4. Advanced Data Structures

Rot-Schwarz-Bäume (RS-Bäume)

Anwendung: Linux Completely Fair Scheduling

Verwendet RS-Bäume. um Worst-Case-Laufzeit $(\log n)$ zu erreichen
`key`: virtual run time eines Prozesses in Sekunden

1. Nächsten Prozess holen
2. Addiere zugewiesene Zeit
3. Füge mit aktualisierter Zeit wieder ein

Baumkunde

Ein RS-Baum ist ein binärer Suchbaum, sodass gilt:

1. Jeder Knoten ist rot oder schwarz (`x.color=red/black`)
2. Die Wurzel ist schwarz, wenn der Baum nicht leer ist
3. Wenn ein Knoten rot ist, sind seine Kinder schwarz (Nicht-Rot-Rot-Regel)
4. Für jeden Knoten hat jeder Pfad im Teilbaum zu einem Blatt/Halbblatt die gleiche Anzahl an schwarzen Knoten

Halbblätter

Halbblätter sind Knoten mit nur einem Kind
Halbblätter im RS-Baum sind schwarz, sonst wird direkt mindestens eine Regel verletzt

Schwarzhöhe eines Knoten

Die Schwarzhöhe eines Knoten `x` ist die eindeutige Anzahl an schwarzen Knoten auf dem Weg zu einem Blatt/Halbblatt im Teilbaum des Knoten
Für leeren Baum setzt man $SH(nil) = 0$

Höhe eines RS-Baums

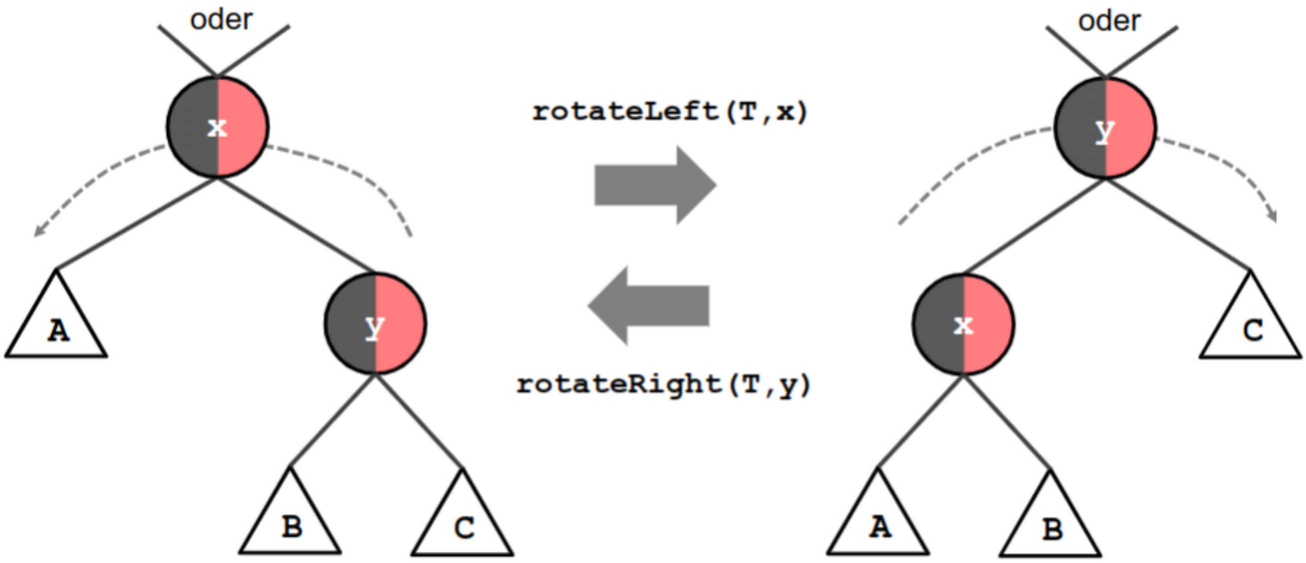
Ein RS-Baum mit n Knoten hat maximale Höhe $h \leq 2 \cdot \log_2(n+1)$
Intuition:

1. In jedem Unterteilbaum gleiche Anzahl schwarzer Knoten auf jedem Pfad
2. Maximal zusätzlich gleiche Anzahl roter Knoten auf diesem Pfad
3. Daher einigermaßen ausbalanciert und Höhe $O(\log n)$

Implementierungen mittels Sentinel

- `T.root.parent = T.sent`
- `T.sent.key=nil; T.sent.color=black;`
- `T.sent.parent = T.sent, T.sent.left=T.sent; T.sent.right=T.sent;`
- Alles immer wohldefiniert dank Einführung von `T.sent` (Sentinel des Baumes T)

Rotation




```
rotateLeft(T,x) // x.right!=nil
        y=x.right;
        x.right=y.left;
        IF y.left != nil THEN
                y.left.parent=x;
        y.parent=x.parent;
        IF x.parent==T.sent THEN
                T.root=y
        ELSE
                IF x==x.parent.left THEN
                        x.parent.left=y
                ELSE
                        x.parent.right=y;
        y.left=x;
        x.parent=y;
```

- Rot-Schwarz-Baum-Bedingungen sind nach Rotation eventuell verletzt
- Laufzeit = $\Theta(1)$

Einfügen

1. Finde Elternknoten `y` wie im BST
2. Färbe neuen Knoten `z` rot
3. Stelle RS-Baum-Bedingung wieder her

```
insert(T,z) // z.left==z.right==nil;
        x=T.root; px=T.sent;
        WHILE x != nil DO
                px=x;
                IF x.key > z.key THEN
                        x=x.left
                ELSE
                        x=x.right;
        z.parent=px;
        IF px==T.sent THEN
                T.root=z
        ELSE
                IF px.key > z.key THEN
                        px.left=z
                ELSE
                        px.right=z;
        z.color=red;
        fixColorsAfterInsertion(T,z);
```

- Funktioniert wie beim BST mit Sentinel

Aufräumen

```
fixColorsAfterInsertion(T,z)
        WHILE z.parent.color==red DO
                IF z.parent==z.parent.parent.left THEN
                        y=z.parent.parent.right;
                        IF y!=nil AND y.color==red THEN
                                z.parent.color=black;
                                y.color=black;
                                z.parent.parent.color=red;
                                z=z.parent.parent;
                        ELSE
                                IF z==z.parent.right THEN
                                        z=z.parent;
                                        rotateLeft(T,z);
                                z.parent.color=black;
                                z.parent.parent.color=red;
                                rotateRight(T,z.parent.parent);
                ELSE
                // do the same, but exchange left and right
        T.root.color=black;
```

