week2手寫作業 戴偉璿

第一題：

> $note: \lim\limits_{x\to\infty}k=k, \lim\limits_{x\to\infty}\cfrac{1}{x}=0$

a.

$\displaystyle\lim_{n\to \infty}\cfrac{3n+1}{n-1}=\cfrac{{\displaystyle\lim_{n\to \infty}(3+\frac{1}{n})}}{{\displaystyle\lim_{n\to \infty}(1-\frac{1}{n})}}=\cfrac{3}{1}=3\$

b. $\lim\limits_{n\to\infty}\cfrac{n}{n^2+1}=\cfrac{\lim\limits_{n\to\infty}1}{\lim\limits_{n\to\infty}(n+\cfrac{1}{n})}=\cfrac{1}{n}$

> $note: f(n)\in O(g(n))\Leftrightarrow$ \exist$k>0,$ \exist$N, \forall n>N, f(n)\le k\cdot g(n)$

c. $f(n)\in O(2^n)\Longleftrightarrow f(n)\in O(2^{n+1})$\$ (1).proof;f(n)\in O(2^n)\Longrightarrow f(n)\in O(2^{n+1})\\because f(n)\in O(2^n)\\therefore\exist k\ge 0,\displaystyle\lim_{n\to \infty}\cfrac{f(n)}{2^n}=k\$

$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}\cfrac{f(n)}{2^{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\cfrac{f(n)}{2^n}\cdot\cfrac{1}{2}=k\cdot\cfrac{1}{2}$ ，仍為一常數

$\therefore f(n)\in O(2^{n+1})$ ，成立

$(2).proof;f(n)\in O(2^n)\Longleftarrow f(n)\in O(2^{n+1})$\$ \because f(n)\in O(2^{n+1})\\therefore\exist k\ge 0 ,\displaystyle\lim_{n\to \infty}\cfrac{f(n)}{2^{n+1}}=l\\therefore\displaystyle\lim_{n\to \infty}\cfrac{f(n)}{2^n}=\displaystyle\lim_{n\to \infty}\cfrac{f(n)}{2^{n+1}}\cdot 2=l\cdot 2\$，仍為一常數

$\therefore f(n)\in O(2^n)$ ，成立

由$(1),(2)$,得證\$f(n)\in O(2^n)\Longleftrightarrow f(n)\in O(2^{n+1})\\$

d. $f(n)\in O(n!)\Longleftrightarrow f(n)\in O((n+1)!)$\$ (1).proof;f(n)\in O(n!)\Longrightarrow f(n)\in O((n+1)!)\\because f(n)\in O(n!)\\therefore\exist k\ge 0,\displaystyle\lim_{n\to \infty}\cfrac{f(n)}{n!}=k\$

$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}\cfrac{f(n)}{(n+1)!}=\lim\limits_{n\to\infty}\cfrac{f(n)}{n!}\cdot\cfrac{1}{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}k\cdot\cfrac{1}{n+1}=0$ ，仍為一常數

\$\therefore f(n)\in O(n!)\\$

$(2).proof;f(n)\in O(n!)\Longleftarrow f(n)\in O((n+1)!)$\$ \because f(n)\in O((n+1)!)\\therefore\exist k\ge 0,\displaystyle\lim_{n\to \infty}\cfrac{f(n)}{(n+1)!}=l\\therefore\displaystyle\lim_{n\to \infty}\cfrac{f(n)}{n!}=\displaystyle\lim_{n\to \infty}\cfrac{f(n)}{(n+1)!}\cdot (n+1)=\displaystyle\lim_{n\to \infty}l\cdot (n+1)=\infty\$，無法收斂成一常數

假設命題成立，設$f(n)=(n+1)!$ ，則

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!}=\lim_{n\to\infty}n+1=\infty$$

此處產生矛盾，故$f(n)\in O(n!)\Longleftarrow f(n)\in O((n+1)!)$ 不成立，故原命題不成立。

$\therefore f(n)\in O(n!)$

由$(1),(2)$,得證$f(n)\in O(n!)\Longleftrightarrow f(n)\in O((n+1)!)\$

上次沒證明出來的第四題

> 題目：序列開始時只包含一個正整數 n，接著每次對此序列進行如下操作：在序 列中找到任意一個大於 1 的正整數 k，接著把此數換成任意兩個正整數 a,b，其中$a+b=k$ ，則此操作得 $a\times b$ 分，且數列會多出一項。重複進行以上操作，直到序列中的數均為 1 為止。試證：所有操作的得分總和為$\cfrac{n^2-n}{2}$

假設命題成立，

$n+1=(i)+(n-i+1)$ ，此步驟得$i(n-i+1)=ni-i^2+i$ 分

i得分為：$\cfrac{i^2-i}{2}$ ，$n-i+1$ 得分為$\cfrac{(n-i+1)^2-(n-i+1)}{2}$

將三步驟的分數相加：$ni-i^2+i+\cfrac{i^2-i}{2}+\cfrac{(n-i+1)^2-(n-i+1)}{2}=\cfrac{n^2+n}{2}$ ，成立

故命題成立。

$\lim_{n\to \infty}\cfrac{3n+1}{n-1}=\cfrac{{\lim\limits_{n\to \infty}(3+\frac{1}{n}})}{{\lim_{n\to \infty}(1-\frac{1}{n}})}=\cfrac{3}{1}=3\$