

# Calcul d'un critère de rupture pour une plaque composite trouée

Y.TOMITA  
T.DIXONNE  
B.DENEFLE  
J.GARCIAMEIR  
V.LEDERER

Encadrants : E.MARTIN et K.SANTUGINI

6 octobre 2020



# Table des matières

1	Introduction . . . . .	3
2	Cadre de travail . . . . .	3
	2.1 Généralités sur les composites à fibres longues. . . . .	3
	2.2 Théorie classique des composites stratifiés . . . . .	5
3	Méthodes pour calculer le critère de rupture . . . . .	6
	3.1 Concentration de contraintes et distance caractéristique . . . . .	6
	3.2 Critère de rupture en présence de concentration de contraintes . . . . .	7
4	Méthode des éléments finis . . . . .	8
	4.1 Mise en équation du problème . . . . .	8
	4.2 Mise sous forme matricelle . . . . .	9
	4.3 Les étapes de la MEF . . . . .	11
5	Validation du code et détermination de la longueur caractéristique . . . . .	11
	5.1 Cas TEST . . . . .	11
	5.2 Essai de traction sur plaque trouée . . . . .	12
6	Conclusion . . . . .	15
7	Annexe . . . . .	17

# Table des figures

1	Micrographie MEB-FEG d'une fibre Hi-Nicalon S au sein d'un composite SiC/SiC (image tirée de [Chateau, 2011]) . . . . .	3
2	Loi des mélanges pour un composite UD . . . . .	3
3	Schéma mode de rupture d'un pli UD . . . . .	4
4	Contrainte à rupture d'un pli UD en traction . . . . .	4
5	Orientation des fibres par rapports aux axes du composite . . . . .	4
6	Influence de l'orientation des fibres sur les modules suivant X et Y . . . . .	4
7	Dimensions de la structure étudiée . . . . .	6
8	Concentration de contraintes . . . . .	7
9	Concentration de contrainte $K_t$ pour une plaque trouée en traction donnée par S.Deghboudj [8] . . . . .	7
10	Points de comparaison (la figure n'est pas à l'échelle) . . . . .	12
11	Modèle 1/4 de plaque, conditions aux bords . . . . .	12
12	Comparaison Code ABAQUS $\sigma_{yy}(x=x-W/2-R,y);(x,y) \in (AD)$ . . . . .	13
13	Table de valeur pour OHT2 ( $X, \sigma_{yy}(x=x-W/2-R,y);(x,y) \in (AD)$ ) . . . . .	13
14	$\sigma_{yy}(x=x-W/2-R,y);(x,y) \in (AD)$ , P=200 MPa, OHT1, Code et Abaqus . . . . .	14
15	$(x, \sigma_{yy}(x=x-W/2-R,y));(x,y) \in (AD)$ , P=200MPa, OHT1, Code, Abaqus . . . . .	14
16	Déplacement suivant $\vec{Oy}$ , Code . . . . .	18
17	Déplacements suivant $\vec{Oy}$ , code d'Abaqus . . . . .	18
18	Contraintes $\sigma_{yy}$ , Code . . . . .	19
19	Contraintes $\sigma_{yy}$ , code d'Abaqus . . . . .	19

# 1 Introduction

Ce projet s'inscrit dans le cadre des Travaux d'Etudes et de Recherches de la deuxième année de l'ENSEIRB-MATMECA. Le but de ce projet est de développer un modèle numérique à l'échelle macroscopique du système étudié. L'étude vise à calculer les contraintes au sein d'un matériau composite soumis à une traction uniaxiale. Cette modélisation nécessite la résolution d'un problème d'élasticité linéaire 2D pour déterminer un critère de rupture. Nous confronterons par la suite nos résultats numériques avec ceux obtenus sur Abaqus. Les critères de rupture permettent aux constructeurs soit de spécifier la gamme en contrainte d'utilisation des composites qu'ils produisent, soit appliqués à des structures, de pouvoir déterminer numériquement quelles parties de la structure va se rompre. Dans ce cas le constructeur doit adapter son matériau ou bien optimiser la forme de son système. Divers critères ont été introduits, nous verrons qu'ils dépendent de la géométrie de la structure. Dans un premier temps, nous définirons les caractéristiques mécaniques du stratifié étudié en se basant sur la théorie classique des composites stratifiés. Nous verrons en suite le phénomène de concentration de contrainte et son influence sur les critères de rupture. Une partie sera consacrée à la définition de la méthode des éléments finis permettant de modéliser notre problème. Enfin nous validerons et comparerons les résultats obtenus avec Abaqus et des articles de référence [14].

## 2 Cadre de travail

### 2.1 Généralités sur les composites à fibres longues.

#### Structure d'un composite

Un composite est issu d'un assemblage de plusieurs matériaux ayant des caractéristiques mécaniques et thermiques différentes. Le résultat d'un tel mélange est un matériau innovant ayant ses propres caractéristiques et répondant mieux aux besoins du constructeur. Ainsi, un composite résulte de la distribution de fibres, également appelées renforts dont le diamètre moyen est de 10 micromètre, au sein d'une matrice, la figure 1 présente une micrographie par MEB de ces deux composants. En faisant varier la fraction volumique de fibre dans la matrice ainsi que leurs directions, le constructeur fixe les propriétés du composite, la figure 2 suivante montre l'évolution des modules d'young  $E_L$  (longitudinal) et  $E_T$  (transversal) d'un composite Carbone/Epoxyde via la loi des mélanges (voir l'annexe A).

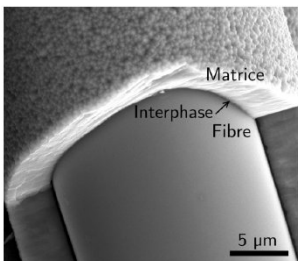


FIGURE 1: Micrographie MEB-FEG d'une fibre Hi-Nicalon S au sein d'un composite SiC/SiC (image tirée de [Chateau, 2011])

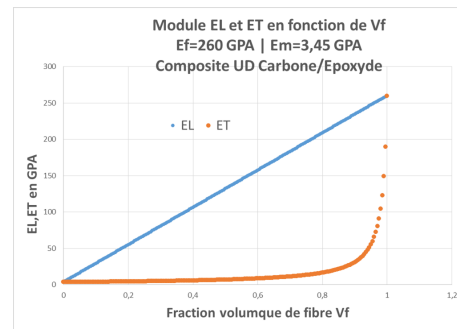


FIGURE 2: Loi des mélanges pour un composite UD

D'autre part comme le montre la figure 3, la rupture d'un composite se fait en plusieurs étapes. On peut en déduire que la rupture du composite dépend des contraintes à rupture de ses constituant (voir figure 4). Les renforts fibreux sont alors choisis pour assurer la résistance de la structure face à un chargement, tandis que la matrice doit transférer les efforts vers les renforts et les isole de potentielles attaques extérieures, comme l'oxydation par exemple.