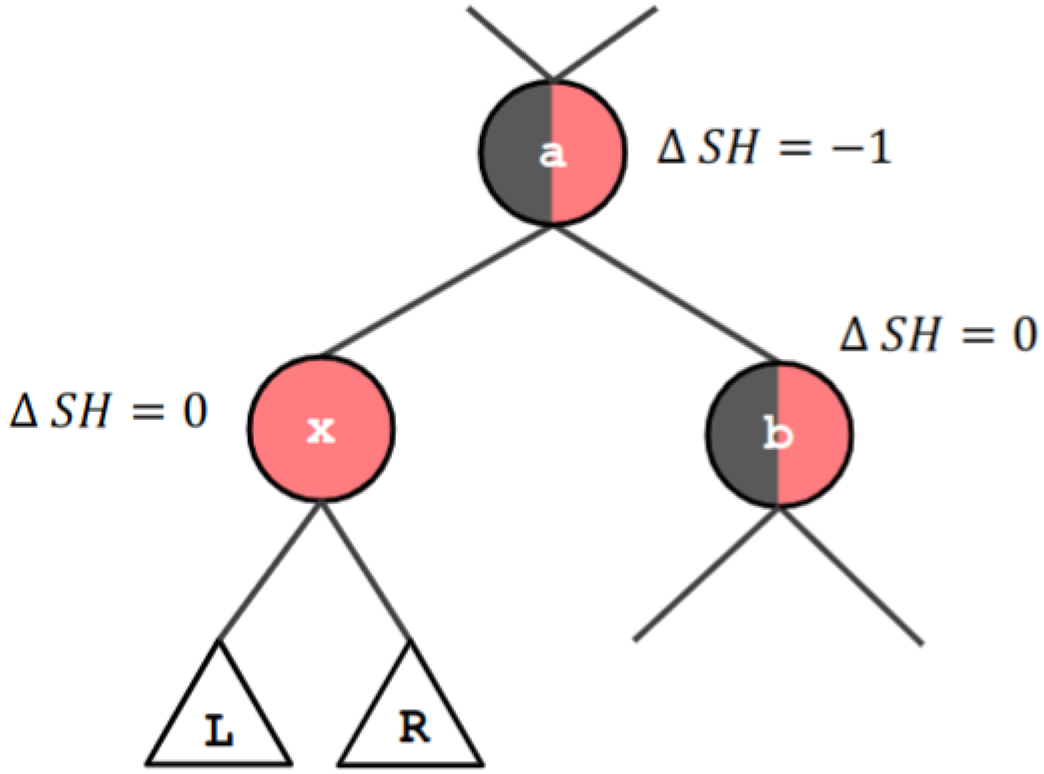
Laufzeit = $O(h) = O(\log n)$

Löschen

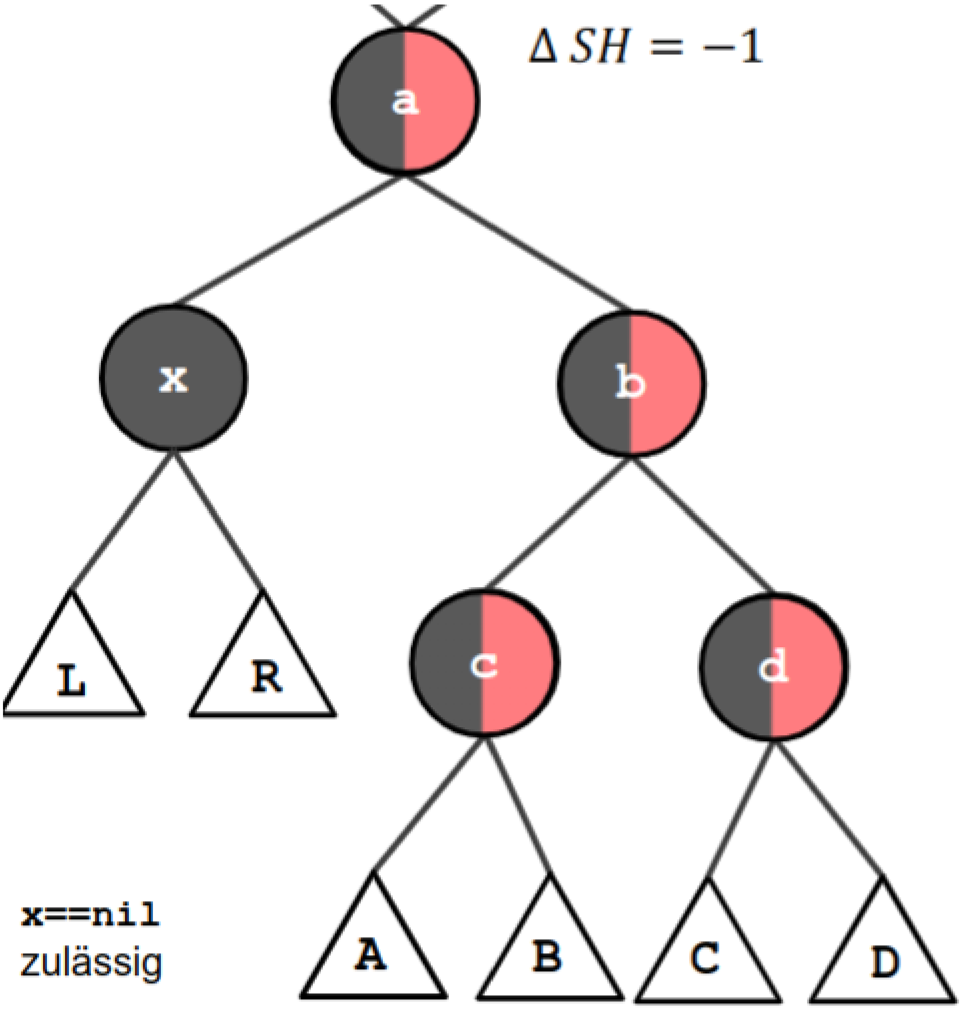
- Größtenteils analog zum BST
- Sei `z` der entfernte Knoten und `y` der Knoten, der `z` ersetzt.
  Dann erbt `y` die Farbe von `z`, wenn `y` schwarz war, müssen Farben angepasst werden

Fixup bei `y.color==black`

$\Delta SH := SH(\text{linker Teilbaum}) - SH(\text{rechter Teilbaum})$ f.a. Knoten
Beim Löschen kann die Schwarzhöhe nur sinken

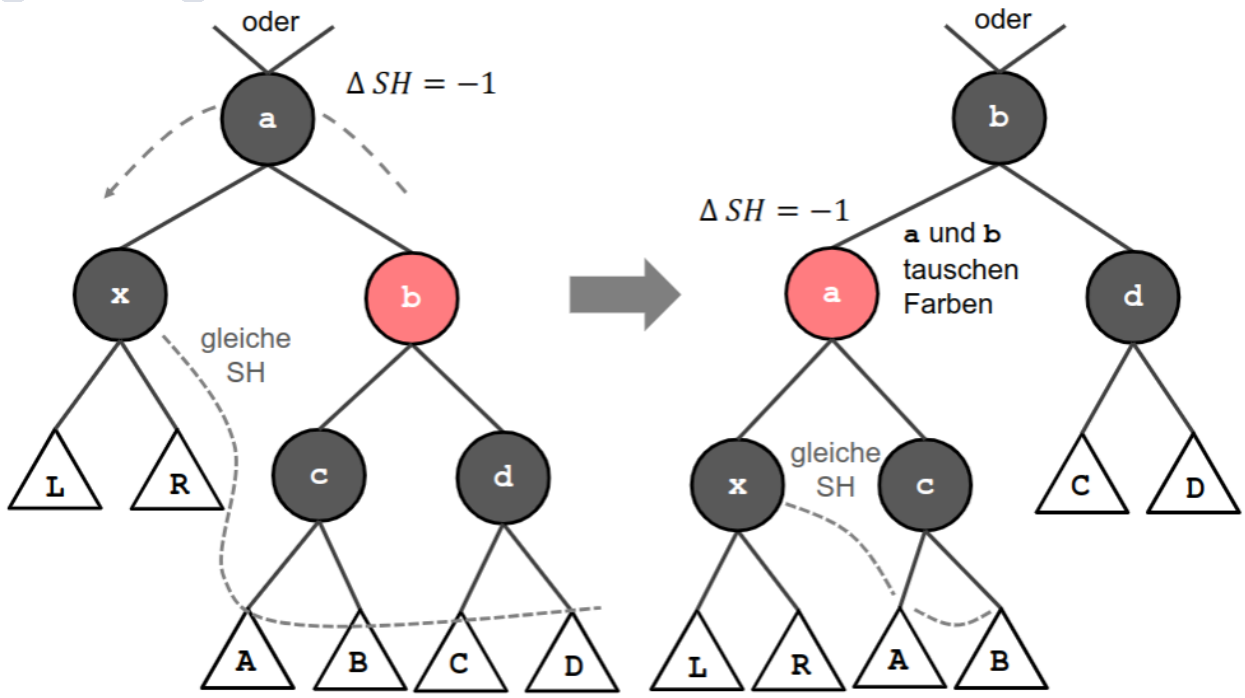


Fall $\Delta SH = 1$ in `a` ist analog
Wenn `x` rot ist, setze `x` schwarz und fertig, somit nur schwarzer Fall zu betrachten



