabla \bullet \mathbf{v} &= p \text{ dans } \Omega \\ \mathbf{v} &= 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{aligned}$$

Finalement :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}\|_{[H^1]^2} &\leq \|\mathbf{v}_1\|_{[H^1]^2} + \|\mathbf{v}_2\|_{[H^1]^2} \\ &\leq C * (\|\mathbf{v}_1\|_{[H^1]^2} + \|\mathbf{u}\|_{[H^2]^2}) \\ &\leq C * \|\mathbf{v}_1\|_{[H^1]^2} \\ &\leq C * \|P\|_{L^2} \end{aligned}$$

FIN DU LEMME.

Soit $q \in Q$. D'après le lemme, il existe \mathbf{w} dans V^d tel que $q = -\nabla \bullet \mathbf{w}$ et $\|\mathbf{w}\|_{(H^1(\Omega))^d} \leq C\|q\|_{L^2(\Omega)}$. On a alors :

$$\begin{aligned} b(\mathbf{w}, q) &= -\int_{\Omega} \nabla \bullet \mathbf{w} q dx = \int_{\Omega} q^2 dx = \|q\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ \implies \frac{b(\mathbf{w}, q)}{\|\mathbf{w}\|_{(H^1(\Omega))^d}} &\geq \frac{1}{C} \frac{b(\mathbf{w}, q)}{\|q\|_{L^2(\Omega)}} = \frac{1}{C} \|q\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Ainsi, on a bien b qui vérifie une condition "inf-sup" de la forme :

$$\boxed{\exists \beta > 0, \quad (\forall q \in Q, \exists \mathbf{w} \in V^d) \quad \frac{b(\mathbf{w}, q)}{\|\mathbf{w}\|_{(H^1(\Omega))^d}} \geq \beta \|q\|_{L^2(\Omega)}}. \quad (19)$$

4 Question 4

Soit $V_h \subset V$ et $Q_h \subset Q$ deux espaces de dimension finie. On suppose que b vérifie la condition "inf-sup" discrète suivante : $\forall q_h \in Q_h, \exists v_h \in V_h, v_h \neq 0, b(v_h, q_h) \geq \beta' \|v_h\|_V \|q_h\|_Q$. Sous cette condition, la formulation mixte discrète admet une unique solution $(u_h, p_h) \in (V_h, Q_h)$.

Pour la formulation matricielle voire la question 6.

Vérifions que la matrice A est symétrique définie positive : Soit $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^d$ non nul, alors

$$\mathbf{u}^T A \mathbf{u} = a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) > 0$$

car a est coercive.

Par ailleurs, on peut déduire de l'expression matricielle que $\mathbf{u} = A^{-1}(F - B^T P)$ et $B\mathbf{u} = 0$. On a donc l'égalité $BA^{-1}B^T P = BA^{-1}F$ et comme A est symétrique définie-positive et B injective par définition de $b(\bullet, \bullet)$, $BA^{-1}B^T$ est aussi définie-positive, on a ainsi $\text{Ker}(B^T) = \{0\}$. Ainsi le système matricielle est bien inversible. On sait que le problème est bien posé si et seulement si b vérifie la condition inf-sup. L'objectif est maintenant de montrer l'équivalence suivante :

$$\underbrace{\text{Inf-Sup}}_{(1)} \iff \underbrace{\text{Ker}(B^T) = 0}_{(2)} \quad (20)$$

Montrons que (1) \Rightarrow (2) : On suppose (1), c'est à dire que

$$\exists \beta' > 0, (\forall q_h \in Q_h), \exists u_h \in V_h, u_h \neq 0, b(v_h, q_h) \geq \beta' \|v_h\|_V \|q_h\|_Q.$$

On décompose les variables dans la base des fonctions de forme tel que :

$$b(u_h, q_h) = \sum_{i=1}^{N_v} \sum_{j=1}^{N_q} u_i q_j b(\phi_i, \psi_j) = (BU, Q) = (U, B^T Q). \quad (H1)$$

avec $U = (u_1, \dots, u_{N_v})^T$, $Q = (q_1, \dots, q_{N_q})^T$. Soit $Q \in \mathbb{R}^{N_q}$ tel que $B^T Q = 0$. Alors on a alors d'après (H1) $q_h = 0$ donc $Q = 0$. On montre ainsi que $\text{Ker}(B^T) = \{0\}$

Montrons que (2) \Rightarrow (1) : On suppose que $\text{Ker}(B^T) = 0$. De ce fait, cette propriété est équivalente à écrire :

$$\exists \beta > 0, \forall q \in Q, \|B^T q\|_V \geq \beta \|q\|_Q$$

On retombe donc sur la condition LBB [1]. De plus, comme a est une forme bilinéaire continue coercive, on obtient la condition *Inf-Sup*. On peut aussi montrer que le problème continu avec ses hypothèses posé sur B n'est pas nécessairement vrai dans le cas du problème discret. En effet, il existe des exemples d'éléments finis pour lesquels la condition "inf-sup" n'est pas vraie.

Contre-exemples des éléments $(\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_1)$ et $(\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_0)$:

— $(\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_1)$

On considère les espaces d'approximation suivants :

$$\begin{aligned} W_h &= \{v_h \in C^0(\bar{\Omega}) | v_h|_K \in \mathbb{P}_1, \forall K \in T_h\} \\ X_h &= W_h \times X_h \cap H_0^1(\Omega)^2 \\ Y_h &= W_h \cap L_0^2(\Omega) \end{aligned}$$

On peut montrer que la condition "inf-sup" n'est pas satisfaite dans le cas des éléments $(\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_1)$. On admet premièrement qu'il existe une fonction $p'_h \in Y_h$ telle que :

$$(\nabla \bullet \mathbf{v}_h, p'_h) = 0, \quad \forall \mathbf{v}_h \in X_h^d. \quad (21)$$

On a donc

$$(\nabla \bullet \mathbf{v}_h, q_h + cp'_h) = (\nabla \bullet \mathbf{v}_h, q_h), \quad \forall \mathbf{v}_h \in X_h^d, \forall q_h \in Y_h, \forall c \in \mathbb{R}. \quad (22)$$

De ce fait, si p_h est solution alors $p_h + cp'_h$ est encore solution. Il n'y a donc pas d'unicité de la pression. Par construction géométrique dans un maillage, on a

$$(\nabla \bullet \mathbf{v}_h, p'_h) = \sum_K \int_K (\nabla \bullet \mathbf{v}_h) p'_h d\mathbf{x} = \sum_K (\nabla \bullet \mathbf{v}_h)|_K \int_K p'_h d\mathbf{x}.$$

Or $\int_K p'_h d\mathbf{x} = 0$, donc $(\nabla \bullet \mathbf{v}_h, p'_h) = 0$ et la condition (21) est vérifiée. L'existence d'un tel p'_h vérifiant (21) montre que la condition "inf-sup" discrète (22) n'est pas vérifiée par les éléments $\mathbb{P}_1/\mathbb{P}_1$.

— $(\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_0)$

Il s'agit aussi dans ce cas de montrer que la condition "inf-sup" discrète n'est pas non plus vérifiée par les éléments $(\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_0)$, où l'espace d'approximation X_h est le même. Cependant, pour la pression on prend l'espace

$$Y_h = \{q_h \in L_0^2(\bar{\Omega}) | q_h|_K \in \mathbb{P}_0, \forall K \in T_h\}.$$

De la même manière, si $p_h \in \mathbb{P}_0$, alors on a $p_h + cp'_h = cte \in \mathbb{P}_0$. La démonstration est donc la même que pour les éléments $\mathbb{P}_1/\mathbb{P}_1$.

5 Question 5

On définit l'élément \mathbb{P}_{1b} . Soient $\lambda_1^K, \lambda_2^K, \lambda_3^K$ les coordonnées barycentriques par rapport au triangle K . On note μ^K la fonction "bulle" associée au triangle K et définie par

$$\mu^K = \begin{cases} \lambda_1^K \lambda_2^K \lambda_3^K & \text{sur } K \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (23)$$

Par définition, on a $\mu|_K^K \in \mathbb{P}_3$ (homogène à un volume d'où le terme "bulle") et $\mu^K = 0$ sur ∂K . Cette fonction est continue sur $\bar{\Omega}$. On considère le sous-espace V_h de $[H_0^1(\Omega)]^2$ défini par

$$V_h = \{\mathbf{v}_h \in C^0(\bar{\Omega})^2 | \mathbf{v}_h(x) = \sum_{i=1}^3 \alpha_i^K \lambda_i^K(\mathbf{x}) + \beta^K \mu^K, \quad \alpha_i^K, \beta_i^K \in \mathbb{R}^2, \quad (24)$$

$$\forall \mathbf{x} \in K, \forall K \in T_h \text{ et } \mathbf{v}_h = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}.$$

Le sous-espace V_h est composé de fonctions continues sur $\bar{\Omega}$, nulles sur le bord et somme d'une fonction affine par morceaux et d'une combinaison linéaire de fonctions "bulles". On a $\dim(V_h) = 2(N_s + N_t)$ avec N_s le nombre de sommets de la triangulation et N_t le nombre de triangles.

Pour la pression, on choisi

$$Q_h = \{q_h \in C^0(\bar{\Omega}) | q_h|_K \in \mathbb{P}_1, \quad \forall K \in T_h\} \cap L_0^2(\Omega). \quad (25)$$

Ici on a $\dim Q_h = N_s - 1$.