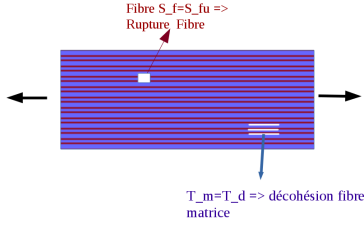


FIGURE 3: Schéma mode de rupture d'un pli UD

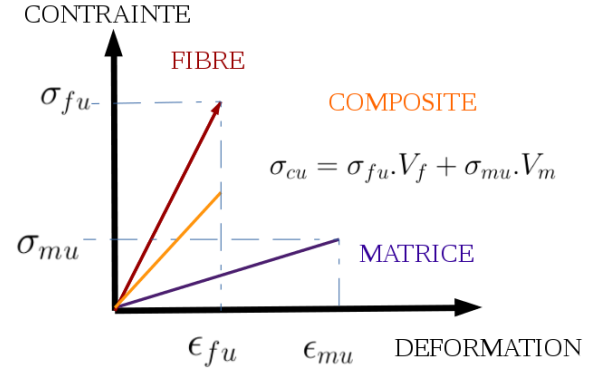


FIGURE 4: Contrainte à rupture d'un pli UD en traction

Pour voir l'influence de l'orientation des fibres au sein d'un composite, l'on considère une traction sens X de la figure 5 où un pli UD dont la direction  $L$  des fibres fait un angle  $\theta$  avec la direction  $X$  du composite et connaissant les modules  $E_L$ ,  $E_T$ ,  $\nu_{LT}$  et  $G_{LT}$  (voir figure 6).

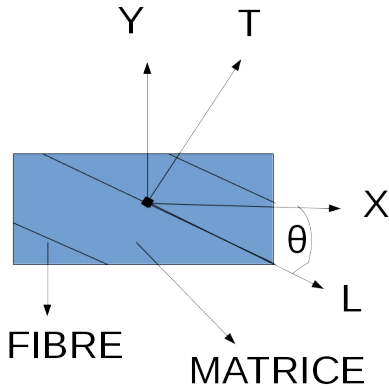


FIGURE 5: Orientation des fibres par rapport aux axes du composite

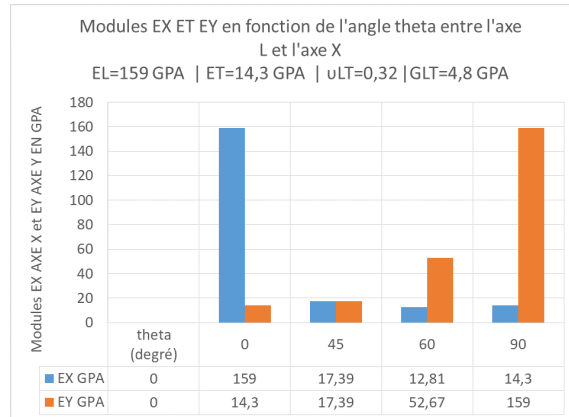


FIGURE 6: Influence de l'orientation des fibres sur les modules suivant X et Y

En notant  $Q$  la matrice de rigidité réduite dans les axes d'orthotropie  $(L, T)$  dont les relations entre coefficients et modules sont données en annexe B, on a dans les axes  $(L, T)$  la relation contrainte-déformations suivante en état plan de contrainte :

$$\sigma = Q \cdot \epsilon \quad (1)$$

Pour obtenir la relation (1) dans les axes  $(X, Y)$ , on définit la matrice  $Q'$  fonction de  $Q$  et de  $\theta$  (cf Annexe C pour la formulation de ses coefficients). On a ainsi

$$\sigma = Q' \cdot \epsilon \quad (2)$$

En prenant  $E_L = 159GPA$ ,  $E_T = 14,3GPA$ ,  $\nu_{LT} = 0,32$  et  $G_{LT} = 4,8GPA$ , on calcul  $Q'(\theta)$  avec les formules de l'annexe C, on en déduit  $E_X$  et  $E_Y$  en fonction de l'angle  $(\vec{X}, \vec{L}) = \theta$ . Comme on peut le voir sur la figure 6, la variation de  $\theta$  permet de moduler les modules d'young dans l'axe du composite.

## 2.2 Théorie classique des composites stratifiés

### Cas d'un quasi-isotrope symétrique équilibré

Un stratifié est composé par l'empilement de plusieurs plis composite dont l'orientation des fibres et l'épaisseur peuvent varier d'une couche à l'autre. Le comportement mécanique d'un tel matériau dépend des caractéristique mécanique de ses plis. En considérant la théorie élastique des plaques minces et les hypothèses de Love-Kirchoff, on peut supposer un champ de déplacement de la forme :

$$\begin{cases} u(x, y, z) = u_o(x, y) - z \frac{\partial w_o}{\partial x} \\ v(x, y, z) = v_o(x, y) - z \frac{\partial w_o}{\partial y} \\ w(x, y) = w_o(x, y) \end{cases}$$

Les déformations sont alors sous la forme de  $\epsilon = \epsilon_o + z.\kappa_o$  et l'on a la relation suivante :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \epsilon_o \\ \kappa_o \end{Bmatrix} \quad (3)$$

En faisant l'hypothèse que le stratifié est un quasi-isotrope symétrique équilibré en état de contrainte plane, la matrice B de la relation (3) est nulle. On a donc un problème découplé donnant la relation entre les efforts et les déformations en membrane :

$$\{N\} = A.\{\epsilon_o\} \quad (4)$$

$$\{N\} = \int_{e_{TOT}} \{\sigma\} dz \quad (5)$$

avec  $\langle \epsilon_o \rangle = \langle \epsilon_{xx} \quad \epsilon_{yy} \quad 2.\epsilon_{xy} \rangle$

On construit la matrice de rigidité du stratifié A telle que  $A = \sum_{k=1}^{NT} Q'_k.e_k$ , avec NT le nombre de pli du stratifié et  $e_k$  l'épaisseur de la couche numérotée k. Les relations (4) et (5) permettent d'obtenir les contraintes moyennes telle que :

$$\{\sigma\} = \frac{\{N\}}{e_{TOT}} = H.\{\epsilon_o\} \quad (6)$$

$$H = \frac{A}{e_{TOT}} \quad (7)$$

où H est la matrice de rigidité moyenne du stratifié.

### Caractéristiques et géométries mécaniques du composite étudié

L'étude porte sur un stratifié carbone/époxyde, dont le pli UD est "MTP H 510 CFA 200 12 UD RC42" et a les propriétés matériels données par le tableau 1 (voir réf [14]).

La séquence d'empilement des plis UD considérée pour former le stratifié est  $[45/90/-45/0]_{2S}$ . Autrement dit le stratifié possède 16 couches au total et est symétrique équilibré par rapport à son plan moyen. Il a une épaisseur totale  $e_{TOT} = 4,16 \text{ mm}$  et l'épaisseur de ses plis

$E_L$	$E_T$	$\nu_{LT}$	$G_{LT}$
100 GPa	7,400 GPa	0,32	3,767 GPa

TABLE 1: Modules du pli UD dans le repère d'orthotropie

$H_{11}$	$H_{22}$	$H_{12}$	$H_{66}$
43,0625 GPa	43,0625 GPa	13,4336 GPa	14,8145 GPa

TABLE 2: Coefficients de H

est constante soit  $e_k = e, \forall k = 1, NT$ . On calcul les coefficients non nuls de la matrice H dans le tableau 2.

Le module d'Young théorique du stratifié est donné par  $E = H_{11} - \frac{H_{12}^2}{H_{22}} = 38,872 GPa$ . La figure 7 et le tableau 3 ci-après présentent la géométrie des plaques étudiées ainsi que les contraintes à rupture des plaques non trouées  $\sigma_c$  et trouées  $\sigma_*$ . Ces données sont issues de la référence [14].

