8. NP

Ansatz

Problem ist leicht, wenn es in Polynomialzeit lösbar ist.

Worst-Case-Laufzeit des Algorithmus ist also $\Theta\left(\sum_{i=0}^{k} a_i n^i\right) = poly(n)$ mit konstanten a_i, k

Leicht zu lösende Problem:

- Sortieren eines Arrays
- Breitensuche im Graphen
- Minimale Spannbäume berechnen
- ...
  Probleme mit leicht zu überprüfender Lösung:
- TSP
- Faktorisieren
- ...
  Unentscheidbare Probleme:
- Halteproblem
- Code-Erreichbarkeit
- ...

Berechnungsprobleme vs. Entscheidungsprobleme

Berechnungsproblem:

- Gegeben: Problem P
- Gesucht: Lösung S
- Beispiel: Berechne kürzeste Pfade im Graphen
  Entscheidungsproblem:
- Gegeben: Problem P
- Gesucht: Hat P Eigenschaft E? Antwort ist wahr/falsch
- Beispiel: Ist gerichteter Graph stark zusammenhängend?
  Im Folgenden werden nur Entscheidungsprobleme betrachtet
  Man kann jedes Berechnungs- in ein Entscheidungsproblem überführen, so dass Polynomialzeit-Lösung für Entscheidungsproblem auch Polynomialzeit-Lösung für Berechnungsproblem ergibt.

Beispiel: Faktorisieren

Faktorisierungsproblem (Berechnungsproblem):

- Gegeben: n-Bit Zahl $N \geq 2$
- Gesucht: Primfaktoren von N
  $\Rightarrow$ Entscheidungsproblem:
- Gegeben: n-Bit Zahl $N \geq 2$, zahl B
- Gesucht: Ist kleinster Primfaktor von N maximal B?

```
Factorize(N) // N>1
        WHILE N>1 DO
                p=computeFactor(N);
                print p;
                N=N/p;

computeFactor(N) // use decideFactor(N,B) as sub, N>1, computes prime factor of
N
        L=1; U=N;
        WHILE L!=U DO
                M=L+floor((U-L)/2);
                IF decideFactor(N,M)==1 THEN U=M ELSE L=M+1;
        return L;

decideFactor(N,B)
        ...
        return d; // d==0 or d==1
```

- `sub` steht für Suboutine
  In jeder Iteration wird Suchintervall um Hälfte reduziert, runden kann man ignorieren
  Zu Beginn Intervalllänge N, also nach $\Theta(\log_2 N) = \Theta(n)$ Iterationen fertig
  Laufzeit $\Theta(\log_2 N) = \Theta(n)$ Iterationen von `decideFactor`, in jeder Iteration konstanter Aufwand
  Laufzeit `Factorize`:
  In jeder Iteration wird Primfaktor $p \geq 2$ abgespalten, also maximal $\Theta(\log_2 N) = \Theta(n)$ Iterationen
  Annahme der Laufzeit von `decideFactor`: $poly(n)$
  Gesamtlaufzeit $\Theta(n^2 \cdot poly(n))$

Berechnung durch Entscheidung

Berechnungsproblem:

- Gegeben: Problem P
- Gesucht: Lösung S
  Kreiere daraus Entscheidungsproblem:
- Gegeben: Problem P, String s
- Gesucht: Ist s Präfix der Binärdarstellung einer Lösung S?

```
compute(P) // use decide(P,s) as sub
        s=""; // empty string
        IF decide(P,s)==0 THEN return "no solution";
        done=false;
        WHILE !done DO
                szero=decide(P,s+"0");
                sone =decide(P,s+"1");
                IF szero==0 AND sone==0 THEN // solution found
                        done=true
                ELSE IF szero==1 THEN s=s+"0" ELSE s=s+"1";
        return "solution " + s;

decide(P,s)
        ...
        return d; // d==0/d==1
```

Sofern Bitlänge der Lösungen polynomiell beschränkt ist und `decide` in Polynomialzeit läuft, läuft `compute` auch in Polynomialzeit
Es wird bit-weise in richtige Richtung gesucht
Laufzeit: $\Theta\left(2 \cdot \max_S |S| + 1\right)$ Iterationen von `decide`