Montrons que les éléments $(\mathbb{P}_{1b}, \mathbb{P}_1)$ vérifient la condition "inf-sup" discrète : Montrons qu'il existe $\beta^* > 0$ tel que $\forall q_h \in Q_h, \exists \mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h \neq 0$ tel que

$$b(\mathbf{u}_h, q_h) \leq \beta^* \|\mathbf{u}_h\|_{H^1(\Omega)^2} \|q_h\|_{L^2(\Omega)}. \quad (26)$$

Supposons que la triangulation T_h est uniformément régulière. Soit $q_h \in Q_h$ fixé. Puisque $Q_h \subset Q$ et que b vérifie la condition "inf-sup" continue sur $V \times Q$, il existe un $\mathbf{u} \in V = [H_0^1(\Omega)]^2$ tel que

$$b(\mathbf{u}, q_h) \leq \beta \|\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)^2} \|q_h\|_{L^2(\Omega)}.$$

avec β indépendant de q_h .

$$\begin{aligned} b(\mathbf{u}_h, q_h) &= b(\mathbf{u}, q_h) \\ \|\mathbf{u}_h\|_{H^1(\Omega)^2} &\leq C \|\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)^2} \end{aligned} \quad (27)$$

Où $C > 0$ est une constante indépendante de q_h et de h . Si $Q_h \subset H^1(\Omega)$ alors la condition (22) est équivalente à

$$\int_{\Omega} \mathbf{u}_h \bullet \nabla q_h d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{u} \bullet \nabla q_h d\mathbf{x}$$

Or ∇q_h est constant sur chaque triangle donc il suffit de trouver $\mathbf{u}_h \in V_h$ tel que

$$\begin{aligned} \int_K \mathbf{u}_h d\mathbf{x} &= \int_K \mathbf{u} d\mathbf{x}, \quad \forall K \in T_h \\ \|\mathbf{u}_h\|_{H^1(\Omega)^2} &\leq C \|\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)^2} \end{aligned}$$

On cherche alors $\mathbf{u}_h \in V_h$ vérifiant la condition "inf-sup" discrète. Toute fonction $\mathbf{v}_h \in V_h$ est déterminée par ses valeurs aux sommets qui ne sont pas sur les bords, et ses valeurs d'intégrales sur le triangle K . On a $\forall K \in T_h$:

$$\mathbf{v}_h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^3 \mathbf{v}_h(a_i^K) \lambda_i^K + \beta^K \mu^K, \quad \forall \mathbf{x} \in K$$

$\forall a_i^K$ sommets de K . On trouve β^K avec la relation

$$\int_K \mathbf{v}_h d\mathbf{x} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{v}_h(a_i^K) \int_K \lambda_i^K d\mathbf{x} + \beta^K \int_K \mu^K d\mathbf{x}.$$

On choisit alors $\mathbf{u}_h \in V_h$ tel que

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_h(a_i) &= R_h \mathbf{u}(a_i) \\ \int_K \mathbf{u}_h d\mathbf{x} &= \int_K \mathbf{u} d\mathbf{x}, \quad \forall K \in T_h. \end{aligned}$$

Avec $R_h \mathbf{u} \in V_h$ et l'opérateur défini associé tel que

$$R_h : \begin{matrix} H_0^1(\Omega)^2 \\ \mathbf{u} \end{matrix} \xrightarrow{\quad} \begin{matrix} V_h \\ R_h \mathbf{u} \text{ solution de } \int_{\Omega} \nabla (R_h \mathbf{u} - \mathbf{u}) \bullet \nabla \mathbf{u}_h d\mathbf{x} = 0, \quad \forall \mathbf{u}_h \in V_h. \end{matrix} \quad (28)$$

On a besoin de l'opérateur de projection R_h car $\mathbf{u} \in [H_0^1(\Omega)]^2$ n'est pas nécessairement continue. Il faut donc établir que

$$\mathbf{u}_{h|K} = R_h \mathbf{u}_{|K} + \beta^K \mu^K.$$

On a par intégrale sur l'élément K :

$$\int_K \mathbf{u} d\mathbf{x} = \int_K \mathbf{u}_h d\mathbf{x} = \int_K R_h \mathbf{u} d\mathbf{x} + \beta^K \int_K \mu^K d\mathbf{x},$$

d'où

$$\beta^K = \frac{\int_K (\mathbf{u} - R_h \mathbf{u}) d\mathbf{x}}{\int_K \mu^K d\mathbf{x}}.$$

D'après la définition de μ^K on a

$$\int_K \mu^K d\mathbf{x} = \int_K \lambda_1^K \lambda_2^K \lambda_3^K d\mathbf{x} = \frac{|K|}{60}.$$

En utilisant Cauchy-Schwarz, on obtient

$$|\beta^K| \leq 60 \frac{\|\mathbf{u} - R_h \mathbf{u}\|_{L^2(K)^2}}{\sqrt{|K|}}.$$

Or on sait que $\frac{\pi}{4} \leq \rho^K |K|$ (l'aire du triangle est supérieure à celle du cercle inscrit), ce qui implique que

$$\frac{1}{\sqrt{|K|}} \leq C' \frac{1}{\rho^K} \leq C'' \frac{1}{h}$$

car on suppose que la triangulation est uniformément régulière. Ce qui entraîne alors que

$$|\beta^K| \leq \frac{C}{h} \|\mathbf{u} - R_h \mathbf{u}\|_{L^2(K)^2}$$

avec $C > 0$. D'ailleurs, on sait que

$$\begin{aligned} \|\mu^K\|_{H^1(K)^2} &\leq C \left(h_K + \frac{h_K}{\rho^K} \right) \\ &\leq C' \end{aligned}$$

On obtient donc

$$\|\mathbf{u}_h\|_{H^1(\Omega)^2}^2 \leq C \|\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)^2}^2 + \frac{C}{h^2} \|R_h \mathbf{u} - \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)^2}^2$$

Ce qui nous permet de conclure que

$$\|\mathbf{u}_h\|_{H^1(\Omega)^2}^2 \leq C \|\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)^2}^2.$$

De ce fait, on peut alors conclure que l'élément $(\mathbb{P}_{1b}, \mathbb{P}_1)$ vérifie la condition "inf-sup".

6 Question 6

D'après les questions précédentes (Q1, 10, 13) (Q2) et (Q3,15 et en prenant $v = \varphi_u$ et $q = \varphi_p$ on a les coefficients des matrices A et B tels que :

$$A_{ij} = \int_{T_K} \nu \nabla \varphi_{u,i} \nabla \varphi_{u,j} dX \quad (29)$$

$$B_{ij} = \int_{T_K} \varphi_{p,i} \nabla \bullet \varphi_{u,j} dX = (B^T)_{ji} \quad (30)$$

On construit ainsi la forme matricielle de l'équation de Stokes :

$$\begin{bmatrix} A & B^T \\ B & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix} \quad (31)$$

On a montré que si la condition *Inf-Sup* est vérifié, alors $\text{Ker}(B^T) = \{0\}$ et le système (31) est inversible.

Méthode d'Uzawa On réécrit la matrice de (31) telle que :

$$\begin{bmatrix} A & B^T \\ B & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ B & I \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & -S \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A & B^T \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (32)$$

Cette transformation fait apparaître le complément de Schur noté $S = BA^{-1}B^T$. Pour obtenir l'équation en pression, on élimine U de la première ligne de (31) tel que : $U + A^{-1}B^T P = A^{-1}F$. En multipliant à gauche par la matrice de divergence, il vient : $BU + BA^{-1}B^T P = BA^{-1}F$. Pour trouver l'équation de la pression il suffit de soustraire cette dernière équation par la $BU = \vec{0}$:

$$S.P = B.A^{-1}.F \quad (33)$$

On a ainsi

$$\begin{aligned} B.A^{-1}.F - S.P &= B.A^{-1}.F - BA^{-1}B^T.P \\ &= Bu^{k+1} \end{aligned}$$

On rappelle que le système posé par bloc précédemment permet de poser le problème sous forme matricielle en supposant la matrice A inversible :

$$\begin{array}{ll} \text{Trouver} & \mathbf{u} \in V_h, p \in Q_h \text{ tels que} \\ A\mathbf{u} &= \mathbf{F} - B^T p \\ BA^{-1}B^T p &= BA^{-1}\mathbf{F}. \end{array}$$

La méthode d'Uzawa est la suivante, avec α un réel :

- On initialise p^0, u^0 donnés
- Pour $k > 0$ tant que $B.u^k > TOL$:
- Résoudre $u^{k+1} = A^{-1}(f - B^T p^k)$
- Calculer $p^{k+1} = p^k + \alpha.Bu^{k+1}$

On a $\alpha_{opt} = \frac{2}{1+\beta}$, à moins de connaître β (de la condition *Inf-Sup*), on prend $\beta = 1$ et donc $\alpha = 1$ (cf ([2])).

Méthode de la pénalisation On note α le coefficient de pénalisation de la contrainte d'incompressibilité (6). La valeur de α est arbitraire et est comprise dans l'intervalle $]0; 1]$. Pour imposer une pression à moyenne nulle, on considère α assez petit en supposant que

$$\nabla \bullet \mathbf{u} = \alpha p.$$

Matriciellement, le problème se réduit alors à :

$$\begin{pmatrix} A & B^T \\ B & -\alpha I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (34)$$

Il est nécessaire que α soit très petit pour assurer une bonne solution : entre 10^{-10} et 10^{-6} . En mécanique des solides, la modélisation des matériaux hyperélastiques fait aussi appelle à une formulation mixte. Par exemple le caoutchouc à un coefficient de poisson de 0,5 et est dit incompressible. Numériquement, ce coefficient est entre 0,495 et 0,5, on passe alors d'une description quasi-incompressible à incompressible. Par ailleurs dans ce cas, la condition d'incompressibilité est définie sur le gradient des déformation. Dans les deux cas, elle implique une variation de volume nulle, faisant apparaître des contraintes internes au milieu (P).