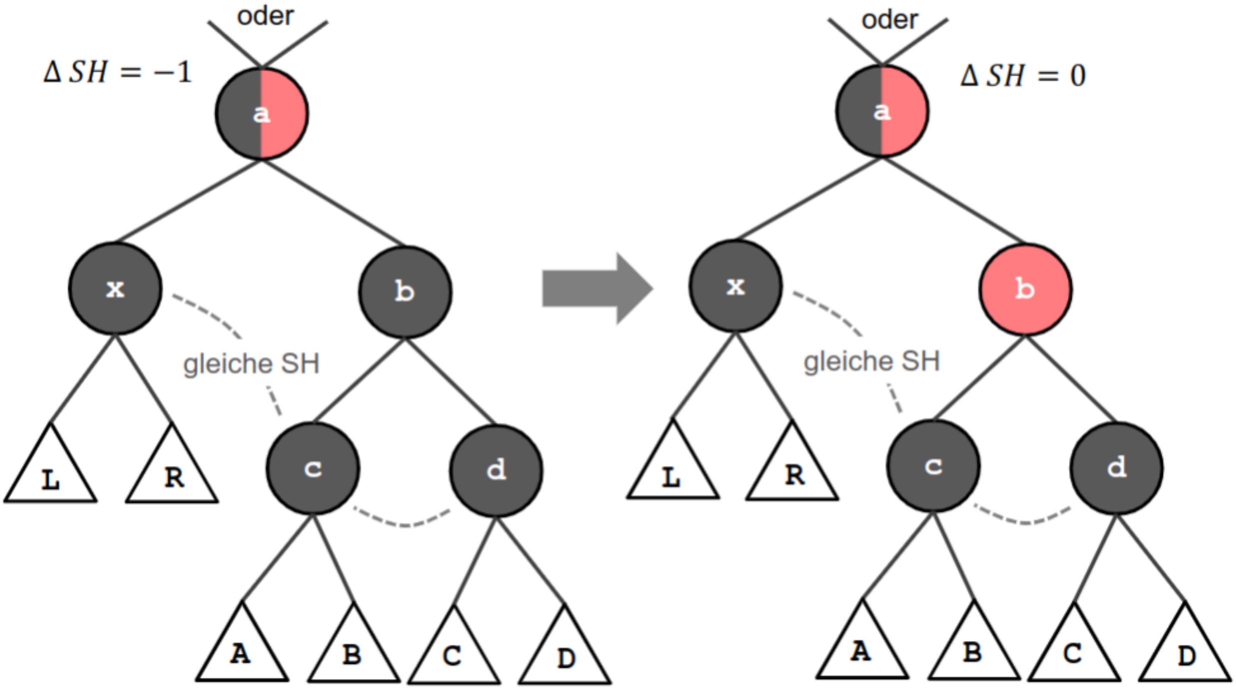
Fallunterscheidung:

1. `a` schwarz, `b` rot



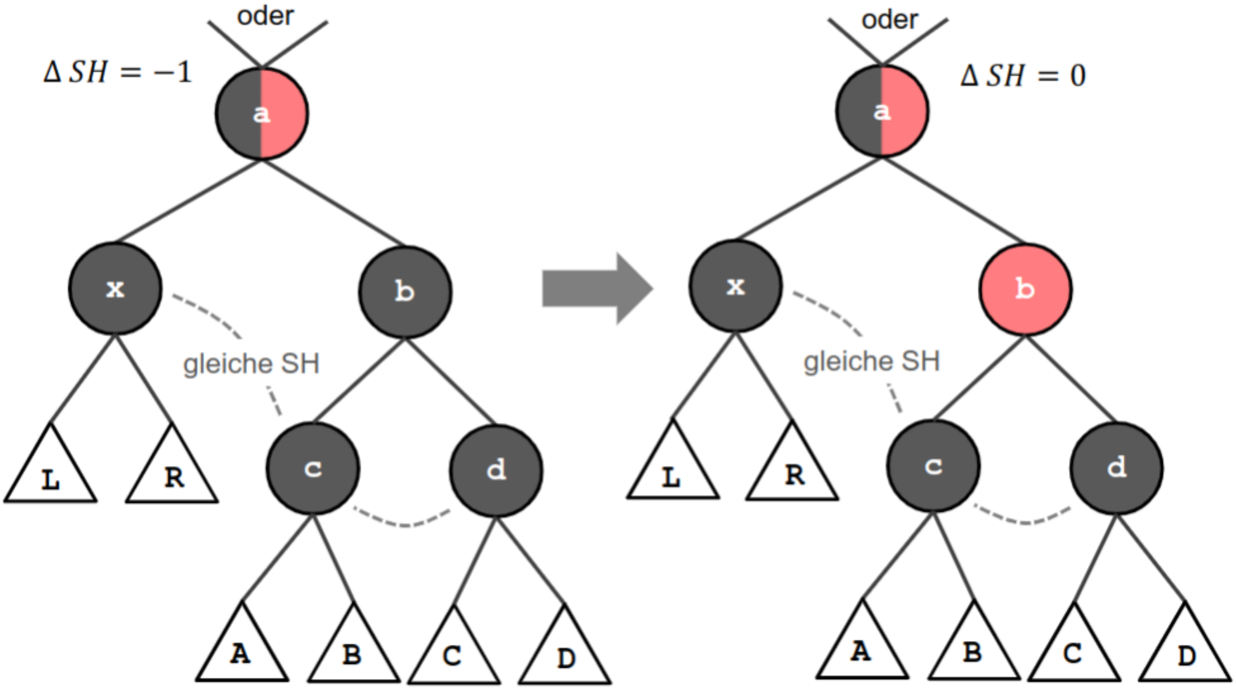
Wird zu allen Fällen außer 2b)

2. a) `a` rot, `b` schwarz, `c,d` nicht rot



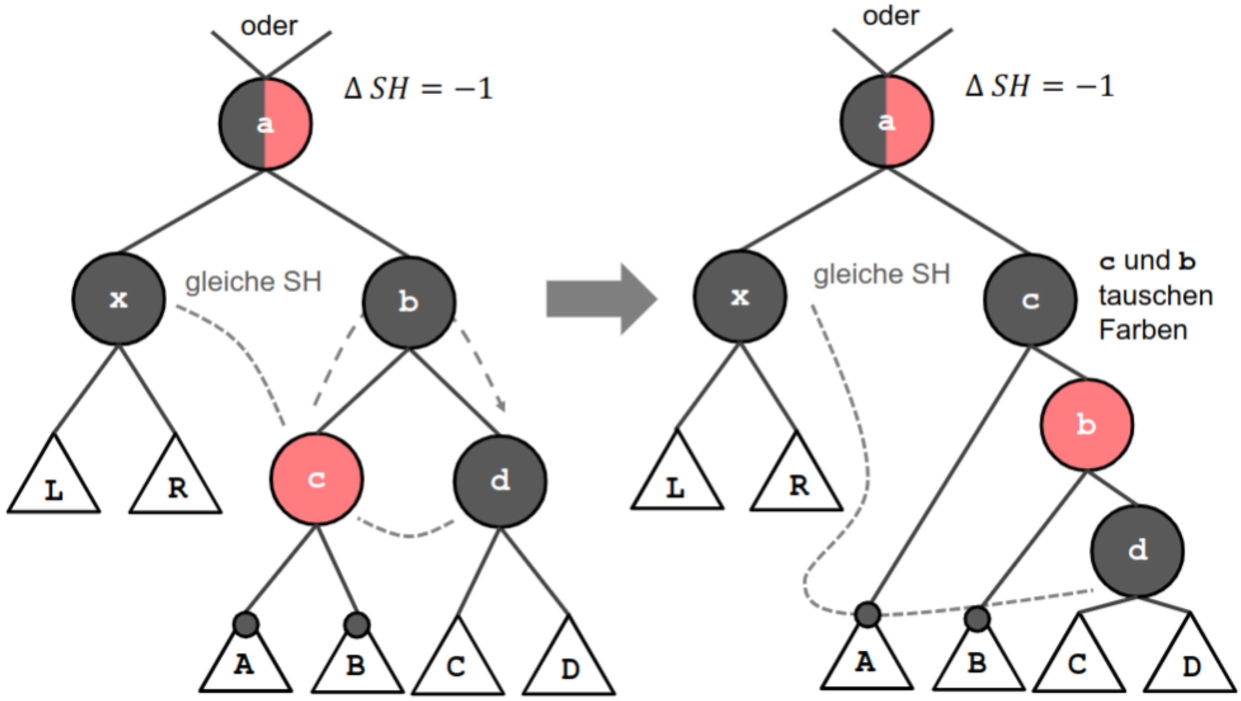
`b` auf schwarz setzen, um ursprüngliche SH zu erreichen