Komplexitätsklassen P und NP

Komplexitätsklasse P

Betrachte Entscheidungsproblem für Eigenschaft als Menge:
$L_E := \{P : P \text{ hat Eigenschat } E\}$
L kommt von "language"
Beispiel: $L_{Sc} := \{G : G \text{ ist gerichtetet, stark zusammenhängender Graph}\}$
Komplexitätsklasse P:
Ein Entscheidungsproblem L_E ist genau dann in der Komplexitätsklasse P, wenn es einen Polynomialzeit-Algorithmus A_{L_E} mit Ausgabe 0/1 gibt, der stets korrekt entscheidet, ob eine Eingabe P die Eigenschaft E hat oder nicht, also
$P \in L_E \Leftrightarrow A_{L_E}(P) = 1$ für alle P gilt.
Eigentliche Definition: Algorithmus = Turing-Maschine und Problem-Universum = $\{0,1\}^*$

Komplexitätsklasse NP

Das Prüfen einer vermeintlichen Lösung ist einfach für L_E:

- Gegeben: Problem P und vermeintliche Lösung S
- Entscheide: Zeigt S, dass P Eigenschaft E hat oder nicht?
- S dient als zusätzliche Entscheidungshilfe, heißt auch "witness", Zeuge, Zertifikat,... für P
  Technische Einschränkung:

Lösungen S sind von polynomieller Komplexität in Eingabeproblem P, meist: Lösungen S haben polynomielle Bitlänge (in Bitlänge von P)

Beispiel

$L_{Fakt} := \{(N,B) : V > \text{ hat Primfaktor } \leq B\}$
Gegenwärtig ist es unklar, wie in Polynomialzeit ohne Hilfe (und ohne Quantencomputer) entschieden werden kann, ob Eingabe (N,B) in L_{Fakt} ist oder nicht
Mit Hilfe ist das Entscheiden einfach:
Zeuge S zu $P = (N,B)$ ist Faktor p von N mit $1 < p \leq B$

```
verify(N,B,p) // check alleged solution
1 IF N>1 AND 1<p=<B AND p|N THEN return 1 else return 0;
```

Es wird nicht geprüft, ob p prim ist, wenn der zusammengesetzte Faktor in der Schranke B liegt, dann ist p erst recht ein Primfaktor
Es gibt keine falshce Hilfe für nicht-zugehörige Eingaben:

- Wenn $(N,B) \in L_{Fakt}$, dann gibt es ein S, das `verify` akzeptieren lässt
- Wenn $(N,B) \notin L_{Fakt}$, dann gibt es kein S, das `verify` akzeptieren lässt
  Entscheidung mit Hilfe muss in beiden Fällen richtig sein

NP (Nicht-deterministische Polynomialzeit)

Ein Entscheidungsproblem L_E ist in der Komplexitätsklasse NP gdw. es einen Polynomialzeit-Algorithmus A_{L_E} mit Ausgabe 0/1 gibt, der bei Eingabe eines Zeugen S_P für Eingabe $P \in L_E$ bzw. für jede Eingabe S_P für Eingabe $P \notin L_E$ stets korrekt entscheidet, ob eine Eingabe P die Eigenschaft E hat oder nicht, also
$P \in L_E \Leftrightarrow \exists S_P : A_{L_E}(P, S_P) = 1$ f.a. P gilt.
Äquivalent: F.a. P gilt $P \notin L_E \Leftrightarrow \forall S_P : A_{L_E}(P, S_P) = 0$
Komplexität der Hilfseingabe S_P polynomiell in der von P

P vs. NP

Jedes Problem in P ist auch in NP: Algorithmus A_{L_E} entscheidet ohne Hilfe $\rightsquigarrow$ P $\subseteq$ NP
Bis heute ist offen, ob auch NP $\subseteq$ P gilt

Mögliche Welten

Faktorisieren ist in NP, jedoch ist nicht klar, ob Faktorisieren auch in P liegt.

1. Wahrscheinlichste Welt, Bild wird durch Quantum-Computer verfeinert:
   P $\neq$ NP, Faktorisieren $\notin$ P $\rightsquigarrow$ Faktorisieren schwierig
2. P $\neq$ NP, Faktorisieren $\in$ P $\rightsquigarrow$ Faktorisieren leicht
3. P = NP $\rightsquigarrow$ Alle Probleme sind leicht

NP-Vollständigkeit

Ziel: Identifiziere schwierigsten Probleme in NP

NPC (NP-Complete): Klasse der NP-vollständigen Probleme
Eigenschaften:

1. NPC $\subseteq$ NP
2. Wenn P $\neq$ NP, dann definitiv NPC $\notin$ P

Reduktionen (Problemtransformationen)