7 Question 7

7.1 Estimations d'erreurs

On note $W_h \subset [H^1(\Omega)]^n$ un sous-espace de dimension finie. On fait les hypothèses suivantes pour les espaces d'approximation V_h et Q_h :

- Hypothèse 1 (propriété d'approximation de V_h)
Il existe $\Pi_h \in \mathcal{L}([H^2(\Omega)]^n; W_h) \cap \mathcal{L}([H^2(\Omega)]^n \cap [H_0^1(\Omega)]^n; V_h)$ tel que :

$$\| \mathbf{v} - \Pi_h \mathbf{v} \|_{[H^1(\Omega)]^n} \leq C_1 h \| \mathbf{v} \|_{[H^2(\Omega)]^n} \quad \forall \mathbf{v} \in [H^2(\Omega)]^n, \quad (35)$$

où $C_1 > 0$ est une constante indépendante de h .

- Hypothèse 2 (propriété d'approximation de Q_h)
Il existe $S_h \in \mathcal{L}(H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega); Q_h)$ tel que :

$$\|q - S_h q\|_{L^2(\Omega)} \leq C_2 h \|q\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall q \in H^1(\Omega), \quad (36)$$

où $C_2 > 0$ est une constante indépendante de h .

On suppose que $\Omega \in \mathbb{R}^n$ est un domaine borné, polygonal et convexe. On suppose également que les hypothèses 1 (35) et 2 (36) sont satisfaites ainsi que la condition "inf-sup" discrète (26). Si la solution (\mathbf{u}, p) du problème de Stokes appartient à $[H^2(\Omega)]^n \cap [H_0^1(\Omega)]^n \times (H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega))$, alors on a les estimations suivantes :

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{[H^1(\Omega)]^n} + \|p - p_h\|_{L^2(\Omega)} \leq C' h (\|\mathbf{u}\|_{[H^2(\Omega)]^n} + \|p\|_{H^1(\Omega)}) \quad (37)$$

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{[L^2(\Omega)]^n} \leq C'' h^2 (\|\mathbf{u}\|_{[H^2(\Omega)]^n} + \|p\|_{H^1(\Omega)}) \quad (38)$$

où C' , C'' sont des constantes positives indépendantes de h .

7.2 Estimations d'erreurs pour les éléments $\mathbb{P}_1\text{-bulle}/\mathbb{P}_1$ et $\mathbb{P}_2/\mathbb{P}_1$

Soit $\Omega \in \mathbb{R}^n$ un domaine borné, polygonal et convexe. On suppose que la triangulation T_h est uniformément régulière. Si la solution (\mathbf{u}, p) du problème de Stokes appartient à $[H^2(\Omega)]^n \cap [H_0^1(\Omega)]^n \times (H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega))$ alors, d'après les résultats précédents (7.1), l'approximation (\mathbf{u}_h, p_h) de l'élément $\mathbb{P}_1\text{-bulle}/\mathbb{P}_1$ vérifie :

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{[L^2(\Omega)]^n} + h(\|\nabla(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)\|_{[L^2(\Omega)]^n} + \|p - p_h\|_{L^2(\Omega)}) \leq C h^2 (\|\mathbf{u}\|_{[H^2(\Omega)]^n} + \|p\|_{H^1(\Omega)}) \quad (39)$$

où $C > 0$ est indépendante de h .

Si de plus, la triangulation T_h est telle qu'aucun triangle n'a deux côtés sur le bord $\partial\Omega$, alors l'approximation (\mathbf{u}_h, p_h) de l'élément $\mathbb{P}_2/\mathbb{P}_1$ vérifie la même estimation (39).

8 Question 8

Dans cette question, il s'agit d'appliquer les formulations variationnelles et les méthodes étudiées en effectuant des simulations sur 3 cas tests différents (CT1, CT2 et CT3). Pour l'implémentation, on présente premièrement les méthodes et astuces numériques utilisées qui sont nécessaires pour réaliser ces cas test, avant de présenter les différents résultats sur l'efficacité de ces dernières. Le tableau (1) suivant donne l'équivalence pour les coefficients de pénalisation et les labels des plots.

TABLE 1 – Equivalence labels-coefficients de pénalisation

Labels	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	-1	-2
α	10	1	E-1	E-3	1,5E-5	E-5	1,5E-6	E-6	E-7	E-8	E-9	E-10

8.1 Cas test CT1 : Triangle 2D

Le domaine Ω est le triangle définie par $\{(x, y) \in [0; 1]^2 \mid x + y = 1\}$. On impose le vecteur force volumique $f(x, y) = [1 \quad 1]$. La solution analytique sur Ω pour les champs de vitesse et pression est donnée par :

$$u_e(x, y) = [x \quad -y] \quad (40)$$

$$P_e(x, y) = x + y + c \quad (41)$$

Les conditions aux limites sont telles que :

$$u(x, y) = u_e(x, y), \forall (x, y) \in \partial\Omega$$

P_e étant définie à une constante c près, on la détermine en imposant une pression à moyenne nulle sur Ω . On a alors :

$$\begin{aligned} \int \int (x + y + c) dx dy &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-y} (x + y + c) dx \right) dy \\ &= \int_0^1 \left(\frac{-y^2}{2} + 0,5 + c + c - c * y \right) dy \\ &= \frac{2}{6} + \frac{c}{2} \\ &= 0 \\ \implies c &= \frac{-2}{3} \end{aligned} \tag{42}$$

On présente en annexe A deux des quatres maillages réalisés pour les calculs.

8.1.1 Résultats numériques : Méthode de la pénalisation

Eléments P1bP1 les figurent suivantes (1) et (2) présentent l'évolution de la moyenne des erreurs relatives vitesse-pression (MER). On constate d'une part que la convergence vers une MER de $E - 9$ ne dépend pas directement du type de solveur (itératif ou direct), ni même de du nombre de degrés de liberté (ndof) puisque les variations suivants ses variables sont sensiblement les mêmes. On voit que la MER décroît avec la décroissance de α . Pour $\alpha = E - 7$ on a la meilleur MER $E - 9$. D'autre part, concernant le solveur itératif, cette valeur de la MER est atteinte pour une précision du solveur fixée à $E - 12$.

FIGURE 1 – CT1, P1bP1, GMres

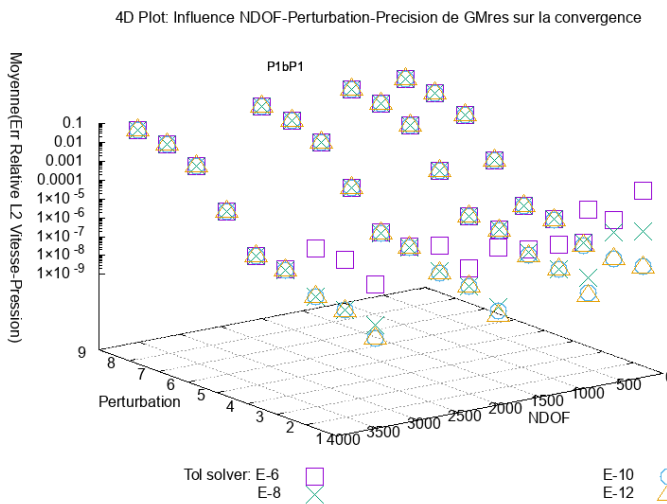
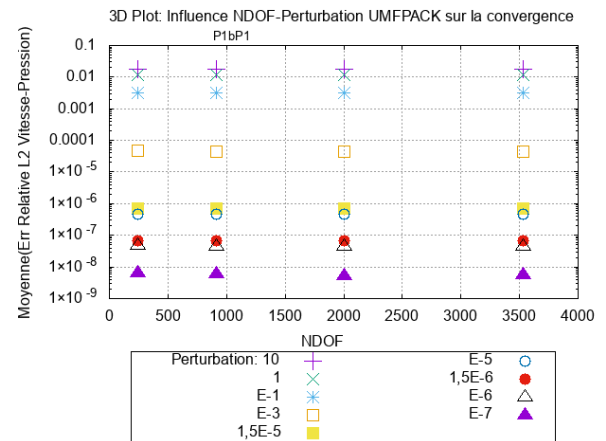


FIGURE 2 – CT1, P1bP1, UMFPACK



Cependant comme le montre de manière fine la figure (3), la MER oscille autour de $1,1E - 8$ lorsque le ndof augmente. Pour étudier l'influence de α sur la convergence de la vitesse et de la pression, nous avons tracé sur la figure (4) les erreurs relatives (ER) en fonction de ce paramètre et de ndof. On constate d'une part que plus α diminue, plus les erreurs relatives de la vitesse et de la pression converge vers $E - 9$, ce qui est en accord avec les précédentes analyses sur la MER. On voit aussi que α très grand implique une mauvaise ER (E-2) pour la vitesse mais