3. b) `a` schwarz, `b` schwarz, `c,d` nicht rot



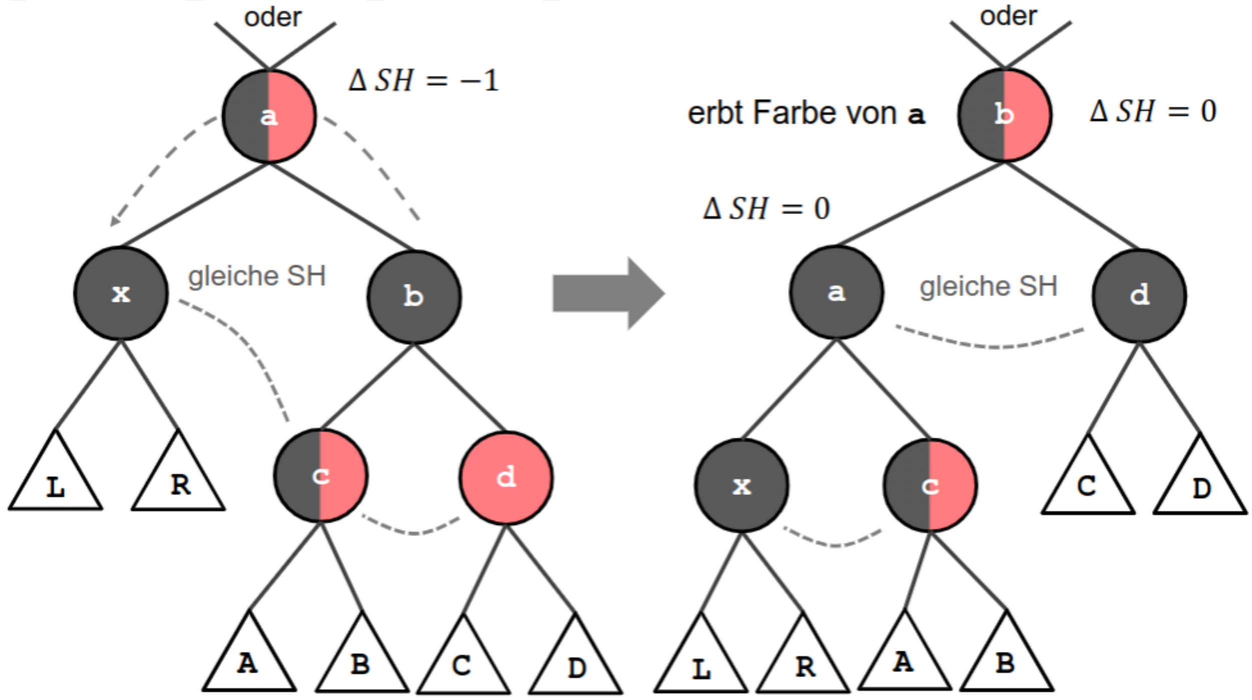
Wenn `a` schwarz ist, dann gilt für Elternknoten $\Delta SH = \pm 1$.
Verfahre also rekursiv mit `a` als neuem `x`

4. `a` beliebig, `b` schwarz, `c` rot, `d` nicht rot



Wird zu Fall 4

5. `a` beliebig, `b` schwarz, `c` beliebig, `d` rot



Ursprüngliche SH von vor der Entfernung wieder hergestellt

Algorithmus

```
transplant(T,u,v) // with sentinel, also works for v==nil
        IF u.parent==T.sent THEN
                T.root=v
        ELSE
                IF u==u.parent.left THEN
                        u.parent.left=v
                ELSE
```

```
                        u.parent.right=v;
        IF v != nil THEN
                v.parent=u.parent;

delete(T,z)
        a=z.parent; dsh=nil;
        IF z.left==z.right==nil THEN // z leaf
                IF z.color==black AND z!=T.root THEN
                        IF z.parent.left==z THEN dsh=right ELSE dsh=left;
                transplant(T,z,nil);
        ELSE IF z.left==nil THEN // z half leaf
                y=z.right;
                transplant(T,z,z.right);
                y.color=z.color;
        ELSE IF z.right==nil THEN // z half leaf
                y=z.left;
                transplant(T,z,z.left);
                y.color=z.color;
        ELSE // z has two children
                y=z.right; a=y; wentleft=false;
                WHILE y.left != nil DO
                        a=y; y=y.left; wentleft=true;
                IF y.parent != z THEN
                        transplant(T,y,y.right);
                        y.right=z.right;
                        y.right.parent=y;
                transplant(T,z,y);
                y.left=z.left;
                y.left.parent=y;
                IF y.color==black THEN
                        IF wentleft THEN dsh=right ELSE dsh=left;
                y.color=z.color;
        IF dsh!=nil THEN fixColorsAfterDeletion(T,a,dsh);
```

- `a` ist ein Zeiger auf den Knoten, in dem die tiefste Imbalance entstehen könnte
- `dsh` = ΔSH für Knoten `a`: `nil` = 0, `left` = 1, `right` = -1
- In den Fällen, in denen `z` ein Halbblatt ist, muss `y.color==red` sein, da sonst die SH-Regel verletzt wäre.
  Dann kann man einfach `y` umhängen und die Farbe von `z` kopieren
- In den Fällen, in denen `z` kein (Halb-)Blatt ist, muss eine Fallunterscheidung stattfinden, je nachdem, ob `y` rechtes oder linkes Kind ist, davon ist dann auch die eventuelle Imbalance abhängig

```
fixColorsAfterDeletion(T,a,dsh)
        IF dsh==right THEN // extra black node on the right
```

```
                  x=a.left; b=a.right; c=b.left; d=b.right;
                  IF x!=nil AND x.color==red THEN // x is red, easy to solve
                          x.color=black;
                  ELSE IF a.color==black AND b.color==red THEN // case 1
                          rotateLeft(T,a);
                          a.color=red; b.color=black;
                          fixColorsAfterDeletion(T,a,dsh);
                  ELSE IF a.color==red AND b.color==black // case 2a
                                  AND (c==nil OR c.color=black)
                                  AND (d==nil OR d.color=black) THEN
                          a.color=black; b.color=red;
                  ELSE IF a.color==black AND b.color==black // case 2b
                                  AND (c==nil OR c.color==black)
                                  AND (d==nil OR d.color==black) THEN
                          b.color=red;
                          IF a==a.parent.left THEN dsh=left
                          ELSE IF a==a.parent.right THEN dsh=right ELSE dsh=nil;
                          fixColorsAfterDeletion(T,a.parent,dsh);
                  ELSE IF b.color==black AND c!=nil AND c.color==red // case 3
                                  AND (d==nil OR d.color==black) THEN
                          rotateRight(T,b);
                          c.color=black; b.color=black;
                          fixColorsAfterDeletion(T,a,dsh);
                  ELSE IF b.color==black AND d!=nil AND d.color==red THEN // case
4

                          rotateLeft(T,a);
                          b.color=a.color; a.color=black; d.color=black;
          ELSE // dsh==left, extra black node on the left
                  // do the same, but exchange left and right
```

- `dsh=right` impliziert `b!=nil`
- Der letzte `ELSE`-branch ist für den linkslastigen Fall
- Außer in Fall 2b) führen rekursive Aufrufe im nächsten Schritt zum Rekursionsende

Laufzeiten

`y` suchen hat wie beim BST Laufzeit $O(h) = O(\log n)$
Falls Rekursion in Fixup eintritt, ist die Laufzeit konstant
$\rightsquigarrow$ Gesamtlaufzeit Löschen = $O(h) = O(\log n)$

Worst-Case-Laufzeiten RSB

- Einfügen: $\Theta(\log n)$
- Löschen: $\Theta(\log n)$
- Suchen: $\Theta(\log n)$

AVL-Bäume

Optimierte Konstanten:

- RS-Bäume: $h \leq 2 \cdot \log n$
- AVL-Bäume: $h \leq 1.441 \cdot \log n$
  Balance in Knoten x mit angehängtem rechtem und linkem Teilbaum:
  $B(x) = height(\text{rechter Teilbaum}) - height(\text{linker Teilbaum})$
  Konvention: $height(\text{leerer Baum}) = -1$
  Ein AVL-Baum ist ein binärer Suchbaum, sodass für die Balance $B(x)$ in jedem Knoten x gilt: $B(x) \in \{-1, 0, +1\}$

Höhe

Ein AVL-Baum mit n Knoten hat die maximale Höhe $h \leq 1.441 \cdot \log_2 n$

AVL-Baum vs. RS-Baum

- AVL-Baum:
  Differenz von rechtem und linkem Teilbaum desselben Knotens ≤ 1
  Einfügen und Löschen verletzen in der Regel öfter die Baum-Bedingung, mehr Aufwand zum Rebalancieren
- RS-Baum:
  Höhenfaktor von rechtem und linkem Teilbaum desselben Knotens ≤ 2
  Suchen dauert eventuell länger
  AVL-Bäume geeigneter, wenn mehr Such-Operationen und weniger Einfüge- und Lösch-Operationen

AVL $\subset$ RS, AVL $\neq$ RS

Jeder nicht-leere AVL-Baum der Höhe h lässt sich als RS-Baum mit Schwarzhöhe $\lceil \frac{h+1}{2} \rceil$ darstellen.
Für gerade h gibt es sogar einen Baum mit roter Wurzel, Schwarzhöhe $\frac{h}{2}$, der alle anderen RS-Baumbedingungen erfüllt.
Für jede Höhe $h \geq 3$ gibt es einen RS-Baum, der kein AVL-Baum ist.

