1 數列

1. **數列的定義**：數列是由一系列數字按照一定的順序排列而成的集合。每個數字稱為數列的項，通常用符號 a_n 表示第 n 項。
2. **數列的表示法**：數列可以用括號表示，如 $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$，或用尖括號表示，如 $< a_n >_{n=1}^{\infty}$。
3. **數列的類型**：**有限數列**和**無窮數列**。有限數列是指包含有限個數字的數列，而無限數列則包含無窮多個數字。
4. **數列的第 n 項**：表示數列的第 n 項，除了可以直接寫出 a_n 的公式（如：$a_n = n^2$），還可以用遞迴公式來定義，如：$a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + 2$。

例題：

1. 數列 A：$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$，請寫出這個數列的第 n 項公式。

2. 已知一個數列 a_n 的遞迴公式為 $a_1 = 2, a_{n+1} = 3a_n + 1$，請求出他的一般式。

3. 假設有一個數列 $< a_n >$ 的前 n 項和為 $S_n = 2n^2 + 3n$，請求出 a_n 的公式。

2 極限

1. **數列的極限**：如果說 n 在趨近於無限大的時候，數列 a_n 的值趨近於某個固定的數 L，則稱 L 為數列 a_n 的極限，記作 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$，或是 $a_n \to L$。
2. **發散與收斂**：如果數列的極限存在，則稱該數列為**收斂數列**；如果極限不存在，則稱為**發散數列**。如果計算結果為 $\frac{0}{0}$，則需要進一步化簡整理。
3. **極限的四則運算**：
   假設數列 $a_n \to A$ 和 $b_n \to B$，則：
   - $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = A + B$
   - $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = A - B$
   - $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = AB$
   - 如果 $B \neq 0$，則 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{A}{B}$

例題：

1. 判斷以下數列是否收斂，如果是則求出極限：
   (a) $a_n = \frac{1}{n}$

   (b) $b_n = \frac{n^2+1}{n^2-1}$

   (c) $c_n = 1, -1, 1, -1, \ldots$

   (d) $d_n = \left(\frac{-1}{2}\right)^n$

   (e) $e_n = \frac{n^2+2n+1}{3n+2}$

   (f) $f_n = \frac{3n+2}{n^2+2n+1}$

   (g) $g_n = \left(2 - \frac{1}{n}\right)\left(3 + \frac{3}{n^2}\right)$

   (h) $h_n = \frac{n^2}{2n-1} - \frac{n^2}{2n+1}$

2. 數列 $< a_n >$ 中，$a_1 = 0, a_{n+1} = a_n + 2n - 1, n > 1$，求 a_{100}

3. 若數列 $<a_n>$ 的前 k 項和為 $S_k = 2^{k+1}(k^2 - 2k)$，請求出 a_{10}。

4. 已知 A, B 皆為無窮數列，請選出正確的選項：

   (a) 若 $\lim\limits_{n\to\inf} a_n = A$，則 $\lim\limits_{n\to\inf} a_{n+1} = A$

   (b) 若 $\lim\limits_{n\to\inf} a_n = A$，則 $\lim\limits_{n\to\inf} a_{2n} = A$

   (c) 若 $\lim\limits_{n\to\inf} a_{2n} = A$，則 $\lim\limits_{n\to\inf} a_n = A$

   (d) 若 $\lim\limits_{n\to\inf} a_{2n} = \lim\limits_{n\to\inf} a_{2n+1} = A$，則 $\lim\limits_{n\to\inf} a_{n+1} = A$

   (e) 若 $\lim\limits_{n\to\inf} a_n = A$，則 $\lim\limits_{n\to\inf} \sqrt{a}_n = \sqrt{A}$

5. 請計算 $\lim\limits_{n\to\inf} \dfrac{2^{n-1} + 5 \cdot 3^{n+1} - 6 \cdot 4^{n-1}}{3 \cdot 2^{n+1} - 4 \cdot 3^{n-1} + 7 \cdot 4^{n+1}}$。

6. 設 $<a_n>$ 收斂，且 $\lim\limits_{n\to\inf} \dfrac{2^n + (-3)^n \cdot a_n}{2^n - -3^n} = \dfrac{2}{3}$，請計算 $\lim\limits_{n\to\inf} a_n$