Mean Err RELATIVE U-P

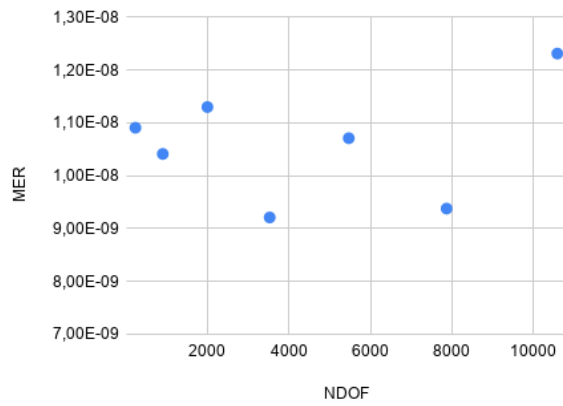


FIGURE 3 – CT1, Oscillations de la MER, $\alpha = E - 7$

4D Plot: Influence NDOF-Perturbation-Precision(E-12) de GMres sur la convergence

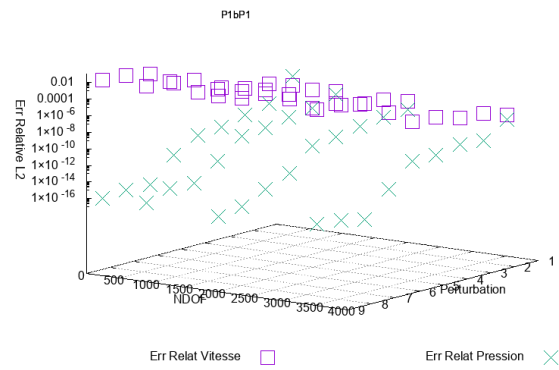


FIGURE 4 – CT1, Evolution de ER en fonction de α

une très bonne ER (E-16) pour la pression. Enfin, concernant le temps de résolution suivant le type de solveur, on constate en comparant les figures (5,6) qu'il est préférable d'utiliser un méthode directe qui s'avère plus rapide, de l'ordre de la seconde pour le plus gros maillage, là où le solveur itératif met entre 1m40s et 17m. On constate aussi que le temps de calcul des deux solveurs augmente avec ndof et aussi avec la précision pour le solveur itératif. On voit cependant que ce temps diminue légèrement lors que α diminue. Donc le paramètre α est un paramètre de contrôle de la convergence vers la solution analytique. Les éléments P1bP1 sont

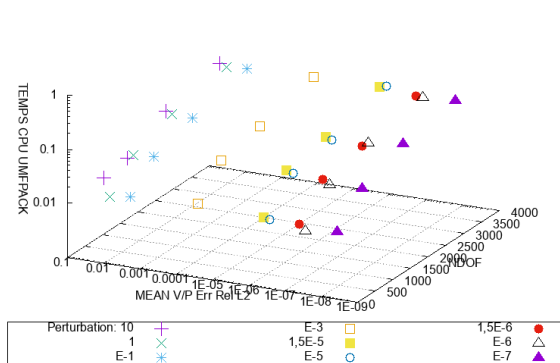
3D Plot: Influence NDOF-Perturbation P1bP1
UMFPACK sur TEMPS CPU

FIGURE 5 – CT1, Pénalisation, UMFPACK temps CPU

4D Plot: Influence NDOF-Perturbation-Precision de GMres sur temps cpu

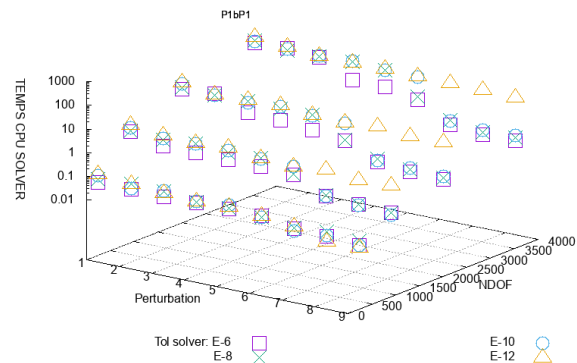


FIGURE 6 – CT1, Pénalisation, GMres temps CPU

donc bien adaptés pour une formulation mixte. Voyons si les résultats précédents varient en fonction du type d'élément.

Eléments P2P1 Avec cet élément, nous avons repris l'étude précédentes, mais en fixant la précision du solveur à $E - 12$ et réduisant le nombre de maillage. D'autre part nous avons réalisé des calculs en ajoutant des valeur de $\alpha \leq E - 7$. Ainsi on constate sur la figure (7) que les variations de la MER sont les mêmes que pour P1bP1. Autrement dit, on converge vers la solutions analytiques pour une valeur de $\alpha = E - 7$. D'autre part, on voit sur la figure (8) que l'ER sur la pression croît fortement passé cette valeur seuil (en terme de convergence moyenne) de α . En résumé, pour des types d'éléments vérifiant la condition "Inf-Sup discrète" (19), on observe la convergence vers la solution analytique pour une valeur de $\alpha = E - 7$. Voyons si c'est le cas pour des éléments ne vérifiant pas cette condition.

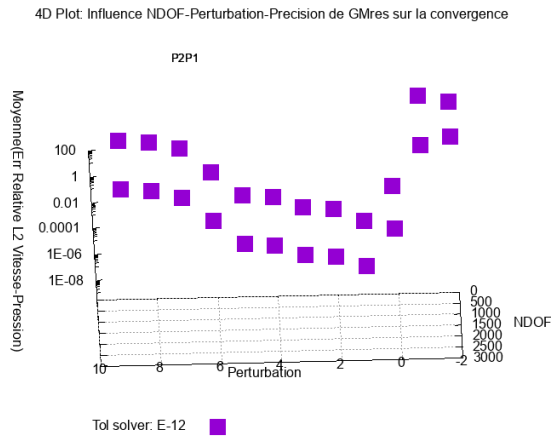


FIGURE 7 – CT1,Pénalisation, MER GMres P2P1

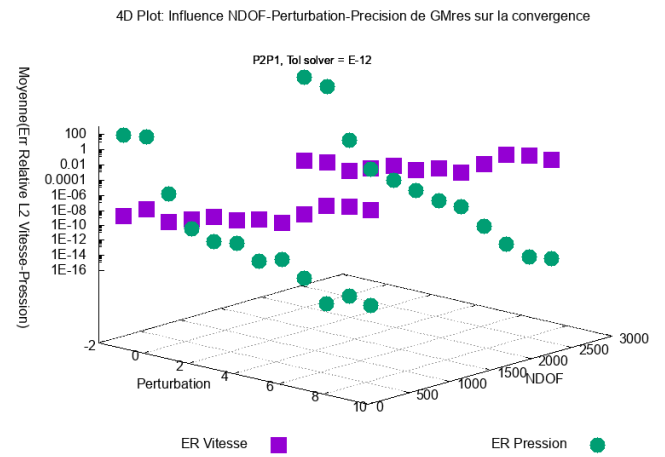


FIGURE 8 – CT1,Pénalisation, ER U-P GMres

Elément P1P1 et P1P0 Nous avons réalisé les calculs pour ces éléments en utilisant le solveur direct, sur un maillage avec $\alpha = E - 7$. Bien que ces éléments ne vérifient pas la conditions "Inf-Sup", on constate sur le tableau (2) que la solution numérique converge vers la solution analytique avec une MER similaire à celle obtenue avec P2P1 et P1bP1.

TABLE 2 – Erreur relative Vitesse-Pression, CT1

ER	P1P1	P1P0
U	$9,08E - 9$	$8,79E - 9$
P	$1,95E - 10$	$9,12E - 10$

Le principal désavantage de la pénalisation est le choix du paramètre α pour assurer la convergence en vitesse et en pression. Voyons si la méthode d'Uzawa qui s'abstient de ce paramètre pâlie ce problème.

8.1.2 Résultats numériques : Méthode d'Uzawa

Eléments P1P1 et P1P0 Voyons d'abords si la convergence est atteinte pour ces éléments. On constate sur le tableau (6) que l'on converge vers la solution analytique de la vitesse, mais que ce n'est pas le cas pour la pression. On voit aussi que raffiner le maillage ne permet pas d'assurer la convergence en pression. On retrouve là le résultat théorique assurant que les éléments ne vérifiant pas la condition "Inf-Sup discrète" ne peuvent assurer l'existence et l'unicité de la solution.

TABLE 3 – Erreur relative Vitesse-Pression, CT1, Uzawa

ER	ndof P1P1	P1P1	Ndof P1P0	P1P0
U	207	$4,99E - 9$	241	$1,28E - 9$
P	207	0,26	241	0,36
U	4230	$4,74E - 9$	5472	$4,36E - 8$
P	4230	0,05	5472	0,09

Elements P1bP1 Nous allons comparer les performances de la méthode d'uzawa par rapport à la méthode de la pénalisation via les éléments bulles P1bP1. Les résultats seraient les mêmes avec des éléments P2P1 mais les calculs plus longs. La figure (9) montre d'une part que la méthode d'Uzawa permet d'obtenir la convergence vers la solution analytique en un temps

de calcul de l'ordre de la dizaine de seconde indépendamment du solveur utilisé pour inversé la matrice A de la question 6. En effet, cette méthode découple le système vitesse-pression tel qu'il y ait plus de système linéaire à résoudre, mais de plus petite taille. Et d'autre part, que la MER croît avec le nombre de degrés de liberté. La figure (10) montre que comparativement à la pénalisation, les ER sur la vitesse et la pression suivent la même variation. On voit aussi que la méthode d'Uzawa approche moins bien le champ de pression puisque l'ER sur ce champ est environ $E + 2$ plus grand que celui de la vitesse, indépendamment de ndof.

