

第一題：

假設共有 n 個人，且任兩個人認識的人數量不同。因為只有 n 個人，因此每個人認識的人數由小到大為 $0 \sim n-1$ 。然而，若認識 $n-1$ 個人，代表其一定認識除了自己以外的所有人。那麼，就不會有人認識 0 個人了，此處產生矛盾，假設不成立。因此， n 個人中至少有兩人認識的人數一樣多。

第二題

(1) 證明 $n=3$ 時成立。代入後得到 $3^3+4^3=91 < 5^3=125$ 命題成立

(2) 證明 若 $n=k$ 成立，則 $n=k+1$ 時也會成立。假設 $n=k (k \geq 3)$ 時 $3^k+4^k < 5^k$ 成立。則 $3^{k+1}+4^{k+1} = 3 \times (3^k+4^k) + 4^k$, $5^{k+1} = 5 \times 5^k$ 。其中， $3 \times (3^k+4^k) < 5 \times 5^k$ ， $4^k < 2 \times 5^k$ ，亦成立。故得證 $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3, 3^n+4^n < 5^n$ ❤️

第三題

(1) 證明 $n=4$ 時成立。帶入後得到 $3^4=81 > 4^3=64$

(2) 證明 若 $n=k$ 時 $3^k > k^3$ 成立，則 $3^{k+1} > (k+1)^3$ 也會成立。假設 $n=k$ 時 $3^k > k^3$ 成立。

$$3^{k+1} - 3^{k+1} = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - 3^k \times 3 = (k^3 - 3^k) + (3k^2 - 3^k) + (3k + 1 - 3^k)$$

because $3^k > k^3, k^3 - 3^k < 0$, 又 $k \geq 4, 3k^2 < 3^k, 3k^2 - 3^k < 0, 3k + 1 - 3^k < 0$ 。因此 $3^{k+1} - 3^{k+1} < 0, 3^{k+1} > (k+1)^3$ 成立。故得證 $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 4, 3^n > n^3$

第五題：

可能的投票結果必須滿足以下兩個充要條件：
 (1) 沒有人投給自己
 (2) 沒有人投廢票
 滿足第一式，代表一個人最多得到 $n-1$ 票，因此沒人投給自己，滿足第一個條件。
 滿足第二式，代表所有人的得票數相加恰等於人數，因此沒有人投廢票，滿足第二個條件。
 滿足兩個充要條件，因此可以知道這是一個合法的投票結果。