Einfügen

Funktioniert wie beim BST mit Sentinel, zuzüglich eventuellem Rebalancieren

```
insert(T,z) // z.left==z.right==nil;
        x=T.root; px=T.sent;
        WHILE x != nil DO
                px=x;
                IF x.key > z.key THEN
                        x=x.left
                ELSE
```

```
                x=x.right;
        z.parent=px;
        IF px==T.sent THEN
                T.root=z
        ELSE
                IF px.key > z.key THEN
                        px.left=z
                ELSE
                        px.right=z;
        fixBalanceAfterInsertion(T,z);
```

Rebalacieren

#TODO add, fully understand

Laufzeit

Gesamtlaufzeit $O(h) = O(\log n)$
Suche hat Laufzeit $O(h)$, Rebalancieren ist nur einmal nötig, also ist das konstant

Löschen

Analog zum BST, aber Rebalacierung eventuell bis in die Wurzel nötig
Gesamtlaufzeit $O(h) = O(\log n)$

Worst-Case-Laufzeiten

- Einfügen: $\Theta(\log n)$
- Löschen: $\Theta(\log n)$
- Suchen: $\Theta(\log n)$
  AVL-Bäume haben bessere theoretische Konstanten als Rot-Schwarz-Bäume, sind je nach Daten und Operationen aber in der Praxis nur unwesentlich schneller.

Splay-Bäume

Selbst-organisierende Datenstrukturen

Selbst-Organisierende Listen

Ansatz: einmal angefragte Werte werden voraussichtlich noch öfter angefragt
Variante für Bäume: Splay trees

Anwendung: SQUID

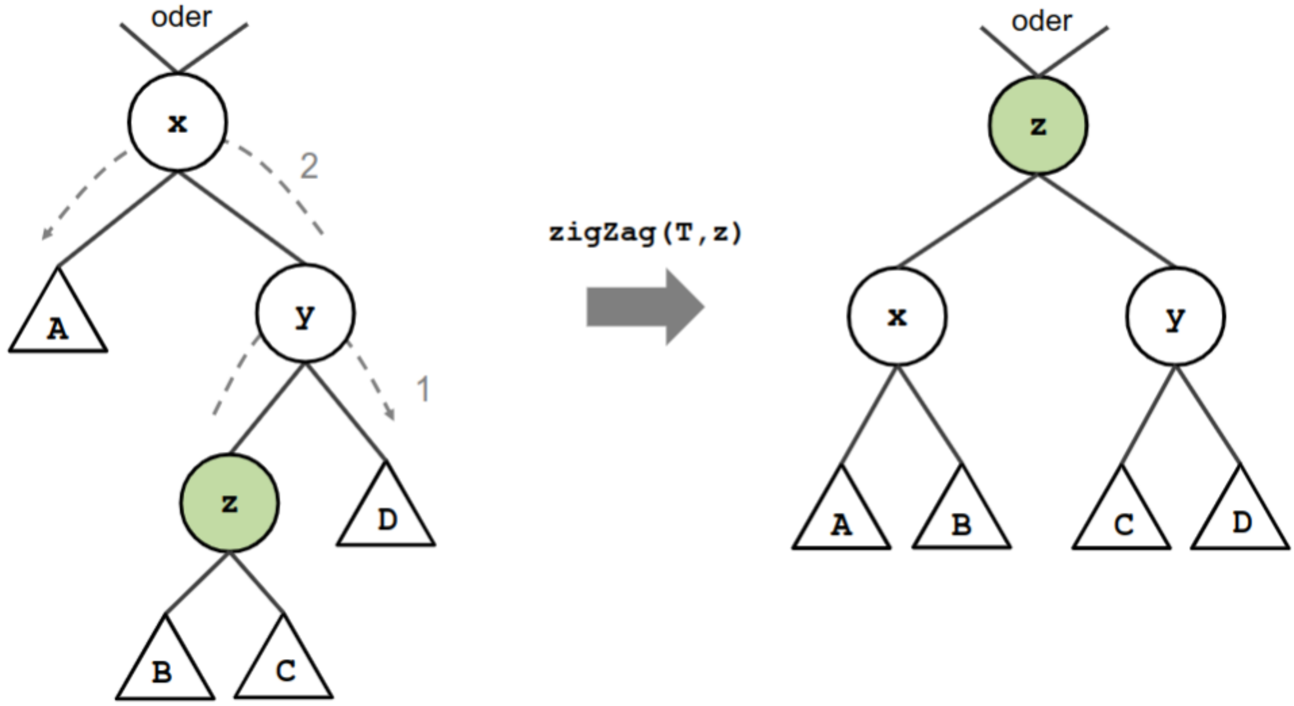
- Web-Cache-Proxy
- Speichert Access Control Listen (ACL) für http-Zugriffe als Splay-Tree

Splay-Operationen

- Splay-Bäume bilden Untermenge der BST
- Spüle gesuchten oder neu eingefügten Knoten an die Wurzel
- `splay(T,z)` = Folge von Zig-, Zig-Zig und Zig-Zag-Operationen