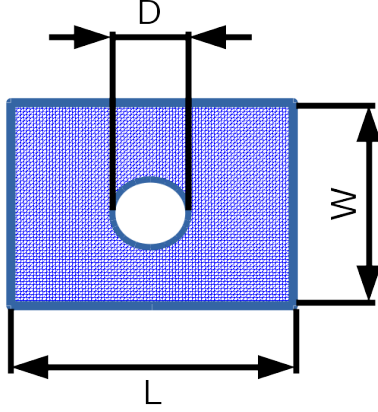


FIGURE 7: Dimensions de la structure étudiée

NOM	L	W	D	$\sigma_c$
OTCH2	250 mm	36 mm	6 mm	440 MPa
$\sigma_*$	306,1 MPa			
OHT1	250 mm	36 mm	3 mm	
$\sigma_*$	375 MPa			

TABLE 3: Dimensions en fonction du cas étudié et contraintes à rupture

### 3 Méthodes pour calculer le critère de rupture

Cette partie explique l'influence d'une entaille (trou ou fissure) sur les contraintes au sein d'une plaque. Dans ce cas les critères classiques de rupture ne s'appliquent plus, nous présentons les méthodes introduites par la théorie de la distance critique pour répondre à ce problème.

#### 3.1 Concentration de contraintes et distance caractéristique

En présence d'une variation brusque de la géométrie de la structure comme le montre la figure 8, les critères de rupture locaux tel que celui en contrainte maximale  $X_c < \sigma(x, y) < X_t$  avec  $X_t$  et  $X_c$  les contraintes à rupture en traction et compression d'une plaque lisse présentent des marges d'erreur non négligeables par rapport aux résultats expérimentaux comme l'ont montré N.Lahellec, C.Bordreuil et C.Hochard [4]. En effet, on observe expérimentalement une concentration de contrainte dans une section passant par le centre du trou. Analytiquement

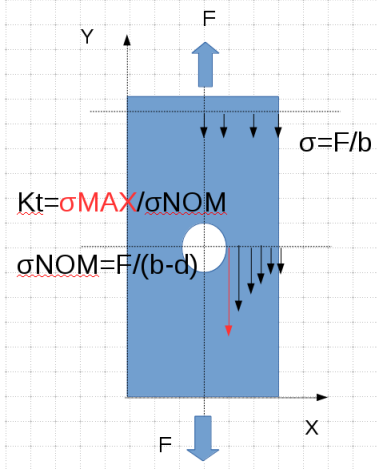


FIGURE 8: Concentration de contraintes

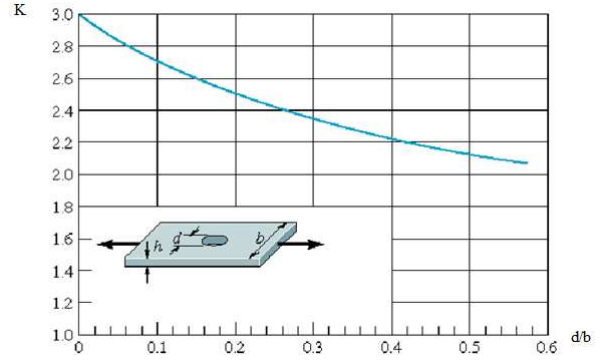


FIGURE 9: Concentration de contrainte  $K_t$  pour une plaque trouée en traction donnée par S.Deghboudj [8]

pour une plaque infinie (voir la référence [7]), en exprimant les fonctions de contraintes ou d'Airy, on montre que cela est dû à la décroissance du champ des contraintes en  $\frac{1}{r^2}$ , avec  $r$  le rayon du trou. Ce phénomène est caractérisé par le coefficient de concentration noté  $K_t$  et dépend uniquement des dimensions de la plaque. Les abaques [8] montrent pour une plaque trouée que ce coefficient est une fonction du ratio  $\frac{D}{W}$ , où  $W$  est la largeur de la plaque et  $D$  le diamètre du trou. En ce qui concerne notre cas d'étude, S.Deghboudj [8] montre avec la figure 9, que  $K_t = 2.55$  avec  $\frac{d}{b} = 0.166$ .

De plus, les relations suivantes :

$$K_t = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{nom}} \quad (8)$$

$$\sigma_{nom} = \frac{F \cdot W}{W - D} \quad (9)$$

expriment bien le fait que la contrainte maximale en bord de trou soit supérieure à la contrainte appliquée loin du trou (cf figure 8) faussant alors l'utilisation d'un critère local de rupture.

Ainsi, pour répondre à ce problème, divers critères ont été introduits via la théorie de la distance critique (TCD) [9]. Cette théorie se base sur la longueur caractéristique du matériau  $L_c$ . La TCD introduit notamment la méthode du Point Stress Criterion (PSC) ainsi que la méthode Average Stress Fracture Criterion (ASFC).

### 3.2 Critère de rupture en présence de concentration de contraintes

**Point Stress Criterion** Cette méthode assure que la rupture de la plaque trouée apparaît dès que la contrainte à rupture du matériau  $\sigma_c$  pour une plaque non trouée est atteinte en un point situé à une distance  $r_c$  du bord du trou. S.Cicero, V.Madrazo et I.A. Carrascal [10] démontrent que :

$$r_c = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{K_{IC}}{\sigma_c} \right)^2 = \frac{L_c}{2} \quad (10)$$

Ainsi le critère de rupture est :

$$\sigma_{yy}(r_c) = \sigma_c \quad (11)$$



Avec  $K_{IC}$  la ténacité du matériau en mode 1 de rupture. Cette méthode a été validée par D.Taylor [9] sous le nom de Point Method (PM).

**Average Stress Fracture Criterion** Aussi appelée Line Method (LM), c'est un critère non-local qui consiste à moyenner  $\sigma_{yy}$  le long d'un segment de longueur  $d_c$  à partir du bord du trou. Il est montré [10] que :

$$d_c = \frac{4}{2\pi} \left( \frac{K_{IC}}{\sigma_c} \right)^2 = 2L_c \quad (12)$$

Le critère de rupture est alors atteint lorsque

$$\frac{1}{d_c} \cdot \int_r^{d_c} \sigma_{yy}(x) dx = \sigma_c \quad (13)$$

### 3.2.1 Usage et limites du PSC et ASFC

La première utilisation que l'on peut faire de la TCD, c'est d'introduire ces critères dans les codes de simulation lorsque la structure présente des trous. Si le PSC est vérifié alors le constructeur doit optimiser la structure, soit en modifiant localement les propriétés mécanique de la structure, soit en réalisant une optimisation de forme.

La seconde utilisation du PCS consiste en supposant que  $l_c$  est indépendante des dimensions de la plaque et en connaissant  $\sigma_c$  et  $r_c$  à calculer  $\sigma^*$ . Pour cela on impose numériquement une contrainte de traction P et on relève  $\sigma_{yy}(x = rc)$  sur une ligne partant du bords du trou et perpendiculaire à la direction de traction. On a alors  $\sigma^* = \frac{P}{\sigma rc} * \sigma_c$ .

Il est à noter que ces méthodes supposent que la distance caractéristique ne dépend pas de la géométrie (W,L,D). En pratique, ce n'est pas le cas, comme le montre l'article de la référence [15]. Cependant, N.Lahellec [6] et son équipe ont vérifié la fiabilité de ces méthodes en comparant résultats expérimentaux et numériques pour un quasi-iso à plis tissés. On en déduit que ces deux méthodes permettent d'approcher  $\sigma_*$  à une tolérance acceptable (généralement 8% cf ref [14]) pour revoir le choix du matériau par rapport à son utilisation.

## 4 Méthode des éléments finis

Cette partie propose le modèle mathématique afin de pouvoir déterminer numériquement le champ des contraintes.