Siehe Berechnung durch Entscheidung für Problemdefinition
Wenn das Entscheidungsproblem leicht ist, ist das Berechnungsproblem es auch
Das Entscheidungsproblem ist mindestens so schwierig wie das Berechnungsproblem

Transfer auf NP-Entscheidungsprobleme

NP-Problem L_A:

- Gegeben: Problem P
- Gesucht: Entscheidung
  Reduktion auf NP-Problem L_B:
- Gegeben: Problem Q
- Gesucht: Entscheidung
  Die Reduktion von L_A auf L_B ist Polynomialzeit-Algorithmus R, sodass gilt:
  $P \in L_A \Leftrightarrow R(P) \in L_B$ f.a. P, Schreibweise: $L_A \leq L_B$
  Die Reduktion transformiert Problem P in Problem $Q = R(P)$, sodass eine korrekte Entscheidung für Q automatisch eine korrekte Entscheidung für P liefert

```
decideA(P)
        Q=R(P);
        return decideB(Q);

decideB(Q)
        ...
        return d; // boolean
```

NP-vollständige Probleme

Komplexitätsklasse NPC (NP-vollständige Probleme):
Alle Probleme $L_C \in$ NP, sodass $L_A \leq L_C$ f.a. $L_A \in$ NP
Zwei Bedingungen an L_C:

1. $L_C \in$ NP
2. jedes NP-Problem ist auf L_C reduzierbar (L_C ist NP-hart)

Beispiel für Reduktion: Hamiltonscher Zyklus $\leq$ TSP

- HamCycle für G:
  Gibt es Tour (jeden Knoten einmal besuchen und zu Startknoten zurück) im Graphen G?
- TSP für (G, B):
  Gibt es Tour im Graphen G mit Gewicht maximal B?
  Beide Probleme sind in NP
  Reduktion:
  Existierende Kanten bekommen Gewicht 0, vervollständige anschließend Graphen mit Kanten mit Gewicht 1, setze $B = 0$
  Nun zu zeigen: $G \in$ HamCycle $\Leftrightarrow R(G) = (G^*, B) \in$ TSP

SAT: Die Mutter aller NP-vollständigen Probleme

Gegeben:
Boolesche Formel ϕ aus $\vee, \wedge, \neg$ in n variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$
ϕ hat polynomielle Komplexität in n
Gesucht:
Entscheide, ob ϕ erfüllende Belegung hat oder nicht
SAT $\in$ NP: Gegeben ist Belegung als Zeuge, werte Formel aus

SAT ist NP-hart

Zu zeigen:
Jedes Problem $L_A \in NP$ lässt sich auf SAT reduzieren (Definition der Härte)
Sei nun also $L_A \in NP$ ein beliebiges Problem, dann hat es einen $poly$-Algorithmus `verifyA(P,S)`.

- Man kann alles als Bits betrachten, die eine (sehr lange) boolesche Formel darstellen können
- Kodiere nun folgende Teile von `verifyA` als boolsche Formel:
  - Legitime Anfangszustände
  - Legitime Endzustände
  - Legitime Rechenschritte
- Polynomiell, da `verifyA` polynomiell ist
  Reduktion $R(P)$ von L_A auf SAT berechnet dann:
  $\phi_P(\text{alle Eingabebits})$ = gültiger Anfangszustand für $P \wedge$ gültige Übergänge $\wedge$ Endzustand mit Ausgabe $d = 1$
  Wenn P in L_A ist, gibt es eine Lösung S, die `verifyA` mit $d = 1$ akzeptiert, dann gibt es aber auch eine erfüllende Belegung für "Rechenschritte" ϕ_P
  Wenn P nicht in L_A ist, gibt es keine Lösung S, die `verifyA` akzeptiert, dann gibt es aber auch keine erfüllende Belegung für "Rechenschritte" ϕ_P