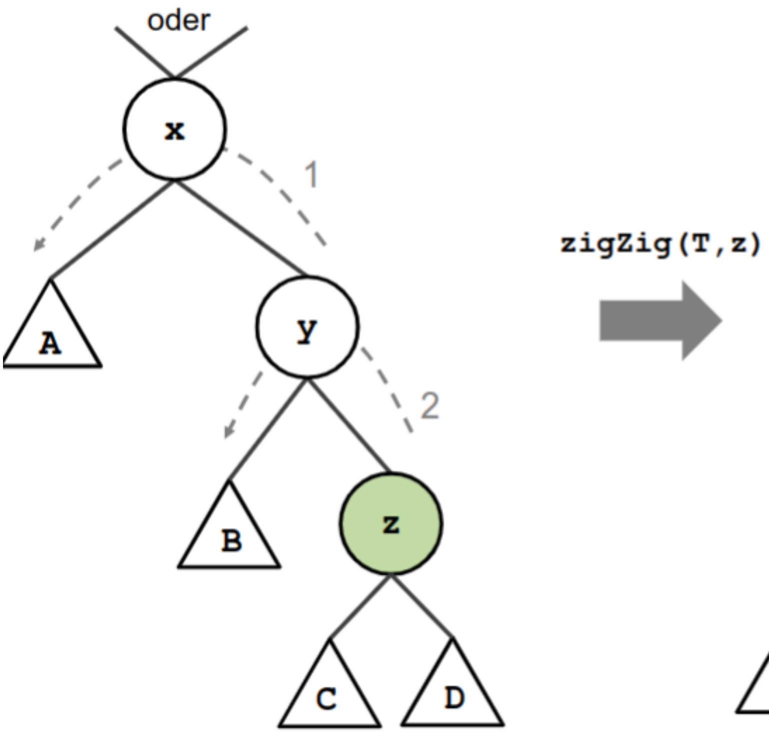
Zig-Zag-Operation

Rechts-Links- oder Links-Rechts-Rotation



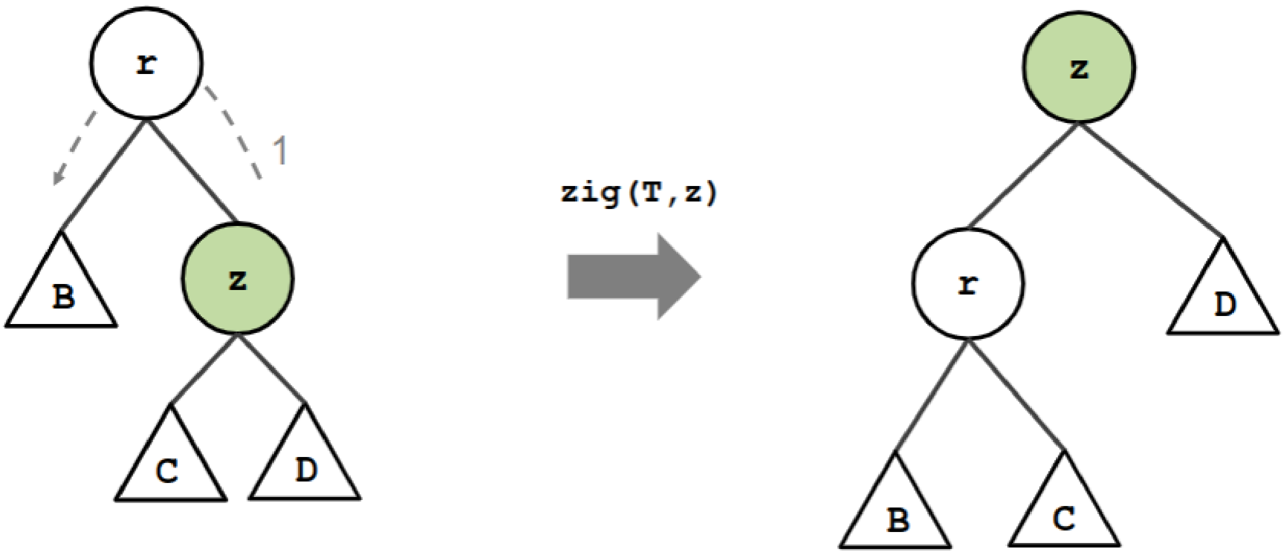
Zig-Zig-Operation

Links-Links- oder Rechts-Rechts-Rotation



Zig-Operation

Einfache Links- oder Rechts-Rotation
Wird verwendet, falls `z` direkt unter Wurzel hängt



Splay-Operation

```
splay(T,z)
        WHILE z != T.root DO
                IF z.parent.parent==nil THEN
                        zig(T,z);
                ELSE
```

```
                        IF z==z.parent.parent.left.left OR
z==z.parent.parent.right.right THEN
                                zigZig(T,z);
                        ELSE
                                zigZag(T,z);

zigZig(T,z)
        IF z==z.parent.left THEN
                rotateRight(T,z.parent.parent);
                rotateRight(T,z.parent);
        ELSE
                rotateLeft(T,z.parent.parent);
                rotateLeft(T,z.parent);

zigZag(T,z) // disclaimer: Not official, I wrote this!
        IF z==z.parent.left THEN
                rotateRight(T,z.parent);
                rotateLeft(T,z.parent);
        ELSE
                rotateLeft(T,z.parent);
                rotateRight(T,z.parent);

zig(T,z) // disclaimer: Not official, I wrote this!
        IF z==z.parent.left THEN
                rotateRight(T,z.parent);
        ELSE
                rotateLeft(T,z.parent);
```

Gesamtlaufzeit $O(h)$

Suchen

```
search(T,k)
        x=T.root;
        WHILE x != nil AND x.key != k DO
                IF x.key < k THEN
                        x=x.right
                ELSE
                        x=x.left;
// now search is done
        IF x==nil THEN
                return nil
        ELSE
                splay(T,x);
                return T.root;
```

Suche und Splayen haben Laufzeit $O(h) \rightsquigarrow$ Gesamtlaufzeit $O(h)$
Alternative: Bei erfolgloser Suche letzten besuchten Knoten nach oben splayen

Einfügen

1. Suche analog zum Einfügen bei BST Einfügepunkt
2. Spüle eingefügten Knoten `x` per Splay-Operation nach oben

Laufzeit

1. Position im BST suchen: $O(h)$
2. `splay(T,x)`: $O(h)$
   $\rightsquigarrow$ Gesamtlaufzeit $O(h)$

Löschen

1. Spüle gesuchten Knoten `x` per Splay-Operation nach oben
2. Lösche `x`
   Wenn einer der beiden Teilbäume leer ist, fertig
3. Spüle den "größten" Knoten `y` im linken Teilbaum per Splay-Operation nach oben
   `y` kann keinen rechtes Kind haben, da größter Wert im linken Teilbaum
4. Hänge rechten Teilbaum an `y` an

Laufzeit

1. `splay(T,x)`: $O(h)$
2. `x` löschen: $O(1)$
3. `y` im linken Teilbaum `L` finden, `splay(L,y)`: $O(h) + O(h) = O(h)$
4. Anhängen: $O(1)$
   $\rightsquigarrow$ Gesamtlaufzeit $O(h)$

Laufzeit Splay-Bäume

- Amortisierte Laufzeit:
  Laufzeit pro Operation über mehrere Operationen hinweg
- Für $m \geq n$ Operationen auf einem Splay-Baum mit maximal n Knoten ist die Worst-Case-Laufzeit $O(m \cdot \log_2 n)$, also $O(\log_2 n)$ pro Operation.
- Zusätzlich: Oft gesuchte Elemente werden sehr schnell gefunden

(Binäre Max-)Heaps

Ein binärer Max-Heap ist ein binärer Baum, der

1. bis auf das unterste Level vollständig und im untersten Level von links gefüllt ist
2. Für alle Knoten $x \neq T.root$ gilt: $x.parent.key \geq x.key$

- Heaps sind keine BSTs, linke Kinder können größere Werte als rechte Kinder haben!
- Bei Min-Heaps sind die Werte in Elternknoten jeweils kleiner

Eigenschaften

- Da Baum (fast) vollständig ist, gilt $h \leq \log n$
- Maximum des Heaps steht in der Wurzel

Heaps durch Arrays

- speichere Anzahl Knoten in `H.length` (leerer Heap `H.length==0`)
- Duale Sichtweise als Pointer oder als Array (j ist Index im Array):
  - $j.parent = \left\lceil \frac{j}{2} \right\rceil - 1$
  - $j.left = 2(j+1) - 1$
  - $j.right = 2(j+1)$

Einfügen

- Position durch Baumstruktur vorgegeben
- Vertausche nach oben, bis Max-Eigenschaft wieder erfüllt

```
insert(H,k) // as (unlimited) array
        H.length=H.length+1;
        H.A[H.length-1]=k;
        i=H.length-1;
        WHILE i>0 AND H.A[i] > H.A[i.parent]
                SWAP(H.A,i,i.parent);
                i=i.parent;
```

Laufzeit $O(h) = O(\log n)$

Lösche Maximum

1. Ersetze Maximum durch "letztes" Blatt
2. Stelle Max-Eigenschaften wieder her, indem Knoten nach unten gegen das Maximum der beiden Kinder getauscht wird (`heapify`)

```
extract-max(H) // as (unlimited) array
        IF isEmpty(H) THEN
                return error ‘underflow‘
        ELSE
                max=H.A[0];
                H.A[0]=H.A[H.length-1];
                H.length=H.length-1;
```

```
                heapify(H,0);
                return max;

heapify(H,i) // as (unlimited) array
        maxind=i;
        IF i.left<H.length AND H.A[i]<H.A[i.left] THEN
                maxind=i.left;
        IF i.right<H.length AND H.A[maxind]<H.A[i.right] THEN
                maxind=i.right;
        IF maxind != i THEN
                SWAP(H.A,i,maxind);
                heapify(H,maxind);
```

Laufzeit beider Algorithmen $O(h) = O(\log n)$

Heap-Konstruktion aus Array

Blätterindizes: $\lceil \frac{n-1}{2} \rceil, \ldots, n-1$
Blätter sind für sich triviale Max-Heaps
Baue rekursiv per `heapify` Max-Heaps für Teilbäume

```
buildHeap(H) // array A has already been copied to H.A
        H.length=A.length;
        FOR i = ceil((H.length-1)/2)-1 DOWNTO 0 DO
                heapify(H,i);
```

Laufzeit $O(n \cdot h) = O(n \log n)$

Heap-Sort

Gibt Einträge in Array `A` in absteigender Größe aus

```
heapSort(H) // array A has already been copied to H.A
        buildHeap(H);
        WHILE !isEmpty(H) DO PRINT extract-max(H);
```

Laufzeit $O(n \cdot h) = O(n \log n)$
Alternativ: speichere in jeder `WHILE`-Iteration `max=extract-max(H)` in `H.A[H.length]=max`, um sortierte Liste am Ende aufsteigend im Array `A` zu haben.