### 4.1 Mise en équation du problème

L'objectif du TER étant entre autre de calculer les contraintes dans la plaque, nous devons pour cela résoudre l'équation d'élasticité linéaire suivante :  $div \sigma + f_v = 0$  sur le domaine du stratifié. Les forces volumiques étant négligeables,  $f_v = 0$ . Avec les hypothèses faites à la partie 2.2, on considère que le problème est 2D et n'imposant que des forces surfaciques, on doit alors résoudre :

$$\partial_x \sigma_x + \partial_y \tau_{xy} = 0 \quad (14)$$

$$\partial_x \tau_{xy} + \partial_y \sigma_y = 0 \quad (15)$$

$$\sigma_y \cdot n_y = f_{Sy} \quad (16)$$

**Formulation variationnelle** Afin de résoudre numériquement les équations (14) à (16), on utilise la méthode des résidus pondérés [11]. Cela consiste à rechercher une approximation des déplacements noté  $\vec{U}$  telle que le résidu suivant tend vers 0 :  $R(\vec{U}) = \begin{Bmatrix} \partial_x \sigma_x + \partial_y \tau_{xy} \\ \partial_x \tau_{xy} + \partial_y \sigma_y \end{Bmatrix}$  Si  $\vec{U}$  annule le résidu, alors on a la forme intégrale forte du problème :  $W = \int_S \langle \psi \rangle \cdot R(\vec{U}) \cdot dS = 0$ . Avec  $\langle \psi \rangle = \langle \psi_u \ \psi_v \rangle$  les fonctions de pondération. L'intégrale  $W$  se décompose telle que :

$$W = \int_S [\psi_u \cdot (\partial_x \sigma_x + \partial_y \tau_{xy}) + \psi_v \cdot (\partial_x \tau_{xy} + \partial_y \sigma_y)] dS \quad (17)$$

En utilisant les formules de Green (le détail est en Annexe D) et les conditions de bords (16), l'équation (17) devient :

$$W = - \int_S (\partial_x \psi_u \sigma_x + \partial_y \psi_v \sigma_y + (\partial_y \psi_u + \partial_x \psi_v) \tau_{xy}) dS + \int_{\Sigma} \psi_v \cdot \sigma_y \cdot n_y d\Sigma. \quad (18)$$

Il s'agit de la forme intégrale faible du problème. Cela permet de faire apparaître les forces surfaciques et de diminuer le degré de dérivation de un.

**Choix des fonctions de pondération** En se basant sur l'hypothèse de Galerkin, on assimile les fonctions de pondération aux variations du champ de déplacement. On a alors  $\langle \psi_u \ \psi_v \rangle = \langle \delta u \ \delta v \rangle$  et :

$$W = - \int_S (\partial_x \delta u \cdot \sigma_x + \partial_y \delta v \cdot \sigma_y + (\partial_y \delta u + \partial_x \delta v) \cdot \tau_{xy}) dS + \int_{\Sigma} \delta v \cdot f_{Sy} d\Sigma$$

$$W = - \int_S (\delta(\partial_x u) \cdot \sigma_x + \delta(\partial_y v) \cdot \sigma_y + \delta(\partial_y u + \partial_x v) \tau_{xy}) dS + \int_{\Sigma} \delta v \cdot f_{Sy} d\Sigma$$

En utilisant la relation

$$[\epsilon] = \frac{1}{2} \cdot (\nabla U + (\nabla U)^T) \quad (19)$$

on a :

$$W = - \int_S (\delta \epsilon_x \cdot \sigma_x + \delta \epsilon_y \cdot \sigma_y + \delta \gamma_{xy} \cdot \tau_{xy}) dS + \int_{\Sigma} \delta v \cdot f_{Sy} d\Sigma$$

Finalement, la forme intégrale faible s'écrit :

$$W = - \int_S \langle \delta \epsilon \rangle \cdot \{\sigma\} dS + \int_{\Sigma} \delta v \cdot f_{Sy} d\Sigma \quad (20)$$

Avec  $\langle \epsilon \rangle = \langle \epsilon_x \ \epsilon_y \ \gamma_{xy} \rangle$  et  $\langle \sigma \rangle = \langle \sigma_x \ \sigma_y \ \tau_{xy} \rangle$

## 4.2 Mise sous forme matricelle

Afin de pouvoir calculer numériquement la solution en déplacement, on doit se munir d'une discrétisation de l'espace de notre système. Pour cela, on maille la surface de la plaque en élément triangulaire de type P1 isoparamétrique. Cela permet de décomposer l'intégrale  $W$  sur

chaque élément du maillage, ce qui simplifie le calcul de l'intégrale et permet d'approximer les déplacements aux noeuds du maillage via les fonctions d'interpolations. En utilisant la loi de Hook  $\{\sigma\} = [H].\{\epsilon\}$  introduite avec la relation (6), on a pour tout élément (i) du maillage :

$$W_{(i)} = - \int_{S(i)} \langle \delta \epsilon \rangle \cdot [H] \cdot \{\epsilon\} dS + \int_{\Sigma(i)} \delta v \cdot f_{Sy} d\Sigma \quad (21)$$

**Fonctions d'interpolation et matrice de rigidité** En notant les déplacements nodaux de l'élément (i) ainsi :  $\langle U_{n(i)} \rangle = \langle u_1 \ v_1 \ u_2 \ v_2 \ u_3 \ v_3 \rangle$ , on peut interpoler les déplacements tel que  $U = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = [N] \cdot \{U_{n(i)}\}$  avec  $[N]$  la matrice d'interpolation nodale. Etant donné que le maillage est isoparamétrique, autrement dit les noeuds du maillage sont les noeuds de calcul, on peut confondre les fonctions d'interpolation nodale avec les fonctions de forme, celles qui établissent les relations entre éléments de référence et réel. Ainsi, les composantes de  $[N]$  sont données en Annexe E, ce qui donne directement :  $[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix}$

Dans un second temps, afin de traduire matriciellement l'équation (21), on introduit la matrice  $[B]$  telle que  $\{\epsilon\} = [B] \cdot \{U_{n(i)}\}$ . On peut facilement exprimer dans le repère de référence les dérivées partielles du champ des déplacements nodaux tel que :  $\langle \epsilon_\zeta \rangle = \langle \partial_\zeta u \ \partial_\eta u \ \partial_\zeta v \ \partial_\eta v \rangle$ . Avec l'interpolation nodale, cette relation s'écrit :  $\{\epsilon_\zeta\} = [B_\zeta] \cdot \{U_{n(i)}\}$ , où  $[B_\zeta]$  est la matrice des dérivées partielles des fonctions d'interpolations dans la base de référence :

$$[B_\zeta] = \begin{bmatrix} \partial_\zeta N_1 & 0 & \partial_\zeta N_2 & 0 & \partial_\zeta N_3 & 0 \\ \partial_\eta N_1 & 0 & \partial_\eta N_2 & 0 & \partial_\eta N_3 & 0 \\ 0 & \partial_\zeta N_1 & 0 & \partial_\zeta N_2 & 0 & \partial_\zeta N_3 \\ 0 & \partial_\eta N_1 & 0 & \partial_\eta N_2 & 0 & \partial_\eta N_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ Afin de revenir}$$

dans la base réelle, il faut appliquer l'inverse de la jacobienne  $[j]$  de la transformation. On définit donc la matrice  $[Q]$  comme la matrice modifiée de  $[j]$  afin d'obtenir les déformations en

base réelle. On a  $\{\epsilon\} = [Q] \cdot \{\epsilon_\zeta\}$ , où  $[Q] = \frac{1}{x_{21} \cdot y_{31} - x_{31} \cdot y_{21}} \cdot \begin{bmatrix} y_{31} & -y_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x_{31} & x_{21} \\ -x_{31} & x_{21} & y_{31} & -y_{21} \end{bmatrix}$ , avec la

notation suivante :  $X_{ij} = X_i - X_j$ .