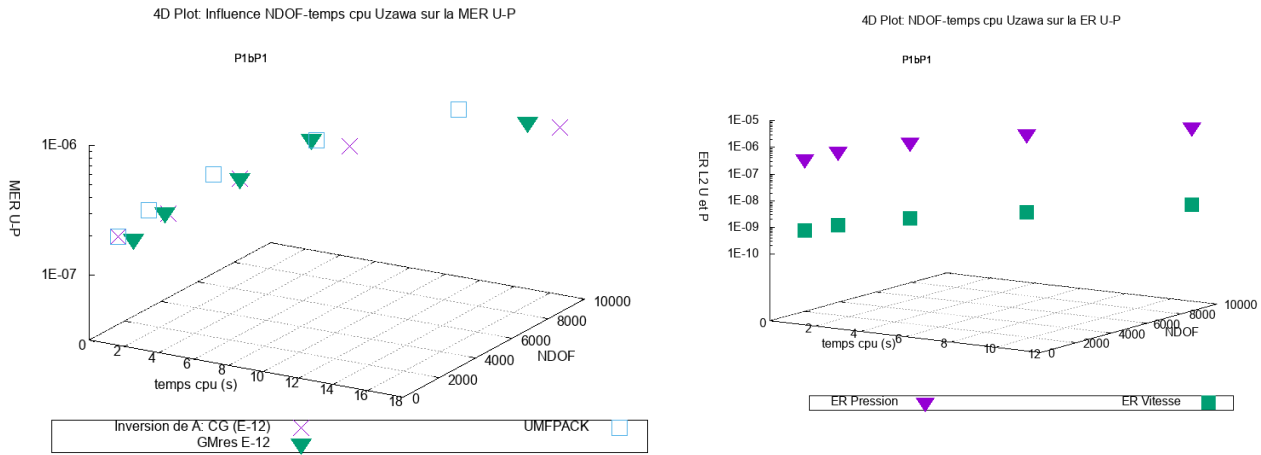


FIGURE 9 – CT1,UZAWA, Evolution MER

FIGURE 10 – CT1,UZAWA, EVOLUTION ER

Récapitulatif CT1 Finalement la méthode d'Uzawa est un bon compromis entre temps de calcul et convergence vers la solution exacte. Là où une pénalisation nécessite de mener une étude en convergence au préalable pour le choix de α . Un solveur direct et les éléments P1bP1 permettent d'atteindre une MER de $E - 7$ en un temps raisonnable, comparativement à un solveur itératif ou des éléments P2P1 qui assurent aussi la convergence mais engendrent plus de calculs.

8.2 Cas test CT2 : Cube unité

Le domaine Ω est le cube $]0, 1[^3$, on choisit comme solution $u_e(x, y, z) = (x \ y \ -2z)$ et $p(x, y, z) = x + y + c$, solution du problème de Stokes avec $f(x, y, z) = (1 \ 1 \ 1)$. Le calcul de la constante de la pression vient en effectuant le calcul :

$$\int_{z=0}^1 \int_{y=0}^1 \int_{x=0}^1 (x + y + z + c) dx dy dz = 0 \Rightarrow c = \frac{-3}{2}. \quad (43)$$

On affiche le maillage généré avec le logiciel MEDIT avec $N=10$ points par arête :

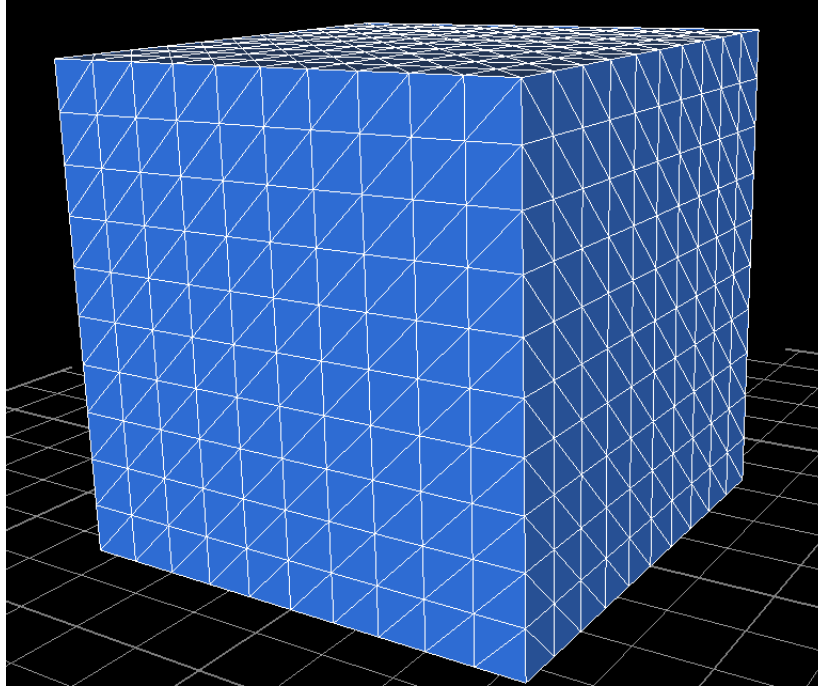


FIGURE 11 – Maillage du cas test CT2 avec $N=10$ points par arête.

8.2.1 Résultats pour la méthode d’Uzawa

On lance la simulation pour le cas test 2 en utilisant la méthode d’Uzawa en faisant varier plusieurs paramètres : les éléments finis et le nombre de liberté total (ceux sur la vitesse + ceux sur la pression, ce qui correspond à fait changer le pas de maillage). Les pas de maillages sont de 5, 10 et 15 points dans chaque direction. On donne le tableau suivant dans lequel on répertorie les erreurs L^2 sur la vitesse (ERv) et sur la pression (ERp) ainsi que le temps de calcul CPU pour chaque simulation. Les systèmes linéaires sont résolus avec un gradient conjugué à une tolérance $eps = 1E - 10$.

TABLE 4 – Erreur relative Vitesse-Pression et temps CPU, CT2, Uzawa

Ndof	ERv	ERp	TpsCPU(s)
P1-P0			
1398	7.4E-10	0.32	0.78
9993	2.6E-9	0.17	13.74
32538	7.4E-9	0.12	83.32
P1-P1			
864	7.0E-16	0.14	9.72
5324	2.6E-14	0.07	53.12
16384	9.9E-12	0.05	171.7
P1b-P1			
3114	3.7E-10	1.7E-07	1.38
23324	5.8-10	5.5-07	16.14
77134	7.5-10	1.0-06	73.51
P2-P1			
4209	2.7E-16	7.0E-14	16.31
29114	4.3E-16	3.2E-13	112.36
93469	1.9E-15	3.6E-13	388.25

L’analyse des résultats de cette simulation nous permet de nous rendre compte que comme prévu, les éléments P2-P1 sont les plus performants en terme d’erreurs relatives sur les résultats,

bien que le temps de calcul soit plus long (ce qui est logique car on dispose de plus de degrés de liberté). Pour les éléments P1-P0 et P1-P1, les convergences en erreur sont très faibles en augmentant le pas de maillage : cela est dû au fait que ces éléments ne respectent pas la condition "inf-sup" discrète. On remarque aussi globalement que l'augmentation du pas de maillage dans la simulation ne permet pas de disposer de résultats plus précis : au contraire. En effet, l'augmentation du nombre de degrés de liberté fait augmenter les erreurs relatives sur les deux grandeurs, même si les résultats globaux sont satisfaisants.

En affichant les représentations des résultats pour la pression, on constate que le gradient de pression évolue en fonction des iso-surfaces, comme le témoigne la représentation ci-dessous :

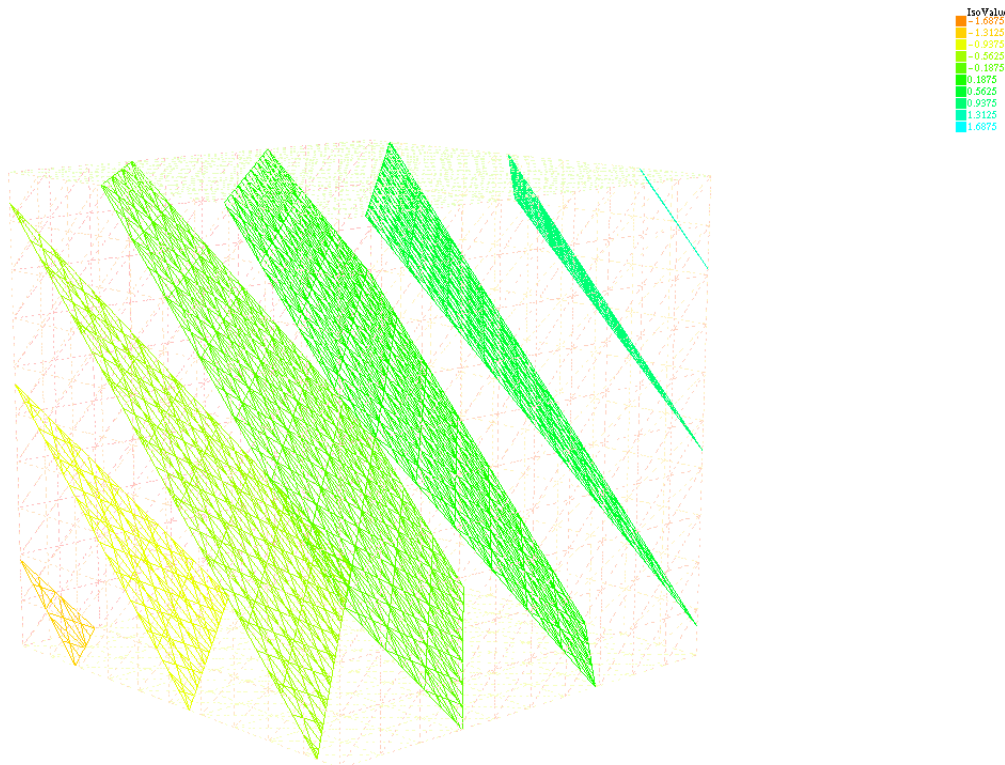


FIGURE 12 – Valeurs iso de pressions calculées avec P2-P1.

La position des surfaces de niveau $p = x + y + z - \frac{3}{2}$ est selon nos attentes car il s'agit d'iso-valeurs selon le vecteur normal $(1,1,1)$ et les valeurs d'erreurs relatives sont négligeables.