Abstrakter Datentyp Priority Queue

- `new(Q)`: erzeugt neue, leere Priority Queue namens `Q`
- `isEmpty(Q)`: gibt an, ob Queue `Q` leer
- `max(Q)`: gibt "größtes" Element aus Queue `Q` zurück, Fehler wenn leer

- `extract-max(Q)`: gibt "größtes" Element aus `Q` zurück, löscht es aus `Q`, Fehler wenn leer
- `insert(Q,k)`: fügt Wert `k` zu Queue `Q` hinzu
  Implementation kann Priority Heap verwenden (Java)

B-Bäume

Ein B-Baum von Grad t ist ein Baum, bei dem

1. jeder Knoten außer der Wurzel zwischen $t-1$ und $2t-1$ Werte `key[0], key[1], ...` hat, die Wurzel hat zwischen 1 und $2t-1$ Werte
2. die Werte innerhalb eines Knoten aufsteigend geordnet sind
3. die Blätter alle die gleiche Höhe haben
4. jeder innerer Knoten mit n Werten $n+1$ Kinder hat, sodass für alle Werte k_j aus dem j-ten Kind gilt: $k_0 \leq key[0] \leq k_1 \leq key[1] \leq \cdots \leq k_{n-1} \leq key[n-1] \leq k_n$

Darstellung

- `x.n`: Anzahl Werte des Knotens `x`
- `x.key[0], ..., x.key[x.n-1]`: Geordnete Werte in Knoten `x`
- `x.child[0], ..., x.child[x.n]`: Zeiger auf Kinder in Knoten `x`

Höhe

- Mindestens 1 Wert in Wurzel
- Mindestens 2 Knoten in Tiefe 1 mit jeweils mindestens t Kindern
- Mindestens $2t$ Knoten in nächster Tiefe mit jeweils mindestens t Kindern
- Mindestens $2t^2$ Knoten in nächster Tiefe mit jeweils mindestens t Kindern, usw.
- In jedem Knoten außer Wurzel mindestens $t-1$ Werte
- Anzahl Werte n im B-Baum im Vergleich zur Höhe h: $n \geq 2t^h - 1$, also $log_t \frac{n+1}{2} \geq h$
- $\rightsquigarrow$ Ein B-Baum vom Grad t mit n Werten hat maximale Höhe $h \leq \log_t \frac{n+1}{2}$
- Für größere t also flacher als vollständiger Binärbaum

Anwendung

- MySQL speichert Werte in B-Bäumen
- Lesen/Schreiben in Blöcken: mehrere Werte (z.B. Index-Einträge) auf einmal

Suche

```
search(x,k)
        WHILE x != nil DO
                i=0;
                WHILE i < x.n AND x.key[i] < k DO i=i+1;
                IF i < x.n AND x.key[i]==k THEN
```

```
                    return (x,i);
            ELSE
                    x=x.child[i];
    return nil;
```

\2. While-Schleife: Maximal $2t \in O(1)$ Iterationen
Laufzeit $O(t \cdot h) = O(\log_t n)$

Baumkunde

- B-Baum vom Grad t: max. $2t$, min. t Kinder pro Knoten $\neq$ Wurzel
  Alternative Definition: max. t, min. $\frac{t}{2}$ Kinder pro Knoten $\neq$ Wurzel
- 2-3-4-Baum/(2,4)-Baum: B-Baum mit $t = 2$
- B+-Baum: alle Werte in Blättern, innerer Knoten enthalten Werte erneut
  Vorteil: innere Knoten speichern nur kurzen Schlüssel, nicht auch noch Daten(-zeiger)
  Nachteil: Findet Werte erst im Blatt
  Alternativer Name: B*-Baum
- Alternative Bedeutung B*-Baum: B-Baum mit Füllgrad min. $\frac{2}{3}$ pro Knoten $\neq$ Wurzel

Einfügen

Idee

- Einfügen erfolgt immer in einem Blatt
- Wenn Blatt weniger als $2t - 1$ Werte hat, dann einfügen und fertig
- Wenn nicht:

Splitten

- Wenn Blatt bereits $2t - 1$ Werte, dann teile es in zwei Blätter mit je $t - 1$ Werten, füge mittleren Wert im Elternknoten ein
- Wenn dadurch Elternknoten mehr als $2t - 1$ Werte hat, rekursiv nach oben
- Splitten an der Wurzel: Neue Wurzel wird erzeugt, Höhe des Baumes wächst um 1
  B-Baum-Einfügen splittet beim Suchen und läuft nur einmal hinab, sonst werden teure Disk-Operationen zweimal ausgeführt, einmal beim ab-, einmal beim aufsteigen.

Informeller Algorithmus

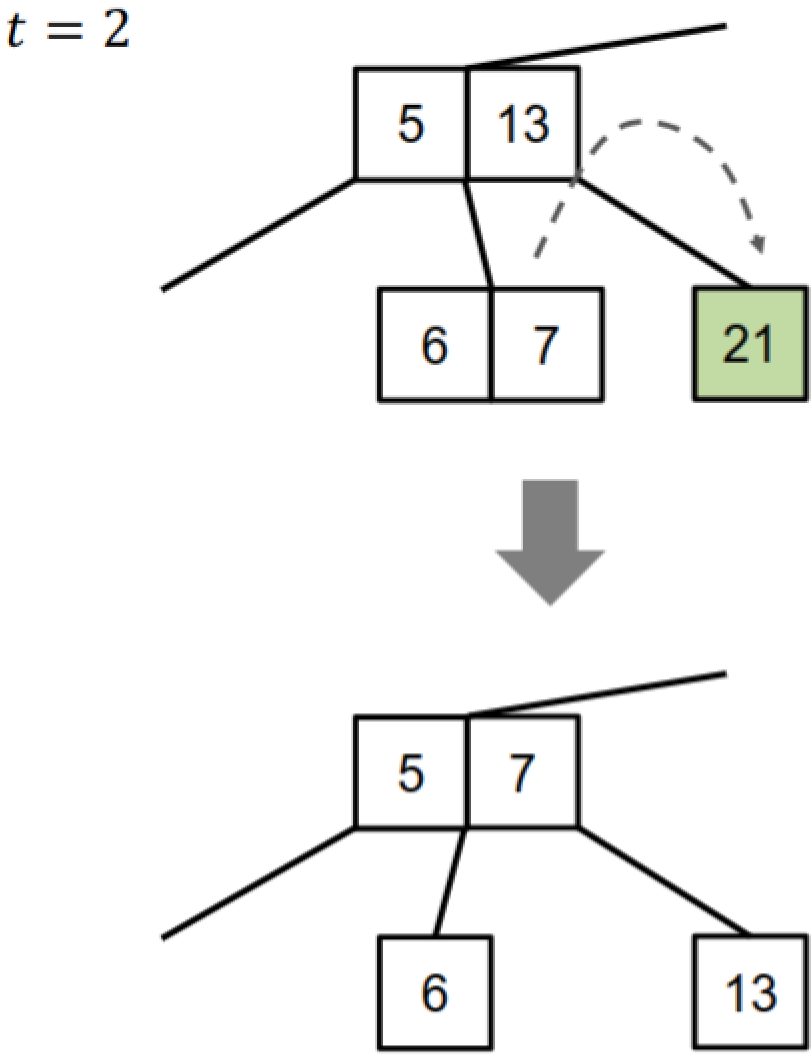
```
insert(T,z)
    Wenn Wurzel schon 2t-1 Werte, dann splitte Wurzel
    Suche rekursiv Einfügeposition:
        Wenn zu besuchendes Kind 2t-1 Werte, splitte es erst
    Füge z in Blatt ein
```

Laufzeit $O(t \cdot h) = O(\log_t n)$
Schleifeninvariante:
Bei der Suche hat der aktuelle Knoten immer weniger als $2t-1$ Werte, da sonst vorher gesplitted.
Eventuelles Splitten ist also problemlos möglich.
Auch das Blatt hat am Ende weniger als $2t-1$ Werte.