$$\text{Finalement, on a : } [B] = [Q] \cdot [B_\zeta] = \frac{1}{x_{21} \cdot y_{31} - x_{31} \cdot y_{21}} \cdot \begin{bmatrix} y_{23} & 0 & y_{31} & 0 & y_{12} & 0 \\ 0 & x_{32} & 0 & x_{13} & 0 & x_{21} \\ x_{32} & y_{23} & x_{13} & y_{31} & x_{21} & y_{12} \end{bmatrix}$$

### Modification des forces surfaciques

Etant donné que l'on impose une traction longitudinale, on peut écrire le vecteur local des efforts surfaciques tel que :  $\langle f_{S(i)} \rangle = \langle f_{u1(i)} \ f_{v1(i)} \ f_{u2(i)} \ f_{v2(i)} \ f_{u3(i)} \ f_{v3(i)} \rangle$ , avec pour  $j = 1, 3 \ f_{uj} = 0$ . Anisi,  $\int_{\Sigma(i)} \delta v \cdot f_{Sy} d\Sigma = \langle \delta U_{n(i)} \rangle \int_{\Sigma(i)} [N]^T \cdot f_{S(i)} d\Sigma$

### Forme matricielle

Avec les éléments précédents, on décompose l'équation (21) sous la forme suivante :

$$W_{(i)} = \langle \delta U_{n(i)} \rangle \left( - \int_{S(i)} [B]^T \cdot [H] \cdot [B] \cdot \{U_{n(i)}\} dS + \int_{\Sigma(i)} [N]^T \cdot \{f_{S(i)}\} d\Sigma \right) \quad (22)$$

On appelle  $[K_{(i)}]$  la matrice de rigidité locale pour l'élément (i) telle que :

$$[K_{(i)}] = \int_{S(i)} [B]^T \cdot [H] \cdot [B] dS.$$

De même, le vecteur force local pour l'élément (i) est :

$$\{F_{(i)}\} = \int_{\Sigma_i} [N]^T \cdot \{f_{S(i)}\} d\Sigma$$

On obtient pour tout élément (i) du maillage :

$$W_{(i)} = < \delta U_{n(i)} > (-[K_{(i)}] \cdot \{U_{n(i)}\} + \{F_{(i)}\}) \quad (23)$$

### 4.3 Les étapes de la MEF

Pour tous les éléments du maillage, on forme les matrices de rigidité et vecteurs force locaux. Afin de résoudre le problème globalement, une procédure d'expansion est appliquée aux  $[K_{(i)}]$  et  $\{F_{(i)}\}$ . L'addition des éléments de même nature permet d'obtenir le système global :

$$[K] \cdot \{U_{nd}\} = \{F\} \quad (24)$$

La matrice de rigidité globale  $[K]$  est de taille  $(Nd.NDDL)^2$ . Elle est symétrique définie-positive sans déplacements imposés [13], et  $\{F\}$  le vecteur force global. L'équation (24) se résout par la méthode du gradient conjugué avec préconditionneur gauche diagonal. Une fois les déplacements nodaux obtenus, on calcule les déformations aux noeuds des éléments (i) par  $\{\epsilon\}_{(i)} = [B]_{(i)} \cdot \{U_{nd}\}_{(i)}$ . En utilisant les relations contraintes-déformations (6) et (7), on en déduit  $\sigma$ . Enfin le critère de rupture (10) peut être appliqué en membrane. Le code de calcul stocke  $[K]$  au format creux, il est implémenté en fortran 90 et parallélisé via la librairie MPI, le nombre de processus est fixé à quatre.

## 5 Validation du code et détermination de la longueur caractéristique

Cette étape permet en comparant les résultats issus de notre code avec ceux provenant de code Abaqus et de la théorie pour un cas simple, de valider notre modèle et dans certifier l'implémentation. Avec la figure 10 ci-dessous, on présente les points où l'on comparera nos résultats avec ceux d'Abaqus. La ligne (AD) représente l'ensemble des points  $\{(x, y) | x \in [\frac{W}{2} + R, W] \text{ et } y = y_A\}$ , c'est sur cet ensemble que l'on tracera  $\sigma_{yy}$  pour rechercher la distance  $r_c$ . La figure 8 (Partie 3.1) donne les conditions aux bords pour résoudre l'équation (24) sur la plaque entière, tandis que pour un modèle 1/4 de plaque on utilise les conditions de la figure 11.

### 5.1 Cas TEST

Pour valider notre code EF, nous réalisons une traction à la contrainte imposée  $\sigma = 300MPa$  sens Y et sens X sur une plaque carré sans trou de côté  $L = 0,416m$  et de module d'Young  $E = 38,872GPa$ . Comme la plaque est carrée, les résultats suivant Y obtenus pour la traction suivant Y doivent être identique à ceux suivant X pour la traction en X. Le tableau 4 présente nos résultats pour les deux traction, on vérifie bien que les résultats sont identiques, ce test permet de valider l'implémentation des modules de calculs du code.

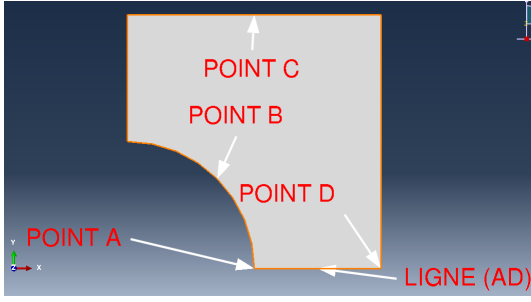


FIGURE 10: Points de comparaison  
(la figure n'est pas à l'échelle)

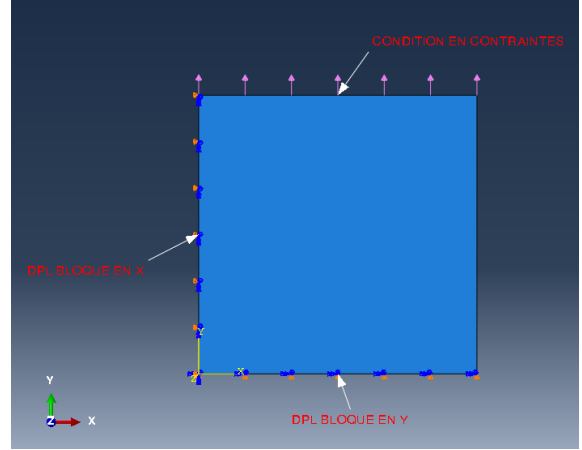


FIGURE 11: Modèle 1/4 de plaque,  
conditions aux bords

Valeurs	Traction sens Y	Traction sens X
$\sigma$ (Pa) sens traction	$3.10^8$	$3.10^8$
$\epsilon$ sens transverse	$-2,4076.10^{-3}$	$-2,4076.10^{-3}$
$\epsilon$ sens traction	$7,7176.10^{-3}$	$7,7176.10^{-3}$
U (m) sens transverse	$5,008.10^{-4}$ point D	$5,008.10^{-4}$ point C
U (m) sens traction	$1,605.10^{-3}$ point C	$1,605.10^{-3}$ point D

TABLE 4: Résultats numériques pour une plaque carrée

Par ailleurs, nous pouvons comparer ces résultats avec ceux issus de la théorie de l'élasticité linéaire. En effet, pour un quasi-isotrope, le demie allongement de la plaque est donné par  $\frac{\Delta L}{2} = \frac{\sigma \cdot L}{2 \cdot E} = 1,605.10^{-3}m$ . Nous avons donc une erreur relative nulle par rapport au déplacement sens traction calculé au point C, notre code est donc validé par la théorie. Cet essai permet aussi de déterminer numériquement le coefficient de poisson du stratifié, avec  $\nu_{LT} = -\frac{\epsilon_T}{\epsilon_L} = 0.312$ . Enfin, nous comparons nos résultats avec le modèle Abaqus qui traite le même problème mais pour 1/4 de la pièce comme le montre la figure 11. On voit que les erreurs relatives sont bien inférieurs à 0.1% comme le montre le tableau 5 suivant.