Pour la représentation de la vitesse, il est possible d'afficher le vecteur avec le logiciel MEDIT en plan de coupe en $y = 1$:

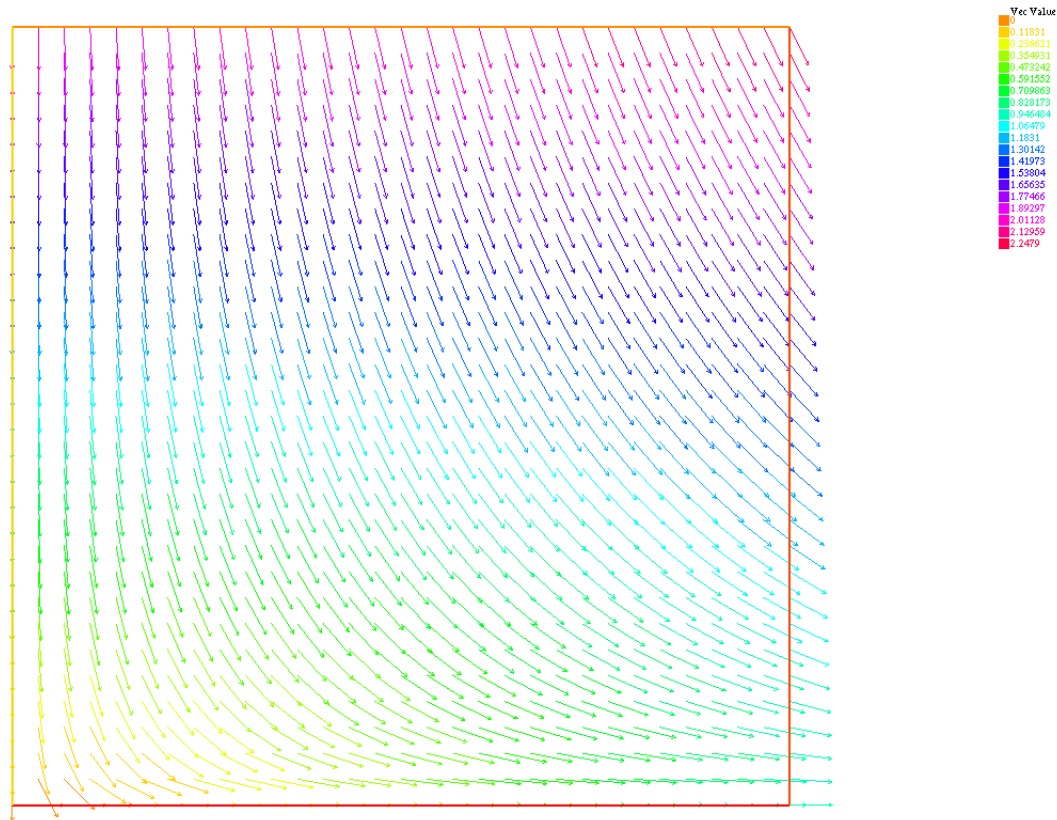


FIGURE 13 – Coupe de la vitesse en $y=1$ calculée avec P2-P1, $N=10$.

Cette représentation est conforme à la théorie car comme constaté sur le tableau de résultats, les erreurs relatives sont aussi très faibles : les vecteurs ont un comportement semblable au champ $(x, y, -2z)$.

Ainsi on peut conclure que le cas test implémenté est conforme à la théorie pour la méthode d'Uzawa, d'une part avec les résultats numériques, et d'autre part avec les représentations graphiques. Cependant, on retiendra que les éléments P1-P0 et P1-P1 ne fournissent pas de résultats assez satisfaisant pour être pris en compte en comparaison avec les éléments P1b-P1 et P2-P1. Il s'agit maintenant de comparer ses deux éléments finis avec la méthode de pénalisation.

8.3 Résultats pour la méthode pénalisation

On implémente la résolution de ce cas test avec la méthode de pénalisation en considérant les éléments P1b-P1 et P2-P1. On utilise le solveur GMRES à une tolérance $\epsilon_{ps} = 1E - 12$. On compare les deux éléments sur le coefficient de pénalisation, le nombre de degrés de liberté, le temps de calcul et la moyenne des erreurs L^2 relatives (MER).

TABLE 5 – Erreur relative Vitesse-Pression et temps CPU pour P2-P1, CT2, Uzawa

Ndof	α	MER	TpsCPU(s)
402	0.0001	3.7119e-12	0.01
	1e-07	2.11006e-09	0
	1e-10	2.11006e-09	0.01
1093	0.0001	3.9203e-05	0.03
	1e-07	3.92259e-08	0.02
	1e-10	2.033e-08	0.03
2312	0.0001	5.29821e-05	0.09
	1e-07	5.30025e-08	0.08
	1e-10	5.36918e-08	0.06
4209	0.0001	6.5343e-05	0.26
	1e-07	6.52874e-08	0.22
	1e-10	6.52874e-08	0.1
6934	0.0001	7.52358e-05	0.86
	1e-07	7.54247e-08	0.57
	1e-10	7.54247e-08	0.19
10637	0.0001	8.40177e-05	5.57
	1e-07	8.43859e-08	1.23
	1e-10	8.44625e-08	0.3
15468	0.0001	9.17646e-05	4.13
	1e-07	2.47596e-07	0.7
	1e-10	2.47743e-07	0.44

TABLE 6 – Erreur relative Vitesse-Pression et temps CPU pour P1b-P1, CT2, Uzawa

Ndof	α	MER	TpsCPU(s)
252	0.0001	2.80341e-09	0.01
	1e-07	5.57566e-15	0
	1e-10	5.57566e-15	0.01
742	0.0001	0.0002	0.01
	1e-07	2.81928e-07	0.01
	1e-10	4.46613e-08	0.01
1652	0.0001	0.000153109	0.03
	1e-07	1.52863e-07	0.03
	1e-10	6.32696e-08	0.02
3114	0.0001	0.000253067	0.14
	1e-07	2.5364e-07	0.11
	1e-10	2.23508e-07	0.04
5260	0.0001	0.000188637	3.76
	1e-07	1.88944e-07	0.39
	1e-10	1.89173e-07	0.07
8222	0.0001	0.000250399	20.2
	1e-07	2.50589e-07	1.09
	1e-10	2.50611e-07	0.11
12132	0.0001	0.000212126	26.73
	1e-07	1.00883e-06	1.44
	1e-10	1.00922e-06	0.16

L’affichage des deux tableaux de résultats concernant les éléments P1b-P1 et P2-P1 permet de conclure concernant l’efficacité et la précision dans la résolution de l’équation de Stokes avec

cette méthode. Comme attendu, les éléments finis P2-P1 permettent de fournir des résultats plus précis et plus rapide en terme de temps CPU. On remarque que diminuant le coefficient de pénalisation α en dessous de 10^{-7} , cela fait diminuer le temps CPU mais ne permet pas de fournir de résultats encore plus précis à en juger des moyennes d'erreurs. De plus, l'augmentation du nombre de degré de libertés ne rend pas forcément la solution numérique plus, précise.

Ainsi, pour ce cas test, on peut en conclure que les éléments finis qui permettent de fournir les résultats les plus précis sont les éléments P2-P1, tout en ayant un temps CPU inférieur malgré un nombre de degré de liberté élevé. On obtient les meilleurs résultats en prenant un nombre de degrés de liberté $Ndof = 402$ et un coefficient de pénalisation $\alpha = 10^{-4}$.

8.4 Cas test CT3 : Écoulement de poiseuille dans un cylindre

Le domaine Ω est le cylindre d'axe \vec{Oz} définie par $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x^2 + y^2)^{0.5} \leq 1 \text{ et } 0 \leq z \leq L\}$. On Définit τ_1 la frontière de Ω en $z = L$ et τ_2 en $z = 0$. On note τ_3 La frontière latéral de Ω définie par $\{(x, y, z) \mid (x^2 + y^2)^{0.5} = 1, \text{ et } 0 \leq z \leq L\}$

Le vecteur force volumique est nul et on les effets visqueux sont supérieurs aux effets cinétiques sur la parois du cylindre τ_3 .

Dans le cadre d'un écoulement de Poiseuille, la solution analytique sur Ω pour les champs de vitesse et pression est donnée par :

$$u_e(x, y, z) = [0 \quad 0 \quad 1 - x^2 - y^2] \quad (44)$$

$$P_e(x, y, z) = -4.z + c \quad (45)$$

On impose que la pression soit a moyenne nulle pour définir ce champ de manière unique. On calcul alors, avec le rayon du cylindre $R = 1$:

$$\begin{aligned} \int_{r=0}^R \int_0^{2\pi} \int_0^L (-4.z + c) r dr d\theta dz &= 2\pi \int_0^L [-4.z.r + c.r]_{r=0}^{r=R} dz \\ &= 2\pi.R^2.[-2.z^2 + c.z]_{z=0}^{z=L} \\ &= 2\pi.R^2.(-2.L^2 + c.L) \\ &= 0 \\ &\implies c = 2.L \end{aligned} \quad (46)$$

Pour nos calculs numériques, nous avons fixé $L = 4m$, on a donc $c = 8$. De plus, afin d'étudier la convergence vers la solution analytique (44 et 45), nous avons imposés comme conditions aux limites les champs analytiques.

8.4.1 Résultats pour la méthode de la pénalisation

Au vue de l'étude sur le cas test 1, il est raisonnable de fixer le coefficient de pénalisation tel que $\alpha = 1E - 7$. De même pour un bon compromis entre précision et temps de calcul, on utilise le solveur *UMFPACK*. Le tableau suivant présente les erreurs relative (L2) et les temps de calcul en fonction du type d'éléments et de ndof. On constate d'une part que l'élément P1P0 n'est pas adapté dans ce cas. Au vue notamment de l'ER sur la pression, cela montre qu'il ne vérifie pas la condition *Inf-Sup Discrète*. L'autre élément ne vérifiant pas cette condition en théorie est le P1P1. On voit que les ER sont de l'ordre de E-3 ce qui n'est pas suffisant en terme de précision. L'élément P1bP1 à un comportement assez similaire au P1P1 alors qu'en théorie cet élément respecte la condition *Inf-Sup*. On constate aussi une convergence assez lente lorsque l'on augmente ndof. Finalement, l'élément P2P1 qui même avec un ndof petit assure la convergence à une précision de E-7 et avec les plus petit temps de calculs. L'élément P2 étant plus adapté pour interpoler des géométries complexe comme celle d'un cylindre. En Annexe B, on présente les profils de poiseuille calculés numériquement. On constate bien que la vitesse est

indépendante de z et que la pression est constante pour $\forall(x, y) | 0 \leq (x^2 + y^2)^{0,5} \leq R$ mais varie suivant z .