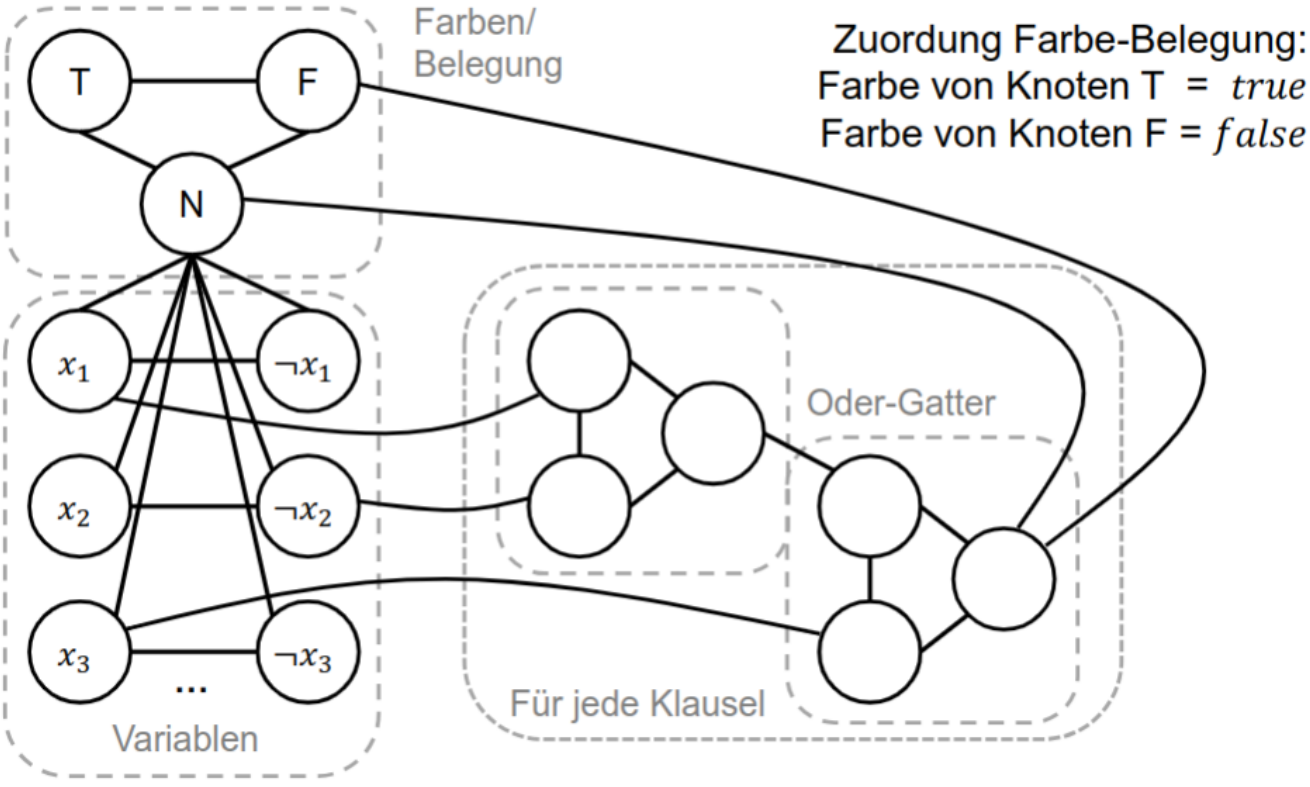
SAT $\leq$ 3SAT

Boolesche Formeln in konjunktiver Normalform (KNF) mit jeweils 3 Literalen:
$\phi(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\neg x_2 \wedge x_3 \wedge x_4) \vee (x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3) \vee (x_4 \wedge x_3 \wedge x_4)$
KNF = Und-Verknüüfung von Klauseln, Klausel = Oder-Verknüpfung
Klausel besteht aus 3 Literalen $x_j \in \{x_j, \neg x_j\}$
Falls weniger Literale in Klausel, transformiere:
$(x_j) = (x_j \wedge x_j \wedge x_j), (x_j \wedge x_k) = (x_j \wedge x_k \wedge x_k)$
3SAT:
Gegeben:
Boolesche 3KNF-Formel ϕ in n Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, ϕ hat polynomielle Komplexität in n
Gesucht:
Entscheide, ob ϕ erfüllende Belegung hat oder nicht
SAT: Boolesche Formel σ aus $\vee, \wedge, \neg$ in n Variablen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ (σ polynomielle Komplexität in n)
lässt sich in Polynomialzeit überführen zu
3SAT: 3KNF-Formel ϕ in $poly(n)$ Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_{poly(n)}$ (ϕ polynomielle Komplexität in n)
sodass σ erfüllbar ist gdw. ϕ erfüllbar ist $\rightsquigarrow$ SAT $\leq$ 3SAT

3-Färbbarkeit von Graphen

3COLORING für G:
Gibt es eine Knotenfärbung im Graphen G mit 3 Farben, sodass benachbarte Knoten nie die gleiche Farbe haben?
3COLORING $\in$ NP:
Gegeben Färbung, durchlaufe Knoten und prüfe jeweils Farbe der Nachbarknoten