Valeurs MAX ou MIN	Abaqus	Code	Err relative
$\sigma_{yy}$ en Pa	$3.10^8$	$3.10^8$	0%
$\epsilon_{yy}$	$7,719.10^{-3}$	$7,7176.10^{-3}$	0,02%
$\epsilon_{xx}$	$-2,409.10^{-3}$	$-2,4075.10^{-3}$	0,06%
$U_{yy}$ point C en m	$1,605.10^{-3}$	$1,605.10^{-3}$	0%
$U_{xx}$ point D en m	$-5,009.10^{-4}$	$-5,008.10^{-4}$	0.02%

TABLE 5: Comparaison des résultats Abaqus/Code pour la plaque carrée

## 5.2 Essai de traction sur plaque trouée

D'une part nous comparerons nos simulations avec celles du code Abaqus pour la recherche du critère de rupture, d'autre part, muni de ce critère, nous déterminerons  $\sigma_*$  pour une plaque

de diamètre deux fois plus petit afin d'appliquer la méthode décrite en 3.2.1 . Le modèle 1/4 de plaque (cf figure 11) est adopté tant avec notre code que pour abaqus, cela permet de raffiner le maillage proche de la zone de concentration de contrainte.

### 5.2.1 Calcul de $r_c$ connaissant $\sigma_c$ et $\sigma_*$

Nous réalisons maintenant une traction à la contrainte imposée  $\sigma_*$  sur la plaque OHT2 de l'article en référence [14] dont les dimensions et caractéristiques ont été exposées via le tableau 3 de la partie 2.2. Nous reportons en Annexe D la visualisation des déplacements et contraintes suivant  $\vec{Oy}$ . Le tableau 6 suivant (cf figure 10 pour la localisation des points de comparaisons) :

Valeurs	Abaqus	Code	Err relative
$\sigma_{yy}(PointA)$ en Pa	$9,506.10^8$	$9,5.10^8$	0,06%
$\sigma_{xx}(PointB)$ en Pa	$1,757.10^8$	$1,74.10^8$	1%
$\epsilon_{yy}(PointA)$	$2,446.10^{-2}$	$2,44.10^{-2}$	0,2%
$\epsilon_{xx}(PointB)$	$2,729.10^{-3}$	$2,63.10^{-3}$	3,6%
$U_{yy}(PointC)$ en m	$9,939.10^{-4}$	$9,94.10^{-4}$	0,01%
$U_{xx}(Point D)$ en m	$-5,498.10^{-5}$	$-5,5.10^{-5}$	0,04%

TABLE 6: Comparaison des résultats Abaqus/Code pour OHT2

montre que nos résultats concordent avec ceux obtenus par Abaqus, on vérifie aussi que la contrainte maximale en bords de trou  $\max(\sigma_{yy}) = \sigma_{yy}(PointA)$  est bien égale à  $Kt * \sigma_{nom} = 2,55 * 367,32 = 9,3666.10^8 \text{Pa}$  avec  $Kt$  et  $\sigma_{nom}$  issues de la figure (9) et de la relation (9) ce qui correspond à une erreur relative avec  $\sigma_{yy}(Point A)$  de 1,4%, autrement dit la formulation de la MEF exposée à la partie 4 est applicable même en présence de concentration de contrainte. Pour les points loin du trou la formule théorique  $\frac{\Delta L}{2} = \frac{\sigma.L}{2.E} = 9,843.10^{-4}m$  reste vrai, on a alors une erreur relative de 1% avec  $U_{yy}(PointC)$ , ce qui reste acceptable en terme de précision. La figure 12 ci-dessous présente l'allure des courbes  $\sigma_{yy}(x) = f(x)$  avec  $(x,y) \in (AD)$  obtenues avec notre code et le code d'Abaqus. Comme on peut le voir sur la figure 12 les courbes OHT2

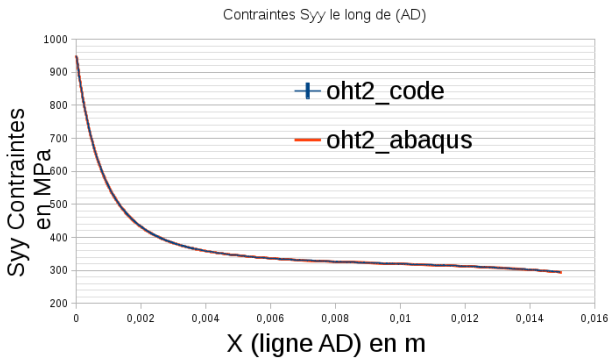


FIGURE 12: Comparaison Code ABAQUS  $\sigma_{yy}(x=x-W/2-R,y); (x,y) \in (AD)$

CODE		ABAQUS	
X (m)	Syy (Pa)	X (m)	Syy (Pa)
0,0018026	447528360,1	0,0018501	443170000
0,0018147	446477862,3	0,0018551	442763000
0,0018296	445300496,9	0,0018601	442362000
0,0018423	444262018,5	0,0018651	441954000
0,0018538	443268823,9	0,0018701	441563000
0,0018673	442138824,6	0,0018751	441154000
0,0018821	440947149,1	0,0018801	440787000
0,0018944	439999704,4	0,0018851	440381000
0,0019069	439029527,8	0,0018901	439966000
0,0019198	438082471,5	0,0018951	439575000
0,001932	437104487,2	0,0019001	439161000
0,0019457	436084434,3	0,0019051	438754000
0,0019581	435121468,6	0,0019101	438346000
0,0019703	434234020,3	0,0019151	437918000
0,0019829	433333694,1	0,0019201	437504000
0,0019959	432480673,5	0,0019251	437135000

FIGURE 13: Table de valeur pour OHT2  $(X,\sigma_{yy}(x=x-W/2-R,y)); (x,y) \in (AD)$

des différents codes sont confondues. Pour déterminer la distance caractéristique via la Point Method, nous relevons avec la figure 13 l'abscisse correspondant à la contrainte à rupture de la

plaque non trouée  $\sigma_c = 440MPa$ . Tant avec notre code que par le code d'Abaqus nous avons  $r_c = 1,89mm$ .

D'après l'article [14]  $r_c = 1.86mm$ , nous avons donc une erreur relative de 1,6%. Nous approchons donc bien cette valeur, pour plus de précision, nous pourrions raffiner notre maillage ou obtenir l'erreur de mesure sur  $\sigma_c$  et  $\sigma_*$  qui n'est pas donnée par l'article [14].

## 5.2.2 Calcul de $\sigma_*$ pour OHT1

Nous souhaitons vérifier la méthode décrite en 3.2.1, nous appliquerons donc une contrainte de  $200MPa$ . Le tableau 7 ci-dessous permet de comparer avec Abaqus nos résultats, les erreurs relatives étant faibles, nous en concluons que nos calculs pour OHT1 sont justes.

