

第一題：

假設共有 n 個人，且任兩個人認識的人數量不同。因為只有 n 個人，因此每個人認識的人數由小到大為 $0 \sim n-1$ 。然而，若認識 $n-1$ 個人，代表其一定認識除了自己以外的所有人。那麼，就不會有人認識 0 個人了，此處產生矛盾，假設不成立。因此， n 個人中至少有兩人認識的人數一樣多。

第二題

(1) 證明 $n=3$ 時成立
代入後得到 $3^3+4^3=91<5^3=125$ 命題成立

(2) 證明 若 $n=k$ 成立，則 $n=k+1$ 時也會成立
假設 $n=k (k \geq 3)$ 時 $3^k+4^k<5^k$ 成立
則 $3^{k+1}+4^{k+1}=3 \times (3^k+4^k)+4^k, 5^{k+1}=3 \times 5^k+2 \times 5^k$
其中， $3 \times (3^k+4^k) < 3 \times 5^k+2 \times 5^k$ 亦成立
故得證 $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3, 3^n+4^n<5^n$ ❤

第三題

(1) 證明 $n=4$ 時成立
帶入後得到 $3^4=81>4^3=64$

(2) 證明 若 $n=k$ 時 $3^k>k^3$ 成立，則 $3^{k+1}>(k+1)^3$ 也會成立
假設 $n=k$ 時 $3^k>k^3$ 成立

$$(k+1)^3-3^{k+1}=k^3+3k^2+3k+1-3^k \times 3=(k^3-3^k)+(3k^2-3^k)+(3k+1-3^k)$$

because $3^k>k^3, k^3-3^k<0$, 又 $k \geq 4, 3k^2<3^k, 3k^2-3^k<0, 3k+1-3^k<0$
therefore $(k+1)^3-3^{k+1}<0, 3^{k+1}>(k+1)^3$ 成立 故得證 $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 4, 3^n>n^3$

第五題：

可能的投票結果必須滿足以下兩個充要條件：
(1) 沒有人投給自己
(2) 沒有人投廢票
滿足第一式，代表一個人最多得到 $n-1$ 票，因此沒人投給自己，滿足第一個條件
滿足第二式，代表所有人的得票數相加恰等於人數，因此沒有人投廢票，滿足第二個條件
滿足兩個充要條件，因此可以知道這是一個合法的投票結果。