3SAT $\leq$ 3COLORING



- Bilde Graphen dieser Struktur für alle Klauseln in gegebener 3SAT-Formel ϕ
- Der Farben/Belegung-Teil legt die Farben fest, da jeder dieser 3 Knoten eine andere Farbe haben muss
- Für jede Variable in ϕ bilde zwei Knoten mit beiden Literalen, verbinde diese
  - Verbinde alle Literalknoten mit der als N (neutral) festgelegten Farbe
  - Somit müssen alle Literale $true$ oder $false$ sein, und die Negierung ist auch erfüllt
- Lege nun mit 2 Kanten zu den Farben für jede Klausel einen Knoten als $true$ fest
- Schließe nun alle Literale entsprechend den Klauseln an jeden Klauselgraph an
- Wenn der resultierende Graph 3-färbbar ist, so ist ϕ erfüllbar

Einer für alle, alle für einen

Wenn Problem L_B NP-vollständig ist und $L_B \leq l_C$ für $L_C \in$ NP gilt, dann ist auch L_C NP-vollständig.
$L_A \leq L_B$ per Reduktion R_{AB}, $L_B \leq L_C$ per Reduktion $R_{BC} \rightsquigarrow L_A \leq L_C$ per Reduktion $R_{AC} := R_{BC} \circ R_{AB}$ (Hintereinanderausführung)
Also folgt aus 3SAT $\leq$ 3COLORING und 3COLORING $\in$ NP auch, dass 3COLORING NP-vollständig ist.

NPC – eine Auswahl

- SAT: Ist Formel ϕ erfüllbar?
- 3SAT: Ist Formel ϕ in 3KNF erfüllbar?
- 3COLORING: Ist Graph mit 3 Farben kantenkonsistent färbbar?
- HamCycle: Gibt es eine Tour im Graphen?
- TSP: Gibt es eine Tour im Graphen, mit Gesamtgewicht $\leq B$?
- VertexCover: Gibt es im Graphen eine Knotenmenge der Größe $\leq B$, sodass jede Kante an einem der Knoten hängt?
- IndependentSet: Gibt es im Graphen Knotenmenge der Größe $\geq B$, sodass kein Knotenpaar durch eine Kante verbunden ist?
- Knapsack: Für Gegenstände mit Wert und Volumen, gibt es eine Auswahl mit Gesamtwert $\geq W$, aber Gesamtvolumen $\leq V$?
- ...

P vs. NP vs. NPC

Für jedes NP-vollständige Problem L_C gilt: $L_C \in$ P $\Leftrightarrow$ P=NP.
Wenn es also einen Polynomialzeit-Algorithmus für ein $L_C \in$ NPC gibt, dann gibt es einen Polynomialzeit-Algorithmus für jedes Problem in NP.

Approximation

NPC-Probleme sind vermutlich nicht effizient lösbar, aber eventuell leicht approximierbar

```
3SAT-Approx(ϕ, n)
        A[]=ALLOC(n); // assigment for variables
        FOR i=1 TO n DO
                A[i]=true resp. A[i]= false with probability 1/2
        return A;
```

- Algorithmus erfüllt im Erwartungswert mindestens die Hälfte aller Klauseln

2-Färbbarkeit und 2SAT in P

2-Färbbarkeit von Graphen ist relativ einfach

Idee:

- Farbe eines Knoten bestimmt eindeutig Farben der Nachbarknoten
- Prüfe jeweils, ob Färbung Widerspruch erzeugt
  Ansatz:
- Beginne mit einem Knoten und beliebiger Farbe
- Durchlaufe den Graphen per BFS, färbe Knoten und identifiziere eventuelle Widersprüche

```
2ColoringSub(G,s,col) // G=(V,E), s node
        s.color=col; newQueue(Q); enqueue(Q,s);
        WHILE !isEmpty(Q) DO
        u=dequeue(Q);
        IF u.color==BLACK THEN nextcol=RED // change colour
        ELSE nextcol=BLACK;
        FOREACH v in adj(G,u) DO
                IF v.color==u.color THEN return 0; // check for contradiction
                If v.color==WHITE THEN // only accept nodes without colour
                        v.color=nextcol;
                        enqueue(Q,v);
        return 1; // no contradiction
```

Zunächst nur für zusammenhängenden Graphen mit vorgegebenem Startknoten und vorgegebener Startfarbe
Man muss eventuell mit anderem Startknoten nochmal starten, wie ist die Farbe zu wählen?