Valeurs	Abaqus	Code	Err relative
$\sigma_{yy}(PointA)$ en Pa	$6,070.10^8$	$6,03.10^8$	0,66%
$\sigma_{xx}(PointB)$ en Pa	$1,136.10^8$	$1,12.10^8$	1,4%
$\epsilon_{yy}(PointA)$	$1,562.10^{-2}$	$1,55.10^{-2}$	0,77%
$\epsilon_{xx}(PointB)$	$1,794.10^{-3}$	$1,72.10^{-3}$	4%
$U_{yy}(PointC)$ en m	$6,447.10^{-4}$	$6,45.10^{-4}$	0,05%
$U_{xx}(PointD)$ en m	$-3,060.10^{-5}$	$-3,06.10^{-5}$	0%

TABLE 7: Comparaison des résultats Abaqus/Code pour OHT1

La figure 14 ci dessous présente les contraintes le long de la ligne (AD) pour le chargement de  $200MPa$ , nous utilisons la figure 15 pour lire précisément  $\sigma(r_c = 1,86mm) = 233,222 MPa$ . Avec les hypothèses d'élasticité linéaire, nous pouvons en déduire que  $\sigma^* = \frac{200MPa}{\sigma_{rc}} \cdot \sigma_c = \frac{200 \cdot 440}{233,222} = 377,323 MPa$ . En ce référant au tableau 3,  $\sigma^* = 375 MPa$ , on a alors une erreur relative de 0,62%. Ainsi, muni de  $rc$  et  $\sigma_c$ , on peut en déduire  $\sigma^*$  pour différentes géométries de plaque.

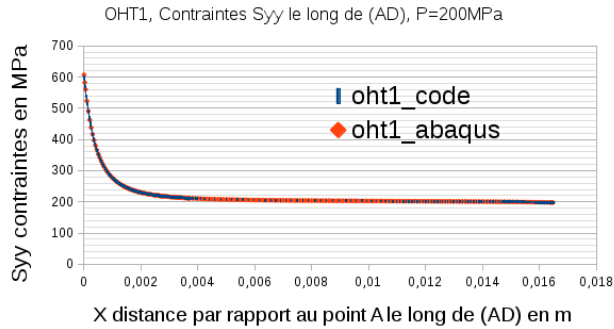


FIGURE 14:  $\sigma_{yy}(x=x-W/2-R,y)$  ;  $(x,y) \in (AD)$ ,  $P=200 MPa$ , OHT1, Code et Abaqus

OHT1 CODE		OHT1 ABAQUS	
X	Syy	X	Syy
0,00180185	234877864,5	0,0017325	236891000
0,00181502	234527490,9	0,0017576	236121000
0,00182741	234193595,9	0,0017828	235396000
0,00183897	233868346,3	0,0018079	234674000
0,00184977	233558619,7	0,001833	233993000
0,00186247	233222338	0,0018581	233314000
0,00187571	232888765,9	0,0018832	232673000
0,00188727	232580747,4	0,0019084	232034000
0,00190091	232267242,2	0,0019586	230829000
0,00191482	231951108,8	0,0020088	229694000

FIGURE 15:  $(x, \sigma_{yy}(x=x-W/2-R,y))$  ;  $(x,y) \in (AD)$ ,  $P=200MPa$ , OHT1, Code, Abaqus

## 6 Conclusion

En modélisant via la méthode des éléments finis la théorie des plaques minces et les hypothèses de Love-Kirchoff avec la théorie de la distance critique, nous pouvons prédire la rupture au sein d'une structure présentant des concentrations de contrainte. Nous avons vu que même si ce modèle présente avec l'expérience des écarts, il est suffisamment précis pour indiquer au constructeur la rupture de sa structure. Néanmoins des modèles [15] plus poussés prenant en compte les interactions entre chaque plis du stratifié et ajoutant un critère sur l'énergie de déformation donnent des informations plus complètes sur l'état du composite et permettent d'obtenir une loi comportementale du stratifié plus réaliste.



# Bibliographie

- [1] J-M Berthelot, Matériaux composites; comportement mécanique et analyse des structures, Lavoisier, 2012; Chapitre 11; pages 210-214.
- [2] J-M Berthelot, Matériaux composites; comportement mécanique et analyse des structures, Lavoisier, 2012; Chapitre 9; page 176 : Tableau 9.2.
- [3] J-M Berthelot, Matériaux composites; comportement mécanique et analyse des structures, Lavoisier, 2012; Chapitre 14; pages 291-292.
- [4] N.Lahellec et al., C. R. Mecanique 333(2005); Etude de la rupture fragile d'un stratifié quasi-isotrope à plis tissés : mise en évidence d'une longueur interne, ELVESIER, partie 2 tableau 1.
- [5] Sergey E. Mikhailov, Comparative analysis of several non-local fracture criteria, Archive of Applied Mechanics, Novembre 1998.
- [6] N.Lahellec et al., C. R. Mecanique 333(2005); Etude de la rupture fragile d'un stratifié quasi-isotrope à plis tissés : mise en évidence d'une longueur interne, ELVESIER, partie 2 tableau 1.
- [7] [http://mms2.ensmp.fr/mmc\\_paris/Annales/corrige2007.pdf](http://mms2.ensmp.fr/mmc_paris/Annales/corrige2007.pdf)
- [8] Samir , Deghboudj. (2011). Etude de la concentration de contrainte dans une plaque trouée sollicitée en traction.
- [9] D. Taylor, The Theory of Critical Distances : A New Perspective in fracture Mechanics, Elsevier, 2007.
- [10] S.Cicero, V.Madrado, and I.A. Carrascal, Estimation of fracture Toughness by Testing Notched Fracture Specimens and Applying the Theory of Critical Distances.
- [11] Jena-Christophe Cuillère. Introduction à la méthode des éléments finis. seconde édition, DUNOD.
- [12] P.Lac, Analyse des structures, Bordeaux INP ENSEIRB-MATMECA. Chapitre 9 : Théorie des plaques.

[13] Alaa Chateaneuf, Comprendre les éléments finis ; Principes, formulations et exercices corrigés. Ellipses ; Technosup

[14] Emre Özaslan, Bülent Acar, Mehmet A.Güler ; Experimental and numerical investigation of stress concentration and strength prediction of carbon/epoxyde composites ; ScienceDirect.

[15] P.P. Camanho, G.H.Erçin, G. Catalanotti, S. Mahdi, P. Linde ; A finite fracture mechanics model for the prediction of the open-hole strenght of composite laminate ; Composites : Part A 43 (2012) 1219-1225, Elsevier.

## 7 Annexe

### Annexe A : Loi des mélanges :

$$\begin{aligned} — E_L &= E_F * V_F + E_M * (1 - V_F) \\ — E_T &= \frac{E_F * E_M}{E_M * V_F + E_F * (1 - V_F)} \end{aligned}$$

**Annexe B : Matrice de rigidité réduite dans les axes d'orthotropie** : En état de contraintes planes :

$\frac{Q_{11}}{E_L}$	$\frac{Q_{22}}{E_L}$	$\frac{Q_{12}}{E_L}$	$\frac{Q_{66}}{E_L}$
$\frac{1 - \nu_{LT}^2}{E_L}$	$Q_{11} \cdot \frac{E_T}{E_L}$	$Q_{22} \cdot \nu_{LT}$	$G_{LT}$

**Annexe C : Matrice de rigidité réduite hors axes d'orthotropie** Pour un état plan de contraintes dans le plan de normale  $\vec{Z}$  on a :

$$\begin{aligned} — Q'_{11} &= V_1 + V_2 * \cos(2\theta) + V_3 * \cos(4\theta) ; Q'_{12} = V_4 - V_3 * \cos(4\theta) \\ — Q'_{16} &= \frac{1}{2} * V_2 * \sin(2\theta) + V_3 * \cos(4\theta) ; Q'_{22} = V_1 - V_2 * \cos(2\theta) + V_3 * \cos(4\theta) \\ — Q'_{26} &= \frac{1}{2} * V_2 * \sin(2\theta) - V_3 * \cos(4\theta) ; Q'_{66} = V_5 - V_3 * \cos(4\theta) \end{aligned}$$