TABLE 7 – Convergence vers la solution exacte en fonction du type d'éléments (pénalisation)

<i>Elements</i>	<i>ndof</i>	<i>ER</i>	<i>ER</i>	<i>Temps calcul</i>
		Vitesse	Pression	sec
$P1P0$	91063	0,967	1	261
$P1P1$	25480	2,1E-3	3E-3	23
$P1bP1$	65256	1,2E-2	1,54E-3	6
	124030	8E-3	1E-3	13,6
	218316	5,5E-3	7E-4	28,5
$P2P1$	1503	1,96E-7	1,58E-7	0,165
	34567	3,5E-7	4E-7	14,8

Relaxation des conditions limites On impose sur τ_2 et τ_3 le champs de vitesse de Poiseuille. Sur τ_2 , on impose $u_x = u_y = 0$. En calculant ainsi avec des éléments P2P1 les champs de vitesse et de pression, on retrouve le profil de Poiseuille pour la vitesse, avec une ER de $4,65E-6$. Pour le champ de pression, l'ER est de $1,73$. Comme la pression est définie à une constante près, sans imposer des conditions aux bords telles que (45 et 46), on ne peut pas converger vers la solution analytique. Cependant, on observe (cf Annexe C) toujours une pression indépendante de (x, y) et qui varie suivant z .

Vitesse constante en entrée ($z = 0$) On note D le débit total tel que :

$$D = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{r=0}^{r=2R} (1 - r^2) r \cdot dr \cdot d\theta$$

On en déduit la vitesse $V = D/S$ à appliquer en $z = 0$, avec $S = \pi \cdot R^2$ la surface d'entrée telle que :

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{\pi \cdot R^2} \int_{r=0}^R \int_0^{2\pi} (1 - r^2) r dr d\theta \\ &= \frac{2}{R^2} \int_{r=0}^R (r - r^3) dr \\ &= 1 - \frac{R^2}{2} \end{aligned} \tag{47}$$

Sur τ_2 on impose $u = (0, 0, V)$ et sur τ_1 on fixe $u_x = u_y = 0$. Pour la paroi latérale en τ_3 , le champs u_e est appliqué. Pour cette simulation $R = 1m$ et $L = 5m$ On observe sur la figure (14) suivante le champs de vitesse suivant $\vec{O}z$. On constate que l'écoulement rejoint le profil de poiseuille. Le tableau (8) présente les erreurs relatives sur u_z calculées sur la face τ_3 . Nos conditions aux limites sont encore trop fortes sur τ_3 , puisqu'on retrouve a une précision de $E-7$ la solution analytique. Ce résultats n'a pas de sens physique, puisque la vitesse u_z en $r = 0$ est supérieur à la vitesse d'entrée. Nous avons par ailleurs vérifié en imposant un pression d'entrée telle que $p = L$ que le débit de sortie n'est pas égale au débit d'entrée. Le problème dans ce cas étant l'inconnue de la condition aux limites en pression. l'idéale serait d'avoir des données aux limites issues d'expériences.

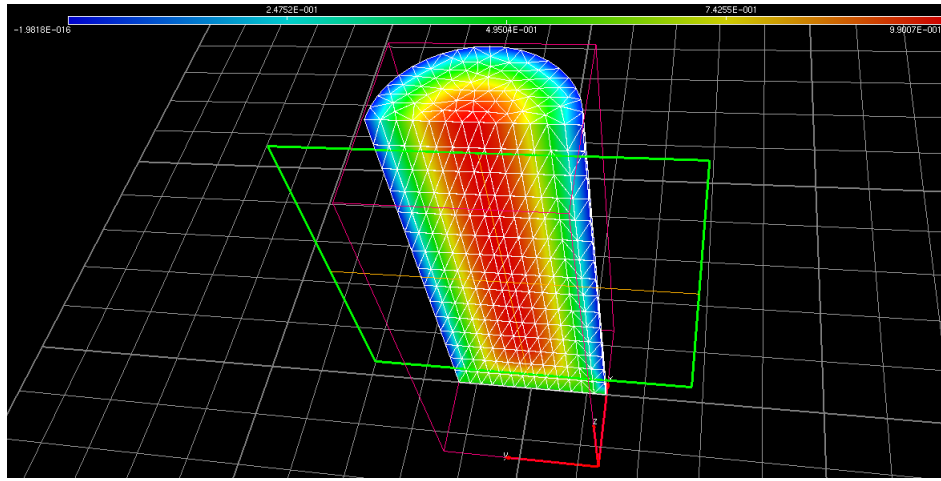


FIGURE 14 – Profil de vitesse u_z , avec $u_z(z = 0) = 0, 5$

TABLE 8 – Convergence vers la solution exacte sur τ_3

Elements	ndof	ER u_z
$P2P1$	29692	5,35E-7
	59633	4,12E-7
	63789	3,9E-7

8.4.2 Résultats pour la méthode d'Uzawa

Dans cette sous-section, nous réalisons le cas test 3 avec la méthode d'Uzawa afin de comparer les résultats avec ceux de la pénalisation.

Avec les conditions aux limites (44) sur toutes les frontières on observe sur le tableau (9) des résultats similaires à la méthode de la pénalisation (cf tableau 7). Notamment que l'on retrouve bien le résultats théorique de non respect de la condition *Inf-Sup Discrète* sur la convergence des éléments $P1P0$ et $P1P1$. On constate aussi au niveau des ER que l'élément $P1bP1$ n'est pas adapté pour ce cas test. L'élément $P2P1$ converge très rapidement vers la solution exacte tant en pression qu'en vitesse. On voit que la méthode d'Uzawa sur cet élément permet d'obtenir une ER $E - 3$ fois plus petite que pour la méthode de la pénalisation. Cependant à ndof égale, la méthode de la pénalisation est 94 fois plus rapide que Uzawa. Le méthode d'Uzawa permet cependant de converger sur les deux champs sans avoir à imposer les conditions (45,46) aux limites sur la pression.

TABLE 9 – Convergence vers la solution exacte en fonction du type d'éléments (Uzawa)

<i>Elements</i>	<i>ndof</i>	<i>ER</i>	<i>ER</i>	<i>Temps calcul</i>
		Vitesse	Pression	sec
$P1P0$	91062	5,8E-3	0,198	1672
$P1P1$	25480	8,7E-3	7,4E-2	964
$P1bP1$	34264	2E-2	7,4E-3	276.7
$P2P1$	34567	5,35E-10	5,198E-9	244.8

Vitesse constante en entrée ($z = 0$) : On impose sur τ_2 la vitesse u_z définie par (47). Sur τ_1 et τ_3 on impose le profil de vitesse de Poiseuille (44). La pression est initialisée à zéro. On note *Nbrit* est le nombre d'itération de la boucle d'Uzawa et *ErrDebit* est la différence entre le débit de sortie et le débit d'entrée. Le tableau (10) où les ER sont calculées uniquement en τ_1 montre de bien meilleurs résultats que la méthode de la pénalisation d'un point de vue physique ainsi qu'au niveau des ER sur la pression. En effet, en raffinant le maillage et en augmentant

N_{brit} , on fait diminuer les ER sur la pression et le débit. Néanmoins le calcul devenant de plus en plus lent en augmentant N_{brit} , nous ne pouvons dire prendre N_{brit} très grand permet de réduire significativement l'ER sur la pression. Les figures représentent les champs de vitesse et pression ainsi calculées.

Récapitulatif CT3 : Pour ce cas test, les élément P2P1 sont mieux adaptés. La méthode d'Uzawa s'avère plus précise et moins rapide que la méthode de la pénalisation.

TABLE 10 – Etude sur le débit (Uzawa)

N_{brit}	$ndof$	ER	ER	$ErrDebit$	$Temps\ calcul$
		Vitesse	Pression		sec
220	45702	2,2E-16	0,66	3,5E-2	477
520	47045	2,1E-16	0,33	3,1E-2	1111

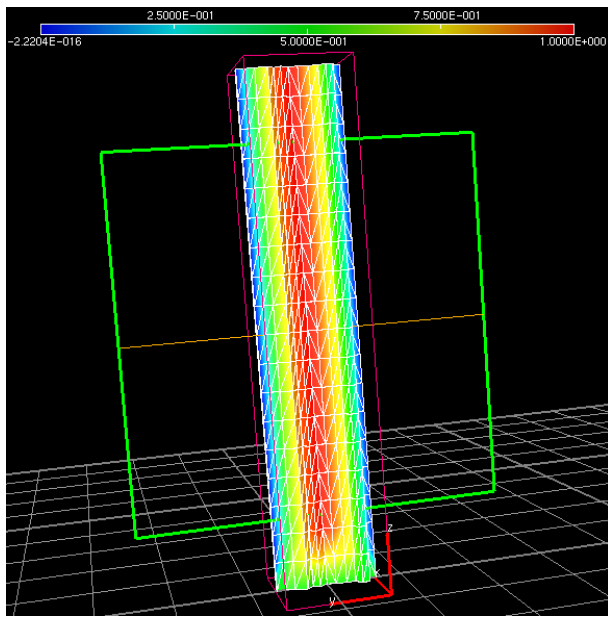


FIGURE 15 – CT3 : Vitesse, condition débit (UZAWA)