Löschen

Löschen im Blatt

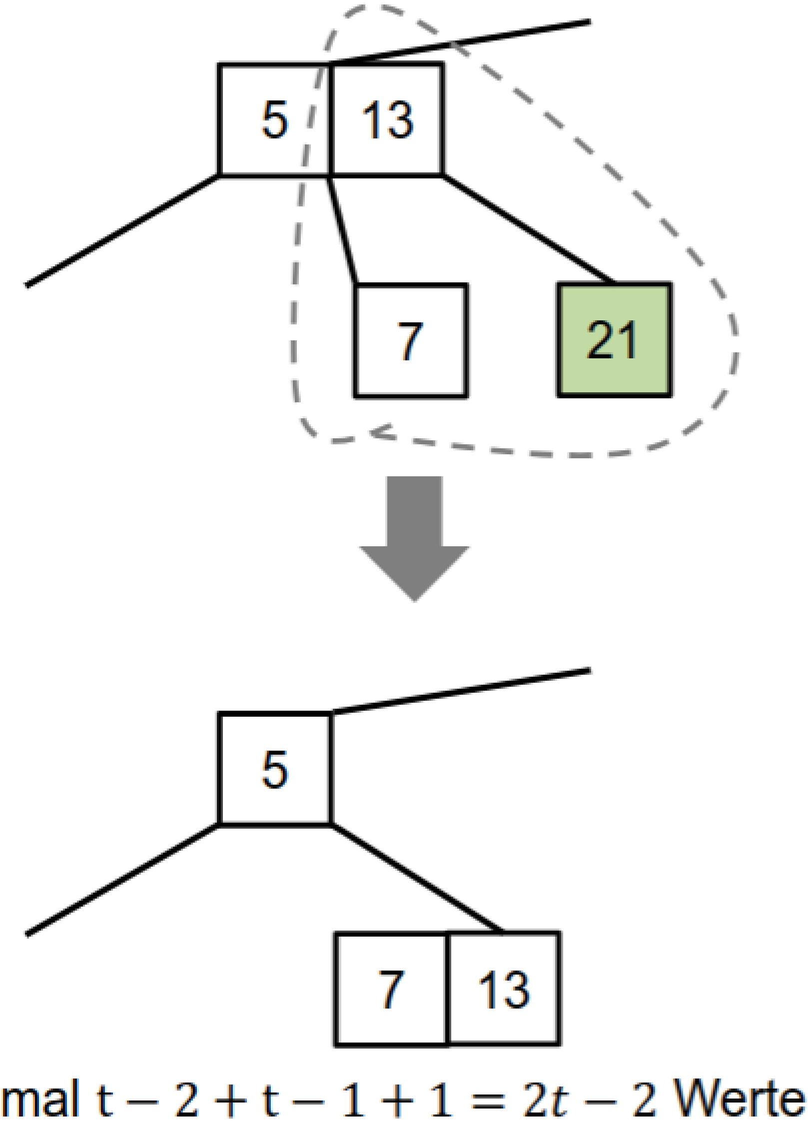
- Wenn Blatt noch mehr als $t-1$ Werte hat, dann einfach entfernen
- Wenn $t-1$ Werte im Blatt mit zu löschendem Wert sind, linker oder rechter Geschwisterknoten hat mind. t Werte, dann rotiere Werte von Geschwisterknoten und Elternknoten:



- Wenn $t-1$ Werte im Blatt mit zu löschendem Wert sind, linker oder rechter Geschwisterknoten haben auch $t-1$ Werte, dann verschmelze einen Geschwisterknoten mit Wert aus Elternknoten, dieser hat nun eventuell zu wenig

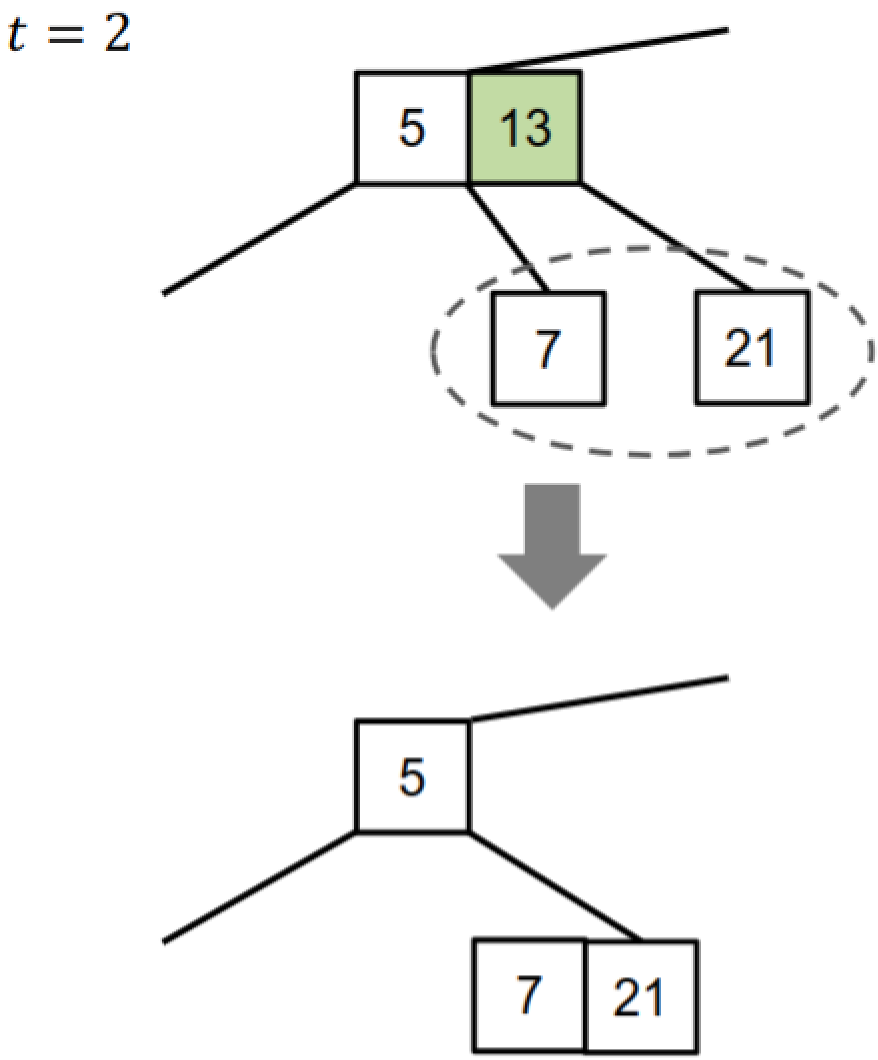
Werte:

$t = 2$



Löschen im inneren Knoten

- Verschieben:
  Wenn sich mehr als $t-1$ Werte in einem der beiden Kindknoten befinden, dann größten Wert (vom linken Kind) bzw. kleinsten Wert (vom rechten Kind) nach oben kopieren
- Verschmelzen:
  Wenn sich jeweils $t-1$ Werte in beiden Kindknoten befinden, dann Kindknoten verschmelzen, eventuell hat Elternknoten nun zu wenig Werte:



B-Baum-Löschen läuft auch nur einmal hinab, stelle dazu sicher, dass zu besuchendes Kind mindestens t Werte hat.

Allgemeines Verschmelzen ohne Löschen

Zu besuchendes Kind, rechter, linker Geschwisterknoten (sofern existent) haben nur $t-1$ Werte.
Dann ist Verschmelzen ohne weitere Änderungen möglich, wenn der Elternknoten vorher mindestens t Werte hat.

Allgemeines Rotieren/Verschieben ohne Löschen

Zu besuchendes Kind hat nur $t-1$ Werte, aber ein Geschwisterknoten hat mehr als $t-1$ Werte, dann kann man dies ohne Änderungen oberhalb tun

Informeller Algorithmus

```
delete(T,k)
        Wenn Wurzel nur 1 Wert und beide Kinder t-1 Werte haben, verschmelze
Wurzel und Kinder (reduziert Höhe um 1)
        Suche rekursiv Löschposition:
                Wenn zu besuchendes Kind nur t-1 Werte hat, verschmelze es oder
```

```
rotiere/verschiebe
        Entferne Wert k in inneren Knoten/Blatt
```

Laufzeit $O(t \cdot h) = O(\log_t n)$
Schleifeninvariante:
Aktueller Knoten hat zu diesem Zeitpunkt mindestens t Werte, sonst wäre er vorher verschmolzen worden oder es wäre rotiert worden.
Beim Verschmelzen/Verschieben des Kindes kann die Anzahl der Werte im aktuellen Knoten nicht unter $t-1$ fallen.
Entfernen aus Blatt problemlos möglich, da mindestens t Werte vorhanden.
Entfernen im inneren Knoten durch Verschieben oder Verschmelzen.

Worst-Case-Laufzeiten

- Einfügen: $\Theta(\log_t n)$
- Löschen: $\Theta(\log_t n)$
- Suchen: $\Theta(\log_t n)$
- O-Notation versteckt konstanten Faktor t für Suche innerhalb eine Knoten: $t \cdot \log_t n = t \cdot \frac{\log_2 n}{\log_2 t}$ ist in der Regel größer als $\log_2 n$, also nur vorteilhaft, wenn Daten blockweise eingelesen werden.