Avec :

$$\begin{aligned} — V_1 &= \frac{1}{8} * (3Q_{11} + 3Q_{22} + 2Q_{12} + 4Q_{66}) ; V_2 = \frac{1}{2} * (Q_{11} - Q_{22}) \\ — V_3 &= \frac{1}{8} * (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 4Q_{66}) ; V_4 = \frac{1}{8} * (Q_{11} + Q_{22} + 6Q_{12} - 4Q_{66}) \\ — V_5 &= \frac{1}{2} * (V_1 - V_4) \end{aligned}$$

**Annexe D : Formules de Green appliquées à l'équation (6) :**

$$\int_S \psi_u \partial_x \sigma_x dS = - \int_S \partial_x \psi_u \sigma_x dS + \int_\Sigma \psi_u \cdot \sigma_x \cdot n_x d\Sigma$$

$$\int_S \psi_v \partial_y \sigma_y dS = - \int_S \partial_y \psi_v \sigma_y dS + \int_\Sigma \psi_v \cdot \sigma_y \cdot n_y d\Sigma$$

$$\int_S \psi_u \partial_y \tau_{xy} dS = - \int_S \partial_y \psi_u \tau_{xy} dS + \int_\Sigma \psi_u \cdot \tau_{xy} \cdot n_y d\Sigma$$

$$\int_S \psi_v \partial_x \tau_{xy} dS = - \int_S \partial_x \psi_v \tau_{xy} dS + \int_\Sigma \psi_v \cdot \tau_{xy} \cdot n_x d\Sigma$$

**Annexe E : Composantes des fonctions d'interpolation :**

A retrouver à la référence [11].

i	$N_i$	$\partial_\zeta N_i$	$\partial_\eta N_i$
1	$1-\zeta-\eta$	-1	-1
2	$\zeta$	1	0
3	$\eta$	0	1

## Annexe D : Visualisation Pour OHT2

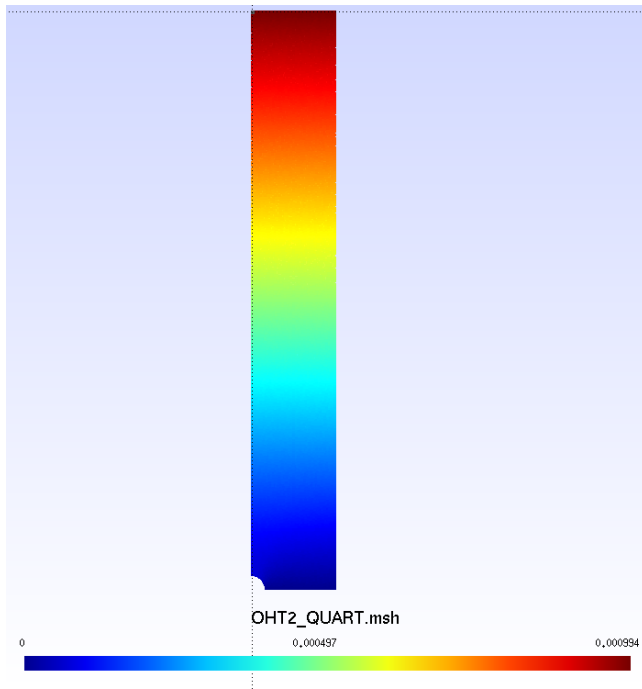


FIGURE 16: Déplacement suivant  $\vec{O}y$ , Code

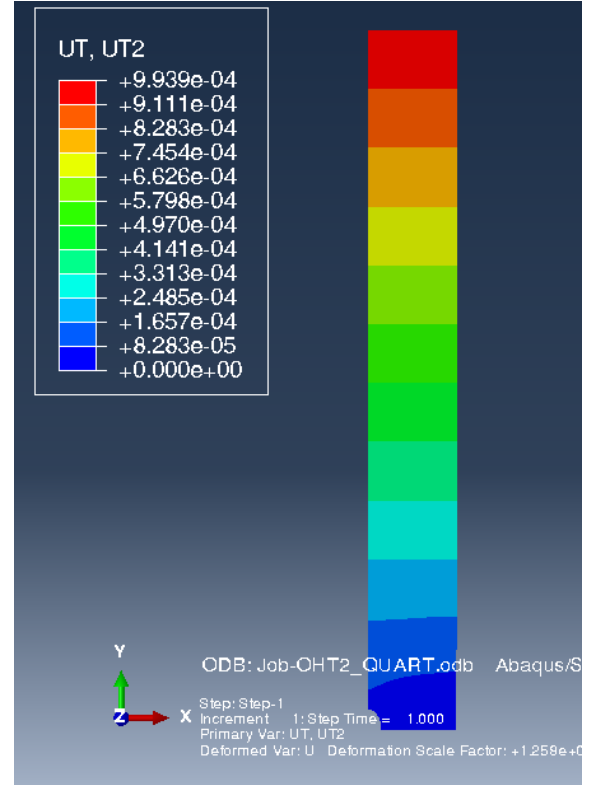


FIGURE 17: Déplacements suivant  $\vec{O}y$ , code d'Abaqus

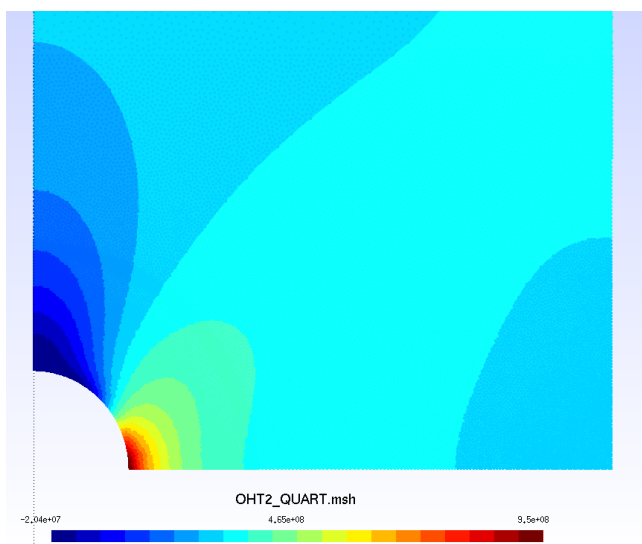


FIGURE 18: Contraintes  $\sigma_{yy}$ , Code

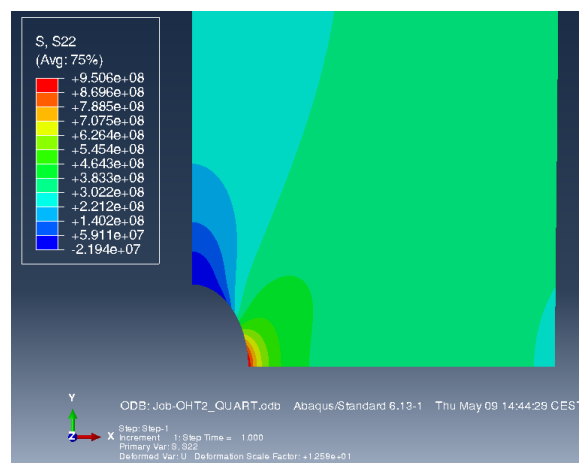


FIGURE 19: Contraintes  $\sigma_{yy}$ , code d'Abaqus