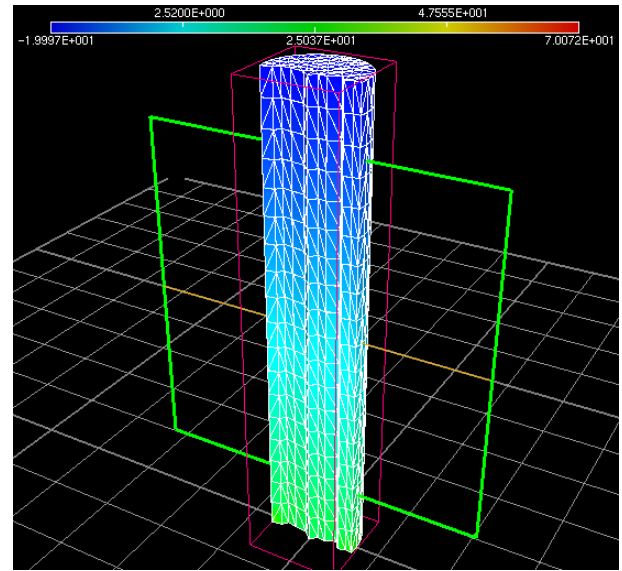


FIGURE 16 – CT3 : Pression, condition débit (Uzawa)

Conclusion

Les problèmes elliptiques basés sur une formulation éléments finis mixtes font apparaître un couplage entre les champs de la solution à calculer. D'une part nous avons exposé divers éléments finis mixtes et montré que la solution peut être interpolée sur ces éléments notamment en montrant leur unisolvance. D'autre part que le problème admet une unique solution sous la condition *Inf-Sup* en continue et *Inf-Sup discrète* sur les éléments finis. Nous avons expérimenté au cours des cas tests que cette dernière condition qui pour les éléments P1P0 et P1P1 est non vérifiée n'implique pas nécessairement la non convergence vers la solution analytique. Un autre point important à noter et qui est à la base de ce sujet est d'une part la non symétrie de la matrice du problème ainsi que le couplage entre les composantes du champ de la solution. On rappelle que le problème provient de la condition d'incompressibilité exprimée par la nullité de la divergence du champ de vitesse pour un fluide dans le cas d'un écoulement incompressible, ou du gradient des déformations pour un matériaux incompressible. Cette condition implique une variation de volume nulle et donc des contraintes internes au milieu. Ce champ des contraintes étant définie à une constante près, on est amené à lui imposer d'être par exemple à moyenne

nulle afin de poser son unicité. Vient alors la méthode de pénalisation qui permet de faire rentrer cette condition dans le système matriciel. Plus le coefficient de pénalisation est petit, plus l'on tend vers une condition d'incompressibilité. L'inconvénient de cette méthode est alors la dépendance de la convergence par rapport au choix de ce coefficient. Et d'autre part la taille du système à résoudre. Pour palier à cela, la méthode d'Uzawa, sous le principe de minimisation de fonctionnelle et d'une étape de condensation statique des degrés de liberté en pression, permet de découpler le système afin de trouver le champ de pression qui minimise la divergence du champ de vitesse. Cette méthode s'avère moins contraignante que la pénalisation et permet un meilleur contrôle de la convergence sur les deux champs. Nous avons par ailleurs constaté que la procédure d'Uzawa est généralement plus rapide que celle de la pénalisation.

Références

- [1] Stanford EDUCATION. Chapter 2 : Mixed and saddle point problems. page 23. URL : http://stanford.edu/class/cme358/notes/cme358_lecture_notes_2.pdf.
- [2] J-P. MARCOTTE. Méthode itérative pour la résolution, par éléments finis du problème de Stokes non
URL : <https://vdocuments.site/marcotte-jph-methodes-iteratives-pour-la-resolution-par-elements-finis-du.html>.
- [3] J-F. SCHEID. Analyse Numérique des équations de Navier-Stokes. URL : http://www.iecl.univ-lorraine.fr/~Jean-Francois.Scheid/Enseignement/polyNS2017_18.pdf.
- [4] J. ROCHAT. Résolution numérique du problème de Stokes 3D avec l'élément fini P2-P1. Thèse EPFL.

9 Annexes

A ANNEXE CT1

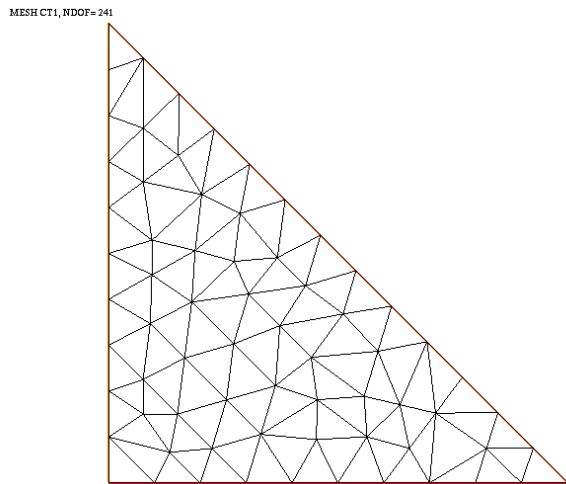


FIGURE 17 – CT1, Min ndof

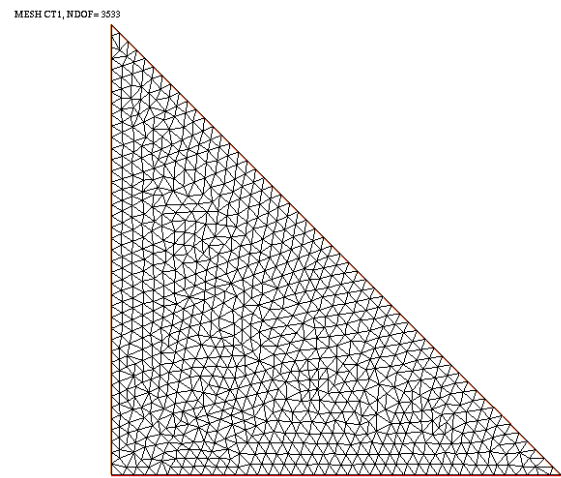


FIGURE 18 – CT1, Max ndof

B ANNEXE CT3

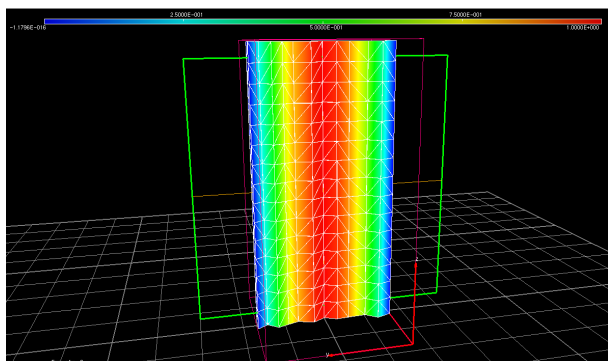


FIGURE 19 – Profil de Poiseuille : vitesse, CT3

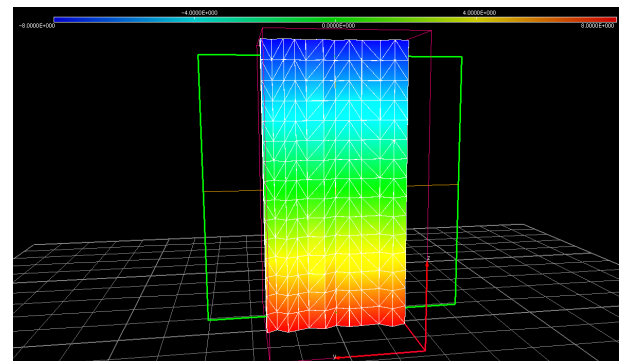


FIGURE 20 – Profil de Poiseuille : Pression, CT3

C ANNEXE CT3

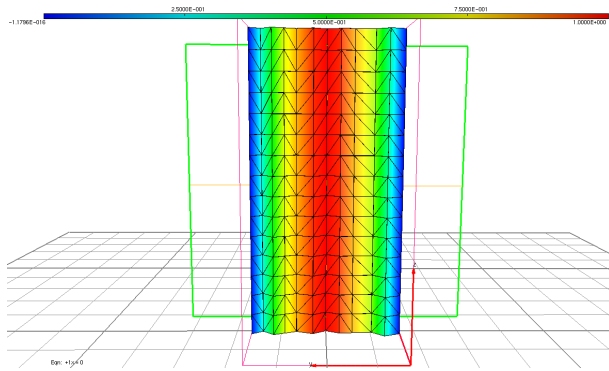


FIGURE 21 – Relaxation des CL : Vitesse, CT3

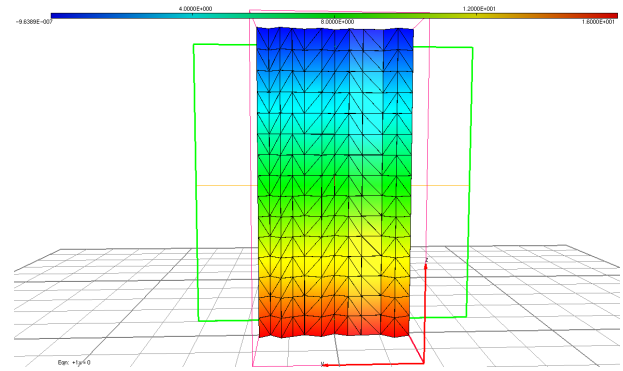


FIGURE 22 – Relaxation des CL : Pression, CT3

D ANNEXE LBB

LBB : *Ladyzhenskaya–Babuska–Brezzi*[1] est la condition *Inf-Sup* sur $b(\bullet, \bullet)$:

$$\exists \beta > 0, \inf_{q \in Q_0} \sup_{v \in V} \frac{b(v, q)}{\|v\|_V \cdot \|q\|_{Q_0}} \geq \beta.$$