Von gerichtet zu ungerichtet

Betrachte ungerichteten Graphen, Lösungsmenge ändert sich nicht
Bei Neustart keine Kante zwischen Zusammenhangskomponenten:
Jede individuelle 2-Färbung der Zusammenhangskomponenten kann zu 2-Färbung des Graphen kombiniert werden

```
2Coloring(G) // G=(V,E) undirected graph
        FOREACH u in V Do u.color=WHITE;
        FOREACH u in V DO
                IF u.color==WHITE THEN
                        IF 2ColoringSub(G,u,BLACK)==0 THEN return 0;
        return 1;
```

Algorithmus findet ohne zusätzlichen Aufwand auch Färbung
Laufzeit $\Theta(|V| + |E|)$

2-SAT

Keine Symmetrie zwischen Belegungen und Farben bei 2-Färbbarkeit

Implikationsgraph aus 2-SAT

Konstruiere aus Formel ϕ (gerichteten) Implikationsgraphen $G = (V, E)$:

1. Knotenmenge V besteht aus Literalen $x_1, \neg x_1, x_2, \neg x_2, \ldots, x_n, \neg x_n$
2. Für jede Klausel $(x_j \wedge x_k)$ nehme Kanten $(\neg x_j, x_k)$ und $(\neg x_k, x_j)$ auf

Starke Zusammenhangskomponenten im Implikationsgraphen

Formel ist erfüllbar gdw. in keiner Zusammenhangskomponenten $x_j, \neg x_j$ für ein j liegen

Erfüllende Belegung berechnen

Annahme: kein x_j und $\neg x_j$ in gleicher SCC
SCC-dag:
Graph mit Superknoten aus allen Knoten einer SCC
Es gibt eine Kante zwischen SCCs, wenn es eine Kante für zwei Knoten aus den SCCs

1. Sortiere SCC-dag topologisch
2. Erfüllende Belegung (wohldefiniert, da kein x_j und $\neg x_j$ in gleicher SCC, wenn erfüllbar):
   $x_j = true$, wenn x_j in SCC nach SCC mit $\neg x_j$
   $x_j = false$, wenn $\neg x_j$ in SCC nach SCC mit x_j

MAX-2SAT

Gegeben: 2SAT-Formel ϕ, Zahl k
Gesucht: Gibt es eine Belegung, die mindestens k Klauseln erfüllt?
MAX-2SAT $\in$ NPC
MAX-2SAT $\in$ NP:
Gegeben ist eine Belegung als Zeuge; prüfe, ob mindestens k Klauseln erfüllt werden

3SAT $\leq$ MAX-2SAT

Man kann eine 3SAT-Formel $\sigma(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ mit m Klauseln auf ein MAX-2SAT-Problem mit Formel $\phi(x_1, \ldots, x_n, w_1, \ldots, w_m)$ reduzieren.
Hierfür führt man m neue Variablen $w_1, \ldots w_m$ ein, für jede Klausel eine.
Anschließend bildet man für jede Klausel in σ folgendes Konstrukt in ϕ, hier für die h-te Klausel (X_i, X_j, X_k) dargestellt:

$$\begin{aligned}\phi(x_1, \ldots, x_n, w_1, \ldots, w_m) = \ldots &\wedge (X_i) \wedge (X_j) \wedge (X_k) \wedge (w_h) \\ &\wedge (\neg X_i \vee \neg X_j) \wedge (\neg X_i \vee \neg X_k) \wedge (\neg X_j \vee \neg X_k) \\ &\wedge (\neg X_i \vee \neg w_h) \wedge (\neg X_j \vee \neg w_h) \wedge (\neg X_k \vee \neg w_h) \wedge \ldots\end{aligned}$$

Nun gilt für $w_h = false$: Wenn die Klausel in σ nicht erfüllbar ist, dann sind maximal 6 der 10 Klauseln in ϕ erfüllbar
Wenn die Klausel in σ erfüllbar ist, dann sind bei geeigneter Wahl für w_h nie mehr als 7 Klauseln erfüllbar.
Somit lautet die Reduktion:

- Wenn σ erfüllbar ist, dann sind mindestens $k = 7m$ Klauseln in ϕ erfüllbar.
- Wenn σ nicht erfüllbar ist, dann sind weniger als $k = 7m$ Klauseln in ϕ erfüllbar.