1 函數的極限

1. 函數的極限有分成**左極限**和**右極限**：
   - 左極限：$\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = L$，表示當 x 趨近於 a 時，$f(x)$ 從左邊接近 L。
   - 右極限：$\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L$，表示當 x 趨近於 a 時，$f(x)$ 從右邊接近 L。
2. 如果左極限和右極限都存在且相等，則稱 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$。
3. 如果 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 存在，且 $f(a) = L$，則稱 $f(x)$ 在 $x = a$ 處**連續**。
4. **勘根定理**：假設 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 連續，且 $f(a)f(b) < 0$，則存在 $c \in (a, b)$ 使得 $f(c) = 0$。

例題：

1. 已知 $f(x)$ 是三次實係數多項式且 k 為一個常數。若 $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{f(x)}{x-2} = -5$，$\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{f(x)}{x-3} = 7$，且 $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)+k}{x-1}$ 存在，求 $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)+k}{x-1}$ 的值。

2. 設 P 點在拋物線 $y = x^2$ 上且在第一象限，O 為原點。在 x 軸正向上取一點 Q，使的 $\overline{OP} = \overline{OQ}$，接直線 $\overline{QP}$ 交 y 軸於 R 點。當 P 點沿著拋物線趨近於原點時，R 點的座標趨近於何值？

3. 設 $f(x)=(x-16)^2(x-17)^2+3x$，請證明至少有一個時數 c 使得 $f(c)=50$。

4. 承上題，已知其中一個 c 介於 16 與 17 之間，請求出 c 的值。

5. 請求出以下函數的極限：

   (a) $\lim\limits_{x\to 6}(\dfrac{2x-17}{x^2-7x+6}+\dfrac{x-5}{x-6})$

   (b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x-1}(\dfrac{1-x^{20}}{1-x}-20)$

   (c) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{|x^2-2x-3|}{x+1}$

   (d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|2+3x-x^2|-2}{x}$

   (e) $\lim\limits_{x\to 0}x^2[\dfrac{1}{x}]$

2 微分

1. 微分的概念是描述函數在某點的變化率。簡言之，我們討論當 x 在某點有極小的變化時，$f(x)$ 的變化量。微分也可以稱作為**導數**。
2. 因此，導數的公式可以寫成：

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

，同時也能表現成

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

，其中 h 是 $x - a$ 的變化量。

3. 如果說 $f(x)$ 在某一點可微，則代表 $f(x)$ 在該點**連續且極限存在**。
4. **萊布尼茲符號**：導數也可以用萊布尼茲符號表示為 $\frac{dy}{dx}$，其中 $y = f(x)$。
5. 導數的幾何意義是函數圖形在某點的切線斜率。
6. 微分的計算規則：
   - (a) 常數函數的導數為零：$f(x) = c \Rightarrow f'(x) = 0$。
   - (b) 冪函數的導數：$f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$。
   - (c) 和差法則：$f(x) = g(x) + h(x) \Rightarrow f'(x) = g'(x) + h'(x)$。
   - (d) 乘法法則：$f(x) = g(x)h(x) \Rightarrow f'(x) = g'(x)h(x) + g(x)h'(x)$。
   - (e) 除法法則：$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{g'(x)h(x) - g(x)h'(x)}{(h(x))^2}$。
   - (f) 鏈式法則：如果 $y = g(u)$ 且 $u = f(x)$，則 $y' = g'(u)f'(x)$。
   - (g) 指數函數的導數：$f(x) = a^x \Rightarrow f'(x) = a^x \ln(a)$。
   - (h) 對數函數的導數：$f(x) = \log_a(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x \ln(a)}$。

例題：

1. 下列哪些函數在 $x = 0$ 處可微？
   - (a) $f(x) = x + |x|$
   - (b) $f(x) = x|x|$
   - (c) $f(x) = x - [x]$
   - (d) $f(x) = \sqrt{|x|}$
   - (e) $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}, x \neq 0; 0, x = 0$
2. 請計算下列函數的導函數：
   - (a) $f(x) = 3x^2 - 5x + 2$

(b) $f(x)=\sqrt{x^2+1}$

(c) $f(x)=\frac{x^2+1}{x-1}$

(d) $f(x)=(2x+1)^{200}$

(e) $f(x)=(2x+1)^{100}(2-3x)^{200}$

3. 已知兩個曲線 $y=x^3+ax$ 和 $y=x^2+bx+c$ 都通過點 $P(1,2)$，且他們在點 P 處的切線斜率相等。求 a,b,c 的值。

4. 設 $f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$，其中 a,b,c 為實數，且 $a>b>c$，$a+c>2b$。請排序 $f'(a),f'(b),f'(c)$ 的大小。

5. 設 $f(x)=(x^2-3)^3(2x-1)^2$，$g(x)=\frac{x(x+1)(x+2)(x+3)}{(x-1)(x-2)(x-3)}$，求 $f'(1)+g'(0)$

6. 已知直線 $x+y=2$ 和曲線 $y=ax^3$ 相切，求 a 的值。

7. 設函數 $f(x)=|(x-1)^3(x+1)|$，選出正確的選項：

   (a) $f(x)$ 在 $x=1$ 處導數存在

   (b) $f(x)$ 在 $x=-1$ 可微分

   (c) $f'(0)=-2$

   (d) $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=f(1)$

   (e) $f(x)$ 在 $x=-1$ 處連續