week2.md 2022/3/30

## week2手寫作業 戴偉璿

## 第一題:

$$note: \lim_{x o \infty} k = k, \lim_{x o \infty} rac{1}{x} = 0$$

a.

 $\label{lim_{n\to \inf }\cfrac{1}{n}}) $$ \Big( \lim_{n\to \inf }\cfrac{1}{n}}) = \Big( \frac{3n+1}{n-1} = \Big( \frac{3}{1}=3 \Big) $$$ 

$$\text{b.}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}1}{\lim\limits_{n\to\infty}(n+\frac{1}{n})}=\frac{1}{n}$$

 $note: f(n) \in O(g(n)) \Leftrightarrow ackslash ext{exist} k > 0, ackslash ext{exist} N, orall n > N, f(n) \leq k \cdot g(n)$ 

 $c. \ f(n) \in O(2^n) \Longleftrightarrow f(n) \in O(2^{n+1}) \ (1).proof; f(n) \in O(2^n) \setminus O(2^n) \cap O(2^n$ 

$$\lim_{n o\infty}rac{f(n)}{2^{n+1}}=\lim_{n o\infty}rac{f(n)}{2^n}\cdotrac{1}{2}=k\cdotrac{1}{2}$$
 ,仍為一常數

$$\therefore f(n) \in O(2^{n+1})$$
,成立

 $(2).proof; f(n) \in O(2^n) \Longleftrightarrow f(n) \in O(2^{n+1})$  \because f(n)\in O(2^{n+1})\\therefore\exist k\ge 0 ,\displaystyle\lim\_{n\to \infty}{cfrac{f(n)}{2^{n+1}}=l\\ herefore\displaystyle\lim\_{n\to \infty}{cfrac{f(n)}{2^{n+1}}} < 2^{n+1} < 2^{n+1}

$$\therefore f(n) \in O(2^n)$$
,成立

由(1),(2),得證f(n) in O $(2^n)$  Longleftrightarrow f(n) in O $(2^{n+1})$ 

d.  $f(n) \in O(n!) \iff f(n) \in O((n+1)!)$ \$ (1).proof;f(n)\in O(n!)\Longrightarrow f(n)\in O((n+1)!)\\because f(n)\in O(n!)\\therefore\exist k\ge 0,\displaystyle\lim\_{n\to \infty}\cfrac{f(n)}{n!}=k\$

$$\therefore \lim_{n o\infty}rac{f(n)}{(n+1)!}=\lim_{n o\infty}rac{f(n)}{n!}\cdotrac{1}{n+1}=\lim_{n o\infty}k\cdotrac{1}{n+1}=0$$
 ,仍為一常數

 $\theta \in (n)\in O(n!)\$ 

 $(2).proof; f(n) \in O(n!) \Longleftarrow f(n) \in O((n+1)!) \$ \operatorname{O((n+1)!} \operatorname{O((n+1)!}) \operatorname{O((n+1)!}) \operatorname{O((n+1)!} \operatorname{O((n+1)!}) \operatorname{O((n+1)!}) \operatorname{O((n+1)!} \operatorname{O((n+1)!}) \operatorname{O((n+1)!}) \operatorname{O((n+1)!} \operatorname{O((n+1)!}) \operatorname{O((n+1)!$ 

假設命題成立,設f(n) = (n+1)!,則

week2.md 2022/3/30

$$\lim_{n o \infty} rac{f(n)}{n!} = \lim_{n o \infty} rac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n o \infty} n + 1 = \infty$$

此處產生矛盾,故 $f(n) \in O(n!) \Longleftarrow f(n) \in O((n+1)!)$  不成立,故原命題不成立。

$$\therefore f(n) \in O(n!)$$

由(1),(2),得證f(n)in O(n!)Longleftrightarrow f(n)in O((n+1)!)\$

## 上次沒證明出來的第四題

題目:序列開始時只包含一個正整數 n ,接著每次對此序列進行如下操作:在序 列中找到任意一個大於 1 的正整數 k ,接著把此數換成任意兩個正整數 a,b ,其中a+b=k ,則此操作得  $a\times b$  分,且數列 會多出一項。重複進行以上操作,直到序列中的數均為 1 為止。試證:所有操作的得分總和為  $\frac{n^2-n}{2}$ 

假設命題成立,

$$n+1=(i)+(n-i+1)$$
 ,此步驟得 $i(n-i+1)=ni-i^2+i$  分

$$i$$
得分為: $\dfrac{i^2-i}{2}$ , $n-i+1$  得分為 $\dfrac{(n-i+1)^2-(n-i+1)}{2}$ 

將三步驟的分數相加:
$$ni-i^2+i+rac{i^2-i}{2}+rac{(n-i+1)^2-(n-i+1)}{2}=rac{n^2+n}{2}$$
 ,成立

故命題成立。

 $\label{lim_nto infty} $\lim_{n\to \infty}(3+\frac{3n+1}{n-1}=\operatorname{lim_nto \inf})}{{\lim_n\to \infty}(1-\frac{1}{n})}=\operatorname{lim_nto \inf}(1-\frac{1}{n})}=\operatorname{lim_nto \inf}(1-\frac{1}{n})}=\operatorname{lim_nto \inf}(1-\frac{1}{n})}$